COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME QUATRIÈME.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DU CORPS DE L'ARTILLERIE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Élèves & des Aspirans du Corps de l'Artillerie, & des Gardes du Pavillon & de la Marine, Censeur de Livres.

TOME QUATRIÈME,

CONCERNANT l'application des Principes généraux de la MÉCANIQUE, à différens cas de MOUVEMENT & d'ÉQUILIBRE.

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.

A PARIS,

Chez RICHARD, CAILLE & RAVIER, Libraires, rue Haute-Feuille, N°. 11, au coin de la rue Serpente.

AN VII.

APPLICATIONS

DES PRINCIPES GÉNÉRAUX

DE LA

MÉCANIQUE,

A DIFFÉRENS CAS

DE MOUVEMENT ET D'ÉQUILIBRE.

Du choc direct des Corps.

350. IL s'agit actuellement de déterminer de quelle manière le mouvement d'un corps passe, en tout ou en partie, à un autre corps, soit immédiatement, soit à l'aide des machines.

Nous débuterons, dans cette recherche, par considérer l'action immédiate d'un corps en mouvement, ſur un autre corps en repos ou en mouvement ; & nous ferons d'abord abſtraction de la peſanteur des corps, de la réſiſtance de l'air, des frottemens, &c.

Nous ſuppoſerons que les corps dont nous allons conſidérer le choc, agiſſent les uns ſur les autres ſuivant une même ligne droite paſſant par leurs centres de gravité, & que cette ligne droite eſt perpendiculaire au plan qui toucheroit leur ſurface dans le point où ils ſe rencontreront.

Nous diſtinguerons deux ſortes de corps ; les uns que nous appellerons *corps durs*, ſeront ſuppoſés tels qu'aucune force ne peut changer leur figure : les autres, que nous appellerons *corps élaſtiques*, ſeront ſuppoſés pouvoir changer de figure, c'eſt-à-dire, être *compreſſibles*, mais doués en même temps de la propriété de reprendre cette figure, dès que la compreſſion ceſſera.

Quoiqu'il n'y ait point, dans la nature, de corps d'une maſſe ſenſible, qui ſoit parfaitement dans l'une ou dans l'autre de ces deux claſſes, ce n'eſt cependant qu'en partant de cette ſuppoſition, qu'on peut parvenir à déterminer l'action des corps tels que la nature nous les offre.

Du choc direct des Corps durs.

15

351. Deux corps durs qui viennent à ſe rencontrer,

ou dont l'un vient à rencontrer l'autre supposé en repos, se communiquent ou se font perdre une partie de leur mouvement. Mais de quelque manière que les choses se passent, on peut toujours (287) à l'instant du choc, se représenter chaque corps, comme animé de deux vîtesses, dont l'une subsistera après le choc, & dont l'autre sera détruite.

Supposons donc d'abord que les deux corps sont mus d'un même sens. Il est clair que celui qui va le plus vîte, perdra de sa vîtesse, & qu'au contraire l'autre en gagnera, par le choc.

Soit M la masse du choquant, & V sa vîtesse avant le choc; m la masse du choqué (qui peut être plus petite ou plus grande que M), & U sa vîtesse avant le choc. Concevons que la vîtesse V se change en u, par le choc; M aura donc perdu la vîtesse $V - u$. A l'instant du choc, au lieu de le considérer comme ayant la vîtesse V, je le considérerai comme ayant la vîtesse u & la vîtesse $V - u$.

Si nous supposons pareillement que U devienne v, par le choc; m aura gagné $v - U$; je puis donc, à l'instant du choc, le considérer comme ayant la vîtesse v dans le sens du mouvement actuel, & la vîtesse $v - U$, en sens contraire, puisque dans cette supposition il n'a réellement que la vîtesse U.

Puis donc que de ces quatre vîtesses, il ne doit, par la ſuppoſition, reſter que les deux vîteſſes u & v; il faut donc que les deux autres $V-u$, & $v-U$ ſoient détruites dans le choc; or comme elles ſont directement oppoſées, il faut (186) que les quantités de mouvement que les corps auroient en vertu de ces vîteſſes, ſoient égales. On a donc $M(V-u)=m(v-U)$.

Obſervons maintenant que, pour que u & v ſoient, comme nous le ſuppoſons, les vîteſſes qu'auront, après le choc, les deux corps M & m, il faut qu'elles ſoient telles, que le choquant n'ait plus d'action ſur le choqué; c'eſt-à-dire, qu'après le choc les deux corps doivent aller de compagnie; on a donc $v=u$; donc enfin $M(V-u)=m(u-U)$; ou $MV-Mu=mu-mU$, d'où l'on tire $u=\frac{MV+mU}{M+m}$. C'eſt-à-dire, que *lorſque les corps vont d'un même ſens, pour avoir la vîteſſe après le choc, il faut prendre la ſomme des quantités de mouvement que les corps avoient avant le choc, & la diviſer par la ſomme des maſſes.*

Par exemple, ſi M eſt de 5 onces; m de 7 onces; V de 8 pieds par ſeconde, U de 4 pieds par ſeconde; on aura $u=\frac{5\times 8+7\times 4}{5+7}=\frac{40+28}{12}=\frac{68}{12}=5\frac{2}{3}$; la vîteſſe après le choc, ſera donc de cinq pieds & $\frac{2}{3}$, par ſeconde.

352. Si l'un des deux corps, ſi m, par exemple,

étoit en repos avant le choc, on ſuppoſeroit $U = 0$; ce qui réduit la vîteſſe après le choc, à $u = \frac{MV}{M+m}$; c'eſt-à-dire, qu'il faut diviſer la quantité de mouvement qu'avoit le choquant, par la ſomme des maſſes.

Au reſte, ſi ſans déduire ce cas, du cas général, on veut le trouver directement; on y parviendra par le même principe. On conſidérera le choqué comme étant animé avant le choc, d'une vîteſſe u égale & de même ſens que celle qu'il doit avoir après le choc, & d'une vîteſſe $-u$, c'eſt-à-dire, d'une vîteſſe égale & en ſens contraire. Ainſi puiſqu'il ne doit conſerver que la première, il faudra qu'en vertu de la ſeconde, il faſſe équilibre au corps M animé de la vîteſſe $V-u$ qu'il doit perdre. Il faudra donc que $M(V-u) = mu$, d'où l'on tire $u = \frac{MV}{M+m}$; ainſi que nous l'avions conclu de la formule générale.

353. Si les corps vont dans des ſens oppoſés, pour connoître la vîteſſe après le choc, il n'y a qu'à ſuppoſer dans la première formule $u = \frac{MV+mU}{M+m}$, que U eſt négative; ce qui donne $u = \frac{MV-mU}{M+m}$; c'eſt-à-dire, que *lorſque les corps vont en ſens oppoſés, pour avoir la vîteſſe après le choc, il faut diviſer la différence des quantités de mouvement qui avoient lieu avant le choc, par la ſomme des maſſes; & cette vîteſſe aura lieu dans*

le ſens de celui qui a la plus grande quantité de mouvement.

On peut auſſi trouver directement ce réſultat, en employant encore le même principe que ci-deſſus.

Ainſi, les loix du choc direct des corps durs, ſe réduiſent pour tous les cas, à cette ſeule règle; *la vîteſſe après le choc, eſt égale à la ſomme ou à la différence des quantités de mouvement avant le choc (ſelon que les corps vont d'un même, ou de différens ſens), diviſée par la ſomme des maſſes.*

Réflexions ſur la force d'inertie.

354. Nous avons ſuppoſé, dans ce que nous venons de dire, qu'en faiſant abſtraction de la peſanteur, de la réſiſtance de l'air & de tout autre obſtacle, l'un des deux corps oppoſoit de la réſiſtance à l'autre, & lui faiſoit perdre une partie de ſa vîteſſe. Mais comment un corps ſans peſanteur & qui n'eſt retenu par aucun obſtacle, peut-il oppoſer de la réſiſtance? Cela ne ſemble-t-il pas ſuppoſer qu'il ſeroit capable de ſe donner du mouvement, puiſqu'il eſt capable d'en ôter à un autre corps qui agit ſur lui?

Non: la réſiſtance d'un corps libre ne ſuppoſe pas eſſentiellement un mouvement actuel dans ce corps.

Par exemple, ſi le corps *A* eſt tiré en même temps par deux forces égales & contraires repréſentées par *AB*, *AC* (*fig. 1*), il eſt évident qu'il n'aura aucun mouvement. Mais il n'eſt pas moins évident que ſi une force égale *CA* vient à agir ſur lui dans la direction *CB*, cette force ſera détruite par l'effort *AC*, & alors le corps obéira en vertu de la force *AB* égale à celle qu'on vient d'appliquer.

Nous ne prétendons pas décider ſi la réſiſtance que les corps oppoſent au mouvement, vient ou ne vient pas d'une ſemblable cauſe. Quoi qu'il en ſoit, cette réſiſtance à laquelle on a donné le nom de *force d'inertie*, diffère de la réſiſtance qu'oppoſent les forces actives, telles que ſont les forces des corps qui ſe choquent en ſens oppoſés, en ce que celles-ci abſorbent une partie du mouvement; au lieu que la force d'inertie détruit, à la vérité, du mouvement dans le choquant, mais ce mouvement paſſe entièrement dans le choqué. C'eſt ce que démontre évidemment l'équation $M(V-u)=m(u-U)$ que nous avons eue ci-deſſus pour déterminer le mouvement, après le choc, pour deux corps qui vont d'un même ſens; car $V-u$ eſt la vîteſſe perdue par le choquant, & par conſéquent $M(V-u)$ eſt la quantité de mouvement qu'il perd par le choc; nous avons pareillement entendu par $u-U$ la vîteſſe que le choquant a gagné, enſorte que $m(u - U)$ eſt la quantité de mouvement qu'il a gagné. Or nous avons démontré que ces deux quantités devoient néceſſairement être égales.

355. La force d'inertie eſt donc, à proprement parler, le moyen de communication de mouvement, d'un corps à un autre. Tout corps réſiſte au mouvement, & c'eſt en réſiſtant qu'il en reçoit; & il en reçoit préciſément autant qu'il en détruit dans celui qui agit ſur lui.

356. On voit donc par-là, que tout obſtacle étant ſuppoſé anéanti, quelque petite que l'on ſuppoſe la maſſe choquante, & quelque grande que ſoit la maſſe choquée, il y aura toujours du mouvement.

En effet dans le cas, par exemple, où l'un des deux corps eſt en repos, la vîteſſe qui (352) a pour expreſſion $u = \frac{MV}{M + m}$, ne peut jamais devenir zéro, quelques valeurs qu'on donne à M, m & V; il n'y a que dans le cas où m ſeroit infinie, ou V infiniment petite. Ainſi, ſi dans la nature nous voyons les corps perdre le mouvement qu'ils ont reçu, c'eſt parce qu'ils le communiquent aux parties matérielles des corps, de l'air, &c. qui les environnent; & comme la formule $u = \frac{MV}{M + m}$ fait voir que plus le corps choqué m aura de maſſe, plus (toutes choſes d'ailleurs égales) la vîteſſe reſtante u ſera petite, en regardant m comme la ſomme des parties matérielles avec leſquelles M

partage ſon mouvement, on voit que la vîteſſe u peut être bientôt réduite à échapper aux ſens, quand même il ne ſe rencontreroit pas d'obſtacles immobiles, tels que le frottement &c. pour la détruire.

357. La force d'inertie, étant une force propre à la matière, exiſte également dans chaque partie égale de la matière ; & par conſéquent, dans une maſſe déterminée, elle ſe fait ſentir proportionnellement à la quantité de matière, ou à la maſſe ; & comme la maſſe eſt proportionnelle au poids, la force d'inertie peut être regardée comme proportionnelle au poids. Mais il faut bien ſe donner de garde d'en conclure, que la force d'inertie vienne de la peſanteur : elle en eſt tout-à-fait indépendante : en effet, ſi pendant qu'un corps tombe librement, on le ſuit de la main, avec une vîteſſe plus grande que celle avec laquelle il tombe, on éprouvera en le rencontrant, un choc, une réſiſtance, qu'on ne peut évidemment attribuer à la peſanteur, qui n'agit que de haut en bas. Encore moins doit-on l'attribuer à la réſiſtance de l'air ; car outre qu'il reſteroit à ſavoir pourquoi l'air réſiſte, la réſiſtance de l'air ne pouvant agir qu'à raiſon de la ſurface, ne peut être proportionnelle à la quantité de matière.

La force d'inertie eſt donc une force particulière à la matière, par laquelle tout corps réſiſte à ſon changement d'état. *La force d'inertie est proportionnelle à la quantité de matière & se fait sentir dans toutes les directions selon lesquelles on tend à mouvoir un corps.*

Quelques applications du choc des corps durs : conséquences qui en résultent par rapport à la percussion.

358. Les règles que nous venons de donner sur le choc des corps durs, ont lieu, soit que les corps se choquent immédiatement, comme nous l'avons supposé ; soit qu'ils se poussent à l'aide d'une verge inflexible & sans masse, qui joindroit leurs centres de gravité, soit enfin qu'ils se tirent par un fil, pourvu que l'action se transmette immédiatement au centre de gravité de chacun.

Par exemple, si deux corps M & m (*fig.* 2) se tirent par un fil, passant par-dessus une poulie P (*), & que l'on veuille déterminer le mouvement qu'ils prendront en vertu de leur pesanteur. On observera (171) que la pesanteur tend à imprimer à chacun de ces deux corps, une vitesse égale, à chaque instant. Or comme l'un ne peut se mouvoir sans entraîner l'autre, les deux corps se trouvent, à chaque nouvelle action de la pesanteur, dans le même cas que s'ils se tiroient en sens directement opposés avec

(*) Nous supposerons, ici, que l'action se transmet à l'aide d'une poulie, de la même manière que si les deux parties du fil étoient étendues en ligne droite : nous démontrerons par la suite, cette vérité, qui est d'ailleurs facile à appercevoir.

des vîteſſes égales ; donc (353) pour avoir la vîteſſe qui en réſultera, il faut, en nommant g la vîteſſe que la peſanteur donne à chaque inſtant, à un corps libre, il faut prendre la différence $Mg - mg$ des quantités de mouvement, & la diviſer par la ſomme $M + m$ des maſſes ; on aura donc $\frac{Mg - mg}{M + m}$ ou $\frac{M - m}{M + m} g$ pour la vîteſſe réelle que chaque nouvelle action g de la peſanteur ajoute, à chaque inſtant, dans le corps M. On voit donc, puiſque M, m & g ſont des quantités conſtantes, que le corps M eſt mu d'un mouvement uniformément accéléré, & que la force qui l'accélère réellement, eſt à la peſanteur libre, $:: \frac{M - m}{M + m} g : g$ ou $:: M - m : M + m$. Donc ſi on nomme p la vîteſſe que la peſanteur fait naître dans un mobile libre, en une ſeconde de temps, on aura celle qu'elle fait naître en pareil temps dans le mobile M gêné par l'action de m, par cette proportion $M + m : M - m :: p : \frac{M - m}{M + m} p$; donc ſi on nomme u la vîteſſe de M au bout d'un nombre t de ſecondes, on aura (173), $u = \frac{M - m}{M + m} p t$, & l'eſpace qu'il aura décrit ſera $e = \frac{M - m}{M + m} \frac{p t^2}{2}$; en mettant (174) 30,2 pieds, pour p.

359. Si, au premier inſtant, le corps m que je ſuppoſe avoir la moindre maſſe, recevoit une impulſion ou une vîteſſe V ; c'eſt-à-dire, s'il étoit frappé de manière qu'étant libre & ſans peſanteur, il pût parcourir en une ſeconde, un nombre de pieds marqué par V ; alors il partageroit cette action avec le corps M qu'il entraîneroit pendant un certain temps. Pour ſavoir comment ſe feroit ce partage, il faut remarquer qu'au premier inſtant, l'action de la peſanteur étant infiniment petite, le corps m animé de

la vîteſſe V, agit ſur le corps M, comme ſi celui-ci étoit en repos. Il faut donc pour avoir la vîteſſe reſtante après l'action (352), diviſer la quantité de mouvement mV, par la ſomme des maſſes; ce qui donnera $\frac{mV}{M+m}$, pour la vîteſſe avec laquelle m entraîneroit M, ſi la peſanteur n'agiſſoit pas dans les inſtans ſuivans. Mais comme nous venons de voir qu'elle agiſſoit de manière à donner au corps M, en ſens contraire, la vîteſſe $\frac{M-m}{M+m}pt$, dans le temps t, il s'enſuit donc qu'au bout du temps t, le corps m n'aura plus que la vîteſſe $\frac{mV}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$. Par où l'on voit que quelque petit que ſoit m, quelque petite que ſoit la vîteſſe V, & quelque conſidérable que ſoit M, m entraîneroit toujours M pendant un certain temps, après quoi le corps M reprendra le deſſus, & entraînera m à ſon tour.

En effet, quelle que ſoit la quantité de mouvement mV qu'on imprime à m, tant qu'elle aura une valeur finie, il eſt clair qu'il faudra toujours, pour la conſumer, que la peſanteur agiſſe pendant un certain temps, puiſqu'elle n'agit que par degrés infiniment petits, à chaque inſtant.

Si l'on veut ſavoir, au bout de quel temps m ceſſera de monter, voici comment on s'y prendra. Soit T le temps qu'il faudroit à un corps peſant, tombant librement, pour acquérir la vîteſſe V; ſelon ce qui a été enſeigné (173), on aura $V = pT$; donc la vîteſſe de m ſe change en $\frac{mpT}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$, laquelle étant égalée à zéro, donne $mpT = (M-m)pt$, d'où l'on tire $t = \frac{mT}{M-m}$.

Par exemple, ſi la vîteſſe V qu'on a imprimée, eſt celle qu'un corps peſant acquerroit dans une ſeconde de temps;

on a $T = 1''$: supposons $M = 100$ livres, $m = 1$ livre. On aura $t = \frac{1''}{99}$; c'est-à-dire, que le corps m n'entraînera M, que pendant un 99^e de seconde; mais enfin il l'entraînera.

On voit donc qu'il n'y a pas de force finie, si petite qu'elle soit, qui ne puisse vaincre le poids d'un corps; & qu'il n'est jamais possible de mettre un corps qui est actuellement en mouvement, en équilibre avec le poids d'un autre corps, c'est-à-dire, avec un corps qui n'auroit que la simple tendance de la pesanteur. Le premier entraînera d'abord le second, & en sera ensuite entraîné : il y aura, à la vérité, un instant de repos; mais ce sera celui où le premier aura perdu toute la vîtesse imprimée, & ce ne sera qu'un instant.

360. Ainsi la force des corps en mouvement, ne peut être mesurée par des poids, c'est-à-dire, par l'action seule des poids destitués de mouvement local; mais seulement par d'autres forces de corps en mouvement; par exemple, par celles des corps graves tombés d'une certaine hauteur.

Ainsi, pour avoir une idée de la force d'un corps de 3 livres qui seroit mu avec une vîtesse de 60 pieds par seconde. Je chercherois, par ce qui a été dit (176) de quelle hauteur un corps pesant doit tomber pour acquérir une vîtesse de 60 pieds par seconde : je trouverois que c'est 59 pieds & demi à peu près. J'en conclurois qu'un corps de trois livres, animé d'une vîtesse de 60 pieds par seconde, doit frapper comme s'il étoit tombé de 59 pieds & demi, de haut.

361. La force que les corps en mouvement ſont capables d'exercer, s'appelle la *percuſſion.*

La force de percuſſion ne peut donc, en aucune manière, être comparée à la ſimple preſſion, c'eſt-à-dire, à l'effort que peut faire, par ſon poids, une maſſe ſans mouvement local. Un coup de marteau, même très-foible, fera entrer un clou dans un corps, lorſqu'un poids aſſez conſidérable n'y fera rien ; il en ſera de même d'un corps d'une maſſe médiocre; qui par ſa chute aura acquis un peu de vîteſſe.

La raiſon de cette différence eſt que celui-ci emploie, en un ſeul inſtant, tous les degrés de vîteſſe qu'il a acquis en tombant. Au lieu que le poids qui ne fait que preſſer, ne les reçoit que ſucceſſivement, & les partage en même temps, au clou & à la maſſe environnante; & comme chacun de ces degrés eſt infiniment petit, il eſt auſſi-tôt abſorbé qu'acquis.

362. Après ce que nous venons de dire, il eſt facile de voir comment on doit s'y prendre, pour déterminer le mouvement d'un corps M (*fig. 3*) qui par ſon poids, entraîneroit le corps M' placé ſur un plan horizontal ſans frottement. L'action de la peſanteur ſur M' étant détruite par le plan horizontal, celle qu'elle exerce ſur M, ſe partage entre M & M', comme dans le cas où un corps agit ſur un autre

en repos. Ainſi, en raiſonnant comme ci-deſſus, & nommant g la vîteſſe que la peſanteur donne dans un inſtant à un corps libre, on aura $\frac{gM}{M+m}$ pour la vîteſſe avec laquelle M ſera réellement accéléré. Sa vîteſſe au bout d'une ſeconde de temps, ſera donc $\frac{pM}{M+m}$, p étant celle que la peſanteur fait naître, en une ſeconde de temps, dans un corps libre: donc au bout d'un temps quelconque t, ſa vîteſſe ſera $\frac{pMt}{M+m}$ (173), & l'eſpace qu'il aura décrit, ſera $\frac{\frac{1}{2}pMt^2}{M+m}$ (174).

363. Mais ſi deux corps comme A & B (*fig.* 4) agiſſoient l'un ſur l'autre, à l'aide d'une verge ou d'un fil ou corde matérielle, c'eſt-à-dire, dont la maſſe ne fût pas très-petite par rapport à la leur; alors cette verge ou cette corde partageroit leur action. Par exemple, ſi B recevant ſubitement vers C une vîteſſe connue, étoit obligé d'entraîner le corps A à l'aide du fil matériel AB; il faudroit, dans ce cas, pour avoir la vîteſſe après l'action, diviſer la quantité de mouvement de B, par la ſomme des deux maſſes A & B, plus la maſſe du fil AB.

364. Si les deux corps M & m (*fig.* 2) s'entraînoient à l'aide d'une corde uniformément peſante: alors la force accélératrice de M, ne ſeroit plus une force conſtante, comme elle l'étoit dans le cas examiné (358). Voici comment on la détermineroit, ainſi que le mouvement de M. Soit c la longueur totale de la corde; P ſa peſanteur ſpécifique, ou ce que pèſe un pied de longueur de cette corde. Soit x la longueur de la partie PM; on aura $Pm = c - x$. La maſſe de PM ſera donc Px; & celle de Pm,

ſera $P(c-x)$. Ainſi nous avons d'un côté une maſſe $=$ $M+Px$; & de l'autre, une maſſe $=m+P(c-x)$, à chacune deſquelles la peſanteur communique pendant l'inſtant actuel, la vîteſſe infiniment petite h. Donc pour ſavoir quelle vîteſſe ils prendront en vertu de leur action mutuelle, il faut diviſer la différence des quantités de mouvement, par la ſomme des maſſes. On aura donc pour l'accélération de M, la quantité $\frac{Mh+Phx-mh-P(c-x)h}{M+Px+m+P(c-x)}$, qui ſe réduit à $\frac{Mh-mh+2Phx-Pch}{M+m+Pc}$; ou bien, en faiſant $M-m$ $-Pc=A$, & $M+m+Pc=B$, ſe réduit à $\frac{Ah+2Phx}{B}$. Donc cette vîteſſe eſt à celle h de la peſanteur, comme $\frac{A+2Px}{B}$ eſt à 1; donc ſi on nomme p la vîteſſe que la peſanteur imprime à un corps libre, dans une ſeconde, $\frac{A+2Px}{B}$, p ſera celle que M acquerroit dans une ſeconde, ſi pendant la durée de cette ſeconde, ſa force accélératrice étoit conſtante. C'eſt donc (181) la quantité qu'il faut mettre pour p dans la formule $pdt=d\left(\frac{de}{dt}\right)$ que nous avons donnée (184) pour les mouvemens variés; & on mettra en même temps dx au lieu de de, parce que de quelque endroit que M ſoit parti d'abord, l'eſpace qu'il décrit à chaque inſtant, eſt égale à l'augmentation dx de la longueur de PM. On aura donc $\frac{A+2Px}{B}\,pdt=d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Pour intégrer cette équation, je diviſe par dt, & je multiplie par dx; j'ai $\frac{Adx+2Pxdx}{B}\,p=\frac{dx}{dt}\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, dont l'intégrale eſt $\frac{Ax+Px^2}{B}\,p+C=\frac{1}{2}\,\frac{dx^2}{dt^2}$. Pour déterminer

la

la constante C, je remarque que $\frac{dx}{dt}$ est (179) la vîtesse. Donc si on suppose qu'au commencement du mouvement, M étoit en O, PO étant $= b$; & qu'il n'ait reçu aucune impulsion, il faut que la constante C soit telle, que la vîtesse soit zéro lorsque $x = b$; on a donc $\frac{Ab + Pb^2}{B}p + C = 0$, & par conséquent $C = \frac{-Ab - Pb^2}{B}p$, donc $\frac{Ax + Px^2 - Ab - Pb^2}{B}p = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt^2}$. Nommons z l'espace parcouru OM; nous aurons $z = x - b$, ou $x = b + z$, & $dx = dz$, ce qui changera notre équation en. . . . $\frac{Az + 2Pbz + Pz^2}{B}p = \frac{\frac{1}{2}dz^2}{dt^2}$, d'où l'on tire. . . . . $dt = \frac{dz\sqrt{\frac{B}{2p}}}{\sqrt{[(A + 2Pb)z + Pzz]}}$, équation que l'on intégrera facilement, en la rendant rationnelle, par ce qui a été dit (118), & l'on aura le rapport de l'espace au temps, qui est supposé, ici, compté en secondes.

Quant à la vîtesse, puisqu'elle est exprimée par $\frac{dz}{dt}$; en la nommant u, on aura $u = \frac{\sqrt{[(A+2Pb)z+Pzz]}}{\sqrt{\frac{B}{2p}}}$, u étant ce que le corps est capable, à chaque instant, de décrire en une seconde, en vertu de son mouvement actuel continué uniformément.

Remarque sur les forces vives.

365. On a donné le nom de *forces vives*, aux forces des corps en mouvement; & on a appelé *forces mortes*, celles qui, comme une simple pression,

ne ſuppoſent point un mouvement actuel dans la cauſe qui agit.

Il y a eu, pendant quelque temps, un partage de ſentimens entre les Mathématiciens, ſur la meſure des forces vives, ou des forces des corps en mouvement. Quelques-uns ont prétendu que ces forces ne devoient pas ſe meſurer par la maſſe multipliée par la vîteſſe, ainſi que nous avons dit (157) qu'il falloit le faire; mais qu'il falloit les meſurer par le produit de la maſſe par le quarré de la vîteſſe. Comme on pourroit craindre que cette différence dans la meſure des forces, n'intéreſsât la mécanique, nous croyons devoir en dire un mot.

Il eſt abſolument indifférent de meſurer la force des corps en mouvement, ou par la maſſe multipliée par la vîteſſe ſimple, ou par la maſſe multipliée par le quarré de la vîteſſe; pourvu qu'on n'attache pas la même idée au mot *force*, dans chaque cas.

Quand on prend pour meſure de la force, le produit de la maſſe par le quarré de la vîteſſe; alors on entend par le mot *force*, le *nombre* des obſtacles qu'un corps en mouvement, peut vaincre; & il eſt certain, qu'à maſſe égale, le nombre des obſtacles qu'un corps en mouvement peut vaincre, eſt proportionnel au quarré de la vîteſſe. Par exemple, ſi le corps *A* (*fig. 5*) n'a précisément que la vîtesse nécessaire pour fermer un ressort tel que *ACB*; il ne faudra à un corps égal *M*, qu'une vîtesse double pour fermer quatre ressorts égaux à *ACB*. En effet, si on conçoit que les quatre ressorts soient ouverts de la même quantité angulaire chacun, que l'est le seul ressort *BCA*, il est facile de voir que la force qu'il faut opposer en *M*, pour empêcher une plus grande extension de ces ressorts, est la même que celle qu'il faut opposer en *A*, pour empêcher le ressort *BCA* de s'ouvrir davantage. Car le ressort *HIM* n'oppose pas en *M*, plus de résistance qu'il ne le feroit, si le point *H* de la branche *HI*, au lieu de tenir à la branche *HG*, étoit appuyé contre un plan fixe *PQ*. Cela posé, il est donc facile de voir que la résistance que *M* éprouvera de plus que *A*, pour fermer les quatre ressorts de la même quantité angulaire que le sera *BCA* dans un instant, ne viendra que de ce qu'il éprouvera plus long-temps la même résistance que *A*; ayant quatre fois autant d'espace à parcourir avec une vîtesse qui n'est que double, il emploiera un temps double, pendant lequel il éprouvera, par conséquent, deux fois autant de résistance que *A* en aura éprouvé : il perdra donc un degré de vîtesse double pour parvenir à fermer les quatre ressorts, chacun de la même quantité angulaire que *BCA* l'aura été pendant un instant. Raisonnant de même pour les inſtans ſuivans, on verra de même que les réſiſtances que *A* & *M* éprouvent pour fermer leurs reſſorts reſpectifs d'une même quantité angulaire, ſont toujours dans le rapport de 1 à 2; donc les réſiſtances totales ſont auſſi comme 1 à 2; donc la vîteſſe double ſuffira pour fermer les quatre reſſorts.

On voit donc que le nombre des obſtacles que peuvent vaincre les corps en mouvement, croît comme les quarrés des vîteſſes. Mais, par le mot *force*, doit-on entendre le *nombre* des obſtacles? Ou bien n'eſt-il pas plus naturel d'entendre la *ſomme* des réſiſtances que ces obſtacles ont oppoſés; car, ce n'eſt pas ſeulement le nombre, mais encore la valeur de chaque obſtacle qui détruit le mouvement. Or dans ce cas, chaque réſiſtance inſtantanée étant évidemment proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle fait perdre (& en cela on a toujours été d'accord), la ſomme des réſiſtances ſera proportionnelle à la quantité de mouvement qui a été conſumée; donc ſi, par *force*, on entend la *ſomme* & non pas ſeulement le *nombre* des réſiſtances qu'un corps en mouvement peut vaincre, la force eſt proportionnelle à la quantité de mouvement. D'ailleurs, en partant de ce principe, on en déduit également que les nombres de réſiſtances vaincues ſont comme les quarrés des vîteſſes. La queſtion n'eſt donc, au fond, qu'une queſtion de mots, elle ſe réduit à convenir de ce qu'on entend par le mot *force*. Or ſur ce point, on eſt libre; pourvu qu'on emploie ce que l'on prend pour meſure de la force, conſéquemment à l'idée qu'on attache au mot force, on arrivera toujours aux mêmes réſultats. Ainſi nous continuerons de prendre pour meſure des forces, le produit de la maſſe par la vîteſſe; & par conſéquent nous entendons par la force d'un corps, la ſomme totale des réſiſtances néceſſaires pour épuiſer ſon mouvement.

16 *Du choc des Corps élaſtiques.*

366. Quoique les corps *élaſtiques* ou *à reſſort*, ſuivant l'idée que nous en avons donnée (350), doivent être compreſſibles, pour être élaſtiques; il ne faut pas croire néanmoins qu'ils doivent être d'autant plus compreſſibles qu'ils ſont plus élaſtiques. Une balle de laine n'eſt pas plus élaſtique qu'une bille d'ivoire qui cependant eſt beaucoup moins compreſſible.

Quoi qu'il en ſoit, la compreſſibilité paroît inſéparable de l'élaſticité. En vertu de la compreſſibilité, un corps change de figure lorſqu'on lui applique extérieurement une force: & en vertu de l'élaſticité, il tend à revenir à cette figure. Mais entre tous les corps élaſtiques, c'eſt-à-dire, qui devenus libres, tendent à reprendre leur figure, les uns la reprennent entièrement, les autres en partie ſeulement; ces derniers ſont dits *corps à reſſort imparfait.* Quant aux autres, ils peuvent revenir à leur figure primitive plus ou moins promptement, & par des degrés fort différens. Mais s'ils ſont tels qu'après s'être choqués, ils ſe rétabliſſent par les mêmes degrés par leſquels ils ſe ſont comprimés, on les appelle *corps à reſſort parfait.* Dans tout autre cas, on les appelle ſimplement *corps à reſſort.* Nous ne conſidérerons ici que les corps à reſſort parfait.

Obſervons à l'égard de ceux-ci, que puiſque dans le choc, il ſe fait une réſiſtance de la part de celui qui a le moins de vîteſſe, & que par conſéquent il y a compreſſion; non ſeulement le rétabliſſement de la figure ſuit cette compreſſion, mais ce rétabliſſement eſt lui-même ſuivi d'un nouveau changement de figure tout contraire au premier. A celui-ci, il en ſuccède un autre qui ramène à la figure qu'ils avoient lors de la compreſſion, & ainſi de ſuite. Enſorte que les parties de chaque corps, ont à l'égard de leur centre de gravité, un mouvement de vibration ou d'allée & de retour; parce que les parties tendent à revenir à leur première figure par un mouvement qui va en s'accélérant, & qui les fait paſſer au-delà. Ces changemens alternatifs de figure ſont ſenſibles dans pluſieurs corps élaſtiques lorſqu'on les frappe, principalement dans les corps ſonores.

Cependant, il ne faut pas imaginer que ces vibrations influent ſur la vîteſſe que prendront les corps élaſtiques après le choc. Elles ne peuvent influer ſur le mouvement des centres de gravité de ces corps, ainſi que nous l'avons vu (288), puiſque ces mouvemens s'exécutent dans chacun des deux corps indépendamment de l'autre. C'eſt une action des parties d'un même corps les unes ſur les autres.

Voici donc comment on doit enviſager le choc des corps parfaitement élaſtiques. Lorſque les deux corps *A* & *B* (*fig.* 4) viennent à ſe rencontrer en *C*, la réſiſtance que *B* oppoſe à *A*, fait qu'ils ſe compriment mutuellement juſqu'à ce que les deux centres & le point de contact aient tous une égale vîteſſe: juſques-là tout ſe paſſe comme dans le choc des corps durs, au changement de figure près, qui ne peut contribuer en rien à la quantité de mouvement perdue ou gagnée.

Le changement de figure ſe fait, de manière que chacun des deux corps s'applatit également de chaque côté, parce que les parties les plus éloignées du contact, s'avançant plus promptement dans l'un, &

moins promptement dans l'autre, jufqu'à ce que la compreffion foit finie, refoulent d'autant les parties intermédiaires. La compreffion une fois achevée, les parties de chaque corps, voifines du point de contact, s'appuient les unes contre les autres, pendant que le contact eft tranfporté; & alors tout le débandement du reffort s'exerce vers les côtés oppofés du point de contact; enforte que les centres font entraînés en fens oppofés, avec tout l'effort avec lequel la reftitution tend à fe faire.

On voit donc que le choqué perd alors une vîteffe égale à celle qu'il avoit perdue par la compreffion; & qu'au contraire le choquant en gagne une égale à celle qu'il avoit déjà gagnée pendant la compreffion. Et quoique les deux corps ne s'arrêtent pas à leur figure primitive, dès qu'une fois ils y font arrivés, néanmoins ils n'ont plus alors d'action l'un fur l'autre, parce que la force avec laquelle ils vont fe dilater, ira en diminuant, & par conféquent ils fe quittent à ce terme.

Cela étant, il s'enfuit évidemment que les circonftances du choc des corps parfaitement élaftiques, font toutes comprifes dans cette feule règle. . . .

367. *Cherchez la vîteffe commune qu'auroient les corps, après le choc, s'ils étoient fans reffort; alors, fi du double de cette vîteffe, vous ôtez la vîteffe que chacun*

avoit avant le choc, vous aurez les vîtesses de chacun, après le choc. Sur quoi il faut observer, que quand les corps vont en sens contraires avant le choc, on doit donner le signe — à la vîtesse de celui qui a la moindre quantité de mouvement; ensorte que dans l'application de cette règle, cette vîtesse doit être ajoutée.

En effet, si lorsque les deux corps vont du même sens, V est la vîtesse du choquant, & U celle du choqué; que u soit la vîtesse qu'ils auroient après le choc, considérés comme corps durs; alors $V - u$ est la vîtesse perdue par le choquant; puis donc que le ressort, en se débandant en sens contraire au mouvement, fait perdre autant de mouvement que la compression en avoit déjà fait perdre; il ne restera donc que la vîtesse $u - (V - u)$, c'est-à-dire, $u - V + u$, ou $2u - V$. A l'égard du choqué, $u - U$ est la vîtesse qu'il gagne par le choc; or nous venons de voir que par le débandement de son ressort, il en acquiert encore autant; il aura donc $u + u - U$, c'est-à-dire, $2u - U$. Ce cas comprend celui où l'un des deux corps auroit été en repos avant le choc.

Si les corps alloient en sens contraire, le raisonnement est encore le même pour celui des deux qui a la plus grande quantité de mouvement. Quant à l'autre ; dans le choc, comme corps dur, il perdroit ſa vîteſſe & en acquerroit une autre en ſens contraire. Soit u cette vîteſſe ; alors la vîteſſe avec laquelle ſon reſſort ſe rétablit, eſt $U + u$, laquelle étant jointe à u, qu'il auroit eu comme corps dur, donne $2u + U$.

368. Il eſt facile de déduire de-là, des formules pour le choc des corps élaſtiques, dans leſquelles il n'entre autre choſe que les maſſes & les vîteſſes avant le choc ; il ne faut pour cela que ſubſtituer dans $2u - V$ & $2u \mp U$ la valeur de u que donnent les règles établies (351 & *ſuiv.*). Mais comme ces formules ne donnent rien d'auſſi facile à retenir que la règle que nous venons d'énoncer, nous laiſſons cette ſubſtitution à faire, à ceux qui en ſeront curieux.

369. Obſervons que lorſqu'un des deux corps eſt en repos, la vîteſſe qu'il reçoit par le choc, eſt double de celle qu'il auroit eue s'il n'eût point été élaſtique. C'eſt une ſuite évidente de la règle générale.

370. Pour donner quelques exemples de ces règles, ſuppoſons d'abord que les deux corps ſont égaux, & que l'un des deux eſt en repos ; alors $\frac{MV}{M+m}$ qui (352) exprime la vîteſſe après le choc des corps conſidérés comme durs, ſe réduit à $\frac{MV}{2M}$, ou $\frac{1}{2}V$. Il faut donc (367) de deux fois $\frac{1}{2}V$ ou

de V, retrancher V pour avoir la vîtesse du choquant après le choc, laquelle sera par conséquent zéro.

Pour avoir la vîtesse du choqué, il faut de deux fois $\frac{1}{2}V$ retrancher la vîtesse zéro qu'il avoit avant le choc, ce qui donne V pour la vîtesse après le choc; c'est-à-dire, que le mouvement du choquant passe entièrement dans le choqué. D'où l'on peut conclure que si l'on avoit plusieurs corps élastiques égaux, placés sur une même ligne droite, & que l'on vînt à faire choquer l'un des extrêmes par un corps élastique égal à l'un d'entre eux, il n'y auroit que l'autre extrême qui se détacheroit. Que si l'on faisoit choquer en même temps, par deux corps élastiques pareils à ceux-là, il n'y auroit que ce dernier & l'avant-dernier qui se détacheroient; & ainsi de suite.

Supposons que les deux corps vont du même sens. L'un a 5 onces de masse, & une vîtesse de 6 pieds par seconde; l'autre a 7 onces de masse, & une vîtesse de 2 pieds par seconde. La vîtesse qu'ils auroient après le choc, comme corps durs (351), sera $\frac{44}{12}$ ou $3\frac{2}{3}$; si donc du double de cette quantité, c'est-à-dire, de $7\frac{1}{3}$, j'ôte les vîtesses 6 & 2 qui avoient lieu avant le choc, j'aurai $1\frac{1}{3}$, & $5\frac{1}{3}$ pour les vîtesses du choquant & du choqué, après le choc.

Si le choqué, au lieu d'avoir 7 onces de masse, comme dans cet exemple, en avoit 20; alors la vîtesse après le choc, comme corps durs, seroit $\frac{70}{25}$ ou $2\frac{4}{5}$. Or si du double $5\frac{3}{5}$, on retranche les vîtesses 6 & 2 qui avoient lieu avant le choc, on aura $5\frac{3}{5} - 6$ & $5\frac{3}{5} - 2$, ou $-\frac{2}{5}$ & $3\frac{3}{5}$, pour les vîtesses après le choc; où le signe — indique que le choquant rebroussera.

Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre, avec les mêmes maſſes & les mêmes vîteſſes que dans le ſecond exemple ; alors la vîteſſe après le choc, comme corps durs, ſeroit $\frac{30 - 14}{12}$ ou $1\frac{1}{3}$.

Si du double de cette quantité, on retranche la vîteſſe 6 que le choquant avoit avant le choc, on aura $-3\frac{1}{3}$ pour ſa vîteſſe après le choc ; le ſigne — indique donc qu'il rebrouſſera avec une vîteſſe de 3 pieds & $\frac{1}{3}$. A l'égard du choqué, il faut (367) à ce même double de 1 & $\frac{1}{3}$ ajouter la vîteſſe 2 avant le choc, & l'on aura $4\frac{2}{3}$ pour ſa vîteſſe après le choc.

371. Puiſque (367) lorſque les corps élaſtiques vont du même ſens avant le choc, les vîteſſes après le choc ſont $2u - V$, & $2u - U$ (u étant celle qu'ils auroient après le choc s'ils n'étoient point élaſtiques) ; la différence de ces deux vîteſſes qui eſt $V - U$, eſt donc la même que la différence des vîteſſes avant le choc. Cette différence eſt ce qu'on appelle la *vîteſſe reſpective*, qui eſt donc la même avant & après le choc.

Au contraire, quand les corps, avant le choc, vont en ſens oppoſés, leurs vîteſſes, après le choc, ſont $2u - V$ & $2u + U$, dont la différence eſt $V + U$ qui étoit leur vîteſſe reſpective, ou celle avec laquelle ils s'approchoient l'un de l'autre avant le choc. Donc celle avec laquelle ils s'éloignent après le choc, eſt la même que celle avec laquelle ils s'approchoient avant : ainſi, en général, *dans le choc des* *corps élastiques, la vîtesse respective est la même avant & après le choc.*

Du choc & de la résistance des Fluides.

372. Concevons qu'un corps M (*fig. 6*) terminé par une surface plane AB, choque perpendiculairement à cette surface, une couche de corps infiniment petits & sans ressort, dont la somme totale des masses soit m. La vîtesse qu'il a avant le choc étant V, celle qu'il aura après le choc (352) sera $\frac{MV}{M+m}$. Donc celle qu'il aura perdue sera $V - \frac{MV}{M+m}$, c'est-à-dire, $\frac{mV}{M+m}$, ou simplement $\frac{mV}{M}$, parce que nous supposons que m est infiniment petite à l'égard de M. Donc la quantité de mouvement que M aura perdue, ou la résistance qu'il aura éprouvée, sera $\frac{mV}{M} \times M$, ou mV.

Si l'on conçoit maintenant, que pendant un temps infiniment petit, le corps M s'avance de la quantité infiniment petite Bb, & qu'à chaque pas, la couche des particules qu'il a choquée d'abord, s'anéantisse pour faire place à une autre qui soit choquée à son tour; il est clair que de B en b, la vîtesse ne pouvant diminuer qu'infiniment peu, la perte de mouvement que le corps fera, à la rencontre de chaque couche, sera la même, & égale à mV; donc la ſomme des réſiſtances que lui auront faites les couches qu'il aura rencontrées de B en b, ſera mV répétée autant de fois qu'on peut concevoir de particules dans l'eſpace Bb. Or ſi on appelle a l'épaiſſeur infiniment petite de chaque particule; $\frac{Bb}{a}$ exprimera le nombre de celles qui peuvent être rangées ſur Bb; on aura donc $mV \times \frac{Bb}{a}$, pour la réſiſtance que M aura éprouvée pendant une durée infiniment petite. Mais (160) la maſſe m de la première couche, eſt égale au volume de cette couche, multiplié par ſa denſité; c'eſt-à-dire en nommant D cette denſité, & S la ſurface AB, eſt égale à $D \times S \times a$; donc $m = DSa$; donc la réſiſtance que j'appelle R, devient $R = DSaV \times \frac{Bb}{a} = DSV \times Bb$.

Obſervons maintenant, que Bb étant l'eſpace parcouru par le corps pendant un temps infiniment petit, que je repréſente par dt pendant lequel la vîteſſe peut être ſuppoſée uniforme, on a $Bb = Vdt$ (179). Donc la réſiſtance $R = DSV^2dt$.

373. Si l'on conçoit que les petits corps dont il vient d'être queſtion, ſoient les molécules qui compoſent un fluide incompreſſible; on remarquera que puiſqu'il eſt de la nature des fluides (295) de tranſmettre également, dans tous les ſens, la preſſion qu'on leur applique; dès que les molécules voiſines

de AB recevront le choc, elles le transmettront aux parties voisines qu'elles obligeront de couler le long de la surface du corps, pour remplir l'espace que le corps en se transportant, tend à laisser vide derrière lui; & elles succéderont à celles qu'elles auront chassées, pour laisser place à de nouvelles qui recevant de même le choc du corps M, agiront ensuite de la même manière, & ainsi de suite. Donc l'expression DSV^2dt, exprime généralement la résistance qu'éprouve à chaque instant le corps M, mu dans un fluide dont la densité est D, en supposant que chaque couche s'échappe à mesure qu'elle a été choquée.

374. Donc, par la même raison, si un autre corps se meut avec une vîtesse u, dans un autre fluide dont la densité soit D', & présente perpendiculairement une surface s; on aura, en nommant r la résistance qu'il éprouve pendant un pareil instant dt, $r = D'su^2dt$. D'où l'on conclura $R : r :: DSV^2dt : D'su^2dt :: DSV^2 : D'su^2$. C'est-à-dire, que *si deux corps se meuvent avec des vîtesses différentes* V & u, *dans deux fluides dont les densités soient* D & D'; *& présentent perpendiculairement des surfaces* S & s; *les résistances qu'ils éprouveront dans un même instant, seront comme les densités multipliées par les surfaces, & multipliées par les quarrés des vîtesses.*

375. Donc si la surface est la même, & la densité la même, les résistances seront comme les quarrés des vîtesses; car alors on aura $R : r :: DSV^2dt : DSu^2dt :: V^2 : u^2$. Donc *les résistances qu'un même corps éprouve successivement de la part d'un même fluide, dans des instans égaux, sont comme les quarrés des vîtesses.*

376. Il est donc facile, par la proposition générale que nous venons d'établir (374), de trouver le rapport des résistances, lorsque les densités sont les mêmes, ou lorsque les surfaces sont les mêmes, ou lorsque les vîtesses sont les mêmes. Ainsi on voit par l'équation $R = DSV^2dt$, que toutes choses d'ailleurs égales, le choc d'un fluide est d'autant plus grand, que sa densité est plus grande: ensorte que l'eau de mer est capable d'un plus grand choc, que l'eau douce; l'air n'est capable que d'un choc encore beaucoup moindre que celui de l'eau douce; & la force dont il est capable varie beaucoup par le chaud & par le froid, qui peuvent changer beaucoup sa densité.

377. Si le fluide étoit élastique, & que la première couche choquée pût être censée anéantie avant que d'avoir eu aucune action sur les suivantes, tout ce que nous venons de dire auroit également lieu, avec cette différence seulement, que la valeur absolue de la résistance,

résistance, seroit double; c'est une suite de ce qui a été dit (369).

Il ne faut cependant pas dissimuler que les principes, dont nous venons de déduire les lois du choc des fluides, ne sont pas suffisans pour déterminer leur choc ou leur résistance absolue; nous en donnerons la raison plus bas, & nous verrons à quoi on peut s'arrêter sur la mesure absolue de cette résistance. Mais les formules que nous venons de donner, peuvent être employées à comparer les résistances entre elles.

378. Si au lieu de concevoir, comme nous l'avons fait, que le corps M (*fig. 6*) choque, dans un instant dt, tous les petits corps contenus dans l'espace $ABba$, on conçoit au contraire, que le corps M soit immobile, & qu'à chaque instant dt, il soit frappé par un volume de fluide, égal à $ABba$, mu avec la vîtesse V, & qui s'anéantisse après avoir fait son choc; on démontrera de la même maniere, que la quantité de mouvement infiniment petite, que ce choc fera passer dans le corps M, aura pour expression DSV^2dt. D'où l'on conclura, que *c'est la même chose que le corps choque le fluide, ou que le fluide choque le corps; pourvu que la vîtesse soit la même, dans chaque cas.*

379. Ramenons, à des mesures plus connues,

l'évaluation que nous venons de faire, de la résistance, ou du choc des fluides.

Si l'on suppose que h soit la hauteur d'où un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse V avec laquelle nous supposons que le corps M se meut; selon ce qui a été dit (176) on aura $h = \frac{V^2}{2p}$, p étant la vîtesse que la pesanteur engendre, en une seconde de temps, dans un corps libre. Si de cette équation, on tire la valeur de V^2, pour la substituer dans l'expression que nous avons trouvée (372) pour la résistance, nous aurons $R = 2DShpdt$; & $R = 4DShpdt$ pour les fluides élastiques. Or puisque p exprime la vîtesse que la pesanteur engendre, en une seconde de temps, pdt est ce qu'elle engendre pendant l'instant dt, puisque (172) les vîtesses qu'elle communique, sont dans la raison des temps. D'un autre côté, $2DSh$ exprime (160) la masse d'un prisme ou d'un cylindre du fluide dont il s'agit, lequel prisme auroit pour base la surface S, & pour hauteur $2h$; c'est-à-dire, le double de celle dont un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle cette surface se meut dans le fluide; donc $2DShpdt$ exprime la quantité de mouvement que ce prisme acquerroit pendant un instant par l'action libre de la pesanteur; c'est-à-dire, qu'il exprime le poids de ce prisme. Donc, d'après les principes ci-dessus, la résistance qu'éprouve un corps, mu dans un fluide en repos; ou le choc qu'un corps en repos, éprouve de la part d'un fluide en mouvement, est égal au poids d'un prisme de ce fluide, qui auroit pour base la surface choquée, & pour hauteur, le double de la hauteur dont un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse avec laquelle le corps, ou le fluide, se meut actuellement. Et dans les fluides élastiques, la résistance a pour mesure le double du poids de ce prisme.

380. Les différens auteurs qui ont traité de la résistance des fluides, ne s'accordent pas trop sur la mesure de la valeur absolue de cette résistance: quelques-uns la font moitié moindre que nous ne la trouvons ici. Ceux qui ont consulté l'expérience ne s'accordent pas mieux entre eux.

La théorie ci-dessus, ne peut, ainsi que nous l'avons déjà dit, être employée qu'à comparer les résistances entre elles; mais pour donner la résistance absolue, il faudroit avoir égard à beaucoup de choses sur lesquelles la théorie ne paroît pas avoir encore assez de données.

L'on ne peut guère douter que, lorsqu'un fluide en mouvement choque un corps en repos, les parties de ce fluide, obligées de se détourner pour s'échapper, ne changent leur vîtesse dans le voisinage de la surface de ce corps. Cette circonstance doit entrer pour beaucoup dans l'action du fluide sur le corps. Mais où doit commencer la déviation des filets du fluide? Jusqu'à quelle distance les filets se détournent-ils & s'accélèrent-ils de part & d'autre du corps? Suivant quelle loi s'accélèrent-ils ? &c. C'eſt ce qu'on ignore, & qu'on ignorera probablement encore long-temps.

Néanmoins en partant d'hypothèſes aſſez vraiſemblables ſur l'accélération des parties du fluide autour de la ſurface du corps, Neuwton a trouvé que le choc d'un fluide ſur une ſurface plane, eſt équivalent au poids du priſme de ce fluide qui auroit pour baſe cette ſurface, & pour hauteur, celle d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe avec laquelle le fluide ſe meut; & les expériences qu'il a faites, confirment aſſez bien cette théorie.

Le choc de l'air, quoique fluide élaſtique, ſe trouve auſſi, d'après la théorie & les expériences de Newton, avoir la même meſure. Mais quoique dans la ſuppoſition dont nous avons parlé (377), il dût avoir une meſure double; cependant ſi on a égard à ce que dans le mouvement d'un corps dans l'air les couches voiſines de la partie antérieure du corps ſe condenſent juſqu'à une certaine diſtance, on verra que la quantité abſolue de mouvement qu'elles peuvent faire perdre, ne doit pas ſe meſurer comme dans le cas où chaque couche ſeroit iſolée.

381. Quoique, d'après les expériences de M. Bouguer, de M. Mariotte & de M. le chevalier de Borda, il paroiſſe que cette théorie de Newton ne ſoit pas parfaitement conforme à l'expérience, néanmoins comme elle eſt celle qui s'en écarte le moins, c'eſt à elle que nous nous arrêterons; & nous prendrons pour meſure du choc abſolu d'un fluide indéfini ſur une ſurface plane, le poids d'un priſme de ce fluide, qui auroit pour baſe cette ſurface, & pour hauteur la hauteur dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe avec laquelle ſe fait le choc.

382. Mais si en général on suppose que la hauteur du prisme de fluide, dont le poids mesure la résistance, soit à la hauteur $2h :: n : 1$, n étant un nombre à déterminer par l'expérience; on aura cette hauteur $= 2nh$, & par conséquent le poids de ce prisme $= 2nDShpdt$; on aura donc $R = 2nDShpdt$; ensorte que d'après Newton, par exemple, on auroit $n = \frac{1}{2}$. Et puisque $VV = 2ph$, on aura aussi $R = nDSV^2dt$.

REMARQUE I.

383. Les lois que nous venons d'établir, concernant le choc direct des fluides, nous apprennent donc que ce choc est proportionnel à la densité du fluide, multipliée par l'étendue de la surface choquée, & par le quarré de la vîtesse avec laquelle se fait le choc.

L'expérience confirme assez exactement la loi des résistances proportionnelles au quarré de la vîtesse. Mais des expériences faites avec soin par M. le chevalier de Borda, nous apprennent que les résistances ne sont pas bien exactement proportionnelles aux surfaces ni à la densité. A la vérité, la théorie & l'expérience s'écartent beaucoup moins l'une de l'autre sur ces deux points, que sur la mesure absolue de la résistance; mais il n'en résulte pas moins, qu'on ne doit regarder ces lois que comme des approximations aux véritables règles qui restent encore à trouver.

REMARQUE II.

384. L'on voit donc qu'il n'en est pas de l'impulsion d'un fluide sur la surface d'un solide, ou de la résistance qu'un mobile éprouve dans un fluide, comme de l'impulsion d'un corps d'un volume fini sur un corps d'un volume fini. Celle-ci ne peut (360) en aucune manière, être comparée au poids

des corps, au lieu que la résistance des fluides peut y être comparée.

La raison de cette différence, est que dans le choc d'un corps de volume fini sur un corps de volume fini, il se fait dans un instant, un changement de vîtesse finie. Au lieu que lorsqu'un corps se meut avec une vîtesse finie dans un fluide; comme il ne décrit dans un instant qu'un espace infiniment petit, la quantité de matière qu'il déplace ou qu'il choque, ne peut être qu'infiniment petite; il ne perd donc à chaque instant qu'une partie infiniment petite de sa vîtesse. La perte de mouvement qu'il éprouve, est donc comparable à celle que la pesanteur peut faire naître ou détruire à chaque instant dans les corps.

385. De-là on peut conclure que le choc entre deux corps plongés dans un milieu résistant, se fait, s'il est instantané, comme dans un milieu libre; c'est-à-dire, que la vîtesse avec laquelle le choquant atteint le choqué, se partage entre les deux corps, comme s'ils étoient dans un milieu non résistant.

Par conséquent, pour le dire en passant, lorsque le mouton AB (*fig.* 7) tombe sur le pilot CD, la vîtesse qu'il a acquise par sa chute OC (laquelle se détermine par ce qui a été dit (173) se partage avec le pilot CD suivant les règles données (352); c'est-à-dire, que celui-ci commence son enfoncement avec une vîtesse $= \frac{MV}{M+m}$, V étant la vîtesse acquise par la chute du mouton, M la masse du mouton, & m celle du pilot.

Si le terrein dans lequel le pilot est enfoncé, étoit de nature à résister également par-tout, c'est-à-dire, tel que la diminution de vîtesse qu'il occasionne pendant que le pilot s'enfonce d'une quantité infiniment petite, fût proportionnelle à l'eſpace infiniment petit, décrit pendant cet inſtant ; alors la ſomme totale des réſiſtances éprouvées ſeroit proportionnelle à l'enfoncement total. Ainſi les différens enfoncemens, que le mouton occaſionneroit à chaque chute, ſeroient proportionnels à la réſiſtance totale, & par conſéquent à la quantité de mouvement conſumée, c'eſt-à-dire, à MV, V étant la vîteſſe du mouton & M ſa maſſe. Or V (172) étant proportionnel à la racine quarrée de la hauteur d'où le mouton eſt tombé, on en concluroit que les enfoncemens ſucceſſifs, faits par un même mouton, ſont comme les racines quarrées des hauteurs des chutes du mouton; & c'eſt ainſi que M. Belidor penſoit qu'on devoit eſtimer les enfoncemens du pilot dans un terrein homogène.

Mais on ſent aſſez combien, même dans un terrein homogène, il eſt difficile d'admettre que la réſiſtance eſt proportionnelle à la quantité de l'enfoncement inſtantané; ſi cette réſiſtance ne dépendoit que de l'inertie des molécules de terre qu'il faut déplacer, elle ſeroit (375) proportionnelle au quarré de la vîteſſe. Mais il y a grande apparence que cette réſiſtance tient à une cauſe qui influe beaucoup plus que l'inertie; c'eſt la ténacité des parties.

Il paroît très-difficile de déterminer par le raiſonnement ſeul quelle loi ſuit cette réſiſtance dans les terreins homogènes. Mais l'expérience paroît prononcer ſur ce point d'une manière ſuffiſante pour la pratique. L'expérience a fait voir que les enfoncemens faits dans la terre glaiſe par un même corps tombé de différentes hauteurs, ſont proportionnels à ces hauteurs, & par conſéquent au quarré de la vîteſſe avec laquelle l'enfoncement commence. Or les eſpaces décrits ne ſont proportionnels aux quarrés des vîteſſes (167) qu'autant que la force qui accélère ou retarde le mouvement, eſt conſtante. L'expérience indique donc que la réſiſtance, dont il s'agit ici, eſt conſtante; c'eſt-à-dire, qu'à chaque inſtant égal de l'enfoncement, il y a une même quantité de mouvement d'abſorbée.

En admettant donc cette loi donnée par l'expérience, puiſque la vîteſſe avec laquelle l'enfoncement commence, eſt $\frac{MV}{M+m}$, l'enfoncement ſera donc proportionnel à $\frac{M^2V^2}{(M+m)^2}$; & ſi h eſt la hauteur d'où le mouton eſt tombé, puiſque (176) $2ph = V^2$, l'enfoncement ſera proportionnel à $\frac{2pM^2h}{(M+m)^2}$, ou à cauſe que p eſt toujours la même, & M & m ſont les mêmes pour un même mouton & un même pilot, l'enfoncement ſera proportionnel à h, c'eſt-à-dire, à la hauteur de la chute du mouton.

Mais ſi on veut comparer les enfoncemens pour différens moutons & différens pilots enfoncés dans un terrein de même nature. Alors les effets doivent être, non-ſeulement comme les quarrés des vîteſſes, mais comme ces quarrés multipliés par les maſſes animées de ces vîteſſes, c'eſt-à-dire, que l'enfoncement ſera proportionnel à $\frac{M^2V^2}{(M+m)^2} \times (M+m)$ ou proportionnel à $\frac{M^2V^2}{M+m}$ ou à $\frac{2pM^2h}{M+m}$ ou ſimplement à $\frac{M^2h}{M+m}$. D'où l'on voit qu'à chutes égales de deux moutons, les enfoncemens augmentent dans un rapport plus grand que celui de la maſſe du mouton.

De la réſiſtance ſur les ſurfaces planes obliques.

386. Paſſons à la réſiſtance ſur les ſurfaces qui ſe préſentent obliquement; & pour plus de ſimplicité, ſuppoſons que c'eſt le fluide qui ſe meut.

Concevons un corps tel que le repréſente la *fig. 8*; c'eſt-à-dire, dont les faces planes *EFGL*, *AELD*, *AEFB*, ſoient perpendiculaires entre elles; & dont les trois autres faces planes aient telle grandeur & telle inclinaiſon que l'on voudra, de manière cependant qu'il n'y ait que la face *ABCD* qui ſoit expoſée aux choc du fluide que je ſuppoſe ſe mouvoir ſuivant *gT* parallèle à *AE*, ou perpendiculaire à *EFGL*. Imaginons qu'on élève ſur le plan *ABCD*, la perpendiculaire *gR'*, & que par cette ligne, & la ligne *gT*, on faſſe paſſer un plan. Ce plan ſera perpendiculaire aux deux plans *ABCD*, *EFGL*; & ſi on le conçoit prolongé, il formera dans le corps, une ſection *MHIN* inclinée aux deux plans *AELD*, *AEFB*. De plus, comme il paſſe par la droite *gT* qui eſt la direction du fluide, toutes les particules de fluide arrivent ſur la ſurface *ABCD*, ſuivant des directions parallèles à la ſection *MHIN*; enſorte que ſi on imagine le corps coupé par pluſieurs plans parallèles à *MHIN*, on pourra dire de chaque ſection, ce que nous allons dire de celle-ci.

Soit donc *p* (*fig. 9*) une particule qui arrive à la ſurface actuellement repréſentée par *MN*. Que la direction, ainſi que la vîteſſe *V* de cette particule, ſoient repréſentées par *pG*. Si ſur cette ligne, comme diagonale, on forme le parallélogramme *pKGL*, dont le côté pK ſoit ſur MN, & dont le côté pL ſoit perpendiculaire à MN; & qu'à l'inſtant où cette particule arrive on conçoive ſa vîteſſe pG, compoſée de deux autres, l'une pK dirigée ſuivant MN, l'autre pL perpendiculaire à cette même ſurface; il eſt clair que cette particule n'agit ſur le corps, qu'en vertu de la vîteſſe qu'elle a ſuivant pL; car en vertu de ſa vîteſſe ſuivant pK, elle ne peut que ſe mouvoir le long de la ſurface, que nous ſuppoſons parfaitement unie & ſans frottement, & à laquelle, par conſéquent, la particule p ne peut donner de mouvement. Ainſi le choc de la particule p ſe fait avec une quantité de mouvement exprimée par $p \times pL$. Et comme les autres particules qui arrivent en même temps ſur les autres points de la ſurface, ſont ſuppoſées avoir toutes la même vîteſſe, & des directions parallèles; ſi l'on conçoit pour chacune, une décompoſition ſemblable, elles auront chacune, perpendiculairement à la ſurface, la même vîteſſe pL; enſorte que ſi l'on nomme m, la ſomme de leurs maſſes, la quantité de mouvement qui paſſera dans le corps, perpendiculairement à la ſurface, ſera $m \times pL$.

Pour juger, à préſent, de la quantité de mouvement qui paſſera dans le temps infiniment petit dt, il faut déterminer le nombre des lames de fluide qui arriveront à la surface pendant ce même temps dt. Or ce nombre est, évidemment, le même que celui des lames que rencontreroit le corps, mu avec la vîtesse V. Concevons donc que le corps se meuve pendant l'instant dt; ensorte que la surface $ABCD$ (*fig.* 8), représentée (*fig.* 10), vienne en $abcd$ parallèlement à elle-même, le point g décrivant sur gT la ligne infiniment petite gr. Il est clair en menant gs perpendiculaire sur $abcd$, qu'il ne peut pas y avoir plus de lames de fluide entre $ABCD$ & $abcd$, que l'épaisseur d'une des particules, n'est contenue de fois dans l'épaisseur gs; donc en nommant a l'épaisseur d'une des particules, $\frac{gs}{a}$, exprimera le nombre des lames; donc $m \times pL \times \frac{gs}{a}$, exprimera la quantité de mouvement qui passe dans le corps pendant l'instant dt, & qui est dirigée perpendiculairement à la surface $ABCD$.

Mais puisque la masse m de la première lame, est égale au volume de cette lame, multiplié par sa densité; si l'on nomme S la surface $ABCD$, & D la densité du fluide, on aura $m = DSa$; donc la quantité de mouvement qui passe dans le corps, est $D \times S \times pL \times gs$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer pL & gs.

Or si l'on nomme i l'angle TgM (*fig.* 8) que la direction du mouvement de chaque particule, fait avec la surface (angle qu'on appelle *angle d'incidence*), lequel est le même que MpO (*fig. 9*) qui est égal à GpK ; le triangle rectangle GpK donnera $1 : pG :: \sin. i : GK$ ou pL; donc $pL = pG \sin. i = V \sin. i$, puisque pG marque la vîtesse.

A l'égard de gs (*fig. 10*); si l'on joint les deux points r & s, le triangle grs sera rectangle en s, puisque gR' ou gs est perpendiculaire au plan $abcd$ dans lequel se trouve rs; & l'angle grs sera égal à l'angle TgM de la *fig. 8*; c'est-à-dire, sera égal à i. On aura donc $1 : \sin. i :: gr : gs$; donc $gs = gr \sin. i$; ou bien, parce que gr étant l'espace décrit avec la vîtesse V pendant le temps dt, ce qui donne $gs = Vdt$, on aura $gs = Vdt \sin. i$.

Mettant donc ces valeurs de pL & de gs, dans $D \times S \times pL \times gs$, on aura, en nommant R' cette résistance ou ce choc, $R' = DSV^2 dt \sin.^2 i$; ou plus généralement (en vertu de l'observation faite (382)), $R' = nDSV^2 dt \sin.^2 i$.

387. Remarquons, actuellement, que pour la résistance, dans le cas où la surface se présente perpendiculairement, nous avons (382) trouvé $R = nDSV^2 dt$, on a donc $R : R' :: nDSV^2 dt : nDSV^2 dt \sin.^2 i :: 1 : \sin.^2 i :: 1^2 : \sin.^2 i$; donc, *toutes choses d'ailleurs égales, la résistance ou le choc*

direct d'un fluide, est à la résistance oblique sur la même surface, comme le quarré du rayon, est au quarré du sinus d'incidence. Ainsi, l'une de ces résistances peut toujours se conclure facilement de l'autre.

388. La résistance que nous venons de calculer, se transmet perpendiculairement à la surface. Mais on a, le plus souvent, besoin de connoître l'effet qui en résulte dans une direction donnée : voyons dônc comment on y parvient.

Il est facile de voir (*fig. 8*) que puisque cette force est dirigée perpendiculairement à la surface *ABCD*, laquelle est inclinée aux plans *AEFB*, *AELD*, *EFGL* que nous avons supposés perpendiculaires entre eux, elle tend à donner du mouvement aux corps suivant des directions perpendiculaires à chacun de ces trois plans.

Pour déterminer chacun de ces trois efforts, il faudroit décomposer l'effort R' perpendiculaire à *ABCD*, en trois autres, perpendiculaires à ces trois plans ; mais on peut y parvenir plus promptement en déterminant d'abord l'un quelconque de ces efforts, de la manière suivante : & de celui-là nous conclurons les autres.

389. Proposons-nous donc cette question générale : la force R' (*fig. 12*) appliquée perpendiculairement

au plan $ABCD$, étant connue, déterminer quel eſt ſon effort ſuivant une direction perpendiculaire à un plan connu $EFGL$.

Par la direction gR' de la force R' on imaginera un plan qui ſoit, tout à la fois, perpendiculaire au plan $ABCD$, & au plan $EFGL$. Soient MI & HI les interſections de ce plan, avec $ABCD$ & $EFGL$; & TK la ſection commune de ces deux derniers; MI & HI ſeront perpendiculaires à TK; & l'angle MIH, meſurera l'inclinaiſon des deux plans.

Si ſur la ligne $R'g$ prolongée, & priſe pour diagonale, on forme le parallélogramme $gROQ$ dans le plan MIH, & dont les côtés gQ & gR ſoient, le premier, perpendiculaire, & le ſecond, parallèle au plan $EFGL$; on pourra ſubſtituer à la force R' les deux forces gR & gQ. Or gR étant parallèle au plan $EFGL$, ne tend à donner au plan $ABCD$ aucun mouvement pour s'approcher du plan $EFGL$, ni pour s'en éloigner, & ne peut que le faire mouvoir parallèlement à lui-même, ſa diſtance au plan $EFGL$ demeurant toujours la même; ainſi la ſeule tendance que $ABCD$ ait en vertu de la force R', pour ſe mouvoir perpendiculairement à $EFGL$, eſt gQ. Voyons donc quelle eſt la valeur de gQ.

Or par le principe de la décompoſition des forces, on a (en nommant Q la force gQ) $R' : Q :: gO : gQ$. Mais si l'on prolonge gQ jusqu'à ce qu'elle rencontre HI en S, on verra facilement que les deux triangles rectangles OgQ, gSI sont semblables ; parce qu'outre l'angle droit en Q & en S, les deux angles OgQ & gIS sont égaux, comme étant complémens du même angle SgI. On a donc $gO : gQ :: Ig : IS$; donc $R' : Q :: Ig : IS$. Mais le triangle rectangle gSI donne $Ig : IS :: 1 : sin. IgS :: 1 : cos. SIg$; donc enfin $R' : Q :: 1 : cos. SIg$; c'est-à-dire, que *l'effort absolu de la force* R', *perpendiculaire au plan* ABCD, *est à celui qui en résulte suivant une direction perpendiculaire à un autre plan quelconque* EFGL, *comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison de ces deux plans.*

390. Quant à l'effort gR qui est parallèle à IH; c'est de lui que résultent les deux efforts perpendiculaires au plan $AEFB$ & au plan $AELD$; ensorte que pour avoir ces deux efforts, il faudroit, ainsi que nous l'avons déjà observé, décomposer l'effort gR, en deux autres qui fussent perpendiculaires à ces deux plans perpendiculaires entre eux & au plan $EFGL$. Mais il est facile d'appercevoir que les trois efforts dans lesquels la force R' sera alors décomposée, étant perpendiculaires entre eux, aucun des trois ne peut contribuer à l'effet des deux autres;

donc chacun peut être déterminé comme nous venons de le faire, c'eſt-à-dire, en décompoſant ſimplement la force R' en deux autres, l'une perpendiculaire, & l'autre parallèle au plan dont il s'agit. De ſorte que la force R' eſt à chacun des trois efforts qu'elle tend à faire perpendiculairement aux plans $EFGL$, $AEFB$, $AELD$ perpendiculaires entre eux, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon du plan $ABCD$ ſur chacun de ces trois plans.

391. Voilà donc le rapport de ces trois efforts, fixé. Mais pour l'uſage que nous voulons en faire, il faut le traduire en un autre.

Dans cette vue, ſoit $ABCD$ (*fig. 11*) une ſurface plane quelconque. Concevons que de tous ſes points on ait mené des perpendiculaires ſur un plan quelconque $A'B'FE$ qui rencontre le plan $ABCD$ dans la droite EF. Ces perpendiculaires formeront ſur le plan $A'B'FE$ une ſurface $A'B'C'D'$ qu'on appelle la *Projection* de $ABCD$, & qui ſera à celle-ci, comme le coſinus de l'inclinaiſon des deux plans, eſt au rayon.

En effet, ſi l'on conçoit dans le plan $ABCD$, deux droites MNP, mnp infiniment proches l'une de l'autre, & perpendiculaires à l'interſection commune FE; & qu'on ſe repréſente en même temps leurs projections $M'N'P$, $m'n'p$; il eſt facile de voir, qu'à qu'à cauſe de la hauteur commune Pp, les deux ſurfaces $MmpP$, $M'm'pP$, ſont entre elles comme $MP : M'P$. Par la même raiſon, les ſurfaces $NnpP$, $N'n'pP$ ſont entre elles $:: NP : N'P$, ou (à cauſe des parallèles MM', NN') $:: MP : M'P$; donc auſſi les ſurfaces $MmnN$, $M'm'n'N'$ ſont entre elles $:: MP : M'P$. Or le triangle rectangle $MM'P$ donne $MP : M'P :: 1 : \text{ſin.}\, PMM'$; donc puiſqu'on peut toujours conſidérer les deux ſurfaces comme compoſées d'un même nombre de petits trapèzes correſpondans, tels que $MmnN$, $M'm'n'N'$, leſquels ſeront toujours l'un à l'autre $:: 1 : \text{ſin.}\, PMM'$, on peut dire, généralement, que la ſurface plane quelconque $ABCD$, eſt à celle de ſa projection $:: 1 : \text{ſin.}\, PMM'$. Or, puiſque les lignes MP ſont perpendiculaires à la ſection commune EF, l'angle MPM' qu'elles forment, meſure l'inclinaiſon des deux plans $ABCD$, $A'B'C'D'$; & à cauſe du triangle rectangle MPM', l'angle MPM' eſt le complément de cette inclinaiſon; donc en général, *ſi l'on projette ſur un plan quelconque, une ſurface plane quelconque; la ſurface projettée eſt à celle de ſa projection, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon de ces deux plans.*

392. Concluons donc de-là, que puiſque (390) lorſqu'on décompoſe la force R' (*fig.* 12) en trois autres, perpendiculaires à trois plans connus &

perpendiculaires entre eux, cette force eſt à chacune de ſes compoſantes, comme le rayon eſt au coſinus de l'angle que fait le plan $ABCD$, avec celui auquel cette compoſante eſt perpendiculaire; concluons, dis-je, que ſi l'on nomme r, r', r'' les effets que le choc R' d'un fluide, ſur $ABCD$, produit dans le ſens perpendiculaire à chacun de trois plans $EFGL$, $AEFB$, $AELD$; & ſi l'on nomme s, s', s'', les ſurfaces que l'on auroit en projettant ſur chacun de ces trois plans la ſurface $ABCD$ que nous avons appelée S; on aura $R' : r : r' : r'' :: S : s : s' : s''$; donc puiſque nous avons trouvé $R' = nDSV^2 dt\,\text{ſin.}^2 i$; ſi de cette ſuite de rapports on tire les trois proportions $R' : r :: S : s$; $R' : r' :: S : s'$; $R' : r'' :: S : s''$, & que l'on mette pour R' ſa valeur, on aura $r = nDsV^2 dt\,\text{ſin.}^2 i$, $r' = nDs'V^2 dt\,\text{ſin.}^2 i$, $r'' = nDs''V^2 dt\,\text{ſin.}^2 i$.

C'eſt-à-dire, que *lorſqu'une ſurface plane quelconque* ABCD *eſt expoſée au choc d'un fluide, ſi l'on veut ſavoir l'effet que ce choc produit, ſuivant une direction donnée; il faut imaginer cette ſurface projettée ſur un plan auquel cette direction ſeroit perpendiculaire; & ayant déterminé par ce qui a été dit* (382), *le choc que cette projection éprouveroit, ſi elle étoit mue perpendiculairement, on le multipliera par le quarré du ſinus d'incidence du fluide ſur la véritable ſurface.*

393. On pourra donc, par ces principes, déterminer les efforts que le choc, ou la résistance des fluides, tend à produire dans un corps, suivant trois directions perpendiculaires entre elles, soit que ce corps présente plusieurs surfaces planes différemment inclinées, soit qu'il présente une surface courbe; car dans ce dernier cas, on peut toujours imaginer cette surface décomposée en une infinité de petites surfaces planes.

De la résistance qu'éprouve un Solide de révolution, mu suivant son axe.

394. Dans les corps engendrés par la rotation d'une surface autour d'une ligne droite, c'est-à-dire, dans tous les solides de révolution qui seroient mus suivant la direction de leur axe, il est facile de voir que si on conçoit leur surface partagée en zones par des plans infiniment voisins & perpendiculaires à l'axe, la résistance sur toute l'étendue de la surface de la zone se réduira à un effort unique, dirigé suivant l'axe de révolution; parce que si on conçoit par l'axe deux plans perpendiculaires entre eux, & que l'on cherche comme ci-dessus les efforts perpendiculaires à ces plans qui résultent de l'impulsion sur chaque partie d'une même zone, on verra facilement, à cause de la figure régulière de la zone, que tous

les efforts perpendiculaires à chacun de ces deux plans ſe détruiront.

Quant aux efforts parallèles à l'axe, qui réſultent pareillement des impulſions faites ſur les différentes parties d'une même zone, il eſt facile, d'après ce qui précède, de voir qu'ils ſeront tous égaux, & également diſtribués autour de l'axe; donc il n'en réſultera qu'un ſeul effort, lequel ſera dirigé ſuivant l'axe.

395. Pour trouver la valeur de cet effort, concevons que AMR (*fig.* 13) eſt la courbe génératrice du ſolide; enſorte que Mm eſt le côté générateur de la zone. Il eſt facile de voir que toutes les parties de la ſurface de la zone ſont également inclinées ſur l'axe AB; & que leur inclinaiſon commune eſt meſurée par l'angle Mmr que le côté Mm de la courbe fait avec l'ordonnée pm. Ainſi l'angle d'incidence que (386) nous avons appelé i eſt $= rMm$. Or en nommant AP, x; PM, y; on a $Mm : rm$ ou $ds : dy :: 1 : \textit{ſin.}\, rMm$; donc $\textit{ſin.}\, rMm$ ou $\textit{ſin.}\, i = \frac{dy}{ds}$.

De plus, il eſt facile de voir que ſi on projette la zone engendrée par Mm ſur un plan perpendiculaire à AB, la projection (*fig.* 14) ſera une couronne $MrqomQ$, qui aura pour largeur Mr & pour rayon

PM, des lignes égales à mr & PM dans la *figure 13*; donc puiſque la ſurface de cette couronne eſt évidemment $= Mr \times cir. PM$; la projection de la zone ſera $= dy \times cir. y$; ou (en repréſentant par $r : c$, le rapport du rayon à la circonférence) ſera $= \frac{cydy}{r}$; donc (392) l'effort ſuivant l'axe, ou la réſiſtance ſuivant l'axe, réſultante de l'impulſion ſur une zone, ſera $nDV^2dt \times \frac{cydy}{r} \times \frac{dy^2}{ds^2}$ ou $\frac{nDc}{r} V^2dt \times \frac{dy^3}{ds^2}$, & par conſéquent la réſiſtance totale réſultante de l'impulſion ſur toute la ſurface du ſolide, ſera $\int \frac{nDc}{r} V^2dt \times \frac{ydy^3}{ds^2}$ ou $\frac{nDc}{r} V^2 dt \int \frac{ydy^3}{ds^2}$; car il n'y a de variable ici que ce qui dépend de la figure du ſolide.

Telle eſt la formule pour calculer la réſiſtance qu'éprouvent les ſolides de révolution, lorſqu'ils ſont mus ſuivant leur axe.

396. Appliquons cette formule à la ſphère qui eſt le projectile le plus en uſage dans l'Artillerie.

L'équation du cercle AMB (*fig. 15*) générateur de la ſphère, eſt $yy = ax - xx$ (*Alg. 219*) en nommant AP, x; AB, a; & PM, y. Donc $ydy = \frac{1}{2}adx - xdx$. D'ailleurs, en tirant le rayon MC, les triangles ſemblables Mmr, MPC, donnent $Mm : mr :: MC : CP$ ou $ds : dy :: \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a - x$; donc $\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\frac{1}{2}a}$; donc $\frac{ydy^3}{ds^2} = \frac{(\frac{1}{2}a - x)^3}{\frac{1}{4}a^2} dx$; donc (66)

$\int \frac{y\,dy^3}{ds^2} = C - \frac{(\frac{1}{2}a - x)^4}{a^2}$. Or lorsque $x = 0$, l'intégrale doit être o ; donc $C = \frac{1}{16}a^2$; donc $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2} = \frac{1}{16}a^2 - \frac{(\frac{1}{2}a - x)^4}{a^2}$.

Pour avoir la valeur complète de $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$, il faut remarquer que le corps étant mû suivant BA, il n'y a que l'hémisphère antérieur DAE qui soit exposé au choc ; par conséquent on ne doit prendre la valeur de $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$ que depuis A jusqu'en C ; c'est-à-dire, qu'il faut dans l'intégrale, faire $x = \frac{1}{2}a$; on aura donc $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2} = \frac{1}{16}a^2$; donc la résistance, qui a pour expression $\frac{nDc}{r}V^2dt \int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$, deviendra $nDV^2dt \times \frac{ca^2}{16r}$.

Mais la résistance qu'éprouveroit le grand cercle DE mu perpendiculairement, seroit (382) $nDV^2dt \times \frac{ca^2}{8r}$, puisque la surface de ce cercle est $\frac{ca^2}{8r}$; donc la *résistance qu'éprouve la sphère, est moitié de celle qu'éprouveroit son grand cercle.*

Du mouvement rectiligne des Corps dans les milieux résistans.

397. La résistance que les milieux opposent au mouvement des corps, peut donc, en général, produire deux effets. Le premier est de changer la direction du mouvement, si la direction suivant laquelle agit la résultante de toutes les impulsions faites sur les parties de la surface exposée au choc, n'est pas sur une même ligne droite avec la direction

du mouvement actuel du corps. Le second eſt d'altérer la vîteſſe du mobile.

Comme nous n'examinerons que les ſolides dont les parties ſont ſymétriquement placées à l'égard de la direction du mouvement, leſquels par cetre figure ne peuvent éprouver de déviation dans la direction de leur mouvement, nous n'enviſagerons ici le mouvement des corps dans les milieux réſiſtans que par rapport à la perte de vîteſſe qu'ils y éprouvent. Nous commencerons par examiner le mouvement des corps ſans peſanteur, ou, ce qui revient au même, celui des corps mus ſur un plan horizontal ſans frottement, en vertu d'une impulſion donnée.

398. Soit M la maſſe du mobile; u ſa vîteſſe au bout d'un temps quelconque t; s la ſurface plane qui, mue directement, éprouveroit la même réſiſtance qu'éprouve la ſurface du mobile actuel; D la denſité du fluide; conformément à l'obſervation faite (382), on aura $nDsu^2dt$ pour la quantité de mouvement que le mobile perd à chaque inſtant dt; & par conſéquent (158) $\frac{nDsu^2dt}{M}$ ſera le degré de vîteſſe qu'il perd pendant ce même inſtant, ou la différence entre les vîteſſes du mobile dans deux inſtans conſécutifs. On aura donc $\frac{nDsu^2dt}{M} = -du$; donnant (21) à du le ſigne $-$, parce que t croiſſant, u diminue.

Pour intégrer cette équation, il faut d'abord divifer par u^2; ce qui donne $\frac{nDsdt}{M} = -\frac{du}{u^2}$, dont l'intégrale (60) eft $\frac{nDst}{M} = C + \frac{1}{u}$.

La conftante C doit être déterminée par cette condition, que fi V marque la vîteffe qui a été imprimée au mobile au commencement du mouvement, on ait $u = V$ lorfque $t = 0$. On a donc $0 = C + \frac{1}{V}$; d'où $C = -\frac{1}{V}$. Donc $\frac{1}{u} - \frac{1}{V} = \frac{nDst}{M}$; équation d'où l'on tirera facilement la valeur de u au bout d'un temps quelconque t.

Pour donner un exemple de la manière d'employer les quantités qui entrent dans cette équation, fuppofons un cube d'ivoire ayant un pouce de côté, mu dans l'eau fur le plan horizontal AB (*fig. 16*), & préfentant perpendiculairement fa face CD. Que fa vîteffe initiale ait été de 50 pieds par feconde; on demande à quoi cette vîteffe fera réduite au bout d'une demi-feconde.

On a donc $t = \frac{1}{2}''$, $V = 50^{\text{pi.}}$, $s = 1$ pouce quarré $= \frac{1}{144}$ de pied quarré; $n = \frac{1}{2}(382)$. A l'égard de M, il eft égal au volume d'un pouce cube, multiplié par la denfité de l'ivoire que je repréfente par D'; c'eft-à-dire, que $M = \frac{1}{1728} D'$.

On a donc $\frac{1}{u} - \frac{1}{50} = \frac{\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{1728} D'} = \frac{3D}{D'}$. Or d'après la Table donnée à la fin du *Tome III de ce Cours*; on a $D' : D :: 1{,}825 : 1$, ou $\frac{D}{D'} = \frac{1}{1{,}825} = 0{,}548$, donc $\frac{1}{u} - \frac{1}{50} = 1{,}644$, ou $\frac{1}{u} = 1{,}664$; donc $u = \frac{1}{1{,}664} = 0{,}601$, c'est-à-dire, qu'au bout d'une demi-seconde, la vîtesse n'est plus que d'environ $\frac{3}{5}$ de pied par seconde.

399. Déterminons présentement l'espace décrit pendant ce même temps t.

Si nous représentons cet espace par x, nous aurons (179) $dx = udt$; substituant pour u la valeur qu'on vient de trouver, on aura $dx = \frac{MVdt}{nDVst + M}$, équation dont l'intégrale (100) est $x = C' + \frac{M}{nDs} \log. (nDVst + M)$.

Pour déterminer la constante C', on remarquera que lorsque $t = 0$, on doit avoir $x = 0$; donc $0 = C' + \frac{M}{D} \log. M$; donc $x = \frac{M}{nDs} \log. \left(\frac{nDVst}{M} + 1\right)$.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on aura $x = \frac{\frac{1}{1728} \times D'}{\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{144}} \log. \left(\frac{\frac{1}{2} \times D \times 50 \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{1728} \times D} + 1\right)$ ou $x = \frac{1}{6} \frac{D'}{D} \log. (150 \frac{D}{D'} + 1)$; & puisque $\frac{D}{D'} = 0,548$, ou $\frac{D'}{D} = 1,825$, on a $x = 0,304 \log. 82,20$.

Le logarithme dont il s'agit ici, étant (88) le logarithme hyperbolique, je prends dans les Tables, le logarithme ordinaire de 82,20 qui est 1,9148718, & l'ayant multiplié par 2,3025851, j'ai 4,4091550; donc $x = 0,304 \times 4,4091$, &c. ou enfin $x = 1^{pi.}\ 341 = 1^{pi.}\ 4^{po.}$, d'où l'on voit que ce cube a perdu plus de $\frac{42}{50}$ de sa vîtesse, en décrivant 16 fois sa longueur.

400. Passons au mouvement rectiligne des corps pesans, dans les milieux résistans. Supposons d'abord que le corps descend. Son mouvement est retardé par deux causes; la première par la résistance provenante du choc contre les parties du fluide; la seconde est dûe à ce qu'il perd (312) dans le fluide, une partie de son poids égale à celui du volume de fluide qu'il déplace.

En conservant les dénominations employées jusqu'ici, la perte de mouvement qui résulte de la première de ces deux causes, est (382) exprimée par $nDsu^2dt$.

Quant à la seconde, il faut déterminer le poids du volume de fluide que le mobile occupe. Or à volume égal (160) les masses sont comme les densités; donc si on représente par D' la densité du mobile, on aura $D' : D :: M :$ à la masse du fluide déplacé, laquelle sera par conséquent $\frac{MD}{D'}$. Donc p étant la vîtesse que la pesanteur donne en une seconde de temps à un corps libre & par conséquent pdt celle qu'elle lui donne en un instant dt, on aura $\frac{MD}{D'}pdt$ pour le poids du volume de fluide déplacé, ou pour la quantité de mouvement que le mobile perd en vertu de la seconde cause. Donc la perte totale de mouvement qu'il fait à chaque instant, est

$\frac{MD}{D'}pdt + nDsu^2dt$. Or la pesanteur lui donne à chaque instant la quantité de mouvement $Mpdt$; donc il ne se meut réellement qu'avec la quantité de mouvement $Mpdt - \frac{MD}{D'}pdt - nDsu^2dt$; donc l'augmentation de vîtesse qu'il reçoit à chaque instant, n'est que $\frac{Mpdt - \frac{MD}{D'}pdt - nDsu^2dt}{M}$, ou $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt$. On a donc $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt - \frac{nDsu^2}{M}dt = du$.

Faisons pour simplifier $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)p = g$, & $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$; nous aurons $gdt - \frac{gu^2}{k^2}dt = du$, ou $gdt = \frac{k^2du}{k^2 - u^2}$.

Pour intégrer cette quantité, je la change (108 & 111) en $gdt = \frac{\frac{1}{2}kdu}{k-u} + \frac{\frac{1}{2}kdu}{k+u}$ dont l'intégrale (100) est $gt = C - \frac{1}{2}k\,log.\,(k-u) + \frac{1}{2}k\,log.\,(k+u)$.

Supposons, pour plus de simplicité, que le mobile n'a reçu aucune impulsion au commencement du mouvement. Alors la constante C doit être déterminée par la condition que lorsque $t = 0$, on ait $u = 0$. On a donc $0 = C - \frac{1}{2}k\,log.\,k + \frac{1}{2}k\,log.\,k$, c'eſt-à-dire, $C = 0$. Ainſi $gt = \frac{1}{2} k \log. \frac{k+u}{k-u}$, eſt l'équation qui donne la vîteſſe du mobile au bout d'un temps quelconque t.

401. Pour avoir l'eſpace décrit pendant ce temps t, nous prendrons l'équation $dx = udt$ (179); en ſuppoſant l'eſpace décrit repréſenté par x.

Il faut donc de l'équation précédente, déduire la valeur de u, & la ſubſtituer dans celle-ci.

Or l'équation $gt = \frac{1}{2} k \log. \frac{k+u}{k-u}$, donne $\log. \frac{k+u}{k-u} = \frac{2gt}{k}$, ou $\log. \frac{k+u}{k-u} = \frac{2gt}{k} \log. e$, en repréſentant par e le nombre dont le logarithme eſt 1, ou enfin $\log. \frac{k+u}{k-u} = \log. e^{\frac{2gt}{k}}$; donc $\frac{k+u}{k-u} = e^{\frac{2gt}{k}}$, & par conſéquent $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$; donc $dx = \frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} kdt$, équation que je change d'abord en

cette autre $dx = \frac{kdte^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} - \frac{kdt}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, puis en cette

autre $dx = \frac{kdte^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1} - \frac{kdte^{\frac{-2gt}{k}}}{1 + e^{\frac{-2gt}{k}}}$.

Or, d'après ce qui a été dit (28 & 100), il eſt facile de voir que les deux termes du 2.[d] membre, ſont chacun une différentielle logarithmique ; & que par conſéquent l'intégrale eſt $x = C' + \frac{kk}{2g} \log. (e^{\frac{2gt}{k}} + 1) + \frac{kk}{2g} \log. (e^{\frac{-2gt}{k}} + 1)$, ou $x = C' + \frac{kk}{2g} \log. (e^{\frac{2gt}{k}} + 1) + \frac{kk}{2g} \log. \left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{e^{\frac{2gt}{k}}} \right)$, ou $x = C' + \frac{kk}{2g} \log. \frac{\left(e^{\frac{2gt}{k}} + 1\right)^2}{e^{\frac{2gt}{k}}}$, ou enfin $x = C' + \frac{kk}{g} \log. \left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{e^{\frac{gt}{k}}} \right)$.

Pour déterminer la conſtante C', nous remarquerons que lorſque $t = 0$, on doit avoir $x = 0$, puiſque le corps eſt ſuppoſé n'avoir reçu aucune impulſion au commencement. On a donc $0 = C' + \frac{kk}{g} \log. \frac{1+1}{1} = C' + \frac{kk}{g} \log. 2$; donc $C' = -\frac{kk}{g} \log. 2$; donc enfin $x = \frac{kk}{g} \log. \left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{2e^{\frac{gt}{k}}} \right)$. C'eſt-là l'équation qui donnera l'eſpace x décrit après un temps quelconque t.

402. Paſſons au mouvement du corps lorſqu'il monte.

La pesanteur & la résistance du milieu contribuent alors à diminuer la vîtesse du mobile ; mais la pesanteur dans ce cas-ci, comme dans le précédent, est diminuée, parce que le poids du mobile est diminué de celui du volume de fluide déplacé ; ainsi la force qui retarde le mouvement, sera $Mpdt - \frac{MD}{D'}pdt + nDsu^2dt$; donc la perte de vîtesse qui en résultera, sera $pdt - \frac{D}{D'}pdt + \frac{nDsu^2dt}{M}$. On aura donc $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)pdt + \frac{nDsu^2dt}{M} = -du$.

Faisons comme ci-dessus, $\left(1 - \frac{D}{D'}\right)p = g$, & $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$. Nous aurons $gdt + \frac{g}{k^2}u^2dt = -du$; d'où l'on tire $gdt = \frac{-k^2du}{k^2+u^2}$.

Faisons $u = kz$; nous aurons $gdt = \frac{-kdz}{1+zz}$ ou $\frac{-gdt}{k} = \frac{dz}{1+zz}$. Or le second membre de cette équation (86) exprime l'élément d'un arc-de-cercle, dont la tangente est z, & le rayon 1.

Donc z est la tangente de l'arc qui est l'intégrale de ce second membre, ou de sa valeur exprimée par l'intégrale du premier. Donc $z = -tang.\left(\frac{gt}{k} + C\right) = \frac{u}{k}$; donc $u = -k\,tang.\left(\frac{gt}{k} + C\right)$.

Pour déterminer la constante C, on observera que lorsque $t = 0$, u doit être égale à la vîtesse avec laquelle le mobile a été lancé. Soit V cette dernière, on aura donc $V = - k\ tang.\ C$; & par conséquent $tang.\ C = - \frac{V}{k}$ ou $C = arc.\ tang.\ \frac{-V}{k}$; c'est-à-dire, à l'arc qui a pour tangente $\frac{-V}{k}$. Donc si on appelle A l'arc qui a pour tangente $\frac{V}{k}$, on aura $C = - A$. Donc $u = k\ tang.\left(A - \frac{gt}{k}\right)$.

403. Pour avoir l'espace décrit, nous prendrons l'équation $dx = u\,dt$. Nous aurons donc $dx = k\,dt\ tang.\left(A - \frac{gt}{k}\right) = \frac{k\,dt\ sin.\left(A - \frac{gt}{k}\right)}{cos.\left(A - \frac{gt}{k}\right)}$ (*Géom.* 22 & 27). Mais cette quantité est une différentielle logarithmique; donc (100) on aura $x = C' + \frac{k^2}{g}\ log.\ cos.\left(A - \frac{gt}{k}\right)$.

A l'égard de la constante C', elle doit être telle que $x = 0$, lorsque $t = 0$; on a donc $0 = C' + \frac{k^2}{g}\ log.\ cos.\ A$; donc $C' = \frac{-k^2}{g}\ log.\ cos.\ A$; donc enfin $x = \frac{k^2}{g}\ log.\ \frac{cos.\left(A - \frac{gt}{k}\right)}{cos.\ A}$, équation qui donnera l'espace décrit au bout d'un temps quelconque t.

404. Pour savoir la hauteur totale à laquelle le

corps s'élevera en vertu de la vîtesse donnée V, il faut, dans l'équation $u = k\ tang.\left(A - \frac{gt}{k}\right)$ supposer $u = 0$, & par conséquent $A - \frac{gt}{k} = 0$, ce qui donne $x = \frac{k^2}{g} \log. \frac{\text{cof. } 0^d}{\text{cof. } A} = \frac{k^2}{g} \log. \frac{1}{\text{cof. } A}$.

405. Voici quelques applications de cette théorie. Prenons pour exemple l'une des expériences faites par *Newton*, au mois de Juin 1710. *Newton* trouva, par expérience, qu'un globe de verre rempli d'air, de $4^{po.},6932$ de diamétre, & du poids de $1^{once.},0219$ dans l'air (ces mesures & ces poids sont réduits à la mesure de Paris), étoit tombé de 206 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur, en $8'' \frac{1}{5}$ de temps. Voyons donc si, dans $8'' \frac{1}{5}$ un corps pesant doit, en vertu de la résistance de l'air, ne tomber que de $206^{pi.},5$.

Déterminons d'abord les quantités g & k. Nous avons fait $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) p$, dans laquelle $p = 30,2$.

Pour avoir le rapport $\frac{D}{D'}$ de la densité de l'air à celle du globe de verre, il faut calculer le poids d'un volume d'air égal à ce globe; & l'ayant ajouté au poids que ce globe a été trouvé avoir dans l'air, on aura le poids réel de ce globe, qui étant comparé au poids du même volume d'air, donnera le rapport des densités, puisqu'à volume égal les densités sont comme les poids (160).

Or le globe ayant $4^{po.},6932$ ou $0^{pi.},3911$ de diamètre, a un volume de 0,03134 de pied cube; & puisque la pesanteur de l'air est la 850.e partie de celle de l'eau, celle-ci pesant $70^{liv.}$ ou 1120 onces le pied cube, un pied cube d'air pèsera $\frac{1120}{850}$ ou $\frac{112}{85}$ d'once; donc un globe d'air de

même

même diamètre que celui de l'expérience, pèſe 0,0413 d'once. Donc puiſque le globe de l'expérience a dû perdre dans l'air une partie de ſon poids, égale au poids du volume d'air qu'il a déplacé, il s'enſuit que dans le vide, il auroit peſé 1on.,0632. Et puiſqu'un pareil volume d'air pèſe 0,0413, on a donc $D' : D :: 1,0632 : 0,0413 :: 10632 : 413$; donc $\frac{D}{D'} = \frac{413}{10632} = 0,0388$. Donc $g = \left(1 - \frac{D}{D'}\right) p = (1 - 0,0388) \times 30,2 = 0,9612 \times 30,2 = 29,03$.

A l'égard de k, puiſque nous avons fait $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$, nous aurons $k^2 = \frac{gM}{nDs}$.

Or M eſt égale au volume du globe multiplié par ſa denſité D'; & comme ce volume a été trouvé ci-deſſus, $= 0,03134$, on a $M = 0,03134\, D'$; donc $k^2 = \frac{g \times 0,03134\, D'}{nsD}$. Mais (382) nous avons $n = \frac{1}{2}$; & (396) s vaut la moitié de la ſurface d'un grand cercle du globe actuel; & cette ſurface eſt $= 0,12028$; donc $s = 0,06014$; donc $k^2 = \frac{0,03134}{\frac{1}{2} \times 0,06014} \times g \times \frac{D'}{D} = \frac{0,03134}{0,03007} \times 29,03 \times \frac{1}{0,0388} = 779,53$; donc $k = 27,92$.

Nous avons donc $g = 29,03$, $k = 27,92$ & $t = 8'' \frac{1}{5}$.

Il ne s'agit donc plus que de ſubſtituer ces caleurs dans celle de x, c'eſt-à-dire, dans $x = \frac{kk}{g} \log. \left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}{2e^{\frac{gt}{k}}}\right)$.

Mais avant de faire cette ſubſtitution, rendons cette dernière formule un peu plus commode pour le calcul. Faiſons $e^{\frac{gt}{k}} = N$, nous aurons $e^{\frac{2gt}{k}} = N^2$, & par conſéquent $x = \frac{kk}{g} \, log. \, \frac{N^2 + 1}{2N}$.

Pour avoir N, l'équation $e^{\frac{gt}{k}} = N$, donne $\frac{gt}{k} \, log. = log. \, N$, ou $\frac{gt}{k} = log. \, N$; or ayant le logarithme de N; il ſera aiſé d'avoir N.

Cela poſé, nous aurons donc $log. \, N = \frac{29{,}03 \times 8\frac{1}{5}}{27{,}92} = 8{,}52599$. Mais comme ce logarithme eſt hyperbolique, pour avoir le nombre qui lui répond, il faut le convertir en logarithme ordinaire (88), en le multipliant par 0,4342945, ce qui donne 3,7027895, qui dans les Tables répond à 5044. Donc $N = 5044$ à très-peu près.

Comme N ſe trouve ici être un nombre aſſez grand, je vois que dans la quantité $\frac{N^2 + 1}{2N}$, je puis, ſans qu'il en réſulte d'erreur ſenſible, négliger le terme 1 vis-à-vis de N^2, & réduire par conſéquent la valeur de x, à $x = \frac{kk}{g} \, log. \, \frac{N^2}{2N} = \frac{kk}{g} \, log. \, \frac{N}{2} = \frac{779{,}53}{29{,}03} \, log. \, 2522$.

Je prends donc (88) le logarithme hyperbolique de 2522 que je trouve être 7,8328075, & le multipliant par $\frac{779{,}53}{29{,}03}$, je trouve $x = 210^{pi.},2$, qui ne diffère de l'expérience que de $3^{pi.},7$ environ.

Dans le même temps (174) ce mobile ſeroit deſcendu de 1015 pieds dans le vide.

406. A l'égard de la vîtesse, nous avons vu (400) qu'elle avoit pour expression $u = \frac{k e^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, c'est-à-dire, qu'on a $u = \frac{k N^2 - k}{N^2 + 1}$. Substituant pour k & N leurs valeurs trouvées ci-dessus, on trouvera $u = \frac{[(5044)^2 - 1] \times 27{,}92}{(5044)^2 + 1} =$ 27,92 à très-peu près.

407. L'expression $u = \frac{k e^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, dans laquelle $e^{\frac{2gt}{k}}$ va toujours en croissant à mesure que t croît, fait voir qu'au bout d'un certain temps, la vîtesse ne s'accélère plus qu'insensiblement. En effet, si on l'écrit ainsi. . . . .

$u = k\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}\right)$, on voit que cette valeur approche continuellement de celle-ci, $u = \frac{k e^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}}} = k$; ensorte que les corps pesans qui tombent dans un milieu résistant, n'accélèrent pas continuellement leur vitesse comme dans le vide ; cette vîtesse ne peut jamais devenir plus grande que k, & quoique dans la rigueur ils n'atteignent cette vîtesse qu'après un temps infini, néanmoins ils en diffèrent très-peu au bout d'un intervalle de temps assez court. On en voit une preuve frappante dans l'exemple que nous venons de donner (406), où le mobile a presque atteint cette vîtesse au bout de $8'' \frac{1}{5}$.

408. On peut encore déterminer d'une autre manière

quelle est la plus grande vîtesse que les corps puissent acquérir en descendant dans un milieu résistant. Dans l'équation $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p dt - \frac{n D s u^2}{M} dt = du$, si on suppose $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p dt - \frac{n D s u^2}{M} dt = 0$, il est clair qu'on aura $du = 0$; c'est-à-dire, que la vîtesse cessera de s'accélérer. Or l'équation $\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p dt - \frac{n D s u^2}{M} dt = 0$, donne $M p dt - \frac{M D}{D'} p dt = n D s u^2 dt$, dont le premier membre exprime le poids du corps dans le fluide, & le deuxième exprime la résistance actuelle. Donc le mouvement arrive à l'uniformité, lorsque la résistance est égale au poids du corps dans le fluide; ce qui d'ailleurs est évident.

De cette même équation, on conclut aussi $u^2 = \frac{\left(M - \frac{M D}{D'}\right) p}{n D s} = \frac{\left(1 - \frac{D}{D'}\right) p}{\frac{n D s}{M}} = \frac{g}{\frac{g}{k^2}} = k^2$, ou $u = k$, comme ci-dessus.

De la vîtesse que les projectiles peuvent recevoir par l'action d'un fluide élastique condensé, tel que l'air ou la poudre enflammée.

409. La force que l'air condensé dans un espace déterminé AB (*fig.* 17) exerce en se dilatant contre un mobile ou projectile M, n'engendre point une vîtesse finie dans un instant. Le débandement du ressort se fait par degrés infiniment petits, dont la somme pendant un espace de temps fini, forme la vîtesse infinie avec laquelle le projectile est lancé.

410. Puiſque cette force agit par degrés infiniment petits, elle peut donc être comparée au poids des corps, & meſurée par conſéquent par un poids. Le poids, auquel nous la comparerons dans la queſtion préſente, eſt celui de l'atmoſphère, c'eſt-à-dire, celui d'une colonne d'air qui auroit pour baſe l'un des grands cercles du boulet M, & pour hauteur celle de l'atmoſphère; ce poids eſt connu (333).

Suppoſant donc que P ſoit une maſſe de même poids que cette colonne; p la vîteſſe que la peſanteur engendre en une ſeconde de temps dans un corps libre; $Ppdt$ ſera le poids de cette colonne; & ſi on repréſente par $1 : q$ le rapport de ce poids à celui qui doit meſurer la force du reſſort de l'air condenſé dans l'eſpace AB, on aura pour ce dernier poids, ou pour la meſure de la force du reſſort de l'air condenſé, la quantité $Ppqdt$.

Faiſons abſtraction de la peſanteur du mobile M, c'eſt-à-dire, ſuppoſons que l'ame AD de la pièce eſt horizontale; ſuppoſons auſſi que le mobile eſt de calibre, enſorte qu'il ne laiſſe aucun vide, & cherchons avec quelle vîteſſe il ſortiroit de la pièce dans un eſpace libre.

Conſidérons-le lorſqu'il eſt parvenu en un point quelconque C de l'ame de la pièce. Puiſque la force du reſſort de l'air eſt en raiſon inverſe des eſpaces qu'il occupe (334), ſa force, lorſqu'il occupe l'eſpace AC, ſera à celle qu'il avoit lorſqu'il n'occupoit que AB, c'eſt-à-dire, à $Ppqdt :: AB : AC$; donc ſi on appelle F la force de l'air répandu dans AC, on aura $F = \frac{AB}{AC} \times pqPdt = \frac{pqPadt}{x}$, en nommant AB, a & AC, x.

Cette force ſeroit celle qui eſt employée à accélérer le mouvement du projectile au point C, ſi la preſſion de l'air extérieur n'avoit pas lieu ; mais celle-ci agiſſant en ſens contraire avec une force $= pPdt$, il s'enſuit que la force qui accélère réellement le mobile, n'eſt que $\frac{pqPadt}{x} - pPdt$; donc l'augmentation de vîteſſe que le mobile reçoit au point quelconque C, eſt $\frac{\frac{pqPadt}{x} - pPdt}{M}$, M étant la maſſe du mobile. Donc ſi on nomme u la vîteſſe actuelle du mobile, du marquant l'accroiſſement de la vîteſſe, on aura $\frac{\frac{pqPadt}{x} - pPdt}{M} = du$, ou $\frac{pqPadt}{x} - pPdt = Mdu$.

Pour tirer de cette équation la valeur de u, il faut à la place de dt, mettre ſa valeur $\frac{dx}{u}$ (179), & l'on aura $\frac{pqPadx}{ux} - \frac{pPdx}{u} = Mdu$ ou

$pqP\frac{adx}{x} - pPdx = Mudu$, dont l'intégrale eſt $pqPa\ log.\ x - pPx + C = \frac{Mu^2}{2}$.

Pour déterminer la conſtante C, obſervons que, puiſque le débandement du reſſort de l'air eſt ſuppoſé ne commencer qu'au point B où $x = a$, l'équation précédente doit être telle, que faiſant $x = a$, on ait $u = 0$. On a donc $pqPa\ log.\ a - pPa + C = 0$, & par conſéquent $C = pPa - pqPa\ log.\ a$; donc $\frac{Mu^2}{2} = pqPa\ log.\ \frac{x}{a} - pP(x - a)$. C'eſt-là l'équation qui donne la vîteſſe en un point quelconque C de la longueur de la pièce.

411. Par exemple, ſuppoſons un fuſil à vent dont l'ame ait 3pi. $\frac{1}{2}$ de longueur, chargé d'une balle de plomb de 16 à la livre, & dont le diamètre eſt par conſéquent de 0pi.,0524. Suppoſons que l'air condenſé y occupe 6 pouces, & que ſa denſité y ſoit à celle de l'air naturel :: 100 : 1. On demande quelle ſera ſa vîteſſe à la ſortie du fuſil.

Ici on a $a =$ 6po. $= \frac{1}{2}$pi., $x =$ 3pi. $\frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{16}$, $q = 100$.

Pour avoir P, on ſe rappellera (333) que le poids de l'atmoſphère eſt égal à celui d'un cylindre d'eau de 32 pieds de hauteur. Ainſi, puiſque le grand cercle de la balle a 0pi.,0524 de diamètre, ſa ſurface ſera de 0,00216 de pied quarré; P ſera donc $= 0{,}00216 \times 32 \times 70$ liv.; puiſque la peſanteur ſpécifique de l'eau eſt de 70 liv., on a donc $P =$ 4 liv. $\frac{5}{6}$ à peu près. D'ailleurs (172) on a $p = 30{,}2$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation de la vîteſſe, on a

$\frac{1}{32} u^2 = 100 \times 30,2 \times 4\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}\ log.\ \frac{3\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 30,2 \times 4\frac{5}{6} \times 3 = 7298\ log.\ 7 - 437,9$. Or le logarithme ordinaire de 7 eſt 0,8450980; multipliant (88) par 2,30258509 pour le réduire en logarithme hyperbolique, on a 1,9459 en négligeant les autres décimales qui ſont ici ſuperflues. On a donc $\frac{1}{32} u^2 = 7298 \times 1,9459 - 437,9 = 1,3762$; donc $u = 664$pi., la balle s'échapperoit donc avec une viteſſe de 664 pieds par ſeconde.

Si on demande quelle longueur il faut donner à la pièce pour qu'elle reçoive de la part de la charge, toute l'action qu'elle peut en recevoir; on remarquera que lorſque l'action de la charge ceſſe, alors il n'y a plus aucune augmentation dans la vîteſſe, c'eſt-à-dire, que $du = 0$. Reprenant donc l'équation $\frac{pqPadt}{x} - pPdt = Mdu$ que nous avons eue ci-deſſus, & faiſant $du = 0$; nous en tirerons $\frac{qa}{x} - 1 = 0$, ou $x = qa$; c'eſt-à-dire, que la longueur de la pièce doit être à celle de la charge :: $q : 1$, ou comme le reſſort de l'air qui fait la charge, eſt à celui de l'air naturel.

412. Si l'on veut ſavoir quel doit être la charge, ou combien l'air doit être condenſé pour que le projectile ait à la ſortie de la pièce, une vîteſſe donnée, l'équation $\frac{Mu^2}{2} = pqPa\ log.\ \frac{x}{a} - pP(x-a)$ donne $q = \frac{pP(x-a) + \frac{1}{2}Mu^2}{pPa\ log.\ \frac{x}{a}}$.

413. Le reſſort de l'air & la longueur de la pièce reſtant les mêmes, ſi on conçoit qu'on augmente le volume d'air qui alors eſt proportionnel à a, c'eſt-à-dire, ſi on augmente la charge, les degrés de vîteſſe communiqués au mobile à diſtance égale de la culaſſe, ſeront plus grands, puiſqu'en général la force du reſſort eſt proportionnelle à $\frac{a}{x}$. Mais comme la longueur de la charge eſt priſe ſur celle de la pièce, plus la charge aura de longueur, & moins il reſtera de l'eſpace dans lequel le mobile reçoit l'action du fluide élaſtique. Il doit donc y avoir, pour une longueur donnée de la pièce, une longueur de charge, ou une charge qui donne la plus grande vîteſſe poſſible.

Pour la déterminer, il faut reprendre l'équation $\frac{Mu^2}{2} = pqPa\,log.\,\frac{x}{a} - pP(x-a)$, la différencier en regardant u & a ſeuls comme variables, & égaler du à zéro. On aura donc $0 = pqPda\,log.\,\frac{x}{a} - pqPda + pPda$ ou $q\,log.\,\frac{x}{a} = q - 1$; d'où l'on tire $log.\,\frac{x}{a} = \frac{q-1}{q}$.

Ainſi dans l'exemple précédent où $q = 100$, & $x = 3^{pi.},5$, on auroit $log.\,\frac{3,5}{a} = \frac{99}{100} = 0,99$. Et comme ce nombre exprime le logarithme hyperbolique de $\frac{3,5}{a}$; pour connoître le nombre $\frac{3,5}{a}$ par le moyen des Tables, il faut multiplier 0,99 par 0,4342945, & l'on aura 0,4299515, qui répond à 2,7; donc $\frac{3,5}{a} = 2,7$, donc $a = \frac{3,5}{2,7} = 1,3$; c'eſt-à-dire, que la charge qui procurera la plus grande vîteſſe à la ſortie de la pièce, doit avoir 1$^{pi.}$ 3$^{po.}$ 7$^{l.}$ de longueur. Et en calculant comme dans le même exemple, on trouvera que la vîteſſe de la balle ſeroit de 770 pieds par ſeconde.

414. Le fluide, que l'inflammation de la poudre développe dans les armes à feu, eſt un fluide élaſtique, dont la nature n'eſt pas encore parfaitement connue. Eſt-ce de l'air engagé dans les matières qui compoſent la poudre? Eſt-ce l'eau de la criſtalliſation du nitre, réduite en vapeurs? On ſait que l'air renfermé dans les corps, & qui paroît y entrer comme principe, y eſt dans un état de condenſation prodigieux. On ſait que l'eau réduite en vapeur, peut occuper des eſpaces juſqu'à 16000 fois auſſi grands que ceux qu'elle occuperoit dans ſon état naturel. Peut-être ces deux cauſes concourent-elles à la force de la poudre? Quoi qu'il en ſoit, la vîteſſe que les projectiles reçoivent par l'inflammation de la poudre, eſt l'effet du reſſort d'un fluide élaſtique; ſi ce reſſort eſt proportionnel à la denſité du fluide, le mouvement qui en réſulte, peut être déterminé par les principes que nous venons d'expoſer.

Il faut cependant obſerver qu'on doit y faire entrer pluſieurs autres conſidérations que nous avons omiſes; 1°. le poids du boulet, lorſque la pièce n'eſt pas horizontale; 2°. la réſiſtance de l'air pendant que le boulet parcourt l'ame de la pièce; 3° le *vent* du boulet, & la *lumière* du canon qui, permettant à une partie du fluide élaſtique de s'échapper, diminuent d'autant l'action de ce fluide; 4°. l'inflammation ſucceſſive & non inſtantanée de la poudre, qui fait qu'une partie de la poudre eſt chaſſée hors de la pièce ſans avoir été enflammée, & ne doit par conſéquent pas entrer dans le calcul de l'effet. De ces conſidérations, les deux premières qui ſont les moins importantes, ſont faciles à faire entrer dans le calcul. La troiſième, moins facile, peut cependant y être ſoumiſe; mais il n'y a pas aſſez de données pour tenir compte de la quatrième, c'eſt pourquoi nous ne pouſſerons pas plus loin l'examen de cette queſtion. Au reſte, ſi quelques-unes de ces conſidérations ne permettent pas de déterminer rigoureuſement le rapport du reſſort de ce fluide élaſtique à celui de l'air naturel, on peut néanmoins en formant des hypothèſes plauſibles ſur l'influence de chacune, s'aſſurer que ce rapport eſt très-grand. C'eſt ainſi qu'on s'eſt aſſuré que la force de la poudre eſt plus de dix mille fois auſſi grande que celle du reſſort de l'air naturel.

415. Nous avons tacitement ſuppoſé dans la ſolution précédente, que la pièce *AD* étoit immobile ou que le recul étoit inſenſible. La vîteſſe ne ſeroit pas la même ſi le recul étoit un peu conſidérable; c'eſt ce que nous allons faire voir.

De la force du Recul dans les armes à vent ou à feu.

416. La force qui chaſſe le projectile, étant le reſſort d'un fluide élaſtique qui ſe dilate dans l'intérieur ou dans l'ame de la pièce, doit s'exercer également dans tous les ſens (295). En même temps qu'elle

chasse le projectile, elle doit s'exercer contre les parois intérieures de la pièce, & contre la culasse. L'action contre les parois intérieures étant égale de toute part, ne peut avoir d'autre effet que de tendre à faire créver la pièce. Quant à l'action contre la culasse, son effet naturel est de porter la pièce en sens contraire du projectile. Pour déterminer la vîtesse qui peut en résulter pour la pièce, nous nous proposerons la question suivante.

417. M & m (*fig. 18*) sont deux masses connues, poussées en sens contraires par un ressort ab qui se débande suivant la ligne qui joint leurs centres. On demande quelles seront les vîtesses des deux corps, lorsqu'ils seront éloignés d'un intervalle donné quelconque.

Supposons qu'au bout d'un intervalle de temps quelconque t, les deux corps se trouvent en c & d (*fig. 19*), ensorte que M ait parcouru l'espace $ac = z$, & m l'espace $bd = y$. La vîtesse de M au point c (179) sera $\frac{dz}{dt}$. Donc l'accroissement de sa vîtesse sera $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, & par conséquent $Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sera la quantité de mouvement qu'il gagne pendant l'instant dt. Soit $F \times dt$ ou Fdt la force que le ressort communique pendant l'instant dt, on aura donc $Fdt = Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$.

Et puiſque le reſſort doit évidemment ſe débander également dans les deux ſens oppoſés, on aura, par la même raiſon, $F\,dt = m\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

De ces deux équations, on conclut tout de ſuite $Md\left(\frac{dz}{dt}\right) = md\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & en intégrant, $\frac{M\,dz}{dt} = \frac{m\,dy}{dt}$, équation à laquelle je n'ajoute point de conſtante parce qu'elle ſatisfait à la condition qu'impoſe la queſtion, ſavoir que la vîteſſe de m, & celle de M ſoient zéro en même temps. Donc ſi on appelle u la vîteſſe de M, & v celle de m, on a $Mu = mv$.

Pour déterminer ces deux vîteſſes, il faut encore une équation. Reprenons donc les deux équations

$$F\,dt = M\,d\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\&\ F\,dt = m\,d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Multiplions la première par $\frac{dz}{dt}$, & la ſeconde par $\frac{dy}{dt}$, & ajoutant les deux nouvelles équations, nous aurons . . . .

$$Fdz + Fdy = M\frac{dz}{dt}\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) + m\,\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Or ſi on appelle s l'intervalle cd, & a la diſtance initiale ab des deux corps, on a $s = a + z + y$; donc $ds = dz + dy$. On a donc $F\,ds = M\,\frac{dz}{dt}\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) + m\,\frac{dy}{dt}\,d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & par conſéquent . . . .

$$\int F\,ds = \tfrac{1}{2}\,M\frac{dz^2}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\,m\,\frac{dy^2}{dt^2} \text{ ou } 2\int F\,ds = Mu^2 + mv^2.$$

418. Pour appliquer cette ſolution à la queſtion du recul, il faut ſuppoſer que m eſt la maſſe du boulet M (*fig.* 17), & que M eſt celle de la pièce AD. F étant la force de la poudre ou du fluide élaſtique qui lors de l'inflammation ſe dégage & pouſſe le boulet, on aura (410) $F = \frac{pqPa}{x} - pP = pP\left(\frac{qa}{x} - 1\right)$ en conſervant les dénominations employées à l'endroit cité. Or la quantité que nous y avons appelée x, eſt celle qu'ici (*fig.* 19) nous venons d'appeler s; & la quantité a qui (410) marquoit l'étendue de la charge, eſt la même que la diſtance initiale ab (*fig.* 19). Cela poſé, on aura donc $F = pP\left(\frac{qa}{s} - 1\right)$, & par conſéquent $Fds = pP\left(\frac{qads}{s} - ds\right)$.

L'équation $2\int Fds = Mu^2 + mv^2$ deviendra donc $2pP(qa \log. s - s) + C = Mu^2 + mv^2$. Or lorſque $s = a$, c'eſt-à-dire, au commencement du mouvement, on doit avoir $u = 0$ & $v = 0$; donc $C = -2pP(qa \log. a - a)$; donc $Mu^2 + mv^2 = 2pP\left(qa \log. \frac{s}{a} + a - s\right)$.

Donc enfin ſi on appelle l la longueur de la pièce, & qu'on ſuppoſe que l'action ceſſe au ſortir de la pièce, on aura $Mu^2 + mv^2 = 2pP\left(qa \log. \frac{l}{a} + a - l\right)$, qui, avec l'équation $Mu = mv$, donnera la vîteſſe du boulet & celle de la pièce.

De ces deux équations, on tire

$$u^2 = \frac{2mpP}{M(M+m)}\left(q\,a\log.\frac{l}{a}+a-l\right)$$

$$\&\ v^2 = \frac{2MpP}{m(M+m)}\left(q\,a\log.\frac{l}{a}+a-l\right)$$

Si on ſuppoſe M très-grande par rapport à m, ce qui eſt le cas des pièces de gros calibre, on a

$$u^2 = \frac{2mpP}{M^2}\left(q\,a\log.\frac{l}{a}+a-l\right)$$

$$\&\ v^2 = \frac{2pP}{m}\left(q\,a\log.\frac{l}{a}+a-l\right)$$

Cette dernière eſt la même que nous avons trouvée (410), ainſi que cela doit être, puiſque dans le cas où M eſt très-grande par rapport à m, la vîteſſe du recul doit être fort petite.

On voit donc, par ces équations, que, ſi la maſſe de la pièce eſt comparable à celle du projectile, & qu'en même temps la pièce ne ſoit pas arrêtée, la vîteſſe de projection dépend auſſi de la maſſe de la pièce.

419. Pour donner une application de ce qui précède, propoſons-nous de chercher quelle doit être la vîteſſe de recul pour une pièce de 24, chargée au tiers du poids du boulet, en ſuppoſant d'ailleurs que la force de la poudre n'eſt pas moindre que 1000 fois le poids de la colonne de l'atmoſphère qui répond à l'ouverture de la pièce.

Le diamètre du boulet de 24 eſt de 5po.,444; ajoutant deux lignes ou 0po.,166 pour le vent du boulet, on a 5po.,61 pour le diamètre de l'ame.

Puiſqu'un pied cube de poudre pèſe 64 liv., la charge qui eſt de 8 liv., doit donc occuper $\frac{1}{8}$ de pied cube, ou $\frac{1728}{8}$ de pouce cube; or la baſe du cylindre que cette charge occupe dans l'ame, ayant 5po.,61 de diamètre, la longueur de ce cylindre ſera de 8po.,73; on a donc $a = 8^{po.},73 = 0^{pi.},73$. Or la longueur de l'ame d'une pièce de 24 eſt de 9pi. 6po.; donc $l = 9^{pi.},5$. Le poids d'une pièce de 24 eſt de 5400 liv.; ſuppoſons qu'avec l'affût, le poids total ſoit de 6500 liv., on aura $M = 6500$, & l'on a $m = 24$. Il n'y a donc plus que P à calculer.

Or P (333) eſt égal au poids d'un cylindre d'eau qui auroit 32 pieds de hauteur, & 5po.,61 pour diamètre de ſa baſe; il eſt donc de 385 liv. à peu près; donc $P = 385$; enfin nous avons ſuppoſé $q = 1000$.

Nous aurons donc . . . .

$$u^2 = \frac{48 \times 30{,}2 \times 385}{6500 \times 6524} \left(1000 \times 0{,}73 \; log. \frac{9{,}5}{0{,}73} + 0{,}73 - 9{,}5\right)$$

$$= 0{,}013 \; (730 \times 1{,}11440 \times 2{,}3025851 - 8{,}77)$$

$= 0{,}013 \times 1864 = 24{,}3$; donc $u = 5$ à peu près, c'eſt-à-dire, que la vîteſſe du recul, lors de la ſortie du boulet, ſeroit d'environ 5 pieds par ſeconde.

Quant à la vîteſſe du boulet, on trouvera de même $v^2 = \frac{2 \times 6500 \times 30{,}2 \times 385}{24 \times 6524} \times 1864$, d'où l'on tire $v = 1340$; c'eſt-à-dire, que la vîteſſe du boulet à la ſortie de la pièce, ſeroit de 1340 pieds par ſeconde.

On voit donc qu'en ſuppoſant que l'action de la poudre eſt celle d'un fluide élaſtique dont la force diminue en raiſon

des

des eſpaces qu'il occupe, & que la force de ſon reſſort au premier inſtant eſt 1000 fois le poids de la colonne de l'atmoſphère qui répond à l'ouverture de la pièce ; on voit, dis-je, que le boulet de 24 recevant une vîteſſe de 1340 pieds par ſeconde ; la vîteſſe du recul de la pièce ne ſeroit que de 5 pieds par ſeconde.

420. Dans tout ceci, nous avons fait abſtraction de la réſiſtance de l'air ; & cette réſiſtance entre pour beaucoup dans l'effet du recul. En effet, lorſque le boulet, dans l'intérieur de la pièce, eſt arrivé à une vîteſſe de 1000 pieds par ſeconde, par exemple ; la réſiſtance (382) qu'il éprouve pendant un inſtant dt, eſt $nDsu^2dt$. Suppoſant donc $n = \frac{1}{2}s'$, $s = \frac{1}{2}s'$, s' étant la ſurface d'un grand cercle du boulet, on a $\frac{1}{4}Ds'u^2dt$ pour cette réſiſtance. Or le poids du boulet, en nommant a ſon diamètre, & D' ſa denſité, eſt $\frac{2}{3}s'aD'pdt$; donc la réſiſtance eſt au poids du boulet, :: $\frac{1}{4}Ds'u^2dt : \frac{2}{3}s'aD'pdt :: \frac{3D}{8D'} \times \frac{u^2}{pa} : 1$. Or la denſité de l'air eſt à celle du fer :: 1 : 6000 à peu près, c'eſt-à-dire, que $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6000}$; d'ailleurs $p = 30^{\text{pi.}},2$, & $a = 5^{\text{po.}},444 = 0^{\text{pi.}}454$, & enfin $u = 1000$; donc la réſiſtance eſt alors au poids du boulet $:: \frac{3}{8} \times \frac{1}{6000} \times \frac{1000^2}{30,2 \times 0,454} : 1 :: \frac{3000}{48 \times 30,2 \times 0,454} : 1 :: \frac{3000}{658} : 1 :: 4,5 : 1$; c'eſt-à-dire, que la réſiſtance eſt près de quatre fois & demie auſſi grande que le poids du boulet. On doit donc regarder l'action du fluide élaſtique de la poudre, comme s'exerçant, non contre une maſſe conſtante égale au boulet, mais contre une maſſe qui augmente continuellement. La réaction qui en réſulte contre la culaſſe, augmente donc auſſi continuellement. Mais quoiqu'il ſoit facile de donner les équations

différentielles qui expriment le mouvement de la pièce & du boulet, eu égard à cette cauſe, néanmoins comme ces équations ne peuvent être intégrées, nous ne nous en occuperons point.

421. Au reſte, comme la vîteſſe que nous trouvons ici au boulet eſt fondée ſur la ſuppoſition que la force de la poudre ſoit 1000 fois auſſi grande que le poids de la colonne d'air qui répond à l'ouverture de la pièce; on peut en conclure d'avance que, ſi le fluide élaſtique qui ſe dégage par l'inflammation, ſe dilate ſelon la loi que nous avons ſuppoſée, la force de la poudre eſt réellement encore plus grande que nous ne le ſuppoſons ici. Car en parlant de la réſiſtance de l'air au mouvement des projectiles, nous verrons qu'il y a des portées qui ſuppoſent une vîteſſe initiale beaucoup plus grande que 1340 pieds par ſeconde.

Curieux

422. C'eſt à la dernière cauſe dont nous venons de parler, c'eſt-à-dire, au choc de l'air par le fluide élaſtique de la poudre, qu'on doit attribuer le recul lorſqu'on tire à poudre ſeulement; & c'eſt à cette même cauſe qu'on doit artribuer l'élévation des fuſées volantes. Le fluide élaſtique renfermé dans l'intérieur de la fuſée, ſe répand avec une vîteſſe proportionnée à la force expanſive & à la petiteſſe de l'étranglement. Il trouve dans l'inertie de l'air, une réſiſtance qui, telle qu'elle ſoit d'ailleurs, fait l'effet d'une maſſe que ce fluide auroit à chaſſer, & doit par conſéquent occaſionner un recul. Quant à la loi de cette réſiſtance, elle dépend de la vîteſſe avec laquelle un fluide élaſtique renfermé dans un eſpace donné, paſſe dans un autre fluide élaſtique par une ouverture donnée, problême qui, pour le préſent, nous écarteroit trop de notre objet.

De-là on doit conclure auſſi que la vîteſſe de recul qui naît pendant que le boulet parcourt l'ame de la pièce, n'est pas toute la vîtesse de recul qui aura lieu; l'action du fluide élastique contre l'air, après la sortie du boulet, doit encore contribuer à augmenter la vîtesse du recul; mais il est très-difficile de déterminer les limites & l'effet de cette action.

Du Mouvement des corps pesans le long des plans inclinés.

423. Un corps pesant qui est abandonné à lui-même sur une surface plane *KLHI* (*fig.* 20) inclinée à l'horizon *PIHN*, n'obéit point librement à sa pesanteur. Une partie de la force que la pesanteur lui donne, est employée à presser le plan; & l'autre sert à le mouvoir le long de ce plan. Il faut donc que la pesanteur se décompose en deux forces, dont l'une produise la pression sur le plan, & dont l'autre donne le mouvement le long du plan.

Soit donc *G* le centre de gravité de ce corps, ou le point dans lequel la pesanteur peut être censée (235) réunir toute son action: soit *GB* la quantité dont le corps descendroit dans un instant, s'il étoit libre. Menons *GC* perpendiculaire au plan *KLHI*; & concevons que par *GB* & *GC*, on fasse passer un plan; ce plan sera perpendiculaire aux deux plans *KLHI*, *IPNH*, puisqu'il passe par des droites perpendiculaires à ces plans. Donc si on conçoit que

DE, *EF* soient les intersections de ce plan prolongé, avec les deux plans *KLHI*, *IPNH*; *DE*, *EF* seront perpendiculaires à l'intersection commune *HI* de ces deux plans.

Menons *GA* parallèle à *DE*, & concevons le parallélogramme *GABC*, dont *GB* soit la diagonale, & *GA*, *GC*, les côtés. On peut (190) supposer que la pesanteur, au lieu de solliciter le corps à se mouvoir suivant *GB*, le sollicite à se mouvoir en même temps suivant *GC*, avec la vîtesse *GC*, & suivant *GA* avec la vîtesse *GA*. Or il est évident que *GC* étant perpendiculaire au plan, ne peut manquer d'être détruite, si le point *O* où elle rencontre le plan, est en même temps un point du corps.

Quant à la force *GA*, comme elle ne tend ni à approcher ni à éloigner le corps, du plan, puisqu'elle lui est parallèle, elle ne peut manquer d'avoir son effet. C'est donc *GA* qui représente la vîtesse que le corps tend à prendre, & prendra dans le premier instant.

Comme la force *GA* est dans le plan des deux droites *GB* & *GC*, elle est donc dans le plan *DEF*. On peut donc faire abstraction de l'étendue des deux plans *KLHI*, *IPHN*, & ne considérer que le seul plan *DEF* représenté en *DEF* (*fig.* 21), ensorte qu'on peut regarder le corps comme mu sur la droite

DE que nous appellerons le *Plan incliné* : *FE* en sera la *base*, & représentera le plan horizontal ; la perpendiculaire *DF* menée d'un point quelconque *D* de *DE* sur *EF*, sera ce qu'on appelle la *hauteur* du plan incliné.

424. Puisque la force *GA* passe par le centre de gravité *G* du corps *M*, elle doit donc (269) se distribuer également à toutes les parties de ce corps. Donc, tant qu'on fera abstraction du frottement, le corps ne peut avoir d'autre mouvement qu'un mouvement pour glisser le long du plan, & jamais un mouvement pour rouler, quelle que soit d'ailleurs sa figure, pourvu que la perpendiculaire *GC* rencontre le plan en un point qui appartienne en même temps à la surface du corps. Il n'en seroit pas de même, ainsi que nous le verrons par la suite, si la perpendiculaire sur le plan, laissoit le point d'appui ou les points d'appui du corps, d'un seul côté, ou bien s'il y avoit du frottement. Mais dans tout autre cas le corps ne peut pas rouler.

425. Puisque le corps *M* doit décrire *GA* dans le même temps qu'il auroit décrit *GB* par l'action libre de sa pesanteur, si l'on conçoit qu'à la fin du premier instant, la pesanteur agisse de nouveau ; comme elle communique dans des instans égaux des degrés égaux de vîtesse, si l'on imagine pour le second

degré de vîteſſe qu'elle communiquera ſuivant la verticale, une décompoſition ſemblable à celle que nous avons faite pour le premier inſtant; on verra que le ſecond parallélogramme ſera parfaitement égal au premier, & dans le même plan. On conclura donc, de même, que la force perpendiculaire au plan ſera détruite; & la force parallèle qui ſera égale à *GA* ſe joindra à celle-ci, enſorte qu'en raiſonnant de même, pour les inſtans ſuivans, on conclura généralement que la vîteſſe le long du plan incliné s'accélère par des degrés égaux; c'eſt-à-dire, que *le mouvement des corps peſans, le long des plans inclinés, eſt un mouvement uniformément accéléré.* Donc tout ce que nous avons dit (161 *& ſuiv.*) ſur les mouvemens uniformément accélérés, s'applique mot à mot au mouvement le long des plans inclinés; enſorte que les vîteſſes ſont comme les temps; les eſpaces parcourus ſont comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vîteſſes, &c.

426. Donc pour être en état de déterminer le mouvement ſur un plan d'une inclinaiſon connue, il ne s'agit que de connoître le rapport de la force qui accélère, à la peſanteur; c'eſt-à-dire, le rapport de *GA* à *GB*. Or *GA* & *GB* étant parallèles à *DE*, *DF*, l'angle *AGB* eſt égal à *EDF*; & l'angle *A* étant droit ainſi que l'angle *F*, les deux

triangles AGB, EDF ſont ſemblables, & donnent $DE : DF :: GB : GA$; c'eſt-à-dire, que *la longueur du plan incliné, eſt à ſa hauteur, comme la vîteſſe que la peſanteur donneroit au corps, s'il étoit libre, eſt à celle qu'elle lui donne réellement le long du plan incliné.*

Or, comme la peſanteur donne à un corps libre, dans une ſeconde de temps, une vîteſſe à parcourir 30,2 pieds, uniformément, par ſeconde (172); il ſera donc toujours facile de déterminer quelle vîteſſe acquiert, dans la première ſeconde de ſa chute, un corps qui tombe le long d'un plan incliné.

Par exemple, ſi la longueur du plan eſt double de la hauteur, la vîteſſe acquiſe le long de ce plan pendant la première ſeconde, ſera de la moitié de 30,2 pieds; c'eſt-à-dire, qu'au bout d'une ſeconde, ſi la peſanteur ceſſoit d'agir, le corps parcourroit 15,1 pieds à chaque ſeconde.

427. Ayant ainſi déterminé la vîteſſe pour la première ſeconde, on aura la vîteſſe après tel nombre de ſecondes qu'on voudra, en multipliant celle-là par le nombre de ſecondes; & l'eſpace, en multipliant cette même première vîteſſe, par la moitié du quarré de ce nombre de ſecondes (174). En un mot, il ſera facile de déterminer toutes les autres circonſtances de ces mouvemens, par ce qui a été dit (172 & *ſuiv.*). De ces principes, on déduit avec facilité les propriétés ſuivantes.

428. Si deux corps peſans partis en même temps du point D (*fig.* 22) deſcendent, l'un le long du plan DE, l'autre le long de la verticale DF, & que l'on veuille ſavoir à quel endroit du plan DE, le premier eſt arrivé, lorſque le ſecond eſt en un point quelconque A; il n'y a autre choſe à faire qu'à mener AB perpendiculaire ſur DE; le point B ſera le point cherché.

En effet, ſi on repréſente par p, la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre en une ſeconde de temps, on aura (174) en nommant t le temps néceſſaire pour tomber le long de DA, $DA = \frac{pt^2}{2}$. D'un autre côté (426) la vîteſſe qu'acquiert en une ſeconde, le corps qui tombe le long de DE eſt $\frac{p \times DF}{DE}$; donc en nommant T le temps néceſſaire pour tomber de D en B, on aura (174) $DB = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $DA : DB :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2} :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; mais $DA : DB :: DE : DF$; donc $DE : DF :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; donc $T^2 = t^2$, ou $T = t$.

429. Donc ſi DG (*fig.* 23) eſt un troiſième plan parcouru par un troiſième mobile parti du point D en même temps que les deux autres; en menant du point A la perpendiculaire AC, les points A, B, C ſont ceux où ces trois mobiles arrivent en même temps.

430. Si ſur DA comme diamètre, on décrit une demi-circonférence; elle paſſera (*Géom.* 72) par les points C & B, puiſque les angles C & B ſont droits. Donc les cordes DC & DB ſont décrites dans le même temps que le diamètre vertical AD; & comme ceci ne dépend point de la longueur ni de l'inclinaiſon des cordes, on peut dire généralement que *le temps de la chute par la corde quelconque d'un cercle, tirée de l'extrémité du diamètre vertical, eſt le même que le temps de la chute par ce diamètre vertical.*

431. Nous venons de voir (426) que p étant la vîteſſe que la peſanteur donne, dans une ſeconde de temps, à un corps libre, $\frac{p \times DF}{DE}$ eſt celle qu'elle donne, dans le même temps, au corps qui ſe meut le long de DE. Soient t & T les temps néceſſaires pour décrire DF & DE; on aura $DF = \frac{pt^2}{2}$, & $DE = \frac{p \times D}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $DF : DE :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $\frac{(DF)^2}{DE} \times T^2 = DE \times t^2$, ou $(DF)^2 \times T^2 = (DE)^2 \times t^2$, ou $DF \times T = DE \times t$; donc $t : T :: DF : DE$. C'eſt-à-dire, que *les temps néceſſaires pour arriver à différens points* F & E *de l'horizontale* FE, *en parcourant des plans de même hauteur, ſont entre eux comme les longueurs de ces plans.*

432. La vîteſſe du corps qui tombe le long de

DF, eſt pt, au bout du temps t. Par une ſemblable raiſon, celle du corps qui tombe le long de *DE* eſt $\frac{p \times DF}{DE} \times T$, au bout du temps T; donc ſi on nomme u & v les vîteſſes acquiſes en arrivant en *F* & *E*, on aura $u : v :: pt : \frac{p \times DF}{DE} T$, donc $pvt = pu \times \frac{DF}{DE} T$. Mais nous venons de voir (431) que $t : T :: DF : DE$, ce qui donne $t = \frac{DF \times T}{DE}$; ſubſtituant cette valeur de t, & réduiſant, on a $v = u$. Donc *ſi pluſieurs corps décrivent des plans différemment inclinés, mais de même hauteur; ils auront la même vîteſſe, après avoir parcouru des parties de même hauteur, chacun ſur ſon plan.*

Du Mouvement le long des ſurfaces courbes.

433. Si un corps ſans peſanteur & ſans reſſort parcourt, en vertu d'une impulſion primitive, les côtés ſucceſſifs *AB*, *BC*, &c. (*fig.* 24) d'un polygone quelconque; à la rencontre de chaque côté, il perdra une partie de ſa vîteſſe que l'on déterminera de la manière ſuivante.

Concevons qu'il ſe meuve actuellement de *A* vers *B*, & que lorſqu'il eſt en *B*, ſa vîteſſe ſoit telle que dans un temps déterminé, comme d'une ſeconde, il décriroit la ligne *BF* ſur *AB* prolongée, ſ'il étoit libre. Ayant élevé au point *B* ſur *BC* la perpendiculaire *BE*, on imaginera le parallélogramme rectangle *BDFE* dont *BF* ſoit la diagonale, & dont les côtés ſoient ſur *BC* & *BE*: & au lieu de concevoir que le corps a la vîteſſe *BF*, on imaginera qu'il a, tout enſemble, les deux vîteſſes *BD* & *BE*; or comme le côté *BC* l'empêche d'obéir à la vîteſſe *BE*, il eſt clair que ſa vîteſſe ſera réduite à *BD*.

Si du point *B* comme centre, & du rayon *BF*, on imagine que l'on ait décrit l'arc *FI*; *DI* qui eſt la différence entre *BF* & *BD*, ſera donc la vîteſſe perdue: or *DI* eſt le ſinus verſe de l'arc *FI* ou de l'angle *FBC* que font les deux côtés contigus *AB*, *BC*. Donc tant que ces deux côtés feront un angle fini, le corps perdra une partie finie de ſa vîteſſe, à la rencontre de chaque côté.

434. Mais ſi l'angle que forment ces deux côtés, eſt infiniment petit; la vîteſſe perdue, non ſeulement ne ſera pas une quantité finie; elle ne ſera pas même infiniment petite du premier ordre: elle ne ſera qu'infiniment petite du ſecond. Pour le démontrer, la queſtion ſe réduit à faire voir que le ſinus verſe d'un angle infiniment petit, eſt infiniment petit du ſecond ordre; & voici comment cela ſe démontre.

CD (*fig.* 25) étant un arc quelconque, & *BD* une perpendiculaire ſur le diamètre AC, on a (*Géom.* 121) $AB : BD :: BD : BC$; donc ſi CD & par conſéquent BD eſt infiniment petite, BC (ſinus verſe de CD) ſera infiniment plus petite que BD, puiſqu'elle eſt contenue dans BD autant que BD l'eſt dans la quantité infiniment plus grande AB. Donc BC eſt infiniment petite du ſecond ordre.

435. Concluons de-là que *ſi un corps ſans peſanteur ſe meut le long de la ſurface courbe* ABC (*fig.* 26) *il a par-tout la même vîteſſe.*

Car en conſidérant cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés; comme ces côtés font des angles infiniment petits entre eux, la perte de vîteſſe à la rencontre de chaque côté, eſt infiniment petite du ſecond ordre à l'égard de la vîteſſe primitive. Donc la ſomme des vîteſſes perdues en parcourant une infinité de ces côtés, c'eſt-à-dire, en parcourant un arc quelconque ABC, ne peut former qu'une quantité infiniment petite du premier ordre. Donc la vîteſſe n'eſt point altérée.

436. Venons, maintenant, au mouvement des corps peſans ſur les ſurfaces courbes. Nous conſidérerons ſeulement celui qui ſe fait dans un plan vertical.

Soit donc AMB (*fig.* 27) la ſection de la ſurface courbe, par un plan vertical, & la trace que le corps fait ſur cette ſurface. Conſidérons cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés; & concevons que le corps vient de décrire le petit côté nM. Comme la rencontre du côté Mm ne peut (434) lui faire rien perdre de ſa vîteſſe, il décriroit Mm avec la vîteſſe qu'il avoit en M, ſi la peſanteur n'agiſſoit plus. Mais cette force agiſſant ſuivant la verticale Mq ſollicite de nouveau le corps à deſcendre, comme elle le feroit ſur un plan de pareille inclinaiſon. Donc ſi l'on imagine que la vîteſſe Mq que la peſanteur tend à donner dans un inſtant, ſoit décompoſée en deux, l'une Ms perpendiculaire à Mm & l'autre Mo dirigée ſuivant Mm; ce ſera en vertu de cette dernière que la vîteſſe de M ſera accélérée. Or en menant la verticale mr, & comparant les triangles ſemblables Mqo, Mmr, on a $Mm : mr :: Mq : Mo$; donc $Mo = \frac{Mq \times mr}{Mm}$.

Concevons que les différens points de la courbe quelconque AB ſoient rapportés à l'axe vertical quelconque BZ. Nommons BP, x; PM, y; l'arc BM, s. Nous aurons Pp ou $mr = -dx$; $Mm = -ds$. Je donne (21) le ſigne —, à ces quantités, parce que x & s vont en diminuant, pendant que le temps t augmente.

Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre dans une ſeconde ; $p\,dt$ ſera (173) celle qu'elle lui donneroit dans l'inſtant dt. Nous aurons donc la vîteſſe $Mq = p\,dt$. Nommons u la vîteſſe qu'a le corps, lorſqu'il arrive en M ; du marquera l'augmentation qu'il recevra pendant le temps dt; ainſi on aura $du = Mo$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation $Mo = \frac{Mq \times mr}{Mm}$, on a $du = p\,dt \times \frac{-dx}{-ds}$, $= p\,dt \times \frac{dx}{ds}$. Or (179) $dt = \frac{-ds}{u}$; donc, réduction faite, $u\,du = -p\,dx$. Équation dont l'intégrale eſt $\frac{uu}{2} = C - px$, ou $uu = 2C - 2px$.

Pour déterminer la conſtante C; ſuppoſons que le point A d'où le corps a commencé à tomber, ſoit élevé au-deſſus de l'horizontale qui paſſeroit par B, d'une quantité $BZ = b$. Il faut donc que lorſque u étoit zéro, x fût $= b$; donc $0 = 2C - 2pb$; donc $C = pb$; donc $uu = 2pb - 2px = 2p(b - x) = 2p \times PZ$. Mais (176) ſi un corps peſant tomboit librement de la hauteur ZP, le quarré de la vîteſſe qu'il auroit en P, ſeroit $2p \times PZ$; donc *lorſqu'un corps deſcend le long d'une ligne courbe quelconque, il a, en quelque point que ce ſoit, la même vîteſſe que s'il étoit tombé librement de pareille hauteur.*

Ainſi la vîteſſe qu'acquiert ſucceſſivement un corps qui, par ſa peſanteur, tombe dans la concavité d'une ligne courbe, eſt tout à fait indépendante de la nature de cette ligne courbe.

437. Donc ſi le corps après être arrivé au point B le plus bas, & dont je ſuppoſe que la tangente ſoit horizontale, rencontre la concavité de la même ou d'une autre courbe quelconque qui touche la première en B, il s'élevera dans celle-ci, à une hauteur égale à celle dont il étoit parti.

En effet, ſuppoſons que le corps M ſoit actuellement en B où $x=0$; ſa vîteſſe ſera telle qu'on aura $uu=2pb$; ou $VV=2pb$, en appelant V cette vîteſſe pour la diſtinguer de l'autre. Concevons qu'avec cette vîteſſe il remonte le long de la courbe quelconque BM', on trouvera par le même raiſonnement que ci-deſſus, que ſa vîteſſe en un point quelconque M' ſe déterminera par l'équation $-du'=pdt\times\frac{dx}{ds'}$, en appelant u' ſa vîteſſe, s' l'arc BM', & obſervant que u' diminue à meſure que t, s' & x augmentent. Mettant donc pour dt ſa valeur $\frac{ds'}{u'}$, on aura $u'du'=-pdx$; & en intégrant $u'^2=2C=2px$; mais lorſque $x=0$, la vîteſſe u' eſt V, on a donc $V^2=2C$; & puiſque $V^2=2pb$, on a $2C=2pb$; donc $u'^2=2pb-2px$. Or lorſque le corps ceſſera de monter, on aura $u'=0$, & par conſéquent $2pb-2px=0$, qui donne $x=b$;

donc le point où le corps sera arrivé dans la courbe quelconque BA' sera à même hauteur que le point A.

438. A l'égard du temps que le corps emploiera à décrire un arc quelconque AM ou AB de la courbe; comme on a $dt = \frac{-ds}{u}$, on aura $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2pb - 2px)}}$; ensorte que, il faudra, par le moyen de l'équation de la courbe, avoir la valeur de ds, en x & dx; & l'ayant substituée dans cette valeur de dt, on aura celle de t, en intégrant.

439. Puisqu'un corps qui tombe par un arc de courbe quelconque, a dans quelque point que ce soit, la même vîtesse que s'il étoit tombé verticalement de la hauteur du point d'où il est parti, au-dessus de celui où il est actuellement (436); il s'ensuit que si un corps tombe par l'arc AD (*fig. 28*), il aura au point D la même vîtesse que s'il étoit tombé le long de FD, AF étant horizontale, & CD verticale. Par la même raison, s'il tombe par l'arc BD, il aura au point D la même vîtesse que s'il étoit tombé le long de ED. Or si on laissoit tomber un corps successivement du point F & du point E, il auroit en arrivant en D, des vîtesses qui (172) seroient comme les racines quarrées des hauteurs. Donc si on nomme u & u' ces vîtesses, on aura $u : u' :: \sqrt{(FD)} : \sqrt{(ED)}$.

Mais (*Géom.* 173) si ABD est un arc de cercle, & que AD & BD soient les cordes des arcs ABD & BD, on a $(AD)^2 : (BD)^2 :: FD : ED$, & par conséquent

AD

$AD : BD :: \sqrt{(FD)} : \sqrt{(ED)}$; donc $u : u' :: AD : BD$; c'est-à-dire, que les vîtesses acquises en tombant le long des arcs de cercle ABD & BD, sont entre elles comme les cordes AD & BD de ces arcs.

440. Donc si ces arcs sont fort petits, les vîtesses seront à très-peu près comme ces arcs, c'est-à-dire, dans la raison des espaces à parcourir jusqu'au point le plus bas.

441. Ainsi, si l'on veut faire naître dans un mobile une vîtesse double, triple, &c. de celle qu'auroit au point D, un mobile tombé par l'arc BD, il n'y a qu'à faire tomber ce premier, par l'arc ABD dont la corde soit double, triple, &c. de la corde BD.

442. Et si l'on veut faire naître dans un mobile une vîtesse connue ; par exemple, une vîtesse de 4 pieds par seconde, il n'y a qu'à déterminer, par ce qui a été dit (176), de quelle hauteur un corps devroit tomber pour acquérir une vîtesse de 4 pieds par seconde ; & ayant pris sur la verticale DC, une ligne DF égale à cette hauteur, à un point C pris au-delà sur DC, on attachera un fil de la longueur DC; & y ayant suspendu le mobile, on l'écartera au point A où la perpendiculaire FA coupe l'arc DA. Alors ce mobile parti du point A, aura en D la vîtesse de 4 pieds par seconde, c'est-à-dire, la vîtesse demandée.

Ces propriétés, & celle que nous allons démontrer de l'égalité de durée des chutes par les petits arcs de cercle, sont le fondement de la machine avec laquelle on fait en Physique les expériences sur le choc des corps. *Voyez les Leçons de Physique de M. l'abbé Nollet, la Physique de s'Gravesande, & autres.*

Du Mouvement d'Oscillation.

443. Nous venons de voir (437) qu'un corps pesant, après être descendu par l'arc quelconque de courbe AB (*fig. 27*), doit (abstraction faite de la résistance de l'air, & du frottement) remonter à pareille hauteur dans la courbe quelconque BA' qui auroit au point B la même tangente horizontale que BA. Donc ce corps retombant ensuite, parcourroit en sens contraire toute l'étendue $A'BA$; & feroit consécutivement des allées & des retours qui ne finiroient jamais. Ce mouvement est ce qu'on appelle un mouvement d'oscillation. Nous venons de voir (438) ce qu'il y avoit à faire en général, pour déterminer la durée de chaque oscillation, qui doit évidemment être le double du temps de la chute par l'arc AB, si BA' est le même que BA.

Lorsque la courbe le long de laquelle le corps descend, est un cercle, & qu'en même temps les oscillations se font par de petits arcs, elles ont cette propriété remarquable & importante, que leur durée ne dépend pas de l'étendue de l'arc AB (*fig. 29*); ensorte que l'arc AB étant petit, (comme de 4 ou 5 degrés au plus), le mobile arrivera toujours en B dans le même temps, soit qu'il parte du point A, soit qu'il parte de tout autre point O pris entre A & B. Voici comment on peut s'assurer de cette propriété.

En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus; & nommant a, le rayon BC, du cercle BAD ; nous aurons, par la nature du cercle, $y = \sqrt{(2ax - xx)}$. D'où l'on conclura aisément que l'arc Mm, ou ds, ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, est $= \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Mais comme l'arc BM est petit, ensorte que x est petite à l'égard de a, on doit, pour exprimer cette condition, supprimer xx, vis-à-vis de $2ax$; ce qui donne $ds = \frac{adx}{\sqrt{(2ax)}}$. Substituant cette valeur de ds, dans celle de dt (438); on a $dt = \frac{-adx}{\sqrt{(2ax)} \times \sqrt{(2pb - 2px)}}$, qu'on peut réduire à $dt = \frac{-\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(ap)} \times \sqrt{(bx - xx)}}$, ou $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(bx - xx)}}$.

Or de même que (93) $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont le diamètre est $2a$, de même $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx - xx)}}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont le diamètre seroit b, & l'abscisse x. Mais la ligne BZ étant b, si sur BZ comme diamètre on décrit le demi-cercle $BM'Z$, alors $M'm'$ sera cet élément; ensorte qu'on aura $\frac{\frac{1}{2}bdx}{\sqrt{(bx - xx)}} = M'm' = d(BM')$; donc $\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(bx - xx)}} = \frac{d(BM')}{b}$. Substituant cette valeur dans celle de dt, on a $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-d(BM')}{b}$; & en intégrant, $t = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer la conſtante C. Or il eſt facile de voir que lorſque $t=0$, c'eſt-à-dire, quand le corps part du point A, l'arc BM' devient la demi-circonférence $BM'Z$; donc $0=C-\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{BM'Z}{b}$, & $C=\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{BM'Z}{b}$; donc $t=\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{BM'Z}{b}-\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{BM'}{b}$, ou $t=\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{ZM'}{b}$. C'eſt-là l'expreſſion du temps employé à parcourir l'arc quelconque AM; temps qui eſt ſuppoſé compté en ſecondes.

Mais lorſque l'arc AM devient AB, c'eſt-à-dire, au bout de la demi-oſcillation, l'arc ZM' devient $ZM'B$; on a donc, en nommant $\frac{1}{2}T$ la durée de la demi-oſcillation, $\frac{1}{2}T=\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{ZM'B}{b}$, ou $T=\sqrt{\frac{a}{p}}\times\frac{2ZM'B}{b}$.

Or ſi l'on repréſente par $1:c$, le rapport du diamètre à la circonférence d'un cercle, on a $1:c::b:2ZM'B$, & par conſéquent $\frac{2ZM'B}{b}=c$; donc $T=\sqrt{\frac{a}{p}}\times c$, ou $T=c\sqrt{\frac{a}{p}}$. C'eſt-là l'expreſſion de la durée d'une oſcillation entière. Et comme cette quantité ne renferme point b, qui détermine la hauteur d'où le corps eſt deſcendu, & par conſéquent l'étendue de l'excurſion AB, il s'enſuit que le temps T ne dépend nullement de l'étendue de l'arc, tant que cet arc eſt petit. Donc *les oſcillations qui ſe font dans de petits arcs de cercle, ſont ſenſiblement iſochrones, c'eſt-à-dire, de même durée.*

12

444. Ce que nous venons de dire s'applique tout naturellement aux pendules. On appelle, en général *pendule*, tout fil ou toute verge qui tient un ou pluſieurs corps ſuſpendus ou attachés à un point fixe *C* (*fig.* 30). On l'appelle *pendule ſimple*, lorſqu'il n'y a qu'une maſſe ſoutenue par un fil ou par une verge ſans peſanteur, & qu'en même temps cette maſſe eſt d'un diamètre très-petit à l'égard de la longueur du pendule. Nous ne parlons, pour le préſent, que du pendule ſimple.

Lorſqu'on écarte le pendule, de la ſituation verticale *CB*, l'effort de la peſanteur ſur la maſſe tranſportée en *A*, agiſſant ſuivant la verticale *AM*, n'eſt pas tout employé à mouvoir le corps : une partie s'exerce ſur le point *C*. Il faut donc concevoir l'effort *AM* décompoſé en deux autres, l'un *AN* dirigé ſuivant *CAN*, & qui eſt détruit ; l'autre *AP* qui donne au corps le mouvement ſuivant l'arc *AB*. Or comme le rayon *CA* eſt perpendiculaire à l'arc, on voit donc que le mouvement ſe décompoſe ici de la même manière que ſi le corps tomboit naturellement le long de l'arc *AB*, qui a pour rayon la longueur CA du pendule. Donc en effet tout ce que nous venons de dire, s'applique immédiatement aux pendules : voici, maintenant, quelques conséquences qui résultent du calcul précédent appliqué aux pendules.

445. Nous avons trouvé pour la durée d'une oscillation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. Donc pour un autre pendule dont la longueur seroit a', & qui seroit animé par une pesanteur différente ou capable de donner la vîtesse p' dans une seconde, on auroit, en nommant T' la durée d'une oscillation, $T' = c\sqrt{\frac{a'}{p'}}$. Donc $T : T' :: c\sqrt{\frac{a}{p}} : c\sqrt{\frac{a'}{p'}} :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$; c'est-à-dire, que *si deux pendules de longueur différente, sont animés par des pesanteurs différentes; les durées des oscillations sont comme les racines quarrées des longueurs des pendules, divisées par les racines quarrées des quantités qui expriment ces pesanteurs.*

446. Comme la pesanteur est la même dans un même lieu, on doit donc dire que les durées des oscillations sont comme les racines quarrées des longueurs des pendules.

447. Mais si un même pendule étoit successivement exposé à l'action de deux pesanteurs différentes,

alors a étant égal à a', on auroit $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a}{p'}} :: \sqrt{ap'} : \sqrt{ap} :: \sqrt{p'} : \sqrt{p}$; c'eſt-à-dire, que les durées des oſcillations ſeroient en raiſon inverſe des racines quarrées des peſanteurs.

448. Soit n le nombre de vibrations que fait le pendule a dans un temps donné, comme d'une heure, ou $3600''$; on aura $T = \frac{3600''}{n}$. Par la même raiſon, ſi l'on repréſente par n' le nombre de vibrations que fait, pendant le même temps, le pendule a', on aura $T' = \frac{3600''}{n'}$; donc $T : T' :: \frac{3600''}{n} : \frac{3600''}{n'} :: n' : n$; c'eſt-à-dire que les nombres de vibrations que font, en même temps, deux pendules de longueur différente, ſont en raiſon inverſe des durées de chaque vibration.

Donc puiſqu'on a $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$, on aura $n : n' :: \sqrt{\frac{a'}{p'}} : \sqrt{\frac{a}{p}}$; c'eſt-à-dire, que *les nombres de vibrations que font, en même temps, deux pendules de longueur différente, & qui ſont ſollicités par des peſanteurs différentes, ſont en raiſon inverſe des racines quarrées des longueurs des pendules diviſées par les racines quarrées des peſanteurs.* Enſorte que ſi les peſanteurs ſont les mêmes, les nombres de vibrations ſeront réciproquement comme les racines quarrées des longueurs des pendules; & ſi les longueurs ſont les mêmes, les nombres de vibrations ſeront directement comme les racines quarrées des peſanteurs.

449. Donc ſi un même pendule porté en différens lieux de la terre n'y fait pas le même nombre de vibrations dans un même intervalle de temps, on doit en conclure que la peſanteur n'eſt pas la même en ces différens lieux; & le nombre des vibrations faites, dans un même temps, en chaque lieu, fera connoître la diminution ou l'augmentation de la peſanteur. C'eſt par ce principe qu'on s'eſt aſſuré que la peſanteur va en diminuant à meſure qu'on s'approche de l'équateur; & au contraire, va en augmentant, à meſure qu'on s'approche des poles; nous en verrons la raiſon dans peu.

450. Ce principe, que les nombres de vibrations faites dans un même temps par deux pendules différens, animés d'une même peſanteur, ſont réciproquement proportionnels aux racines quarrées des longueurs des pendules, peut ſervir à trouver la longueur du pendule à ſecondes dans un lieu quelconque.

Ayant ſuſpendu à un fil de métal très-délié, un corps qui ſous un petit volume renferme beaucoup de matière, comme une balle de plomb, de cuivre, d'or, &c., on donnera à ce fil, à compter depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre de la balle, une longueur de trois pieds au moins, & que l'on meſurera très-exactement. On fera oſciller ce pendule, en l'écartant peu de la verticale, & l'on comptera le nombre d'oſcillations qu'il fera dans un temps déterminé & bien conſtaté (je ſuppoſe ici que ce ſoit une heure); après quoi on fera cette proportion : comme 3600, nombre des oſcillations que doit faire le pendule cherché, eſt au nombre d'oſcillations obſervées, ainſi la racine quarrée de la longueur du pendule d'obſervation, eſt à un quatrième terme qui ſera la racine quarrée de la longueur du pendule à ſecondes; & en quarrant, on aura cette longueur. C'eſt ainſi qu'on a déterminé que le pendule ſimple qui fait ſes oſcillations dans une ſeconde, doit, à la latitude de Paris, avoir $3^{\text{Pi.}} o^{\text{po.}} 8^{\text{l.}},57$. Cette meſure a été déterminée par pluſieurs expériences faites avec un très-grand ſoin.

451. Il eſt facile, maintenant, de déterminer de combien doit tomber dans la première ſeconde de ſa chute un corps à qui l'air ne fait pas de réſiſtance ſenſible dans cet intervalle de temps.

En effet, l'équation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, donne $p = \frac{acc}{TT}$; valeur dans laquelle p repréſente la vîteſſe qu'un corps peſant acquiert dans la première ſeconde de ſa chute, & qui (165) eſt le double de la hauteur dont il tomberoit dans ce temps; a eſt la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le temps T; enſorte que ſi pour T, nous mettons une ſeconde, a doit être de $3^{\text{P}} \cdot o^{\text{P}} \cdot 8^{\text{l.}},57$ ou $440^{\text{l.}},57$. Enfin, c eſt le rapport de la circonférence au diamètre, & vaut par conſéquent $\frac{355}{113}$; donc $p = (\frac{355}{113})^2 \times 440,57$, quantité qui vaut $4348^{\text{l.}},25146$, & qui réduite en pieds, eſt de $30^{\text{P.}},19619$; donc l'eſpace décrit par un corps peſant, dans la première ſeconde de ſa chute, eſt de $15^{\text{Pi.}},09809$; c'eſt ce que nous avions promis (172) de faire voir.

452. Si l'on appelle t le temps qu'il faudroit à un corps peſant deſcendant librement, pour parcourir le diamètre BD ou $2a$ (*fig.* 29), on aura (175),

$2a = \frac{pt^2}{2}$; donc $\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{1}{2}t$. Substituant cette valeur dans l'équation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, on a $T = \frac{1}{2}ct$, ou $\frac{1}{2}T = \frac{1}{4}ct$ qui donne $\frac{1}{2}T : t :: \frac{1}{4}c : 1$; c'est-à-dire, que la durée de la chute par le petit arc quelconque *AB* est au temps de la chute par le diamètre, comme le quart de la circonférence est au diamètre. Or le quart de la circonférence est plus petit que le diamètre; donc un corps emploie moins de temps à tomber par un petit arc de cercle dont la tangente inférieure est horizontale, qu'il n'en emploieroit à tomber le long du diamètre. Et puisque (430) le temps de la chute par le diamètre, est le même que celui de la chute par la corde quelconque *AB*; on voit donc qu'un corps arrivera plutôt de *A* en *B*, en tombant par l'arc *AB*, qu'en tombant par la ligne droite *AB*. Ainsi la ligne droite est bien le plus court chemin, mais elle n'est pas toujours le chemin qui exige le temps le plus court.

Du Mouvement en ligne courbe, en général.

453. Puisqu'un corps qui a été mis une fois en mouvement, doit (abstraction faite de tout obstacle) persévérer dans cet état de mouvement, avec la même vîtesse & la même direction (150); il s'ensuit qu'un corps ne peut décrire une ligne courbe, à moins qu'il ne survienne une force ou un obstacle qui

change à chaque instant la direction de son mouvement.

Si la force qui agit sur le mobile suivant une direction différente de celle qu'il suit, agit à des intervalles de temps finis, & communique à chaque intervalle de temps, une vîtesse finie; le corps décrira un polygone. Par exemple, si lorsque le corps qui décrit la ligne AB (*fig.* 31) est arrivé en B, il reçoit une impulsion capable de lui faire décrire BE, dans le même temps; au lieu de décrire $BD = AB$, comme il l'auroit fait sans cette nouvelle force, il décrira (191) la diagonale BC du parallélogramme $BECD$. Et si lorsqu'il est arrivé en C, & qu'il tend à décrire CG égale & en ligne droite avec BC, une nouvelle force vient à agir sur lui, suivant CH, & tend à lui faire décrire CH dans le même temps, il décrira réellement la diagonale CF du parallélogramme $CHFG$, & ainsi de suite; ensorte que par la suite des dérangemens qu'il aura reçus, il aura décrit les côtés AB, BC, CF, &c. du polygone.

454. Mais si le mobile ayant reçu d'abord une vîtesse finie, la force qui le détourne, agit sans interruption; ou, ce qui revient au même, si elle agit à des intervalles de temps infiniment petits; & si en même temps, à chaque intervalle, elle imprime des degrés de vîtesse infiniment petits; alors les côtés

BC, CF décrits pendant la durée de chaque inſtant, ſeront infiniment petits ; & les lignes BE, CH qui marquent les actions infiniment petites de la force qui fait varier le mouvement, devant être infiniment petites en comparaiſon de celles BC, CF qui marquent la vîteſſe actuelle du mobile, les angles BCE, CFH, ou leurs égaux DBC, GCF, ſeront infiniment petits ; la trace du mobile ſera donc une ligne courbe. D'où l'on voit qu'il ne ſuffit pas, pour qu'un corps décrive une ligne courbe, que la force agiſſe à chaque inſtant infiniment petit ; il faut encore que l'action qu'elle exerce ſuivant ſa propre direction, à chaque inſtant, ſoit infiniment petite. Telle eſt l'action que la peſanteur exerce à chaque inſtant : telle eſt la réſiſtance des fluides, à chaque inſtant du mouvement.

455. Soit que la force qui agit ſur le mobile, ſoit une force active, comme la peſanteur ; ſoit qu'elle ſoit une force paſſive comme la réſiſtance d'un point fixe, ou d'un fluide en repos, ou de tout autre obſtacle ; on eſt toujours maître de conſidérer le mouvement, comme une ſuite de mouvemens compoſés, comme dans l'exemple que nous venons de rapporter ; ou bien de le conſidérer comme une ſuite de mouvemens décompoſés, de la manière ſuivante.

Par exemple, lorſque le mobile arrivé en B (*fig.* 32) eſt prêt de recevoir l'action de la force BE; je puis (287) concevoir que le mouvement BD qu'il auroit eu, ſans cette nouvelle force, eſt décompoſé en un mouvement BC qu'il doit prendre réellement, & un autre mouvement BI qui ne doit rien produire, & qui par conſéquent doit être égal & directement oppoſé à l'effort BE. Pareillement, lorſque le corps ſera arrivé en C; je concevrai le mouvement CG qu'il auroit eu ſans la force CH, comme décompoſé en un mouvement CF qu'il aura réellement, & un mouvement CK égal, & directement oppoſé à l'effort CH.

Dans quelque cas que ce ſoit, on peut toujours enviſager le mouvement, de telle de ces deux manières que l'on voudra. Mais ſi on veut l'enviſager de la manière la plus conforme à la nature; c'eſt de la première manière qu'il faut l'enviſager, lorſque la force qui fait changer le mouvement, eſt une force active, comme la peſanteur. Et lorſqu'au contraire cette force eſt une réſiſtance, comme celle d'un point fixe, &c.; c'eſt de la ſeconde manière qu'il faut l'enviſager.

456. Un corps qui ſe meut en ligne courbe, peut donc, à chaque inſtant, être conſidéré comme ſe mouvant ſur la tangente au point où il ſe trouve;

& si la force qui le détourne à chaque instant, cessoit d'agir, il persévéreroit à se mouvoir suivant cette tangente.

457. On appelle, en général, force *centrale*, la force qui détourne le corps, à chaque instant, pour lui faire décrire une ligne courbe. Si en considérant le mouvement par rapport à un point fixe, la force tend à approcher le corps de ce point, on l'appelle force *centripète* ; & au contraire on l'appelle force *centrifuge*, lorsqu'elle tend à l'éloigner de ce point.

458. Puisqu'un corps qui décrit une ligne courbe, cesseroit de la décrire, & poursuivroit son mouvement suivant la tangente, si la force centrale cessoit d'agir; on voit donc qu'à l'égard du point quelconque *A* (*fig.* 33) pris du côté de la concavité, le mobile *M*, en vertu de son mouvement sur la courbe, a véritablement une force centrifuge, puisque tendant à se mouvoir suivant *MT*, il tend à s'éloigner du point *A*, vers lequel il ne peut être ramené que par l'action de la force centrale.

Du Mouvement dans le Cercle, & de la force centrifuge.

459. Pour qu'un corps *A* libre & sans pesanteur (*fig.* 34), frappé suivant la direction quelconque *PA*,

puiſſe décrire un cercle, en vertu de la vîteſſe imprimée, & d'une force conſtante & conſtamment dirigée au point fixe C; il faut d'abord que la direction PA ſoit perpendiculaire à la ligne AC qui joint le point A de départ, & le point C. Mais cette condition ne ſuffit pas; il faut encore que la vîteſſe imprimée, ait une certaine meſure.

Suppoſons que la ligne infiniment petite AB ſoit l'eſpace qu'il auroit décrit dans un inſtant ſans l'action de la force centrale; & que (454) la ligne infiniment plus petite AD, marque l'eſpace que la force centrale agiſſant ſans interruption, lui feroit décrire dans ce même inſtant. Comme AB eſt infiniment petite, on peut regarder la force centrale, comme agiſſant ſur le mobile parallèlement à AD; donc ſi l'on mène Bb parallèle à AD, il faut que la vîteſſe AB ſoit telle que la quantité Bb dont elle auroit écarté le corps, ſoit égale à celle AD dont la force centrale peut le ramener. Voyons donc comment, par cette condition, on peut déterminer le rapport de la force centrale, à la vîteſſe imprimée.

Prolongeons le rayon AC juſqu'à ce qu'il rencontre, en E, la circonférence. Par la nature du cercle, on aura $(Db)^2 = AD \times DE$. Mais puiſque AB eſt infiniment petite, DE doit être regardée comme égale à AE ou $2CA$, on a donc $(Db)^2$ ou $(AB)^2 = AD \times 2CA$.

Repréſentons par V la vîteſſe imprimée ; alors (179) nous aurons $AB = Vdt$. Donc $V^2 dt^2 = (AB)^2 = AD \times 2CA$.

Repréſentons par g, la vîteſſe que la force centrale feroit naître, en une ſeconde de temps, dans un mobile ſoumis à ſon action ſeule répétée également à chaque inſtant. Alors (166) l'eſpace qu'elle fera décrire pendant l'inſtant dt, ſera $\frac{gdt^2}{2}$. On aura donc $AD = \frac{gdt^2}{2}$; donc $V^2 dt^2 = \frac{gdt^2}{2} \times 2CA$ ou $V^2 = g \times CA$. Soit h la hauteur, d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe V; & p la vîteſſe que la peſanteur donne dans une ſeconde ; on aura $V^2 = 2ph$ (176). Donc $2ph = g \times CA$; ce qui donne $g : p :: 2h : CA :: h : \frac{1}{2} CA$; c'eſt-à-dire, que pour qu'un corps libre & ſans peſanteur décrive une circonférence de cercle d'un rayon déterminé, en vertu d'une force dirigée à ſon centre, & d'une vîteſſe primitivement imprimée ; il faut que la force centrale ſoit à la peſanteur, comme la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe imprimée, eſt à la moitié du rayon. Ainſi, ſi la vîteſſe imprimée, & la force centrale n'ont point entre elles le rapport néceſſaire pour cela, le corps ne ne peut décrire une circonférence de cercle. Mais si ce rapport a lieu, le corps décrira l'arc *Ab*.

460. Puisque la force centrale est dirigée au centre *C*, elle est perpendiculaire à l'arc; elle ne tend donc ni à augmenter, ni à diminuer la vîtesse du corps. Donc lorsque le corps sera arrivé au point *b*, il se trouvera à l'égard de la force centrale, dans les mêmes circonstances qu'au point *A*. D'où l'on conclura que *si un corps décrit une circonférence de cercle, en vertu d'une force dirigée au centre, & d'une vîtesse imprimée; sa vîtesse est uniforme, & la force centrale est constante.*

461. Si le corps n'est point libre; si, par exemple, le corps *A* (*fig. 35*) est retenu au point fixe *C*, par le moyen d'un fil inextensible, ou d'une verge. Alors si on lui donne une impulsion suivant quelque direction que ce soit, tendante à l'écarter du centre, il décrira nécessairement la circonférence qui a *CA* pour rayon; & voici comment on doit concevoir que se passe ce mouvement.

En quelque point *A* que le corps soit arrivé, il tend à se mouvoir suivant la tangente *AB* (456). Puis donc qu'il ne peut suivre ce mouvement, il faut (287) que celui-ci se décompose en deux autres, l'un *Ab* suivant la circonférence, & qui sera celui qui aura lieu ; & l'autre *AD* qui ſoit détruit ; il faut donc que ce dernier ſoit dirigé ſuivant *CAD*, puiſqu'il n'y a que la réſiſtance du point fixe pour le détruire. Le mouvement ſe paſſera donc comme dans le cas précédent, avec cette différence ſeulement que la force centrale, au lieu d'être centripète, eſt centrifuge. Ainſi tout ce que nous avons dit du premier cas, a lieu pour celui-ci ; c'eſt-à-dire, 1°. que le mouvement ſera uniforme ; 2°. que la force centrifuge ſera la même en chaque point de la circonférence, ou que le fil ſera conſtamment tendu avec la même force. 3°. Que la force centrifuge, ſera à la peſanteur, comme la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe actuelle du mobile *A*, eſt à la moitié du rayon *CA*.

Par exemple, ſuppoſant qu'un corps d'une livre, circule à l'extrémité d'une corde de 5 pieds, avec une vîteſſe de 30,2 pieds par ſeconde. La hauteur dûe à cette vîteſſe étant 15,1 pieds, la force centrifuge de ce corps ſera à ſa peſanteur, comme $15,1 : \frac{5}{2} :: 30,2 : 5 :: 6,04 : 1$; donc ce poids d'une livre tend la corde, comme le feroit un poids immobile de 6 livres & $\frac{4}{100}$, puiſque les forces ou quantités de mouvement que le même corps *A* peut avoir, en vertu de ſa peſanteur & de ſa force centrifuge, ſont entre elles, comme les viteſſes *g* & *p* que ces deux forces peuvent engendrer dans un même temps.

462. Suppoſons que le mobile peſant *D* (*fig. 28*), retenu au point fixe *C* par le fil *CD*, oſcille autour du point

C, & décrit en oſcillant des arcs ADI d'une grandeur connue. Si l'on veut ſavoir de combien, lorſqu'il paſſe au point D, ſa force centrifuge augmente l'effort qu'il fait par ſon poids ſur le point C. Il faut mener la perpendiculaire AF; FD ſera (436) la hauteur dûe à la vîteſſe qu'il a en D. Donc (459) la force centrifuge ſera à la peſanteur $:: DF : \frac{1}{2}CA$, c'eſt-à-dire, comme le ſinus verſe de l'arc AD eſt à la moitié du rayon. Ainſi ſi l'arc AD étoit, par exemple, de 10 degrés, dont le ſinus verſe eſt à peu près $\frac{1}{66}$ du rayon; la force centrifuge ſeroit à la peſanteur $:: \frac{1}{66} : \frac{1}{2} :: 1 : 33$ à peu près; c'eſt-à-dire, que l'effort du poids ſeroit augmenté d'environ $\frac{1}{33}$.

On voit donc par-là que ſi pour tranſporter le tonneau A (*fig.* 36), on l'attache à l'aide d'une corde AC à la barre MN portée ſur les épaules par deux hommes (ainſi que cela ſe pratique en pluſieurs endroits); il y auroit un déſavantage réel dans cette manière de tranſporter les fardeaux, ſi l'un des porteurs ne contenoit avec la main les balancemens que le fardeau A peut faire par le mouvement de tranſport. Il faut cependant obſerver que ſi ces balancemens ſont petits, l'augmentation de poids cauſée par la force centrifuge, diminuera dans un beaucoup plus grand rapport que les arcs; il diminuera comme le quarré de la corde de l'arc décrit, ou comme le quarré de cet arc. Ainſi ſi l'arc, au lieu d'être de 10 degrés comme dans l'exemple précédent, n'étoit que d'un degré dont le ſinus verſe eſt $\frac{15}{100000}$ du rayon, l'effet de la force centrifuge ne ſeroit plus que $\frac{3}{10000}$ du poids.

463. Il eſt donc facile maintenant, de comparer entre elles les forces centrifuges de deux mobiles

quelconques qui décrivent des circonférences quelconques, avec des vîtesses données, ou dans des temps donnés.

En effet, l'équation $V^2 = g \times CA$ que nous avons trouvée ci-dessus, donne $g = \frac{V^2}{CA}$. Or puisque g exprime la vîtesse que la force centrale feroit naître, en une seconde de temps, dans le mobile, si elle agissoit sur lui sans interruption & également à chaque instant, $g\,dt$ sera la vîtesse qu'elle engendreroit pendant un instant. Et $A \times g\,dt$, sera la quantité de mouvement qu'elle donneroit à chaque instant au mobile; donc cette quantité de mouvement sera $\frac{A \times V^2 dt}{CA}$, en mettant pour g sa valeur. Donc si l'on appelle F la force centrifuge absolue, ou cette quantité de mouvement, pour le corps A, on aura $F = \frac{A \times V^2 dt}{CA}$; ou bien, en nommant R, le rayon CA, $F = \frac{A V^2 dt}{R}$. Donc pour une autre masse A' qui décriroit avec une vîtesse V', une circonférence qui auroit R' pour rayon, on auroit $F' = \frac{A' V'^2 dt}{R'}$, en nommant F' sa force centrifuge. Donc $F : F' :: \frac{A V^2 dt}{R} : \frac{A' V'^2 dt}{R'}$ ou $:: \frac{A V^2}{R} : \frac{A' V'^2}{R'}$; c'est-à-dire, en général, que *les forces centrifuges de deux mobiles, sont entre elles comme les masses multipliées par les quarrés des vîtesses, & divisées par les rayons des circonférences décrites.*

464. Soient C & C' ces circonférences ; T & T' les temps que les deux mobiles emploient à faire une révolution. Puiſque ces mouvemens ſont uniformes, on aura $V = \frac{C}{T}$, & $V' = \frac{C'}{T'}$, (153). Et puiſqu'en repréſentant le rapport du rayon à la circonférence par celui de 1 à c, on a $C = cR$, & $C' = cR'$; donc $V = \frac{cR}{T}$, & $V' = \frac{cR'}{T'}$; ſubſtituant pour V & V' ces valeurs, dans la proportion que nous venons de trouver, on a $F : F' :: \frac{Ac^2R^2}{RT^2} : \frac{A'c^2R'^2}{R'T'^2} :: \frac{AR}{T^2} : \frac{A'R'}{T'^2}$; donc *les forces centrifuges ſont comme les maſſes multipliées par les rayons, & diviſées par les quarrés des temps des révolutions.*

465. D'après le rapport que nous avons établi (459) entre la peſanteur & la force centrifuge, on voit donc que lorſqu'un corps ſolide, ou pluſieurs corps ſolides liés entre eux, tournent autour d'un point fixe, les parties de ces corps tendent à ſe déſunir, en s'éloignant du centre; que cet effort peut ſurpaſſer conſidérablement leur poids. Et ce que nous venons de démontrer (464) fait voir que s'ils achèvent leurs révolutions en même temps, leurs forces centrifuges ſont proportionnelles aux maſſes multipliées par les rayons; enſorte que les parties égales font d'autant plus d'effort pour ſe détacher, qu'elles ſont plus éloignées du centre de rotation.

Donc si un fluide pesant ou non pesant, circule, les parties font un effort continuel pour s'échapper & s'éloigner du centre, ensorte que si le fluide est renfermé dans un vase, & que l'on fasse une ouverture à quelque distance du centre que ce soit, le fluide s'échappera.

Par exemple, l'eau contenue dans le tambour *ADFC* (*fig. 37*), étant agitée circulairement autour de l'axe *GH*, presse la surface convexe; & cette pression se répandant par-tout (295), si l'on fait une ouverture en quelque point *R*, elle jaillira par cette ouverture.

466. C'est d'après ce principe que l'on a imaginé les soufflets continus, que l'on a proposés pour renouveler l'air dans les vaisseaux ou dans les hôpitaux. Le tambour fixe *ABC* (*fig. 38*), est ouvert dans sa partie *AC* où il reçoit le tuyau *FAC*. La roue dentée *Z* portée par le montant *DR*, tourne par le moyen de la manivelle *E*, & engrène dans une lanterne *X* dont l'arbre porte les ailes *ae*, *bf*, &c. d'un volant (*fig. 39*) placé dans l'intérieur du tambour. Celles-ci, en tournant, impriment à l'air un mouvement de rotation & une force centrifuge qui l'oblige de sortir par *F*. Près du centre *X* (*fig. 38*), sont plusieurs trous *P*, *Q* &c., par lesquels il entre de nouvel air, qui à son tour est chassé de même. Ainsi l'ouverture *F* du tuyau *FAC* aboutissant, à l'aide d'un tuyau de cuir ou autrement, hors de la cale, on peut faire sortir l'air infect, & y faire succéder un air pur. Ceux qui voudront connoître les autres moyens qu'on a imaginés pour purifier ou renouveler l'air dans les vaisseaux, peuvent consulter l'ouvrage de *M. Duhamel*, qui a pour titre: *Moyens de conserver la santé aux*

Équipages; & un Mémoire de *M. Bigot de Morogues*, qui a pour titre : *Sur la corruption de l'air dans les Vaiſſeaux ; Mémoires préſentés à l'Académie des Sciences*, *tome I.*

467. Une maſſe fluide dont les parties ne ſeroient ſollicitées par d'autres forces que par une tendance vers un point fixe C (*fig.* 40), & qui auroit une figure ſphérique dont C ſeroit le centre, conſerveroit conſtamment cette figure, ſi cette tendance ou peſanteur vers le point C, étoit la même à diſtances égales de C; cela eſt évident. Mais ſi cette maſſe a en même temps un mouvement de rotation autour d'une droite quelconque AB, elle ne pourra plus conſerver cette figure. En effet, une particule quelconque M décrivant alors un cercle qui a pour rayon PM, a une certaine force centrifuge qui tend à l'éloigner du centre P, avec un effort proportionné à ſa diſtance PM (464). Donc ſi l'on repréſente cet effort par Mm, & que l'effort de la peſanteur ou de la tendance vers C ſoit repréſenté par MO, en imaginant le parallélogramme $mMOR$, MR ſera la direction ſuivant laquelle la particule M eſt ſollicitée à ſe mouvoir ; & comme la force MO reſtant la même pour chaque particule ſituée à la ſurface, la force Mm varie, & diminue à meſure qu'on s'éloigne du grand cercle ou de l'équateur repréſenté par EQ, il eſt viſible que les forces abſolues MR, qui ſollicitent véritablement ces particules, ſont toutes différentes, & dirigées vers différens points. La maſſe doit donc perdre ſa figure ſphérique. Mais quelle que ſoit celle qu'elle pourra prendre, elle doit (297) être telle que la force abſolue MR qui ſollicite chaque particule de la ſurface, ſoit perpendiculaire à cette nouvelle ſurface ; donc la nouvelle figure $TVNX$ que prendra la maſſe, doit être telle que MR lui ſoit perpendiculaire ; donc cette maſſe doit être applatie vers les poles X & V, & renflée au

contraire dans le ſens de l'équateur, qui au lieu d'être EQ, deviendra TN.

Ceci eſt préciſément le cas de la terre qui, ſoit qu'elle ait été primitivement fluide, ſoit qu'elle ait été en partie ſolide, & en partie fluide, a dû avoir originairement une figure applatie; ſans quoi, en vertu des forces centrifuges des différentes parties, il y auroit eu un bouleverſement général juſqu'à ce que le tout eût pris la figure applatie convenable au mouvement de rotation.

MO eſt la vraie direction de la peſanteur, non pas de celle dont nous appercevons les effets; mais de celle qui auroit lieu, ſans la rotation de la terre. MR eſt celle dont nous appercevons les effets, & c'eſt ſuivant cette ligne que tombent les corps ſitués près de la ſurface de la terre vers M. Ainſi la peſanteur actuelle ne ſollicite pas les corps à deſcendre vers le centre de la terre. Mais comme les obſervations ont conſtaté que l'applatiſſement de la terre eſt petit, eu égard au rayon de l'équateur, le point S diffère peu du point C.

Comme l'angle mMO eſt néceſſairement obtus, il eſt facile de voir que MR eſt toujours plus petite que MO, & d'autant plus petite que le point M eſt plus près de l'équateur; enſorte que la peſanteur va en diminuant depuis les poles juſqu'à l'équateur. Donc (449) la longueur du pendule qui bat les ſecondes, n'eſt pas la même dans tous les lieux de la terre; elle doit diminuer à meſure qu'on s'approche de l'équateur.

Aux poles, où la force centrifuge eſt nulle, la peſanteur agit comme elle le feroit ſi la terre étoit immobile. A l'équateur, où la force centrifuge eſt directement oppoſée à la peſanteur primitive, la peſanteur eſt diminuée de toute la quantité de la force centrifuge. Dans les lieux intermédiaires, la diminution de la peſanteur décroît par deux cauſes; la première, parce que la force centrifuge n'étant pas directement oppoſée à la peſanteur primitive, n'en conſume qu'une partie d'autant moindre, que l'arc MT eſt plus grand; la ſeconde, parce que la force centrifuge diminue à proportion que le point M s'éloigne plus de l'équateur.

Du mouvement des Projectiles dans le Vide.

468. On donne, en général, le nom de *Projectile* à tout mobile qui ayant été lancé avec une force quelconque & ſuivant une direction quelconque, obéit en même temps à l'action de ſa peſanteur.

Un corps qui auroit été lancé ſuivant une direction quelconque AB (*fig. 41*) dans le vide ou dans un milieu non réſiſtant, & qui en même temps ne ſeroit pas ſoumis à l'action de la peſanteur, conſerveroit (150) éternellement la direction AB, & s'avanceroit ſuivant cette direction, conſtamment avec la même vîteſſe.

Mais ſi le mobile eſt peſant, il ne reſte qu'un inſtant ſur la direction AB. L'action de la peſanteur combinée avec la vîteſſe de projection, change, à chaque inſtant, ſa direction & ſa vîteſſe, & lui fait décrire une ligne courbe qui a pour tangente au point de départ, la ligne AB de projection.

Pour ſe former une juſte idée de la manière dont le projectile eſt mu alors, concevons que ACD eſt la ligne qu'il décrit, & qu'il ſoit actuellement au point F de cette ligne. Si on ſuppoſe que l'arc infiniment petit EF ſoit ce qu'il vient de décrire pendant un inſtant, & qu'on prolonge EF conſidérée comme une ligne droite, d'une quantité $Fg = EF$, il eſt clair (150) que pendant un inſtant égal, il décriroit Fg. Mais comme la peſanteur agit; ſi on ſuppoſe que pendant ce même inſtant, elle ſoit capable de faire décrire verticalement une ligne telle que Fi, il eſt clair que le projectile lorſqu'il eſt au point F, étant ſoumis à l'action des deux forces Fg & Fi, doit (191) décrire la diagonale Fk du parallélogramme formé ſur Fg & Fi comme côtés contigus. Telle eſt la manière dont le mouvement du corps varie à chaque inſtant.

469. Quoiqu'on puiſſe aſſez facilement conclure la nature & les propriétés de la courbe, de cette manière d'enviſager le mouvement; néanmoins, comme cette méthode exigeroit quelques intégrations, nous irons au même but par des moyens plus élémentaires, en conſidérant le mouvement comme il ſuit.

470. Si au lieu de concevoir que le mobile eſt peſant, nous le regardons comme ſans peſanteur,

& qu'en même temps qu'il ſe meut ſur la ligne AB, nous imaginions que la ligne AB (*fig.* 42) deſcend verticalement & parallèlement à elle-même, ſuivant la loi des corps graves; il eſt clair que le projectile parcourra la même ligne qu'il parcourt naturellement; car il ſe trouvera abaiſſé à chaque inſtant au-deſſous de la direction AB, de la même quantité dont il doit l'être en pareil temps par l'action de la peſanteur.

Cela poſé, imaginons que AC marque la vîteſſe de projection, c'eſt-à-dire, ce que la force de projection ſeule eſt capable de faire décrire au mobile pendant un temps déterminé, pendant une ſeconde par exemple; & que AP ſoit la quantité dont la peſanteur fait deſcendre un corps libre pendant la première ſeconde; ſoit menée PD parallèle à AB. La ligne AB, dans notre ſuppoſition, ſeroit donc arrivée en PD lorſque le projectile auroit parcouru ſur cette ligne la quantité AC; donc ſi on mène CM parallèle à AP, le point M ſera celui où ſe trouvera le mobile au bout d'une ſeconde.

Pareillement, ſi nous prenons AB double de AC, il eſt clair qu'au bout de deux ſecondes le projectile ſans peſanteur ſeroit en B. Et ſi nous prenons ſur la verticale AP, la quantité AP' quadruple de AP, AP' ſera (172) la quantité dont la direction AB ſe ſera abaiſſée au bout de deux ſecondes; donc ſi on mène les lignes BM' & PM' parallèles à AP & à AB, le point M' sera celui où le projectile sera arrivé au bout de deux secondes.

On démontrera de même, que si on prend AO triple de AC, & AP'' neuf fois aussi grand que AP, & que l'on tire les lignes OM'', $P''M''$, parallèles à AP & AB, le point M'' sera celui où le projectile sera arrivé au bout de trois secondes.

Or d'après cette construction, on voit 1°. que les lignes AP'', AP', AP, sont entre elles comme les quarrés des temps. 2°. Que les lignes AC, AB, AO, ou leurs égales PM, $P'M'$, $P''M''$, sont entre elles comme les temps : donc les lignes AP, AP', AP'', sont entre elles comme les quarrés des lignes correspondantes PM, $P'M'$, $P''M''$; d'où, & de ce qui a été dit (*Alg.* 301), il suit évidemment que la courbe est une parabole, puisque les quarrés des ordonnées PM parallèles à la tangente AB, sont entre eux comme les abscisses correspondantes AP.

Pour conclure avec facilité les autres propriétés de cette courbe, généralisons la construction précédente.

471. Supposons que la ligne quelconque AE (*fig.* 43) est la vîtesse imprimée, ou le nombre de

pieds que le mobile décriroit par chaque seconde s'il conservoit toujours cette vîtesse ; & au moment où il part du point A, conçevons cette vîtesse composée de deux autres, l'une AD horizontale, & l'autre AF verticale. Il est clair que la direction de la pesanteur étant verticale ou perpendiculaire à AD, l'action de la pesanteur ne tend ni à diminuer ni à augmenter la vîtesse AD; que par conséquent, quelque part où se trouve le mobile dans la suite de son mouvement, il conservera constamment une même vîtesse parallèlement à l'horizon. Quant à la vîtesse suivant AF, lorsque le mobile en vertu de sa vîtesse constante parallèlement à l'horizon, se trouvera s'être avancé d'une quantité quelconque AP, il ne se trouvera pas élevé à une hauteur PN égale à celle où il seroit arrivé sans l'action de la pesanteur, mais à quelque point M plus bas, dans la même ligne verticale PN; parce que sa vîtesse dans le sens vertical étant directement contraire à celle de la pesanteur, l'espace qu'il décriroit en vertu de cette vîtesse verticale, doit être diminué de tout ce que l'action de la pesanteur pourroit faire décrire à un mobile, en pareil temps.

Nommons donc V la vîtesse imprimée suivant AZ, ou le nombre de pieds que le projectile décriroit uniformément, à chaque seconde, en vertu de cette vîteſſe ; & t le temps, ou le nombre de ſecondes ou de parties de ſeconde qu'il emploieroit à venir de A, au point quelconque N. On aura $AN = Vt$ (154).

Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne en une ſeconde de temps, $\frac{pt^2}{2}$ ſera l'eſpace qu'un corps peſant décrira dans le nombre t de ſecondes (174). Donc ſi M eſt le point où le corps arrive réellement au bout du temps t, on aura $NM = \frac{1}{2}pt^2$.

Par le point A, menons la verticale AX; & par le point M, la ligne MQ parallèle à la tangente AZ; nommons AQ, x', & QM qui eſt égale à AN, y'. Nous aurons donc $x' = \frac{1}{2}pt^2$, & $y' = Vt$. Si de cette dernière équation on tire la valeur de t, pour la ſubſtituer dans la première, on aura $x' = \frac{\frac{1}{2}py'^2}{V^2}$, ou $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}x' = y'^2$. Mais (176) $\frac{V^2}{2p}$ exprime la hauteur dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe V; donc ſi on appelle h cette hauteur, on aura $\frac{V^2}{2p} = h$, & par conſéquent $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p} = 4h$; donc $4hx' = y'^2$. Donc chaque point M de la courbe AMC, a cette propriété, que le quarré de l'ordonnée y' ou QM parallèle à la tangente AZ, eſt égal au produit de l'abſciſſe AQ, par une ligne conſtante $4h$; donc (*Alg.* 301) la courbe AMC eſt une parabole qui a pour diamètre, la ligne verticale AX; qui a pour paramètre, le quadruple de la hauteur dûe à la vîtesse de projection; & dont l'angle AQM que les ordonnées font avec ce diamètre, est le complément de l'angle de projection ZAC; donc connoissant la vîtesse de projection & l'angle de projection, il sera facile de construire cette courbe, par ce qui a été dit (*Alg.* 302).

472. Rapportons présentement les différens points de cette ligne, à la ligne horizontale AC, en menant MP perpendiculaire sur AC.

Nommons AP, x; PM, y; a l'angle de projection ZAC. Dans le triangle rectangle APN, nous aurons $1 : AN :: \text{fin.}\, NAP : PN :: \text{cof.}\, NAP : AP$; donc $PM = Vt\,\text{fin.}\, a$, & $AP = Vt\,\text{cof.}\, a$; donc puisque $MN = \frac{1}{2}pt^2$, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, on a $PM = Vt\,\text{fin.}\, a - \frac{1}{2}pt^2$. On a donc $x = Vt\,\text{cof.}\, a$, & $y = Vt\,\text{fin.}\, a - \frac{1}{2}pt^2$. Tirant de la première, la valeur de t, & la substituant dans la seconde, on aura, toute réduction faite, & en mettant pour $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}$, sa valeur $4h$, $4hy\,\text{cof.}^2\, a = 4hx\,\text{fin.}\, a\,\text{cof.}\, a - xx$, qui nous fournit les propriétés suivantes.

473. Comme la vîtesse imprimée au mobile, ne peut avoir qu'une certaine mesure, son effet dans le sens vertical, doit être épuisé au bout d'un certain temps, par l'action de la pesanteur; ensorte qu'il y

aura un terme où le corps ceſſera de monter, pour deſcendre enſui e; mais comme ſa vîteſſe horizontale n'eſt point altérée, lorſqu'il ſera arrivé au point *B* le plus élevé, il décrira la ſeconde branche *BC* de la même courbe, & viendra rencontrer de nouveau l'horizontale, en un autre point *C*.

474. Pour connoître la diſtance *AC* qu'on appelle l'*amplitude du jet*, il eſt viſible qu'il n'y a autre choſe à faire, qu'à ſuppoſer $y = 0$. On aura donc $4\,h\,x\,\textit{ſin.}\,a\,\textit{coſ.}\,a - xx = 0$; qui donne $x = 0$, & $x = 4\,h\,\textit{ſin.}\,a\,\textit{coſ.}\,a$. La première valeur de x, indique le point *A*; & la ſeconde eſt celle de *AC*, que l'on déterminera en prolongeant *XA* d'une quantité $AK = 4\,h$; abaiſſant du point *K*, la perpendiculaire *KL* ſur *AZ*, & du point *L*, la perpendiculaire *LC* ſur *AC*, on aura alors $AC = 4\,h\,\textit{ſin.}\,a\,\textit{coſ.}\,a$.

Ainſi connoiſſant la vîteſſe de projection & l'angle de projection, il eſt très-facile de calculer l'amplitude. Par exemple, ſi l'on demande quelle ſeroit l'amplitude de la parabole décrite par un projectile lancé avec une vîteſſe de 150 pieds par ſeconde, ſous un angle de 36^{d}. On trouvera (176) que la hauteur *h* dûe à la vîteſſe de 150 pieds, eſt $= \frac{(150)^2}{2 \times 30{,}2} = 372^{Pi.},5$; & comme le ſinus de 36^{d} eſt 0,5878, le rayon étant 1; & ſon coſinus $= 0{,}809$; on aura $AC = 4\,h\,\textit{ſin.}\,a\,\textit{coſ.}\,a = 1490 \times 0{,}5878 \times 0{,}809 = 708^{Pi.},6$; c'eſt-à-dire, que le corps retomberoit à la diſtance de 709 pieds.

475.

475. La valeur $AC = 4\,h\,\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a$ ne change point ſi au lieu de l'angle a on met ſon complément, puiſque dans ce dernier cas elle devient $AC = 4\,h\,\text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,a$, ainſi qu'il eſt évident. Or les deux valeurs a & $90^d - a$ ſont également éloignées de 45^d; donc *les projections faites avec une même charge de poudre, ſous des angles également éloignés de 45^d, donnent la même portée.*

476. La même valeur $AC = 4\,h\,\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a$ fait encore voir que depuis 0^d juſqu'à 45^d, les portées vont toujours en augmentant; & que paſſé 45^d elles vont en diminuant, puiſqu'il eſt aiſé de voir que paſſé ce terme, les valeurs de a ſont les complémens de celles qu'on avoit en deçà; donc *de toutes les projections faites avec une même force de poudre, celle de 45^d donne la plus grande amplitude.*

477. Puiſque l'angle a eſt alors de 45^d dont le ſinus & le coſinus ſont chacun $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, le rayon étant 1; il s'enſuit qu'alors l'amplitude devient $AC = 4\,h \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 4\,h \times \frac{1}{2} = 2\,h$; donc *la plus grande amplitude eſt égale an double de la hauteur dûe à la viteſſe de projection.*

478. On peut auſſi, en employant la méthode donnée (36), trouver le réſultat auquel nous ſommes parvenus (476). Il faut donc différencier la valeur de AC, en regardant h

comme conſtante, & a comme variable, & égaler la différentielle à zéro. Ainſi, d'après ce qui a été dit (22 & 23), on trouvera $4\,h\,d\,a\,cof.^2\,a - 4\,h\,d\,a\,fin.^2\,a = 0$, d'où l'on tire $\frac{\text{fin.}^2\,a}{\text{cof.}^2\,a} = 1$, ou $tang.^2\,a = 1$; donc $tang.\,a = 1$; l'angle cherché eſt donc celui dont la tangente eſt égale au rayon; c'eſt donc (*Géom.* 276) l'angle de 45^d.

479. Si on ſavoit avec une exactitude ſuffiſante quelle vîteſſe une quantité de poudre donnée peut imprimer à un projectile connu, il ſeroit donc très-facile de conclure immédiatement l'amplitude. Mais, au défaut de cette connoiſſance, une ſeule expérience ſuffira pour déterminer, à l'aide des principes précédens, l'amplitude de toute autre projection faite avec la même force de poudre.

En effet, ſuppoſons qu'ayant lancé un projectile avec une quantité de poudre connue, & ſous une inclinaiſon connue, on ait meſuré l'amplitude ou la portée; il ſera très-facile d'en conclure la valeur de h, puiſqu'en repréſentant cette portée par b', & l'angle d'inclinaiſon par a', on aura $b' = 4\,h\,fin.\,a'\,cof.\,a'$; donc $h = \frac{b'}{4\,\text{fin.}\,a'\,\text{cof.}\,a'}$; ſi on ſubſtitue cette valeur de h dans la valeur de AC, que je repréſente par b, on aura $b = \frac{b'\,\text{fin.}\,a\,\text{cof.}\,a}{\text{fin.}\,a'\,\text{cof.}\,a'}$; d'où l'on tire $b : b' ::$ $fin.\,a\,cof.\,a : fin.\,a'.\,cof.\,a'$; c'eſt-à-dire, que les portées, à inclinaiſons différentes, ſont comme les ſinus de projection, multipliés par leurs coſinus.

480. D'après ce qui a été dit (*Géom.* 286), il est aisé de voir que $fin.\ a\ cof.\ a = \frac{1}{2} fin.\ 2\ a$; donc $b : b' :: fin.\ 2\ a : fin.\ 2\ a'$, c'est-à-dire, que *les portées sont entre elles comme les sinus du double des angles de projection.*

481. La portée à laquelle on est dans l'usage de comparer toutes les autres, est celle de 45 degrés; donc puisque, pour cet angle, on a $fin.\ 2\ a = 1$, on aura $b : b' :: 1 : fin.\ 2\ a'$, & par conséquent $b' = b\ fin.\ 2\ a'$; c'est-à-dire, que *la portée sous un angle quelconque, est égale à la portée sous 45 degrés, multipliée par le sinus du double de l'angle de projection.*

482. C'est sous l'angle de 45 degrés qu'on éprouve ordinairement la force de la poudre, & c'est avec raison; parce que c'est aux environs de 45 degrés que les erreurs que l'on peut commettre dans la mesure de l'angle d'inclinaison, produisent le moindre effet sur l'étendue de la portée. En effet, dans l'équation $b = 4\,h\,fin.\ a\ cof.\ a$, si on suppose que l'on se trompe sur la valeur de a d'une très-petite quantité $d\,a$ & qu'on veuille avoir l'erreur qui en résultera sur la portée b, il n'y a qu'à différencier en regardant b & a comme variables, & l'on aura $d\,b = 4\,h\,d\,a\ cof.^2\ a - 4\,h\,d\,a\ fin.^2\ a = 4\,h\,d\,a\ (cof.^2\ a - fin.^2\ a)$. Donc l'erreur db sera d'autant plus petite, que $fin.\ a$ différera moins de

cos. a. Or plus l'angle d'inclinaison approche de 45 degrés, & plus en effet *sin. a* approche de *cos. a*; donc à 45 degrés les erreurs sur la portée, résultantes des erreurs sur l'angle d'inclinaison, sont les plus petites qu'il est possible.

483. Proposons-nous actuellement de déterminer la portée des pièces de *but en blanc*. C'est-à-dire, supposons que la pièce AB (*fig.* 44) soit tellement disposée, que sa ligne de mire CD soit horizontale. Le boulet lancé suivant la direction ABG de l'axe, décrira la parabole $BLKF$ qui rencontrera la ligne de mire prolongée en deux points L & F, le premier près de la pièce, & le second F plus loin. C'est-à-dire, que le boulet parti du point B au-dessous de la ligne de mire, s'élevera au-dessus de cette ligne, puis s'approchera pour la rencontrer au point F. Il s'agit donc de déterminer la distance horizontale DF, ou en imaginant l'horizontale BM, & la verticale FM, il s'agit de déterminer BM.

Soit a l'angle que la ligne de mire fait avec l'axe, c la distance de l'axe au point le plus élevé D du renflement du bourlet; on aura, en abaissant la perpendiculaire BN, $DN = c\,sin.\,a$, & $BN = c\,cos.\,a = FM$.

L'angle GBM, qui est ici l'angle de projection, est égal à l'angle BED, & par conséquent $= a$.

Cela posé, l'équation de la courbe BKF (472) étant $4hy\,cos.^2 a = 4hx\,sin.\,a\,cos.\,a - xx$; il est clair que pour avoir BM, il ne s'agit que de substituer dans cette équation, au lieu de y, la valeur FM ou $c\,cos.\,a$, & en tirer la valeur de x. On aura donc $4hc\,cos.^3 a = 4hx\,sin.\,a\,cos.\,a - xx$, qui donne $x = 2h\,sin.\,a\,cos.\,a \pm \sqrt{(4hh\,sin.^2 a\,cos.^2 a - 4hc\,cos.^3 a)}$. Mais comme l'angle a est fort petit, il n'y a pas de différence sensible entre son cosinus & le rayon, ainsi on peut écrire $x = 2h\,sin.\,a \pm \sqrt{(4hh\,sin.^2 a - 4ch)} = 2h\,sin.\,a \pm 2h\,sin.\,a\sqrt{\left(1 - \frac{c}{h\,sin.^2 a}\right)}$. Or comme h est toujours une quantité fort grande en comparaison des dimensions de la pièce, la quantité $\frac{c}{h\,sin.\,a}$ est toujours fort petite, & l'on peut par conséquent (*Alg.* 133) prendre pour valeur suffisamment approchée de $\sqrt{\left(1 - \frac{c}{h\,sin.^2 a}\right)}$, la quantité $1 - \frac{c}{2h\,sin.^2 a}$; on aura donc $x = 2h\,sin.\,a \pm 2h\,sin.\,a\left(1 - \frac{c}{2h\,sin.^2 a}\right)$ qui donne ces deux valeurs de x, $x = 4h\,sin.\,a - \frac{c}{sin.\,a}$, & $x = \frac{c}{sin.\,a}$, dont la dernière donne la distance BO, & la première, la distance BM ou la portée de *but en blanc.*

Si nous mettons au lieu de h, sa valeur trouvée (477), nous aurons pour la portée de *but en blanc*, la quantité $x = 2\,b\,\textit{ſin}.\,a - \frac{c}{\text{ſin}.\,a}$, b étant la portée à 45 degrés.

Ainſi pour la pièce de 12 légère, dont la portée eſt d'environ 1800 toiſes ſous 45 degrés ; & dont (*Géom.* 301) l'angle de la ligne de mire avec l'axe, eſt de $0^d\ 58'$, & $c = 4^{\text{po.}},926 = 0^{\text{Pi.}},4105 = 0^{\text{Toi.}},0684$, on aura $x = 3600 \times \textit{ſin}.\ 0^d\ 58' - \frac{0,0684}{\text{ſin}.\ 0^d\ 58'} = 3600 \times 0,01687 - \frac{0,0684}{0,01687} =$ 57 toiſes à peu près.

Cette portée diffère beaucoup de la portée de *but en blanc*, connue par l'expérience ; & cela doit être ainſi ; car la portée de 1800 toiſes ſous 45 degrés, que nous employons pour déterminer la portée de *but en blanc*, eſt beaucoup au-deſſous de ce qu'elle ſeroit dans le vide, & que pour des portées auſſi fortes dans l'air, le calcul dans la parabole, ſeroit tout à fait illuſoire. Nous en verrons la preuve dans peu.

484. L'équation $4\,h\,y\,\textit{coſ}.^2\,a = 4\,h\,x\,\textit{ſin}.\,a\,\textit{coſ}.\,a - x\,x$, renfermant quatre quantités, fournit la ſolution de quatre queſtions différentes, dans leſquelles trois de ces quatre quantités ſeroient données. De ces quatre queſtions, nous n'examinerons que la ſuivante.

Connoiſſant la force de la poudre, la diſtance horizontale & la hauteur verticale d'un but propoſé, trouver l'inclinaiſon qu'on doit donner au mortier, pour atteindre ce but.

Soit *M* (*fig.* 45) le but propoſé. Ayant imaginé la perpendiculaire MP; on doit regarder la diſtance AP, & l'angle MAP, comme connus. Soit donc l'angle $MAP = b$, & la diſtance $AP = c$; on aura $MP = \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,b}$. On a donc pour le point M, $x = c$, & $y = \frac{c\,\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,b}$. Subſtituant ces valeurs, dans l'équation en x & y, on a $4h\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}^2 a = 4h\,\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,b - c\,\text{coſ.}\,b$; mais (*Géom.* 287), on a $\text{coſ.}\,2a = \text{coſ.}\,a\,\text{coſ.}\,a - \text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,a = \text{coſ.}^2 a - \text{ſin.}^2 a = \text{coſ.}^2 a - 1 + \text{coſ.}^2 a = 2\,\text{coſ.}^2 a - 1$; donc $\text{coſ.}^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{coſ.}\,2a$. Et (*Géom.* 286) $\text{ſin.}\,2a = \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a + \text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a = 2\,\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a$; donc $\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,a = \frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,2a$.

Subſtituant ces valeurs, on a $2h\,\text{ſin.}\,b + 2h\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,2a = 2h\,\text{ſin.}\,2a\,\text{coſ.}\,b - c\,\text{coſ.}\,b$, ou $2h\,\text{ſin.}\,2a\,\text{coſ.}\,b - 2h\,\text{ſin.}\,b\,\text{coſ.}\,2a = 2h\,\text{ſin.}\,b + c\,\text{coſ.}\,b$, ou (*Géom.* 286) $2h\,\text{ſin.}\,(2a - b) = 2h\,\text{ſin.}\,b + c\,\text{coſ.}\,b$; donc enfin $\frac{2h}{\text{coſ.}\,b}\,\text{ſin.}\,(2a - b) = \frac{2h\,\text{ſin.}\,b}{\text{coſ.}\,b} + c$, qui donne la conſtruction ſuivante.

Ayant élevé ſur AM la perpendiculaire indéfinie AE; du milieu D de $AK = 4h$, on mènera ſur AK la perpendiculaire DE qui coupera AE en un point E, duquel, comme centre, & du rayon EA, on décrira l'arc $ANN'K$; & ayant prolongé PM juſqu'à ce qu'elle rencontre cet arc aux points N & N', ſi on tire ANZ, $AN'Z'$, ces lignes ſeront les deux directions suivant lesquelles un mobile étant lancé avec une vîtesse dûe à la hauteur h, peut également arriver au point M.

En effet, il est facile de voir que l'angle EAD du triangle rectangle ADE, est égal à MAP. Donc puisque $AD = 2h$, on a $ED = \frac{2h \sin. b}{\cos. b}$; & puisque $AP = c$, on a donc $ED + AP$, ou $EI = \frac{2h \sin. b}{\cos. b} + c$; donc $\frac{2h \sin. (2a - b)}{\cos. b} = EI$. Mais dans le même triangle ADE, on a $AE = \frac{2h}{\cos. b}$; donc $AE \sin. (2a - b) = EI$.

Concevons l'arc KNA prolongé jusqu'à ce qu'il rencontre, en G, la verticale GE; & des points N & N' menons les perpendiculaires NL, $N'L'$. Dans le triangle NEL, on a $NE : NL$, ou $AE : EI ::$ $1 : \sin. NEG$; donc $AE \times \sin. NEG = EI$; donc on a aussi $\sin. (2a - b) = \sin. NEG$; & $2a - b = NEG = NEA + b$; donc $a = \frac{1}{2} NEA + b$. Mais à cause que l'angle NAM a son sommet à la circonférence, & que AM est tangente, on a $NAM = \frac{1}{2} NEA$; d'ailleurs l'angle $MAP = b$; donc $a = NAM + MAP = NAP$; donc le point N satisfait à la question.

On prouvera de même, que le point N' y satisfait aussi; parce que dans le triangle $N'EL'$ on a

$N'E : N'L'$ ou $AE : EI :: 1 : \mathit{fin}. N'EL'$ ou $:: 1 : \mathit{fin}. N'EG$; donc $AE \mathit{fin}. N'EG = EI$; donc auſſi $\mathit{fin}. (2a - b) = \mathit{fin}. N'EG$, & $2a - b = N'EG = N'EA + b$; donc $a = \frac{1}{2} N'EA + b = N'AM + MAP = N'AP$.

Si le but étoit au-deſſous du niveau de la batterie, on feroit b négatif.

485. Ainſi avec une même force de projection, on peut toujours faire tomber un projectile ſur un même but M, ſuivant deux directions différentes, pourvu que AP n'excède pas DR. La direction AN' eſt la plus avantageuſe lorſqu'il s'agit d'écraſer avec la bombe des édifices, ou autres objets. La direction AN eſt préférable lorſqu'on ne veut que renverſer, & que le projectile, après avoir rencontré le but, puiſſe encore en ſe relevant, ravager à quelque diſtance en formant des *Ricochets*.

486. Déterminons préſentement le temps que le projectile emploie à parvenir au but propoſé.

L'équation $x = Vt \mathit{coſ}. a$ fournit l'expreſſion très-ſimple $t = \frac{x}{V \mathit{coſ}. a}$. Subſtituant dans cette expreſſion, pour x ſa valeur c, & pour V ſa valeur $\sqrt{(2ph)}$, on aura $t = \frac{c}{\mathit{coſ}. a \sqrt{(2ph)}}$. Or nous avons vu ci-deſſus, comment on détermine h, par expérience ; & nous ſavons que $p = 30^{\text{pi.}},2$.

L'expreſſion générale du temps, que nous venons de donner, peut ſervir à régler les fuſées des bombes.

487. Enfin ſi l'on veut ſavoir quelle eſt la plus grande hauteur DB (*fig.* 43) à laquelle le projectile pourra s'élever, on remarquera que DB étant alors un *maximum*, ſa différentielle (36) doit être zéro. On différenciera donc l'équation $4hy\, cof.^2\, a = 4hx\, fin.\, a\, cof.\, a - xx$, en regardant y & x ſeules comme variables, & égalant dy à zéro, on aura $4hdx\, fin.\, a\, cof.\, a - 2xdx = 0$; d'où l'on tire $x = 2h\, fin.\, a\, cof.\, a$. Cette valeur de x étant ſubſtituée dans l'équation, donne $y = h\, fin.^2\, a = BD$. Diſons un mot des *Ricochets*.

488. Le *Ricochet* eſt ce mouvement par lequel un projectile après avoir rencontré un obſtacle quelconque, ſe relève, ſe réfléchit pour recommencer un mouvement ſemblable à celui qu'il avoit d'abord. Plus la direction ſuivant laquelle le mobile eſt lancé, fait un petit angle avec l'horizon, & plus (toutes choſes d'ailleurs égales) le projectile eſt dans le cas de faire ricochet ; parce qu'alors la force de projection s'exerce preſque toute entière dans le ſens horizontal, & ne peut être conſumée par la réſiſtance de l'air &

les autres obstacles, qu'en beaucoup plus de temps. Si le projectile étoit sans ressort; que la surface sur laquelle il tombe fût horizontale & sans flexibilité, il ne pourroit y avoir de ricochet; parce que la vîtesse du projectile arrivant en C (*fig.* 46) suivant la direction quelconque MC, se décomposeroit en deux autres, dont l'une QC perpendiculaire à la surface, seroit purement & simplement détruite sans aucune restitution, puisqu'il n'y a point de ressort; l'autre vîtesse PC subsisteroit, abstraction faite du frottement & de la résistance de l'air, & le corps glisseroit le long de CZ.

489. Mais si au point C (*fig.* 47) où le mobile rencontre la surface, il se trouve une éminence CE; le mouvement suivant MC se décomposera en un mouvement QC perpendiculaire à la surface CE de cette éminence, & un autre PC suivant cette surface, par lequel le mobile s'avancera suivant la direction PE, & pourra décrire en quittant le point E une nouvelle courbe de même nature que celle qu'il auroit décrite s'il eût été lancé, au point E, suivant CE avec la même vîtesse; ensorte qu'il s'élevera jusqu'à un certain terme, puis reviendra rencontrer encore la surface en un autre point I, où il pourra recommencer un mouvement semblable si les circonstances sont semblables.

490. Le ricochet dont nous venons de parler, dépend donc de la poſition de l'obſtacle que le mobile rencontre. Mais ſi l'obſtacle eſt flexible ou mobile, comme la terre, l'eau, &c. il peut y avoir ricochet, quand même la ſurface ſeroit parfaitement horizontale. En effet, par la vîteſſe verticale *QC* (*fig. 48*) le mobile tend à s'enfoncer & s'enfonce plus ou moins, ſelon la nature de l'obſtacle, tandis qu'avec la vîteſſe *PC*, il laboure le terrein & forme un ſillon dont la profondeur augmente juſqu'à ce que la vîteſſe verticale *QC* ſoit éteinte. Alors par la vîteſſe reſtante dans le ſens horizontal, il refoule devant lui la matière qui s'oppoſe, & l'écarte pour ſe frayer un paſſage du côté où il éprouve le moins de réſiſtance; dans ce refoulement, la cavité du ſillon devient à l'égard du mobile, ce que la ſurface *CE* de la *fig. 47* étoit dans le cas précédent. Or comme la facilité de ſortir eſt évidemment d'autant plus grande (toutes choſes d'ailleurs égales) que la profondeur totale du ſillon ſera moins grande, & que cette profondeur dépend de la vîteſſe verticale *QC*, qui ſera d'autant plus petite que l'angle *MCP* ſera plus petit, ou que l'angle de projection *RAZ*, aura été plus petit, on voit comment la facilité du ricochet dépend de ce que l'angle de projection ſoit petit.

491. Le ricochet dépend encore beaucoup de la

figure du projectile. S'il s'agit, par exemple, d'un ricochet sur l'eau, & que le projectile soit sphérique, il faut, pour qu'il puisse y avoir ricochet, que la vîtesse MC soit telle que la vîtesse verticale QC puisse être consumée avant que le diamètre vertical soit entièrement plongé ; car dès qu'une fois celui-ci est entièrement plongé, la résistance de l'eau agit également de part & d'autre de la direction du mobile, ensorte qu'il ne peut plus être détourné que par l'action de la pesanteur qui ne tend elle-même qu'à empêcher le ricochet.

492. Comme l'enfoncement ne se fait que successivement, il est facile de voir que pendant la durée de cet enfoncement, le centre décrit une ligne courbe ; parce que la direction suivant laquelle se fait la résistance, change continuellement. Par exemple, si lorsque le centre C (*fig.* 49) après avoir décrit la trace quelconque PC tend à se mouvoir suivant le prolongement CI de sa direction actuelle, on imagine deux tangentes BR, DS parallèles à cette direction ; il est évident qu'il n'y a que la partie BVL qui éprouve la résistance : & que si le corps est sphérique, la résultante CK de toutes les résistances faites sur les différens points de BVL, aura une direction qui tend à élever le corps au-dessus de CI ; ensorte qu'en imaginant le parallélogramme

CIEK, *CE* ſera la route que le corps prendra, pendant un inſtant, au lieu de *CI*, abſtraction faite de la peſanteur.

493. Enfin ſi le mobile & l'obſtacle ſont flexibles; s'ils ſont à reſſort; ces circonſtances peuvent encore contribuer à faciliter le ricochet. Pour en donner un exemple, prenons un cas très-ſimple; ſuppoſons que le mobile ſeul eſt flexible & à reſſort, & que ce reſſort ſoit parfait; faiſons de plus, abſtraction de la peſanteur. A l'inſtant où le mobile lancé ſuivant *AC* (*fig. 50*) vient toucher la ſurface, ſa vîteſſe ſe décompoſe en une vîteſſe horizontale *QC* qui ſubſiſtera toujours la même, s'il n'y a point de frottement, & point de réſiſtance de la part du milieu dans lequel le corps ſe trouve. Quant à la vîteſſe perpendiculaire ou verticale *PC*, elle comprime le corps & ne s'éteignant que ſucceſſivement tandis que la vîteſſe horizontale ſubſiſte, il eſt clair que le centre *C* s'approche du plan *HZ* par des degrés qui vont toujours en décroiſſant, tandis que ceux par leſquels il s'avance parallèlement à *HZ*, demeurent les mêmes. Donc ſi l'on conçoit qu'à chaque inſtant on forme un parallélogramme dont le côté horizontal ſoit au côté vertical, comme la vîteſſe horizontale eſt à la vîteſſe reſtante dans le ſens vertical, la diagonale de ce parallélogramme qui

doit, pour chaque inſtant, marquer la route du centre, ſera différente & différemment ſituée à chaque inſtant, enſorte que le centre C s'approchera de HZ en décrivant une ligne courbe pendant le temps de la compreſſion. Lorſque la compreſſion ceſſera de ſe faire, le centre C ſera mu pendant un inſtant, ſur la tangente parallèle à HZ; après quoi le reſſort ſe débandant, reſtituera au corps des degrés de vîteſſe par leſquels le centre tendra à s'écarter du plan, de la même manière qu'il s'en eſt approché pendant la compreſſion, & décrira la ſeconde branche RO parfaitement égale à RC. Enfin lorſqu'il ſera arrivé au point O éloigné de HZ d'une quantité égale au rayon IC, il ſe mouvra ſuivant la tangente OT ſituée de la même manière que AC; c'eſt-à-dire, que le choc oblique d'un corps à reſſort contre un plan inflexible & inébranlable, ſe fait (abſtraction faite de la peſanteur), de manière que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence; chacun de ces deux angles étant meſuré par celui que font avec le plan horizontal les tangentes aux extrémités C & O de la courbe que le centre décrit pendant la compreſſion & la reſtitution du reſſort; courbe qui eſt d'autant plus petite que cette compreſſion & reſtitution approchent plus d'être inſtantanées.

494. Si l'on a égard à la peſanteur, & que BD

ſoit la ligne ſuivant laquelle le corps eſt lancé ; il décrira la portion DC de parabole dont AC eſt la tangente, juſqu'à ce qu'il touche le plan ; puis lorſque la compreſſion aura ceſſé, il décrira une autre portion OS de parabole, parfaitement égale à la première, & poſée de la même manière.

495. Le frottement contribue encore à la facilité du ricochet ; parce qu'il occaſionne dans le mobile une rotation qui le met à même de ſurmonter plus facilement les obſtacles : c'eſt ce qu'on verra encore mieux quand nous aurons parlé du frottement. Telles ſont les cauſes & les circonſtances principales des ricochets.

Quant à la nature de la courbe que décrit le projectile en s'enfonçant, & au rapport de l'angle d'incidence avec l'angle de réfraction ; il faudroit connoître la loi de la réſiſtance du milieu dans lequel s'enfonce le projectile. Et il n'y a guère que les fluides proprement dits où cette loi ſoit connue ; mais les équations qui peuvent ſervir à déterminer ce mouvement dans les fluides, ne paroiſſant pas ſuſceptibles d'intégration par les méthodes connues, nous n'entreprendrons pas de traiter cette matière plus rigoureuſement.

Du mouvement

Du mouvement des Projectiles dans les milieux résistans.

496. Nous venons de voir que lorsque le milieu ne résiste pas, la courbe que décrivent les projectiles, est une parabole ; & que connoissant une seule portée faite sous un angle connu, on peut déterminer facilement quelle sera la portée sous toute autre inclinaison connue.

Il n'en est pas de même lorsque le milieu résiste, du moins sensiblement ; la courbe est plus composée, & il est moins facile de conclure les portées les unes des autres.

497. Quoique l'air, environ 850 fois moins dense que l'eau, puisse paroître, par cette raison, ne devoir pas opposer une résistance considérable au mouvement des projectiles ; cependant l'extrême vîtesse avec laquelle sont lancés les projectiles en usage dans l'Artillerie, ne permet guère de douter que la résistance ne puisse avoir un rapport sensible avec le poids de ces projectiles ; & l'on sent par conséquent qu'il est indispensable d'y avoir égard, lorsqu'on voudra conclure d'une portée connue, celle qui aura lieu pour une autre inclinaison.

498. Avant que d'établir aucune théorie sur ce point, voyons ce que l'expérience nous apprend sur cette résistance.

EPREUVES *faites à la Fère, en Juin 1740, avec une pièce de 24, chargée à neuf livres de poudre.*

ANGLES de PROJECTION.	PORTÉES OBSERVÉES.	Ce qu'auroient dû être les Portées dans le vide, en regardant celle de 15 degrés comme faite dans le vide.
degrés.	toises.	toises.
4. . . .	. . . 820. . . .	. . . 467.
15. . . .	. . . 1675. . . .	. . . 1675.
20. . . .	. . . 1740. . . .	. . . 2153.
25. . . .	. . . 1825. . . .	. . . 2566.
30. . . .	. . . 1910. . . .	. . . 2901.
35. . . .	. . . 2020. . . .	. . . 3148.
40. . . .	. . . 2050. . . .	. . . 3300.
45. . . .	. . . 2200. . . .	. . . 3350.

La troisième colonne de cette Table est fondée sur la formule $b = 4\,h\,\textit{sin.}\,a\,\textit{cos.}\,a = 2\,h\,\textit{sin.}\,2\,a$ (475 & 480). Supposant $a = 15$ degrés, & $b = 1675$, on trouve $h = 1675$. Ainsi la formule devient $b = 3350\ \textit{sin.}\ 2\,a$.

Supposant donc successivement $a = 20^d$, $a = 25^d$, &c. on trouve les nombres marqués dans la troisième colonne.

Cela posé, la comparaison de la seconde & de la troisième colonne, établit bien sensiblement une résistance considérable de la part de l'air. En effet, 1°. en prenant la portée de 15 degrés comme faite dans le vide, on suppose la force de la poudre moindre qu'elle n'eſt réellement; puiſqu'il eſt évident qu'il a fallu plus de force pour porter à 1675 toiſes dans un milieu réſiſtant, que dans un milieu vide. Il s'enſuit donc que la portée que l'on en conclura pour 4 degrés dans le vide, non-ſeulement doit être plus petite que celle qui auroit lieu dans le même vide avec la véritable force de la poudre, mais qu'elle peut même être plus petite que celle qui aura lieu dans le milieu réſiſtant, ſi l'erreur que l'on commet dans cette ſuppoſition, ſur la force de la poudre, eſt conſidérable; & c'eſt ce qui a lieu en effet, la portée dans le vide n'étant que de 467 toiſes, tandis que dans le milieu réſiſtant, elle a été trouvée de 820 toiſes.

2°. Quoiqu'il ſoit par-là évident que la force de la poudre ſeroit eſtimée beaucoup au-deſſous de ſa valeur, en regardant la portée ſous 15 degrés comme faite dans le vide, on voit néanmoins par la comparaiſon des autres portées, que la réſiſtance de l'air a conſidérablement altéré ces portées, telles qu'elles ont été obſervées. En effet, la troiſième colonne fait voir qu'avec la force de la poudre eſtimée comme ci-deſſus, c'eſt-à-dire, beaucoup plus foible qu'elle n'eſt réellement, les portées auroient dû être conſidérablement plus grandes que ſelon l'expérience. Il eſt donc indubitable que du moins, pour les grandes charges de poudre, la réſiſtance altère tellement les portées, qu'on ne pourroit, ſans s'expoſer à commettre des erreurs conſidérablement plus grandes que ce que l'on cherche, conclure ces portées les unes des autres, dans l'hypothèſe ordinaire que la courbe des projectiles eſt une parabole.

499. Voyons préſentement comment la théorie peut nous mettre en état de conclure d'une portée

connue, celle qui doit avoir lieu ſous toute autre inclinaiſon donnée.

Concevons que ABC (*fig.* 51) eſt la courbe cherchée, & que le mobile décrit actuellement l'arc infiniment petit Mm. Sans l'action de la réſiſtance & de la peſanteur, il décriroit dans l'inſtant ſuivant une ligne mq, ſituée ſur le prolongement de Mm. Suppoſons que pendant cet inſtant la réſiſtance puiſſe le retarder de la quantité qn, & que la peſanteur puiſſe le faire deſcendre de la quantité nm'; le point m' ſera donc celui où il arrivera dans le ſecond inſtant.

Menons qr parallèle à la verticale MP, & ns parallèle à l'horizontale AC. Nommons AP, x; PM, y; l'arc AM, s; & ſuppoſons que R & p marquent la réſiſtance & la peſanteur du mobile dans le fluide, c'eſt-à-dire, les vîteſſes que ces forces engendreroient en une ſeconde, ſi elles agiſſoient également à chaque inſtant pendant la durée de cette ſeconde. On aura Rdt & pdt pour les vîteſſes qu'elles engendrent pendant un inſtant (163).

Concevons que la diminution de vîteſſe que produit la réſiſtance, & qu'on peut ſuppoſer repréſentée par qn, ſoit décompoſée en deux autres, l'une qs, verticale; & l'autre qo, horizontale; on aura nq:

$sq :: Rdt$ est à la diminution de vîtesse occasionnée par la résistance dans le sens vertical ; on aura de même $nq : sn :: Rdt$ est à la diminution de vîtesse dans le sens horizontal. Or, en tirant Mt parallèle à AC, on a $nq : sq : sn :: Mm : mt : Mt ; :: ds : dy : dx$; donc la diminution de vîtesse suivant qs sera $\frac{Rdydt}{ds}$, & celle suivant sn, sera $\frac{Rdxdt}{ds}$. Donc si à la première on joint l'action pdt de la pesanteur, on aura $\frac{Rdydt}{ds} + pdt$, & $\frac{Rdxdt}{ds}$ pour les diminutions de vîtesse, tant dans le sens vertical que dans le sens horizontal.

Mais tandis que le corps décrit Mm, il s'avance parallèlement à PM de la quantité tm ou dy ; & parallèlement à AP, de la quantité Mt ou dx. Donc sa vîtesse parallèlement à PM est $\frac{dy}{dt}$; & parallèlement à AP, elle est $\frac{dx}{dt}$. Donc lorsqu'il décrira mm', ces vîtesses seroient $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, si elles alloient en croissant ; donc $-d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $-d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ sont les diminutions de ces vîtesses. On a donc $\frac{Rdydt}{ds} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $\frac{Rdxdt}{ds} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Ce sont-là les deux équations dont l'intégration déterminera le mouvement & la courbe. Voyons-en quelques applications.

500. Si la résistance est nulle, on a $pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $0 = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, qui donnent, en intégrant, $pt = C - \frac{dy}{dt}$, & $C' = \frac{dx}{dt}$.

Pour déterminer ces deux constantes, supposons que AZ est la ligne de projection ; que l'angle ZAC soit a; & que la vîtesse de projection soit V; on aura $V\, cos.\, a$ pour la vîtesse horizontale initiale; & $V\, sin.\, a$ pour la vîtesse verticale initiale. Donc les constantes C & C' doivent être telles que lorsque $t = 0$, on ait $\frac{dx}{dt} = V\, cos.\, a$ & $\frac{dy}{dt} = V\, sin.\, a$. On a donc $0 = C - V\, sin.\, a$, & $C' = V\, cos.\, a$. Donc $pt = V\, sin.\, a - \frac{dy}{dt}$, & $V\, cos.\, a = \frac{dx}{dt}$. Donc en intégrant de nouveau, $y = Vt\, sin.\, a - \frac{1}{2}pt^2$, & $x = Vt\, cos.\, a$; intégrales auxquelles nous n'ajouterons point de constantes, parce que y & x deviennent zéro dans cette équation lorsque $t = 0$, ainsi que cela doit être. Si on substitue dans la première de ces deux équations la valeur de t tirée de la seconde, on aura $y = \frac{x\, \text{sin.}\, a}{\text{cos.}\, a} - \frac{\frac{1}{2}p\,x^2}{V^2\, \text{cos.}^2\, a}$; ou en appellant h la hauteur dûe à la vîtesse V, $y = \frac{x\, \text{sin.}\, a}{\text{cos.}\, a} - \frac{x^2}{4\,h\, \text{cos.}^2\, a}$, équation qui est absolument la même que nous avons trouvée pour ce cas (472).

501. Supposons présentement que la résistance soit proportionnelle au quarré de la vîtesse ; ce qui (375) est la loi de la résistance des fluides.

D'après ce qui a été dit (382), nous aurons $nDSu^2dt$ pour la quantité de mouvement que la résistance détruit pendant un instant dt ; & par conséquent, en appellant M la masse du projectile, on aura $\frac{nDSu^2dt}{M}$ pour la vîtesse qu'elle lui fait perdre dans un instant, ou pour valeur de ce que nous venons de représenter par Rdt ; donc $R = \frac{nDSu^2}{M}$; faisons $\frac{nDS}{M} = \frac{p}{k^2}$, & substituons pour u sa valeur $\frac{ds}{dt}$; nous aurons $R = \frac{p}{k^2} \times \frac{ds^2}{dt^2}$.

Nos deux équations générales (499) deviendront donc $\frac{pdyds}{k^2dt} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\frac{pdxds}{k^2dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Pour plus de simplicité, supposons dt constant ; nous aurons $\frac{pdyds}{k^2} + pdt^2 = -ddy$, & $\frac{pdxds}{k^2} = -ddx$.

Substituons dans la première de ces deux équations, la valeur de ds tirée de la seconde ; nous aurons $\frac{-dyddx}{dx} + pdt^2 = -ddy$, ou $pdt^2 = \frac{dyddx - dxddy}{dx} = -dx \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Mais l'équation $\frac{pdxds}{k^2} = -ddx$, étant multipliée par k^2dt^2, donne $pdxdsdt^2 = -k^2dt^2ddx$. Subſtituant pour pdt^2 ſa valeur $-dx \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, nous aurons $-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)ds = -k^2dt^2ddx$. Or $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; donc enfin $dx^3d\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = k^2dt^2ddx$ ou $d\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = k^2dt^2 \times \frac{ddx}{dx^3}$; c'eſt-là l'équation qu'il s'agit d'intégrer pour avoir la courbe décrite par le projectile.

502. Comme dt eſt conſtant, le ſecond membre eſt facile à intégrer, & ſon intégrale eſt $\frac{-k^2dt^2}{2dx^2}$. Voyons comment nous intégrerons le premier.

503. Obſervons que $\frac{dy}{dx}$ eſt la tangente de l'angle que la courbe fait en chaque point avec l'horizontale. Faiſons $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1-zz}$; z ſera la tangente de la moitié de cet angle. En effet, d'après ce qui a été dit (*Géom.* 286), ſi a marque un angle quelconque, on a $\textit{ſin.}\ 2a = 2\ \textit{ſin.}\ a\ \textit{coſ.}\ a$, & $\textit{coſ.}\ 2a = \textit{coſ.}^2\ a - \textit{ſin.}^2\ a$; donc $\frac{\text{ſin. } 2a}{\text{coſ. } 2a}$ ou $\textit{tang.}\ 2a = \frac{2\ \text{ſin. } a\ \text{coſ. } a}{\text{coſ.}^2\ a - \text{ſin.}^2\ a}$, ou en diviſant par $\textit{coſ.}^2\ a$, $\textit{tang.}\ 2a = \frac{\frac{2\ \text{ſin. } a}{\text{coſ. } a}}{1 - \frac{\text{ſin.}^2\ a}{\text{coſ.}^2\ a}} = \frac{2\ \text{tang. } a}{1 - \text{tang.}^2\ a}$.

504. Cela posé, si nous faisons en effet $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1-zz}$, nous aurons $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2(1+zz)}{(1-zz)^2}\,dz$; & $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{\left(1+\frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1+2z^2+z^4}{(1-zz)^2}\right)} = \frac{1+zz}{1-zz}$.

Notre équation deviendra donc $\frac{2(1+zz)^2}{(1-zz)^3}\,dz = k^2dt^2\,\frac{ddx}{dx^3}$. Or d'après la méthode donnée (103), on trouvera que l'intégrale du premier membre est $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \int\frac{dz}{1-zz}$, ce que l'on peut d'ailleurs vérifier aisément par la différenciation.

D'ailleurs, par ce qui a été dit (108 & 111), on trouvera que $\int\frac{dz}{1-zz} = \frac{1}{2}\,log.\,\frac{1+z}{1-z}$; on aura donc $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \frac{1}{2}\,log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C - \frac{k^2dt^2}{2\,dx^2}$.

505. Déterminons d'abord la constante C. Nommoms I l'angle de projection. Au point de projection, nous aurons $ds : dx :: 1 : cos\!f.\,I$, & par conséquent $dx = ds\,cos\!f.\,I$; donc $dx^2 = ds^2\,cos\!f.^2\,I$.

Soit V la vîtesse de projection; nous aurons au point de projection $ds = Vdt$. Nous aurons donc $dx^2 = V^2dt^2\,cos\!f.^2\,I$, & par conséquent $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{V^2\,cos\!f.^2\,I}$. Soit h la hauteur d'où le projectile devroit tomber dans le vide pour acquérir, en vertu du poids qu'il a dans l'air, la vîtesse de projection V, on aura $V^2 = 2ph$ (176). Donc $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{1}{4ph\,\text{cos.}^2 I}$. Substituons cette valeur dans notre équation, en mettant en même temps, *tang.* $\frac{1}{2} I$ pour z, & nous aurons. . . . .

$$\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}I + \text{tang.}^3\frac{1}{2}I}{(1 - \text{tang.}^2\frac{1}{2}I)^2} + \frac{1}{2}\,\textit{logarithme}\;\frac{1 + \text{tang.}\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}\frac{1}{2}I} =$$

$C - \frac{k^2}{4ph\,\text{cos.}^2 I}$, équation qui donnera la valeur de C.

506. Reprenons maintenant notre intégrale, & substituons-y pour dt^2 sa valeur tirée de l'équation $pdt^2 = -dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui, à cause de $\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1 - zz}$, devient $pdt^2 = -dx \times d\left(\frac{2z}{1 - zz}\right)$. Nous aurons

$$\frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} + \frac{1}{2}\,\text{log.}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = C + \frac{k^2 d\left(\frac{2z}{1 - zz}\right)}{2p\,dx};$$

d'où l'on tire $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1 - zz}\right)}{C - \frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} - \frac{1}{2}\,\text{log.}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)}$.

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer pour avoir la courbe décrite par un projectile dans un milieu résistant dont la densité seroit constante.

507. On ne peut, par les méthodes connues, intégrer généralement cette équation. Et les méthodes ordinaires d'approximation ne peuvent avoir ici d'application que pour le cas où elles sont le moins utiles,

c'eſt-à-dire, pour le cas où la vîteſſe n'eſt pas conſidérable. Lorſque la vîteſſe eſt fort petite, la quantité C eſt fort grande ; alors on peut négliger toute la partie variable du dénominateur, & l'équation ſe réduit à $\frac{2p\,dx}{k^2} = -\frac{1}{C}\,d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$.

Dans la même ſuppoſition, la valeur de C ſe réduit à $C = \frac{k^2}{4ph\,\text{coſ.}^2 I}$; enſorte qu'on a $dx = -2h\,\text{coſ.}^2 I \times d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$ dont l'intégrale eſt $x = C' - 2h\,\text{coſ.}^2 I \times \frac{2z}{1-zz}$. Or lorſque $\frac{2z}{1-zz}$ ou $\frac{dy}{dx}$ eſt $=$ *tang.* I, on doit avoir $x = 0$; donc $0 = C' - 2h\,\text{coſ.}^2 I \times \text{tang.}\ I$, & $C' = 2h\,\text{ſin.}\ I\,\text{coſ.}\ I$; donc $x = 2h\,\text{ſin.}\ I\,\text{coſ.}\ I - 2h\,\text{coſ.}^2 I \times \frac{2z}{1-zz} = 2h\,\text{ſin.}\ I\,\text{coſ.}\ I - \frac{2h\,dy}{dx} \times \text{coſ.}^2 I$; d'où l'on tire $\frac{x^2}{2} = 2hx\,\text{ſin.}\ I\,\text{coſ.}\ I - 2hy\,\text{coſ.}^2 I$, & par conſéquent $4hy\,\text{coſ.}^2 I = 4hx\,\text{ſin.}\ I\,\text{coſ.}\ I - xx$; équation qui eſt la même que pour le vide (472) ; enſorte que quand la vîteſſe eſt fort petite, la courbe eſt une parabole, comme dans le vide.

508. Si la vîteſſe, ſans être fort petite, eſt telle néanmoins que C ſoit conſidérablement plus grand que la plus grande valeur de $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2}$ +

$\frac{1}{2}$ *log.* $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$; alors on peut intégrer par approximation en faisant la division (*Alg.* 135) du numérateur — $d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)$ par le dénominateur $C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \frac{1}{2}$ *log.* $\frac{1+z}{1-z}$, en regardant celui-ci comme un binome, dont le premier terme est C. Après quoi réduisant $\frac{2z}{1-zz}$, $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2}$, & *log.* $\frac{1+z}{1-z}$ en série, on a pour valeur de $\frac{2pdx}{k^2}$, une suite de monomes faciles à intégrer, & qui forme une série d'autant plus convergente, que C est plus grand. Mais nous nous arrêterons d'autant moins à cette sorte d'approximation, qu'outre qu'elle est bornée à un petit nombre de cas, ces cas seront d'ailleurs compris dans l'approximation suivante.

509. Réduisons d'abord en série la quantité $\frac{1}{2}$ *log.* $\frac{1+z}{1-z}$. Nous aurons (87) . . . .

$$\frac{1}{2} \text{ log. } \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{11}}{11}, \text{ \&c.}$$

Multiplions cette quantité par $(1 - zz)^2$, & ajoutons le produit au numérateur de $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2}$; nous aurons . . . .

$$\frac{2z - 2z^3 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{8}{15}z^5 + \frac{8}{105}z^7 + \frac{8}{315}z^9 + \frac{8}{693}z^{11}, \text{ \&c.}}{(1-zz)^2}$$

Notre équation deviendra donc . . . .

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z - 2z^3 + \frac{4}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \&c.}{(1-zz)^2}},$$

que l'on peut réduire à . . . .

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 + \frac{4}{105}z^6 + \&c.}{1-zz}\right)}.$$

510. Cela posé, si la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 \&c.}{1-zz}$ étoit constante ; ou si, sans s'exposer à commettre des erreurs beaucoup plus grandes que celles qui peuvent arriver dans la pratique, on pouvait supposer que la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 \&c.}{1-zz}$ est égale à une constante a, l'équation s'intégrerait fort aisément, puisqu'alors on aurait $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$ dont le second membre est une différentielle logarithmique. Voyons donc jusqu'à quel point on peut supposer que la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 \&c.}{1-zz}$ est constante.

511. Comme z marque la tangente de la moitié de l'angle que la courbe fait avec l'horizon en un point quelconque, sa plus grande valeur dans la

branche descendante, est la tangente de la moitié de l'angle de projection. Supposons, par exemple, que l'angle de projection soit de 25 degrés; le terme $\frac{\frac{2}{3}z^2}{1-zz}$ ou $\frac{2z}{1-zz} \times \frac{1}{3}z$, qui est beaucoup plus grand que les suivans, sera *tang.* $25^d \times \frac{1}{3}$ *tang.* $12^d\ 30'$; or cette quantité revient à environ 0,034; ainsi, dans toute l'étendue de la branche ascendante, la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4 \text{ \&c.}}{1-zz}$ ne varieroit que depuis environ 1,034 jusqu'à 1. Donc, au moins jusqu'à 25 degrés, on peut supposer sans beaucoup d'erreur, que $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 + \frac{4}{15}z^4}{1-zz}$ est une quantité constante.

512. pour savoir quelle est la quantité constante la plus convenable à substituer à la place de $1 + \frac{\frac{2}{3}z^2 \text{ \&c.}}{1-zz}$, je remarque que, puisque la vîtesse de projection est fort grande, la branche ascendente doit dans sa plus grande partie *AC* (*fig.* 52), être sensiblement rectiligne, & que par conséquent z doit y conserver à très-peu près sa valeur initiale dans toute l'étendue *AC*. Donc la supposition convenable est de faire $z =$ *tang.* $\frac{1}{2}I$.

513. Ainsi, 1.° pour les projections faites sous des angles peu au-dessus de 25 degrés, l'équation $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{c - \frac{2az}{1-zz}}$ représente la courbe

avec une exactitude suffisante, du moins quant à la partie ascendante, en supposant $a = 1 + \frac{\frac{2}{3}\,\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\,\text{tang.}^4\,\frac{1}{2}I,\ \&c.}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I}$.

514. A l'égard de la partie descendante, quoique z doive, après avoir passé le point D, où l'inclinaison est la même qu'au point A, avoir des valeurs de plus en plus grandes; cependant l'erreur qui peut résulter de notre supposition, n'influe pas sur cette branche autant que sur la première. Car z étant alors négatif, le dénominateur $C - \frac{2z}{1-zz}(1 + \&c.)$ au lieu d'être la différence des deux quantités, est leur somme, & par conséquent, l'erreur sur ce dénominateur influe d'autant moins sur la valeur de la fraction. Donc à moins que la courbe ne dût, au point de chute E, faire un très-grand angle avec l'horison, on pourra prendre l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$ pour celle de la courbe entière.

515. Examinons plus particulièrement ce que notre approximation peut produire sur les portées.

La valeur $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}(1 + \&c.)}$ devenant la plus petite qu'il est possible, lorsque

$z = 0$, c'eſt-à-dire, au ſommet de la courbe, fait voir que $\frac{2px}{k^2}$ eſt la différence entre une certaine conſtante, & l'intégrale de $\frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}(1 + \&c.)}$, c'eſt-à-dire, que $\frac{2px}{k^2} = C' - \int \frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2z}{1-zz}(1 + \&c.)}$.

Donc, ſelon que notre approximation rendra la quantité ſous le ſigne $\int$ trop grande ou trop petite; la portée ſera, au contraire, trop petite ou trop grande.

516. Or nous ſuppoſons à a dans la quantité $\frac{-d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$, une valeur qui, dans la branche aſcendante, eſt véritablement plus grande que le facteur auquel nous la ſubſtituons, & qui augmente, par conſéquent, la quantité ſous le ſigne $\int$. Donc pour la branche aſcendante, notre approximation tend à donner les portées plus petites que dans un milieu d'une denſité uniforme.

517. Dans la branche deſcendante, où z eſt négatif, l'équation devient $2px = C' + \int \frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C + \frac{2z}{1-zz}(1 + \&c.)}$; la valeur de a y eſt

encore

encore trop grande depuis B (*fig.* 52) jusqu'au point D où l'inclinaison redevient la même qu'au point A, & par conséquent notre approximation rend encore la portée trop petite. Mais passé le point D, la valeur de a est trop petite, & rend par conséquent la quantité sous le signe $\int$ trop grande; ce qui augmente la portée.

Mais comme l'augmentation qui se fait de D en E, ne peut pas compenser la diminution qui se fait de A en D, il s'ensuit qu'en général, notre approximation donneroit les portées trop courtes, si nous avions la valeur exacte de C.

Cependant comme la constante C' n'est déterminée que par approximation, sa valeur contribue à compenser en très-grande partie ce que la supposition sur la valeur de a, peut introduire d'altération; ensorte que, même pour des angles assez grands, les portées seront, en général, assez exactes, dans la supposition d'une densité uniforme.

518. Il ne seroit pas bien difficile de rendre notre approximation beaucoup plus rigoureuse, en donnant une autre forme au dénominateur de la valeur de dx; mais nous ne nous livrerons à cette recherche que sur la fin de ce volume, parce que l'équation devenue plus exacte pour les portées qui

auroient lieu dans un milieu uniforme, n'en seroit pas pour cela beaucoup plus conforme à l'expérience, si en même temps nous ne donnions pas le moyen d'avoir égard au changement de densité. Or cette recherche nous mèneroit trop loin pour le présent.

519. Venons donc à l'équation finale.

Donnons d'abord à C, & au facteur a, la forme la plus commode pour le calcul numérique.

Nous avons $a = 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\frac{2}{3}\,\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\,\text{tang.}^4\,\frac{1}{2}I + \frac{4}{105}\,\text{tang.}^6\,\frac{1}{2}I\ \&c.}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I}.$$

Nous pouvons donner à a cette autre forme,

$$a = 1 + \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I} \times \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\,\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\,\textit{tang.}^3\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{105}\,\textit{tang.}^5\,\tfrac{1}{2}I\ \&c.\right),$$

& puisque $\frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I} = \textit{tang.}\ I$, nous aurons

$$a = 1 + \textit{tang.}\ I \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\tfrac{1}{3}\,\textit{tang.}\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\,\textit{tang.}^3\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{105}\,\textit{tang.}^5\,\tfrac{1}{2}I\ \&c.\right).$$

A l'égard de C, nous avons trouvé ci-dessus

$$C = \frac{k^2}{4ph\,\text{cos.}^2\,I} + \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}I + \text{tang.}^3\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I} + \ldots$$

$\frac{1}{2}\,\textit{log.}\left(\frac{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}I}\right)$; or en réduisant en série, & raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus (509 &

suiv.) pour z, nous trouverons $C = \frac{k^2}{4ph\,\text{cos.}^2 I} +$
$\frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}\,\text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\,\text{tang.}^4\,\frac{1}{2}I + \&c.}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I}\right)$;
c'est-à-dire, $C = \frac{k^2}{4ph\,\text{cos.}^2 I} + a\,\textit{tang.}\,I.$

520. Cela posé, nous avons donc. . . . .
$\frac{2p\,dx}{k^2} = -\frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{2az}{1-zz}}$, dont l'intégrale (100) est $\frac{2px}{k^2} = C' + \frac{1}{a}\,\textit{log.}\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$.

Pour déterminer la constante C', je remarque qu'au point de projection A (*fig.* 52) on doit avoir $x = 0$; or au point A on a $\frac{2z}{1-zz} = \textit{tang.}\,I$; donc $0 = C' + \frac{1}{a}\,\textit{log.}\,(C - a\,\textit{tang.}\,I)$; & par conséquent $C' = -\frac{1}{a}\,\textit{log.}\,(C - a\,\textit{tang.}\,I) = \frac{1}{a}\,\textit{log.}\,\frac{k^2}{4ph\,\text{cos.}^2 I}$, en mettant pour C sa valeur. Donc $\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a}\,\textit{log.}\,\frac{4ph\,\text{cos.}^2 I}{k^2}\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$. Donc en prenant e pour le nombre dont le logarithme est 1, on aura $e^{\frac{2apx}{k^2}} = \frac{4ph\,\text{cos.}^2 I}{k^2}\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$, &
$\frac{2z}{1-zz} = \frac{1}{a}\left(C - \frac{k^2}{4ph\,\text{cos.}^2 I}\,e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$. Mais on a
$\frac{dy}{dx} = \frac{2z}{1-zz}$; donc $dy = \frac{C\,dx}{a} - \frac{k^2 dx}{4aph\,\text{cos.}^2 I}\,e^{\frac{2apx}{k^2}}$.
Intégrant de nouveau, & déterminant la constante

par la condition que y ſoit zéro, lorſque x ſera zéro, on aura $y = \frac{Cx}{a} + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,cof.^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, ou, en mettant pour C ſa valeur. . . . .

$$y = \left(tang.\,I + \frac{k^2}{4aph\,cof.^2 I}\right)x + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,cof.^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right).$$

Telle eſt l'équation réſultante de la première approximation par laquelle on peut déterminer les portées depuis les plus petites vîteſſes juſqu'à celles au moins que ſuppoſe la Table des épreuves rapportées ci-deſſus (*page* 155).

521. Si la réſiſtance eſt petite, & qu'en même temps la vîteſſe de projection ſoit médiocre; enſorte que l'amplitude doive être ſenſiblement plus petite que $\frac{k^2}{2ap}$; alors la plus grande valeur de $\frac{2apx}{k^2}$ ſera une petite fraction, & l'on poura, au lieu de $e^{\frac{2apx}{k^2}}$, prendre ſa valeur (90) approchée $1 + \frac{2apx}{k^2} + \frac{2a^2p^2x^2}{k^4} + \frac{4a^3p^3x^3}{3k^6}$, &c. L'équation deviendra $y = x\,tang.\,I + \frac{k^2x}{4aph\,cof.^2 I} - \frac{k^2x}{4aph\,cof.^2 I} - \frac{x^2}{4h\,cof.\,I} - \frac{apx^3}{6k^2h\,cof.^2 I}$, &c. qui ſe réduit à $y = x\,tang.\,I - \frac{x^2}{4h\,cof.^2 I} - \frac{apx^3}{6k^2h\,cof.^2 I}$, &c.

Et ſi la réſiſtance eſt abſolument nulle, enſorte que $\frac{p}{k^2} = 0$, on a $y = x\,tang.\,I - \frac{x^2}{4h\,cof.^2 I}$, ou $4hy\,cof.^2 I = 4hx\,ſin.\,I\,cof.\,I - xx$, équation qui eſt abſolument la même que celle que nous avons trouvée (472), ainsi que cela doit être.

522. Si la résistance, sans être absolument nulle, est telle néanmoins que $\frac{k^2}{2ap}$ doive être plus grand que x, x étant l'amplitude; on pourra déterminer la courbe à l'aide de la série $y = x \text{ tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ cos}.^2 I} - \frac{apx^3}{6k^2 h \text{ cos}.^2 I}$, &c. prolongée suffisamment, selon le degré de petitesse de la fraction $\frac{2apx}{k^2}$. Mais à moins que $\frac{2apx}{k^2}$ ne soit une fraction assez petite, il sera plus court & plus exact d'employer l'équation exponentielle ci-dessus.

523. Nous allons voir, tout-à-l'heure, que pour l'épreuve sous 15 degrés, rapportée dans la Table ci-dessus, on a $\frac{2ap}{k^2} = 0,0016597$; & comme cette même épreuve donne $x = 1675$, on a donc $\frac{2apx}{k^2} = 2,78$ à très-peu près; donc pour les portées comprises dans cette même Table, on ne peut pas faire usage de la série $y = x \text{ tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ cos}.^2 I} - \frac{apx^3}{6k^2 h \text{ cos}.^2 I}$, &c. qui seroit divergente.

524. Voyons présentement jusqu'à quel point cette théorie s'accorde avec l'expérience.

Nous avons entendu par p, la pesanteur du projectile dans l'air; ou plutôt la vîtesse que recevroit, en une seconde de temps, le projectile tombant dans le vide, mais avec la diminution du poids du volume d'air dont il occupe la place (312).

Soit $2r$ le diamètre du boulet; $1 : c$ le rapport du diamètre à la circonférence ; on aura $\frac{4}{3}\,cr^3$ pour le volume du boulet. Donc D étant la densité de l'air, & D' celle du boulet, on aura $\frac{4}{3}\,D'cr^3$ pour la masse du boulet, & $\frac{4Dcr^3}{3}$ pour celle du volume d'air dont il occupe la place.

Soit p' la vîtesse que la pesanteur donne, en une seconde de temps, à un corps libre ; $p'dt$ sera celle qu'elle donne en un instant ; ainsi $\frac{4D'cr^3}{3}\,p'dt$ sera le poids du boulet dans le vide, & $\frac{4Dcr^3}{3}\,p'dt$ sera celui du volume d'air dont il occupe la place ; donc $\frac{4cr^3}{3}\,p'dt\,(D'-D)$ sera le poids du boulet dans l'air ; divisant donc par la masse $\frac{4cr^3}{3}\,D'$ du boulet, on aura $p'dt\left(\frac{D'-D}{D'}\right)$ pour la vîtesse que la pesanteur donne réellement dans l'air au boulet pendant un instant, on aura donc $p'dt\left(\frac{D'-D}{D'}\right)=p\,dt$, ou $p=\frac{D'-D}{D'}\,p'$.

La pesanteur spécifique de l'air est la 850e partie de celle de l'eau ; celle du fer fondu est à celle de l'eau $::\,7{,}114:1$; donc $D':D::6047:1$; donc $p=\frac{6046}{6047}\,p'$. Comme cette fraction diffère extrêmement peu de l'unité, nous prendrons $p=p'=30^{\text{P}},2=5^{\text{T}},03333$, dont le logarithme est $log.\,p=0{,}7018556$.

Nous avons supposé $\frac{nDS}{M}=\frac{p}{k^2}$. Or (382) $n=\frac{1}{2}$; & (396) $S=\frac{1}{2}S'$, S' étant la surface du grand cercle du boulet. D'ailleurs $S'=cr^2$; donc $S=\frac{1}{2}cr^2$. Nous venons de voir que $M=\frac{4}{3}cr^3D'$. Substituant ces valeurs, nous aurons $\frac{nDS}{M}=\frac{p}{k^2}=\frac{3}{8}\times\frac{D}{D'}\times\frac{1}{2r}$.

Or nous avons $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6047}$, $2r = 5^{po.},444 =$ $0^{P.},453666 = 0^{T.},075611$. D'où l'on conclura $log.\ \frac{p}{k^2} =$ $6,9139057$.

525. Proposons-nous d'abord de déterminer la force de la poudre, c'est-à-dire, la hauteur h dûe à la vîtesse du boulet au sortir de la pièce.

Comme la première épreuve rapporté dans la Table ci-dessus, a été faite sous 4 degrés, qui est un fort petit angle, ce seroit bien la plus propre à notre objet, si l'on étoit bien assuré que le boulet au sortir de la pièce suivoit exactement une direction inclinée de 4 degrés à l'horizon; mais une petite erreur sur cet angle, devenant comparable à cet angle même, pourroit nous donner une mesure trop fautive, de la force de la poudre. L'angle de 15 degrés est d'un degré de petitesse qui permet d'y appliquer légitimement notre calcul, & en même temps assez grand, pour que l'incertitude qu'il pourroit y avoir sur la différence de la vraie direction du boulet, à cet angle, ne puisse pas avoir d'effet sensible sur la mesure que nous cherchons.

Prenons donc la portée 1675 que l'on a trouvée sous 15 degrés; c'est-à-dire, supposons $x = 1675$. Alors dans l'équation $y = x\left(tang.\ I + \frac{k^2}{4aph\ cof.^2 I}\right) +$ $\frac{k^4}{8a^2p^2h\ cof.^2 I}\left(1 = e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, si nous faisons $y = 0$, & $x = 1675$, la valeur de h sera celle qui résultera de l'équation $0 = 1675\left(tang.\ I + \frac{k^2}{4aph\ cof.^2 I}\right. +$ $\frac{k^4}{8a^2p^2h\ cof.^2 I}\left(1 - e^{\frac{2ap}{k^2}} \times 1675\right)$.

Nous connoissons $\frac{k^2}{p}$; *tang. I* & *cos. I* sont faciles à trouver par les Tables; il n'y a donc que a à calculer. Cela posé, on trouvera. . . . . *log. tang.* 15^{d} 0' = 9,4280525.

log. cos. 15. 0 = 9,9849438.

tang. 15. 0 = 0,26795.

log. tang. 7. 30 = 9,1194291.

Donc,

puisqu'on a $a = 1 + tang.\,I\,(\frac{1}{3}\,tang.\,\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\,tang.^3\,\frac{1}{2}I + \&c.)$ on procédera ainsi au calcul;

log. tang. $\frac{1}{2}$ *I.* . .	9,1194291.	*log. tang.*^{3} $\frac{1}{2}$ *I.* . .	7,3582873.
compt. *log.* 3. . .	9,5228787.	*log.* 2.	0,3010300.
		compt. *log.* 15. . .	8,8239087.
log. $\frac{1}{3}$ *tang.* $\frac{1}{2}$ *I.* . .	8,6423078.	*log.* $\frac{2}{15}$ *tang.*^{3} $\frac{1}{2}$ *I.* .	6,4832260.

Donc $\frac{1}{3}\,tang.\,\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\,tang.^3\,\frac{1}{2}I = 0{,}04389 + 0{,}00030 = 0{,}04419.$

Log. 0,04419. . . . 8,6453240.

Log. tang. I. . . . . 9,4280525.

Donc *log. tang. I* $(\frac{1}{3}\,tang.\,\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\,tang.^3\,\frac{1}{2}I)$. . . 8,0733765.

qui répond à. . . . . 0,01184.

Donc $a = 1{,}01184$, & . . . . *log.* a = 0,0051119.

Cela posé, on a . . . . *log.* $\frac{k^2}{p}$ = 3,0860943.

Compl. *log. a.* . . . 9,9948881.

Compl. *log.* 2. . . . 9,6989700.

donc *log.* $\frac{k^2}{2ap}$. . . . . . 2,7799524.

& *log.* $\frac{2ap}{k^2}$. . . . . . 7,2200476.

log. 1675. . . . . . . 3,2240148.

Log. $\frac{2ap}{k^2} \times 1675$. . . . 0,4440624.

qui répond à. . . . . 2,780112.

De plus. . . . . $log. \frac{k^2}{2ap}$ . . . . 2,7799524.

Compl. $log.$ 2. . . . 9,6989700.

$Log. \frac{k^2}{4ap}$ . . . . 2,4789224.

Compl. $log. cof.^2. I$. . . . 0,0301124.

$Log. \frac{k^2}{4ap\,cof.^2 I}$ . . . . 2,5090348.

$Log. \frac{k^2}{2ap}$ . . . . 2,7799524.

$Log. \frac{k^4}{8a^2p^2\,cof.^2 I}$ . . . 5,2889872.

Donc $\frac{k^4}{8a^2p^2\,cof.^2 I} = 194530,27.$

D'ailleurs. . . . . $log. \frac{k^2}{4ap\,cof.^2 I}$ . . . . 2,5090348.

$log.$ 1675. . . . . 3,2240148.

$Log. \frac{1675\,k^2}{4ap\,cof.^2 I}$ . . . . . 5,7330496.

Donc $\frac{1675\,k^2}{4ap\,cof.^2 I} = 540816.$

Enfin $log. tang. I$ . . . . . 9,4280525.

$log.$ 1675 . . . . . . 3,2240148.

$log.$ 1675 $tang. I$. . . . 2,6520673.

Donc 1675 $tang.$ = 448,815.

notre équation devient donc. . . . .

$$0 = 448,815 + \frac{540816}{h} + \frac{194530,27}{h}(1 - e^{2,780112}).$$

Or, en général, e^b exprime le nombre qui a b pour logarithme hyperbolique, & par conséquent (88) le nombre qui a $b \times 0,4342945$ pour logarithme ordinaire. Multipliant donc 2,780112 par 0,4342945, on aura 1,2073873 pour le logarithme ordinaire de $e^{2,780112}$; or ce logarithme répond à

16,120829 ; donc . . . .

$$0 = 448{,}815 + \frac{540816}{h} - \frac{194530{,}27 \times 15{,}120829}{h} \text{ ou}$$

$$0 = 448{,}815 - \frac{2400643}{h}\text{ ; donc } h = \frac{2400643}{448{,}815} = 5348^{\text{T.}}{,}85\text{ ;}$$

& ſon logarithme ou *log.* $h = 3{,}7282603$.

526. On voit donc qu'un boulet de 24, à la charge de 9 livres de poudre, part avec une vîteſſe initiale dûe à la hauteur de $5348^{\text{T.}}{,}85$ ou de 32093 pieds. Or un corps tombant de cette hauteur dans le vide, acquerroit (176) une vîteſſe de 1393 pieds par ſeconde. Donc une charge de 9 livres de poudre donne au boulet de 24, au ſortir de la pièce, une vîteſſe de 1393 pieds par ſeconde.

527. On voit par-là, 1°. la confirmation de ce que nous avons dit (421) ſur la force de la poudre; 2°. la différence prodigieuſe qui en réſulte pour l'eſtimation de la force de la poudre. En effet, en regardant la portée ſous 15 degrés comme faite dans le vide, la hauteur h ſeroit de 1675 toiſes; au lieu qu'ici elle eſt de 5349 toiſes. 3°. Que quoique d'après la comparaiſon de la ſeconde & de la troiſième colonne de la Table donnée (*p.* ~~195~~ 146), on ne trouve pour 20 degrés, que 413 toiſes de différence entre la portée obſervée & celle qui auroit dû avoir lieu dans le vide, ſi celle de 15 degrés pouvoit être ſuppoſée avoir été faite auſſi dans le vide; néanmoins la différence entre la portée obſervée & la portée qui auroit eu véritablement lieu dans le vide, eſt beaucoup plus grande. En effet, puiſque la force de la poudre eſt meſurée par $5348^{\text{T}}{,}85$ au lieu de 1675, il eſt facile de conclure de la formule $2h \sin. 2a$, que ſous 20 degrés dans le vide, la portée auroit été de 6876 toiſes. Or elle n'a été dans l'air que de 1740; donc

la réſiſtance de l'air a diminué la portée des trois quarts de ce qu'elle devoit être.

528. Voyons maintenant ce que la théorie donnera pour la portée ſous 4 degrés, & pour celle ſous 20 degrés.

Reprenons l'équation $y = x\left(tang.\ I + \frac{k^2}{4aph\ coſ.^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ coſ.^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$. Pour avoir la portée, il faut ſuppoſer $y = 0$, & conclure la valeur de x, de cette équation. . . . . . . $x\left(tang.\ I + \frac{k^2}{4aph\ coſ.^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\ coſ.^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right) = 0.$

Or cette équation ne pouvant être réſolue directement, il faut ſucceſſivement ſubſtituer à x différens nombres, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui ſatisfaſſe à l'équation.

La petiteſſe de l'angle de 4 degrés permet de ſuppoſer $a = 1$. Ainſi l'équation à réſoudre, eſt . . . . ,

$$0 = x\left(tang.\ 4^d + \frac{k^2}{4ph\ coſ.^2 4^d}\right) + \frac{k^4}{8p^2h\ coſ.^2 4^d}\left(1 - e^{\frac{2px}{k^2}}\right).$$

Or nous avons trouvé ci-deſſus la valeur de $\frac{k^2}{p}$ & celle de h; les Tables donnent celle de *tang.* 4^d & *coſ.* 4^d; ſuppoſant donc d'abord $x = 820$, & ſubſtituant, on trouvera un résultat poſitif de 5 toiſes; ce qui annonce qu'à la diſtance de 820 toiſes, l'ordonnée eſt de 5 toiſes au-deſſus de l'horizontale; l'amplitude eſt donc de plus de 820 toiſes.

Si au lieu de 820 toiſes, on ſubſtitue ſucceſſivement 840 & 860, on trouve des réſultats poſitifs qui vont en diminuant ; & enfin en ſubſtituant 862, on trouve qu'il ſatisfait.

La théorie donne donc pour la portée ſous 4 degrés, 862 toiſes, & l'expérience donne 820; l'erreur n'eſt donc que d'environ $\frac{1}{20}$e. de la portée.

Dans le vide, la portée auroit dû être de 1489 toiſes.

Pour 20 degrés, on trouvera $a = 1{,}02165$, & $log.\ a = 0{,}0093021$. Prenant dans les Tables la valeur de *tang.* 20 degrés, & celle de *coſ.* 20 degrés, & employant la valeur de $\frac{k^2}{p}$ & celle de h trouvée ci-deſſus, & les ſubſtituant dans l'équation $o = x\left(tang.\ l + \frac{k^2}{4aph\ \text{coſ.}^2 l}\right)$ $+ \frac{k^4}{8a^2p^2\ \text{coſ.}^2 l}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, on trouvera qu'en ſubſtituant pour x la portée obſervée 1740, on a un réſultat poſitif d'environ 85 toiſes. Si on ſubſtitue ſucceſſivement 1780, 1800, 1820 & 1840, ce n'eſt qu'à ce dernier qu'on arrivera à zéro. La theorie donne donc 1840 toiſes pour la portée ſous 20 degrés ; la différence avec l'expérience eſt donc d'environ $\frac{1}{17}$e. de la portée.

Dans le vide la portée, au lieu de 1840, auroit dû être de 6876. Ainſi on voit combien cette théorie rapproche de l'expérience, quoique (517) elle n'ait point ici toute la rigueur dont elle eſt ſuſceptible ; il eſt vrai que les portées calculées ſont plus fortes qu'elles ne paroîtroient (517) devoir être; mais nous en verrons dans peu une raiſon ſatisfaiſante.

529. Si on fait des calculs ſemblables pour les angles de 25, 30, 35, 40, 45 degrés; on trouvera ſucceſſivement

$a = 1{,}03514$; $a = 1{,}05378$; $a = 1{,}075958$; $a = 1{,}10730$; $a = 1{,}14777$; d'où après les ſubſtitutions ſemblables, on conclura les portées telles qu'on les voit dans la Table ci-après.

Au reſte, comme la valeur de a peut devenir pénible à calculer par la ſérie donnée (519) lorſque l'angle I eſt un peu plus grand, on l'aura plus facilement par cette formule, $a = \frac{1}{2 \text{ coſ. } I} + \frac{1}{2} \textit{cot. } I \textit{ log. } \frac{1}{\text{tang. }(45^d - \frac{1}{2} I)}$, ou $a = \frac{1}{2} \textit{ ſec. } I + \frac{1}{2} \textit{ cot. } I \textit{ log. tang. } (45^d + \frac{1}{2} I)$. Ce logarithme eſt hyperbolique.

Cette formule ſe déduit de $C = \frac{k^2}{4ph \text{ coſ.}^2 I} + a \textit{ tang. } I$ trouvé (519), & de $C = \frac{k^2}{4ph \text{ coſ.}^2 I} + \frac{\textit{tang.} \frac{1}{2} I + \textit{tang.}^3 \frac{1}{2} I}{1 - \textit{tang.}^2 \frac{1}{2} I} + \frac{1}{2} \textit{log. } \frac{1 + \textit{tang.} \frac{1}{2} I}{1 - \textit{tang.} \frac{1}{2} I}$ trouvé (505).

530. Enfin pour nouvelle comparaiſon de cette théorie avec l'expérience, nous nous propoſerons de déterminer la portée de *but en blanc*.

La détermination que nous en avons faite (483), eſt très-éloignée de ce que donne l'expérience, & on en voit actuellement la raiſon. La force de poudre que cette première détermination ſuppoſe, eſt conclue de la ſuppoſition que tout ſe paſſe dans le vide; elle eſt donc beaucoup moindre que la force réelle de la poudre; elle doit donc donner une portée de *but en blanc* beaucoup moindre.

Mais ſi nous déterminons cette portée d'après notre théorie, nous nous rapprocherons beaucoup plus de l'expérience. Nous allons la déterminer pour la pièce de 24 chargée à 9 livres de poudre.

L'angle de la ligne de mire avec l'axe de la pièce, pour une pièce de 24, est de 1 degré 11 minutes.

Ainsi on peut regarder a comme égal à l'unité, ainsi que *cos. I*. Nous supposerons aussi que la distance BL (*fig.* 44) à laquelle la courbe rencontre pour la première fois la ligne de mire, est fort petite en comparaison de la portée de *but en blanc*; ce qui est en effet.

Cela posé, on a donc $I = 1^d\ 11'$; & l'équation qui déterminera la portée x, sera . . . .

$$o = x\left(\text{tang. } 1^d\ 11' + \frac{k^2}{4ph}\right) + \frac{k^4}{8p^2h}\left(1 - e^{\frac{2px}{k^2}}\right).$$

Si on substitue d'abord 300 toises pour x, on trouve un résultat positif d'environ 1 toise ; ce qui annonce que la portée de *but en blanc* doit être un peu plus forte que de 300 toises; mais si on substitue 320 toises, on trouvera un résultat négatif de $- o^{T.},4$; d'où l'on doit conclure que la portée de *but en blanc* est entre 300 & 320 toises. Si on substitue 314 toises, on trouve que ce nombre satisfait à l'équation aussi exactement qu'on peut le desirer. Or l'expérience donne en effet environ 300 toises pour la portée de *but en blanc* d'une pièce de 24, chargée à 9 livres de poudre.

531. Résumant tout ce qui précède, on aura les résultats compris dans la Table suivante.

TABLE des portées observées & des portées calculées, pour une pièce de 24, chargée à 9 livres de poudre, en employant la portée observée sous 15 degrés, pour mesurer la force de la poudre, d'après la théorie de la résistance.

Selon l'EXPÉRIENCE.		Selon la THÉORIE, & d'après une 1.re approximation seulement.	Selon la PARABOLE dans le vide.
INCLIN.	PORTÉES.	PORTÉES.	PORTÉES.
degr. min.	toises.	toises.	toises.
4. 0	820.	862.	1489.
15. 0	1675.	1675.	5349.
20. 0	1740.	1840.	6876.
25. 0	1825.	1956.	8191.
30. 0	1910.	2011.	9265.
35. 0	2020.	2038.	10053.
40. 0	2050.	2035.	10526.
45. 0	2200.	1992.	10698.
PORTÉE *de but en blanc.*			
1. 11	300.	314.	442.

532. Cette Table fait suffisamment connoître la différence prodigieuse entre les portées réelles, & celles qui auroient lieu sans la résistance.

533. Quant aux portées calculées, comparées aux portées réelles, on remarquera que le calcul s'accorde avec l'expérience

autant qu'on peut le desirer, d'après une première approximation. En effet, 1°. on sait qu'il n'est pas rare de voir sous le même degré, les portées différer de 40 & de 50 toises & plus, sur-tout quand les portées sont très-grandes, comme elles le sont ici.

534. 2°. On voit par cette Table, que les portées jusqu'à 40 degrés exclusivement, sont toutes plus grandes que selon l'expérience. Mais quoique les portées calculées d'après cette première approximation ne doivent pas être rigoureusement les mêmes que les portées observées, elles ne peuvent néanmoins en différer autant qu'on le voit ici; cette différence qui est toujours en excès jusque vers 40 degrés, annonce évidemment que la portée sous 15 degrés, supposée de 1675 toises, est trop forte, du moins en supposant la densité constante.

En effet sous 15 degrés la différence entre la portée que donneroit l'équation de la courbe intégrée rigoureusement, & cette équation intégrée par notre méthode, est absolument insensible; & l'on sera d'autant plus porté à supposer qu'on doit faire quelque diminution aux 1675 toises; 1°. que la différence des portées observées de 15 à 20 degrés, comparée à la différence des portées de 20 à 25 degrés est plus petite qu'elle ne paroîtroit devoir être. 2°. Qu'il ne faut qu'une assez petite diminution dans cette portée pour rapprocher considérablement de l'expérience, les portées qui pèchent par excès, mais nous ne nous arrêterons pas à mettre un plus grand accord entre le calcul & l'expérience; parce que pour un accord plus parfait à l'égard des portées au-dessus de 26 à 30 degrés, il faudroit avoir égard au changement de densité. Nous ne nous occuperons de cet objet qu'à la fin de ce volume.

535. Quoique la force que nous avons calculée pour la poudre,

poudre, d'après la portée obſervée ſous 15 degrés, tende à augmenter les portées, on voit néanmoins qu'à 45 degrés, la portée réelle eſt plus forte que la portée calculée, & qu'en approchant de 45 degrés depuis environ 30 degrés, les portées calculées ſurpaſſent de moins en moins les portées obſervées.

536. L'explication de ces faits ſe trouve naturellement dans la diminution de denſité à meſure que le boulet s'élève. Il ſe fait donc une compenſation de plus en plus exacte entre l'erreur réſultante de la meſure que nous avons trouvée pour la force de la poudre, & l'erreur réſultante de la ſuppoſition d'une denſité conſtante; il ſe fait, dis-je, une compenſation de plus en plus exacte, depuis 30 degrés juſqu'à environ 42 degrés. Paſſé ce terme, l'erreur réſultante de la ſuppoſition d'une denſité conſtante, devient plus forte que celle qui réſulte de la meſure de la force de la poudre.

537. Au reſte, quelque ſuppoſition que l'on puiſſe faire ſur la diminution de la denſité à différentes hauteurs, il paroît bien difficile de ne pas ſoupçonner d'erreur la portée ſous 45^{d}.

En effet on peut remarquer ſur ces portées obſervées, que leurs différences conſécutives ſont, à compter de 25 degrés, comme il ſuit,

$$85^{t.},\ 110^{t.},\ 30^{t.},\ 150^{t.}.$$

C'eſt-à-dire, qu'elles ſont croiſſantes & poſitives juſque vers 35 degrés; décroiſſantes, mais poſitives de 35 à 40 degrés; puis croiſſantes & encore poſitives, de 40 à 45 degrés.

Il paroîtroit cependant qu'en ſuppoſant, comme l'expérience le prouve, que la portée à 45 degrés eſt plus forte qu'à 40 degrés, du moins la différence devroit être plus petite que de 40 à 35 degrés, car c'eſt une loi générale que lorſqu'une quantité approche du *maximum*, les degrés par leſquels elle augmente, vont en diminuant. Il y a donc bien lieu de croire que la portée ſous 45 degrés, eſt beaucoup plus forte qu'elle n'auroit dû être relativement aux autres, s'il n'y eût eu d'autre cauſe que le changement d'inclinaiſon. Il eſt bien vrai qu'eu égard au changement de denſité, l'excès de la portée de 45 degrés ſur celle de 40 degrés, doit être plus grand que dans l'hypothèſe d'une denſité conſtante, mais il ne paroît pas qu'il puiſſe ſurpaſſer l'excès de la portée de 40 degrés ſur celle de 35 degrés.

538. Le changement de denſité expliqueroit peut-être mieux, pourquoi la plus grande portée qui, ſelon cette première approximation, ſe trouve fort près de 40 degrés, eſt néanmoins au-deſſus ſelon l'expérience; enſorte que l'angle de la plus grande portée dans l'air, s'il n'eſt à 45 degrés, ſemble, d'après ces épreuves, être du moins entre 40 & 45 degrés. Dans l'hypothèſe d'une denſité conſtante, & qui ſeroit $\frac{1}{850}$ de celle de l'eau, l'angle de la plus grande portée ſeroit encore plus petit que ne le donne notre théorie. Mais la denſité variable peut rapprocher cet angle de 45 degrés; & quoique la portée obſervée ſous 45 degrés ſoit la plus grande de toutes celles que préſente notre Table, néanmoins on ne peut guère douter que des épreuves faites avec ſoin vers 35, 40 & 45 degrés, ne fiſſent trouver la plus grande portée ſenſiblement au-deſſous de 45 degrés.

539. Faiſons préſentement une eſtimation approchée de la denſité de l'air dans la partie ſupérieure de la courbe.

Reprenons, dans cette vue, l'équation. . . . .

$$y = x\left(\text{tang.}\,I + \frac{k^2}{4pah\,\text{coſ.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8p^2a^2h\,\text{coſ.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right).$$

Pour avoir la plus grande ordonnée, il faut (36) différencier la valeur de y, & suppoſer cette différentielle égale à zéro. Nous aurons donc . . . .

$$o = dx\left(\text{tang.}\, I + \frac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}\right) - \frac{k^2 dx}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}\, e^{\frac{2apx}{k^2}};$$

d'où l'on tire $e^{\frac{2apx}{k^2}} = \dfrac{\text{tang.}\, I + \dfrac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}}{\dfrac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}} = \dfrac{b}{\dfrac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}}$

$= \dfrac{4aphb\,\text{coſ.}^2 I}{k^2}$, en faiſant $\text{tang.}\, I + \dfrac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I} = b$.

Donc $\dfrac{2apx}{k^2}\,\text{log.}\, e$, ou ſimplement $\dfrac{apx}{2k^2} = \text{log.}\, \dfrac{4aphb\,\text{coſ.}^2 I}{k^2}$,

& $x = \dfrac{k^2}{2ap}\,\text{log.}\, \dfrac{4aphb\,\text{coſ.}^2 I}{k^2}$. Subſtituant dans la valeur de y, on aura. . . . .

$$y = \frac{bk^2}{2ap}\,\text{log.}\, \frac{4aphb\,\text{coſ.}^2 I}{k^2} + \frac{k^4}{8p^2a^2h\,\text{coſ.}^2 I}\left(1 - \frac{4aphb\,\text{coſ.}^2 I}{k^2}\right).$$

540. Comme nous avons déterminé ci-deſſus, les valeurs de $\frac{k^2}{p}$, a, h, &c. Il eſt donc facile préſentement de calculer les plus grandes hauteurs y, auxquelles le projectile a dû s'élever dans les projections rapportées dans la Table ci-deſſus (*p. 185*). C'eſt ainſi que nous les avons calculées pour former la Table ci-après.

541. D'après ce calcul, & ce que nous avons dit (341), il eſt facile de déterminer la denſité de l'air dans lequel le projectile s'eſt trouvé lorſqu'il a paſſé au point le plus élevé de ſa courbe. Appliquant donc ces nombres à la formule donnée (341), on trouvera les réſultats compris dans la Table ſuivante.

TABLE des plus grandes hauteurs auxquelles a dû s'élever le boulet dans les épreuves rapportées page 175; *& de la densité de l'air à ces hauteurs.*

ANGLES de PROJECTION.	PLUS GRANDES HAUTEURS.	DENSITÉS DE L'AIR à ces hauteurs, la densité au point de projection étant 1.
degrés.	toises.	
4. . . .	. . . 19,5. . . .	. . . $0,99\frac{1}{2}$.
15. . . .	. . . 173,5. . . .	. . . $0,97\frac{1}{2}$.
20. . . .	. . . 269,9. . . .	. . . $0,94\frac{1}{2}$.
25. . . .	. . . 376,8. . . .	. . . 0,92.
30. . . .	. . . 492. . . .	. . . 0,90.
35. . . .	. . . 614. . . .	. . . $0,87\frac{1}{3}$.
40. . . .	. . . 741,6. . . .	. . . 0,85.
45. . . .	. . . 869,5. . . .	. . . $0,82\frac{1}{2}$.

542. Disons un mot de l'expression du temps.

Nous avons trouvé ci-dessus (504) l'équation $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \frac{1}{2}\,log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C - \frac{k^2dt^2}{2dx^2}$, qui en réduisant en série comme on l'a fait (509 & *suiv.*), devient $k^2dt^2 = 2dx^2\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right)$. Et comme nous avons trouvé $C - \frac{2az}{1-zz} = \frac{k^2}{4ph\,cof.^2 I}e^{\frac{2apx}{k^2}}$; nous aurons donc $k^2dt^2 = \frac{2k^2dx^2}{4ph\,cof.^2 I}e^{\frac{2apx}{k^2}}$, ou

$dt = \frac{dxe^{\frac{apx}{k^2}}}{\text{cof.}\, I\sqrt{(2ph)}}$; & par conféquent . . . . .
$t = \frac{k^2}{ap\,\text{cof.}\, I\sqrt{(2ph)}}\left(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1\right)$, en ajoutant une conftante telle que $t = 0$, lorfque $x = 0$.

Si la quantité $\frac{apx}{k^2}$ eft fort petite, on pourra prendre pour valeur de $e^{\frac{apx}{k^2}}$ fa valeur approchée, $1 + \frac{apx}{k^2} + \frac{a^2p^2x^2}{2k^4} + \frac{a^3p^3x^3}{6k^6}$ &c., & alors le temps t fera exprimé par. . . . .
$t = \frac{1}{\text{cof.}\, I\sqrt{(2ph)}}\left(x + \frac{apx^2}{2k^2} + \frac{a^2p^2x^3}{6k^4} \text{ \&c.}\right)$.

543. Donc 1°. fi $\frac{p}{k^2}$ ou la réfiftance, eft abfolument nulle, on aura $t = \frac{x}{\text{cof.}\, I\sqrt{(2ph)}}$; ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons démontré (486).

2°. Si $\frac{p}{k^2}$ n'eft pas $= 0$; mais que cependant $\frac{apx^2}{2k^2}$ foit fort petit à l'égard de x; alors on aura, à très-peu près, $t = \frac{x}{\text{cof.}\, I\sqrt{(2ph)}} \times \left(1 + \frac{apx}{2k^2}\right)$; d'où l'on voit que le temps fera à très-peu près proportionnel à l'efpace décrit.

544. **Appliquons cela aux épreuves faites à Strasbourg le 18 Août 1766.**

On a placé sur la chaussée du Fort-Louis une pièce de 12 de campagne, de manière que l'axe de cette pièce dirigé suivant l'horizontale AH (*fig. 53*) étoit élevé de 14 pieds 4 pouces au-dessus du niveau de la prairie ; c'est-à-dire que la chute DC du boulet étoit de 14 pieds 4 pouces ; & l'on a observé que la portée moyenne BC (la pièce étant chargée à 4 livres de poudre) étoit de 176 toises $\frac{1}{2}$.

On a porté ensuite la même pièce en un autre point A' élevé au-dessus du niveau de la prairie, de $3^{pi.}\ 9^{po.}$ seulement ; & à la même charge, on a trouvé la portée moyenne $B'C'$ de 95 toises.

Cela posé, comme les hauteurs d'où le boulet est tombé dans ces deux cas, sont fort petites, la résistance n'a pu altérer sensiblement la vîtesse verticale, & par conséquent les durées de ces chutes, ou les durées des portées, ont dû être comme les racines quarrées des hauteurs, c'est-à-dire $:: \sqrt{(14,33333)} : \sqrt{(3,75)} :: 1,95 : 1$. Or comme le rapport des portées est celui de $176,5 : 95$, ou de $1,86 : 1$; le rapport des temps, selon l'expérience, diffère donc peu, en effet, de celui des portées. Voyons ce que dit la théorie.

Le rapport des temps, selon la théorie, doit être celui de $176\frac{1}{2}\left(1+\frac{p}{2k^2}\times 176\frac{1}{2}\right) : 95\left(1+\frac{p}{2k^2}\times 95\right)$, si $\frac{176\frac{1}{2}p}{2k^2}$ est une petite fraction. Or par un calcul semblable à celui que nous avons fait (524), on trouvera que pour un boulet de 4, dont le diamètre est de $4^{po.},321$, ou $0^{toi.},060013$, on a $\frac{p}{k^2}=0,0010333$; donc $\frac{p\times 176\frac{1}{2}}{2k^2}=0,0912$, & $\frac{p\times 95}{2k^2}=0,0489$. Le rapport des temps est donc celui de $176\frac{1}{2}\times 1,0912 : 95\times 1,0489$ qui est le même que le rapport de $1,94 : 1$, lequel diffère peu de celui des portées, & approche beaucoup, en même temps, de celui des racines quarrées des hauteurs, ainſi que cela doit être.

545. On voit donc qu'on ſe tromperoit beaucoup, ſi on concluoit de ces épreuves, que la réſiſtance de l'air n'altère pas ſenſiblement le mouvement des projectiles. Il eſt bien vrai que le rapport des temps ſe trouve ici le même, à très-peu près, que dans le vide; mais la théorie de le réſiſtance fait voir que pour ce cas, il doit en effet, être à très-peu près le même. On ne peut donc en conclure que le milieu ne réſiſte pas ſenſiblement.

546. Veut-on ſavoir combien l'air a dû réſiſter? Il n'y a (520) qu'à prendre l'équation. . . . .

$$y = x\left(tang.\,I + \frac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,\text{coſ.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right);$$

y ſubſtituer $-14^{\text{pi.}},3333$ ou $-2^{\text{T.}},3888$ pour y; $176^{\text{T.}},5$ pour x; zéro pour $tang.\,I$; 1 pour $coſ.\,I$; & 1 pour a; calculer la valeur de h, en mettant auſſi pour $\frac{k^2}{p}$ ſa valeur qui réſulte du calcul ci-deſſus (544). Nous trouverons $h = 3646$ toiſes; ce qui (176) ſuppoſe une vîteſſe de projection de 192 toiſes ou de 1152 pieds par ſeconde. Or l'effet inſtantané de la réſiſtance qui a pour expreſſion $\frac{nDsu^2dt}{M}$, ou $\frac{p}{k^2}u^2dt$, puiſque (501) nous avons fait $\frac{nDs}{M} = \frac{p}{k^2}$, ſera donc $0,0010333\,u^2dt$; ou en mettant pour u ſa valeur 192 toiſes (puiſque les quantités qui entrent dans $\frac{p}{k^2}$, ont été exprimées en toiſes) l'effet inſtantané de la réſiſtance ſera exprimé par $0,0010333 \times (192)^2 \times dt$, ou par $38,1\,dt$.

Mais l'effet inſtantané de la peſanteur eſt $30^{\text{P.}},2\,dt$ ou

$5^{T.},03\ dt$; donc l'effet inſtantané, ou initial de la réſiſtance, eſt à l'effet inſtantané de la peſanteur :: 38,1 : 5,03, ou :: 7,6 : 1, ou :: $7\frac{3}{5}$: 1; c'eſt-à-dire que l'effet de la réſiſtance, au premier inſtant, étoit 7 fois & $\frac{3}{5}$ celui du poids du boulet.

547. Comme la chute du boulet a été de $14^{pi.}\ 4^{po.}$ ou de $2^{T.},3888$; ce qui ſuppoſe à très-peu près une ſeconde de temps; en ſuppoſant que la réſiſtance eût perſévéré la même pendant la durée très courte de la portée, elle auroit donc dû faire perdre au boulet, ſur l'eſpace 193 toiſes qu'il devoit décrire dans cet intervalle de temps ſans la réſiſtance, la quantité de $2^{T.},3888 \times 7\frac{3}{5}$, ou à très-peu près 18 toiſes. Or la portée a été de 176 toiſes $\frac{1}{2}$, dont la différence avec les 192 toiſes qui auroient dû être décrites ſans la réſiſtance, eſt 15 toiſes $\frac{1}{2}$; ce qui s'accorde parfaitement, puiſqu'en effet la réſiſtance a dû pendant la durée de la première ſeconde, diminuer (quoique fort peu) de ce qu'elle étoit au commencement.

548. Si on veut appliquer l'expreſſion du temps, trouvée ci-deſſus (542), ſavoir $t = \frac{k^2\left(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1\right)}{ap \cos. I\sqrt{(2ph)}}$ aux portées compriſes dans la Table donnée (*p. 175*), & les comparer aux durées des portées qui auroient eu lieu dans le vide avec la même force de poudre, on les trouvera telles que la Table ſuivante les repréſente.

TABLE des durées des portées dans l'air & dans le vide, la force de la poudre étant celle qui a été déterminée (525) *d'après l'épreuve sous 15 degrés pour une pièce de 24, chargée à 9 livres de poudre.*

INCLINAISON.	DURÉE DES PORTÉES dans l'air.	DURÉE DES PORTÉES dans le vide.
degr. min.	secondes.	secondes.
4. 0. . . .	. . . . $5\frac{2}{5}$. . . .	. . . . $6\frac{2}{5}$.
15. 0. . . .	. . . . $16\frac{1}{5}$. . . .	. . . . $23\frac{9}{10}$.
20. 0. . . .	. . . . 20. . . .	. . . . $31\frac{1}{2}$.
25. 0. . . .	. . . . $23\frac{9}{10}$. . . .	. . . . 39.
30. 0. . . .	. . . . 27. . . .	. . . . $46\frac{1}{10}$.
35. 0. . . .	. . . . $29\frac{7}{10}$. . . .	. . . . $52\frac{9}{10}$.
40. 0. . . .	. . . . $33\frac{3}{5}$. . . .	. . . . $59\frac{1}{4}$.
45. 0. . . .	. . . . $35\frac{3}{4}$. . . .	. . . . $65\frac{1}{5}$.
	PORTÉE *de but en blanc.*	
1. 11. . . .	. . . . $1\frac{9}{17}$. . .	. . . . $1\frac{9}{10}$.

549. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que la pesanteur étoit constante, & que les directions de son action sur le mobile, en chaque point de la courbe, étoient parallèles. Il n'en est pas ainsi à la rigueur; mais les effets qui peuvent résulter de la variation de la pesanteur & de ses directions, sont si petits & si fort au-dessous des erreurs inévitables dans la pratique, qu'il seroit superflu de s'en occuper ici.

En effet, 1°. la plus grande portée dans les épreuves rapportées (*p. 175*) est 2200 toises; ce qui fait environ une lieue de vingt-cinq au degré, laquelle eſt 2283 toiſes. Donc cette portée ſoutend au centre de la Terre, un angle de $2' 29''$; donc les directions de la peſanteur au point de projection & au point de chute, ſont à peine un angle de $2' 29''$.

2°. La plus grande hauteur à laquelle le projectile puiſſe s'élever avec la force de poudre que ſuppoſent ces épreuves (en ſuppoſant la denſité conſtante), eſt de 1400 toiſes au plus, ainſi qu'on peut le conclure de ce qui a été dit (176 & 525). Mais comme la denſité va en diminuant à meſure que le projectile s'élève, ſuppoſons qu'il s'éleveroit verticalement juſqu'à une hauteur moitié plus grande, c'eſt-à-dire, juſqu'à 2100 toiſes, ce qui eſt beaucoup au-deſſus du vraiſemblable; ces 2100 toiſes feront environ une lieue. Or la peſanteur diminuant au-deſſus de la ſurface de la Terre, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance; il s'enſuit, puiſque le rayon de la Terre eſt de 1432 lieues, que la peſanteur à la hauteur d'une lieue, ſera à la peſanteur à la ſurface $:: (1432)^2 : (1433)^2$ ou $:: 1 : 1{,}0014$; c'eſt-à-dire, qu'à cette hauteur, la peſanteur eſt diminuée d'environ $\frac{1}{700}$; & encore cette diminution n'auroit-elle lieu que dans le cas où le projectile s'éleveroit verticalement, & au moment où il auroit atteint ſa plus grande élévation.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT *DANS LES MACHINES.*

550. L'OBJET général des Machines eſt de tranſmettre l'action des forces.

On n'a pas toujours pour but, dans l'uſage des machines, d'augmenter l'action dont la force motrice ſeroit capable ſi elle agiſſoit immédiatement ſur le mobile : quelquefois il ne s'agit que de tranſmettre cette action ſuivant une direction déterminée ; telle eſt, par exemple, la deſtination des poulies fixes. D'autres fois on n'a en vue que d'aſſujettir le mobile à décrire des eſpaces réglés ſur certaines conditions relatives ſoit au temps, ſoit à d'autres circonſtances quelconques ; conditions qui n'exigent pas toujours que la force motrice augmente en ſe tranſmettant : les machines d'horlogerie en fourniſſent pluſieurs exemples.

551. Le nombre & la nature des machines varient ſelon les objets qu'on a en vue. Mais pour être en état de déterminer leurs effets, il n'eſt pas néceſſaire de les avoir conſidérées toutes. Quelque composées, quelque variées qu'elles ſoient, elles ne ſont que des combinaiſons d'un nombre aſſez limité de machines ſimples.

Nous allons d'abord expoſer les propriétés de celles-ci. Nous ferons voir enſuite, par divers exemples, comment ces propriétés doivent être appliquées à l'évaluation des effets des machines composées.

Nous réduirons à cinq le nombre des machines ſimples ; ſavoir *les Cordes*, *le Levier*, *la Poulie*, *le Treuil*, & *le Plan incliné.*

A ne conſidérer ces machines que par rapport à l'équilibre, on pourroit les réduire à deux, & même à une ſeule ; ſavoir, au levier. Mais dans le cas du mouvement, la nature de chacune donne lieu à des conſidérations qui lui ſont propres, & qui exigent qu'on en traite ſéparément.

Des Cordes.

552. Nous ſuppoſerons d'abord que les cordes

ſont des corps parfaitement flexibles : nous verrons ailleurs comment on doit avoir égard à leur défaut de flexibilité parfaite.

Nous conſidérerons auſſi, d'abord, les cordes comme non peſantes ; mais peu après nous verrons la manière d'avoir égard à leur peſanteur.

Ces deux ſuppoſitions faites, il eſt facile de voir, que le diamètre plus ou moins grand des cordes, ne fait rien à la communication des forces : on peut toujours, par la penſée, ſubſtituer aux cordes, un fil qui paſſeroit ſuivant l'axe du cylindre qu'elles forment, & ſuppoſer que la force appliquée à la corde, agit par le moyen de ce fil ſeulement.

553. On emploie les cordes pour tranſmettre l'action des forces, ſoit immédiatement, ſoit en appliquant les cordes aux machines. Mais pour juger des effets des puiſſances appliquées aux machines par le moyen des cordes, il faut connoître les effets dont ces puiſſances ſont capables, lorſqu'elles agiſſent par le moyen de cordes ſeulement.

554. Conſidérons donc, d'abord, trois puiſſances P, Q, R (*fig.* 54) agiſſant les unes contre les autres, par le moyen des cordes AP, AQ, AR unies par le nœud A : & ſuppoſant que l'on connoît les directions AP, AQ, AR, propoſons-nous

de déterminer les conditions néceſſaires pour que ces trois forces ſe faſſent équilibre, & les rapports de ces forces.

Il eſt évident, 1°. qu'elles doivent être toutes trois dans un même plan. Car ſi l'une, par exemple la force P, n'étoit pas dans le plan des deux autres, on pourroit toujours la concevoir décompoſée en deux forces, l'une dans ce plan, l'autre perpendiculaire à ce même plan, & par conſéquent perpendiculaire à chacune des deux forces P & Q; celle-ci n'agiroit donc en aucune manière pour s'oppoſer à ces deux-ci; il n'y auroit donc rien pour la détruire; il n'y auroit donc point équilibre.

2°. Ces trois forces étant dans un même plan, il faut pour qu'elles ſe faſſent équilibre, que l'une quelconque d'entre elles, par exemple la force P, produiſe deux efforts, l'un égal & contraire à la force Q, l'autre égal & contraire à la force R.

Or ſi après avoir prolongé RA & QA, on prend la ligne quelconque AD pour repréſenter la force P, & que ſur AD comme diagonale on forme le parallélogramme $ACDB$ dont les côtés AB, AC ſoient ſur le prolongement de QA & de RA, les deux côtés AB, AC, repréſentent (193) deux forces qui agiſſant conjointement ſuivant ces directions, feroient le même effet que la force P. Donc AB, AC

ſont les efforts que P oppoſe réellement aux deux forces Q & R ; donc pour qu'il y ait équilibre, il faut que Q puiſſe être repréſenté par BA, & que R le ſoit par CA, dans la ſuppoſition que P le ſoit par AD. On doit donc avoir $P : Q :: AD : AB$, & $P : R :: AD : AC$, c'eſt-à-dire, $P : Q : R :: AD : AB : AC$. Tel eſt le rapport que doivent avoir les trois forces P, Q, R pour être en équilibre.

555. Puiſque les deux forces Q & R doivent être égales aux deux forces AB, AC qui ſont les compoſantes de la force P, on peut donc dire que lorſqu'il y a équilibre entre trois forces, deux quelconques doivent avoir le même rapport avec la troiſième, que deux forces compoſantes ont avec leur réſultante.

556. Donc (201) on aura auſſi $P : Q : R ::$ *ſin.* BAC : *ſin.* CAD : *ſin.* DAB, ou $::$ *ſin.* RAQ : *ſin.* RAS : *ſin.* QAS, en prolongeant PA vers S ; c'eſt-à-dire, que *quand trois forces ſe font équilibre, chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres, prolongées s'il eſt néceſſaire :* ou bien encore *de trois forces qui ſe font équilibre ; chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle au travers duquel paſſe ſa direction prolongée.* Car les angles RAP, QAP, ſont ſupplémens des angles RAS, QAS, & par conſéquent ont même ſinus.

557. Quoique, lorſqu'on fait abſtraction du poids des cordes, & qu'on les ſuppoſe parfaitement flexibles, il paroiſſe qu'en général, leur longueur importe peu pour l'effet qu'il s'agit de produire ; il y a cependant beaucoup de rencontres où la conſidération de cette longueur n'eſt point du tout une choſe indifférente.

Par exemple, lorſqu'un Maçon cramponné à la corde nouée *ABD*, attachée au point *A* (*fig. 55*) veut s'écarter de la verticale *AE* pour réparer à droite ou à gauche de cette verticale ; un Manœuvre le tire à l'aide de la corde *BC*, qui fait prendre à la corde nouée la ſituation *ABD* ; dans cette ſituation l'effort que doit faire le Manœuve eſt au poids du Maçon :: *ſin. ABD* : *ſin. ABC* (556), ou en prolongeant la verticale *BB*, :: *ſin. ABO* : *ſin. ABC* ; mais ſi la corde nouée, au lieu d'être attachée en *A*, l'eût été en un point *A'* plus près de *B*, la force qu'auroit dû employer le Manœuvre, feroit au poids du Maçon :: *ſin. A'BO* : *ſin. A'BC*: or il eſt facile de voir que les angles *ABC*, *A'BC* étant obtus, *ſin. A'BC* eſt plus petit que *ſin. ABC* ; & comme *ſin. ABO* eſt plus petit que *ſin. A'BO* ; il s'enſuit que le Manœuvre auroit plus d'effort à faire ſi la corde étoit en *A'* que ſi elle étoit fixée en *A*.

On voit auſſi par la même raiſon, que le Manœuvre appliqué à la corde *BC* aura en général d'autant moins de force à employer, que la corde *BC* ſera plus longue.

558. Voici un autre cas où la longueur des cordes, au lieu de procurer de l'avantage, ſeroit déſavantageuſe ; ſuppoſons qu'il s'agit de faire monter une voiture ſur la montagne *KI* (*fig. 56*), & que le premier des chevaux attelés à cette voiture ſoit actuellement au ſommet *I* ; ſi *AC* eſt la longueur

du

du trait, & que sur cette direction on prenne une partie AO pour représenter l'effort avec lequel le cheval tire ; il est facile de voir que l'effet de la traction suivant AO, n'est pas totalement employé à tirer la voiture, mais qu'il y en a une partie qui agit suivant la direction AB du trait AL prolongé, & une autre partie AH, qui agit perpendiculairement à ce trait ; que la force suivant AB est la seule qui serve à traîner la voiture ; & que la force suivant AH est nuisible, en ce qu'elle ne peut que tendre à faire abattre le second cheval ; or si la longueur du trait au lieu d'être seulement AC, étoit plus longue, étoit AG, par exemple ; alors CD & GF étant égales chacune à la hauteur du poitrail du cheval, il est clair que l'effort de la traction AO' décomposé comme ci-dessus, produiroit un moindre effet dans le sens AB, & un plus grand effort AH' dans le sens AH; car l'effort suivant AO, est à l'effort suivant AH dans le premier cas $::$ *sin.* BAH : *sin.* BAO, ou $AO : AH ::$ *sin.* BAH : *sin.* BAO; mais par la même raison $AH' : AO'$ ou $AO ::$ *sin.* BAO' : *sin.* BAH' ou *sin.* BAH; d'où il est aisé de conclure que $AH' : AH ::$ *sin.* BAO' : *sin.* BAO; ainsi l'effort pour faire abattre le second cheval, sera plus grand à mesure que le trait sera plus long.

Ainsi quoiqu'il puisse y avoir quelque avantage à donner aux traits une certaine longueur pour permettre aux chevaux de prende essor après les repos pendant la montée, néanmoins il y auroit d'autant plus d'inconvénient à les alonger trop, que les chevaux plus fatigués au sommet qu'ailleurs, sont moins en état de résister à l'effort qui tend à les abattre.

559. Puisque les trois forces P, Q, R (*fig.* 54), qui doivent se faire équilibre, sont représentées par AD,

AB, AC, ou (ce qui revient au même) par les côtés AD, AB, BD du triangle ABD dont les angles ABD, BDA, DAB sont égaux aux angles CAQ, RAS, QAS qui déterminent les directions de ces forces, on voit donc que toutes les questions qu'on peut proposer à l'égard des valeurs & des directions des forces qui doivent se faire équilibre, se réduisent à la Trigonométrie.

Par exemple, si l'on donnoit les valeurs des trois forces P, Q, R, & que l'on demandât comment elles doivent être dirigées pour se faire équilibre, on résoudroit (*Géom.* 308) le triangle DBA dont les trois côtés sont connus; & les angles que donneroit cette résolution, détermineroient ceux que doivent former entre elles les directions des puissances.

Si l'on donnoit les deux forces P & Q, & l'angle PAQ de leurs directions, ou son supplément $QAS = DAB$; alors on connoîtroit les deux côtés AD, AB, & l'angle compris DAB; on pourroit donc (*Géom.* 310) calculer DB ou la valeur de la force R, & l'angle BDA dont l'égal SAR est celui que la direction de R doit former avec celle de P.

Si les angles que les trois directions doivent former étoient donnés, on ne pourroit pas (*Géom.* 271) déterminer la valeur absolue des trois forces, mais seulement leur rapport. Dans tous les autres cas, la proposition que nous venons d'établir (559) donnera toujours ce que l'on cherche, dès qu'il y aura trois choses connues.

560. Si au lieu d'avoir deux puissances Q & R

attachées aux deux cordons, ces deux cordons étoient fixement attachés en Q & R ou ſur tout autre point de leurs directions; AB, AC, exprimeroient les efforts que ſupportent ces points fixes.

561. Nous avons ſuppoſé (*fig.* 54) que les trois cordons étaient fixement attachés au nœud A. Mais ſi la puiſſance P (*fig.* 57) étoit appliquée à un cordon dont l'extrémité eût un anneau dans lequel paſſât la corde QAR, alors on ne ſeroit pas maître de donner les directions des trois cordons. En effet, il ne ſuffit pas, alors, que l'effort AB ſoit dirigé ſuivant QA & égal à la force Q, & qu'il en ſoit de même de AC à l'égard de R : il faut encore que l'anneau ne puiſſe pas gliſſer, ce qui exige que l'angle QAS ſoit égal à SAR; c'eſt-à-dire, que la puiſſance P doit être dirigée de manière à diviſer l'angle QAR en deux parties égales. Au reſte on a toujours $P : Q : R :: \text{ſin. } QAR : \text{ſin. } SAR : \text{ſin. } QAS$; mais comme $SAR = QAS = \frac{1}{2} QAR$, cette ſuite de rapports devient $P : Q : R :: \text{ſin. } QAR : \text{ſin. } \frac{1}{2} QAR : \text{ſin. } \frac{1}{2} QAR$; enſorte que les deux puiſſances R & Q ſont égales.

562. Si la corde QAR au lieu d'être tirée par deux puiſſances Q & R, étoit retenue aux deux points fixes Q & R (*fig.* 58); il en ſeroit évidemment de même; c'eſt-à-dire, que pour que l'équilibre eût lieu, il faudroit que la puiſſance P diviſât l'angle QAR en deux parties égales; mais les deux

points fixes Q & R étant supposés capables de toute espèce de résistance, la puissance P peut avoir d'ailleurs telle valeur que l'on voudra.

563. Si on conçoit que la corde QAR soit entraînée autour des deux points fixes Q & R par le mouvement de l'anneau entraîné par la puissance P, le point A décrira dans ce mouvement (*Alg.* 225) une ellipse qui aura pour foyers les points Q & R, & dont le grand axe BC sera égal à QAR; or nous avons vu (*Alg.* 235) que la perpendiculaire à cette courbe divise l'angle QAR en deux parties égales; on peut donc dire que dans quelque situation que se trouve la corde QAR la puissance P sera en équilibre si elle tire suivant une direction perpendiculaire au point A de l'ellipse BAC, où se réunissent les deux parties QA & RA.

564. Si la puissance P est un poids (*fig.* 59), alors il ne pourra être en équilibre que dans une seule situation; ce sera celle où le point A se trouvera sur un point de l'ellipse dont la tangente sera horizontale; ainsi pour déterminer la position du point où le poids P demeurera en équilibre, il faut tracer l'ellipse BAC, ce qui est facile; puis ayant mené le diamètre horizontal HS, mener à l'ellipse une tangente qui soit parallèle à ce diamètre, ou qui fasse avec l'ordonnée AQ un angle égal au complément de HDB, ce qui est facile par ce qui a été dit (32).

565. Si la corde RAQ tirée par les deux puissances R & Q (*fig.* 60), passe par-dessus un point fixe A, les deux puissances R & Q doivent pareillement être égales, & la pression qui en résulte contre ce point fixe, est dirigée suivant une ligne qui divise

l'angle QAR en deux parties égales, & elle eſt à l'égard de l'une des deux puiſſances, comme le ſinus de QAR eſt au ſinus de ſa moitié.

566. Tout ce qui précède étant bien compris, rien n'eſt plus facile que de déterminer les conditions de l'équilibre entre tant de puiſſances que l'on voudra, appliquées à différens cordons unis par un même nœud ou par différens nœuds.

567. Suppoſons d'abord que chaque nœud n'aſſemble que trois cordons, & que tout eſt dans un même plan, & tel qu'on le voit (*fig. 61*). Voici comment on peut enviſager l'équilibre, & en déduire les rapports des forces.

La puiſſance P fait effort contre les deux cordons AT, AB. Prolongeons donc les directions de ceux-ci, & ayant pris AF pour repréſenter la puiſſance P, formons ſur AF comme diagonale, & ſur les prolongemens AE, AD, comme côtés, le parallélogramme $ADFE$, il faudra que l'effort T que ſupporte le crochet, ſoit exprimé par AE; & la tenſion du cordon BA ſera exprimée par AD; enſorte qu'en nommant a cette tenſion, on aura $P : T : a :: AF : AE : AD$, ou $P : T : a ::$ *ſin.* DAE : *ſin.* FAD : *ſin.* FAE, ou $P : T : a ::$ *ſin.* TAB : *ſin.* PAB : *ſin.* TAP.

Concevons l'effort AD appliqué en B ſuivant BI égal & en ligne droite avec AD; BI fait effort contre la puiſſance Q & contre le cordon BC : prolongeant donc, comme ci-deſſus, les cordons QB & CB, & formant le parallélogramme $GBHI$, BH ſera la valeur que doit avoir la puiſſance Q, & BG la tenſion du cordon CB. On aura, par la même raiſon, en nommant b cette tenſion, $a : Q : b ::$ $\text{ſin.}\, GBH : \text{ſin.}\, IBG : \text{ſin.}\, IBH$, ou $a : Q : b ::$ $\text{ſin.}\, QBC : \text{ſin.}\, ABC : \text{ſin.}\, ABQ$.

Concevons l'effort BG appliqué en C ſuivant CK égal & en ligne droite avec BG; CK fait effort contre S & contre R. Donc ſi on prolonge RC & SC, & que l'on forme comme ci-devant le parallélogramme $MCLK$, CM exprimera la valeur que doit avoir la force R, & CL celle que doit avoir a force S. On aura, par la même raiſon, $b : R : S$ $::$ $\text{ſin.}\, MCL : \text{ſin.}\, KCL : \text{ſin.}\, MCK$, ou $b : R : S$ $::$ $\text{ſin.}\, RCS : \text{ſin.}\, BCS : \text{ſin.}\, BCR$.

Et ſi l'on veut avoir immédiatement le rapport de la tenſion T d'une branche quelconque TA de la corde, à la tenſion d'une autre branche quelconque, de CS par exemple, on la trouvera facilement en cette manière.

Des ſuites de rapports ci-deſſus, ne prenons que ceux qui concernent les tensions des parties de la corde $TABCS$: nous aurons

$$T : a :: \sin. PAB : \sin. TAP;$$
$$a : b :: \sin. QBC : \sin. ABQ;$$
$$b : S :: \sin. RCS : \sin. BCR.$$

Lesquelles étant multipliées par ordre, donnent $T : S :: \sin. PAB \times \sin. QBC \times \sin. RCS : \sin. TAP \times \sin. ABQ \times \sin. BCR$. Et si l'on vouloit le rapport de la tension T à la tension b, on ne multiplieroit que les deux premières proportions; & ainsi des autres.

Veut-on avoir le rapport des puissances entre elles; il n'y a qu'à tirer des suites de rapports ci-dessus, le rapport de deux puissances consécutives à la tension du cordon intermédiaire, on aura

$$P : a :: \sin. TAB : \sin. TAP;$$
$$a : Q :: \sin. QBC : \sin. ABC;$$
$$Q : b :: \sin. ABC : \sin. ABQ;$$
$$b : R :: \sin. RCS : \sin. BCS.$$

Multipliant ces quatre proportions, & réduisant on a $P : R :: \sin. TAB \times \sin. QBC \times \sin. RCS : \sin. TAP \times \sin. ABQ \times \sin. BCS$. Et si l'on vouloit le rapport de P à Q, on ne multiplieroit que les deux premières proportions.

On voit, par-là, ce qu'il y a à faire pour un plus grand nombre de puiſſances, & pour comparer les tenſions des cordons avec les puiſſances mêmes.

568. Si les puiſſances P, Q, R diviſoient en deux parties égales les angles TAB, ABC, &c. alors les angles TAP, PAB ſeroient égaux, ainſi que les angles ABQ, QBC, &c. d'où & des rapports ci-deſſus on concluroit que toutes les parties de la corde $TABCS$ ſont également tendues.

569. Si au lieu des puiſſances P, Q, R (*fig.* 61), on avoit en A, B, C (*fig.* 62), des points fixes, alors (565) la preſſion que la tenſion des parties extrêmes de la corde exerceroit ſur ces points fixes, ſeroit dirigée de manière à diviſer chaque angle en deux parties égales; & les tenſions de toutes les parties TA, AB, &c. de la corde $TABCS$ ſeroient égales (568). Donc (*fig.* 63) ſi deux puiſſances T & S tendent une corde appliquée ſur le contour d'un polygone ou d'une courbe quelconque, la tenſion ſe communiquera également par-tout, enſorte que ces deux puiſſances doivent être égales.

570. Lorſque les cordons aſſemblés par un même nœud, étant dans un même plan, ſe trouvent être au nombre de plus de trois, ou lorſqu'étant dans des plans différens, ils ſont au nombre de plus de

quatre ; alors les directions des cordons étant données, les rapports des puissances & des tensions des cordons ne sont pas absolument déterminés ; c'est-à-dire, que si un certain nombre de puissances (qui ne soit pas au-dessous de ce qui vient d'être dit) se sont fait équilibre suivant des directions connues, on peut leur substituer pareil nombre d'autres puissances dirigées de la même manière, mais qui ayant entre elles des rapports tous différens, ne se feront pas moins équilibre.

Par exemple, si les quatre cordons AP, AQ, AR, AS, (*fig.* 64) sont tous dirigés dans un même plan, & qu'ayant pris AB pour représenter la force P, & prolongé le cordon SA vers C, on conçoive l'effort AB composé de deux autres AC, AD dont le premier soit égal & directement opposé à la puissance S, rien ne détermine la direction AD de l'action qui doit s'opposer à l'effort composé des deux puissances Q & R; rien, dis-je, ne détermine cette direction, sinon que prolongée elle doit passer dans l'angle QAR; condition à laquelle on voit évidemment qu'il y a une infinité de manières de satisfaire. C'est pourquoi si ayant pris la direction AD arbitrairement avec la condition seulement qui vient d'être prescrite, on forme sur AB comme diagonale, & sur les directions AC, AD, comme côtés, le parallélogramme $ACBD$; & qu'ensuite sur AD comme diagonale, & sur les prolongemens AE, AF des directions des deux puissances Q & R, on forme le parallélogramme $AEDF$; alors en prenant AB pour représenter la valeur de P, on pourra prendre AC pour celle de S, AF pour celle de R, & AE pour celle de Q, parce que la force AB agit comme le feroient les deux forces AC, AD, dont la première pour faire équilibre à S, doit être $= S$; à l'égard de la seconde, AD, elle agit comme les deux forces AF, AE, qui pour faire équilibre à R & Q, doivent leur être respectivement égales. Mais on voit en même temps, qu'en donnant à AB une valeur différente, & conservant la direction de S, Q & R, alors AD, AF & AE auroient des valeurs différentes, telles néanmoins, qu'étant attribuées aux puissances sur les directions desquelles elles se trouvent, ces puissances se feroient équilibre : ainsi, dans ce cas, les directions restant les mêmes, il y a une infinité de manières de mettre ces puissances en équilibre.

571. Il en est de même lorsque les cordons issus d'un même nœud, sont dans différens plans, & qu'ils sont au nombre de plus de quatre. Mais lorsqu'il n'y en a que quatre, les directions étant données, les rapports que doivent avoir les forces appliquées à ces cordons, sont déterminés.

Car, par deux quelconques *AP*, *AS* de ces cordons (*fig.* 65), on peut toujours concevoir un plan qui prolongé suffisamment rencontrera le plan *RAQ* des deux autres, suivant une ligne *DAE* quelconque, mais dont la position est déterminée par les directions des quatre puissances. Alors si l'on prolonge la direction *SA*, & qu'ayant pris *AB* pour représenter la puissance *P*, on forme sur *AB* comme diagonale & sur les directions *AD*, *AC* comme côtés, le parallélogramme *DACB*, on aura *AC* pour la valeur de la puissance *S*, & *AD* pour celle de l'effort que la puissance *P* exerce contre les deux puissances *Q* & *R* agissant conjointement. Donc si ayant prolongé *QA* & *RA* qui sont dans un même plan avec *AD*, on forme sur *AD* comme diagonale, & sur les prolongemens *AF* & *AG* comme côtés, le parallélogramme *AFDG*; *AF*, *AG* seront les valeurs qu'on doit donner aux deux puissances *Q* & *R*.

572. Au reste, dans quelque cas que ce soit, soit que les cordons soient ou ne soient pas dans un même plan; comme l'équilibre exige que chaque nœud demeure immobile, si l'on décompose la force ou la tension de chaque cordon appliquée à un même nœud en trois autres forces perpendiculaires entre elles, ou parallèles à trois droites perpendiculaires

entre elles, il faut (283) pour chaque nœud, que la ſomme des forces parallèles à chacune de ces lignes, ſoit zéro (bien entendu que par le mot *ſomme*, on entend ici la ſomme des forces qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent dans l'autre). Si les cordons aſſemblés par un même nœud, étoient dans un même plan, il ſuffiroit de décompoſer en deux forces parallèles à deux lignes perpendiculaires entre elles, & tirées dans ce même plan. Par ce principe, on aura toujours toutes les conditions de l'équilibre, les cordons étant fixement liés entre eux.

573. Pour en donner un exemple ſimple, propoſons-nous de trouver par ce même principe, le rapport de trois puiſſances en équilibre par le moyen de trois cordons aſſemblés par un même nœud (*fig. 66*).

Suppoſons, pour un moment, que AG, AB, AF, ſont les lignes qui peuvent repréſenter ces trois puiſſances, & pour avoir moins de décompoſitions à faire, décompoſons les deux puiſſances Q & R, comme on le voit dans la figure, c'eſt-à-dire, chacune en deux; l'une ſur la direction de P; l'autre, perpendiculaire à cette même direction. Alors dans les triangles rectangles BAC, FAI, en repréſentant le rayon par 1, nous aurons $BC = AD = AB$ *ſin.* QAC; $FI = AE = AF$ *ſin.* RAC;

$AC = AB$ *cos.* QAC; $AI = AF$ *cos.* FAI. Donc suivant le principe que nous venons de poser, nous aurons AB *sin.* $QAC - AF$ *sin.* $RAC = 0$, & AB *cos.* $QAC + AF$ *cos.* $RAC - AG = 0$. La première de ces équations donne AB *sin.* $QAC = AF$ *sin.* RAC, & par conséquent $AB : AF ::$ *sin.* RAC : *sin.* QAC, c'est-à-dire, $Q : R ::$ *sin.* RAC : *sin.* QAC, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qui a été démontré (556).

Si de la première question on tire la valeur de AF, & qu'on la substitue dans la seconde, on aura $AB\ \text{cos. } QAC + \frac{AB\ \text{cos. } RAC\ \text{sin. } QAC}{\text{sin. } RAC} - AG = 0$, ou AB *cos.* QAC *sin.* $RAC + AB$ *cos.* RAC *sin.* $QAC = AG$ *sin.* RAC. Mais (*Géom.* 286) *cos.* QAC *sin.* RAC + *cos.* RAC *sin.* QAC = *sin.* $(QAC + RAC)$ = *sin.* QAR; donc AB *sin.* $QAR = AG$ *sin.* RAC; c'est-à-dire, $AB : AG ::$ *sin.* RAC : *sin.* QAR, ou $Q : P ::$ *sin.* RAC : *sin.* QAR; ce qui s'accorde également avec ce qui a été démontré (556).

574. Voyons maintenant ce que la pesanteur des cordes peut changer à la communication de l'action des puissances.

Soient (*fig. 67*) tant de puissances que l'on voudra appliquées à une même corde sans pesanteur $TABCS$

tirée à ses deux extrémités par deux puissances T & S, ou retenue à deux points fixes T & S.

Si l'on prolonge les deux cordons extrêmes TA, SC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en V, il est évident que l'effort résultant des tensions particulières de ces deux cordons extrêmes, doit passer par ce point V. Et puisque nous supposons qu'il y a équilibre, la résultante des trois puissances P, Q & R, & des tensions des deux cordons intermédiaires AB & BC, doit aussi passer par le point V, puisque pour l'équilibre, elle doit être égale & directement opposée à la résultante des tensions des deux cordons TA & CS. Mais la résultante des trois puissances & des tensions des deux cordons intermédiaires, n'est autre que celle des trois puissances seulement, parce que chacun des deux cordons AB & BC n'a, par lui-même, aucune action, & par conséquent aucun effet contre quelque partie que ce soit du systême. Donc la résultante de toutes les puissances P, Q, R appliquées à la corde, passe par le prolongement V des deux cordons extrêmes.

575. On a vu (197 & *suiv.*) comment on peut déterminer cette résultante ; mais si les cordons sont parallèles, comme il arrive lorsque les puissances P, Q, R sont des poids ; comme leur résultante ne peut manquer de leur être parallèle, sa direction se

détermine tout ſimplement, en menant par le point V, une parallèle à l'une des directions de ces poids, c'eſt-à-dire, une verticale.

576. Soient donc (*fig. 68*) tant de poids qu'on voudra, appliqués à une même corde ſans peſanteur; ayant prolongé les deux cordons extrêmes, & mené par leur rencontre V la verticale VX, on peut réduire, par la penſée, l'équilibre de tout ce ſyſtême, à celui de trois puiſſances appliquées à trois cordons aſſemblés par le nœud V, & où la puiſſance dirigée ſuivant XVZ eſt la ſomme des poids. De-là & de ce qui a été dit (556) on conclura donc que la tenſion T, eſt à la tenſion S comme le ſinus de XVS eſt au ſinus de TVX.

577. Si l'on ſe repréſente, maintenant, une corde peſante, comme l'aſſemblage d'une infinité de petits poids uniformément diſtribués ſur l'axe de cette corde, on voit donc que ſi S (*fig. 69*) repréſente le point où la puiſſance eſt appliquée à la corde, & T celui où cette corde eſt appliquée à une machine, l'action que la puiſſance exerce ſur le point T, ſe tranſmet ſuivant la tangente TV à la courbe que forme la corde par ſa peſanteur : que cette action n'eſt égale à celle de la puiſſance S, que lorſque la verticale menée par le point de concours V des deux tangentes extrêmes diviſe l'angle TVS en deux

parties égales ; & qu'en général l'action de la puissance S, celle qu'elle transmettroit si la corde n'étoit pas pesante, est à celle qu'elle transmet conjointement avec le poids de la corde, comme le sinus de TVX, est au sinus de SVX.

578. Remarquons que, rigoureusement parlant, quelque force que l'on emploie pour tendre une corde, elle ne peut jamais être parfaitement droite, si ce n'est dans la situation verticale.

En effet, supposons que la corde RAP (*fig.* 70) sans pesanteur, soutient le poids Q, à l'aide des deux puissances égales P & R dont les directions forment un angle infiniment approchant de 180°. On aura $Q : P :: CAD : \text{fin.}\ CAB$ (556), ou (en prolongeant DA) $:: \text{fin.}\ CAS : \text{fin.}\ \frac{1}{2}\ CAD$; mais l'angle CAS est infiniment petit, par la supposition; & $\frac{1}{2}\ CAD$ approche infiniment d'un angle droit; donc Q doit être infiniment petit par rapport à P; donc lors même que le poids Q est infiniment petit, les deux parties de la corde forment encore un angle.

On peut donc conclure de-là, qu'une force très-petite Q, excite une tension très-grande dans les cordons AP, AR lorsque l'angle RAP de ceux-ci est fort obtus.

579. Par-là on peut expliquer pourquoi, en soufflant par le moyen

moyen du tuyau Aa (*fig.* 71) dans une enveloppe flexible $aEBCa$, à l'extrémité B de laquelle est attaché le poids P, un souffle médiocre suffit pour élever ce poids P, quoiqu'assez considérable.

En effet, on peut regarder chaque moitié aCB, aEB de la section verticale de cette enveloppe, comme une corde poussée en chaque point par une force perpendiculaire (297), égale à la pression que l'air exerce intérieurement contre les parois de l'enveloppe. La résultante de toutes ces pressions doit (574) être dirigée suivant FED, c'est-à-dire, passer par le concours des tangentes aux extrémités de cette corde, & elle doit être à l'effort qui se fait suivant BD :: *sin.* aDB ou *sin.* aDu : *sin.* FDA. Or l'angle aDu est très-petit. Donc l'effort très-petit dirigé suivant FD, en produit un très-grand suivant BD; par la même raison, la pression faite sur aEB engendrera un effort considérable suivant BF; le poids P sera donc tiré par deux forces très-considérables, suivant BD, BF, & qui auront d'autant plus d'effet que l'angle FBD sera plus petit, parce que leur effort résultant approche d'autant plus d'être égal à leur somme.

Des Poulies & des Moufles.

580. On connoît assez la figure de la poulie, pour qu'il soit superflu d'en donner ici la description.

On peut réduire toutes les différentes espèces de poulies, à deux; savoir, la poulie *fixe*, ou *de renvoi*, & la poulie *mobile*.

La poulie fixe (*fig.* 72 & 73) est celle dans laquelle la puissance & le fardeau, ou l'obstacle qu'elle doit vaincre, sont appliqués tous deux suivant des directions tangentes à la circonférence de la poulie.

La poulie mobile (*fig.* 74 & 75) est celle dans laquelle le fardeau ou l'obstacle est appliqué au centre, ou suivant une direction qui passe par le centre ou par l'axe de la poulie.

581. A considérer généralement la poulie, cette machine est susceptible de deux sortes de mouvemens; l'un par lequel la corde qui passe dans la *gorge* de la poulie, c'est-à-dire, qui embrasse la poulie, peut changer de place, sans que pour cela le corps de la poulie soit déplacé; l'autre par lequel le corps de la poulie peut changer de situation. Ainsi l'équilibre dans cette machine, est assujetti à deux conditions absolument distinctes; la première, que les tensions des deux parties de la corde qui embrasse la poulie, se détruisent mutuellement; & pour cet effet, elles doivent être égales, quelle que soit d'ailleurs la courbure de la poulie (569). La seconde condition se déduit de cette première de la manière suivante.

582. Des tensions des deux cordons qui embrassent la poulie, il résulte sur le corps de cette machine

un effort que l'on déterminera en prenant ſur les directions des cordons, à compter de leur point de concours (*fig.* 72, 73 & 74), les parties égales *IA*, *IB*, & formant le parallélogramme *IADB* dont la diagonale *ID* repréſentera l'effort qui s'exerce ſur le corps de la poulie, en ſuppoſant que *IA* repréſente la tenſion du cordon *OP* (*fig.* 72 & 73) ou *OG* (*fig.* 74). Or à cauſe des tangentes *IR*, *IO*, & des lignes égales *IB*, *IA*, il eſt facile de voir que *ID* prolongée, paſſe par le centre *C* de la poulie. Donc ſi le corps de la poulie n'eſt pas fixement aſſujetti, *ID* ne peut être détruit qu'autant que l'obſtacle quelconque qui doit empêcher le mouvement du corps de la poulie, ſera placé ſur quelque point de la ligne *IC* qui va du centre *C*, au point de concours des deux cordons qui embraſſent la poulie. Ainſi, ſi la poulie eſt deſtinée à tourner dans une chappe *CG* fixée à un point extérieur *G* (*fig.* 73), & ſi cette chappe peut tourner autour de *G*, il n'y aura équilibre que lorſque la chappe *CG* ſera dirigée ſuivant *CI*.

Pareillement, ſi le corps de la poulie, étant embraſſé par une corde fixée au point *G* (*fig.* 74) eſt mobile, il n'y aura équilibre que lorſque l'effort appliqué au centre *C* ou à la chappe fixée à ce centre, diviſera en deux parties égales, l'angle des deux cordons OG, RQ, & que cet effort ſera à la tenſion de chacun des deux cordons OG, RQ :: $ID : IA : IB$.

583. D'après cela, il eſt facile de trouver le rapport des tenſions de chacun des deux cordons qui embraſſent la poulie, à l'effort qui en réſulte ſur le corps de la poulie, & par conſéquent à l'effort dont la poulie mobile (*fig.* 74) eſt capable.

La tenſion de chaque cordon étant repréſentée par IA ou ſon égale IB, l'effort qui s'exerce ſur le corps de la poulie, eſt exprimé par ID. Or dans le triangle IAD, $IA : ID ::$ ſin. IDA : ſin. IAD, ou :: ſin. CIQ : ſin. OAD, ou ſin. PIQ; on peut donc dire en général que *dans l'équilibre à l'aide de la poulie ſimple, fixe ou mobile,* 1°. *les tenſions des deux cordons qui embraſſent la poulie, ou les puiſſances appliquées à ces cordons ſont égales.* 2°. *Chacune de ces puiſſances, eſt à l'effort qui ſe fait ſur le centre de la poulie, comme le ſinus de la moitié de l'angle que forment ces deux cordons, eſt au ſinus de cet angle entier.*

Ainſi, dans la poulie fixe (*fig.* 72 & 73), la puiſſance Q n'a d'autre avantage que celui de pouvoir changer à volonté la direction de ſon action. Mais dans la poulie mobile (*fig.* 74 & 75) la puiſſance Q a le double avantage de pouvoir changer ſa direction & augmenter l'effet de ſon action. Mais il faut remarquer qu'à mesure que sa direction change, l'effort qu'elle exerce sur le centre varie ; ensorte qu'il y a une direction selon laquelle cet effort est le plus grand qu'il est possible ; & c'est lorsque les deux cordons OG, RQ sont parallèles, ainsi qu'on va le voir.

584. Si l'on mène les rayons OC, CR, (*fig.* 74) & la soutendante OR, le triangle OCR aura ses côtés perpendiculaires sur ceux du triangle BID, & lui sera par conséquent semblable ; on aura donc $IB : ID :: CR : OR$, c'est-à-dire, $Q : P :: CR : OR$; donc en général, *la tension d'un des cordons est à l'effort que supporte le centre comme le rayon de la poulie, est à la soutendante de l'arc embrassé par la corde.*

Or il est évident que ce dernier rapport est le plus grand qu'il est possible, & devient celui de 1 à 2, quand les cordons sont parallèles (*fig.* 75) ; donc, dans la poulie mobile, la puissance est la plus petite qu'il est possible, lorsque les cordons sont parallèles ; & elle est alors la moitié du poids soutenu par le centre de la poulie.

585. Jusqu'ici nous avons attribué l'équilibre sur la poulie, à ce que du concours des deux forces appliquées tangentiellement à la circonférence de la poulie, il résulte une force unique, dont la direction

paſſe par le centre de cette poulie, & y eſt détruite, dans la poulie fixe (*fig. 72*) par la réſiſtance de l'axe de la poulie ſuppoſé inébranlable ou par la réſiſtance de la chappe (*fig. 73*), ou enfin par la réſiſtance d'un poids (*fig. 74*) qui lui eſt égal & directement oppoſé.

Mais comme la puiſſance, dans cette machine, eſt cenſée la ſeule choſe agiſſante ; & que le poids, ainſi que l'effort appliqué à la chappe, font ſeulement fonction de réſiſtance, il paroît plus naturel de ſuppoſer que l'action de la puiſſance ſe décompoſe en deux efforts, dont l'un eſt égal & directement oppoſé à l'effort appliqué à l'autre cordon tangentiel, & dont l'autre eſt égal & directement oppoſé à l'effort appliqué au centre de la poulie.

Par exemple, dans la poulie fixe (*fig. 76*) & dans la poulie mobile (*fig. 77*), ayant pris ſur la direction AQ de la puiſſance Q, & à compter du point A où elle concourt avec le cordon AF, une partie quelconque AB pour repréſenter cette puiſſance ; on formera ſur AB, comme diagonale, un parallélogramme $ADBI$, dont les côtés AI, AD, ſoient ſur le prolongement de FA, & ſur la droite AC qui va du point de concours A au centre C. Alors on pourra concevoir que la puiſſance Q ſe décompoſe en deux efforts AI & AD. Or puiſqu'il y a équilibre, il faut que l'effort AI soit égal à la tension du cordon FP (*fig.* 76) ou FG (*fig.* 77), & que l'effort AD soit égal à celui que supporte le centre (*fig.* 76) ou au poids P (*fig.* 77); mais par les principes de la décomposition (201), on a $AB : AD : AI :: \sin. DAI : \sin. BAI : \sin. BAD$ ou $:: \sin. FAC : \sin. FAE : \sin. EAC$, ce qui est la même chose que nous avons vu (583).

Et en général, on trouvera toujours le même rapport, soit qu'on envisage l'équilibre comme se faisant par une composition de forces, soit qu'on le considère comme l'effet de la décomposition.

Si les cordons sont parallèles (*fig.* 75) on décomposera la puissance Q en deux puissances parallèles CB & OI, comme il a été dit (208).

586. Donc si le poids P (*fig.* 78) est soutenu par la puissance Q, à l'aide de plusieurs poulies mobiles embrassées, chacune par un cordon dont une extrémité soit arrêtée à un point fixe, & l'autre à la chappe de la poulie voisine, le rapport de la puissance au poids, sera celui du produit des rayons de toutes les poulies mobiles, au produit des soutendantes des arcs embrassés par les cordes.

En effet, si l'on appelle N & M les charges des centres des deux poulies N & M, qui sont en même temps les tensions des deux cordons attachés aux centres N & M, & qu'on appelle r, r', r'' les rayons, & s, s', s'' les soutendantes des poulies N, M, L; on aura (584) $Q : N :: r : s$; $N : M :: r' : s'$; $M : L$ ou $P :: r'' : s''$; donc en multipliant par ordre, & supprimant les facteurs communs aux deux termes du premier rapport, on aura $Q : P :: rr'r'' : ss's''$. Et si les cordons sont parallèles, ce qui donne $s = 2r$, $s' = 2r'$, $s'' = 2r''$, on aura $Q : P :: rr'r'' : 2r \times 2r' \times 2r'' :: 1 : 2 \times 2 \times 2$, c'est-à-dire, que la puissance sera au poids, comme l'unité est au nombre 2 élevé à une puissance marquée par le nombre des poulies mobiles; par exemple, avec trois poulies, la puissance Q soutiendroit huit fois sa valeur.

587. Mais cette disposition de poulies n'est pas la plus commode; on emploie plus ordinairement celles qui sont représentées dans les *figures 79, 80, 81, 82, 83, 84*, auxquelles on donne le nom de *Moufles*; ce sont plusieurs assemblages de poulies toutes embrassées par une même corde, dont les unes sont fixes & les autres mobiles. Toutes les poulies fixes sont portées sur une même chappe, & toutes les poulies mobiles sur une seule autre chappe. Tantôt (*fig. 79, 80, 81 & 82*) leurs centres sont distribués sur différens points de cette chappe; tantôt (*fig. 83*) ils sont tous sur un même axe.

588. Quelque différence qu'il y ait dans ces dispositions particulières on peut toujours trouver le rapport de la puissance au poids, par ce principe. *La puissance est au poids comme le rayon ou sinus de 90 degrés, est à la somme des sinus des angles que font avec l'horizontale chacun des cordons aboutissans à la mouste mobile.*

En effet, si sur chacun de ces cordons (*fig.* 79 & 80) on prend les parties égales, im, np, &c. pour représenter leur tension, & que sur chacune de ces lignes comme diagonale, on forme un parallélogramme, dont deux côtés soient verticaux, & les deux autres horizontaux ; au lieu de considérer le poids P comme soutenu par les tensions immédiates des cordons, on pourra le considérer comme soutenu par le concours des forces horizontales ik, no, &c. & des forces verticales il, nq, &c. Or les premiers étant perpendiculaires à la direction de l'action du poids, ne contribuent point à contre-balancer cette action ; & dans l'équilibre, elles se détruiront mutuellement. Le poids P n'est donc soutenu que par la résultante, c'est-à-dire, par la somme des forces verticales il, nq, &c. Or dans les triangles rectangles iml, nqp, &c. on a $im : il :: 1 : sin.\ iml$; np ou $im : nq :: 1 : sin.\ npq$; & ainsi des autres cordons ; donc $il = im\ sin.\ iml$;

$nq = im\ sin.\ npq$; donc enfin $Q : P :: im : im\ sin.\ iml + im\ sin.\ npq +$ &c. ou $:: 1 : sin.\ iml + sin.\ npq +$ &c.

589. Si les cordons ſont parallèles, & par conſéquent verticaux, les angles iml, npq, &c. ſeront droits, & par conſéquent leurs ſinus ſeront chacun égal au rayon 1. Donc alors la puiſſance ſera au poids comme 1 eſt à la ſomme d'autant d'unités qu'il y a de cordons aboutiſſans à la moufle mobile. D'où l'on voit que *ſi une des extrémités de la corde eſt attachée à la moufle fixe* (fig. 81), *la puiſſance ſera au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies de la moufle mobile. Et ſi l'extrémité de la corde eſt attachée à la moufle mobile* (fig. 82), *la puiſſance ſera au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies de la moufle mobile, augmenté d'une unité.*

590. La propoſition générale que nous venons de démontrer, a lieu, ſoit que les cordons ſoient ou ne ſoient pas dans un même plan. Et ſi l'obſtacle que l'on a deſſein de forcer en faiſant uſage des moufles n'étoit pas un poids; c'eſt-à-dire, ſi la direction de l'effort total de la moufle n'étoit pas verticale, cette propoſition n'auroit pas moins lieu, en ſubſtituant aux angles que les cordons étoient ſuppoſés faire avec le plan horizontal, ceux qu'ils font avec le plan perpendiculaire à l'effort total de la

moufle. Par exemple, dans *la figure 84* la puissance Q est à l'effort qui se fait en G, comme le rayon est à la somme des sinus des angles que chacun des cordons aboutissans à la moufle EF font avec un plan perpendiculaire à FG.

591. Si l'on emploie plusieurs moufles, tant fixes que mobiles, il sera encore facile, d'après ce qui précède, d'avoir le rapport de la puissance au poids.

Par exemple, dans la *figure 84*, les cordons étant supposés parallèles, la puissance Q, est à l'effort qui se fait suivant BC (589) :: 1 : 5; or ce dernier effort fait l'office de puissance à l'égard de l'équipage BA; il est donc à l'égard du poids P, comme 1 : 4; donc (en multipliant par ordre) la puissance Q est au poids P :: 1 : 20; ainsi, un effort de $50^{\text{liv.}}$, par exemple, soutiendroit un poids de $1000^{\text{liv.}}$.

592. Dans tout ce qui précède, nous avons fait abstraction de la pesanteur des poulies, chappes, &c. du frottement & de la roideur des cordes. Nous verrons plus bas comment on doit avoir égard à ces deux dernières sortes de résistances. A l'égard de la pesanteur des parties mobiles que la puissance doit soutenir, la manière d'y avoir égard dans le cas de l'équilibre, est de comprendre leur valeur totale dans celle du poids P, lorsque (*fig. 81 & 82*)

l'action totale de leur poids coïncide avec celle de *P* ; mais si comme on le voit (*fig.* 84) la pesanteur de l'équipage *CF* ne s'exerce pas suivant la même ligne *BC* suivant laquelle s'exerceroit l'effort de cet équipage sans la pesanteur ; alors *BC* n'est plus dans cette dernière direction, mais dans la direction de la résultante de la pesanteur de cet équipage, & de l'effort qu'il feroit sans la pesanteur ; mais comme cet objet est de peu de considération dans les cas où l'on emploie les poulies de cette manière, nous n'entrerons pas dans l'examen du rapport exact qu'il y a alors entre la puissance & le poids.

593. A l'égard du mouvement dans la poulie, nous n'examinerons ici que celui qu'elle donne au poids *P*, lorsque les cordons sont parallèles. Or il est évident que dans la poulie fixe & simple (*fig.* 72) le poids *P* ne peut avoir que la même vîtesse que la puissance *Q* ; & dans la poulie simple & mobile (*fig.* 75) le poids va deux fois moins vîte que la puissance.

Dans les moufles, les cordons étant parallèles, la vîtesse du poids est à celle de la puissance, comme la puissance est au poids dans le cas de l'équilibre. Car il est évident que si la moufle mobile (*fig.* 81 & *suiv.*) a monté d'un pied, par exemple, chacun des cordons aboutissant à cette moufle s'est accourci d'un pied; donc celui auquel la puissance est appliquée, a dû s'alonger, d'autant de pieds qu'il y a de cordons aboutissant à la mousle mobile.

594. Lorsqu'on emploie les poulies dans des machines où la régularité & la précision des mouvemens sont nécessaires, alors il faut avoir égard à leur inertie; mais le mouvement de rotation qu'elles prennent, étant l'effet du frottement, nous remettons à en parler plus bas.

Du Levier, lorsque les forces qui lui sont appliquées sont toutes dans un même plan.

595. Par *levier*, nous entendons ici une verge inflexible, de quelque figure que ce soit, tellement fixée en l'un *C* de ses points (*fig. 85 & 86*) qu'elle ne puisse prendre d'autre mouvement par l'action des forces qui lui seroient appliquées, qu'un mouvement de *Rotation*, c'est-à-dire, un mouvement pour tourner autour de *C*. Ce point *C* s'appelle *Point d'appui.*

596. Nous regarderons d'abord le levier comme sans masse & sans pesanteur. Dans le cas de l'équilibre, on peut aisément avoir égard à sa pesanteur, en la considérant comme rassemblée au centre de gravité de ce levier, & comme une nouvelle force qu'on

lui appliqueroit en ce point, suivant une direction verticale. Dans le cas du mouvement, ce n'est point au centre de gravité qu'il faut imaginer la masse rassemblée pour avoir l'effet qu'elle peut produire; c'est en un autre point que nous déterminerons dans peu.

597. Nous supposerons que les forces appliquées au levier sont toutes dans un même plan avec le point d'appui. Nous traiterons, dans un autre article, de l'équilibre & du mouvement, lorsque les forces appliquées au levier sont dans différens plans.

598. Supposons donc que deux puissances P & Q (*fig.* 85 *&* 86) appliquées aux deux points B & D du levier BCD, soit immédiatement, soit par le moyen de deux cordons ou de deux verges sans masse, agissent sur ce levier suivant les directions BP, DQ, & se fassent équilibre : il s'agit de déterminer les conditions de cet équilibre.

Comme l'une quelconque des deux puissances, la puissance Q, par exemple, ne fait équilibre à l'autre, qu'à l'aide du point d'appui C, il est clair que la puissance Q, doit produire deux efforts; dont l'un anéantisse celui de la puissance P, & dont l'autre soit détruit par le point d'appui C, & par conséquent, passe par ce point.

Prolongeons indéfiniment les directions *PB* & *QD* qui se rencontrent en *A*, & menons *AC*. Nous pouvons (196) supposer la puissance *Q* appliquée en *A* suivant *AQ*, alors si *AG* représente la valeur de cette puissance, & que sur *AG* comme diagonale, & sur les directions *AC*, *BAE*, comme côtés contigus, on forme le parallélogramme *AHGE*; *AE* représentera (193) l'effort que *Q* exerce dans la direction & en sens contraire de *P*; & *AH*, celui qu'elle exerce contre le point d'appui *C*. En effet, quoique le point *A* ne soit point lié aux deux points *B* & *C*, la distribution de la force *Q* ne s'en fait pas moins de la même manière que s'il y étoit lié. Car il est évident que si, sans rien changer aux forces & à leurs directions, on lioit le point *A* aux trois points *B*, *C*, *D*, par trois verges inflexibles *AB*, *AC*, *AD* sans masse, cela ne changeroit rien du tout à l'état présent du systême, & par conséquent à la manière dont la force *Q* communique son action : or dans ce dernier cas, l'action de la force *Q* seroit visiblement communiquée de la manière qui vient d'être décrite ; donc elle est communiquée de la même manière dans le premier cas.

Cela posé, puisqu'il y a équilibre, & que la force *AE* est directement opposée à la force *P*, il faut qu'elle lui soit égale. Quant à la force *AH*, il ſuffit pour qu'elle ſoit détruite, qu'elle ſoit dirigée au point *C*.

On a donc en nommant *C* la charge que ſupporte l'appui *C*, $Q : P : C :: AG : AE : AH$.

599. Si, de *A* vers *B*, on prend $AI = AE$, & que l'on mène *IH*, il eſt facile de voir que *AIHG* eſt un parallélogramme. Or *AI*, *AG* côtés de ce parallélogramme, marquent les valeurs & les directions des deux forces *P* & *Q*; donc la diagonale *AH* repréſente leur réſultante; donc puiſque *AH* repréſente auſſi la charge du point d'appui, il faut en conclure qu'en général, la charge du point d'appui, eſt préciſément la réſultante des deux forces appliquées au levier; & que par conſéquent ces deux forces agiſſent ſur l'appui, comme ſi elles y étoient immédiatement appliquées ſuivant des directions parallèles à celles qu'elles ont actuellement.

600. Au reſte, on peut voir immédiatement cette dernière vérité, en faiſant attention que puiſqu'à la force *Q* on peut ſubſtituer les deux forces *AE*, *AH* dont la première eſt détruite par la force *P*, la force reſtante *AH* eſt l'effet unique auquel ſe réduiſent les deux forces *P* & *Q*, & par conſéquent la réſultante de ces deux forces.

601.

601. La ſuite des rapports $Q : P : C :: AG : AE : AH$ que nous venons de trouver (598) fournit donc le moyen de comparer les forces Q & P, tant entre elles qu'avec la charge C de l'appui. Mais comme ce rapport n'eſt pas le plus commode à employer, voici deux autres moyens qu'on peut employer dans la même vue.

1°. Selon ce qui a été dit (201) on a $AG : AE : AH :: \sin. HAE : \sin. HAG : \sin. GAE$, ou $:: \sin. HAI : \sin. HAG : \sin. GAI$, parce que les angles HAE, GAE, ont même ſinus que leurs ſupplémens HAI, GAI; donc $Q : P : C :: \sin. HAI : \sin. HAG : \sin. GAI$; c'eſt-à-dire, que des deux forces Q & P, & de la charge de l'appui C, chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

2°. Nous avons vu (202) que de trois forces dont l'une eſt la réſultante des deux autres, deux quelconques ſont toujours entre elles réciproquement comme les perpendiculaires menées ſur leurs directions, d'un point quelconque pris ſur la direction de la troiſième.

Donc ſi de tel point que ce ſoit de AC; ſi de C, par exemple, on mène les perpendiculaires CL, CM ſur les directions PB, QD, on aura $Q : P :: CL : CM$.

602. Pareillement si de tel point que ce soit de la direction de Q; si du point D, par exemple, on mène les perpendiculaires DO, DR sur les directions de la force P & de la charge de l'appui, on aura $P : C :: DR : DO$. On comparera de même la force Q avec la charge C.

Toutes ces vérités ont lieu quelle que soit la figure du levier, & quelles que soient les directions des deux puissances.

603. Lorsque les directions des deux puissances sont parallèles (auquel cas la résultante ou la charge de l'appui leur est parallèle), les perpendiculaires menées d'un même point de la direction de l'une d'entre elles sur les directions des deux autres, se trouvent toutes sur une même ligne LCM (*fig.* 87). On peut donc dire alors que si l'on mène une ligne LCM perpendiculaire aux directions des puissances, chaque puissance est représentée par la partie de cette droite, comprise entre les directions des deux autres.

604. Si, de plus, le levier est droit, alors il est aisé de voir, par les triangles semblables CLB, CMD, que les parties CB, CD, BD, ont même rapport entre elles que les parties CL, CM, LM; donc on peut dire dans ce cas, que chaque force

est représentée par la partie du levier comprise entre les directions de deux autres ; ainsi $Q : P :: CB : CD$, c'est-à-dire, que les deux puissances sont en raison inverse des bras de levier CB, CD ; ensorte que la puissance Q doit être d'autant plus petite pour faire équilibre à la puissance P, que le bras CD auquel elle est appliquée, est plus grand que le bras BC auquel P est appliquée. A l'égard de la charge de l'appui, elle est égale à la somme des deux puissances P & Q, puisque celles-ci (203) étant représentées par CD & BC, la charge l'est par BD.

605. Si l'on distingue (*fig.* 88, 89 & 90) une puissance Q, motrice, ou prête à donner le mouvement, un mobile P, & un appui C; on pourra, avec les anciens, distinguer trois sortes de leviers, suivant les trois différentes positions que la puissance peut avoir à l'égard du mobile & de l'appui.

La *figure* 88 représente ce qu'on appelle *levier de la première espèce* : la puissance & le mobile, y sont de part & d'autre de l'appui, & la puissance a d'autant plus d'avantage (601), qu'elle est plus éloignée du point d'appui.

La *figure* 89 représente le *levier de la seconde espèce*, où le mobile est entre l'appui & la puissance, qui par conséquent a toujours de l'avantage.

Enfin la *figure* 90 représente le *levier de la troisième espèce*, où la puissance est entre l'appui & le mobile : elle a donc alors un déſavantage réel, & par conſéquent ce levier ſeroit mal employé dans les cas où il s'agit d'augmenter l'effet de la force motrice, c'eſt-à dire, de la mettre en état de ſurmonter une force plus grande qu'elle-même. Mais, ainſi que nous l'avons déjà obſervé, comme on n'a pas toujours pour objet de multiplier la force motrice, cette conſidération n'empêche pas que cette troiſième eſpèce de levier ne puiſſe être employée très-utilement dans des machines où l'on veut profiter de tous les mouvemens dont on peut diſpoſer. C'eſt ainſi, par exemple, qu'on l'emploie avec avantage dans les métiers à toiles, à draps & autres étoffes, où les mains de l'ouvrier occupées au tiſſu de l'étoffe, ne peuvent être employées à donner le mouvement à la machine: on y emploie les pieds, qui en appuyant ſur les pédales *CD*, tirent ſur la corde *BR*, laquelle par-deſſus la poulie *R*, va joindre l'aſſemblage qui ſert à élever & à baiſſer alternativement les fils, & qui ayant peu de poids, n'exige pas une force conſidérable. La machine du Rémouleur ou Gagne-petit, certains rouets à filer, ſont dans le même cas, ainſi que beaucoup d'autres machines.

606. Obſervons, avant que d'aller plus loin, qu'abſtraction faite du frottement, le point d'appui d'un levier ne doit pas être conſidéré comme un ſimple ſoutien. En effet (*fig. 86*) ſi l'appui *C* au lieu de pénétrer dans l'intérieur du levier, en touchoit ſeulement la ſurface, il eſt facile de voir que quoique les deux puiſſances *Q* & *P* fuſſent entre elles en raiſon inverſe des perpendiculaires *CM*, *CL*, elles ne pourroient être en équilibre ſur ce levier que dans un ſeul cas; ſavoir, quand la

direction AC seroit perpendiculaire à BD (ou à la tangente en C dans la *figure 85*); car si AC étoit oblique, il est facile de voir qu'elle communiqueroit au levier un mouvement suivant BD; ainsi ce seroit une erreur de croire, par exemple, qu'abstraction faite du frottement, & de la pesanteur du levier PQ (*fig. 91*) les deux poids P & Q demeureroient en équilibre dans la situation inclinée, si P étant à $Q :: CQ : CP$ la surface du levier s'appuyoit seulement sur le point C. Le point d'appui tel qu'on doit le concevoir pour qu'il y ait équilibre dans toutes les positions du levier, doit faire l'effet d'une broche qui passant par C, permettroit seulement au levier de tourner autour de C. En un mot, quand on dit qu'il suffit que la résultante AC des deux puissances passe par le point d'appui C, c'est en supposant que le point correspondant C du levier ne peut prendre aucun mouvement; car cette condition ne suffit plus dès qu'il peut en prendre.

Par exemple, si le levier BD (*fig. 92*) étoit tiré par les trois puissances P, Q, R appliquées au trois cordons BP, DQ, CR, il n'y auroit point équilibre si AC étoit la direction de la résultante de P & de Q, quoique AC passe par l'appui C: il faudroit encore que le point de concours A fût sur CR.

607. Puisque les deux forces P & Q qui doivent se faire équilibre à l'aide du levier BCD (*fig. 85*

& *suiv.*) doivent être en raison inverse des perpendiculaires CL, CM; c'est-à-dire, puisqu'on doit avoir $P : Q :: CM : CL$, il s'ensuit que $P \times CL = Q \times CM$, c'est-à-dire que les momens de ces deux forces pris par rapport au point d'appui, ou (217) par rapport à tout autre point de la direction AC, doivent être égaux.

608. Comme il ne peut y avoir de force sans une tendance au mouvement, on doit par ces expressions *les forces* P & Q, entendre le produit d'une certaine masse par la vîtesse que ces forces lui communiqueroient si elle était libre. Ainsi, soit M une certaine masse & V la vîtesse que la force P agissant librement sur cette masse, peut lui communiquer: soit pareillement M' une autre masse quelconque, & V' la vîtesse que la force Q est capable de lui communiquer; il faudra donc pour l'équilibre, que l'on ait $M \times V : M' \times V' :: CM : CL$.

609. Soit g la vîtesse que la pesanteur donne, dans un instant, à toute partie matérielle en liberté; & soient M & M' (*fig.* 93) deux corps pesans attachés aux deux cordons BIM, DKM' qui passant par-dessus les renvois courbes I & K transmettent entièrement au levier BCD, suivant les directions quelconques BI & DK, l'action de la pesanteur de ces corps; on aura $g \times M$ ou gM,

& gM' pour la mesure des forces avec lesquelles ces corps agissent ; il faudra donc, pour l'équilibre, que $gM : gM' :: CO : CN$, c'est-à-dire, $M : M' :: CO : CN$; donc, en général, pour que deux masses qui ne sont sollicitées que par leur pesanteur, ou pour que deux masses qui seroient animées de vîtesses égales se fassent équilibre sur un levier, il suffit que ces masses soient en raison inverse des distances du point d'appui aux directions suivant lesquelles ces forces tirent le levier.

610. Mais si les vîtesses n'étoient pas égales, on voit que ce doivent être, non les masses seulement, mais les produits des masses par les vîtesses, qui soient en raison inverse des distances de leurs directions au point d'appui.

611. Si deux masses finies & pesantes M & M' (*fig.* 93) viennent à recevoir des vîtesses finies & inégales suivant les cordons IM & KM'; comme la vîtesse que la pesanteur peut leur imprimer dans un instant est infiniment petite, il suffira pour que les deux vîtesses finies se détruisent mutuellement, que les quantités de mouvement que les deux corps auroient en vertu de ces vîtesses soient en raison inverse de CO & CN. Mais cet équilibre n'aura lieu qu'un instant ; car dès que ces vîtesses se seront détruites mutuellement, les corps M & M' soumis à l'action

de leur pesanteur, en recevront des quantités de mouvement qui seront dans le rapport simple des masses, & qui par conséquent ne seront plus dans le rapport inverse des distances *CO*, *CN*.

On voit par-là, la différence qu'il y a entre l'équilibre des poids animés par la pesanteur seulement, & celui des poids animés de vîtesses finies.

612. Une autre remarque qu'il est encore à propos de faire ici, c'est qu'il est impossible de mettre en équilibre un poids animé de sa seule pesanteur avec un poids ou une masse animée d'une vîtesse finie ; la raison en est la même que celle que nous avons exposée (359). D'où il faut conclure que si le poids *P* (*fig. 88*) est en équilibre avec une force *Q* telle que celle d'un homme, d'un animal, &c. ; cette dernière ne tend à faire mouvoir le point *D* qu'avec une vîtesse infiniment petite. Si au contraire la force *Q* appliquée en *D* agissoit par une secousse ou impression finie, elle feroit monter le poids *P*, tel qu'il fût, du moins pendant un certain temps qui lorsque *P* sera un peu considérable, peut être tel que l'œil ne puisse pas saisir ce mouvement, mais ce mouvement n'en sera pas moins réel : voyez ce que nous avons dit (359).

Nous avons jugé devoir placer ici ces réflexions qui ne peuvent que fixer l'esprit des Commençans sur la véritable idée qu'ils doivent se former des forces appliquées aux machines : on en sentira encore mieux l'importance à mesure que nous avancerons.

613. Les rapports que nous avons établis (598 & *suiv.*) entre les deux puissances P & Q, & la charge C de l'appui (*fig. 85 & suiv.*) mettent en état de résoudre cette question générale. *Trois de ces six choses étant données, les deux puissances, la charge de l'appui, & leurs directions, trouver les trois autres.* Quand les directions seules sont données, alors on ne peut avoir que le rapport des puissances. La solution de cette question est évidente par ce qui a été dit (559). Elle peut s'exécuter aussi par des constructions géométriques faciles à trouver, mais dans le détail desquelles nous n'entrerons point. Nous observerons seulement que quand les directions sont parallèles, alors ce qui a été dit (206 & *suiv.*) ou (603), résout la question, & qu'en général s'il s'agit de déterminer la position de l'appui lorsque l'on connoît les puissances P & Q, & leurs positions, la question se réduit à trouver la position de la résultante de ces deux puissances, ce qui est facile par ce qui a été dit (206).

614. Il n'en est pas de même lorsqu'il y a plus

de deux puiſſances appliquées au levier ; alors on peut [de même qu'on l'a vu pour les cordes (570)] varier à l'infini les rapports ou les directions de quelques-unes des puiſſances, en laiſſant les autres les mêmes, & cependant avoir toujours équilibre : mais il y a cette différence entre le levier & les cordes, que la condition de l'équilibre ſur le levier eſt unique ; au lieu que pour les cordes, il y a autant de conditions que de nœuds (572). Il nous ſuffira de faire connoître cette condition pour trois puiſſances, pour faire ſentir qu'elle doit avoir lieu de même pour quelque nombre de puiſſances que ce ſoit.

615. Soient donc (*fig. 94*) trois puiſſances P, Q, R, dirigées, ſuivant BP, EQ, DR, en équilibre ſur le levier $BCED$. La puiſſance Q fait effort contre chacune des deux puiſſances P & R, & contre l'appui C.

Ayant prolongé les directions, & pris à compter de la rencontre A de BP & EQ la ligne AH pour repréſenter la puiſſance Q, j'imagine cette puiſſance décompoſée en deux autres, l'une AG égale & directement oppoſée à la puiſſance P, l'autre AF telle qu'elle puiſſe faire équilibre à la puiſſance R au moyen de l'appui C. Donc ſi la direction DR rencontrant AF au point I, on conçoit la force AF appliquée en I suivant $AFIL$; il faut que la force AF ou IL puisse se décomposer en deux autres forces ; l'une IK égale & directement opposée à la puissance R, l'autre IM dirigée au point d'appui C. Par ce moyen la force Q produit les trois effets AG, IK, IM dont les deux premiers étant égaux & directement opposés aux forces P & R sont détruits, & dont le dernier étant dirigé au point fixe C ne peut manquer d'être détruit aussi. Or puisque toutes les forces qui agissent sur le levier sont P, Q, R, ou AG, IK, IM, P & R, dont AG, IK, P & R se détruisent, concluons-en donc que IM est la résultante des trois puissances P, Q, R ; que par conséquent la condition unique à laquelle l'équilibre est assujetti, est que la résultante de toutes les puissances, passe par le point d'appui C. On voit donc que les puissances P, Q, R agissent sur l'appui C, comme si elles y étoient immédiatement appliquées suivant des directions parallèles à celles qu'elles ont actuellement. Et cela est général pour quelque nombre de puissances que ce soit, parce qu'on peut toujours supposer qu'une seule des puissances fait équilibre à toutes les autres, à l'aide de la résistance de l'appui.

616. Puisque C doit être un des points de la résultante, il doit donc avoir les propriétés dont nous

avons fait mention (217); c'est-à-dire, qu'en général *lorsque plusieurs puissances dirigées dans un même plan se font équilibre à l'aide d'un levier de figure quelconque; si du point d'appui on mène des perpendiculaires sur les directions de ces forces, & qu'on multiplie chaque force par la perpendiculaire correspondante, c'est-à-dire, si on prend les momens de ces forces par rapport au point d'appui, la somme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un sens, doit être égale à la somme des momens de celles qui tendent à le faire tourner en sens contraire;* ce qu'on peut exprimer généralement, en prenant avec des signes contraires les momens des forces qui tendent à faire tourner en sens opposés, & disant que *la somme des momens doit être zéro.*

617. Donc tout ce que nous avons dit (219 & *suiv.*) pour trouver la valeur & la direction de la résultante, aura lieu ici pour trouver la charge & la position du point d'appui, quel que soit le nombre des puissances.

618. Si connoissant les deux poids P & Q (*fig.* 95), la longueur & le poids BD du levier, on veut déterminer le point d'appui C, sur lequel le tout peut demeurer en équilibre; on imaginera que le poids du levier est une nouvelle force verticale R appliquée au centre de gravité E de ce

levier, & il faudra que le moment de P par rapport au point inconnu C, soit égal à la somme des momens des deux poids R & Q, pris par rapport au même point inconnu C.

Supposons, pour en donner un exemple, que le levier BD est droit, d'une grosseur & d'une pesanteur uniformes: & faisant attention qu'à cause des parallèles on peut, au lieu des perpendiculaires CI, CK, CL, employer les parties BC, CE, CD qui ont même rapport entre elles, on aura $P \times BC = R \times CE + Q \times CD$.

Soit a, la longueur du levier; x, la distance BC; on aura (251) $BE = \frac{1}{2}a$; $CE = \frac{1}{2}a - x$, $CD = a - x$. Soit p la pesanteur spécifique du levier, c'est-à-dire, pour fixer les idées, ce que pèse ce levier par pouce de longueur, a & x étant comptés en pouces; pa sera son poids total R. On aura donc $Px = pa\,(\frac{1}{2}a - x) + Q \times (a - x)$, d'où l'on tirera $x = \frac{\frac{1}{2}paa + Qa}{P + pa + Q}$. Soit $a = 24$ pouces, $P = 20$ ℔, $Q = 4$ ℔, $p = \frac{1}{12}$ de livre. On aura donc $x = \frac{120}{26} = 4$ pouces $\frac{8}{13}$; c'est-à-dire, qu'il faut mettre le point d'appui C, à quatre pouces $\frac{8}{13}$ de l'extrémité B; au lieu qu'en négligeant la pesanteur du levier, on auroit $x = \frac{Qa}{P + Q} = \frac{96}{24} = 4$ pouces.

619. Si au contraire, on donnoit le point B, le point C, & qu'il fallût trouver le point D, où doit être appliquée la puissance Q supposée connue, ainsi que P: on représenteroit BC par b, & BD par y; alors l'équation des momens se changeroit en $Pb = py\,(\frac{1}{2}y - b) + Q\,(y - b)$, qui donneroit $y = \frac{pb - Q \pm \sqrt{[(Q - pb)^2 + (2Pb + 2Qb)p]}}{p}$,

dont la valeur positive donne la distance BD dans la *figure 95*; & dont la valeur négative donne la distance BD (*fig. 96*), en supposant que la distance BC est sans pesanteur.

Si l'on veut avoir la distance y à laquelle le poids de la partie CD (*fig. 95*) suffira pour faire équilibre au poids P, on fera $Q = 0$, & l'on aura $y = \frac{+pb + \sqrt{(p^2b^2 + 2pPb)}}{p}$.

620. Si dans la *figure 97* on veut, connoissant P, Q, BC, & la pesanteur spécifique du levier DC, déterminer la distance CD où doit agir la puissance D; nommant CD, y, BC, b; on aura py pour le poids R; il faudra donc que $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, d'où il sera facile d'avoir y.

621. Dans la *figure 95*, il est facile de voir que plus le levier sera long, & plus la puissance Q doit diminuer jusqu'à devenir zéro, après quoi elle doit agir en sens contraire.

Dans la *figure 97*, la longueur du levier augmentant, la puissance Q va d'abord en diminuant, mais jusqu'à un certain terme seulement, passé lequel elle doit augmenter. C'est ce qu'il est aisé de voir de plusieurs manières, & entre autres par l'équation $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, qui donnant $Q = \frac{Pb + \frac{1}{2}pyy}{y}$, fait voir que lorsque $y = 0$, Q doit être infinie; & qu'elle le doit être aussi lorsque y est infinie; donc entre ces deux cas extrêmes, elle doit avoir des valeurs finies; donc pour passer de l'une à l'autre, il y aura un terme où elle aura la plus petite valeur possible. Pour déterminer ce terme, il n'y a autre chose à faire (36) qu'à égaler à zéro la différentielle de la valeur de Q, prise en regardant y seule comme variable. On aura donc $-\frac{(Pb + \frac{1}{2}py^2)\,dy}{yy} + p\,dy = 0$, qui donne $y = \sqrt{\left(\frac{2Pb}{p}\right)}$.

Donc *la valeur de la plus petite puissance* Q, *que l'on puisse employer avec un levier pesant de la seconde espèce, est* $\sqrt{(2Ppb)}$, *& la longueur de ce levier est* $\sqrt{\left(\frac{2Pb}{p}\right)}$.

On voit donc que lorsqu'avec un levier pesant, on veut soulever un fardeau F (*fig.* 98), il y a une certaine longueur à donner à ce levier pour y employer la moindre force possible ; & qu'en deçà ainsi qu'au delà de cette longueur, il n'y a qu'à perdre. Il n'en est donc pas du levier, lorsqu'on a égard à sa pesanteur, comme du levier considéré sans pesanteur. Au reste, dans l'exemple que nous prenons ici (*fig.* 98), il ne faudroit pas prendre pour P, la valeur totale du fardeau F; nous verrons par la suite, ce que l'on doit en prendre.

622. On emploie aussi fort utilement le levier de la première espèce à soulever de très-gros fardeaux, comme des charriots, des pièces d'artillerie, &c. en le montant comme on le voit (*fig.* 99), sur des *chevrettes*. Les chevrettes (*fig.* 100) sont composées de deux montans AB, CD assemblés sur deux pièces EF, GH qui portent à terre & qui sont entretenues par deux entre-toises EG, FH. Ces deux montans sont traversés par un boulon AC fixe & qui ne sert qu'à les lier, & par un autre boulon que l'on peut déplacer & faire passer à volonté dans les différens trous des montans ; ce dernier boulon traverse perpendiculairement le levier MN (*fig.* 99) au point O, & on élève par conséquent ou on abaisse le point d'appui à volonté.

623. C'est au levier de la première espèce qu'on doit rapporter la balance ordinaire (*fig.* 101) ou celle qui est destinée à peser des corps par des poids qui leur soient égaux, & celle qu'on appelle *romaine* ou *peson* (*fig.* 102), & qui est destinée à peser les corps à l'aide d'un poids constant p.

La balance étant d'un très-grand ufage dans prefque tous les Arts, nous nous arrêterons un moment à examiner les principales conditions de fa conftruction.

624. Pour plus de généralité, fuppofons que le point C (*fig. 103*), autour duquel le fléau doit être mobile, ne foit pas dans la ligne AB qui joint les points de fufpenfion des deux baffins ; & que le point g que je fuppofe être le centre de gravité du fléau, non compris les baffins & leurs dépendances, foit hors de la verticale qui paffe par C.

La première condition de la conftruction de cette machine, eft que l'aiguille foit verticale, ou ce qui revient au même, que la ligne AB qui joint les points A & B de fufpenfion des deux baffins, foit horizontale lorfque les baffins font vides, & lorfqu'ils font chargés chacun d'un poids égal.

Soient p & p' les poids des deux baffins EF, GH, en y comprenant leurs cordes ou chaînes, & leurs anneaux; P le poids que l'on doit mettre dans chaque baffin.

Les deux baffins étant vides, & la ligne LCD étant verticale, on aura $p \times AD = p' \times BD + g \times gi$, en appelant g le poids du fléau, & menant la perpendiculaire gi fur CD.

Les deux baffins étant chargés chacun d'un poids P, on aura $(P+p) \times AD = (P+p') \times BD + g \times gi$. Retranchant la première égalité de la feconde, on aura $P \times AD = P \times BD$ ou $AD = BD$, & par conféquent $AC = BC$.

Ainfi la condition effentielle pour que cette machine puiffe conferver une pofition conftante, les baffins étant chargés de poids égaux quelconques, eft que les deux bras AC & BC foient égaux.

625.

625. L'égalité de poids des deux bras AC & BC, n'eſt donc point néceſſaire. Si les deux bras AC & BC ont exactement la même longueur, & ſi on a donné au poids des baſſins, le rapport néceſſaire pour que le fléau ſoit horizontal par le poids ſeul de ces baſſins & de leurs dépendances, le fléau ne peut manquer de reſter horizontal, lorſqu'on chargera ces baſſins chacun d'un poids égal quelconque.

626. S'il y avoit quelque inégalité entre les longueurs des deux bras, les poids contenus dans les baſſins ne pourroient plus ſe faire équilibre qu'autant qu'ils ſeroient inégaux. Leur équilibre ne ſeroit donc plus un indice certain de leur égalité. Mais ſi on les change de baſſin, l'équilibre ne pourra évidemment ſubſiſter. On reconnoîtra donc à cette épreuve, ſi la balance eſt exacte, c'eſt-à-dire, ſi les deux bras ſont égaux en longueur.

627. Les deux bras AC & BC ayant exactement la même longueur, dès qu'il y aura la plus petite inégalité entre les deux poids placés dans chaque baſſin, l'équilibre doit être rompu, & la balance doit s'incliner. Mais pour que la balance ſoit d'un uſage commode, il faut que cette inclinaiſon ne ſoit ni trop petite ni trop grande. Si elle s'inclinoit difficilement, ſon témoignage deviendroit trop incertain, & ſi elle ſe précipitoit tout-à-fait, on n'atteindroit que très-difficilement le terme de l'équilibre.

628. Voyons comment on peut déterminer l'inclinaiſon que doit prendre le fléau, pour une différence quelconque entre les deux poids.

Soient comme ci-devant p & p' les poids des deux baſſins EF & GH & de leurs dépendances ; $P + p''$ le poids placé dans le baſſin EF, & P le poids placé dans le baſſin GH.

Concevons que la différence p'' amène le fléau dans la ſituation aCb telle que l'angle décrit par le bras AC ſoit $= a$. Le point B paſſant en b, & le centre de gravité G du fléau paſſant en m, on aura $BCb = gCm = ACA = a$.

Soit l'angle $ACD = BCD = b$; l'angle $iCg = c$; $AC = l = Ca = Cb$; $Cg = r = Cm$. Menons les horizontales al, mk, bn. Nous aurons $al = l\,fin.\,(b - a)$, $bn = l\,fin.\,(a + b)$, $km = r\,fin.\,(a + c)$. Or puiſque le ſyſtême doit s'arrêter dans la poſition aCb, & que les forces qui agiſſent en a, m & b ſont verticales, on doit avoir $(P + p + p'') \times al = (P + p') \times bn + q \times km$, q marquant le poids du fléau.

Subſtituant donc pour al, bn & km leurs valeurs, on aura $(P + p + p'')\,l\,fin.\,(b - a) = (P + p')\,l\,fin.\,(a + b) + q\,r\,fin.\,(a + c)$, ou $(P + p + p'')\,l\,(fin.\,b\,cof.\,a - fin.\,a\,cof.\,b) = (P + p')\,l\,(fin.\,a\,cof.\,b + fin.\,b\,cof.\,a) + q\,r\,(fin.\,a\,cof.\,c + fin.\,c\,cof.\,a)$; d'où l'on tire $\frac{\text{fin.}\,a}{\text{cof.}\,a}$ ou $tang.\,a = \frac{(P + p + p'')\,l\,\text{fin.}\,b - (P + p'')\,l\,\text{fin.}\,b' - q\,r\,\text{fin.}\,c}{(2P + p + p' + p'')\,l\,\text{cof.}\,b + q\,r\,\text{cof.}\,c}$.

Mais puiſque la balance doit n'avoir aucune inclinaiſon lorſque $p'' = 0$; c'eſt-à-dire, puiſque $a = 0$ lorſque $p'' = 0$, on a auſſi $(P + p)\,l\,fin.\,b = (P + p')\,l\,fin.\,b + q\,r\,fin.\,c$. Subſtituant dans le numérateur de la valeur de $tang.\,a$, la valeur de $q\,r\,fin.\,c$ que donne cette équation, on aura $tang.\,a = \frac{p''\,l\,\text{fin.}\,b}{(2P + p + p' + p'')\,l\,\text{cof.}\,b + q\,r\,\text{cof.}\,c}$.

629. Si le point de rotation C de la balance eſt en ligne droite avec les deux points A & B ; alors $fin.\,b = 1$, & $cof.\,b = 0$. On a donc $tang.\,a = \frac{p''\,l}{q\,r\,\text{cof.}\,c}$; d'où l'on voit que,

toutes choſes d'ailleurs égales, la balance aura d'autant plus de facilité à s'incliner, en vertu d'une inégalité p'' entre les deux poids comparés, que la longueur des bras ſera plus grande; & cela eſt général quel que ſoit l'angle b; car la valeur de *tang.* a peut être miſe ſous cette forme, *tang.* $a =$ $\frac{p'' \text{ ſin. } b}{(2P + p + p' + p'') \text{ coſ. } b + q \text{ coſ. } c \frac{r}{l}}$, où l'on voit que *tang.* a ſera d'autant plus grande, toutes choſes d'ailleurs égales, que le terme q *coſ.* $c \frac{r}{l}$ ſera plus petit, c'eſt-à-dire, d'autant plus que l ſera plus grand. Ainſi la balance ſera d'autant meilleure que ſes bras ſeront plus longs, pourvu d'ailleurs qu'ils ne fléchiſſent point.

630. Si les trois points A, C, B étant en ligne droite, le point g ſe trouvoit auſſi ſur la même ligne; alors *coſ.* c étant $= 0$, on auroit *tang.* $a = \frac{p'' \text{ ſin. } b}{0}$, ou *tang.* a infini. L'angle a ſeroit donc de 90 degrés, c'eſt-à-dire, qu'à la plus petite inégalité la balance ſe renverſeroit tout-à-fait. On doit donc éviter de placer les quatre points A, C, B & g, tous en même temps ſur une même ligne droite.

631. Mais quoiqu'on doive éviter de placer ces quatre points ſur une même ligne droite, on doit remarquer cependant que la balance prendra en général d'autant plus d'inclinaiſon, lorſqu'il y aura inégalité entre les deux poids, que les points C & g approcheront plus de ſe trouver ſur la même ligne AB; car les angles ACD, & gCD approchant alors d'autant plus d'être droits, *coſ.* b & *coſ.* c deviennent des fractions d'autant plus petites, & par conſéquent *tang.* a devient d'autant plus grande.

632. Une des principales qualités que la balance doit encore

avoir, c'eſt d'être très-mobile ; c'eſt-à-dire, que ſi par quelque cauſe que ce ſoit, le fléau AB a été dérangé de la poſition horizontale, il y ſoit ramené avec la plus grande facilité ; voyons de quoi dépend cette qualité.

633. Suppoſons qu'une force quelconque F ait mis la balance dans la ſituation aCb (*fig. 103*) & concevons que cette force ſoit appliquée perpendiculairement en un point quelconque O de l'un AC des deux bras. F ſera donc auſſi la force avec laquelle la balance tend à revenir ; c'eſt-à-dire, la force avec laquelle le point O tend à tourner autour de C.

Puis donc que par l'hypothèſe la force F peut maintenir le ſyſtême dans la ſituation aCb, il faut (616) que $F \times CO + (P+p) \times al = (P+p') \times bn + q \times mk$.

Suſtituant dans cette équation, pour al, bn, & km, leurs valeurs trouvées (628) on aura. . . . . $F \times CO + (P+p)\, l\, \text{ſin.}(b-a) = (P+p')\, l\, \text{ſin.}(a+b) + qr\, \text{ſin.}(a+c)$, ou $F \times CO$. . . . . $= (P+p')\, l\, (\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, b + \text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, a) - (P+p)\, l\, (\text{ſin.}\, b\, \text{coſ.}\, a - \text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, b) + qr\, (\text{ſin.}\, a\, \text{coſ.}\, c + \text{ſin.}\, c\, \text{coſ.}\, a)$.

Mais puiſque la balance reſte d'elle-même en équilibre, dans la poſition horizontale de la ligne AB, on a $(P+p)\, l\, \text{ſin.}\, b = (P+p')\, l\, \text{ſin.}\, b + qr\, \text{ſin.}\, c$. Subſtituant dans l'équation précédente, la valeur de $qr\, \text{ſin.}\, c$ que donne cette dernière, on aura

$$F \times CO = l\, \text{ſin.}\, a \left[(2P+p+p')\, \text{coſ.}\, b + \frac{qr\, \text{coſ.}\, c}{l} \right].$$

D'où l'on voit 1°. que la balance reviendra avec d'autant plus de force, qu'elle aura été plus écartée.

2°. Qu'elle reviendra avec d'autant plus de force, que ſes bras ſeront plus longs.

3°. Que tant que le point C ſera au-deſſus du point D, la balance reviendra d'autant plus facilement qu'elle ſera plus chargée.

4°. Mais ſi le point C étoit au-deſſous du point D; alors $cof.\, b$ étant négatif, parce que l'angle ACD ſeroit obtus, la balance n'auroit la faculté de revenir qu'autant que $(2P + p + p')\, cof.\, b$ ſeroit plus petit que $\frac{qr}{l}\, cof.\, c$, & que par conſéquent elle ne pourroit être employée que pour de petits poids; deviendroit d'autant plus pareſſeuſe qu'elle ſeroit plus chargée, & enfin pourroit culbuter tout-à-fait en portant la charge.

5°. Si c'eſt, au contraire, le centre de gravité qui ſe trouve au-deſſus du point C; alors $cof.\, c$ ſera négatif, & la balance ne reviendra qu'autant que $(2P + p + p')\, cof.\, b$ ſera plus grand que $\frac{qr\, \text{coſ.}\, c}{l}$. Elle pourra donc être renverſée ſous de fort petites charges; reprendra la faculté de revenir ſous des charges un peu plus grandes, & deviendra d'autant plus diligente que la charge ſera plus grande.

Du levier en mouvement; des centres de percuſſion; des centres d'oſcillation & du choc excentrique des corps.

634. Soient M, M', M'' (*fig. 104*) des maſſes quelconques ſans peſanteur, & conſidérées comme des points, ſituées dans un même plan avec le point C, liées entre elles & avec le point C, de manière à ne pouvoir changer leurs diſtances réciproques, &

à ne pouvoir que tourner autour de C ou autour d'un axe paſſant par C, perpendiculaire à leur plan.

Suppoſons que ces maſſes reçoivent en même temps dans leur plan des impulſions ſuivant Mm, $M'm'$, $M''m''$, telles que ſi elles étoient libres, elles euſſent des vîteſſes repréſentées par ces lignes : il s'agit de déterminer le mouvement qu'elles prendront.

Il faut, ſuivant le principe expoſé (287), décompoſer les vîteſſes Mm, $M'm'$, $M''m''$, chacune en deux autres dont l'une ſoit celle qui doit avoir lieu, & dont l'autre ſoit par conſéquent telle que ſi les maſſes M, M', M'' n'euſſent eu que cette vîteſſe, elles fuſſent demeurées en équilibre.

Il eſt clair 1°. que les vîteſſes que ces corps peuvent prendre, ne pouvant être que des vîteſſes de rotation autour de C, doivent être perpendiculaires aux rayons CM, CM', CM''. 2°. Que pour que ces vîteſſes aient lieu, c'eſt-à-dire, ne s'altèrent point mutuellement, il faut qu'elles ſoient proportionnelles aux diſtances CM, CM', CM''.

Cela poſé, je décompoſe les vîteſſes imprimées Mm, $M'm'$, $M''m''$, en vîteſſes Ms, $M's'$, $M''s''$, qui ſoient celles qui peuvent avoir lieu, & en vîteſſes Mq, $M'q'$, $M''q''$ avec leſquelles les maſſes puiſſent ſe faire équilibre autour de C. On aura donc $Ms : M's' :: CM : CM'$; $Ms : M''s'' :: CM : CM''$,

& (616) en menant les perpendiculaires Ct, Ct', Ct'' ſur les directions prolongées des vîteſſes Mq, &c. on aura $M \times Mq \times Ct + M' \times M'q' \times Ct' - M'' \times M''q'' \times Ct'' = 0$.

Or par la propriété des parallélogrammes (211), on a $M \times Mq \times Ct + M \times Ms \times CM = M \times Mm \times CT$, en abaiſſant les perpendiculaires CT, CT', CT'' ſur les directions de $Mm, M'm', M''m''$; c'eſt-à-dire, $M \times Mq \times Ct = M \times Mm \times CT - M \times Ms \times CM$. Par la même raiſon, on a $M' \times M'q' \times Ct' = M' \times M'm' \times CT' - M' \times M's' \times CM'$, & $M'' \times M''q'' \times Ct'' = M'' \times M''m'' \times CT'' + M'' \times M''s'' \times CM''$.

Si de ces trois dernières équations on ajoute les deux premières, & qu'on en retranche la dernière; que de plus on faſſe attention à la condition de l'équilibre exprimée par l'équation des momens donnée ci-deſſus, on aura $0 = M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT'' - M \times Ms \times CM - M' \times M's' \times CM' + M'' \times M''s'' \times CM''$. Mais les proportions établies ci-deſſus, donnent $M's' = \frac{Ms \times CM'}{CM}$, $M''s'' = \frac{Ms \times CM''}{CM}$. Subſtituant ces valeurs, & faiſant les réductions & tranſpoſitions ordinaires, on aura . . . .

$$Ms = \frac{M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT''}{M \times (CM)^2 + M' \times (CM')^2 + M'' \times CM''^2} \times CM.$$

Or le numérateur de cette fraction, qui exprime la ſomme des momens (*) des forces $M \times Mm$, $M' \times Mm'$, &c. eſt (216) égal au moment de leur réſultante. Donc ſi l'on nomme R cette réſultante & D ſa diſtance au point C, on aura cette ſomme de momens, $= R \times D$.

De plus le dénominateur étant la ſomme des produits de chaque maſſe multipliée par le quarré de ſa diſtance au point C; ſi l'on repréſente, en général, l'une quelconque de ces maſſes par m, & ſa diſtance au point C, par r; on pourra repréſenter la ſomme de ces produits, par cette expreſſion abrégée, $\int mrr$, ($\int$ déſignant le mot *ſomme*), enſorte que nommant v la vîteſſe Ms, on aura Ms ou $v = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$.

635. Quoique nous ayions ſuppoſé que toutes les forces, & toutes les parties du ſyſtême fuſſent dans un même plan, il eſt facile de voir que la même choſe auroit encore lieu, quand même elles feroient ſeulement dans des plans parallèles entre eux & perpendiculaires à l'axe de rotation, pourvu que toutes les parties du ſyſtême fuſſent aſſujetties à tourner autour d'une droite ou axe fixe.

(*) Toujours en prenant avec des ſignes contraires, les momens des forces qui tendent à faire tourner en ſens contraires.

636. Et puisqu'un corps solide de figure quelconque, peut toujours être considéré comme l'assemblage de plusieurs points solides liés entre eux, on peut donc dire, en général que

Lorsqu'un corps L *de figure quelconque* (fig. 105) *sollicité par tant & de telles forces que l'on voudra, ne peut prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe* AB (*situé hors de ce corps, ou dans ce corps*), *la vîtesse de rotation que l'un quelconque de ses points prendra, se trouvera en divisant la somme des momens de toutes ces forces* (*ou le moment de leur résultante*) *par la somme des produits de chaque partie de ce corps multipliée par le quarré de sa distance à l'axe de rotation, & multipliant le quotient par la distance du point dont on cherche la vîtesse, à ce même axe.*

637. Soit G le centre de gravité du corps L (*fig. 106*) ; concevons que tandis que le point quelconque M, en tournant autour de C, décrit pendant un instant l'arc infiniment petit Ms, le centre de gravité G décrive l'arc Gg, perpendiculaire à CG ; & menons par le point g, la ligne gk parallèle & égale à CG. Au lieu de concevoir que le corps tourne autour de C, on peut concevoir qu'il est transporté parallèlement à lui-même avec une vîtesse égale à Gg, & qu'en même temps ses parties tournent autour du point mobile G avec une vîtesse telle qu'en prenant

$gk = GC$, le point k décrive l'arc $kC = Gg$; car alors le point C du corps L reſte également immobile. Or le corps étant libre alors, la réſultante de tous les mouvemens de rotation autour du point mobile G eſt nulle (289). Donc la réſultante de tous les mouvemens dont le corps eſt actuellement animé, n'eſt autre que la force qu'auroit le corps L animé de la vîteſſe Gg, c'eſt-à-dire, que cette force doit être perpendiculaire à CGR & $= L \times Gg$, en repréſentant par L, la maſſe du corps. Or puiſque les parties du corps décrivent des arcs ſemblables, on a $CM : CG :: Ms : Gg$; donc $Gg = \frac{Ms \times CG}{CM}$; donc la force réſultante de tous les mouvemens de rotation, autour de C, eſt $\frac{L \times Ms \times CG}{CM}$.

Mais quoique cette réſultante ſoit la même que ſi le corps étant libre, le centre de gravité eût reçu la vîteſſe Gg, néanmoins il eſt facile de voir qu'elle ne paſſe pas par G, mais par quelque point R de CG, plus éloigné de G; puiſque les points les plus éloignés ayant plus de force, la réſultante doit paſſer du même côté que le centre de gravité par rapport à C, & plus loin que ce centre de gravité. Nommons donc D' la diſtance CR, à laquelle paſſe cette réſultante, & nous aurons $\frac{L \times Ms \times CG}{CM} \times D'$ pour ſon moment.

Or si à l'instant où les forces qui ont fait naître le mouvement du corps, viennent à agir sur les parties de ce corps, on leur opposoit à la distance D' une force égale à celle que nous venons de déterminer; c'est-à-dire, égale à l'effort total qu'elles produisent sur ce corps, il est évident qu'il y auroit équilibre; mais dans ce cas le moment $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM}$ doit être égal au moment $R \times D$; donc puisque (634) $R \times D = \frac{Ms}{CM} \int mrr$, on aura $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM} = \frac{Ms}{CM} \int mrr$, & par conséquent $D' = \frac{\int mrr}{L \times CG}$.

Il résulte donc, de ce que nous venons d'exposer, que

638. *Si tant de forces que l'on voudra, dirigées comme on le voudra, dans des plans auxquels l'axe de rotation soit perpendiculaire, agissent sur un corps, & ne peuvent le faire tourner qu'autour de cet axe :* 1°. *la force que ce corps en recevra, sera égale à la masse de ce corps multipliée par la vîtesse que prendra son centre de gravité*, vîtesse que l'on détermine par ce qui a été dit (290). 2°. *Cette force sera perpendiculaire au plan qui passe par l'axe & par le centre de gravité.* 3°. *Sa distance à l'axe sera toujours la même quelles que soient ces forces & leurs directions ; & elle sera égale à la somme des produits de chaque particule du corps, multipliée par le quarré de sa distance à l'axe, égale,*

dis-je, à cette somme divisée par la masse du corps multipliée par la distance du centre de gravité au même axe.

639. v marquant toujours la vîtesse avec laquelle un point déterminé M du corps L, tend à tourner en vertu de l'action de tant de forces que l'on voudra, ou de leur résultante R; si l'on appelle r la distance d'une particule quelconque à l'axe de rotation, & m la masse de cette particule; on aura $\frac{rv}{CM}$ pour sa vîtesse de rotation, & $\frac{mrv}{CM}$ pour la force qu'elle reçoit, & par conséquent pour la résistance qu'elle oppose à R, par son inertie; donc $\frac{mrrv}{CM}$ sera le moment de cette résistance; donc la somme des momens des résistances que les particules de L opposent au mouvement de rotation que R leur imprime, est $\int \frac{mrrv}{CM}$, ou $\frac{v}{CM} \int mrr$; car ces deux expressions sont les mêmes, puisque v & CM ne changent point quelle que soit la particule m que l'on considère.

On voit donc que, toutes choses d'ailleurs égales, la résistance que les parties d'un corps opposent au mouvement de rotation qu'on leur imprime, est d'autant plus grande, que $\int mrr$ est plus grande.

640. Dorénavant, nous appellerons la quantité

$\frac{v}{CM}\int mrr$, *le moment d'inertie* du corps; & $\int mrr$, nous l'appellerons l'*exposant du moment d'inertie.*

641. Nous verrons, dans peu, comment on détermine l'exposant du moment d'inertie, dans un corps quelconque; mais quand on a déterminé cet exposant à l'égard d'un axe quelconque, il est très-facile d'en conclure ce qu'il doit être à l'égard de tout autre axe parallèle au premier. Nous allons d'abord faire voir comment on peut, pour un axe quelconque, conclure la valeur de son exposant, de celle qu'elle auroit à l'égard d'un autre axe parallèle au premier.

642. Soit donc AB (*fig. 107*) un axe quelconque, $A'B'$, un autre axe qui lui soit parallèle, & qui passe par le centre de gravité du corps : soit m une particule quelconque de ce corps; & par m concevons un plan mCC' perpendiculaire aux deux axes AB, $A'B'$; ayant mené mC, mC', & la ligne mP perpendiculaires sur CC', les lignes mC, mC' seront perpendiculaires sur AB, $A'B'$.

Cela posé, selon ce qui a été dit (*Alg.* 197), on aura $(mC)^2 = (mC')^2 + (CC')^2 + 2CC' \times C'P$. Donc $\int m \times (mC)^2 = \int m \times (mC')^2 + \int m \times (CC')^2 + \int 2m \times CC' \times C'P$. Or puisque la distance CC' est toujours la même quelle que soit la particule m que l'on considère, $\int m \times (CC')^2$ n'est autre chose que $(CC')^2 \int m$, ou $(CC')^2 \times L$, en nommant L la masse du corps. Par la même raison, $\int 2m \times CC' \times C'P$, n'est autre chose que $2\,CC' \int m . C'P$; mais $\int m \times C'P$, étant la somme des produits des particules par rapport à un plan qui passe par $A'B'$, c'est-à-dire, par le centre de gravité, doit (234) être $= 0$; on a donc simplement $\int m \times (mC)^2 = \int m \times (mC')^2 + L \times (CC')^2$. Donc *connoissant l'exposant* $\int m \times (mC')^2$ *du moment d'inertie à l'égard d'un axe passant par le centre de gravité, on aura l'exposant de ce moment à l'égard de tout autre axe parallèle à celui-là, en ajoutant au premier, le produit de la masse par le quarré de la distance de ces deux axes.*

643. D'après cela, & l'expression de la vîtesse de rotation trouvée (634), on voit donc que *de tous les axes autour desquels on peut faire tourner un corps, en vertu d'une force ou impulsion quelconque, ceux autour desquels la vîtesse de rotation sera la plus grande, sont ceux qui passent par le centre de gravité*; puisque l'exposant du moment d'inertie à l'égard d'un axe passant par le centre de gravité est plus petit qu'à l'égard de tout autre axe.

644. Tout ce qui précède est d'un très-grand usage, & renferme la méthode pour trouver le *centre de percussion*, & le *centre d'oscillation* des corps assujettis

à tourner autour d'un axe déterminé ou d'un point déterminé C (*fig. 108*).

Ce qu'on entend par *centre de percuſſion*, c'eſt le point R de la ligne CG menée par le point fixe C, & le centre de gravité G, par où paſſe la réſultante des mouvemens de rotation de tous les points de L; ce point, ou le centre de percuſſion, eſt donc déterminé par ce qui a été dit (637).

645. A l'égard du *centre d'oſcillation*, c'eſt le point R d'un corps L (*fig. 108*) ou d'un ſyſtême de corps, qui ſe trouve éloigné de C d'une quantité égale à la longueur que devroit avoir un pendule ſimple pour faire ſes oſcillations en même temps que ce corps ou ce ſyſtême de corps, fait les ſiennes en vertu de la peſanteur. Nous allons voir que ce centre eſt le même que le centre de percuſſion.

En effet, lorſqu'il s'agit de la peſanteur, la force R réſultante de l'action que la peſanteur exerce ſur chaque partie matérielle d'un corps, eſt égale à la maſſe totale multipliée par la vîteſſe que la peſanteur imprime, en un inſtant, à toute partie de matière; c'eſt-à-dire, que $R = g \times L$, en nommant g, cette vîteſſe. De plus cette réſultante R paſſe par le centre de gravité G; & par conſéquent ſa diſtance au point fixe C, ou à l'axe qui paſſe par C, eſt CN; donc (636) la vîteſſe de rotation Ms que prend un point quelconque M, lorſque le corps eſt abandonné à l'action de ſa peſanteur, eſt $Ms = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CM$; enſorte que pour le centre de gravité G, elle eſt $Gg = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CG$.

Or pour qu'un pendule ſimple qui auroit pour longueur CR, faſſe ſes oſcillations en même temps que le corps L, il faut qu'en le ſuppoſant éloigné de la verticale, de la même quantité angulaire que l'eſt CR, la vîteſſe que la peſanteur lui communique en R (*fig.* 109) perpendiculairement à CR, ſoit la même que celle du point R (*fig.* 108); c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit à la vîteſſe de G (*fig.* 108) :: $CR : CG$; or il eſt facile de voir (*fig.* 109) en décompoſant la vîteſſe Rl, ou g, que la peſanteur donne dans un inſtant, à un corps libre, en deux autres; l'une Rk ſuivant la verge Cr, l'autre Rr perpendiculaire à CR, il eſt facile de voir que $Rl : Rr :: CR : RS :: CG : CN$; donc $g : Rr :: CG : CN$; & par conſéquent $Rr = \frac{G \times CN}{CG}$; il faut donc que $\frac{g \times CN}{CG} : \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CG :: CR : CG$; d'où l'on tire $CR = \frac{\int mrr}{L \times CG}$; c'eſt-à-dire, la même valeur que pour le centre de percuſſion (644).

646. Puiſque toutes les forces qui agiſſent ſur le corps L, ou ſur un ſyſtême de corps aſſujetti à tourner

tourner autour d'un point ou d'un axe fixe, font naître dans ce corps une vîtesse telle qu'un point quelconque M tourne avec une vîtesse $Ms = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$; & qu'il est d'ailleurs évident que si le corps venoit à tourner en sens contraire avec la même vîtesse, il feroit équilibre à toutes ces forces; concluons-en que si un corps, tournant avec une vîtesse qui pour un point déterminé M soit v, on veut arrêter ce mouvement avec une puissance R dont la direction passe à une distance de $C = D$, il faudra que cette puissance ou sa distance D soit telle que le moment $R \times D$ soit égal à la vîtesse du point M, divisée par la distance CM, & multipliée par la somme des produits des particules par les quarrés de leurs distances à C ou à l'axe qui passe par C. En effet, cette puissance doit être telle qu'elle puisse reproduire la même vîtesse dans le corps L supposé en repos; or cette vîtesse seroit $v = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$, qui donne $R \times D = \frac{v}{CM} \int mrr$.

647. Si un corps L de figure quelconque (*fig.* 110) assujetti de manière à ne pouvoir tourner qu'autour du point fixe C, ou d'un axe passant par ce point, qui peut d'ailleurs être par-tout où l'on voudra; si ce corps, dis-je, vient à être choqué perpendiculairement à sa surface par un corps N, on pourra, par les principes précédens, déterminer le mouvement de l'un & de l'autre, après le choc, de la manière suivante.

Soit V la vîteſſe de N, ſuivant la perpendiculaire TS, avant le choc; v ſa vîteſſe après le choc. $V - v$ ſera la vîteſſe, & $N(V - v)$ la quantité de mouvement qu'il perdra par le choc, & qui paſſera dans L. Cette quantité de mouvement fera donc naître dans L une vîteſſe de rotation (636) telle que le point T, par exemple, tournera avec une vîteſſe $v' = \frac{N(V - v) \times CS}{\int mrr} \times CT$, en menant CS perpendiculaire ſur TS.

Concevons que l'arc infiniment petit Tm décrit du centre C, repréſente cette vîteſſe; en formant ſur la tangente TA, & ſur la perpendiculaire TS, le parallélogramme $TAmr$, on verra en ſubſtituant, par la penſée, les vîteſſes TA & Tr, à la vîteſſe Tm, que la vîteſſe TA ne peut nuire en rien à la vîteſſe v que N doit prendre; mais que la vîteſſe Tr nuiroit à la vîteſſe v, ſi elle étoit plus petite que v; donc puiſqu'on ſuppoſe que v eſt réellement la vîteſſe que M conſervera, il faut que Tr ſoit $= v$. Or les triangles ſemblables CST, Trm, donnent $CT : CS :: Tm$ ou $v' : Tr$; donc $\frac{v' \times CS}{CT} = Tr = v$, & par conſéquent $v' = \frac{v \times CT}{CS}$; ſubſtituant donc pour v' cette valeur dans l'équation ci-deſſus, on aura $\frac{v \times CT}{CS} = \frac{N \times (V - v) \times CS}{\int mrr} \times CT$, d'où l'on tire $v = \frac{N \times V \times (CS)^2}{\int mrr + N \times (CS)^2}$: de-là il eſt facile de conclure la vîteſſe de rotation v'. Mais l'équation $v' = \frac{v \times CT}{CS}$, donnant $v : v' :: CS, CT$, fait voir que v eſt la vîteſſe de rotation du point S; on voit donc que le point S tourne avec la vîteſſe qui reſte à N après le choc.

648. On voit donc que pour avoir les mouvemens

des corps qui tournent, il faut savoir déterminer la valeur de $\int mrr$. C'est ce qui sera toujours facile, ainsi qu'on va le voir, si la nature du corps peut être exprimée par des équations. Et si cette condition n'a pas lieu, on pourra toujours, du moins, partager le corps en parties, comme parallélipipèdes ou pyramides, &c. dont la nature peut être exprimée par des équations; & en cherchant pour chacune la valeur de $\int mrr$, on ajoutera ensuite toutes ces sommes pour avoir la valeur totale de $\int mrr$ pour le corps entier ou le systême de corps dont il s'agit. Voyons donc comment on doit s'y prendre pour trouver dans les corps dont la nature peut être exprimée par des équations, la valeur de $\int mrr$.

649. Soit AB (*fig.* 111) l'axe de rotation; & concevons par AB, deux plans perpendiculaires entre eux; soit m une particule quelconque du corps, & ayant mené mC perpendiculaire sur AB, menons mS perpendiculaire au plan AR. Si l'on tire CS, elle sera perpendiculaire à AB, & par conséquent au plan PQ. Le triangle rectangle mSC donnera $(Cm)^2 = (CS)^2 + (mS)^2$; donc $\int m \times (Cm)^2$ ou $\int mrr = \int m \times (CS)^2 + \int m \times (mS)^2$. La question revient donc à trouver la somme des produits des particules par les quarrés de leurs distances à deux

plans qui paſſent par l'axe de rotation, & ſont perpendiculaires entre eux. Or dès qu'on aura trouvé l'expreſſion algébrique de cette ſomme, par rapport à l'un des plans, il ſera aiſé de l'avoir par rapport à l'autre: voyons donc comment on peut, en général, trouver la ſomme des produits des particules d'un corps, par les quarrés de leurs diſtances à un plan connu.

650. On concevra ce corps partagé en tranches infiniment minces, parallèles à ce plan; & ſuppoſant que Dd (*fig.* 112) repréſente l'épaiſſeur d'une de ces tranches, on nommera x la diſtance CD au plan dont il s'agit, & S la ſurface de la tranche: alors, comme tous les points de cette ſurface ſont éloignés du plan PQ, d'une quantité égale à x, on aura $xxSdx$ pour les produits de tous les points de cette tranche par les quarrés de leurs diſtances à ce plan, & par conſéquent $\int xxSdx$ pour la ſomme totale de ces produits pour tout le corps.

Si l'on nomme, pareillement, x', les diſtances au plan perpendiculaire à PQ & paſſant par l'axe de rotation AB, & que concevant le corps partagé en tranches parallèles à ce nouveau plan, on appelle S' la ſurface de l'une des tranches, on aura de même $\int x'x'S'dx'$ pour la ſomme des produits des particules, par le quarré de leur diſtance à ce ſecond plan;

enſorte que $\int xxSdx + \int x'x'S'dx'$ ſera la valeur de la ſomme des produits de chaque partie du corps multipliée par le quarré de ſa diſtance à l'axe AB.

651. Pour en donner quelques exemples, ſuppoſons que le corps eſt un parallélipipède rectangle (*fig.* 113) tournant autour de l'axe AB perpendiculaire à l'axe de ce parallélipipède & au milieu du côté RS.

Par la nature de ce corps, la ſurface S eſt conſtante ; ainſi l'intégrale $\int xxSdx$ eſt $\frac{x^3S}{3}$, qui lorſque x eſt égal à la hauteur ME ou h du parallélipipède, devient $\frac{h^3S}{3}$.

On voit de même que S' eſt une quantité conſtante, & qu'ainſi $\int x'x'S'dx$, devient $\frac{x'^3S'}{3}$, qui lorſque $x' = \frac{1}{2}MN$, ou $\frac{1}{2}h'$, en nommant MN, h', devient $\frac{1}{8} \times \frac{h'^3S'}{3}$; & comme le plan qui paſſe par l'axe diviſe le corps en deux parties égales, on aura pour les deux moitiés $\frac{1}{4} \times \frac{h'^3S'}{3}$; donc la ſomme totale des produits ſera $\frac{h^3S}{3} + \frac{h'^3S'}{12}$.

652. Si l'on veut donc trouver le centre d'oſcillation ou de percuſſion, il ne s'agit plus (644) que de diviſer cette quantité par la maſſe du parallélipipède multipliée par la diſtance de ſon centre de gravité ; c'eſt-à-dire, par $hh'b \times \frac{1}{2}h$, en nommant RM, b. On aura donc $\frac{2h^3S}{3h^2h'b} + \frac{h'^3S'}{6h^2h'b}$; ou à cauſe que $S = h'b$, & $S' = hb$, on aura $\frac{2h}{3} + \frac{h'^2}{6h}$ pour la diſtance du centre d'oſcillation, & pour celle du centre de percuſſion.

Si h' eſt très-petit par rapport à h, on aura cette diſtance $= \frac{2h}{3}$. Donc *le centre d'oſcillation & le centre de percuſſion d'une ligne droite ou d'un parallélogramme, tournant autour d'un de ſes côtés comme axe, eſt aux* $\frac{2}{3}$ *de la diſtance au point ou à l'axe de rotation.*

653. Imaginons que la verge ou barre peſante CA (*fig.* 114) tombe en tournant autour de ſon extrémité fixe C; & que ſous cette ligne on ait placé un obſtacle T. Pour ſavoir avec quelle force cet obſtacle ſera frappé, on ſe rappellera (436) que le centre de gravité B tombant par l'arc BG acquiert en G la même vîteſſe que s'il étoit tombé librement par la verticale BD; ainſi en nommant u cette vîteſſe qui eſt facile à déterminer (176), & M la maſſe de la verge, Mu (637) ſera la quantité de mouvement ou la force de la verge; & cette force (644) ſera celle avec laquelle l'obſtacle T ſera frappé s'il eſt placé au centre de percuſſion P; c'eſt-à-dire à la diſtance $CP = \frac{2}{3}\, CA$.

Mais s'il eſt placé en tout autre point O; on concevra cette force Mu, qui eſt perpendiculaire à CA, décompoſée en deux forces qui lui ſoient parallèles, & dont l'une paſſe par C, & l'autre par O; alors (205) la force qui paſſe par O ſera $\frac{CP \times Mu}{CO}$.

Si l'obſtacle T eſt mobile, il y aura toujours un point, ſoit ſur la ligne CA même, ſoit ſur ſon prolongement, où l'obſtacle étant placé recevra de la part de la barre, la plus grande vîteſſe poſſible; c'eſt-à-dire, plus de vîteſſe que s'il eût été frappé par tout autre point de la barre.

654. Nous allons voir comment on détermine ce point; mais auparavant nous devons faire remarquer la différence

que l'on doit mettre entre le levier en mouvement & le levier en équilibre.

Si le levier pesant étoit porté sur les deux appuis C & O; pour déterminer ce que chaque appui supporte, il faudroit décomposer le poids de ce levier supposé concentré au centre de gravité G, en deux forces dont l'une passât par C, & l'autre par O; & l'on trouveroit (205) que l'effort soutenu par C est $\frac{P \times GO}{CO}$, & que l'effort soutenu par O est $\frac{P \times CG}{CO}$, P étant le poids du levier. Mais si le levier est en mouvement autour du point C; alors l'effort total ne passe plus par G, mais (644) par le centre de percussion P; ensorte que les efforts qui en résultent sur les deux points C & O sont (205) réciproquement proportionnels aux distances CP & PO.

655. Supposons que la verge CA (*fig.* 115) tournant autour de C avec une vîtesse qui, pour le point A, soit u, rencontre perpendiculairement le corps libre M', éloigné du centre de rotation C d'une quantité connue BC; on demande quelle vîtesse M' en recevra.

Concevons que par le choc, la vîtesse u se change en v, & que le corps M' reçoive la vîtesse v'.

Il faut donc (287) que si la verge ne tournant qu'avec une vîtesse qui pour le point A seroit $u - v$, eût rencontré le corps M' venant au-devant d'elle avec la vîtesse v', il y eût eu équilibre.

Soit r la distance d'un point quelconque de la verge CA dont je suppose la longueur $CA = a$. Nous aurons $\frac{r(u-v)}{a}$ pour la vîtesse avec laquelle un point quelconque de la verge tourne, lorſque le point A tourne avec la vîteſſe $u-v$. Donc ſi m eſt la maſſe de ce point, $\frac{mr(u-v)}{a}$ ſera la quantité de mouvement, ou ſa force ; & $\frac{mrr(u-v)}{a}$ ſera le moment de cette force. Or à cauſe de l'équilibre, il faut (616) que la ſomme des momens des forces perdues par chacun des points de la verge, ſoit égale au moment de la force qu'acquiert le corps M'; donc en nommant b la diſtance CB, on aura $\int \frac{mrr(u-v)}{a} = M'bv'$.

Mais pour que v' ſoit en effet la vîteſſe de M' après le choc, il faut que v' ſoit égale à la vîteſſe avec laquelle le point B de la verge doit tourner après le choc ; car perdant un inſtant après le choc, le point B & le corps M ſont mus perpendiculairement à CA. Or la vîteſſe de B après le choc, eſt $\frac{bv}{a}$; on a donc $v' = \frac{bv}{a}$; donc $\int \frac{mrr}{a}(u-v) = \frac{M'bbv}{a}$, ou $(u-v)\int \frac{mrr}{a} = \frac{M'bbv}{a}$; d'où l'on tire $v = \frac{u\int mrr}{M'bb+\int mrr}$ pour la vîteſſe de rotation de la verge après le choc.

Quant à la vîteſſe v' du corps M' puiſqu'on a $v' = \frac{bv}{a}$, on aura $v' = \frac{\frac{bu}{a}\int mrr}{M'bb+\int mrr}$.

656. Soit p la diſtance du centre de percuſſion de la verge; g celle de ſon centre de gravité à l'égard du point C; M la maſſe de la verge. Puiſque (638) on a $p = \frac{\int mrr}{gM}$, on aura $\int mrr = pgM$, & par conſéquent $v = \frac{pgMu}{M'bb+pgM}$ & $v' = \frac{pgbMu}{a(M'bb+pgM)}$.

657. Cette valeur de v' fait voir que si l'on veut frapper le corps M' le plus fortement qu'il est possible, il n'est point du tout indifférent à quel point B on le placera. En effet, si on suppose $b=0$; c'est-à-dire, si on plaçoit le corps M' au point C, on auroit $v'=0$; c'est-à-dire, qu'il ne recevroit point de mouvement, & cela est évident. Mais si on donne consécutivement à b des valeurs qui aillent en augmentant, v ne croîtra que jusqu'à un certain terme, passé lequel il diminuera ; car si on augmente b jusqu'à le rendre infini, en imaginant que CB soit prolongé à l'infini, mais sans augmentation de masse ; alors la valeur de v' se réduit à $v'=\frac{pgbMu}{M'bb}$ ou $v'=\frac{pgMu}{M'b}$ qui est infiniment petite, ou zéro. Il y a donc, en effet, une valeur de b qui peut rendre v' la plus grande qu'il est possible.

Pour la déterminer, il ne s'agit que d'égaler à zéro, la différentielle de la valeur de v' prise en regardant b seule comme variable. Par ce procédé, on trouvera $bb=\frac{pgM}{M'}$, & $b=\sqrt{\left(\frac{pgM}{M'}\right)}$.

Soit D le point où le poids du corps M' agissant de bas en haut à l'aide de la poulie I, mettroit le poids de la verge CA en équilibre, à l'aide de l'appui C ; on aura $CD:CG::M:M'$, ou (en nommant CD, k) $k:g::M:M'$ & $\frac{gM}{M'}=k$; donc $b=\sqrt{(pk)}$. Donc. . . . . .

Si un corps CA (fig. 115) *tournant autour d'un point fixe* C, *choque un autre corps* M' ; *celui-ci recevra la plus grande quantité de mouvement possible, lorsque sa distance* CB, *au point de rotation, sera moyenne proportionnelle entre la distance du centre de percussion du choquant & la distance à laquelle le choqué, par son poids, seroit équilibre au point du choquant.*

658. Si CA eſt une verge ou barre de groſſeur uniforme, & dont le diamètre ſoit fort petit en comparaiſon de ſa longueur, on aura $p = \frac{2}{3} a$, & $g = \frac{1}{2} a$. Donc $b = \surd \frac{1}{3} \frac{a^2 M}{M'} = a \surd \left(\frac{M}{3 M'}\right)$. Donc ſi le corps choqué pèſe le tiers de la barre, le point de la plus grande percuſſion ſera à l'extrémité A de la barre. Il ſera entre C & A, ſi $3 M'$ eſt plus grand que M, & au-delà de A par rapport à C, ſi M eſt plus grand que $3 M'$.

659. Si on ſubſtitue dans la valeur de v' la valeur de b, ſavoir $b = \surd \left(\frac{pgM}{M'}\right)$, on aura $v' = \frac{u}{2a} \surd \left(\frac{pgM}{M'}\right)$.

660. On peut réſoudre la queſtion précédente d'une manière un peu plus ſimple, que nous placerons ici d'autant plus volontiers, qu'elle peut être utile dans pluſieurs rencontres.

Puiſque le point A doit, par le choc, changer ſa vîteſſe de rotation u, en une vîteſſe v, c'eſt-à-dire, doit perdre la vîteſſe $u - v$, le centre de gravité b perd donc la vîteſſe $\frac{g}{a}(u - v)$, & la verge (638) perd la quantité de mouvement, ou la force $\frac{Mg}{a}(u - v)$. Or cette force doit (638) paſſer par le centre de percuſſion, c'eſt-à-dire, à la diſtance p du point C, en conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus. Donc puiſqu'il doit y avoir équilibre entre cette force & la quantité de mouvement $M'v'$ gagnée par le corps M', il faut (607) que $\frac{Mgp}{a}(u - v) = M'bv'$, ou à cauſe que $v' = \frac{bv}{a}$ il faut que $\frac{Mgp}{a}(u - v) = \frac{M'bbv}{a}$; d'où l'on tire $v = \frac{gpMu}{M'bb + gpM}$, & $v' = \frac{gpbMu}{a(M'bb + gpM)}$ comme ci-deſſus (656).

661. Prenons la ſphère pour ſecond exemple de la manière de calculer $\int mrr$.

La ſurface que nous avons appellée S, eſt un cercle qui a pour rayon IM (*fig. 116*), que je nomme y. Ainſi ſuppoſant que $1 : c$, eſt le rapport du rayon à la circonférence, on aura $\frac{cy^2}{2} = S$. Soit $DI = z$, & r le rayon de la ſphère; on a $y^2 = 2rz - zz$, & par conſéquent $S = \frac{c}{2}(2rz - zz)$. Soit $DC = a$, on aura CI ou $x = z + a$, & $dx = dz$; donc $\int x^2 S dx$ devient $\int (z + a)^2 \times \frac{c}{2}(2rz - zz) dz$, ou en développant tout, devient $\int \frac{c}{2}(2aarzdz + 4arz^2dz - aaz^2dz + 2rz^3dz - 2az^3dz - z^4dz)$; & en intégrant, on a $\frac{c}{2}(aarz^2 + \frac{4}{3}arz^3 - \frac{1}{3}aaz^3 + \frac{1}{2}rz^4 - \frac{1}{2}az^4 - \frac{1}{5}z^5)$, qui lorſque $z = 2r$, ſe réduit à $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{8}{5}r^5)$.

Pour trouver la valeur de $\int x'x'S'dx'$, il n'eſt pas néceſſaire de recommencer le calcul; parce que la figure régulière de la ſphère, fait qu'il ſeroit abſolument ſemblable; il n'y a autre choſe à faire qu'à ſuppoſer que a qui exprime la diſtance du plan PQ, à la ſurface, devient $-r$, c'eſt-à-dire, que ce plan paſſe par le centre, en l'imaginant d'ailleurs perpendiculaire à ſa première poſition; & on aura. . . . $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}r^5 - \frac{8}{3}r^5 + \frac{8}{5}r^5)$, qui ſe réduit à $\frac{c}{2} \times \frac{4}{15}r^5$. Réuniſſant donc les deux intégrales, on a . . . . $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5)$.

Et puiſque la ſolidité de la ſphère eſt $\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r^3$, & que la diſtance de ſon centre de gravité au plan PQ, eſt $a + r$, diviſant le réſultat qu'on vient de trouver, par le produit de ces deux dernières quantités, on aura pour la diſtance CO du centre d'oſcillation & de percuſſion ;

$$CO = \frac{a^2 + 2ar + \frac{7}{5}r^2}{a+r} = \frac{a^2 + 2ar + r^2 + \frac{2}{5}r^2}{a+r} =$$

$a+r+\frac{2}{5}\times\frac{r^2}{a+r} = CG + \frac{2}{5}\times\left(\frac{DG}{CG}\right)^2$, d'où l'on voit que le centre d'oſcillation & de percuſſion eſt plus bas que le centre même de la ſphère, & qu'on ne peut les prendre pour celui-ci, que lorſque le rayon de la ſphère eſt très-petit à l'égard de la diſtance du centre G au point de ſuſpenſion.

662. Si la ſphère eſt ſuſpendue par une verge ou lame, & qu'on veuille avoir égard à la maſſe de cette lame; on ſe rappellera que nous avons trouvé (651) $\frac{h^3S}{3} + \frac{h'^3S}{12}$ pour la ſomme des produits des particules de cette lame par les quarrés de leurs diſtances au point fixe ou à l'axe. Or h eſt ce que nous repréſentons ici par a; de plus, S étant (651) $= h'b$, & $S' = hb = ab$, on aura $\frac{a^3h'b}{3} + \frac{h'^3ab}{12}$; cette quantité & celle qui appartient à la ſphère, doivent être multipliées par les peſanteurs ſpécifiques de ces deux corps, ſi ces peſanteurs ſont différentes; alors ajoutant les deux produits, on aura, en appellant p & p' les peſanteurs ſpécifiques de la lame & de la ſphère, on aura, dis-je, $p\times\frac{a^3hb}{3} + p\times\frac{h'^3ab}{12} + p'\times\frac{c}{2}\times(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{3}ar^4 + \frac{28}{15}r^5)$, pour la ſomme des produits des particules de tout le ſyſtême, par le quarré de leur diſtance à l'axe. Diviſant cette quantité par la ſomme $pah'b + p'\frac{c}{2}\times\frac{4}{3}r^3$, on aura la diſtance du centre d'oſcillation.

663. Dans la pratique on peut ſe contenter de partager le corps en un grand nombre de parties,

& de multiplier chacune par le quarré de sa distance à l'axe, pour avoir d'une manière suffisamment exacte, la valeur de $\int mrr$.

664. Après cette petite digression sur la manière de trouver $\int mrr$, revenons aux applications qu'on peut faire de la règle donnée (636).

Nous avons démontré (289) que lorsqu'un corps quelconque L (*fig. 117*) reçoit une impression suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité G, cette impression se transmet entièrement au centre de gravité qui se meut parallèlement à la direction RS, suivant laquelle le corps a reçu cette impression, & qu'en même temps les parties de ce corps tournent autour du centre de gravité de la même manière qu'elles le feroient, si le point G étoit fixe. Donc si la figure de ce corps, & les forces qui lui sont transmises (dont je suppose que R représente la résultante) sont telles qu'il ne puisse tourner qu'autour d'un seul axe ; comme cet axe passera nécessairement par le centre de gravité, tout ce que nous avons dit ci-dessus aura également lieu, en entendant par r, dans $\int mrr$, la distance d'une particule quelconque à l'axe qui passe par le centre de gravité, & par $R \times D$ le moment de la force R pris par rapport au même axe, ou la somme des momens de toutes les forces qui agissent sur le corps, prise par rapport à ce même axe. C'est-à-dire, que le centre de gravité sera mu parallèlement à la direction de la force R, avec une vîtesse $= \frac{R}{L}$, L étant la masse du corps. Et si l'on mène GS perpendiculaire sur RS, & qu'on appelle v la vîtesse de rotation de S, on aura $v = \frac{R \times GS}{\int mrr} \times GS$, ou $v = \frac{R \times GS^2}{\int mrr}$, (636). Voyons-en quelques applications.

665. Supposons que le corps N (*fig.* 118) vient choquer le corps L suivant une direction quelconque CQ, telle cependant qu'il n'en résulte de rotation dans L, qu'autour d'un seul axe perpendiculaire au plan qui passe par le centre de gravité G, & par la perpendiculaire TS au point de contact T; il s'agit de déterminer les vîtesses après le choc, & leurs directions; le corps L est supposé en repos.

Concevons par le point de contact T, un plan tangent; & imaginons la vîtesse de N suivant CQ, décomposée en deux autres, l'une suivant CT perpendiculaire à ce plan, l'autre suivant CI parallèle à ce même plan. Si N n'avoit d'autre vîtesse que CI, il ne feroit que toucher L en passant, & ne lui communiqueroit aucun mouvement, du moins abstraction faite du frottement. Ce n'est donc qu'en vertu de la vîtesse CT que se fait le choc. Or comme il est aisé, dans le parallélogramme $CTAI$, dont tous les angles & la diagonale CA sont supposés connus, de connoître CT, nous regarderons cette vîtesse CT comme connue, & nous la nommerons V. Soit v la vîtesse qui restera à N après le choc, suivant la même direction CT ou CS; & par conséquent $V - v$ la vîtesse qu'il perd; $N \times (V - v)$ est donc la force qui passe dans le corps L, celle que nous avons nommée R. Donc le centre de gravité, & toutes les parties du corps, prendront ſuivant GM parallèle à CS, une vîteſſe $= \frac{N \times (V - v)}{L} = v'$, en nommant v' cette vîteſſe.

Mais comme la force $N \times (V - v)$ ne paſſe pas par le centre de gravité G, de L, ce corps doit tourner autour de G comme ſi ce point eût été fixe (289). Soit u la vîteſſe de rotation que prendra le point S qui eſt celui où la perpendiculaire GS ſur CS, rencontre cette dernière ligne; on aura donc (636) $u = \frac{N(V - v) \times (GS)^2}{\int mrr}$, ou, en repréſentant GS par D, $u = \frac{ND^2 (V - v)}{\int mrr}$.

Obſervons de plus, que pour que le corps N ait réellement la vîteſſe v, il faut que le point T du corps L, ait auſſi cette même vîteſſe v ſuivant TS; voyons donc avec quelle vîteſſe ce point doit avancer ſuivant TS.

Il aura d'abord la vîteſſe v' commune à toutes les parties de L. De plus, ſi l'on ſuppoſe que l'arc infiniment petit Tm perpendiculaire à GT repréſente la vîteſſe de rotation du point T, en imaginant le parallélogramme $Trmn$ ſur les directions Tm, TA & TS, on aura Tr pour la vîteſſe de T ſuivant TS en vertu de ſa rotation. Or les triangles ſemblables Tmr, GTS, donnent $GT : GS :: Tm : Tr$; donc $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$. Mais puiſque u eſt la vîteſſe de rotation du point S, on a $u : Tm :: GS : GT$, & par conſéquent $Tm = \frac{u \times GT}{GS}$; donc $Tr = \frac{GS}{GT} \times \frac{u \times GT}{GS} = u$; donc la vîteſſe totale du point T du corps L, ſuivant CS, eſt $v' + u$; il faut donc que $v' + u = v$.

Si des trois équations que nous venons de trouver, pour exprimer les conditions du mouvement, on tire les valeurs de v, u & v', on aura $v = \frac{N(\int mrr + LD^2)V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $v' = \frac{NV\int mrr}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $u = \frac{LND^2V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$.

Si la diſtance GS ou $D = 0$, c'eſt-à-dire, ſi le choc paſſe par le centre de gravité G, alors la vîteſſe de rotation $u = 0$, les vîteſſes v & v' ſont égales entre elles & à $\frac{NV}{N+L}$, ainſi que cela doit être (352).

La vîteſſe v étant déterminée, ſi on la compoſe avec la vîteſſe CI qui n'a ſouffert aucune altération, on aura la vîteſſe abſolue de N, & ſa direction après le choc.

666. Si le corps L étoit en mouvement avant le choc, alors on décompoſeroit la vîteſſe de N avant le choc, en deux autres, dont l'une fût égale & parallèle à celle de L; elle ne contribueroit en rien au choc; on emploiera donc la ſeconde, comme on a employé la vîteſſe ſuivant CQ, en conſidérant le corps L comme en repos.

667. Si l'on compare la valeur que nous venons de trouver pour u, avec celle que nous avons trouvée (647) pour la vîteſſe de rotation, en faiſant attention à la différence de ſignification de r; dans chaque cas, on pourra connoître la différence entre la vîteſſe de rotation que prend un corps libre, & celle qu'il prend quand il eſt aſſujetti à tourner autour d'un point ou axe déterminé.

668. Lorſqu'un corps L de figure quelconque (*fig.* 119) ayant reçu une impulſion ſuivant une direction

direction RS qui ne passe pas par le centre de gravité, prend les deux mouvemens dont nous avons parlé (664), il est facile de voir que, pendant un instant, on peut le considérer comme n'ayant qu'un seul mouvement, savoir un mouvement de rotation autour d'un point ou axe fixe C qui, selon la figure du corps, & selon la distance GS à laquelle passe la force impulsive, peut être dans le corps même, ou dehors. En effet, si tandis que la ligne GS se transporte parallèlement à elle-même de GS en $G'S'$, on imagine qu'elle tourne autour du point mobile G; comme les points du corps ont des vîtesses de rotation d'autant plus grandes qu'ils sont plus éloignés de G, il est facile de voir qu'il y aura sur SG un point C qui se trouvera avoir décrit de C' vers C, un arc égal à GG', arc que pendant un instant, on peut regarder comme une ligne droite; & alors ce point C aura autant rétrogradé par son mouvement de rotation qu'il s'était avancé parallèlement à GG' par la vîtesse commune à toutes les parties; ce point aura donc toujours resté en C que l'on pourra par cette raison considérer, pendant un instant, comme un point fixe autour duquel le corps tourneroit.

Si l'on veut connoître la position du point C, on remarquera que les arcs CC', $S'I$ que les points

C' & S' décrivent, dans un inftant, peuvent être regardés comme des lignes droites perpendiculaires à GS, ou parallèles à GG'; or les triangles femblables $CC'G'$, $G'S'I$ donnent $G'S' : G'C' :: S'I : CC'$, ou $GS : GC :: S'I : GG'$; or nous avons trouvé la vîteffe $GG' = \frac{R}{L}$, & la vîteffe $S'I = \frac{R \times D^2}{\int mrr}$; donc GS ou $D : GC :: \frac{R \times D^2}{\int mrr} : \frac{R}{L}$, d'où l'on tire $GC = \frac{\int mrr}{D \times L}$.

669. Le point C eft ce qu'on appelle le *Centre fpontané de rotation*, parce que c'eft un centre que le corps prend comme de lui-même. Ce point eft précifément le centre d'ofcillation qu'auroit le corps L, s'il tournoit autour d'un point ou axe fixe placé en S; car de $CG = \frac{\int mrr}{D \times L}$, on conclut $CS = GS + \frac{\int mrr}{D \times L} = \frac{L \times GS \times D + \int mrr}{D \times L} = \frac{L \times (GS)^2 + \int mrr}{GS \times L}$; or $L \times (GS)^2 + \int mrr$, eft (641) précifément ce que (637) on entendoit par $\int mrr$; donc le point C eft ici le même que le point R confidéré (637).

670. On voit donc que le point autour duquel un corps peut être cenfé tourner pendant un inftant, eft indépendant de la valeur de la force ou des forces qu'on applique à ce corps; &, en général, on voit par la valeur de CG, que ce point eft d'autant plus

loin, que cette force, ou la résultante de toutes ces forces, agit plus près du centre de gravité.

671. Nous avons vu (644) que lorsqu'un corps tourne autour d'un point ou axe fixe, son centre de percussion est le même que son centre d'oscillation : ces deux centres se trouvent donc alors, par la même opération. Il n'en est pas de même quand le corps est libre. En effet, supposons qu'un corps dont la masse est L, tourne avec une vîtesse qui, pour un point situé à une distance connue a, soit v; & qu'en même temps le centre de gravité de ce corps soit mu avec la vîtesse u. Il est clair d'abord que la force résultante de tous les mouvemens qui animent les différentes parties de ce corps, aura pour valeur $L \times u$, ou Lu, c'est-à-dire, la même que si le corps ne tournoit pas (289). En second lieu, la distance à laquelle cette résultante doit passer à l'égard du centre de gravité, est évidemment celle à laquelle une force égale à Lu, feroit naître dans le mobile, la même vîtesse de rotation qu'il a actuellement; or (636) cette vîtesse v a pour expression $\frac{Lu \times D \times a}{\int mrr}$, en appellant D la distance cherchée; on a donc $v = \frac{LuDa}{\int mrr}$, & par conséquent $D = \frac{v}{u} \times \frac{\int mrr}{La}$; d'où l'on voit que la distance du centre de percussion d'un corps libre dépend du rapport de la vîtesse de rotation à la vîtesse du centre de gravité; qu'en

particulier, elle eſt nulle quand la vîteſſe de rotation eſt nulle, ce qui doit être en effet.

On peut donc par-là, déterminer en quel point on peut arrêter un corps libre qui ſe meut en tournant ſur lui-même.

Du Tour ou Treuil, Cabeſtan, &c.

672. Le *Tour* ou *Treuil* eſt, en général, une roue (*fig.* 120) traverſée perpendiculairement par un cylindre dont les extrémités portent ſur deux appuis C, C. Une puiſſance Q appliquée ſuivant une direction tangente à la circonférence de la roue, entraîne cette circonférence avec le cylindre qui eſt ſolidement lié avec elle, & obligeant l'un & l'autre de tourner autour de l'axe de ce cylindre, ſur les appuis C, C, enveloppe ſucceſſivement les différentes parties de la corde DP, à laquelle eſt attaché le poids P que l'on ſe propoſe d'élever ou d'attirer vers ce cylindre.

673. Quelquefois au lieu d'une roue, on ſe contente d'implanter dans le corps du cylindre & perpendiculairement à ſon axe des *barres* E, E (*fig.* 120 & 122) auxquelles la puiſſance s'applique, & produit le même effet. D'autres fois, les extrémités du cylindre ſont terminées par deux manivelles

Q, *Q* (*fig.* 121) auxquelles on applique la force ou les forces motrices.

674. Lorſque l'axe du cylindre eſt vertical (*fig.* 122) on lui donne le nom de *Cabeſtan*. C'eſt dans cette ſituation qu'on l'emploie pour traîner des fardeaux ou remonter des bateaux.

675. Mais, en général, quelle que ſoit la diſpoſition de cette machine, on voit que l'action de la puiſſance & celle du poids ou de l'obſtacle qu'il s'agit de ſurmonter, ne s'exercent pas dans un même plan, mais dans des plans parallèles, ou à très-peu près parallèles. L'action de la puiſſance produit deux effets, dont l'un s'exerce contre le poids même, & l'autre contre les appuis : voyons comment s'engendrent ces deux effets, dans le cas de l'équilibre.

676. Réduiſons toute la machine repréſentée par la *figure* 120, à ce que l'on voit (*fig.* 123); c'eſt-à-dire, réduiſons le cylindre à ſon axe *CC*, repréſentons par *AMN*, le plan de la roue, & par *BDL*, la ſection du cylindre par un plan parallèle à *AMN*, & paſſant par le cordon *DP*.

Ayant mené le rayon *EA*, au point *A* où la puiſſance *Q* agit ſur la roue, concevons par *CC* & par *EA*, un plan *CEA* qui rencontre *BDL* ſuivant IB qui ſera néceſſairement parallèle à AE. Ayant mené AB, concevons par cette ligne, & par la direction AQ de la puiſſance, un plan QAR qui rencontrera l'axe CC en quelque point R. Enfin par les points B & R, menons BF & RG parallèles à AQ.

Cela poſé, nous pouvons (208) décompoſer la force Q, en deux autres forces F & G dirigées ſuivant BF & RG : & comme cette dernière paſſe par l'axe même du cylindre, elle ne peut produire aucun mouvement de rotation autour de cet axe, & par conſéquent ne peut contribuer à ſoutenir le poids P; elle ſera toute conſumée contre les appuis.

Il n'y a donc que la force F qui puiſſe faire équilibre au poids P. Or 1°. cette force eſt dirigée dans le même plan BDL dans lequel s'exerce l'action de ce poids. 2°. Les deux lignes BF & BI étant parallèles aux deux droites AQ, AE qui font un angle droit, BF eſt donc perpendiculaire à BI, ou tangente à la circonférence BDL. On peut donc regarder BID comme un levier angulaire dont le point d'appui eſt en I; & puiſque les diſtances BI, ID, des directions des deux puiſſances F & P, à ce point d'appui ſont égales, ces deux puiſſances doivent être égales; on a donc $F = P$; voyons donc quel eſt le rapport de F à Q.

Selon ce qui a été dit (205), on a $Q : F ::$ $BR : AR$; mais les triangles ſemblables RBI, RAE, donnent $BR : AR :: BI : AE$; donc $Q : F :: BI : AE$, ou (puiſque $F = P$) $Q : P$ $:: BI : AE$; c'eſt-à-dire, que *dans le treuil, la puiſſance eſt au poids comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue.*

677. Si le poids P étoit attaché en un point B (*fig.* 124) du plan de la roue, tel que la perpendiculaire IB ſur ſa direction fût égale au rayon du cylindre, on pourroit regarder AIB comme un levier angulaire dont le point d'appui ſeroit au centre I; & il faudroit, pour l'équilibre (601), que l'on eût $Q : P :: BI : AI$; c'eſt-à-dire, qu'on auroit entre la puiſſance & le poids le même rapport que ci-devant. Donc *l'action de la puiſſance ſe tranſmet au poids, à l'aide du treuil, comme ſi le poids & la puiſſance étoient dans un même plan.*

678. A l'égard de la charge de chacun des appuis, il n'en eſt pas de même : elle varie ſelon la diſtance du plan BLD (*fig.* 123) au plan de la roue.

Pour la déterminer on décompoſera la puiſſance Q (conſidérée comme appliquée en E parallèlement à AQ) en deux forces parallèles à AQ, & qui paſſent par C & C (208). On décompoſera pareillement le poids P considéré comme appliqué verticalement en I, en deux forces parallèles à PD, & qui passent par C & C. Par ce moyen, chaque appui sera sollicité par deux forces dont les valeurs & les directions seront connues. Il sera donc facile, pour chaque appui, de réduire ces forces à une seule dont la valeur & la direction soient connues.

Cette méthode de trouver la charge des deux appuis, est fondée sur ce que les deux forces F & P se réduisent à une seule qui agit en I; si l'on conçoit celle-ci décomposée en deux forces parallèles à F & P, & appliquées en I, elles n'auront pas d'autres valeurs que F & P. Donc 1°. on peut regarder P comme appliqué en I: 2°. la force F considérée comme appliquée en I & la force G appliquée en R ne peuvent manquer d'avoir pour résultante une force égale à Q, puisque $G = F - Q$, ainsi qu'il résulte de la décomposition ci-dessus; de plus cette résultante $= Q$ passe par E, puisque $RI : RE :: RB : RA :: Q : F$ (205).

679. Si la puissance, au lieu d'être appliquée suivant une direction tangente à la roue, agissoit par le moyen des bras E, E (*fig.* 120 & 122) & perpendiculairement à leur longueur, le rapport de la puissance au poids seroit toujours le même que ci-devant, en substituant aux mots *rayon de la roue*,

ceux de *longueur du bras*, cette longueur étant comptée depuis l'axe du cylindre. Mais si la puissance n'agissoit pas perpendiculairement au bras IE (*fig.* 122), au lieu de ce bras on prendroit la perpendiculaire IR menée sur la direction de la puissance; ensorte que la puissance seroit au poids, comme le rayon du cylindre est à IR.

680. Puisque (*fig.* 123) $Q : P :: IB : AE$; on a donc $Q \times AE = P \times IB$; c'est-à-dire, que le moment de la puissance est égal au moment du poids, ces momens étant pris par rapport à l'axe CC. Et si l'on emploie, en même temps, plusieurs puissances appliquées à différens bras; il faudra que la somme des momens de ces puissances, soit égale au moment du poids.

681. Si la corde qui porte le poids, ou qui transmet à l'obstacle, l'action de la puissance, au lieu de s'envelopper sur un cylindre, s'enveloppe sur une surface conique, ou en général sur celle d'un solide dont les diamètres varient, le rapport de la puissance au poids variera aussi continuellement: & réciproquement si la puissance dont l'action doit se communiquer à l'aide d'une machine semblable à celle dont il s'agit ici, varie continuellement, & doit néanmoins produire constamment le même effet, on doit, pour y parvenir, faire ensorte que son action soit appliquée à des rayons d'autant plus longs, qu'elle diminuera davantage. C'est ce que l'on voit particulièrement dans les montres ou horloges à ressort, où la force motrice est un ressort fixé par

une de ſes extrémités à l'arbre du tambour ou barrillet *Z* (*fig.* 125), & qui après pluſieurs circonvolutions, eſt fixé intérieurement à la ſurface concave de ce barrillet. Une chaîne attachée d'une part ſur la ſurface convexe du barrillet, fait pluſieurs tours ſur la fuſée *Y* à laquelle elle eſt fixée par ſon autre extrémité ; par le développement du reſſort, le barrillet en tournant tire la chaîne & fait tourner la fuſée *Y*; mais comme le reſſort, à meſure qu'il ſe débande, diminue de force, on compenſe cette diminution en donnant à la fuſée plus de diamètre dans les parties qui doivent être développées les dernières; par ce moyen, le rouage reçoit de la part du reſſort, des impulſions égales en temps égaux.

682. Il paroît donc, à ne conſidérer les choſes que du côté de l'équilibre, qu'on peut diminuer à volonté, le rapport de la puiſſance au poids, & mettre un poids, ſi petit qu'il ſoit, en état de vaincre tel poids qu'on voudra, à l'aide du tour, & des machines qui s'y rapportent. Mais quand on conſidère le mouvement & qu'on a égard, comme on le doit, à la nature des agens qu'on emploie, l'effet ne peut pas être augmenté arbitrairement ; le rapport du rayon du cylindre, au rayon de la roue, n'eſt point arbitraire : il y en a un propre à donner le plus grand effet poſſible.

Suppoſons, par exemple, que le moteur appliqué au bras *E* (*fig.* 122) tende à ſe mouvoir avec une vîteſſe *V*, & que la force dont il eſt capable ſoit *MV*, c'eſt-à-dire, équivalente à celle d'une maſſe connue M, animée de cette vîteſſe V. Soit v la vîteſſe avec laquelle ſera mû le point E, en vertu de la réſiſtance de P. Alors ſi l'on nomme R le bras IE, & r le rayon du cylindre, on aura la vîteſſe que prendra P, par cette proportion, $R : r :: v : \frac{rv}{R}$, puiſqu'il eſt évident que le point E, & le point où la corde touche le cylindre, ont des vîteſſes proportionnelles à leurs diſtances à l'axe. Il faut donc (287) concevoir, au moment où la puiſſance vient à agir, que la vîteſſe V eſt compoſée de la vîteſſe v qui ſubſiſtera, & de la vîteſſe $V - v$ qui ſera détruite. Et qu'au même inſtant le poids P a la vîteſſe $\frac{rv}{R}$ qui aura lieu, & la vîteſſe $\frac{rv}{R}$ en ſens contraire, & qui ſera détruite, c'eſt-à-dire, que la force motrice réduite à la force $M(V - v)$ doit faire équilibre à la maſſe P animée de la force $\frac{Prv}{R}$. Donc (676) $M(V - v) \times R = \frac{Prrv}{R}$, d'ou l'on tire $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr}$. Donc la vîteſſe du poids P, qui eſt $\frac{rv}{R}$, ſera $\frac{MVrR}{MRR + Prr}$. Donc pour ſavoir quel rapport il doit y avoir entre R & r, pour que le poids P prenne la plus grande vîteſſe poſſible, il faut (36) égaler à zéro la différentielle de cette valeur, priſe en regardant r ſeule comme variable. On aura donc $MVRdr\,(MRR + Prr) - MVRr \times 2Prdr = 0$, d'où l'on tire $MRR = Prr$, & $r = R\sqrt{\frac{M}{P}}$. Par exemple, ſi $M : P :: 100000 : 1000$, on aura $r = R\sqrt{(\frac{1000}{100000})} = r \times \frac{1}{10}$; c'eſt-à-dire, que le rayon du cylindre doit être la dixième partie du bras IE, pour que l'effet ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. Que l'on augmente ou que l'on diminue le bras IE, ou le rayon du cylindre, il n'y a qu'à perdre.

683. Supposons que le poids Q (*fig. 126*) appliqué à la circonférence de la roue entraîne par sa pesanteur, le poids P appliqué à la circonférence du cylindre; on peut, sur ce mouvement, se proposer les deux questions suivantes.

1°. *La hauteur à laquelle* P *doit être élevé, étant donnée, trouver le rapport que* R *doit avoir à* r*, pour que* P *parvienne à cette hauteur, dans le moindre temps possible.*

2°. *L'espace que* Q *doit décrire, étant donné, trouver le rapport de* R *à* r *pour que* P *arrive à la plus grande hauteur possible dans le moindre temps possible.*

Soit p la vîtesse que la pesanteur donne en une seconde de temps, à un corps libre; $p\,dt$ sera celle qu'elle lui donne dans l'instant dt.

Soit v la vîtesse avec laquelle Q est mu au bout du temps quelconque t. $\frac{rv}{R}$ sera celle avec laquelle P sera mu. Donc si ces corps devenoient libres, on auroit $v + p\,dt$ pour la vîtesse de Q pendant l'instant suivant, & $\frac{Rv}{R} - p\,dt$ pour celle P. Mais comme ils ne sont pas libres, supposons que la vîtesse de Q soit $v + dv$; celle de P sera $\frac{r}{R}(v + dv)$ ou $\frac{rv}{R} + \frac{rdv}{R}$. Q aura donc perdu par l'action de P, la vîtesse $p\,dt - dv$, & P aura gagné par l'action de Q, la vîtesse $\frac{rdv}{R} + p\,dt$. Il faut donc (287 & 676) que $QR(p\,dt - dv) = Pr\left(\frac{rdv}{R} + p\,dt\right)$; d'où l'on tire $dv = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}\,p\,dt$.

Soit z l'espace que Q aura décrit au bout d'un temps quelconque t; on aura $dz = v\,dt$, ou $v = \frac{dz}{dt}$, &

$dv = d\left(\frac{dz}{dt}\right)$; donc $d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} \times p\,dt$;
ou en multipliant par $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{dt}\,d\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} p\,dz$;
& en intégrant, $\frac{1}{2}\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} pz$, équation à laquelle je n'ajoute point de constante, parce que $\frac{dz}{dt}$, ou la vîtesse, est zéro dans cette équation, lorsque $z = 0$, ainsi que cela doit être.

De cette équation on tire $dt = \frac{dz}{\sqrt{2pz}} \sqrt{\left(\frac{QR^2 + Pr^2}{QR^2 - PRr}\right)}$;
& en intégrant, $t = \sqrt{\frac{2z}{p}} \times \sqrt{\left(\frac{QR^2 + Pr^2}{QR^2 - PRr}\right)}$, & par conséquent $\frac{z}{t} = \sqrt{\frac{pz}{2}} \times \sqrt{\left(\frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}\right)}$.

Soit h la hauteur à laquelle on veut que P soit élevé, on aura $\frac{rz}{R} = h$; & par conséquent $z = \frac{Rh}{r}$,
& $\frac{z}{t} = \frac{Rh}{rt} = \sqrt{\left(\frac{pRh}{2r}\right)} \sqrt{\left(\frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}\right)}$, ou
$\frac{h}{t} = \sqrt{p\frac{h}{2}} \sqrt{\left(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$.

Donc 1°. si la hauteur h est donnée, & que l'on demande que P parvienne à cette hauteur dans le moindre temps possible; c'est demander que h restant le même, $\frac{h}{t}$ soit un *maximum*. Il faut donc que la différentielle de $\sqrt{\frac{h}{2}} \sqrt{\left(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$ prise en regardant h comme constante, & $\frac{r}{R}$ comme variable, ou seulement r comme variable, soit $= 0$. Cette condition donnera l'équation $Q^2R^3 - 2PQR^2r - PQRr^2 = 0$, ou $QR^2 - 2PRr - Pr^2 = 0$; d'où il est facile de conclure le rapport de R à r.

2°. Si c'est z qui est donné, & que l'on demande que Q, décrivant l'espace z, P soit élevé le plus haut qu'il se peut dans le moindre temps possible; alors il faut que $\frac{h}{t}$ soit un *maximum*, z étant constant. Il faut donc, en mettant pour h sa valeur $\frac{rz}{R}$ dans $\sqrt{\frac{h}{2}}$, que $\sqrt{\left(\frac{prz}{2R}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2}\right)}$, ou que $\sqrt{\left(\frac{pz}{2}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{Qr^2R - PRr^3}{QR^3 + PRr^2}\right)}$ soit un *maximum* en supposant z constant. Il faut donc que $d\left(\frac{Qr^2R - Pr^3}{QR^3 + PRr^2}\right) = 0$, la différentiation étant faite en regardant r seule comme variable. Cette opération donne $2Q^2R^3 - 3PQR^2r - P^2r^3 = 0$, d'où l'on déduira le rapport de R à r.

684. Dans la question que nous avons traitée (682) nous n'avons pas eu égard à la quantité de matière de la roue ou des barres & du cylindre. Mais comme il peut arriver souvent qu'elle soit assez considérable pour partager sensiblement l'action de la puissance, on doit y avoir égard pour être pleinement en état de juger si la machine aura son effet, si la puissance donnera la vîtesse nécessaire. Or c'est ce qu'il est facile de faire par ce que nous avons dit (636).

Il faut, pour cet effet, considérer la masse P (*fig.* 122) celle des barres, ou de la roue lorsqu'il y en a une, & celle du cylindre, comme ne faisant qu'un seul corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe qui est ici l'axe du cylindre, la masse P étant considérée comme appliquée à la surface de ce cylindre. Alors si l'on nomme $\int m r' r'$ la somme des produits des particules de la roue & du cylindre, par les quarrés de leurs distances à l'axe, on aura $v = \frac{MVRR}{MRR + Prr + \int m r' r'}$, qui ne revient à la valeur trouvée (636), que lorsque $\int m r' r'$ est assez petite à l'égard de $MRR + Prr$, pour pouvoir être négligée.

685. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas eu égard à la grosseur des cordes. Mais si elles ont un diamètre un peu considérable, alors on doit prendre pour le rayon de la roue & pour celui du cylindre, leur rayon véritable augmenté du rayon ou demi-diamètre de la corde, parce qu'on doit regarder l'action comme se transmettant suivant l'axe de la corde.

686. Il y a une infinité de machines qui peuvent, soit en tout, soit en partie, être rapportées au treuil, & par conséquent au levier ; tels sont le cric (*fig. 127*), la chèvre (*fig. 128*), les roues dentées (*fig. 129*), &c., & toutes les machines destinées à percer ou pousser en tournant, quoique ces dernières participent souvent d'une autre machine que nous examinerons dans peu, savoir le plan incliné.

Dans le cric (*fig. 127*), l'axe sur lequel est chaussée ou auquel est liée la manivelle CRQ, porte un pignon P, dont les ailes ou dents engrènent dans une barre dentée AB. L'aile K du pignon soulève, en tournant, la barre AB, à l'aide de la dent contigue, avec une force qui (676) est à la force Q appliquée à la manivelle, comme le rayon de la manivelle est à celui du pignon; ensorte que comme le rayon du pignon est fort petit à l'égard de celui de cette manivelle, on peut à l'aide de cette machine, soulever des poids assez considérables, avec une force médiocre.

Quant à la chèvre, nous l'examinerons plus particulièrement dans la ſuite, en parlant du frottement ſur les poulies & ſur le tour.

687. Les roues dentées ſervent à pluſieurs uſages; tantôt on les emploie pour multiplier la force, tantôt pour multiplier la vîteſſe, d'autres fois pour changer la direction des mouvemens; ſouvent pour règler les mouvemens ſur certaines périodes de temps, ou pour rendre ſenſibles des mouvemens ou des eſpaces que l'œil ne pourroit ſaiſir.

Si pluſieurs roues dentées V, X, Y, Z (*fig.* 129) communiquent les unes aux autres par les pignons u, x, y, z, voici comment on peut trouver le rapport de la puiſſance Q appliquée à la première de ces roues, au poids ou à l'effort P que le dernier pignon peut ſoutenir.

Soient R, R', R'', R''' les rayons de ces roues; r, r', r'', r''' ceux de leurs pignons. On conſidérera l'effort que l'aile d'un pignon quelconque fait ſur la dent de la roue voiſine, comme une puiſſance appliquée à celle-ci; alors ſelon ce qui a été dit (676), en nommant E, E', E'' ces efforts, on aura $Q : E :: r : R$, $E : E' :: r' : R'$, $E' : E'' :: r'' : R''$, $E'' : P :: r''' : R'''$, d'où en multipliant par ordre, on conclura $Q : P :: rr'r''r''' : RR'R''R'''$; c'eſt-à-dire, que la puiſſance eſt au poids, comme le produit des rayons de tous les pignons, eſt au produit

produit des rayons de toutes les roues : par exemple, si le rayon de chaque pignon est 10 fois plus petit que celui de sa roue, une puissance d'une livre, soutiendra un effort de 10000 livres.

Au reste, ce qu'on gagne du côté de la force, en employant les rouages, on le perd du côté de la vîtesse. En effet, lorsque la roue *V* a fait un tour, le pignon *u* qui a fait aussi un tour, n'a encore fait passer qu'autant de dents de la roue *X*, qu'il a d'ailes, ensorte que si la roue *X* a 48 dents, & le pignon *u*, 6 ailes, la roue *X* n'a fait qu'un huitième de tour, lorsque la roue *V* en a fait un ; on voit, par la même raison, que la roue *Y* va plus lentement que *X*, & ainsi de suite.

688. Voyons maintenant, comment on peut augmenter la vîtesse, dans un rapport donné, à l'aide des roues dentées.

Soit (*fig. 130*) une roue dentée *V* qui engrène dans un pignon *u*, il est clair que pendant un tour de la roue *V*, le pignon *u* fera autant de tours que le nombre de ses ailes est contenu de fois dans le nombre des dents de la roue *V* ; c'est-à-dire, que pendant un tour de la roue *V*, le pignon *u* fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N}{n}$, *N* & *n* marquant les nombres de dents & d'ailes de la roue & du pignon qu'elle mène.

Donc si la tige du pignon u porte une roue X qui engrène aussi dans un pignon x, on verra de même, que pendant un tour de la roue X ou du pignon u, le pignon x fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N'}{n'}$, N' & n' marquant les nombres de dents & d'ailes de la roue X & du pignon x. Donc pendant que la roue X fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N}{n}$, c'est-à-dire, pendant que la roue V fera un tour, le pignon x fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N'}{n'} \times \frac{N}{n}$ ou $\frac{NN'}{nn'}$. Et en continuant de raisonner de même sur un plus grand nombre de roues & de pignons, on voit que le nombre des tours que fera le dernier pignon pendant un tour de la première roue, est exprimé par une fraction qui a pour numérateur le produit des nombres des dents de toutes les roues, & pour dénominateur le produit des nombres des ailes de tous les pignons.

Donc lorsqu'on demande quels doivent être les nombres des dents & des ailes, d'un nombre de roues & de pignons proposé, pour que la vîtesse de la dernière pièce, soit à celle de la première, dans un rapport donné; c'est une question indéterminée, ou qui peut avoir plusieurs solutions : deux exemples suffiront pour voir comment on doit se conduire dans ces sortes de questions.

Supposons que l'on demande combien on doit donner de dents aux deux roues V & X, & d'ailes aux pignons u & x, pour que le pignon x fasse 50 tours pendant un tour de la roue V. On aura donc $\frac{NN'}{nn'} = 50$. Nous ne connoissons donc ici que le quotient de NN' divisé par nn'; mais nous ne connoissons ni le dividende ni le diviseur. Prenons donc arbitrairement, pour le diviseur nn', un nombre composé de deux facteurs qui ne soient ni trop petits ni trop grands pour pouvoir être les nombres d'ailes qu'on peut donner à des pignons. Supposons, par exemple, $nn' = 7 \times 8 = 56$. Nous pourrons supposer $n = 7$, & $n' = 8$. Alors nous aurons $\frac{NN'}{56} = 50$, ou $NN' = 50 \times 56$; or 50 & 56 n'excédant pas le nombre des dents qu'on peut donner à chaque roue, je supposerai $N = 50$, & j'aurai par conséquent $N' = 56$. Si ces deux facteurs ou l'un d'eux, eût été trop grand, je les aurois décomposés en tous leurs facteurs premiers, & j'aurois examiné si de la combinaison de ces facteurs, il n'en seroit pas résulté deux facteurs plus petits, ou bien j'aurois pris un autre nombre pour nn'.

Supposons, pour second exemple, qu'on demande les nombres de dents de trois roues, & des ailes de trois pignons, pour que le dernier pignon faisant un tour en 12 heures, la première roue fasse un tour en un an.

L'année commune étant de 525949 minutes; & les 12 heures valant 720 minutes, il est clair que pendant un tour de la première roue, le dernier pignon fait un nombre de tours exprimé par $\frac{525949}{720}$; on a donc $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$. Prenons arbitrairement $n = 7$, $n' = 8$. Nous aurons $\frac{NN'N''}{7 \times 8 n''} = \frac{525949}{720}$, ou

$NN'N'' = \frac{525949}{720} \times 7 \times 8 n'' = \frac{3681643 n''}{90}$. Or comme il faut que $NN'N''$ soit un nombre entier, il est clair que pour résoudre exactement la question, il faudroit prendre pour n'', un multiple de 90; ce qui étant un nombre trop grand pour être celui des ailes d'un pignon, il faut voir si en retranchant ou en ajoutant un petit nombre d'unités, au numérateur de cette dernière fraction, elle ne pourroit pas devenir un nombre entier; comme ce nombre différeroit peu de la valeur véritable de $NN'N''$, on le prendroit pour ce produit.

Soit donc q le plus petit nombre d'unités dont il faille diminuer le numérateur, & soit t le nombre entier qui en résulte, & que l'on prendra pour $NN'N''$; on aura donc $\frac{3681643 n'' - q}{90} = t$, ou $40907 n'' + \frac{13 n'' - q}{90} = t$. Il faut donc que $\frac{13 n'' - q}{90}$ soit un nombre entier; je l'appelle s. J'ai donc $\frac{13 n'' - q}{90} = s$, ou $n'' = \frac{90 s + q}{13} = 6 s + \frac{12 s + q}{13}$. Je fais $\frac{12 s + q}{13} = r$, & j'ai $s = \frac{13 r - q}{12} = r + \frac{r - q}{12}$. Enfin, je fais $\frac{r - q}{12} = k$; & j'ai $r = 12 k + q$. Donc $s = 13 k + q$, & $n'' = 90 k + 7 q$. Or comme il faut que n'' soit petit, je suppose $k = 0$, & donnant à q la plus petite valeur possible en entiers, je suppose $q = 1$. J'ai donc $n'' = 7$, & t, ou $NN'N'' = 286350$. Reste à savoir, maintenant, si ce nombre peut être décomposé en trois facteurs qu'on puisse prendre pour les nombres des dents N, N', N''; or c'est ce qui a lieu, parce que les trois facteurs de ce nombre sont 50, 69, 83 qui ne sont pas trop grands pour cet objet.

On peut donc prendre, & diſpoſer comme on le voudra, trois roues de 50, 69 & 83 dents, & trois pignons de 7, 7 & 8 ailes.

Si le nombre qu'on trouve, ainſi, pour $NN'N''$, ne donnoit point de facteurs convenables, pour être les nombres de dents qu'on peut tailler commodément ſur des roues, on recommenceroit l'opération en donnant d'autres valeurs à q, ou à n, ou à n'.

Quoique la ſolution qu'on obtient en négligeant ainſi quelques unités, ne ſoit qu'approchée, elle eſt cependant ſuffiſamment exacte. Car dans le cas préſent, le nombre de tours du dernier pignon, pendant un tour de la première roue, étant $\frac{N N' N''}{n n' n''} = \frac{286350}{7 \times 7 \times 8}$; ſi l'on multiplie cette quantité par 12 heures, durée de chaque tour, on aura pour la durée de la révolution de la première roue, $365^j\, 5^h\, 48'\, 58''\frac{38}{45}$; or nous avons ſuppoſé l'année de $365^j\, 5^h\, 49'$.

De l'Équilibre ſur les plans.

689. Si un corps P (*fig. 131*) de figure quelconque, qui touche un plan XZ en un point quelconque C, eſt ſollicité par une force unique; il ne peut demeurer immobile ſur ce plan qu'à ces deux conditions : 1°. que la direction AD de la force unique qui le ſollicite, ſera perpendiculaire au plan XZ; 2°. que cette direction paſſera par le point C, où ce corps touche le plan.

La néceſſité de la première de ces deux conditions eſt évidente. Quant à la ſeconde, il eſt facile de voir qu'elle n'eſt pas moins néceſſaire, puiſque ſi la direction *AD* du corps *P'*, par exemple, quoique perpendiculaire au plan, ne paſſoit pas par le point d'attouchement *C*, la réſiſtance du plan qui ne peut s'exercer que ſuivant la perpendiculaire au point *C*, ne ſeroit point directement oppoſée à la force *AD*, & ne pourroit par conſéquent la détruire, même quand on la ſuppoſeroit égale à cette force.

690. Si le corps au lieu de ne toucher le plan que par un ſeul point, le touche par pluſieurs points, ou par une ſurface plane (*fig. 132 & 133*), alors il n'eſt pas indiſpenſable que la force unique *AD* qui agit ſur lui, paſſe par quelqu'un de ces points; mais il faut qu'elle ſoit perpendiculaire au plan, & qu'elle puiſſe être décompoſée ſeulement en autant de forces perpendiculaires au plan, qu'il y a de points qui repoſent ſur ce plan, & qui paſſent par ces points. Enſorte, par exemple, que ſi le corps *P* (*fig. 132*) touchoit par deux points *C* & *C'*, & que la force *AD* ne ſe trouvât pas dans le plan qui paſſeroit par les perpendiculaires élevées au point *C* & *C'*, l'équilibre ne ſeroit pas poſſible, parce que la force *AD*, ne pourroit être décompoſée en forces qui paſſaſſent par *C* & *C'*, ſans qu'il en naquît une troiſième qui ne ſeroit point ſoutenue.

En un mot, il faut que la force unique qui agit ſur le corps, ſoit perpendiculaire au plan, & paſſe entre quelques-uns des points par leſquels le corps repoſe.

C'eſt ainſi qu'un homme qui ſe tient debout & droit, demeure en équilibre, quoique la direction de ſa peſanteur ne paſſe pas alors par ſes pieds; mais elle paſſe entre ſes pieds; & cette force ſe décompoſe en deux autres forces qui lui ſont parallèles, & dont chacune paſſant par chaque pied, y eſt détruite.

691. Donc ſi un corps qui touche un plan en un ou pluſieurs points, eſt ſollicité par pluſieurs forces dirigées comme on le voudra, il faut 1°. que ces forces puiſſent être réduites à une ſeule qui ſoit perpendiculaire à ce plan. 2°. Que celle-ci, dans le cas où elle ne paſſe pas par un des points d'attouchement, ne les laiſſe pas tous d'un même côté.

692. Si la force unique qui ſollicite le corps, eſt la peſanteur, il faudra donc que le plan ſoit horizontal; & ſi la verticale menée par ſon centre de gravité, ne rencontre pas l'un des points touchans, il faudra du moins, qu'elle ne laiſſe pas tous ces points d'un même côté.

693. Donc ſi le corps n'eſt ſollicité que par deux forces, il faudra 1°. que ces deux forces ſoient dans

un même plan : 2°. que ce plan ſoit perpendiculaire à celui ſur lequel le corps appuie : 3°. que la réſultante qui doit toujours être perpendiculaire à ce dernier plan, ne laiſſe pas tous les points de contact, d'un même côté.

Et ſi de ces deux forces, l'une eſt la peſanteur, il faudra de plus qu'elles ſoient toutes deux dans un plan vertical, & qui paſſe par le centre de gravité du corps.

694. Voyons maintenant quel rapport il doit y avoir, en général, entre deux forces qui tiennent un corps en équilibre ſur un plan.

Soient CQ, CP (*fig. 134*) les directions de ces deux forces; concevons que AB ſoit l'interſection du plan de ces deux forces avec celui ſur lequel le corps appuie; & ayant mené la perpendiculaire CH ſur AB, imaginons ſur cette ligne comme diagonale, & ſur les directions CQ, CP, comme côtés, le parallélogramme $CEDF$. Pour que la réſultante des deux forces Q & P ſoit dirigée ſuivant CD ou CH, il faut (191) que les deux forces Q & P ſoient entre elles, comme CF eſt à CE; & alors les deux forces Q & P, & la preſſion qu'elles exercent ſur le plan, & que je repréſente par H, ſeront telles qu'on aura $Q : P : H :: CF : CE : CD$.

695. Selon ce qui a été dit (201) ou aura également $Q : P : H :: \mathit{ſin.}\, ECD : \mathit{ſin.}\, FCD : \mathit{ſin.}\, ECF$.

696. De deux points A & B pris arbitrairement ſur AB, menons AG & BG perpendiculaires ſur les directions des deux forces Q & P. Le triangle ABG, aura ſes côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle CDE, & lui ſera par conſéquent ſemblable (*Géom.* 111). On aura donc $AG : BG : AB :: DE$ ou $CF : CE : CD$; c'eſt-à-dire (694) $:: Q : P : H$; donc $AG : BG : AB :: Q : P : H$.

697. Mais (*Géom.* 303) $AG : BG : AB ::$ *ſin.* ABG : *ſin.* BAG : *ſin.* AGB ; donc $Q : P : H ::$ *ſin.* ABG : *ſin.* BAG : *ſin.* AGB. C'eſt-à-dire, que lorſque deux forces ſeulement, agiſſent ſur un corps pour le tenir en équilibre ſur un plan ; ſi l'on conçoit deux autres plans auxquels ces deux forces ſoient perpendiculaires, ces deux forces & la preſſion ſur le plan principal, ſont repréſentées, chacune, par le ſinus de l'angle compris entre les plans auxquels les deux autres forces ſont perpendiculaires.

698. Puiſque les rapports que nous venons d'établir, ont lieu de quelque nature que ſoient les deux forces P & Q, ils ont donc encore lieu, lorſque l'une des deux, la force P, par exemple, eſt la peſanteur : alors le plan BG eſt horizontal.

699. Soit prolongée la direction de la puiſſance Q (*fig.* 134) juſqu'à ce qu'elle rencontre le plan BA au point I.

Puiſqu'on a $Q : P : H :: \sin. ABG : \sin. BAG : \sin. AGB$, on a donc $Q : P :: \sin. ABG : \sin. BAG$; mais $\sin. BAG = \sin. KAI = \cos. KIA$, puiſque GK eſt perpendiculaire ſur la direction de la puiſſance ; donc $Q : P :: \sin. ABG : \cos. KIA$. Or ABG eſt l'inclinaiſon du plan AB à l'horizon, & KIA eſt l'inclinaiſon de la puiſſance à l'égard du plan AB ; donc *dans l'équilibre ſur le plan incliné*, *la puiſſance eſt au poids*, *comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan à l'horizon*, *eſt au coſinus de l'inclinaiſon de la puiſſance à l'égard du plan.*

700. De-là on peut conclure que deux puiſſances Q & R (*fig.* 135) pour être également capables de ſoutenir un même poids en équilibre ſur un même plan incliné, doivent être réciproquement proportionnelles au coſinus des angles que leurs directions forment avec la longueur de ce plan.

En effet, puiſque Q peut faire équilibre au poids P, on a $Q : P :: \sin. ABG : \cos. SKB$. Par la même raiſon, puiſque R eſt capable de faire équilibre à P, on a $P : R :: \cos. RIA : \sin. ABG$; multipliant ces deux proportions, on a $Q : R :: \cos. RIA : \cos. SKB$.

701. De ce que (695) $Q : P : H$ (*fig.* 136) $:: \sin. ECD : \sin. FCD : \sin. ECF$, on conclut

$Q : P :: \textit{fin.}\ ECD : \textit{fin.}\ FCD$; ou $:: \textit{fin.}\ HCP : \textit{fin.}\ HCQ$; donc si connoissant le poids P, la puissance Q, & l'angle HCP que la direction du poids P fait avec la perpendiculaire au plan, on veut déterminer celui que la direction de la puissance Q doit faire avec la même perpendiculaire, on l'aura facilement par cette proportion, qui donne $\textit{fin.}\ HCQ = \frac{P \times \text{fin.}\ HCP}{Q}$. Mais (*Géom.* 279) quand on détermine un angle par son sinus, on n'est pas fondé à prendre pour valeur de cet angle, l'angle même qu'on trouve par les Tables, plutôt que son supplément : donc le même poids peut être soutenu sur le même plan, par la même puissance dirigée de deux manières différentes. Ces deux directions doivent donc être telles que les deux angles HCQ, HCQ qu'elles formeront avec la perpendiculaire CH, soient supplément l'un de l'autre ; or si l'on prolonge la perpendiculaire HC, vers I, le plus grand de ces deux angles HCQ, est supplément de QCI; donc puisqu'il doit aussi être supplément du plus petit angle HCQ, il s'ensuit que QCI, & le plus petit angle HCQ, sont égaux ; donc *les deux directions suivant lesquelles une même puissance peut soutenir un même poids, sur un même plan, sont également inclinées à l'égard de la perpendiculaire à ce plan, & par conséquent à l'égard de ce plan* ; & elles tombent toujours toutes deux du côté de la perpendiculaire au plan, opposé à celui où se trouve la direction de la pesanteur du corps.

702. Dans la même proportion $Q : P :: \textit{sin.}\, HCP : \textit{sin.}\, HCQ$, si l'on met au lieu de l'angle HCP, l'inclinaison ABG du plan, qui est égale à cet angle, ainsi qu'il est aisé de le voir, puisque ces deux angles sont complément des angles opposés au sommet BRP, CRH, on aura $Q : P :: \textit{sin.}\, ABG : \textit{sin.}\, HCQ$, & par conséquent $Q = \frac{P \times \text{sin.}\, ABG}{\text{sin.}\, HCQ}$. Donc l'inclinaison du plan, & le poids restant les mêmes, la puissance Q doit être d'autant plus petite que le sinus de son inclinaison à l'égard de la perpendiculaire est plus grand; donc puisque le plus grand de tous les sinus est celui de 90°, on peut dire que *la direction selon laquelle une puissance a le moindre effort à faire pour soutenir un poids sur un plan incliné, est la direction parallèle à ce plan.*

703. Dans ce cas, la proportion $Q : P :: \textit{sin.}\, ABG : \textit{sin.}\, HCQ$ devient $Q : P :: \textit{sin.}\, ABG : 1$, ou au rayon. Or si du point A (*fig.* 137) on abaisse la perpendiculaire AL sur l'horizontale BG; dans le triangle rectangle ALB, on a $\textit{sin.}\, ABG : 1 :: AL : AB$; donc $Q : P :: AL : AB$; c'est-à-dire, que *lorsque la puissance est parallèle au plan, elle est au poids, comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

704. Si la direction de la puissance étoit horizontale (*fig. 138*) l'angle HCQ seroit égal à l'angle BAL, ainsi qu'il est aisé de le voir ; on auroit donc alors $Q : P :: \sin. ABG$ ou $\sin. ABL : \sin. BAL$; c'est-à-dire (*Géom.* 303) $:: AL : BL$; donc *quand la direction de la puissance est parallèle à la base du plan incliné, la puissance est au poids, comme la hauteur du plan est à la base.*

705. En général, la proportion $Q : P :: \sin. ABG : \sin. HCQ$ (*fig. 134*) fait voir que la puissance sera toujours d'autant plus petite, que l'inclinaison du plan à l'horizon sera plus petite, & qu'en même temps, l'inclinaison de la puissance au plan sera plus petite ; car plus cette dernière inclinaison sera petite, & plus l'angle HCQ qui en est le complément, approchera de 90°.

706. Nous n'avons rien dit du point où la direction de la puissance doit être appliquée au corps. Ce point n'est déterminé par aucune autre condition, sinon que la direction de la puissance rencontre la verticale menée par le centre de gravité du corps, en un point d'où la perpendiculaire menée sur le plan, ait les conditions mentionnées (689 *& suiv.*). C'est par-là qu'on verra qu'une sphère homogène, ou d'une matière uniforme, ne peut être soutenue sur un plan incliné, que lorsque la direction de la force

qui doit la soutenir, passe par son centre de figure qui est en même temps son centre de gravité.

707. Si au lieu d'opposer une seule puissance à l'action du poids, on en opposoit plusieurs ; alors tout ce que nous venons de dire de la puissance Q, devroit s'entendre de la résultante de ces puissances.

Par exemple, si le corps P (*fig. 139*) est soutenu sur le plan incliné par l'action combinée d'une puissance R & de la résistance d'un point fixe B auquel est appliquée la corde BOR qui embrasse ce corps; on imaginera par le point de concours S des deux cordons BH, RD, une ligne SC qui divise en deux parties égales l'angle des deux cordons BH, RD. Si cette ligne coupe la verticale menée par le centre de gravité de P, en un point C, duquel on puisse abaisser sur le plan, une perpendiculaire qui passe par le point d'attouchement H, l'équilibre sera possible ; & le rapport du poids P, à l'effort suivant SC, sera déterminé par ce qui précède. Quant au rapport de l'effort suivant SC, à la puissance R, il sera le même que dans la poulie mobile (584). Ainsi, si la puissance R est parallèle au plan, le poids P sera à la puissance R, comme la longueur du plan est à la moitié de sa hauteur ; c'est-à-dire, que la puissance sera moitié moindre que si elle soutenoit sans le secours du point fixe B.

708. A l'égard de la preſſion totale qui s'exerce ſur le plan, elle ſera toujours facile à déterminer, par les rapports, que nous venons d'établir. Quant aux preſſions particulières qui en réſultent ſur chacun des points par leſquels le corps repoſe ou appuie ſur le plan, elle eſt abſolument indéterminée, ſi ce n'eſt dans le cas où le corps ne touche que par deux points : alors la preſſion totale ſe diſtribue à ces deux points, en raiſon inverſe des diſtances de ſa direction à ces deux mêmes points. Dans tout autre cas, il n'y a d'autres conditions pour les déterminer, ſinon 1°. que leur ſomme ſoit égale à la preſſion totale. 2°. Que la ſomme de leurs momens pris par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de cette preſſion totale, ſoit zéro ; & qu'il en ſoit de même de la ſomme des momens par rapport à un autre axe perpendiculaire au premier, ces deux axes paſſant d'ailleurs par un point de la direction de la preſſion totale. Ainſi quand un corps repoſe ſur un plan par une ſurface plane, il n'y a aucune raiſon pour ſuppoſer que tous les points ſur leſquels il repoſe, éprouvent des preſſions égales, ſi ce n'eſt lorſqu'il a la figure d'un priſme ou d'un cylindre droit.

709. Si la puiſſance qui retient le poids *P*, (*fig. 140*) en équilibre ſur le plan *AB*, eſt un autre poids *Q* repoſant auſſi ſur un plan incliné *AC*, &

tirant à l'aide de la corde MN; on trouvera facilement le rapport de ces deux poids, par ce qui a été dit (696).

En effet, la tenſion du cordon MN, faiſant équilibre au poids P, ſi du point A on mène AD perpendiculairement à MN, on doit (696) avoir $P : T :: BD : AD$, en nommant T cette tenſion. Mais la tenſion du cordon, de M vers N, eſt la même que ſa tenſion de N vers M, laquelle faiſant équilibre au poids Q, donne $T : Q :: AD : CD$. Multipliant ces deux proportions, on a $P : Q :: BD : CD$; c'eſt-à-dire, que ces deux poids ſont en raiſon des parties de la baſe BC, ſéparées par la perpendiculaire menée du ſommet commun des deux plans ſur la direction du cordon.

710. Si la corde paſſoit ſur une poulie, comme on le voit (*fig. 141*), on trouveroit le rapport des deux poids, par ce qui a été dit (699).

En effet, menons du point A la perpendiculaire AD ſur la baſe, & les lignes AE, AF parallèles aux deux cordons & terminées par les lignes DE, DF, perpendiculaires aux deux plans AB, AC. Nommant T la tenſion du cordon, on aura (699) $T : P :: \text{ſin.} ABC : \text{coſ.} BAE :: \text{ſin.} ADI : \text{ſin.} AEI$. ou $\text{ſin.} AED$. Car $ADI = ABD$, & BAE eſt

l'inclinaiſon

l'inclinaison du cordon GP au plan AB. Or (*Géom.* 303) *sin.* ADI : *sin.* AED :: $AE : AD$; donc $T : P :: AE : AD$.

Par la même raison, & à cause de l'égalité de tension des deux cordons GP, GQ, on aura $Q : T :: AD : AF$; donc multipliant ces deux proportions, on aura $Q : P :: AE : AF$.

711. A l'égard des corps qui appuient sur plusieurs plans à la fois, soit en vertu d'une force unique, soit en vertu de plusieurs forces dans lesquelles nous comprenons leur pesanteur, la loi générale de leur équilibre est 1°. que la résultante de toutes ces forces puisse être décomposée en autant de forces qu'il y a de points par lesquels le corps appuie & qui passent par ces points; 2°. que celles-ci soient perpendiculaires au plan qui touche le corps en ce point.

De-là on conclura que pour qu'un corps qui n'est sollicité que par sa pesanteur, demeure en équilibre entre deux plans inclinés, il faut qu'il y ait dans la verticale qui passe par son centre de gravité, au moins un point duquel on puisse abaisser, sur chacun de ces plans, une perpendiculaire; & que chacune de ces perpendiculaires ait les conditions mentionnées (689 & *suiv.*). Que par conséquent si l'un des deux plans est horizontal (*fig.* 142), le corps ne peut demeurer en équilibre (abſtraction faite du frottement) que dans le ſeul cas où la verticale menée par ſon centre de gravité paſſeroit par quelqu'un des points où il touche le plan horizontal, ou du moins dans le cas où tous ces points ne ſe trouveroient pas tous d'un même côté de cette verticale, & alors l'autre plan n'a rien à ſoutenir.

712. Ces principes ſuffiſent pour déterminer les conditions de l'équilibre à l'aide des plans, dans toutes les circonſtances. C'eſt par-là qu'on peut expliquer la force des voûtes, & en général, pourquoi les corps creux & dont la ſurface extérieure eſt convexe, ont plus de force pour réſiſter à la compreſſion, que ſi leur ſurface étoit plane.

Par exemple, ſi un corps eſt composé de quatre parties *ABCD*, *CDFE*, *FEGH*, *ABGH* (*fig.* 143) parfaitement dures, dont les courbures extérieures & intérieures ſoient circulaires & concentriques; & que ſuivant des directions tendantes au centre, on applique au centre de gravité de chaque partie, une même force; jamais, quelle que ſoit cette force, ces parties ne ſe ſépareront les unes des autres. Car il eſt facile de voir que la force appliquée à chaque partie pourra toujours être cenſée décomposée en deux autres, perpendiculaires aux deux faces planes de cette partie; & alors on verra que d'une partie à ſa voiſine, il y a toujours deux forces égales & directement oppoſées, qui par conſéquent ſe détruiſent; enſorte que toutes ces forces ſe font mutuellement équilibre.

Pareillement, si *EFGB*, *ABCD*, *HCKI* (*fig.* 144) représentent trois voussoirs consécutifs, ou trois parties consécutives d'une voûte, on peut toujours imaginer de quelque point de la verticale menée par le centre de gravité de chacun, une perpendiculaire sur chacune des deux faces de ce voussoir, & comme il y a plusieurs points propres à remplir cette condition, il y en aura toujours un qui sera tel, que la perpendiculaire menée sur une face sera directement opposée à la perpendiculaire menée sur cette même face, par quelque point de la verticale appartenant au voussoir voisin ; or en donnant à chaque voussoir, un poids suffisant, on pourra toujours rendre égales les deux forces dirigées suivant ces perpendiculaires, & par conséquent mettre ces voussoirs en équilibre ; il n'y a que les deux voussoirs, dont une des faces sera horizontale, pour lesquels cette décomposition n'aura pas lieu, & qui pour être retenus, exigeront une résistance horizontale.

713. Parlons maintenant du mouvement sur les plans, & en faisant encore abstraction du frottement.

Un corps qui est abandonné à sa propre pesanteur, & qui appuie une partie de sa surface sur un plan sans frottement, peut, généralement parlant, prendre deux sortes de mouvement ; l'un qui sera commun à toutes les parties, & par lequel le centre de gravité glissera parallèlement au plan, & pourra aussi s'approcher ou s'éloigner du plan ; l'autre par lequel toutes les parties tourneront autour de leur centre de gravité, de manière cependant, que le corps touche toujours le plan en quelque point.

714. La règle générale pour ſavoir ſi le corps prendra, ou ne prendra pas quelque mouvement de rotation, en vertu de ſa peſanteur, eſt d'examiner ſi la perpendiculaire menée du centre de gravité, ſur le plan, rencontre quelqu'un des points par où le corps touche, ou ne les laiſſe pas tous d'un même côté. Si cette condition a lieu, il n'y aura pas de mouvement de rotation; parce que la peſanteur qui peut toujours être cenſée agir au centre de gravité même, pourra toujours y être décompoſée en deux forces l'une parallèle au plan, l'autre perpendiculaire à ce même plan. Or la ſeconde ayant les conditions requiſes (689 & *ſuiv.*) pour l'équilibre ſera néceſſairement détruite. A l'égard de la première, puiſqu'elle paſſe par le centre de gravité, elle doit ſe diſtribuer également à toutes les parties qui n'auront par conſéquent, que des viteſſes égales & parallèles au plan. Ainſi, pour le dire en paſſant, une ſphère homogène poſée ſur un plan incliné, y deſcendroit en gliſſant, & non en roulant, s'il n'y avoit point de frottement; parce que la perpendiculaire menée de ſon centre de gravité ſur le plan, rencontre toujours la ſurface de cette ſphère, au point où celle-ci touche le plan.

715. Mais ſi la perpendiculaire menée du centre de gravité ſur le plan, ne rencontre aucun des points par leſquels le corps touche le plan; & ſi en même

temps, elle les laisse tous d'un même côté ; alors il y aura mouvement de rotation ; parce que la résistance du plan qui s'exerce suivant la perpendiculaire au point de contact (ou suivant la perpendiculaire qui passe entre les points de contact, lorsqu'il y en a plusieurs) équivaut à une force qui pousseroit le corps suivant une direction parallèle & en sens contraire à celle selon laquelle il presse le plan ; & comme, par la supposition, elle s'exerce suivant une ligne qui ne passe pas par le centre de gravité, elle ne peut manquer (290) de faire naître un mouvement de rotation.

De la Vis.

716. La *vis* AB (*fig.* 145 & 146) est un cylindre revêtu extérieurement d'un relief dont l'inclinaison à l'égard de l'axe AB de ce cylindre, est par-tout la même.

L'*écrou* est le solide XZ que traverse la vis, & dont l'intérieur est creusé ou sillonné de la même manière que la vis est revêtue à l'extérieur ; ensorte qu'il est exactement le moule de la partie de la vis qu'il embrasse.

717. Tantôt l'écrou est fixe, & la vis doit en tournant, passer successivement tous ses filets à travers l'écrou : tantôt c'est la vis qui est fixe, & l'écrou doit,

en tournant, parcourir toute la longueur de la vis. Quel que soit celui des deux cas qui ait lieu; tant que la puissance est appliquée à la même distance de l'axe de la vis, il y aura toujours même rapport entre cette puissance, & l'effort qu'elle est capable de faire dans le sens de l'axe, effort qui est celui que l'on considère principalement, dans la vis.

L'intervalle d'un filet de la vis, au filet voisin, est ce qu'on appelle la *hauteur du pas de la vis*; ainsi *DE* (*fig.* 146) est la hauteur du pas de la vis, ou simplement, le pas de la vis.

718. On peut prendre une idée assez exacte de la vis en se représentant son relief, comme formé par l'enveloppement successif des hypothénuses *CK* (*fig.* 147) d'autant de triangles rectangles *CIK* qu'il doit y avoir de pas; chaque triangle aura pour hauteur, la hauteur *CI* du pas; & sa base *IK* aura pour longueur la circonférence de la section cylindrique qui répond au point *I*; ensorte qu'à mesure que le filet deviendra plus épais, *IK* aura plus de longueur, la hauteur *CI* restant la même.

Dans la *figure* 146 où le relief des spires forme un tranchant; à mesure que le relief épaissit, il faut concevoir que la base *IK* (*figure* 147), augmente, & que la hauteur *CI* diminue.

719. La vis AB (*fig. 145*) étant fixe, & dans une ſituation verticale, concevons qu'il n'y a point de frottement, & qu'on abandonne l'écrou à ſa propre peſanteur. Il eſt clair qu'il parcourra en tournant, tous les filets inférieurs de la vis, en gliſſant ſur chacun, comme ſur une ſurface inclinée. Il n'eſt pas moins clair qu'on peut arrêter cet effort en appliquant, à l'écrou XZ, une puiſſance que l'on peut, d'ailleurs, ſuppoſer dirigée de pluſieurs manières différentes. Mais comme il eſt évident que l'écrou n'aura aucun mouvement ſi on l'empêche ſeulement de tourner, bornons-nous à chercher quel doit être le rapport entre le poids de l'écrou, ou en général, entre la force qui le pouſſeroit parallèlement à l'axe de la vis, & la force qui peut l'empêcher de tourner. Ne conſidérons d'abord que l'un des points de l'écrou, qui repoſe ſur l'un des points du filet de la vis.

La force qui agit immédiatement ſur ce point, pour l'empêcher de tourner, & celle qui tend à le faire deſcendre parallèlement à l'axe, doivent être regardées comme ſe faiſant équilibre ſur un plan incliné qui a pour hauteur la hauteur du pas de vis; & pour baſe, la circonférence qui a pour rayon la diſtance de ce point à l'axe. C'eſt une ſuite de la génération que nous venons de donner de la vis. Or de ces deux forces, la première eſt parallèle à la baſe de ce plan incliné, & la ſeconde lui eſt perpendiculaire; donc d'après ce qui a été dit (704), on voit que la partie de force parallèle à l'axe de la vis, qui s'exerce ſur un point quelconque du filet, eſt à la force qu'il faudroit appliquer immédiatement à ce point pour l'empêcher de tourner, & dans le ſens contraire à cette rotation, comme la baſe de ce plan incliné, eſt à ſa hauteur; c'eſt-à-dire, comme la circonférence qui a pour rayon la diſtance de ce point à l'axe, eſt par rapport à la hauteur du pas de la vis.

Donc ſi l'on appelle f, la première force; t, la ſeconde; r la diſtance du point dont il s'agit, à l'axe; h la hauteur du pas de vis, & qu'on ſuppoſe que $1 : c$ marque le rapport du rayon à la circonférence; ce qui donnera rc pour la circonférence qui a r pour rayon; on aura $f : t :: rc : h$.

Mais comme chaque point de l'écrou n'eſt point ſoutenu immédiatement, & que le tout eſt ſoumis à une ſeule puiſſance Q appliquée à quelque point de l'écrou, dont je ſuppoſe que la diſtance à l'axe ſoit R; il eſt clair (601) que R étant plus grand que r, il faudra pour chaque point, une partie de la force Q d'autant moindre, que la diſtance R ſera plus grande; enſorte que ſi l'on nomme q, la partie de cette force qui à la diſtance R peut faire le même effort que fait t à la diſtance r, on aura $t : q :: R : r$.

Multipliant cette proportion, par la première, on aura $f : q :: cRr : hr :: cR : h$. C'eſt-à-dire, que pour chaque point de l'écrou, appuyant ſur le filet de la vis, il y a toujours même rapport entre la force qui le pouſſe parallèlement à l'axe de la vis, & celle qui, à une diſtance donnée R, l'empêcheroit de tourner; & ce rapport eſt celui de cR à h; or cR eſt la circonférence que décriroit la puiſſance Q en tournant. Concluons donc que la ſomme de toutes les forces f qui pouſſent l'écrou parallèlement à l'axe de la vis, eſt à la ſomme de toutes les puiſſances q néceſſaires pour l'empêcher de tourner, c'eſt-à-dire, que la force totale (que j'appelle F) parallèle à l'axe de la vis, eſt à la force Q qui empêcheroit l'écrou de tourner par l'effet de la première force, comme la circonférence que tend à décrire cette puiſſance Q, eſt à la hauteur du pas de la vis.

720. Donc auſſi la force qu'il faudroit employer parallèlement à l'axe de la vis, pour empêcher la puiſſance Q de faire tourner l'écrou, doit être à cette puiſſance Q, comme la circonférence que tend à décrire cette dernière, eſt à la hauteur du pas de la vis.

721. Donc ſur une même vis, l'effet de la puiſſance Q ſera d'autant plus conſidérable, que cette puiſſance ſera appliquée plus loin de l'axe. Et ſur des vis différentes, la puiſſance étant également éloignée de l'axe, ſon effet ſera d'autant plus conſidérable, que la hauteur du pas de la vis ſera plus petite, c'eſt-à-dire, que plus les ſpires de la vis ſeront ſerrées, & plus la puiſſance aura d'effet pour comprimer dans le ſens de l'axe.

722. La vis eſt donc, ainſi qu'on le voit, une machine compoſée, qui participe du plan incliné & du levier. On l'emploie utilement pour comprimer les corps. Le frottement modifie, ſans doute, beaucoup les effets que cette machine devroit avoir, en conſéquence du rapport que nous venons d'établir; on ne doit donc regarder le rapport que nous venons d'établir, que comme déterminant la limite des effets de cette machine.

723. Ce que la puiſſance gagne du côté de la force, elle le perd dans cette machine, comme dans toute autre, du côté de la vîteſſe. En effet, pour que l'écrou parcoure un des pas de la vis, il faut que la puiſſance faſſe un tour entier.

724. Au reſte ce déſavantage, ſi c'en eſt un, eſt inévitable. Mais on l'emploie utilement, dans pluſieurs occaſions. Lorſqu'il s'agit, par exemple, de meſurer les différentes parties

d'un très-petit espace AB (*fig. 148*), on le peut faire avec succès, en faisant parcourir cet espace, à l'extrémité E d'une vis DE dont les pas soient bien égaux. Si cette vis porte, à son autre extrémité, une aiguille qui entraînée d'un mouvement commun avec la vis, parcourt successivement les divisions d'un cadran que celle-ci traverse, on pourra, après avoir éprouvé quel nombre de tours doit faire l'aiguille pour que le point E parcoure la longueur connue AB, déterminer ensuite, par le nombre de tours & portions de tour que cette aiguille sera obligée de faire pour que le point E parcoure une partie quelconque de AB; déterminer, dis-je, la vraie mesure de cette partie, si petite qu'elle soit.

725. L'application de la vis, aux autres machines, peut en augmenter beaucoup l'effet. Par exemple, si la puissance Q appliquée à la manivelle DEQ (*fig. 149*) fait tourner la vis AB, dont les spires mènent les dents de la roue M, & l'obligent de tourner; & que celle-ci entraîne avec elle un cylindre qui, en tournant, force la corde KP de s'envelopper : voici comment on déterminera le rapport de la puissance Q, au poids P.

En appelant L l'effort que le filet de la vis fait sur la dent L, on aura $Q : L :: AB : CirDE$, AB étant la hauteur du pas, & $CirDE$ marquant la circonférence que décriroit la puissance Q (719). L'effort L, est une puissance qui, appliquée à la circonférence de la roue, fait effort contre le poids;

ainsi (676) on a $L : P :: IK : IL$; donc en multipliant ces deux proportions, on a $Q : P :: AB \times IK : IL \times Cir DE$; proportion qui fait voir que Q aura d'autant plus d'avantage, que AB & IK seront plus petits, à l'égard de $Cir DE$ & IL.

Du Coin.

726. Le coin $ADECB$ (*fig.* 150) est un prisme triangulaire que l'on introduit dans une fente IZR déja commencée, ou, en général, entre deux surfaces, pour augmenter cette fente, ou pour écarter davantage ses faces, ou enfin pour les fixer à une ouverture déterminée.

727. La théorie du coin considéré comme instrument à fendre, est encore très-imparfaite, & le sera probablement encore long-temps. Comme il n'est pas de corps qui n'ait une certaine flexibilité, les parties de la fente que touchent les faces du coin peuvent être écartées davantage sans que pour cela le point Z où se termine la fente, change de place ; ensorte qu'une partie de la force appliquée à la tête $ADEC$ du coin, est uniquement employée à fléchir les deux branches séparées par la fente ; & l'autre est employée à tendre les fibres de la partie non entamée.

728. Si les branches ZFG, ZKL étoient inflexibles, & que les fibres qui lient les parties de

ce qui reste à fendre, cédassent toutes en même temps; on pourroit, lorsque la rupture est sur le point de se faire, envisager les choses de cette manière. Concevoir que le corps est actuellement fendu, & substituer, à la résistance de la partie $ZFGV$, & à celle de la partie $ZKLX$, des forces appliquées perpendiculairement à VM, & XS, & à des distances égales à celles où l'effort total de chacune de ces deux résistances s'exerce. Alors pour avoir le rapport de la force P, aux deux résistances M & S qu'opposent les deux parties que l'on veut séparer, voici ce que l'on considéreroit.

729. La force appliquée perpendiculairement à la tête du coin, doit, pour avoir pleinement son effet, rencontrer un appui solide dans la base VX; & par conséquent si le corps n'étoit pas assujetti, & qu'il n'y eût point de frottement, il faudroit que cette force rencontrât perpendiculairement la base, si la base porte sur un plan.

S'il y a du frottement, il ne sera pas indispensable qu'elle soit perpendiculaire à la base; mais il faut qu'elle la rencontre, & qu'elle ne fasse pas avec la base, un angle moindre que celui que nous déterminerons dans peu en parlant du frottement, sans quoi le corps se renverseroit.

Si la base est fixement retenue, par un point, alors il faut que la direction de la force perpendiculaire à la tête du coin, passe par ce point. Ces conditions supposées, voici comment s'exerce l'action de la force *P*.

730. Pour que la force *P* se communique aux deux branches *ZFG*, *ZKL*, il faut, en supposant qu'il n'y eût pas de frottement, qu'il y ait sur sa direction au moins un point *O* duquel on puisse abaisser une perpendiculaire sur chaque face de la fente, & qui passe par quelqu'un des points où cette face est touchée par celle du coin. Mais s'il y a du frottement, cette condition n'est pas nécessaire; il suffit qu'il puisse y avoir dans la direction de la force *P*, un point *O* duquel on puisse mener deux lignes *OR*, *OI* qui passent par les points de contact, & qui n'y fassent point, avec les faces, un angle plus petit que celui du frottement. C'est à ces conditions que la force *P* pourra être pleinement transmise aux deux faces.

731. On voit donc, par ce que nous venons de dire, que les connoissances qu'il faudroit avoir pour déterminer quelles forces on doit employer pour séparer les parties d'un corps, à l'aide du coin, laissent beaucoup d'obscurité sur sa théorie. Contentons-nous donc d'avoir une sorte de limite sur cette théorie, & déterminons le rapport de la puissance *P*, à

chacune des deux résistances M & S, abstraction faite du frottement, & en supposant que la base VX appuie sur un plan.

732. On concevra la force P représentée par OQ, décomposée en deux autres dirigées suivant les perpendiculaires ON, OM, aux deux faces du coin. Ces deux forces feront effort pour faire tourner les deux parties du corps; la première autour de V, la seconde autour de X. Et les résistances M & S dans les deux sens opposés, sont les forces qui s'opposent à ce mouvement de rotation. Menant donc les perpendiculaires VY, XT, sur ON, OM, on regardera MVY, & SXT, comme deux leviers angulaires, dont les appuis sont en V & X.

Cela posé, en nommant I la force suivant ON; on aura $P : I :: OQ : ON$; mais puisque nous supposons la force P perpendiculaire à la tête du coin, & les deux forces ON, OM, perpendiculaires à ses faces, le triangle ONQ, est semblable au triangle ABC, & l'on a $OQ : ON :: AC : AB$; donc $P : I :: AC : AB$. Si l'on nomme M la résistance de la partie $ZFMV$, supposée passer à la distance VM, on aura, par la propriété du levier, $I : M :: VM : VY$. Multipliant ces deux proportions, on aura $P : M :: AC \times VM : AB \times VY$. Et pour l'autre face on trouvera de même $P : S :: AC \times XS : BC \times XT$.

733. Si le corps étoit retenu, il faudroit envisager la chose un peu différemment; mais comme malgré ces considérations, nous n'en serions pas plus avancés sur la véritable théorie du coin, qui tient à des connoissances physiques que nous n'avons point, nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matière. Nous ferons seulement observer qu'il suit de la proportion $P : M :: AC \times VM : AB \times VY$, qu'en général, l'effet du coin sera d'autant plus considérable, que cet instrument sera plus aigu, puisqu'alors AC sera d'autant plus petit par rapport à AB. C'est à cet instrument qu'on doit rapporter l'effet des couteaux, rasoirs, &c., & de tous les instrumens tranchans.

Du Frottement.

734. La surface des corps, même les plus polis, est hérissée d'un très-grand nombre d'éminences ou aspérités, & criblée de plusieurs cavités qu'on appelle *Pores*. Lorsqu'un corps repose sur un autre, les parties saillantes de l'un pénètrent dans les pores ou parties rentrantes de l'autre; & on ne peut dégager les unes des autres, qu'en employant une certaine force.

735. La résistance qui naît de cette propriété des corps, est ce qu'on appelle la force du *frottement*. On distingue deux sortes de frottement: celui qui a lieu,

lieu, lorsqu'une des surfaces doit simplement glisser sur l'autre ; & celui qui a lieu, lorsqu'une des surfaces, ou toutes deux, doivent se mouvoir en tournant ; tel est le frottement des roues, sur le terrein. La résistance provenante de cette seconde espèce de frottement, est beaucoup moindre que la première ; parce que ce mouvement de rotation contribue en partie à dégager les aspérités.

736. Si les éminences dont la surface des corps est couverte, étoient parfaitement dures, & parfaitement liées à la surface, il faudroit, pour vaincre le frottement, soulever la masse. Et si elles étoient parfaitement flexibles, il n'y auroit aucune résistance, aucun frottement. Mais comme elles ne sont ni parfaitement dures, ni parfaitement flexibles, il s'ensuit 1°. que la résistance du frottement vient en partie de la difficulté de fléchir les aspérités, en partie de la nécessité de soulever un peu le corps. 2°. Que les aspérités n'ayant qu'un certain degré d'adhérence à la surface, lorsque la force nécessaire pour faire glisser, surpassera ce degré d'adhérence, les aspérités céderont à cette force, se briseront, & les surfaces s'useront. Ainsi, l'effet du frottement dans les machines, est non-seulement d'absorber une partie de la force motrice, mais encore d'accélérer la destruction des machines.

737. Il paroît très-difficile, pour ne pas dire impossible, d'établir des règles générales suffisamment exactes, pour déterminer le frottement. En effet, on conçoit aisément que cette résistance doit varier selon le tissu & la nature des surfaces, objets susceptibles d'autant de variétés qu'il y a de matières différentes. Elle doit varier selon le degré de dureté des surfaces frottantes, & la flexibilité de leurs aspérités, selon que les parties saillantes seront d'une figure & de dimensions plus ou moins propres à pénétrer dans les pores ; selon que la pression qui applique les surfaces l'une à l'autre, sera plus ou moins grande ; selon que cette pression aura agi plus ou moins long-temps ; car les parties des surfaces ayant toujours une certaine flexibilité, les parties saillantes s'engageront plus ou moins profondément, si par un plus long séjour, elles ont plus le temps d'écarter ou élargir les pores dans lesquels elles tendent à pénétrer.

738. C'est à l'expérience seule qu'il appartient de nous éclairer sur ces faits, de nous apprendre jusqu'à quel point chacune de ces causes contribue à la résistance du frottement. Les connoissances que l'expérience a données jusqu'ici, ne sont point encore ni aussi parfaites ni aussi nombreuses qu'il seroit à desirer : néanmoins elles peuvent être utiles en beaucoup d'occasions. Nous allons les exposer, ainsi que

la méthode de les appliquer au calcul des effets du frottement dans diverſes eſpèces de machines & de mouvemens.

739. 1°. Lorſque les ſurfaces qui doivent gliſſer l'une ſur l'autre ſont de même matière, la réſiſtance du frottement, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt plus grande que lorſqu'elles ſont de matières différentes. Ainſi deux bois de différente eſpèce auront moins de difficulté à ſe mouvoir l'un ſur l'autre, que deux bois de même eſpèce : le fer frottera moins ſur le cuivre, que le fer ſur le fer, ou le cuivre ſur le cuivre.

2°. Plus les ſurfaces ſont raboteuſes, ou moins elles ont été préparées & polies, plus la réſiſtance du frottement eſt grande. On peut donc diminuer cette réſiſtance, en poliſſant les ſurfaces, ou en bouchant autant qu'on le peut, leurs pores, avec quelque matière telle que l'huile, le ſavon, la graiſſe, &c.; en un mot avec quelque matière qui en bouchant les pores, ne faſſe pas contracter une nouvelle adhérence aux ſurfaces.

3°. Quoique l'étendue des ſurfaces ſemble devoir contribuer ſenſiblement à faire varier le frottement; cependant il paroît par un grand nombre d'expériences, que cette étendue n'y contribue que pour très-peu de chose ; ensorte qu'on n'éprouve ; communément, pas plus de difficulté à traîner un corps sur une de ses faces que sur l'autre, quoiqu'elles soient différentes en étendue, pourvu que le poli soit le même. Il faut cependant en excepter les cas où le corps repose par une pointe : alors le frottement est plus considérable, parce que les aspérités s'engagent plus profondément, que lorsque le corps reposant par plusieurs points, il s'en trouve parmi ceux-ci, qui s'opposent à l'enfoncement.

4°. C'est principalement de la pression, que dépend la résistance du frottement, ensorte que cette résistance paroît augmenter proportionnellement à la pression. C'est-à-dire, qu'on éprouve deux fois plus de résistance pour vaincre le frottement, lorsque le corps est deux fois plus pesant, ou lorsque la force qui applique sa surface contre une autre surface, est deux fois plus grande.

5°. Néanmoins, le temps pendant lequel les deux surfaces sont appliquées, soit par leur pesanteur, soit par toute autre force, contribue à faire varier la résistance du frottement ; mais l'expérience n'a pas encore déterminé comment cette résistance augmente eu égard au temps ; d'ailleurs on sent assez que l'augmentation dûe à cette cause doit avoir des limites, & que ces limites varieront ſuivant la nature des ſurfaces frottantes.

6°. Pour les ſurfaces de même matière; frottant ſur une même matière quelconque, lorſque le poli eſt le même, ou que ces ſurfaces ont été préparées également, le frottement eſt ſenſiblement le même; & il eſt une partie déterminée de la preſſion : enſorte que pour certaines matières, il eſt le tiers de la preſſion; pour d'autres, il en eſt le quart, & ainſi de ſuite.

740. La raiſon que l'on donne aſſez ordinairement pour expliquer pourquoi le frottement ne dépend pas de la grandeur des ſurfaces, eſt que ſi le nombre des points de la ſurface frottante eſt plus conſidérable, la force qui preſſe chacun, en eſt d'autant plus petite, & *vice versâ;* chaque éminence pénètre donc d'autant moins ou d'autant plus les cavités : enſorte que s'il y a un plus grand nombre d'éminences à dégager, on n'a à les dégager que d'une quantité d'autant moindre; & par conſéquent, dit-on, il doit toujours y avoir le même effort à faire.

Mais cette concluſion ſuppoſe que l'effort que l'on a à faire pour dégager les parties, eſt proportionnel (à nombre égal) à la quantité dont elles ſont engagées; ſuppoſition qui ne paroît admiſſible que lorsque la quantité dont elles s'engagent, est très-petite, même à l'égard de la profondeur des cavités. Aussi l'expérience ne fait-elle pas voir que le frottement soit bien exactement proportionnel à la pression seule ; le frottement des corps pointus forme une exception qui confirme la remarque que nous faisons. Et la pente que l'on donne au plan ou chantier sur lequel on construit les vaisseaux, forme encore une exception remarquable, puisque pour les mettre en état d'aller à l'eau, cette pente ne va quelquefois qu'à 6 lignes par pied; ce qui est beaucoup au-dessous de ce que l'expérience donne sur la plupart des matières, où cette pente est communément de 15 à 18°. Il y a donc bien lieu de croire qu'ici, les surfaces entrent pour beaucoup dans le frottement.

741. Après ces observations sur ce que l'on sait du frottement, par le secours de l'expérience; voyons comment, lorsqu'une fois on a déterminé la quantité du frottement sur une espèce de matière connue, on peut en conclure l'effet qu'elle produira sur une machine ou sur un mouvement proposé. Nous regarderons le frottement comme proportionnel à la pression seule.

742. Prenons pour premier exemple le poids P (*fig. 151*) posé sur le plan horizontal AB, & tiré par le poids Q, parallèlement à AB. Supposons que

le corps Q n'ait précisément que le poids nécessaire pour mettre le corps P sur le point de glisser. Voyons quel rapport il doit y avoir entre le poids Q & la force du frottement.

Du centre de gravité G du corps P, menons la perpendiculaire GH sur le plan AB. La pesanteur sollicite le corps P, suivant GH, tandis qu'il est sollicité par le corps Q, suivant KD qui rencontre GH en K. Du concours de ces deux forces, il résulte un effort suivant une ligne quelconque KI, qui rencontre en I le plan horizontal; & cet effort doit être détruit, puisqu'on suppose que le corps P n'est que sur le point de se mouvoir. Concevons l'effort suivant KI ou KIZ, appliqué au point I, & décomposé en deux, l'un perpendiculaire au plan, l'autre suivant la direction du plan; il est facile de voir que ces efforts seront absolument les mêmes que ceux qui étoient dirigés suivant KH, & suivant KD. De plus, le premier de ces efforts sera évidemment détruit, du moins s'il rencontre le plan AB en quelque point I qui lui soit commun avec la surface du corps. A l'égard du second, comme il est suivant la direction même du frottement, il ne sera détruit qu'autant qu'il sera précisément égal à la force du frottement; ainsi il faut que Q soit précisément égal à la force du frottement.

743. On voit par-là, comment on peut s'y prendre pour déterminer la valeur du frottement : on prendra successivement pour Q, différens poids jusqu'à ce qu'on en ait rencontré un qui mette le corps P sur le point de se mouvoir.

Mais pour ne point comprendre dans l'évaluation du frottement du corps P, des effets étrangers à celui qu'on cherche ; il faudra avoir soin 1°. que la poulie D soit très-mobile, & que le cordon KDQ soit le plus flexible que faire se pourra. 2°. D'attacher le cordon CD en un point C le plus près de la surface AB qu'il sera possible : la nécessité de cette attention vient de ce que, toutes choses d'ailleurs égales, le point I où l'effort suivant KI rencontre la surface AB, s'approchera d'autant plus de l'extrémité S de la base du corps, & même de tomber hors de cette base, que le point C sera plus élevé au-dessus du plan. Or dans le cas où le point I tomberoit hors de la base, l'effort perpendiculaire au plan n'étant point totalement détruit, il en résulteroit (714) un mouvement de rotation dans le corps. Et le frottement que l'on détermineroit alors, pourroit différer beaucoup de celui qu'on cherche, c'est-à-dire, de celui qui empêche le mouvement pour glisser, puisque le corps tournant alors sur une pointe, éprouveroit un frottement beaucoup plus considérable. Au lieu qu'en prenant le point *C* très-près du plan *AB*, le point *I* sera toujours très-près du point *H*, & l'on aura d'autant moins à craindre que toute la pression ne se rassemble au seul point *S*.

744. Considérons maintenant un poids posé sur un plan incliné, & retenu par le seul effet du frottement. L'action de la pesanteur dirigée suivant la verticale *GZ* (*fig. 152*) qui passe par le centre de gravité *G* du corps *P*, rencontrant en *I* l'un des points de la surface *AB* du plan, doit s'y décomposer en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan, l'autre suivant le plan. Le premier sera détruit si le point *I* n'est pas hors de la base *RS*; & le second pour être détruit, doit être égal à la force du frottement. Or il est facile de voir en formant le parallélogramme *ILZH*, que si *IZ* représente le poids du corps, *IH* sera la pression, & *IL* la force du frottement; donc puisque les triangles semblables *ILZ*, *ABC* donnent $IL : LZ$ ou $IH :: BC : AC$, on voit que la force du frottement doit être à la pression, comme la hauteur du plan est à sa base. On voit pareillement que $IL : IZ :: BC : AB$, c'est-à-dire, que la force du frottement est au poids même du corps, ou, en général, à la force qui sollicite le corps, comme la hauteur du plan est à sa longueur.

745. Ces principes peuvent auſſi ſervir à déterminer le frottement ſur différentes ſurfaces ; on élevera ſucceſſivement le plan AB juſqu'à ce que le corps P ſoit ſur le point de gliſſer ; alors meſurant la hauteur & la baſe, on aura le rapport de la force du frottement à la preſſion. Mais il faudra obſerver d'y employer pour P des corps dont le centre de gravité ſoit très-peu élevé au-deſſus du plan ; afin que le point I où la verticale GZ rencontre le plan, ne ſorte pas hors de la baſe RS, & ne paſſe pas même au point R ; car alors le frottement qu'on auroit à vaincre étant celui d'un corps qui frotte par une pointe, ſeroit beaucoup plus conſidérable que celui dont il s'agit.

746. Par-là, & par ce qui a été obſervé (714) on voit que ce qui a été dit par pluſieurs Auteurs, ſavoir qu'un corps poſé ſur un plan incliné, doit culbuter lorſque la verticale menée par ſon centre de gravité, ne rencontre pas la baſe par laquelle il s'appuie, doit s'entendre du cas où il y a du frottement ; lorſqu'il n'y a pas de frottement, les conditions pour que le corps ſe renverſe, ſont différentes (714).

747. Par ces deux exemples on voit qu'ayant égard au frottement, la condition pour qu'un corps demeure en équilibre ſur une ſurface propoſée, &

de manière à être dans l'état le plus prochain du mouvement, est que la force unique qui agit sur lui, lorsqu'il n'y en a qu'une, ou la résultante de toutes les forces qui agissent sur lui, ait à l'égard de la surface sur laquelle il doit glisser, une inclinaison GIS, ou ZIL (*fig.* 152) telle que l'on ait $IL : LZ$ comme la force du frottement est à la pression; or (*Geom.* 300) $IL : LZ :: 1 : tang.\ LIZ$, 1 étant le rayon des tables; donc l'inclinaison LIZ doit être telle que le rayon soit à la tangente de cette inclinaison, comme la force du frottement est à la pression; donc si une fois on a déterminé le rapport de la force du frottement, à la pression, il sera toujours facile de déterminer quelle inclinaison doit avoir la résultante de toutes les forces qui agissent sur le corps, pour que ce corps soit dans l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement. Dorénavant nous appellerons cet angle LIZ, l'*angle du frottement.* Cet angle est donc différent, suivant les différentes espèces de matières; suivant qu'elles ont été plus ou moins préparées ou polies, &c. Si le frottement est le tiers de la pression, ainsi que cela a lieu, à peu près, dans un assez grand nombre de matières qui ont été passablement applanies, la tangente de LIZ sera triple du rayon; or l'angle dont la tangente est triple du rayon, est de $71° 34'$; ce sera donc là l'angle du frottement pour ces sortes de matières.

748. C'eſt d'après cette obſervation qu'on peut déterminer facilement, dans chaque machine, quel rapport il doit y avoir entre la puiſſance & le poids, dans le cas du frottement, pour que la machine ſoit ſur le point de ſe mouvoir.

749. Prenons d'abord le levier, & ſuppoſons que l'appui eſt un ſimple ſoutien tel qu'on le voit (*fig.* 153). Nous avons vu (606) qu'en pareil cas il ne pouvoit y avoir équilibre, qu'autant que la réſultante DC des deux forces P & Q ſeroit perpendiculaire en C, à la tangente commune de la ſurface du levier, & de celle de l'appui. Dans le cas du frottement, il n'en eſt pas de même ; il faut que la réſultante ſoit encore dirigée du point D, à l'appui C; mais il ſuffit pour l'équilibre que l'inclinaiſon DCA ſoit plus grande que l'angle du frottement, angle que l'on doit, d'ailleurs, déterminer par expérience. Et pour l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement de la part de la puiſſance Q, il ſuffit que l'inclinaiſon DCA ſoit préciſément égale à l'angle du frottement; parce que ſi l'on imagine la force ſuivant DC décompoſée en deux autres l'une perpendiculaire à AB, l'autre ſuivant CA; la force ſuivant CA ſera plus petite que le frottement, dans le premier cas; & lui ſera préciſément égale, dans le ſecond : à l'égard des deux forces P & Q, elles n'en ſeront pas moins

en raiſon inverſe des deux perpendiculaires CK, CL, puiſque leur réſultante doit toujours paſſer par le point C.

750. A l'occaſion de cette queſtion, nous examinerons, en paſſant, l'explication que l'on trouve dans quelques Auteurs, du fait repréſenté par la *figure 154*; voici de quoi il s'agit.

$DFKM$ eſt un ſeau ſuſpendu ſur le bord H de la table LH, par le moyen de deux bâtons BC, AB formant un angle droit en B, dont le premier appuie contre le fond du ſeau, & l'autre contre l'anſe. Lorſqu'on appuie le ſyſtème à l'aide du bâton AB ſur le bord H de la table, ſi on lui donne une diſpoſition telle que le centre de gravité G du ſeau ſe trouve répondre verticalement au point H, le ſeau ne tombe point. La raiſon que l'on en trouve dans quelques Auteurs, eſt qu'alors le poids du ſeau peut être cenſé réuni au point H comme en un point d'appui; & comme le point H eſt ſuppoſé ne pouvoir céder, le ſeau ne doit pas prendre de mouvement.

Il eſt certain que tout le poids du ſeau peut être cenſé réuni en H. Mais on peut toujours le concevoir compoſé de deux forces RH, AH, l'une perpendiculaire à AB, & l'autre ſelon cette direction. Il eſt inconteſtable que l'effort HR ſera détruit; mais l'effort AH, ne peut l'être qu'autant qu'il y aura un frottement ſuffiſant. Ce fait eſt donc un effet du frottement, & non pas une ſuite néceſſaire de ce que la verticale GC paſſe par le point H. Car ce fait peut avoir ou ne pas avoir lieu ſelon le rapport du poids du ſeau, à la force du frottement.

Au reſte, comme ce fait n'eſt que de pure curioſité, nous ne nous y ſerions point arrêtés, s'il ne fourniſſoit un exemple ſimple de la différence des conditions de l'équilibre dans le cas du frottement & hors de ce cas.

751. Mais ſi le point d'appui eſt tel que le levier ne puiſſe prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation ; c'eſt-à-dire, ſi le levier eſt traverſé par un axe, eſſieu, ou boulon ; alors on ſe conduira de la manière ſuivante qui eſt commune à ce levier, à la poulie, & au treuil, du moins quand on ſuppoſe dans ce dernier que le poids & la puiſſance ſont dans un même plan : nous allons appliquer au treuil ce dont il s'agit ; on verra enſuite facilement, comment cela s'applique au levier & à la poulie.

752. Soient donc (*fig.* 155) HFI le plan de la roue; GKL la ſection du cylindre; DNM celle de l'axe autour duquel toute la machine doit tourner. Dans le cas où il n'y auroit pas de frottement, il faudroit que la réſultante des deux puiſſances P & Q, qui paſſe néceſſairement par leur point de concours A, paſsât auſſi par le centre C de l'axe. Mais s'il y a du frottement, la machine pourra demeurer en équilibre tant que la direction de la réſultante, que je ſuppoſe être AD, ne fera point avec la ſurface NDM, c'eſt-à-dire, avec la tangente au point où AD rencontre cette ſurface, un angle plus petit que l'angle du frottement. C'eſt ce qu'on verra facilement

en imaginant cette force décomposée en force perpendiculaire à la tangente en D, & force suivant cette tangente.

Cela posé, puisque AD est la direction de la résultante, on aura (201), $Q : P :: \sin. GAD : \sin. DAF$, c'est-à-dire, en imaginant AC, $:: \sin.(GAC + CAD) : \sin.(CAF - CAD)$. Or 1°. si l'on mène CE perpendiculaire sur AD, dans le triangle rectangle CED, l'angle CDE est le complément de l'angle que AD fait en D avec la surface NDM; il est par conséquent censé connu. Ainsi si l'on appelle f, l'angle du frottement, il sera le complément de f. Et si l'on appelle r', le rayon CD de l'essieu, on aura $CE = r' \cos. f$, en supposant le rayon des tables égal à 1. 2°. Comme les directions de P & de Q sont censées connues, ainsi que les dimensions de la machine, les angles GAC, CAF & la distance AC, sont tous censés connus. Ainsi, dans le triangle rectangle CAE, où l'on connoît AC, & $CE = r' \cos. f$, il sera donc facile de calculer l'angle CAE; je le nomme e; & je nomme a & b, les angles GAC, CAF; alors on a donc $Q : P :: \sin.(a + e) : \sin.(b - e)$. Et par conséquent $Q = \frac{P \sin.(a+e)}{\sin.(b-e)}$; c'est-là la valeur de la puissance, dans le cas du frottement.

753. A l'égard des angles a, b & e, voici comment on les déterminera.

Soit r le rayon CG du cylindre, R celui CF de la roue, r' celui CM de l'essieu; A l'angle compris entre la direction AQ de la puissance & la direction AP du poids.

En considérant AC comme rayon, CG, CF & CE sont les sinus des angles CAG, CAF & CAD. On a donc $r : R :: \textit{sin}.\, a : \textit{sin}.\, b$ ou $:: \textit{sin}.\, a : \textit{sin}.\,(A - a)$, & CE ou $r' \textit{cos}.\, f : CG$ ou $r :: \textit{sin}.\, e : \textit{sin}.\, a$; donc $\textit{sin}.\, e = \frac{r'}{r}\, \textit{sin}.\, a\, \textit{cos}.\, f$; & $r\, \textit{sin}.\,(A - a) = R\, \textit{sin}.\, a$. Donc dès qu'on connoîtra a, on connoîtra e par l'équation $\textit{sin}.\, e = \frac{r'}{r}\, \textit{sin}.\, a\, \textit{cos}.\, f$, & b par l'équation $b = A - a$.

Or pour avoir a, l'équation $r\, \textit{sin}.\,(A - a) = R\, \textit{sin}.\, a$, donne (*Géom.* 286) cette autre équation $r\, \textit{sin}.\, A\, \textit{cos}.\, a - r\, \textit{sin}.\, a\, \textit{cos}.\, A = R\, \textit{sin}.\, a$; d'où l'on tire $\frac{\text{sin}.\, a}{\text{cos}.\, a}$ ou $\textit{tang}.\, a = \frac{r\, \text{sin}.\, A}{R + r\, \text{cos}.\, A}$.

754. Pour donner un exemple, supposons que l'angle A soit de 50 degrés; que le rayon de la roue soit de 6 pieds; celui du cylindre, de $\frac{1}{2}$ pied; & celui de l'essieu, de 1 pouce ou $\frac{1}{12}$ de pied; que le frottement soit le tiers de la pression; c'est-à-dire (747), que le rayon des tables est à la tangente de l'angle f du frottement, $:: 1 : 3$; on trouvera donc que l'angle f est de $71^{d}\ 34'$, dont le cosinus est 0,3162.

On

On a donc $cos. f = 0,3162$, $R = 6$, $r = \frac{1}{2}$, $r' = \frac{1}{12}$, & par conséquent $r\,cos. f = 0,02635$. Cela posé, on aura $tang.\, a = \frac{r\,\text{sin.}\,A}{R + r\,\text{cos.}\,A} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,50^d}{6 + \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,50^d} = \frac{\frac{1}{2} \times 0,76604}{6 + \frac{1}{2} \times 0,64279} = \frac{0,38302}{6,32139} = 0,06059$ qui répond à $3^d\,28'$; donc $a = 3^d\,28'$, & par conséquent $b = 46^d\,32'$.

A l'égard de e, on a $sin.\, e = \frac{r'}{r}\, sin.\, a\, cos.\, f$; on a donc $sin.\, e = \frac{\text{sin.}\,a}{r} \times 0,02635 = \frac{0,06047}{\frac{1}{2}} \times 0,02635 = 0,003187$, qui répond à $11'$; donc $e = 0^d\,11'$.

On a donc $Q = P \times \frac{\text{sin.}\,3^d\,39'}{\text{sin.}\,46^d\,21'}$. Supposons P de $1200^{liv.}$, on trouvera donc $Q = 105^{liv.},6$. Mais sans le frottement on auroit $Q : P :: \frac{1}{2} : 6 :: 1 : 12$; donc on auroit $Q = 100^{liv.}$. Donc, dans l'exemple actuel, le frottement n'exige qu'une augmentation de $5^{liv.},6$ dans la puissance.

755. Nous avons supposé, pour déterminer la puissance propre à vaincre le frottement, que la pression totale n'est pas différente de celle qui auroit lieu, si la puissance & le poids n'étoient pas dans un même plan; & cela est ainsi en effet. Voici comment on peut s'en convaincre.

Supposons, pour un moment, que la direction du poids P appliqué à la surface du cylindre (*fig. 156*), au lieu d'être verticale, fût inclinée, peu importe comment; mais pour plus de simplicité, supposons-la telle que IA, c'eſt-à-dire, dans le plan vertical qui paſſe par IP, & qui touche la ſurface du cylindre.

Concevons que A ſoit le point où IA rencontre le plan de la roue ; on pourra donc concevoir la force P appliquée en A ; & que cette force s'y décompoſe en deux autres AB, AD ; la première AB verticale, & dans le plan de la roue ; la ſeconde AD, perpendiculaire au plan de la roue, & qui par conſéquent, étant parallèle à l'axe du cylindre, ne contribuera en rien à la preſſion des appuis. Quant à la force AB, ſa direction prolongée ſera rencontrée en quelque point F par la direction de la puiſſance ; & du concours de ces deux forces, il naîtra la force FO, qui par la condition de l'équilibre devant être détruite, ſera néceſſairement la force abſolue avec laquelle le cylindre eſt porté vers ſes appuis en vertu de la puiſſance Q & du poids P ſuppoſé dirigé ſuivant AE.

Cela poſé, concevons que le point A s'éloigne en s'élevant au-deſſus de l'axe, mais toujours dans le plan IAR. La ligne IA approchera de plus en plus d'être verticale, & la ligne AB approchera auſſi de plus en plus d'être égale à AE ; enſorte que quand le point A ſera infiniment éloigné, la direction de la ligne IA ne différera plus de la direction de PS, & AB ſera parfaitement égale à AE ; donc en effet la force abſolue avec laquelle l'axe eſt porté vers ſes appuis, est la même, lorsque le poids agit en I, que s'il agissoit suivant la ligne AM, c'est-à-dire, dans le plan de la roue.

756. Mais il faut bien se garder d'en conclure que pour avoir la charge particulière de chaque appui, il fût suffisant de décomposer la force FO en deux forces qui lui fussent parallèles, & dont chacune passât par chaque appui. Quoique la force AD ne contribue en rien à charger les appuis, elle contribue néanmoins à transporter le lieu de l'action de la force absolue FO; & quoique dans le cas du parallélisme, la force AD soit infiniment petite; néanmoins, comme dans ce même cas elle est infiniment éloignée, elle transporte l'action absolue FO hors du plan de la roue & de celui dans lequel agit le poids. C'est ainsi (en négligeant cependant la considération qu'ici la force AD & la force FO ne sont pas dans un même plan), c'est ainsi, dis-je, que si le point A (*fig.* 157) étant sollicité par la force AC, il survient une force AB perpendiculaire à la première, mais infiniment petite; la force absolue AE qui en résultera, ne différera pas de AC, sinon d'une quantité infiniment petite, mais le point F où cette force rencontrera la ligne HR, pourra être éloigné d'une quantité finie, du point C où la première direction rencontreroit cette même ligne,

ſi le point A eſt infiniment éloigné ; enſorte que la nouvelle force dirigée ſuivant AF, ſera parallèle & égale à AC, mais en ſera éloignée d'une quantité finie FD.

757. Quant à la diſtribution de la charge à chacun des deux appuis, elle peut avoir pour objet de guider dans l'eſtimation du degré de force qu'on doit donner aux tourillons, & de connoître l'étendue que l'on doit donner à la baſe des montans qui portent le cylindre, afin que la machine ne ſoit pas renverſée.

La manière la plus ſimple pour parvenir à l'un & à l'autre, eſt de décompoſer la puiſſance en deux forces qui lui ſoient parallèles, & dont chacune ſoit dans un plan parallèle à la roue, que l'on concevra par chaque appui.

On décompoſera de même le poids en deux forces qui lui ſoient parallèles, & qui ſoient reſpectivement dans ſes mêmes plans paſſant par les appuis ; chacune de ces décompoſitions donnera par un calcul très-ſimple, chacune des deux forces compoſantes, d'où doit réſulter la preſſion abſolue de chaque appui, puiſqu'il n'y a autre choſe (205) à faire pour calculer, que ces deux proportions ; la puiſſance eſt à la charge qu'elle occaſionne ſur l'un quelconque des deux appuis, comme la diſtance des deux appuis eſt à la diſtance du plan de la roue, à l'appui dont la charge n'eſt pas l'objet de cette proportion; & le poids eſt à la charge qui en réſulte à l'un des deux appuis comme la diſtance des deux appuis eſt à la diſtance du plan dans lequel agit le poids, à l'appui dont la charge n'eſt pas l'objet de cette proportion.

Ayant ainſi déterminé, pour chaque appui, les deux forces compoſantes de ſa preſſion, comme l'angle de ces deux compoſantes eſt évidemment le même que celui que la puiſſance fait avec le poids ſuppoſé dans le plan de la roue, il ſera donc très-facile d'avoir la preſſion totale qui en réſulte à chaque appui, & ſa direction. En voici un exemple.

758. Comme le procédé eſt le même, ſoit qu'il n'y ait pas de frottement, ſoit qu'il y en ait, pourvu dans ce dernier cas, qu'on ait préalablement calculé la puiſſance qui doit avoir lieu dans ce cas, je ſuppoſerai tout de ſuite que les dimenſions du tour étant les mêmes que ci-deſſus, on ait trouvé $Q = 105^{\text{liv.}},6$ comme nous l'avons trouvé en effet (754), P étant ſuppoſé de $1200^{\text{liv.}}$. Je ſuppoſe de plus que la diſtance des appuis ſoit de 8 pieds. Que le plan de la roue ſoit éloigné de l'appui à droite (*fig. 120*) de 1 pied, & par conſéquent de 7 pieds de l'appui à gauche. Que le poids ſoit actuellement à un pied de la gauche de la roue, & par conſéquent à 2 pieds de l'appui à droite, & à 6 pieds de l'appui à gauche.

J'aurai donc les deux forces compoſantes de la preſſion de l'appui à droite, par ces deux proportions. . . . .

$$8 : 7 :: 105^{\text{liv.}},6 : x = 92^{\text{liv.}},4.$$
$$8 : 6 :: 1200^{\text{liv.}} : y = 900^{\text{liv.}}.$$

& les deux composantes de l'appui à droite, par ces deux proportions. . . . .

$$8 : 1 :: 105^{\text{liv.}},6 : x' = 13^{\text{liv.}},2.$$
$$8 : 2 :: 1200^{\text{liv.}} : y' = 300^{\text{liv.}}.$$

Présentement, puisqu'à cause des décompositions en forces parallèles, l'angle des deux composantes x & y, ainsi que celui des deux composantes x' & y', est le même que celui de la direction de la puissance avec celle du poids conçu dans le plan de la roue; en partant toujours de l'exemple cité, cet angle est donc de 50 degrés.

Ainsi concevant (*fig.* 158) le parallélogramme $ABDC$ dont le côté vertical AB soit de 900, & dont le côté AC faisant l'angle BAC de 50 degrés, soit de 92,4; la diagonale AD marquera la pression de l'appui à la droite, & l'angle BAD son inclinaison à l'égard de la verticale.

Pareillement, si le côté vertical $A'B'$ du parallélogramme $A'B'D'C'$ est supposé de 300, l'angle $B'A'C'$ de 50 degrés, & le côté $A'C'$ de 13,2; la diagonale $A'D'$ marquera la charge de l'appui de la gauche, & l'angle $B'A'D'$ son inclinaison à l'égard de la verticale.

Or il est évident que la connoissance de ces quatre quantités, se réduit à calculer le côté AD ou $A'D'$, & l'angle BAD ou $B'A'D'$, du triangle ABD ou $A'B'D'$, dont on connoît deux côtés & l'angle compris. Donc (*Géom.* 310) on trouvera $AD = 962^{\text{liv.}},7$; $BAD = 4^{\text{d}}\,13'$; $A'D' = 319^{\text{liv.}},0$; $B'A'D' = 1^{\text{d}}\,49'$.

759. Dans tout ce qui précède, nous avons négligé le poids du cylindre, de son essieu, de la roue & des cordes. Mais comme ces poids peuvent avoir un rapport sensible avec le poids P qu'on se propose d'élever, ils peuvent contribuer sensiblement à augmenter le frottement. Voici comment on peut y avoir égard.

760. Pour faire entrer dans cette question tous les élémens dont elle dépend, supposons que le centre commun de gravité des deux cordons GP & FQ (*fig.* 159) réponde verticalement à un point de GC ou de son prolongement, qui soit éloigné de C d'une quantité $= g$; que leur poids total soit p ; que le centre commun de gravité des parties de la corde, tant de celle qui peut être appliquée sur la roue, que de celle qui peut être actuellement roulée sur le cylindre, réponde verticalement à un point de GC ou de son prolongement, qui soit éloignée de C, d'une quantité $= g'$, & que leur poids total soit p'. Que P soit le poids qu'il s'agit d'élever ; P' le poids du tour, c'est-à-dire, de la roue, du cylindre & de son essieu, dont je suppose que le centre commun de gravité soit dans l'axe, c'est-à-dire, en C.

Nous avons donc cinq forces qui agissent sur le tour, savoir p, p', P, P' & Q, lesquelles doivent se faire équilibre à l'aide des appuis & du frottement.

Les quatre forces p, p', P & P', étant parallèles, peuvent être réduites à une seule R (219) qui sera $= P + P' + p + p'$, & qui passera à une distance $CR = \frac{P \times CG + pg + p'g'}{P + P' + p + p'} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$, en faisant $P + P' + p + p' = P''$, & nommant CG, r.

Cela posé, concevons que cette force R rencontre la direction de la force Q, en un point A. Il faut donc que du concours de la force R & de la force Q, il résulte une force dont la direction AM rencontre la surface de l'essieu en un point où elle fasse avec cette surface, un angle égal à celui du frottement.

Il est donc évident que pour avoir la solution, eu égard à toutes ces causes, il ne s'agit que de mettre dans la solution ci-dessus (752 & 753), CR au lieu de CG, & $P + P' + p + p'$ ou P'' au lieu de P; c'est-à-dire, de mettre $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$ au lieu de r, & P'' au lieu de P.

On aura donc $Q = \frac{P'' \sin.(a + e)}{\sin.(b - e)}$, & on calculera *tang.* a & *sin.* e par les formules données (753) en mettant $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$ au lieu de r. Et dans les valeurs de r & de R, on observera de comprendre le demi-diamètre de la corde.

761. Si le frottement est nul, on aura l'angle f du frottement, de 90 degrés; c'est-à-dire, que la résultante doit être perpendiculaire à la surface de l'essieu, & passe par conséquent par le centre C; on a donc alors $\cos. f = 0$, & par conséquent $\sin. e = 0$, ou $e = 0$. La valeur de Q se réduit donc à $Q = \frac{P'' \sin. a}{\sin. b}$. Mais en prenant AC pour rayon, on a $\sin. RAC : \sin. CAF$ ou $\sin. a : \sin. b :: CR : CF :: \frac{Pr + pg + p'g'}{P''} : R$; donc $\frac{\sin. a}{\sin. b} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P'' R}$; donc $Q = \frac{Pr + pg + p'g'}{R}$ ou $QR = Pr + pg + p'g'$; c'est-à-dire que le moment de Q est égal à la somme des momens de P & des parties du poids de la corde; ainsi que cela doit être (616) lorsqu'il n'y a pas de frottement.

Et si le poids de la corde est nul, ou $p = 0$, & $p' = 0$, on a $QR = Pr$ ou $Q : P :: r : R$; ce qui s'accorde avec ce qui a été démontré (676).

762. Cette solution convient au levier traversé par un boulon, tel qu'on le voit (*fig.* 99); en y prenant R & r pour les distances des deux puissances à l'axe du boulon.

763. Et puisque la poulie fixe n'est autre chose qu'un tour dans lequel le rayon du cylindre est égal au rayon de la roue; cette solution conviendra donc aussi à la poulie fixe, en y supposant

$R = r$ & $b = a = \frac{1}{2}A$; ensorte que (760) on aura $Q = P'' \frac{\text{sin.}(a+e)}{\text{sin.}(a-e)} = P'' \frac{\text{sin.}(\frac{1}{2}A+e)}{\text{sin.}(\frac{1}{2}A-e)}$, $\text{sin.}\, e = \frac{r'}{r} \text{sin.} \frac{1}{2} A \text{ cos.} f$, en observant qu'au lieu de r, on doit mettre $\frac{Pr+pg+p'g'}{P''}$.

764. Si la puissance Q (*fig.* 159) est verticale, alors les angles RAC, CAE, CAF, pouvant être considérés comme infiniment petits, on peut, au lieu de $\text{sin.}(a+e)$ & $\text{sin.}(b-e)$, écrire $\text{sin.}\, a + \text{sin.}\, e$ & $\text{sin.}\, b - \text{sin.}\, e$; ensorte qu'on aura $Q = P'' \frac{\text{sin.}\, a + \text{sin.}\, e}{\text{sin.}\, b - \text{sin.}\, e}$.

Mais nous venons de voir que $\frac{\text{sin.}\, a}{\text{sin.}\, b} = \frac{Pr+pg+p'g'}{P''R}$, ou $\text{sin.}\, b = \frac{P''R \text{ sin.}\, a}{Pr+pg+p'g'}$. Et en considérant AC comme rayon, on a aussi $\text{sin.}\, a : \text{sin.}\, e :: CR : CE :: \frac{Pr+pg+p'g'}{P''} : r' \text{cos.} f$; d'où $\text{sin.}\, e = \frac{P''r' \text{ sin.}\, a \text{ cos.} f}{Pr+pg+p'g'}$; on a donc alors

$$Q = \frac{P''(\text{sin.}\, a) + \frac{P''r' \text{ sin.}\, a \text{ cos.} f}{Pr+pg+p'g'}}{\frac{P''R \text{ sin.}\, a - P''r' \text{ sin.}\, a \text{ cos.} f}{Pr+pg+p'g'}} = \frac{Pr+pg+p'g'+P''r'\text{cos.} f}{R-r'\text{cos.} f}.$$

765. Donc dans la poulie fixe (*fig.* 160) on a $Q = \frac{Pr+pg+p'g'+P''r'\text{cos.} f}{r-r'\text{cos.} f}$.

766. Soit T la tension du cordon FP; il est évident que $T = P + p''$, p'' étant le poids de ce

cordon. Et comme on a $P'' = P + P' + p + p'$, substituons, pour P & P'', leurs valeurs en T; & nous aurons $Q\,(r - r' \operatorname{cos}. f) = Tr + T r' \operatorname{cos}. f + pg + p'g' + (P' + p + p')\, r' \operatorname{cos}. f - (p'' r + p'' r' \operatorname{cos}. f)$

ou $Q = T\left(\dfrac{r + r' \operatorname{cos}. f}{r - r' \operatorname{cos}. f}\right) - \dfrac{p''\,(r + r' \operatorname{cos}. f)}{r - r' \operatorname{cos}. f}$

$+ \dfrac{pg + p'g' + (P' + p + p')\, r' \operatorname{cos}. f}{r - r' \operatorname{cos}. f} = T\left(\dfrac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}\right)$

$- p''\left(\dfrac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}\right) + \dfrac{\dfrac{pg + p'g'}{r} + (P' + p + p')\, n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}$

en faisant $\dfrac{r'}{r} = n$.

Cette dernière expression nous sera fort utile pour déterminer l'effet du frottement dans les moufles.

767. Pour avoir l'effet du frottement dans la poulie mobile ; voici comment il faut considérer l'équilibre.

Pour que la puissance Q (*fig. 161*) soit sur le point de faire tourner la poulie autour de son essieu ou boulon C, il faut qu'elle reçoive une augmentation qui la mette en état de surmonter le frottement. Or cette augmentation fera que la puissance écartera un peu la chappe CP de sa situation primitive, jusqu'à ce qu'elle ait amené le poids P en un point tel que la verticale conçue par le centre commun de gravité du poids, de la chappe & du boulon, fasse avec la surface de celui-ci, un angle égal à celui du frottement. Concevons que ED soit cette verticale ; nous aurons comme ci-devant (752) $CE = r' \,cof.\, f$, r' étant le rayon du boulon.

Mais la condition que nous venons d'établir ne ſuffit pas pour l'équilibre. Il eſt évident que les tenſions des deux cordons doivent faire équilibre au poids P, à celui de la chappe, à celui du boulon, à celui de la poulie ſans ſon boulon, & enfin à celui de la corde entière.

Suppoſons donc que le centre commun de gravité des deux cordons QG, FT paſſe à une diſtance connue g de la verticale menée par le centre C; que le poids de ces deux cordons ſoit p; que le centre de gravité de la partie de corde appliquée ſur la poulie, paſſe à la diſtance g' de la verticale menée par C, & que le poids de cette partie de corde ſoit p'; que P ſoit le poids composé de celui qu'on doit élever, de celui de la chappe, & de celui du boulon; P' le poids de la poulie ſans le boulon.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la réſultante des poids P, P', p, p' ſoit égale & directement oppoſée à la réſultante des tenſions des deux cordons.

Or il eſt facile de voir (219) que la réſultante des poids P, P', p, p'' ſera $P + P' + p + p''$, que je repréſente par P'', & qu'elle paſſera à une distance $CI = \frac{P \times CE + pg + p'g'}{P''} = \frac{Pr' \text{cos.} f + pg + p'g'}{P''}$; donc la verticale qui passe par I, doit aussi passer par le point de concours O des deux cordons. Et puisqu'il y a équilibre, on doit (201) avoir $Q : P'' : T :: \text{sin.}\ IOT : \text{sin.}\ QOT : \text{sin.}\ QOI$.

Soit a l'angle QOT, e l'angle COI, on aura $QOI = QOC - COI = \frac{1}{2}a - e$ & $IOT = \frac{1}{2}a + e$, donc $Q : P'' : T :: \text{sin.}(\frac{1}{2}a + e) : \text{sin.}\ a : \text{sin.}(\frac{1}{2}a - e)$; & par conséquent $Q = \frac{P'' \text{sin.}(\frac{1}{2}a + e)}{\text{sin.}\ a}$, & $Q = \frac{T \text{sin.} \frac{1}{2}(a + e)}{\text{sin.}(\frac{1}{2}a - e)}$.

768. Quant à l'angle e, on le déterminera facilement, en observant que si on prend AC pour rayon, on a $CG : CI :: \text{sin.}\ COG : \text{sin.}\ COI$; c'est-à-dire, $r : \frac{Pr' \text{cos.} f + pg + p'g'}{P''} :: \text{sin.} \frac{1}{2}a : \text{sin.}\ e$, & par conséquent $\text{sin.}\ e = \frac{Pr' \text{cos.} f + pg + p'g'}{P''r} \text{sin.} \frac{1}{2}a$.

769. Supposons présentement que les cordons sont parallèles, & par conséquent verticaux; l'angle e & l'angle a étant alors infiniment petits, on aura $\text{sin.}\ a = 2\ \text{sin.} \frac{1}{2}a$; $\text{sin.}(\frac{1}{2}a + e) = \text{sin.} \frac{1}{2}a + \text{sin.}\ e$, & $\text{sin.}(\frac{1}{2}a - e) = \text{sin.} \frac{1}{2}a - \text{sin.}\ e$.

Les deux valeurs de Q trouvées ci-dessus, deviendront donc $Q = \frac{1}{2}P''\left(1 + \frac{Pr' \text{cos.} f + pg + p'g'}{P''r}\right) = \frac{1}{2}P''\left(1 + \frac{Pn \text{cos.} f + \frac{pg + p'g'}{r}}{P''}\right)$ en faisant $\frac{r'}{r} = n$;

$\& \; Q = T \left(\frac{P'' + P n \operatorname{cos}. f + \frac{pg + p'g'}{r}}{P'' - P n \operatorname{cos}. f - \frac{pg + p'g'}{r}} \right)$ ou chassant le dénominateur, & transposant $+ (Q - T) P'' - (Q + T) P n \operatorname{cos}. f - (Q + T) \frac{pg + p'g'}{r} = 0.$ Or les cordons étant parallèles, on a $Q + T = P''$; donc toute cette équation est divisible par P'', & donne $Q - T - P n \operatorname{cos}. f - \frac{pg + p'g'}{r} = 0.$ Mais puisqu'on a $Q + T = P''$, on a aussi $Q + T = P + P' + p + p'$; donc $P = Q + T - P' - p - p'$; donc $Q - T - Q n \operatorname{cos}. f - T n \operatorname{cos}. f + (P' + p + p') n \operatorname{cos}. f - \frac{pg + p'g'}{r} = 0$; d'où l'on tire $Q = T \frac{(1 + n \operatorname{cos}. f)}{1 - n \operatorname{cos}. f} - \frac{(P' + p + p') n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f} + \frac{\frac{pg + p'g'}{r}}{1 - n \operatorname{cos}. f}.$

Cette valeur de Q va nous être utile pour les mousles.

Quant à la valeur $Q = \frac{1}{2} P'' \left(1 + \frac{P n \operatorname{cos}. f + \frac{pg + p'g'}{r}}{P''} \right)$, elle sert à trouver Q immédiatement par la connoissance des poids P, p, p'', &c.

770. De-là, & de ce qui a été dit (766) sur la poulie fixe, concluons donc que T étant la plus petite tension, & Q la plus grande, on a, dans le cas des cordons parallèles, pour la poulie fixe, $Q = T \left(\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f} \right) - p'' \left(\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f} \right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} + (P' + p + p') n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}$; & pour

la poulie mobile, $Q = T\left(\frac{1+n\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}\right) +$
$$\frac{\frac{pg+p'g'}{r} - (P'+p+p')\,n\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}.$$

Telles ſont les formules que l'on doit calculer pour avoir la valeur de la puiſſance, eu égard au poids de toutes les parties de la machine.

Si le poids des cordes & des poulies eſt fort petit à l'égard des tenſions des cordons; alors on pourra négliger les termes où entrent les quantités P', p, p' & p'', & l'on aura pour la poulie fixe comme pour la poulie mobile, $Q = T\left(\frac{1+n\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}\right)$, les cordons étant ſuppoſés parallèles.

771. Voyons maintenant à appliquer ces principes aux moufles.

Raiſonnons ſur la *figure 83*; il ſera facile d'appliquer ce raiſonnement à toute autre diſpoſition de poulies.

Nous ignorons quelle eſt la tenſion du cordon 1, & nous la repréſenterons par T. Nous ſuppoſerons que T', T'', T''', &c. repréſentent conſécutivement les tenſions des autres cordons; que n, n', n'', &c. repréſentent auſſi, pour chaque poulie, ce que nous avons repréſenté par n dans la formule.

Cela poſé, on aura pour le rouet embraſſé par les cordons 1 & 2, $T' = T\left(\frac{1+n\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}\right)$.

Pour le rouet embrassé par les cordons 2 & 3,
$T'' = T' \left(\frac{1 + n' \text{cos}. f}{1 - n' \text{cos}. f}\right)$.

Pour le rouet embrassé par les cordons 3 & 4,
$T''' = T'' \left(\frac{1 + n'' \text{cos}. f}{1 - n'' \text{cos}. f}\right)$.

Enfin pour le rouet embrassé par les cordons 4 & 5, celui-ci étant supposé parallèle aux autres,
$T^{\text{IV}} = T''' \left(\frac{1 + n''' \text{cos}. f}{1 - n'' \text{cos}. f}\right)$.

D'où l'on voit que les tensions T', T'', T''', T^{IV}, seront toutes connues, dès qu'on connoîtra la tension T du cordon 1.

Or la condition par laquelle cette tension doit être déterminée, est évidemment que la somme des tensions des cordons 1, 2, 3 & 4, doit être égale au poids P, c'est-à-dire que $T + T' + T'' + T'' = P$.

Il est donc facile de conclure de-là une formule générale pour la valeur de la tension du dernier cordon; c'est-à-dire, de la puissance. Mais comme cette formule ne donneroit rien de plus simple que le procédé que nous allons enseigner, & seroit d'ailleurs moins facile à retenir, nous passons tout de suite à ce dernier.

772. Remarquons donc, que si on substitue succcessivement, dans T'' la valeur de T'; dans T''' celle

de T''

de T'' résultante de cette première substitution; dans T^{IV} celle de T''' résultante de cette seconde substitution, & ainsi de suite; on aura, en général, la tension d'un cordon quelconque exprimée par la tension T du dernier cordon, multipliée par la suite des fractions $\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}$, $\frac{1 + n' \operatorname{cos}. f}{1 - n' \operatorname{cos}. f}$ relatives aux poulies embrassées par toutes les parties de la corde, depuis la première jusqu'à celle dont il s'agit. Donc dans l'équation $T + T' + T'' + T''' + T^{\text{IV}} + \&c. = P$, le premier membre sera T multiplié par la somme de plusieurs fractions dépendantes des dimensions des rouets & de leurs essieux. D'où l'on voit que P venant à changer, T changeroit précisément dans le même rapport, les dimensions de la machine restant les mêmes. Et puisque T', T'', T''', sont toutes aussi exprimées par T multiplié par une quantité différente, pour chacune, à la vérité, mais qui ne varie pas par le changement du poids; T', T'', T''', &c. augmentent donc aussi proportionnellement au poids.

773. D'après cette remarque, nous établissons la règle suivante, pour calculer l'effet du frottement dans les moufles, quel que soit le nombre des poulies; lorsque le poids de la machine peut être considéré comme fort petit à l'égard de celui qu'il s'agit d'élever.

Prenez arbitrairement un nombre quelconque pour représenter la tension de la première branche de corde, c'est-à-dire, *de celle qui est le plus éloignée de la puissance. Calculez successivement la tension de chaque cordon consécutif, à l'aide de l'équation* $Q = T\left(\frac{1 + n\,\text{cos}.\,f}{1 - n\,\text{cos}.\,f}\right)$ *dans laquelle* T *représente la tension supposée connue,* Q *celle qu'il s'agit de trouver,* n *le rapport du rayon de l'essieu à celui du rouet embrassé par ces deux cordes, &* f *l'angle du frottement.*

Ces tensions étant calculées, la dernière seroit la valeur de la puissance qui peut vaincre le frottement, si le nombre qu'on a pris arbitrairement pour la tension du premier cordon, avoit été bien pris.

Faites une somme de celles de ces tensions qui appartiennent à la moufle mobile. Puis faites cette proportion.... La somme de ces tensions résultantes de la supposition qu'on a faite, est à la tension de l'un quelconque des cordons, résultante aussi de cette supposition, comme le poids total, est à un quatrième terme qui sera exactement la tension de ce cordon, & par conséquent la valeur de la puissance, si on a pris pour second terme de la proportion, la tension du dernier cordon.

774. Appliquons cette règle aux moufles de la *figure 83.* Supposons que la première branche de la corde est attachée à la chappe de la moufle supérieure ; que le rayon de chaque essieu est le $\frac{1}{6}$ du rayon de son rouet, & que le frottement n'est que le $\frac{1}{4}$ de la pression. Nous aurons donc $n = \frac{1}{6}$, & (747)

le rayon est à la tangente de l'angle f du frottement : : 1 : 4; d'où l'on trouvera par les Tables, que l'angle f est de $75^d\ 58'$ dont le cosinns ou $cos. f$ est de 0,24249; c'est-à-dire, qu'on a $cos. f = \frac{8}{33}$ à très-peu près. Donc $n\,cos. f = \frac{4}{99}$, & $\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f} = \frac{103}{95}$.

Supposons le poids P de $800^{liv.}$, & prenons arbitrairement pour la tension du premier cordon, $200^{liv.}$ qui seroit sa tension dans le cas où il n'y auroit pas de frottement. D'après ces suppositions, la formule $Q = T\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right)$ donne pour la tension du deuxième cordon, Q ou $T' = 200^{liv.} \times \frac{103}{95} = 216^{liv.},84$.

La même formule, en mettant T' pour T, donne pour la tension du troisième cordon, ou $T'' = 200 \times \frac{103}{95} \times \frac{103}{95} = 200 \times (\frac{103}{95})^2 = 235^{liv.},10$.

Par la même raison, mettant T'' pour T, on a la tension du quatrième cordon, ou $T''' = 200 \times (\frac{103}{95})^2 \times \frac{103}{95} = 200 \times (\frac{103}{95})^3 = 254^{liv.},90$.

Enfin mettant T''' pour T'', on a pour la tension du cinquième cordon, ou pour la puissance Q, dans la supposition actuelle, $Q = 200 \times (\frac{103}{95})^4 = 276^{liv.},37$.

Ajoutons présentement les tensions des cordons 1, 2, 3 & 4, nous aurons $906^{liv.},84$.

Cela posé, conformément à la règle (773), je fais cette proportion, 906,84 : 276,37 : : 800 : à un quatrième terme qui est 243,81; c'est-à-dire, que la puissance Q qui pourra surmonter le frottement, doit réellement être de $243^{liv.},81$ ou $243^{liv.}\,\frac{4}{5}$, & non pas de $276^{liv.},37$ ou $276^{liv.}\,\frac{2}{5}$.

Si dans la même proportion on met pour second terme successivement la valeur de T, celles de T', T'', & T''', on trouvera pour les valeurs véritables, $T = 176^{liv.},44$, $T' = 191^{liv.},29$; $T'' = 207^{liv.},40$; $T''' = 224^{liv.},87$, dont la somme est en effet $800^{liv.}$, c'est-à-dire, égale au poids, ainsi que cela doit être.

775. Mais si les poids des différentes parties de la machine sont comparables aux tensions des cordons, alors il faudra employer les formules générales ci-dessus. Nous allons en donner un exemple sur la chèvre représentée par la *fig. 128*; mais auparavant donnons une nouvelle forme à ces formules.

776. Nous avons trouvé, pour la poulie fixe, $Q = T\left(\frac{1 + n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) - p''\left(\frac{1 + n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r}}{1 - n \text{ cos. } f} + \frac{(P' + p + p')\, n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}$; formule dans laquelle $P' + p + p'$ marque le poids de la corde & celui de la poulie, avec son boulon, ou sans son boulon, selon que celui-ci fait ou ne fait pas corps avec elle; p'' marque le poids du cordon dont on considère la tension; $pg + p'g'$ marque la somme des momens des deux parties de la corde & de l'arc enveloppé, pris par rapport à la verticale qui passe par le centre de la poulie.

Donc si on nomme D la distance du centre de gravité de toute la corde, à cette verticale, on aura $pg + p'g' = (p + p')\, D$.

Donc, en général, si nous représentons par P la somme faite du poids de la poulie (avec son boulon ou sans son boulon, selon que celui-ci fait ou ne fait pas corps avec elle), & du poids de la corde; par p le poids total de la corde; & par q le poids de la branche de corde dont on est censé connoître la tension, on aura $Q = T\left(\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}\right) - q\left(\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}\right) + \frac{\frac{pD}{r} + Pn \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}$ pour la poulie fixe, les cordons étant parallèles.

A l'égard de la poulie mobile, nous avons trouvé
$$Q = T\left(\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} - (P + p + p')\, n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f};$$
donc en employant les mêmes dénominations que tout-à-l'heure, pour représenter les mêmes choses, nous aurons $Q = T\left(\frac{1 + n \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}\right) + \frac{\frac{pD}{r} - Pn \operatorname{cos}. f}{1 - n \operatorname{cos}. f}$ pour la poulie mobile, les cordons étant parallèles.

777. Donc en représentant par T, T', T'' les tensions des cordons 4, 3, 2 (*fig. 128*); par n, n', n'' ce que devient n pour chaque poulie; par p, p', p'' ce que devient p pour chaque poulie; par P, P', P'' ce que devient P pour chaque poids; & par q, q' &c. ce que devient q, on aura la tension du cordon 3,

ou $T' = T\left(\frac{1+n\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}\right) - q\left(\frac{1+n\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}\right) + \frac{\frac{pD}{r} + Pn\,\text{cof.}\,f}{1-n\,\text{cof.}\,f}$; la tenſion du cordon 2, ou $T'' = T'\left(\frac{1+n'\,\text{cof.}\,f}{1-n'\,\text{cof.}\,f}\right) + \frac{\frac{p'D}{r'} - P'n'\,\text{cof.}\,f}{1-n'\,\text{cof.}\,f}$.

Et pour déterminer T, on aura l'équation $T + T' + T'' = M$, en appelant M la totalité du poids des trois cordons, de la poulie inférieure, de ſa chappe, de ſon crochet & de la pièce qu'il s'agit d'élever.

A l'égard de la tenſion du cordon 1 ; comme celui-ci n'eſt pas parallèle aux autres, nous la calculerons enſuite par ce qui a été dit (763) ; & la force qu'on doit appliquer aux barres, par ce qui ſera dit inceſſamment.

778. Suppoſons donc que P (*fig.* 128), eſt une pièce de 4 dont le poids eſt de 1150$^{\text{liv.}}$. Que le rayon de chaque poulie ſoit de 4 pouces ; celui du boulon de $\frac{1}{2}$ pouce ; celui de la corde d'un pouce ; le poids de chaque poulie ſans le boulon & la chappe, de 35$^{\text{liv.}}$. Le poids de la chappe, du boulon & du crochet de la poulie inférieure de 12$^{\text{liv.}}$. Que la corde pèſe 1$^{\text{liv.}}\,\frac{1}{2}$ par pied. Que le cordon 4, à compter du point d'attouchement de la poulie ſupérieure, ait 15 pieds. Que la diſtance du centre d'un rouet ſupérieur au centre du rouet inférieur ſoit de 14 pieds $\frac{1}{2}$. Que la force du frottement ſoit le quart de la preſſion, enſorte qu'on ait comme ci-devant, *coſ.* $f = \frac{8}{33}$.

Cela posé, le rayon nu de chaque poulie étant de 4 pouces, & celui de la corde 1 pouce, tandis que celui du boulon est de $\frac{1}{2}$ pouce, on a $\frac{r'}{r}$ ou $n = \frac{1}{10} = n'$; donc $n\ cos.\ f = n'\ cos.\ f = \frac{4}{165}$.

La différence de longueur des deux cordons 4 & 3 n'étant que de $\frac{1}{2}$ pied, on peut sans erreur supposer que leur centre de gravité tombe sur la verticale qui passe par le centre de la poulie qu'ils embrassent; ainsi on a $D = 0$. A plus forte raison a-t-on $D' = 0$.

Le rayon nu de chaque poulie, & celui de la corde étant ensemble de 5 pouces; la partie de corde qui s'enveloppe sur chaque poulie sera de $\frac{22}{7} \times 5^{po.}$, ou de $\frac{22}{7} \times \frac{5^{pi.}}{12} = \frac{55^{pi.}}{42} = 1^{pi.},31$; donc la somme des deux cordons 4 & 3 qui embrassent un rouet supérieur, est de $30^{pi.},81$, qui à raison de $1^{liv.}\ \frac{1}{2}$ par pied, pèsent $46^{liv.},21$; & comme ce rouet est supposé peser $35^{liv.}$, on a donc $P = 81^{liv.},21$.

Les deux cordons 3 & 2 ont de longueur $30^{pi.},31$, qui à raison de $1^{liv.}\ \frac{1}{2}$ par pied, pèsent $45^{liv.},46$; ajoutant donc le poids de la poulie inférieure sans ses dépendances, on a $P' = 80^{liv.},46$.

Enfin le cordon 4 ayant quinze pieds de longueur, doit à raison de $1^{liv.}\ \frac{1}{2}$ par pied, peser $22^{liv.},5$; on a donc $q = 22^{liv.},5$.

Il ne s'agit donc plus que de substituer toutes ces quantités dans les valeurs ci-dessus, de T' & T'', & nous aurons

$T' = T \times \frac{169}{161} - 22,5 \times \frac{169}{161} + 81,21 \times \frac{4}{161}$

Et $T'' = T' \times \frac{169}{161} - 80,46 \times \frac{4}{161}$;

C'est-à-dire $T' = 1,0510\ T - 21,6003$,

Et $T'' = 1,0510\ T' - 1,9990$.

Substituant dans celle-ci, la valeur de T' tirée de la première, on aura $T'' = 1,1046\ T - 24,7009$.

Réunissons T, T' T'', & nous aurons. . . . . : $T + T' + T'' = 3,1556\ T - 46,3012$ qu'il faut égaler au poids total M.

Or nous avons pour M; 1°. le poids 1150^liv.^ de la pièce; 2°. le poids total des cordons 4, 3 & 2, y compris l'arc enveloppé de la poulie inférieure, le tout montant à 67^liv.^,96; 3°. le poids de la poulie inférieure, la chappe, le boulon & le crochet, le tout montant à 47^liv.^; donc $M = 1264^{liv.},96$. Donc $3,1556\ T - 46,3012 = 1264,96$, & par conséquent $T = \frac{1311,2612}{3,1556} = 415^{liv.},53$.

Substituant cette valeur de T, dans celle de T' & T'', on aura $T' = 415^{liv.},12$ & $T'' = 434^{liv.},29$.

Réunissant ces trois valeurs de T, T' & T'', on a $T + T' + T'' = 1264^{liv.},94$; à 2 centièmes d'unité près de ce qu'on doit avoir.

779. Nous savons donc présentement avec quelle force le cordon 2 agit sur le cordon 1. Voyons comment nous calculerons la tension du cordon 1.

Supposons que ce cordon fait, avec la verticale, un angle de 15^d; il fait donc ce même angle avec le cordon 2; ainsi dans ce que nous avons dit (763), & auquel il faut avoir recours à présent, il faut supposer $A = 15^d$.

Rappelons-nous donc que nous y avons trouvé $Q = \frac{P'' \sin.(\frac{1}{2}A + e)}{\sin.(\frac{1}{2}A - e)}$, $\sin. e = \frac{r'}{r} \sin.\frac{1}{2}A \cos. f$, mais avec cette condition qu'au lieu de r il falloit mettre $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$.

Rappelons-nous auſſi que P marquoit la force appliquée au cordon vertical, indépendamment du poids de ce cordon; ainſi P marque la tenſion T'' diminuée du poids du cordon 2; on a donc $P = 434^{\text{liv.}},29 - 21^{\text{liv.}},75 = 412^{\text{liv.}},54$.

Quant à P'', il eſt la ſomme faite du poids de la poulie ſans ſon boulon, & du poids de la corde 1, 2. Suppoſons que le cordon 1 ait 16 pieds de long, il pèſera $24^{\text{liv.}}$.

Préſentement, pour déterminer le poids total de la corde, il faut avoir la longueur de l'arc qu'elle embraſſe.

Soient donc *eh* & *cg* (*fig. 162*) les deux cordons 2 & 1 de la *fig. 128*, puiſqu'ils forment entre eux un angle de 15^{d}, l'arc embraſſé *cme* ſera donc de 165^{d}; or nous avons vu ci-deſſus que les 180^{d} formoient une longueur de $1^{\text{pi.}},31$; donc les 165^{d} valent $1^{\text{pi.}},20$, qui à raiſon de $1^{\text{liv.}}\frac{1}{2}$ par pied, pèſeront $1^{\text{liv.}},80$; c'eſt la valeur de p'; réuniſſant donc ce poids, avec celui du cordon 2 & celui du cordon 1, on aura $p + p' = 47^{\text{liv.}},55$. Par conſéquent $P'' = P + P' + p + p' = 412^{\text{liv.}},54 + 35^{\text{liv.}} + 47^{\text{liv.}},55 = 495^{\text{liv.}},09$.

Déterminons préſentement les quantités g & g'. Le cordon 2 (*fig. 162*) qui pèſe $21^{\text{liv.}},75$ eſt cenſé agir à la diſtance de 5 pouces ou $\frac{5}{12}$ de pied, de la verticale *ds*; ſon moment ſera donc $21,75 \times \frac{5}{12}$.

Quant au cordon 1 qui pèſe $24^{\text{liv.}}$, voyons à quelle diſtance ſon centre de gravité qui eſt dans le milieu *n* de ſa longueur, paſſe de la même verticale. Menons le rayon *cf*, & la perpendiculaire *cr* ſur la verticale. L'angle *cbe* étant de 15^{d}, l'angle *cfr* ſera de 75^{d}. Il eſt donc facile dans le triangle rectangle *crf*, dont le côté *cf* eſt de $\frac{5}{12}$ de pied, de calculer *cr*, que l'on trouvera de $0^{\text{pi.}},4025$.

Menons la verticale cq terminée par l'horizontale nq; & dans le triangle rectangle cqn, où l'on connoît cn de 8 pieds, moitié de la longueur du cordon 1, & l'angle cnq de 75^d, on trouvera facilement que nq est de $2^{pi.},0706$; donc le centre de gravité n du cordon 1 est éloigné de la verticale ds, de $2^{pi.},47$; donc le moment de ce cordon est $24 \times 2,47$. Prenant donc la différence des momens $21,75 \times \frac{5}{12}$ & $24 \times 2,47$ des deux cordons, & la divisant par la somme 45,75 des poids de ces deux cordons, on aura pour la distance de leur centre commun de gravité à la verticale, $g = -\frac{50,22}{45,75} = -1^{pi.},10$; c'est-à-dire, que le centre de gravité des deux cordons 1 & 2 au lieu de tomber du côté du cordon vertical, comme on l'a supposé dans la solution générale, tombe du côté du cordon 1. Déterminons g'.

Le centre de gravité a de l'arc enveloppé cme, doit être sur le rayon fm qui partage cet arc en deux parties égales, & la distance fa au centre f se déterminera (256) par cette proportion, $cme : ce :: fm : fa$.

Or nous avons déjà trouvé $cme = 1^{pi.},2$; nous avons $fm = \frac{5^{pi.}}{12}$; & ce soutendante de 165^d est facile à calculer, & on la trouvera de $0^{pi.},83$; on aura donc $fa = 0^{pi.},29$.

Menons la perpendiculaire ad sur la verticale; ad sera g'. Or l'angle cfm étant de $82^d\ 30'$ & l'angle cfd, de 75^d; l'angle dfa sera de $7^d\ 30'$; & dans le triangle rectangle dfa ou $fa = 0^{pi.},29$, on trouvera facilement $da = 0^{pi.},04$; donc $g' = 0^{pi.},04$.

Ayant ainsi calculé toutes les quantités qui entrent dans $\frac{Pr + pg + p'g'}{p''}$, substituons donc ces quantités, & nous aurons

$\frac{Pr + pg + p'g'}{P''} = \frac{412^{\text{liv.}},54 \times \frac{5}{12} - 45^{\text{liv.}},75 \times 1,10 + 1^{\text{liv.}},80 \times 0,04}{495,09}$ $= 0^{\text{pi.}},245$; c'eſt la quantité que nous devons ſubſtituer pour r, dans $\sin. e = \frac{r'}{r} \sin. \frac{1}{2} A \cos. f$.

Et comme nous avons le rayon du boulon $r' = \frac{1}{2}$ pouce $= \frac{1}{24}^{\text{pi.}}$; & $\sin. \frac{1}{2} A = \sin. 7^d\ 30' = 0,13053$, & $\cos. f = \frac{8}{33}$; nous aurons donc $\sin. e = \frac{1}{24 \times 0,245} \times 0,13053 \times \frac{8}{33} =$ $0,00538$ qui répond à $18'\ 30''$; donc $e = 0^d\ 18'\ 30''$ & par conſéquent $\frac{1}{2} A + e = 7^d\ 48'\ 30''$ & $\frac{1}{2} A - e = 7^d\ 11'\ 30''$; donc la tenſion du cordon 1, qui dans la formule générale eſt exprimée par Q, ſera $Q = P'' \times \frac{\text{ſin.} (\frac{1}{2} A + e)}{\text{ſin.} (\frac{1}{2} A - e)} = 495^{\text{liv.}},09 \times \frac{\text{ſin.}\ 7^d\ 48'\ 30''}{\text{ſin.}\ 7^d\ 11'\ 30''} =$ $495^{\text{liv.}},09 \times \frac{0,13586}{0,12518} = 535^{\text{liv.}},73$; ainſi le cordon 1 eſt tendu avec une force de $535^{\text{liv.}},73$.

780. Il faut préſentement déterminer la force qu'on doit appliquer aux barres E, E. Il s'agiroit donc de recourir à la méthode que nous avons donnée (760) pour le tour. Mais comme dans cette ſolution, nous avons ſuppoſé que l'une des deux forces étoit verticale, nous allons, avant tout, réſoudre la queſtion du tour plus généralement que nous ne l'avons fait (760); ce qui mettra en état de calculer l'effet du frottement pour le tour, dans tous les cas.

781. Suppoſons que NT, MQ (*fig. 163 & 164*) ſoient les directions de deux puiſſances T & Q qui ſe font équilibre ſur le tour, & que T ſoit ſur le point d'entraîner Q, malgré la reſiſtance du frottement

augmenté par le poids de la machine; il s'agit de déterminer le rapport de T à Q.

Concevons que BI ſoit une verticale qui paſſe par le centre commun de gravité de toutes les parties peſantes du ſyſtême. Si on nomme P le poids de toutes les parties dont le centre commun de gravité tombe dans l'axe C; p le poids de celles dont le centre de gravité tombe hors de l'axe C; g la diſtance du centre commun de gravité de celles-ci, à la verticale qui paſſe par C, on aura $CI = \frac{pg}{P+p}$ (230).

Que la puiſſance Q rencontre la verticale BI au point B. Du concours de ces deux forces, il naîtra une force BS que l'on pourra ſubſtituer à ces deux-là, & qui (216) paſſera à une diſtance

$$CL = \frac{Q \times CM - \frac{pg}{P+p} \times (P+p)}{S} = \frac{Q \times CM - pg}{S}$$

en appelant S cette force.

Or la force Q, l'angle MBI qu'elle forme avec la verticale, & le poids $(P+p)$ qui agit ſuivant BI étant donnés, il eſt très-facile (559) de calculer la force S, & l'angle IBS ou IBL qu'elle forme avec la verticale. On aura donc facilement la valeur de CL, que je nommerai R'; & puiſque l'angle TVI que la direction de la puiſſance T forme avec la verticale, eſt donné, on aura donc facilement l'angle

TAL, que la direction de cette puissance forme avec celle de *S*, puisque $TAL = TVI + IBL$ (*fig.* 163); & $TAL = TVI - IBL$ (*fig.* 164).

La question est donc réduite à mettre la force *S* en équilibre avec la force *T*. Or il faut pour cela (*A* étant le point où se rencontrent les directions de ces deux forces), que du concours de ces deux forces il résulte une force unique *AH* qui rencontre la surface de l'essieu en un point *D* où elle fasse avec cette surface, un angle égal à l'angle du frottement.

Présentement, *AH* étant la résultante des deux forces *T* & *S*, on doit (201) avoir $S : T :: \text{fin.}\, TAH : \text{fin.}\, HAS :: \text{fin.}\, TAD : \text{fin.}\, LAD$; c'est-à-dire, (*fig.* 163) $S : T :: \text{fin.}\,(TAC - CAD) : \text{fin.}\,(CAL + CAD)$; & (*fig.* 164) $S : T :: \text{fin.}\,(TAC + CAD) : \text{fin.}\,(CAL + CAD)$.

Donc si on appelle *b* l'angle *TAC*; *a* l'angle *CAL*; & *e* l'angle *CAD*; on aura pour la *figure* 163, $T = \frac{S\,\text{fin.}\,(a+e)}{\text{fin.}\,(b-e)}$; & pour la *figure* 164, $T = \frac{S\,\text{fin.}\,(a+e)}{\text{fin.}\,(b+e)}$. Or *S* est connu. Quant aux angles *a*, *b*, *e*; voici comment on les déterminera.

782. En regardant *AC* comme rayon, & nommant *A* l'angle *TAL* que nous avons enseigné (781) à trouver, on a $CN : CL :: \text{fin.}\, TAC : \text{fin.}\, CAL$;

c'est-à-dire, (*fig.* 163) $R : R' :: \textit{sin.}(A - a) : \textit{sin.}\ a :: \textit{sin.}\ A\ \textit{cos.}\ a - \textit{sin.}\ a\ \textit{cos.}\ A : \textit{sin.}\ a$, ou (en divisant par $\textit{cos.}\ a$) $:: \textit{sin.}\ A - \textit{tang.}\ a\ \textit{cos.}\ A : \textit{tang.}\ a$. Donc $\textit{tang.}\ a = \frac{R' \text{ sin. } A}{R + R' \text{ cos. } A}$. On connoîtra donc a, & par conséquent $b = A - a$.

Et pour la *fig.* 164, on a $R : R' :: \textit{sin.}(A + a) : \textit{sin.}\ a :: \textit{sin.}\ A\ \textit{cos.}\ a + \textit{sin.}\ a\ \textit{cos.}\ A : \textit{sin.}\ a :: \textit{sin.}\ A + \textit{tang.}\ a\ \textit{cos.}\ A : \textit{tang.}\ a$; donc $\textit{tang.}\ a = \frac{R' \text{ sin. } A}{R - R' \text{ cos. } A}$; & l'on a $b = A + a$. A l'égard de e on a pareillement $CN : CK :: \textit{sin.}\ TAC : \textit{sin.}\ CAK$; c'est-à-dire, $R : r' \textit{cos.} f :: \textit{sin.}\ b : \textit{sin.}\ e$; donc $\textit{sin.}\ e = \frac{R' \text{ cos. } f \text{ sin. } b}{R}$.

783. Revenons au calcul de la chèvre (*fig.* 128). Supposons le rayon r' du tourillon de 1 pouce $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{1}{8}$ de pied; le rayon du cylindre, de 5 pouces, & par conséquent de 6 pouces ou $\frac{1}{2}$ pied, en y comprenant le rayon de la corde, la longueur de chaque bras E, E, comptée de l'axe, de 4 pieds; le poids du cylindre & de ses tourillons, de $100^{\text{liv.}}$; le poids total des parties extérieures des barres de $15^{\text{liv.}}$; nous supposerons qu'il n'y en a qu'une, équivalente en poids.

Supposons qu'on ait reconnu par expérience, que la situation la moins avantageuse pour la force motrice, soit celle où sa direction (que je suppose perpendiculaire à la barre) fait avec le cordon 1, un certain angle; par exemple, un angle de 50 degrés. Ce sera donc pour cette position qu'il conviendra de calculer cette force. Supposons enfin que la corde est déjà roulée de quelques tours sur le cylindre; par exemple, de 3 tours $\frac{1}{3}$.

Il faut commencer par déterminer les quantités que (781) nous avons appelées P, p & g.

Le rayon du cylindre augmenté de celui de la corde étant de $\frac{1}{2}$ pied, un tour de corde vaudra $\frac{22}{7}$ de pied; & les trois tours & $\frac{1}{3}$ vaudront $\frac{220}{21}$ de pied, lesquels à raison de $1^{\text{liv.}}\frac{1}{2}$ par pied, pèseront $\frac{110}{7}^{\text{liv.}}$ on $15^{\text{liv.}},71$. De plus, puisqu'il y a trois tours $\frac{1}{3}$, lesquels valent trois fois 360 degrés, plus 120 degrés; si on suppose que M (*fig.* 165) marque le point où le cordon 1 touche le cylindre, l'extrémité de la corde sera donc en un point N distant de M, d'un arc MON de 120 degrés.

Cherchons donc la distance du centre de gravité g de l'arc MON à la verticale CO.

Comme nous avons supposé que le cordon 1, c'est-à-dire; ici, MV, faisoit avec la verticale, un angle de 15 degrés, il est facile de voir en tirant le rayon MC, que l'angle MCO est de 105 degrés; donc si on mène le rayon Cr au milieu de l'arc MON de 120 degrés, l'arc Mr étant de 60 degrés, l'arc rO sera de 45 degrés.

Il est donc facile de calculer la soutendante MN que l'on trouvera de $0^{\text{pi.}},8660$; & comme la longueur de l'arc MON est de $\frac{22}{7} \times \frac{1}{3}$ ou $\frac{22}{21}$, la distance Cg (256) du centre de gravité de cet arc sera donc $0^{\text{pi.}},4133$. Donc par le triangle rectangle Cgu, on trouvera $gu = 0^{\text{pi.}},2922$. Soit n le centre de gravité du cordon 1, dont M & V soient les extrémités; nous avons trouvé ci-dessus (779) $nq = 2^{\text{pi.}},0706$; donc en menant la verticale Mt, on a aussi $nt = 2^{\text{pi.}},0706$. Or dans le triangle CMp, rectangle en p, on trouvera $Mp = 0^{\text{pi.}},4830$; donc $Sn = 1^{\text{pi.}},5876$.

Comme la barre a aussi un certain poids, & une certaine longueur, calculons aussi la distance de son centre de gravité à la verticale.

Nous avons supposé que la force qui lui étoit appliquée perpendiculairement, faisoit avec le cordon 1, un angle de 50 degrés; d'où il s'ensuit que cette barre CE (*fig.* 164) fait avec la verticale un angle de 25^{d}. Soit I le milieu de la longueur de la partie extérieure FE de cette barre, & par conséquent le centre de gravité de cette partie. Puisque $CF = \frac{1}{2}^{pi.}$, & $CE = 4^{pi.}$, on aura $CI = 2^{pi.}\frac{1}{4}$; & puisque l'angle ICP est de 25 degrés, on trouvera facilement que $IP = 0^{pi.},9509$.

Nous pouvons donc (230) conclure actuellement que le centre commun de gravité des 3 tours $\frac{1}{3}$ de corde, du cordon MV & de la partie extérieure EF de la barre, est éloigné de la verticale CO, & sur sa droite, d'une quantité $= \frac{24^{liv.} \times nS - 1^{liv.},63 \times gu - 15^{liv.} \times IP}{15^{liv.},71 + 15^{liv.} + 24^{liv.}} =$

$$\frac{24^{liv.} \times 1,5876 - 1^{liv.},63 \times 0,2922 - 15^{liv.} \times 0,9509}{54,71} =$$

$\frac{23,37}{54,71}$; or 54,71 est ce que (781) nous avons appelé p; & la distance que nous venons de déterminer, est celle que nous avons appelée g; nous avons donc $g = \frac{23,37}{p}$, & $pg = 23,37$. D'ailleurs ce que nous avons appelé P est ici le poids du cylindre & de ses tourillons, c'est-à-dire, que $P = 100^{liv.}$; donc (781) nous aurons dans la *fig.* 164, $CI = \frac{23,37}{154,71}$ & $CL = \frac{Q \times CM - 23^{liv.},37}{S} = R'$.

Il faut donc déterminer Q & S.

Nous avons trouvé ci-dessus (779) qu'au point où le cordon 1 (*fig.* 128) touche le cylindre, sa tension est de de $535^{liv.},73$. C'eſt donc la force avec laquelle ce cordon, ſuppoſé ſans peſanteur, ſeroit tiré dans quelque point de ſa longueur que ce ſoit. Il faut donc concevoir actuellement, au point où ce cordon touche l'une des poulies ſupérieures, une puiſſance Q de $535^{liv.},73$, qui conjointement avec le poids du cordon 1 & de tout le reſte de la machine, fait avec le frottement & les appuis, équilibre à la puiſſance T (*fig. 163*). Ainſi nous avons $Q = 535^{liv.},73$.

Il faut préſentement déterminer la réſultante S de la force Q, & du poids total de la machine, dirigé ſuivant la verticale qui paſſe par I; nous calculerons en même temps, l'angle IBS que cette réſultante forme avec la verticale.

Soient donc (*fig. 166*) $AB = 535,73$; $AD = 154,71$, l'angle EAB de 15 degrés; & $ABDC$ un parallélogramme. On connoît donc les deux côtés AC, CD, & l'angle compris ACD du triangle ACD. Il s'agit de calculer AD, & l'angle CAD. On trouvera donc $AD = 388,39$, & $CAD = 159^d\ 5'$; c'eſt-à-dire (*fig. 164*), $S = 388,^{liv.},39$ & l'angle $IBS = 159^d\ 5'$. Subſtituant donc, dans la valeur ci-deſſus de R', $388^{liv.},39$ pour S, $535^{liv.},73$ pour Q; & $\frac{1}{2}$ pour CM, nous aurons $R' = \frac{244,49}{388,39} = 0^{pi.},6295$.

Il ne s'agit donc plus pour avoir T (*fig. 164*), que de calculer les angles A, a, b & c (782). Or l'angle que nous avons appellé A, ou $TAL = TVI - VBS$. TVI étant l'inclinaiſon de la direction de la puiſſance à l'égard de la verticale, eſt de 65^d d'après les ſuppoſitions que nous avons faites. Et comme nous venons de trouver $IBS = 159^d\ 5'$, nous aurons $VBS = 20^d\ 55'$; donc $A = 44^d\ 5'$; donc ſelon ce qui a été dit (782), nous aurons *tang.* $a = \frac{R' \text{ſin. } A}{R - R' \text{coſ. } A} =$

$$\frac{0{,}6295 \times \text{ſin. } 44^d\ 5'}{4 - 0{,}6295 \times \text{coſ. } 44^d\ 5'} = \frac{0{,}6295 \times 0{,}6957}{4 - 0{,}6295 \times 0{,}718} = \frac{0{,}43793}{4 - 0{,}46541}$$

$= \frac{0{,}43793}{3{,}53459} = 0{,}12390$, qui dans les Tables répond à $7^d\ 7'$. Donc $a = 7^d\ 7'$; & par conſéquent $b = A + a = 51^d\ 12'$.

Enfin puiſque (782) on a *ſin.* $e = \frac{R' \text{ coſ. } f \text{ ſin. } b}{R}$, & que *coſ.* $f = \frac{8}{33}$, & *ſin.* $b = 0{,}77936$; on aura *ſin.* $e = \frac{0{,}6295 \times \frac{8}{33} \times 0{,}77936}{4} = 0{,}02973$, qui, dans les Tables, répond à $1^d\ 42'$. Donc $e = 1^d\ 42'$; & par conſéquent $a + e = 8^d\ 49'$, & $b + e = 52^d\ 54'$. Donc puiſque (782) $T = \frac{S \text{ ſin. } (a + e)}{\text{ſin. } (b + e)}$, on a....

$T = \frac{388^{\text{liv.}},39 \times \text{ſin. } 8^d\ 49'}{\text{ſin. } 52^d\ 54'} = \frac{388^{\text{liv.}},39 \times 0{,}15327}{0{,}79758} =$ $74^{\text{liv.}},6$.

C'eſt donc à dire, qu'ayant égard au poids du cylindre, des barres, de la corde, des poulies, chappes, crochets, &c. la force néceſſaire pour élever la pièce de 4 (*fig. 128*) à l'aide de la chèvre, doit par rapport au frottement, être de $74^{\text{liv.}},6$; au lieu que ſans le frottement, & n'ayant point égard à d'autre poids qu'à celui de $1150^{\text{liv.}}$ de la pièce qu'il s'agit d'élever, on trouveroit par ce qui a été dit (589 & 676), que la puiſſance ne devroit être que de $47^{\text{liv.}},9$.

784. Nous avons calculé avec une préciſion qui n'eſt pas abſolument néceſſaire dans la pratique ; mais pour être en droit de négliger certaines circonſtances, il faut être en état de juger de l'influence qu'elles peuvent avoir ſur l'objet

qu'on a en vue ; & le moyen d'acquérir cette faculté, eſt de s'accoutumer à voir d'abord les choſes en toute rigueur. C'eſt ce qui nous a fait juger devoir calculer dans cet exemple, juſqu'aux plus petits objets.

785. La méthode que nous venons d'enſeigner pour calculer le frottement, diffère beaucoup de celle que l'on trouve en divers ouvrages.

Il y en a deux raiſons principales, la première eſt qu'on a coutume de calculer le frottement comme ſi le point du boulon ſur lequel porte la charge au moment où la puiſſance va vaincre le frottement, étoit le même que celui ſur lequel elle porteroit ſans le frottement.

Cette ſuppoſition ne peut pas introduire une erreur conſidérable dans la valeur de l'augmentation qu'on doit donner à la puiſſance, tant que le rayon du boulon ſera beaucoup plus petit que celui de la poulie ; ainſi la différence des réſultats des deux méthodes, dans ce cas, ne peut que participer médiocrement de cette cauſe.

La ſeconde, dont l'effet eſt d'autant plus ſenſible que le nombre des poulies eſt plus conſidérable, eſt qu'on ſuppoſe gratuitement que la tenſion du cordon 1, par exemple, dans les moufles (*fig.* 83), eſt la même que s'il n'y avoit pas de frottement ; enſorte qu'on la ſuppoſe plus grande qu'elle n'eſt réellement. Et l'effet de cette ſuppoſition ſe multipliant à proportion du nombre des poulies, la valeur qu'on en conclut pour la puiſſance, eſt beaucoup plus grande que ne doit la donner l'hypothèſe de frottement d'où on eſt parti. Auſſi, ſi on ajoute enſemble (774) les tenſions des cordons 1, 2, 3, 4, calculées d'après cette ſuppoſition, trouve-t-on que la ſomme de ces tenſions ſurpaſſe le poids total qu'il s'agit d'élever ; ce qui ne peut avoir lieu, dans l'hypothèse que l'on fait en même temps, savoir qu'il y a équilibre.

On dira peut-être qu'il n'y a aucun inconvénient à donner à la puissance une valeur trop forte. Cela peut être ; mais quand on emploie la théorie, il faut, sinon qu'elle donne exactement, que du moins quand on n'en voudra tirer qu'une approximation, cette approximation ne soit pas le double, ou le triple, ou &c. de ce qu'on doit avoir. D'ailleurs quand on a calculé, conformément aux conditions de la question, on est bien le maître, si on veut quelque chose de plus, de l'ajouter ; & on l'ajoute avec connoissance de cause.

786. Si on demandoit comment il peut se faire que le cordon 1 soit moins tendu quand la puissance est sur le point de vaincre le frottement, que dans le cas où il n'y auroit pas de frottement. On répondroit que conformément à ce que nous avons dit (767) ; au moment où la puissance fait effort pour rompre l'équilibre, le poids P (*fig. 167*) se porte du côté de la puissance, & s'en approche jusqu'à ce que la verticale qui passe par son centre de gravité, fasse avec la surface du boulon, un angle égal à celui du frottement. Dans le cas où il n'y a pas de frottement, ce poids agit en C, & par conséquent se distribue également aux deux cordons. Mais dans le cas du frottement, ce même poids agissant en I, se distribue aux deux cordons QG & TF, en raison de GF à IF & GI ; donc le cordon QG porte plus que dans le cas où il n'y a pas de frottement, & le cordon FT, porte au contraire moins.

Ce que nous disons de la seule poulie de la *figure 167*, s'applique tout naturellement aux moufles; & un raisonnement semblable, fait voir que chacun des rouets de la moufle n'est pas également chargé non plus; ensorte que le boulon prend une petite inclinaison à l'horizon. C'est ce qu'on peut voir aussi, en comparant entre elles les tensions des cordons que nous avons calculées (774 & 778). Et l'on peut par la comparaison de ces tensions, se guider dans l'estimation de la force qu'on doit donner aux boulons.

787. D'après tout ce que nous venons de dire sur la manière de calculer la force motrice sur la poulie fixe, sur la poulie mobile, sur les moufles, sur le tour, & sur quelques machines composées de celles-là; & sur-tout d'après l'exemple que nous venons de donner (778 *& suiv.*), il est donc aisé de voir comment on doit se conduire dans les autres machines où celles-là entrent. On voit, par exemple, que la gruë qui reçoit son mouvement par le poids d'un ou plusieurs hommes qui marchent dans la roue, se calculera d'une manière analogue à celle que nous venons d'employer (783) pour le cylindre de la chèvre; en comprenant dans le calcul, le poids de la roue, & employant le poids des hommes comme nous avons employé la puissance appliquée aux barres; ce que nous avons dit (751 *& suiv.*) satisfera pleinement à toutes ces questions.

788. Sur le plan incliné; voici comment on déterminera le rapport qu'il doit y avoir entre le poids

& la puiſſance, pour que celle-ci ſoit ſur le point de faire gliſſer le corps.

On imaginera, par le point de concours C des directions de la puiſſance Q & du poids P (*fig.* 168), la ligne CI qui faſſe avec le plan AB, un angle CIA égal à l'angle du frottement. Pour que la puiſſance Q ſoit ſur le point de faire gliſſer le corps, il faut 1°. que la réſultante de la puiſſance & du poids ſoit dirigée ſuivant CI. 2°. Que le point I où la ligne CI rencontre le plan, appartienne, en même temps, à quelqu'un des points de la baſe RS, ſans quoi le corps tourneroit.

Cela poſé, on auroit $P : Q :: \text{ſin. } QCI : \text{ſin. } PCI$; ou, en menant CH perpendiculaire au plan, $:: \text{ſin. } (QCH - HCI) : \text{ſin. } (PCH + HCI)$. Or l'angle HCI eſt le complément de l'angle du frottement; & les angles QCH & PCH ſont ſuppoſés connus, puiſque nous ſuppoſons que l'on connoît la direction de la puiſſance & l'inclinaiſon du plan, qui eſt égale à l'angle PCH; on aura donc par-là, le rapport de P à Q.

Si l'on veut déterminer ce rapport, en lignes; on mènera par un point quelconque B du plan incliné, la ligne BT qui faſſe avec AB, l'angle $ABT = HCQ$, & la ligne BV qui faſſe avec

AB, l'angle *ABV* égal à *HCI* complément de l'angle du frottement. Alors si l'on mène l'horizontale *AT*, on aura $P : Q :: VT : BT$; parce que l'angle $VBT = ABT - ABV = HCQ - HCI$; l'angle $BVT = BAV + ABV = PCH + HCI$; or dans le triangle *BVT*, on a $VT : BT :: \textit{sin.}\, VBT : \textit{sin.}\, BVT$.

Au lieu de faire l'angle $ABT = HCQ$, & l'angle $ABV = HCI$, on peut encore mener *BT* perpendiculaire à la direction de la puissance, & *BV* perpendiculaire à *CI*; cela revient au même, & est d'ailleurs analogue à ce qui a été dit (696).

789. *S*upposons, pour donner un exemple, que la puissance Q (*fig. 168*) doive faire avec le plan, vers *B*, un angle de 17^d; que le plan soit incliné de 35^d; le poids *P* de $800^{liv.}$, & le frottement le tiers de la pression.

On aura donc $QCH = 73^d$; $PCH = 35^d$. A l'égard de *HCI*; puisque le frottement est supposé le tiers de la pression, on aura (744) $1 : 3 ::$ le rayon : *tang. CIH* ou *cos. HCI*; d'où l'on conclura que l'angle *HCI* est de $18^d\ 25'$.

Donc (788) $P : Q :: \textit{sin.}\,(73^d - 18^d\ 25') : \textit{sin.}\,(35^d + 18^d\ 25') :: \textit{sin.}\ 54^d\ 35' : \textit{sin.}\ 53^d\ 25'$. Donc $Q = \frac{P\ \text{sin.}\ 53^d\ 25'}{\text{sin.}\ 54^d\ 35'} = 800^{liv.} \times \frac{0{,}80299}{9{,}81496} = 788^{liv.},25 = 788^{liv.}\ \frac{1}{4}$.

Mais sans le frottement, on auroit eu. . . . . $P : Q :: \textit{sin.}\ HCQ : \textit{sin.}\ HCP :: \textit{sin.}\ 73^d : \textit{sin.}\ 35^d$

& $Q = \frac{P \text{ſin. } 35^d}{\text{ſin. } 73^d} = \frac{800^{liv.} \times 0{,}57358}{0{,}95630} = 479^{liv.},76$ $= 479^{liv.} \frac{3}{4}$.

Le frottement exige donc, dans ce cas, une augmentation de $308^{liv.} \frac{1}{2}$ dans la puiſſance, pour qu'elle ſoit ſur le point de faire monter le corps en gliſſant.

790. La ſeconde condition que nous venons de voir être néceſſaire pour que la puiſſance Q ſoit ſur le point de faire gliſſer le corps, fait voir que lorſque le corps n'appuie que par un point, il faut que la direction prolongée, de la puiſſance, rencontre la verticale menée par le centre de gravité, au point C (*fig.* 169) où celle-ci eſt rencontrée par la ligne IC qui partant du point de contact I, fait avec le plan, un angle égal à l'angle du frottement.

791. On ſe conduira de la même manière pour déterminer les effets du frottement de la ſeconde eſpèce ; de celui qu'il faut vaincre pour faire rouler les corps terminés par des ſurfaces courbes : je dis des ſurfaces courbes ; car pour les corps terminés par des ſurfaces planes, comme ils ne peuvent rouler qu'en tournant ſur une pointe ou partie angulaire, & que les lois, & la valeur de ce frottement ne ſont pas ſuffiſamment connues, nous n'en dirons rien pour le préſent. Mais pour ceux dont il s'agit ici, la méthode eſt abſolument la même ; il faut ſeulement obſerver que l'angle du frottement doit alors

être ſuppoſé plus approchant de 90°, que dans le frottement de la dernière eſpèce. C'eſt à l'expérience à déterminer cet angle, dans tous les cas.

792. C'eſt à cette ſeconde eſpèce de frottement qu'on a coutume de rapporter celui des roues des voitures, ſur le terrein. Mais le frottement que la roue éprouve au point D (*fig. 170*), n'eſt pas celui qui altère le plus la force motrice. Si l'eſſieu ne frottoit pas dans les boîtes, la réſiſtance qui ſe fait au point D de la part du frottement, ſeroit d'un effet preſque inſenſible ſur la force motrice, parce que l'eſſieu pouvant alors entraîner la roue ſans la faire gliſſer ſur le terrein, ce mouvement tend à dégager le point D.

Mais ſi l'eſſieu en s'appuyant contre le moyeu, y éprouve un frottement ſenſible; alors la roue ne peut tourner qu'autant que la force motrice aura vaincu, tout-à-la-fois, le frottement qui ſe fait en D, & celui qui ſe fait en I contre la ſurface intérieure du moyeu, ou contre les boîtes. Je dis en I, c'eſt-à-dire en un point hors de la verticale qui paſſe par le centre de l'eſſieu, & non pas au point où cette verticale coupe la ſurface du moyeu; car il eſt aiſé de voir que dès qu'on ſuppoſe, qu'outre le poids de la voiture, il y a encore une force de traction dirigée ſuivant une ligne quelconque HA, la preſſion de l'eſſieu contre le moyeu, doit ſe faire ſuivant une ligne inclinée à l'horizon; & que par conſéquent, l'eſſieu doit appuyer contre le moyeu, en quelque point *I* hors de la verticale qui paſſe par le centre de celui-là.

Examinons de quelle manière la force motrice agit lorſqu'elle eſt ſur le point de ſurmonter le frottement.

793. Suppoſons que *de* (*fig. 171*) ſoit une verticale paſſant par le centre commun de gravité de la voiture, de ſa charge, & des roues; que *AB* ſoit la direction ſuivant laquelle la voiture eſt tirée par le cheval, ſur le plan *ab* d'une inclinaiſon quelconque. Nous ſuppoſerons, pour plus de ſimplicité, qu'il n'y a qu'un cheval; & comme les deux roues font chacune le même office, nous enviſagerons la queſtion comme s'il n'y avoit qu'une ſeule roue ſituée dans un plan parallèle aux deux roues, & paſſant par le centre de gravité de la voiture; la queſtion réſolue dans cette ſuppoſition, ſera facile à appliquer à l'état réel des choſes.

Quoique nous ſuppoſions, dans la figure ſur laquelle nous allons raiſonner, que le centre de gravité de la voiture, tombe en arrière de l'eſſieu, ce que nous allons dire n'eſt pas moins applicable dans toute autre poſition de ce centre, en faiſant attention au changement que cette position peut apporter au sens dans lequel quelques-unes des forces agissent.

Cela posé, le centre de gravité tombant en arrière de l'essieu, il est clair qu'une partie de la charge, tend à soulever le cheval. J'imagine donc que le poids de la voiture que je puis supposer appliqué au point d de la verticale de, soit décomposé en deux forces parallèles AE, PQ, dont l'une PQ n'agira que contre le cheval, & dont l'autre AE, étant combinée avec la force de traction que je suppose représentée par AB, produira une force moyenne AD qui aura action sur le cheval & sur le terrein.

Pour que la force PQ n'ait d'action que contre le cheval, il est nécessaire qu'elle passe par le point P où le limon est attaché au cheval; ainsi le point où passe cette force est connu.

A l'égard de la force AD, tant qu'on suppose que le frottement n'est pas vaincu, la roue & l'essieu font corps ensemble; ainsi elle se transmet au terrein, par le point d'attouchement K; & au cheval, par le point P.

Soit G le point de contact de la surface de l'essieu, & de la surface interne du moyeu, ou de la boîte. Il faut pour que le frottement soit sur le point d'être vaincu, que la force AD passe par le point G,

& qu'elle y faſſe avec ces deux ſurfaces, un angle égal à l'angle du frottement. Mais il faut obſerver que cet angle du frottement, n'eſt point celui que nous avons conſidéré (744) pour un corps qui gliſſe ſur un plan. Le point G de l'eſſieu, décrit lors du mouvement, une ligne parallèle au plan ab; mais le frottement qu'il éprouve n'eſt pas celui qu'il éprouveroit s'il étoit traîné ſur une ſurface plane de même nature que les boîtes & qui auroit la même inclinaiſon que ab. Ce frottement n'eſt pas non plus celui qu'il faudroit pour faire tourner la boîte autour de l'eſſieu immobile. C'eſt le frottement d'une ſurface qui ſe meut ſur une autre ſurface qui peut céder. Ainſi l'angle du frottement dont il s'agit, eſt un angle à déterminer par expérience; & il n'y a pas encore d'expériences faites ſur cette eſpèce de frottement.

Quoi qu'il en ſoit, tant que ce frottement n'eſt pas vaincu, toute la voiture eſt donc, ainſi que nous l'avons dit, portée vers le terrein & vers le cheval, en vertu de l'effort AD.

Concevons, par le point K où la roue touche le plan, une droite FK qui ſoit la direction de la partie de l'effort AD, qui agit ſur le plan ab. Soit L le point où elle rencontre AD prolongée. Nous pouvons ſuppoſer l'effort AD appliqué en L ſuivant ADO, & repréſenté par $LO = AD$. Là cet effort LO doit donc ſe décompoſer en deux, dont l'un LN ſera l'effort que la roue fait contre le terrein ; & dont l'autre LM, ne doit plus avoir aucune action contre la voiture.

Mais l'effort LN doit être détruit, puiſque par l'hypothèſe, la voiture n'eſt que ſur le point de ſe mouvoir ; donc l'angle FKa ne doit pas être moindre que l'angle du frottement, ſans quoi la roue gliſſeroit. Cet angle du frottement dépend de la nature du terrein, des clous des bandes, &c.

Voyons préſentement ce que deviendra l'effort LM qui ne doit plus avoir aucune action ſur la voiture.

Il eſt évident que cette force doit ſe tranſmettre au point P où le limon eſt attaché au cheval. Donc ſi on tranſporte l'effort LM, en PR ; & qu'on repréſente par PQ la partie du poids de la voiture qui s'exerce contre le cheval, la diagonale PS du parallélogramme $QPSR$ repréſentera par ſa grandeur & par ſa direction, la réaction de la voiture contre l'action de cet animal.

Soit T le point où PS rencontre la verticale menée par le centre de gravité du cheval ; & que TV repréſente ſon poids. Si on conçoit l'action PS tranſportée en TX ; du concours des deux forces TV & TX, il résultera l'effort TY qui est celui avec lequel le cheval fait véritablement effort contre le terrein. Il faudra donc, puisqu'on suppose l'équilibre, que l'effort TV, fasse avec le plan ab un angle TZb, qui soit plus grand que celui du frottement, sans quoi le cheval glisseroit ; il faudra de plus (691) que le point Z tombe entre les quatre pieds du cheval.

794. Telle est la manière dont le poids de la voiture, sa charge, le poids des roues, & l'action du cheval se distribuent pour vaincre le frottement. On voit donc que le poids de la voiture, soit qu'on suppose qu'il réponde au-dessus de l'essieu, soit qu'il tombe à droite ou à gauche, exerce toujours une certaine action contre le cheval, soit pour le soulever, soit pour l'abaisser. Qu'une autre partie AE de ce poids se joint à la force de traction, d'où résulte la force AD qui est sur le point de vaincre le frottement, c'est-à-dire de faire glisser l'essieu sur la surface interne du moyeu. Que cet effort AD agit, tant contre le terrein, que sur le cheval, en vertu d'une décomposition qui se fait en L, de cette force AD ou LO, en deux autres dont l'une LN arc-boute la roue contre le terrein, comme contre un point fixe ; & l'autre LM se transmet au cheval au point où le limon lui est attaché. Qu'en ce point cette dernière force se compose avec la partie PQ du poids de la voiture

qui agit ſur le cheval, en un effort *PS* qui rencontrant en *T* la verticale qui paſſe par le centre de gravité de cet animal, s'y compoſe avec le poids du cheval, & produit l'effort *TY* en vertu duquel le cheval eſt obligé de s'arc-bouter contre le terrein, & de s'incliner en avant, ainſi qu'on le voit faire quand il donne le coup de collier.

795. Le point *d* où la verticale qui paſſe par le centre de gravité de la voiture & de ſa charge, coupe la direction de la force de traction, eſt cenſé connu, ainſi que le point *P* où le limon eſt attaché au cheval. Donc ſi le point *A* étoit connu, on auroit facilement (205) la valeur des forces *AE* & *PQ*; & comme l'angle *BAE* eſt connu; que d'ailleurs *CA* l'eſt par la ſuppoſition; & que *CH* perpendiculaire ſur *AD*, eſt connue auſſi, parce qu'on connoît le rayon *CG* de l'eſſieu, & l'angle *CGA* complément de l'angle du frottement; on auroit donc aiſément les angles *DAE* & *DAB*, & par conſéquent le rapport de *AE* à *AB*; & comme le rapport de *AE* au poids de la voiture, ſeroit alors connu, on auroit donc le rapport du poids de la voiture, à la force motrice.

796. On voit donc que le rapport du poids de la voiture à la force motrice, ne dépend que de la poſition du point *A*. Or parmi les conditions que nous

venons de voir être néceſſaires pour l'équilibre, on peut remarquer qu'il en eſt trois auxquelles on peut ſatisfaire d'une infinité de manières. En effet, l'objet eſt ici que la voiture roule, & non pas qu'elle gliſſe, car ce dernier cas exigeroit de la part de la force motrice, le plus grand effort poſſible; il ſuffit donc que le point *K* réſiſte aſſez pour que le frottement qui ſe fait en *G* puiſſe être ſurmonté; ainſi la grandeur de l'angle *FKa* eſt, ſinon arbitraire, du moins renfermée dans des limites fort étendues. On doit dire la même choſe de l'angle *TZb*; & comme le point *Z* n'eſt déterminé non plus, par d'autre condition, ſinon qu'il tombe entre les pieds du cheval; on voit donc que le point *A* peut avoir une infinité de poſitions différentes, ſans que pour cela l'équilibre ſoit rompu.

797. Or comme la poſition du point *A* fait varier le rapport de la puiſſance au poids; pour avoir les conditions qui rendront la machine la plus parfaite qu'il eſt poſſible, il faut déterminer le point *A* par la condition que le rapport qui en réſultera entre la puiſſance & le poids, ſoit le plus petit qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire que la puiſſance ſoit la plus petite poſſible. Déterminons donc le point *A* par cette condition.

Menons la droite *CA*, la perpendiculaire *CI* ſur la direction de la traction, la perpendiculaire *CH* ſur

AD,

AD, le rayon CG de l'essieu, & l'horizontale kCn, qui rencontre en n la veritcale QP, & en m la verticale TV.

Nommons f l'angle du frottement, dont CGH est le complément; r le rayon CG de l'essieu; le triangle CHG nous donnera $CH = r\, cos.f$.

Nommons la ligne CI qui est donnée, a; l'angle donné $IAE = m$; la ligne donnée $Ck = b$; la ligne donnée $kn = c$; & enfin la ligne $AI = x$.

Cela posé, le triangle rectangle CIA nous donnera $CA = \sqrt{(aa + xx)}$, que pour abréger j'appelle S; $fin.\, CAI = \frac{a}{S}$; $cof.\, CAI = \frac{x}{S}$, en supposant le rayon des Tables $= 1$.

Comme l'angle $CAE = IAE - CAI$; on aura (*Géom.* 286 & 287) $fin.\, CAE = \frac{x\, \text{fin.}\, m - a\, \text{cof.}\, m}{S}$; & $cof.\, CAE = \frac{x\, \text{cof.}\, m + a\, \text{fin.}\, m}{S}$.

Le triangle CAH nous donnera $fin.\, CAH$, ou $fin.\, CAD = \frac{r\, \text{cof.} f}{S}$, & $cof.\, CAD = \frac{\sqrt{(SS - r^2\, \text{cof.}^2 f)}}{S}$.

Puisque $EAD = CAD - CAE$, on aura donc $fin.\, EAD = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\frac{r\, \text{cof.} f (x\, \text{cof.}\, m + a\, \text{fin.}\, m) - (x\, \text{fin.}\, m - a\, \text{cof.}\, m) \sqrt{(S^2 - r^2\, \text{cof.}^2 f)}}{SS}$;

& puisque $\sin. DAB = \sin. IAD = \sin. (CAI + CAD)$; on aura $\sin. DAB = \frac{a\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)} + rx \cos. f}{SS}$.

Nommons Q la force AB, & P' la force AE; nous aurons donc (201) $P' : Q :: \frac{a\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)} + rx \cos. f}{SS}$ $: \frac{r \cos. f(x \cos. m + a \sin. m) - (x \sin. m - a \cos. m)\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)}}{SS}$, & par conséquent $Q = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{P'[r \cos. f(x \cos. m + a \sin. m) - (x \sin. m - a \cos. m)\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)}]}{a\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)} + rx \cos. f}$. Voyons donc quelle est la valeur de P'.

D'après la décomposition que nous avons faite (793) & ce qui a été dit (205) on a, en nommant P le poids total de la voiture, $P : P' :: ln : kn :: kn - kl : kn$; donc $P' = \frac{P \times kn}{kn - kl} = \frac{Pc}{c - kl}$.

Or $kl = kC + Cl = b + Cl$. Mais le triangle CAl donne $Cl = CA \sin. CAE = S \times \frac{x \sin. m - a \cos. m}{S} = x \sin. m - a \cos. m$; donc $kl = b + x \sin. m - a \cos. m$; donc $P' = \frac{Pc}{c - b - x \sin. m + a \cos. m}$; donc enfin $Q = Pc \times \frac{r \cos. f(x \cos. m + a \sin. m) - (x \sin. m - a \cos. m)\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)}}{(c - b - x \sin. m + a \cos. m)[a\sqrt{(S^2 - r^2 \cos.^2 f)} + rx \cos. f]}$. Puis donc que Q doit être un *minimum*, il ne s'agit (33) que de différencier sa valeur, & d'en égaler la différentielle à zéro.

798. Comme l'équation en x qui résultera de cette

différenciation eſt aſſez composée, nous ne pouvons, ſans paſſer de juſtes bornes, entrer dans le détail des conſéquences qu'on peut en tirer. Nous remarquerons ſeulement, que ce n'eſt que par la réſolution de cette équation qu'on peut déterminer quelle eſt la moindre force qu'on doit employer pour mettre la voiture ſur le point de ſe mouvoir.

799. Cependant on peut parvenir à avoir une équation entre Q & les données, ſans réſoudre l'équation en x. On peut par les méthodes de l'Algèbre, éliminer x, à l'aide de l'équation en x réſultante de la différenciation, & de l'équation en x qui exprime la valeur de Q. Alors on aura une nouvelle équation entre Q, & les quantités dont Q dépend; c'eſt-à-dire entre la force motrice, le rayon de l'eſſieu, l'angle du frottement, le poids de la voiture, la diſtance de ſon centre de gravité à l'eſſieu, la diſtance horizontale de l'eſſieu au point du limon où le cheval eſt attaché, la diſtance de la direction de la force de traction à l'eſſieu, & l'angle d'inclinaiſon de cette direction à l'égard de la verticale. Or comme ce dernier angle, & la diſtance horizontale de l'eſſieu au point du limon où le cheval eſt attaché, dépendent de l'inclinaiſon du plan, de la hauteur du cheval, & du rayon de la roue; on aura donc une équation entre Q & tous ces différens élémens, dont on ſent en effet que Q doit dépendre,

Et c'eſt par cette équation que l'on pourra juger du rapport des dimenſions des parties de la voiture, pour que la force *Q* ſoit la moindre qu'il eſt poſſible.

800. On voit donc que la queſtion du tirage, à l'aide des roues, outre les difficultés phyſiques relatives au frottement, n'eſt pas auſſi ſimple qu'on pourroit le penſer d'abord. Et que ce ſeroit, par exemple, s'expoſer à trouver un rapport très-différent du véritable, entre la force motrice & le poids de la voiture, que de comparer leur action à celle d'un poids & d'une puiſſance qui ſe feroient équilibre ſur le plan incliné *a b*, ſans autre moyen que la réſiſtance qui ſe fait en *K*. Dans cette ſuppoſition, la puiſſance & le poids ſeroient en raiſon inverſe des perpendiculaires menées, du point *K* ſur leurs directions, quelle que fût d'ailleurs la nature du frottement; puiſque n'y ayant, par l'hypothèſe, que le point *K* qui réſiſte, la réſultante de ces deux forces paſſeroit par le point *K*.

801. Si la voiture au lieu d'être tirée à l'aide d'un limon, l'étoit à l'aide d'une corde; c'eſt alors qu'on pourroit enviſager la choſe comme le ſimple équilibre entre un poids & une puiſſance ſur le plan incliné, parce que la force compoſée réſultante de ces deux forces, qui agit ſur la voiture, ne peut avoir aucune action ſur le cheval; & par conſéquent

ſi l'on ſuppoſe qu'il y a équilibre, elle doit paſſer par le point *K*; & la force du frottement de l'eſſieu contre les boîtes, doit être ſupérieure à l'effort qui tend à les détacher l'un de l'autre; ſans quoi l'eſſieu tourneroit dans le moyeu ſans déplacement de la roue.

802. Quand un cheval fait effort ſur une voiture pour faire paſſer la roue ſur un obſtacle *r* (*fig.* 171); alors la queſtion eſt fort différente. L'objet n'eſt pas de faire rouler la voiture, mais de l'entraîner toute entière en faiſant tourner toute la voiture, les roues & l'eſſieu, comme ne faiſant qu'un ſeul corps, autour du point *r*. La réſiſtance du frottement de l'eſſieu contre le moyeu, doit donc être aſſez grande pour que leur ſurface commune ne ſe quitte pas pendant cette action; & alors la force réſultante du poids de la voiture & de l'action du cheval, doit paſſer par le point *r*. Pour lors ces deux forces ſont entre elles en raiſon réciproque des perpendiculaires menées du point *r* ſur leurs directions. Et comme il eſt évident que la force de traction ſera toujours plus éloignée du point *r*, quand le rayon de la roue ſera plus grand, on voit que les grandes roues, ont à cet égard un avantage réel ſur les petites, quoique cet avantage ne ſoit pas préciſément dans le rapport du rayon.

Il y auroit beaucoup d'autres choſes à dire ſur cette matière ; mais il doit suffire ici que nous ayons fait connoître les principes de la solution de ces sortes de questions. Il est aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire, à l'effet du recul sur les affuts, & aux voitures à plus de deux roues, & attelées de plusieurs chevaux.

803. Le frottement peut donner lieu à des mouvemens bien différens de ceux qui auroient lieu sans cette cause : nous allons en examiner quelques-uns.

Nous avons déjà dit plusieurs fois (290) & ailleurs, ce qui devoit arriver à un corps libre *BOQ* (*fig. 172*) qui recevroit une impulsion suivant une direction qui ne passeroit pas par son centre de gravité. Mais si ce corps étoit frappé extérieurement suivant une direction quelconque *AB*, il ne recevroit pas toute cette impulsion ; il faudroit décomposer cette force en deux autres, l'une suivant la tangente à la surface, l'autre suivant la perpendiculaire *BC* à cette surface. Dans le cas où il n'y auroit pas de frottement, la force impulsive n'auroit aucun effet suivant la tangente, elle ne feroit que raser la surface ; il n'y auroit donc que la force suivant *BC* qui se transmettroit au corps, & qui d'ailleurs ne le feroit tourner que dans le cas où la direction de cette force ne passeroit pas par le centre de gravité *G*. D'où l'on voit que si le corps étoit sphérique & d'une matière uniforme, il ne tourneroit jamais, en vertu d'une impulſion extérieure, ſans le frottement; parce que la perpendiculaire à ſa ſurface paſſe toujours par le centre de figure qui eſt en même temps le centre de gravité. Il n'en eſt pas de même dans le cas du frottement; la force ſuivant la tangente, ſe tranſmet à l'aide des aſpérités de la ſurface, en partie d'autant plus grande, que la ſurface eſt plus ſuſceptible de frottement; enſorte qu'outre les mouvemens qui naîtront de la force ſuivant BC, le corps tournera, & le centre G s'avancera parallèlement à la tangente, comme ſi le point B étoit tiré ſuivant cette direction, à l'aide d'un fil attaché en ce point, par une puiſſance égale à la force du frottement.

804. Suppoſons que le corps dur & ſphérique ABC (*fig.* 173) tombe librement ſur le plan horizontal HR; & qu'il ait reçu, par quelque cauſe que ce ſoit, un mouvement de rotation autour de ſon centre de gravité; s'il n'y avoit point de frottement, ce corps après avoir rencontré ce plan, ne conſerveroit d'autre mouvement que ſon mouvement de rotation, & ſon centre de gravité demeureroit immobile. Mais s'il y a du frottement, dès que le corps aura touché le plan, il roulera de I vers R, ou de I vers H, ſelon que ſon mouvement de rotation ſera dans le ſens CAB, ou dans le ſens BAC;

parce que la résistance du frottement qui s'exerce suivant le plan, étant équivalente à une force qui agiroit sur ce corps suivant une direction contraire à son mouvement, doit, puisqu'elle ne passe point par le centre de gravité de ce corps, lui donner (290) un mouvement parallèle au plan, & un mouvement de rotation, tous deux en sens contraire à son mouvement actuel de rotation; or de ces deux mouvemens le dernier diminue continuellement le mouvement primitif de rotation; & au contraire le mouvement du centre s'accélérera, mais jusqu'à un certain terme seulement, après quoi il diminuera pour s'éteindre avec le mouvement de rotation.

805. Par-là on explique aisément, 1°. pourquoi le corps sphérique *ABC* (*fig. 174*) frappé suivant *DB*, après s'être avancé suivant *IE*, revient ensuite de *E* vers *I*, & repasse même au-delà de *I* vers *F*. L'impulsion suivant *DB*, le fait tourner (en vertu du frottement en *B*) suivant *ABC*, & avancer suivant *IE*; mais le frottement sur le plan, étant alors un frottement de la première espèce, le mouvement du centre de gravité est bientôt éteint, & le mouvement de rotation lui en fait naître un autre en sens contraire, comme dans le cas précédent.

2°. Pourquoi un boulet qui, en tombant, semble avoir souvent perdu toute sa force, se ranime cependant, avec violence. Lorsqu'il est chassé par la force de la poudre, il acquiert en frottant sur la paroi inférieure de l'ame de la pièce, au moment où il sort, un mouvement de rotation qui ne s'altère que peu en l'air : lors donc qu'il vient à toucher la terre, si ſon mouvement de rotation du côté de cette ſurface, ſe fait dans un ſens contraire à ſon mouvement de tranſport, il doit (804) en réſulter une accélération dans le mouvement du centre, c'eſt-à-dire, dans le mouvement de tranſport. Cette cauſe doit être jointe à celles que nous avons expoſées (488 & *ſuiv.*) parmi celles qui occaſionnent les ricochets, ou les facilitent; car quand même le centre reſteroit immobile un inſtant, il eſt facile de voir après les conſidérations précédentes, que le mouvement de rotation peut ſouvent ſuffire, pour dégager le boulet, du creux où il ſe feroit engagé, en effleurant & labourant la terre.

806. Au reſte, ſi le frottement eſt nuiſible dans beaucoup d'occaſions, il eſt encore plus ſouvent utile. Sans le frottement, ſur la moindre inclinaiſon ſur laquelle nous marcherions, nous tomberions. Jamais un homme ou un animal courant rapidement, & tournant en même temps autour d'un point fixe C (*fig.* 175), ne pourroit s'empêcher de tomber, quelque ſituation qu'il prît; au lieu qu'en vertu du frottement, il peut s'incliner le côté vers le point C, autour duquel il tourne, & faire par-là, que ſa peſanteur dirigée ſuivant la verticale GK, qui paſſe par ſon centre de gravité G, & la force centrifuge GF qu'il acquiert en tournant, laquelle eſt dirigée de C vers F, s'accordent à produire une force unique ſuivant une ligne GI qui paſſe par un point I entre les jambes de l'animal; alors cette force quoiqu'oblique ne ſera pas moins détruite par le frottement, pourvu que l'inclinaiſon ſoit telle que le frottement l'exige.

807. C'eſt au frottement même qu'on doit l'avantage de pouvoir diminuer ce qu'il a de nuiſible; puiſque ce n'eſt que par le frottement qu'on parvient à uſer & à polir les ſurfaces

des corps. C'eſt au frottement qu'on doit la facilité de rendre les parties de certaines machines, tantôt fixes, tantôt mobiles. C'eſt par le frottement que les ciſeaux, & autres inſtrumens tranchans de cette nature, les pinces, tenailles, limes, &c. font leur effet. Si les lames des ciſeaux, par exemple, n'étoient point des ſcies armées de très-petites dents qui s'engagent dans les petites cavités des corps que l'on doit couper, ces corps gliſſeroient entre les deux tranchans.

808. Le frottement aide encore très-ſouvent à mouvoir les corps dans certains ſens: c'eſt ainſi que lorſqu'à l'aide du levier AB (*fig. 176*) on veut ſoulever le corps P, on y parvient facilement en le faiſant porter ſur ſon arrête CD; le frottement alors très-conſidérable, rend CD immobile, l'empêche de gliſſer. La même cauſe fixe l'extrémité A du levier. Dans ce cas ſi l'on veut ſavoir quel eſt le rapport du poids P à la puiſſance Q (ce que nous avons différé (621) d'expoſer) on imaginera la peſanteur de P qui eſt dirigée ſuivant la verticale GK qui paſſe par ſon centre de gravité G, décompoſée en deux forces parallèles, l'une qui paſſe par le point I où le corps appuie ſur le levier, l'autre qui paſſe par un point de CD, ſitué dans le plan des deux parallèles GK & IM; alors la force qui en réſulte en I, ſera à $P :: EK : EM$ (205); & ſi de A on mène ſur IM la perpendiculaire AL, la force Q ſera à la force $I :: AL : AB$; d'où l'on

conclura que $Q : P :: AL \times EK : AB \times EM$. Au reste, ce n'est qu'à cause du frottement qui a lieu au point I, que nous regardons la force suivant IM, comme transmise entièrement au levier. Sans ce frottement, le levier ne recevroit que la partie de cette force, qui s'exerceroit suivant la perpendiculaire à AB.

809. Il nous reste à considérer le frottement d'une corde roulée sur une surface courbe ABC (*fig.* 177) & tirée à ses deux extrémités par deux puissances. Soient ab, ad, deux côtés consécutifs de la courbe formée par la corde. Ayant prolongé ces deux côtés, concevons que ac, ae représentent les tensions de ces deux côtés. En imaginant le parallélogramme $acfe$, af marquera la force qui résulte de ces tensions, & celle par conséquent qui est sur le point de faire glisser la corde. Il faut donc que af fasse avec la surface courbe, un angle caf égal à l'angle du frottement.

Cela posé, soit nommé T la tension du côté ab qui est le plus tendu, $T - dT$ sera celle du côté ad. On aura donc $T : T - dT :: \text{sin.} fae : \text{sin.} fac ::$ $\text{sin.} (cae - fac) : \text{sin.} fac :: \text{sin.}\, cae\, \text{cos.} fac -$ $\text{sin.} fac\, \text{cos.}\, cae : \text{sin.} fac$. Mais $cae = 180^d - cah$; donc (*Géom.* 279) $\text{sin.}\, cae = \text{sin.}\, cah$, & $\text{cos.}\, cae =$ $- \text{cos.}\, cah$; or l'angle cah étant infiniment petit, on a $\text{cos.}\, cah = 1$. Donc $T : T - dT :: \text{sin.}\, cah\, \text{cos.} fac +$

$\sin. fac : \sin. fac$; donc $T \sin. fac = T \sin. cah \cos. fac + T \sin. fac - dT \sin. cah \times \cos. fac - dT \sin. fac$; ou, en supprimant de part & d'autre $T \sin. fac$, & omettant, comme on le doit, le terme $dT \sin. cah \cos. fac$, qui, à cause que l'angle cah est infiniment petit, rend ce terme infiniment plus petit que $dT \sin. fac$, on aura $dT \sin. fac = T \sin. cah \cos. fac$, ou $dT \tang. fac = T \sin. cah$ en divisant par $\cos. fac$.

Concevons (55) les rayons de la développée ar, dr aux points a & d. L'angle cah sera égal à ard, puisque ar, dr sont perpendiculaires sur ab, ad ou ah; or dans le triangle rectangle rda, en nommant R le rayon ra de la développée, s la longueur Pba de la corde, & $-ds$ le petit côté ad, parce que T croissant, s diminue; on a $R : -ds :: \sin. ard$ ou $\sin. cah : 1$. Donc $\sin. cah = \frac{-ds}{R}$; donc $dT \tang. fac = \frac{-Tds}{R}$. Mais $\tang. fac = \tang. f$, en appelant f l'angle du frottement; donc $dT \tang. f = \frac{-Tds}{R}$, ou $dT = \frac{-Tds}{R \tang. f}$. C'est-là l'équation qui servira à déterminer la force T avec laquelle la corde est tendue en un point quelconque de la longueur s, tant en vertu de la force P qui lui est appliquée, qu'en vertu du frottement.

810. Si le frottement étoit nul; alors l'angle du frottement seroit de 90^d; $\tang. f$ seroit donc infinie; &

par conséquent la valeur de dT seroit infiniment petite, c'est-à-dire $=0$. La corde seroit donc tendue également dans tous ses points, & cela doit être en effet (569).

811. Nous nous bornerons à faire usage de cette équation, pour les cordes roulées sur des surfaces cylindriques.

Pour ces sortes de surfaces, le rayon R de la développée est constant & égal au rayon de la section circulaire du cylindre. L'équation $dT = \frac{-T\,ds}{R\,\text{tang.}\,f}$, ou $\frac{dT}{T} = \frac{-ds}{R\,\text{tang.}\,f}$, est donc facile à intégrer, & donne $\log. T = \frac{-s}{R\,\text{tang.}\,f} + C$.

Pour déterminer la constante C, il faut remarquer qu'au point m où la corde quitte la surface, la tension T devient égale à la force P. Soit donc a la longueur de la partie mP; il faut donc que lorsque $s=a$ on ait $T=P$. On aura donc $\log. P = \frac{-a}{R\,\text{tang.}\,f} + C$; & par conséquent $C = \log. P + \frac{a}{R\,\text{tang.}\,f}$. Donc $\log. T = \log. P + \frac{a-s}{R\,\text{tang.}\,f}$, ou $\log. P - \log. T = \frac{s-a}{R\,\text{tang.}\,f}$, ou enfin $\log. \frac{P}{T} = \frac{s-a}{R\,\text{tang.}\,f}$; ce qui donne le rapport de la tension T à la force P, en un point quelconque de la corde.

Pour appliquer ceci à un exemple ; supposons dans la *figure 122*, que la résistance du fardeau P tende la partie de corde qui, en le tirant, touche le cylindre, avec une force de $3000^{liv.}$. Que le rayon du cylindre soit de $6^{po.}$; le rayon du cable de $1^{po.}$; ensorte que nous devons ici prendre pour R, $7^{po.}$ ou $\frac{7}{12}$ de pied. Que la corde fasse quatre tours autour du cylindre. On demande quelle est la force T nécessaire pour empêcher la corde de glisser sur le cylindre, en supposant que le frottement soit le quart de la pression, ce qui donne $tang. f = 4$?

Il est facile de voir que les quatre tours de corde, seront une longueur de $\frac{44^{pi.}}{3}$. On a donc $s - a = \frac{44}{3}$; $P = 3000^{liv.}$, $R = \frac{7}{12}$, & $tang. f = 4$.

Donc $log. \frac{P}{T} = log. \frac{3000}{T} = \frac{\frac{44}{3}}{\frac{7}{12} \times 4} = \frac{44}{7}$. Mais comme ce logarithme est hyperbolique ; pour trouver $\frac{P}{T}$ par le moyen des Tables ordinaires, il faut (88) multiplier son logarithme $\frac{44}{7}$, par 0,4342945, & l'on aura $log. \frac{3000}{T} = 2{,}7298511$; ou $log. 3000 - log. T = 2{,}7298511$; donc $log. T = log. 3000 - 2{,}7298511 = 3{,}4771213 - 2{,}7298511 = 0{,}7472702$, qui dans les Tables répond à 5,59 ou $5\frac{3}{5}$; donc $T = 5^{liv.}\frac{3}{5}$; donc une force de $5^{liv.}\frac{3}{5}$ suffira, à l'aide du frottement des quatre tours de corde, pour empêcher la corde d'un pouce de rayon, de glisser sur le cylindre de 6 pouces de rayon, le frottement étant le quart de la pression, & l'effort qu'elle doit arrêter étant de $3000^{liv.}$.

812. Mais comme cette solution suppose que la corde touche exactement la surface dans tous ses

points, elle donneroit l'effet du frottement beaucoup plus grand qu'il ne doit être, si on y employoit le même angle du frottement que l'on auroit déterminé pour faire glisser une surface sur une autre. Comme il ne seroit pas facile de déterminer directement le rapport de la partie qui touche, à la totalité des vides que laissent les torons de la corde, voici comment, à l'aide de la formule précédente, on pourra suppléer à ce défaut de connoissance; nous avons trouvé que f représentant l'angle du frottement nécessaire pour mettre une partie quelconque de la corde sur le point de glisser; nous avons trouvé, dis-je, que la corde étant supposée toucher le cylindre par tous ses points, on auroit $log. \frac{P}{T} = \frac{s-a}{R \, \text{tang.} \, f}$, P étant la force qui tend la corde à l'un des points où elle touche le cylindre; T la force qui tend tout autre point de la corde appliquée sur le cylindre; & enfin $s-a$ la partie de corde comprise entre ces deux points.

Supposons donc que l'on ait passé sur un cylindre d'un rayon connu (*fig. 178*) une corde $pABCq$, de même diamètre que celle dont il s'agit; & qu'à l'une des extrémités on ait appliqué un poids connu q; que l'on charge successivement l'autre extrémité jusqu'à ce que le poids p soit sur le point de faire glisser la corde; il est clair qu'en nommant b la longueur de la partie enveloppée ABC, r le rayon du cylindre, y compris celui de la corde; on aura $log. \frac{q}{p} = \frac{b}{r\,tang.\,f}$; d'où l'on conclura $tang. f = \frac{b}{r\,\log. \frac{q}{p}}$.

Ayant ainsi déterminé par expérience la valeur de $tang. f$, on calculera la valeur de T, pour chaque cas, précisément comme dans l'exemple ci-dessus.

De la roideur des Cordes.

813. La roideur des cordes, ou la difficulté qu'on éprouve à les faire plier selon une courbure donnée, est encore une des causes qui diminuent l'effet des forces appliquées aux machines.

Pour se former une idée de la manière dont cette roideur préjudicie aux effets des forces, représentons-nous que le tambour ou la poulie ABC (*fig.* 179) est mobile autour de l'essieu R, sans aucun frottement; les deux poids P & Q étant égaux, si l'on augmente tant soit peu l'un des deux, le poids Q, par exemple, le mouvement ne s'ensuivra qu'autant que la corde $PABCQ$ sera parfaitement flexible. En effet, concevons que la corde $PABCQ$, au lieu d'être parfaitement flexible, ne le soit point du tout, ensorte que les parties AP, CQ soient des verges roides & solidement liées au corps de la poulie; il est clair

clair que si l'on force la poulie de se mouvoir suivant *ABC*, les deux poids *P* & *Q* prendront les situations *P'* & *Q'*; mais qu'ils tendront à revenir à leur première situation, & qu'il faudra une force particulière pour les maintenir dans cette nouvelle situation. Si donc la corde n'est ni parfaitement inflexible, ni parfaitement flexible, on voit que ce que le défaut de flexibilité parfaite occasionnera, sera que le point *A* (*fig. 180*) passant en *A'*, & le point *C* en *C'*, les parties *AP*, *CQ*, se courberont un peu, & de manière que le poids *P* sera plus loin de *R*, & le poids *Q* plus près, que si la corde étoit parfaitement flexible; ensorte que pour obliger les parties *A'O*, *CC'* de devenir tangentes aux points *A* & *C*, il faudra que la force qui tend à faire tourner, augmente; en un mot, il faudra employer une force qui n'auroit pas lieu sans ce défaut de flexibilité.

814. La poulie étant toujours supposée parfaitement mobile sur son essieu *R*, si au lieu d'une corde on emploie un ruban; alors, la plus légère augmentation dans le poids *Q* feroit tourner la poulie. Mais si l'on met ensuite une corde, on verra qu'il faut augmenter la puissance *Q*, & l'augmenter d'autant plus 1°. que la somme des deux poids *P* & *Q*, ou en général, que la charge totale qui tend la corde,

ſera plus conſidérable ; parce que, toutes choſes d'ailleurs égales, la réſiſtance que les deux poids P & Q font ſentir, lorſque par la roideur de la corde, ils prennent les ſituations $A'OP'$, $CC'Q'$, eſt d'autant plus conſidérable, que ces poids mêmes le ſont davantage.

2°. L'augmentation qu'il faudra donner à Q, doit être d'autant plus grande auſſi, que la poulie, ou en général la ſurface ſur laquelle la corde s'enveloppe, ſera d'un plus petit rayon. Car il eſt viſible que la difficulté que la puiſſance éprouve, venant de ce que la corde au lieu de s'appliquer contre la ſurface, à meſure que celle-ci tourne, en reſte éloignée à une certaine diſtance, en prenant une courbure $P'OA'$ qui forme un certain angle $OA'A$ avec la ſurface ; cette difficulté ſera d'autant plus grande que la courbure $A'O$ que la corde prend par ſon défaut de flexibilité, différera plus de la courbure de la ſurface : or plus le rayon de la ſurface ſera petit, & plus cette différence ſera grande.

3°. La puiſſance doit encore être augmentée à proportion de ce que le diamètre de la corde ſera plus conſidérable. En effet, on ſent aiſément que la corde ſe fléchira d'autant moins qu'elle ſera plus groſſe ; or nous venons de voir que la réſiſtance que la puiſſance éprouve eſt d'autant plus grande, qu'il y a plus de différence entre la courbure de $A'O$, & la courbure de $A'A$; elle est donc d'autant plus grande que $A'O$ pourra moins s'éloigner de la ligne droite; c'est-à-dire, d'autant plus grande, que le diamètre ou le rayon de la corde est plus grand.

815. Supposons que k soit l'augmentation qu'il faut donner à une puissance pour vaincre la résistance provenante de la roideur des cordes, lorsque la force totale qui tend la corde est P, que le diamètre de la corde qui porte ce poids est D, & que le rayon de la surface ABC est R. Si l'on veut savoir ce que doit être cette augmentation, lorsque le poids sera p, le diamètre de la corde d, & le rayon de la surface r; on observera, d'après ce qui vient d'être dit, que s'il n'y avoit de différence que dans le poids total qui tend la corde, on auroit cette augmentation, par la proportion $P : p :: k$: à un quatrième terme, qui seroit $\frac{pk}{P}$. Mais si outre la différence dans le poids, il y en a aussi dans les courbures des surfaces; alors selon la seconde observation, qui fait voir que les augmentations provenantes de cette cause, sont en raison inverse des rayons des surfaces, l'augmentation dûe à cette cause, & au changement de poids, sera le quatrième terme de cette proportion $r : R :: \frac{pk}{P}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{pRk}{Pr}$.

Enfin pour déterminer ce qui seroit dû aux trois causes réunies, ayant égard à la troisième observation, on calculera le quatrième terme de cette proportion, $D : d :: \frac{pRk}{Pr}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{pRkd}{PrD}$. Ensorte que la résistance dans le premier cas, sera à la résistance, dans le second, $:: k : \frac{pRkd}{PrD}$ ou $:: PrD : pRd$, ou $:: \frac{PD}{R} : \frac{pd}{r}$; c'est-à-dire, que les résistances provenantes de la roideur des cordes, sont comme les poids qui tendent ces cordes, multipliés par les diamètres de ces mêmes cordes, & divisés par les rayons des surfaces sur lesquelles elles doivent être roulées.

Au reste, ces conclusions ne sont pas bien rigoureuses; mais on peut les regarder comme suffisantes dans la pratique, en attendant que l'expérience ait éclairci davantage cette matière: l'expérience fait voir en effet que la résistance dûe à la roideur des cordes suit à peu près cette loi; mais toutes les expériences qui ont été faites sur cette matière, n'ont pas encore un accord tel qu'on pourroit le desirer. Ce qu'on peut faire de mieux, est de s'appliquer à rendre les cordes plus souples qu'elles ne le sont. Voyez l'excellent *Traité de la Corderie* de M. Duhamel, tant pour cet objet que pour la force & les autres qualités des cordes.

De la manière d'estimer les Forces appliquées aux machines.

816. Nous avons déjà dit plusieurs fois, que la mesure d'une force quelconque, étoit le produit de la multiplication d'une masse déterminée, par la vîtesse que cette force est capable de lui donner. Il est à propos d'ajouter ici quelques éclaircissemens sur l'application de ce principe à la mesure des forces appliquées aux machines.

Lorsque deux poids agissent l'un sur l'autre, à l'aide d'une poulie simple & fixe; il faut, ainsi que nous l'avons vu, pour qu'ils se fassent équilibre, que leurs masses soient égales; & cet équilibre peut durer éternellement.

Mais si au lieu d'opposer un poids, à un poids, on oppose la force d'un animal, celle d'un homme, par exemple; quoiqu'il soit bien vrai que pour l'équilibre, cet homme ne doive employer qu'un effort égal au poids qu'il a à soutenir, c'est-à-dire, un effort égal à la quantité de mouvement qui résulte de la masse de ce corps multipliée par la vîtesse que la pesanteur lui donne dans un instant; il est clair, néanmoins, que si cet homme n'étoit capable que d'un pareil effort, l'équilibre ne dureroit qu'un instant; parce que la pesanteur renouvelle au second instant, l'action qui a été détruite dans le poids, au premier instant.

Ce n'est donc pas par la masse seule que l'homme soutient, qu'on doit juger de sa force; il faut nécessairement faire entrer encore dans la mesure de cette force, le nombre de fois qu'il est capable d'exercer une action égale à celle que la pesanteur fait passer à chaque instant, dans le poids. Or si p représente la vîtesse que la pesanteur est capable de donner en une seconde de temps, à un corps libre; & dt une portion infiniment petite d'un temps quelconque t; pdt sera (173) la vîtesse qu'elle donne pendant l'instant dt, t étant supposé compté en secondes. Donc si M est la masse qu'il s'agit de soutenir, $Mpdt$ sera son poids, ou la quantité de mouvement que la pesanteur lui donne à chaque instant dt: c'est donc aussi l'effort que sera obligé d'exercer à chaque instant, la force qui doit soutenir la masse M, soit immédiatement, soit à l'aide d'une poulie. Donc pendant un temps quelconque t, cette force aura dû consumer une quantité de mouvement égale à $\int Mpdt$, c'est-à-dire, $= Mpt$. Donc si t marque le temps au bout duquel l'agent n'est plus en état de soutenir la masse M, on pourra regarder Mpt comme étant la mesure de sa force. Sur quoi il faut observer, que nous n'entendons pas par-là, qu'il ne ſera plus capable d'exercer aucun effort ; mais ſa force étant devenue inférieure à l'effet qu'il s'agit de produire, eſt alors cenſée nulle quant à cet effet.

Par exemple, ſuppoſons que pour ſoutenir un poids de $50^{liv.}$ pendant une heure de temps, on veuille employer une force que l'on ſache d'ailleurs être telle qu'agiſſant par degrés égaux & infiniment petits, elle peut parvenir à faire naître dans une maſſe de $20^{liv.}$ une vîteſſe qui ſoit de 50 pieds par ſeconde, au moment où cette force ſera épuiſée : je vois qu'alors cette maſſe de $20^{liv.}$ auroit une quantité de mouvement $= 20^{liv.} \times 50 = 1000$. Voyons donc ſi cette quantité de mouvement eſt au moins égale à ce que devient la quantité Mpt, en y mettant $50^{liv.}$ pour M, 1^{heure} ou $3600''$ pour t, & 30,2 pieds (172) pour p : il eſt évident qu'il s'en faut de beaucoup ; donc une pareille force ne ſoutiendroit pas le poids de $50^{liv.}$ pendant une heure. Si l'on veut ſavoir pendant quel temps, ou quel nombre de ſecondes elle le ſoutiendroit, il n'y a qu'à ſuppoſer $Mpt = 1000$; & mettant 50 pour M, & 30,2 pieds pour p, on aura $t = \frac{1000}{50 \times 30,2} = \frac{1000}{1510} = \frac{100}{151} = \frac{2''}{3}$ à peu près ; c'eſt-à-dire, qu'une pareille force ne ſoutiendroit un poids de $50^{liv.}$, que pendant $\frac{2}{3}$ de ſeconde, à peu près.

817. Suppoſons, maintenant, qu'il s'agit non-ſeulement de ſoutenir la maſſe M pendant un temps t,

mais encore de la mouvoir pendant ce temps, avec une vîteſſe uniforme & connue, u.

Il eſt clair que pour que l'agent ait pu faire naître dans le mobile M, ſoit ſucceſſivement, ſoit ſubitement, la vîteſſe u; il a dû conſumer une quantité de mouvement $= Mu$; & pour entretenir cette vîteſſe u pendant le temps t, il a fallu qu'il lutte pendant ce même temps, contre la peſanteur, de la même manière que ſi le corps eût été en repos; c'eſt-à-dire (816) qu'il a dû, en outre, conſumer une quantité de mouvement $= Mpt$; donc pour entretenir le mobile M avec la vîteſſe u pendant le temps t, l'agent doit être capable de produire une quantité de mouvement $= Mu + Mpt$.

818. L'expérience a fait voir que ſi l'on applique un homme à la manivelle Q d'un treuil tel que celui de la *figure 121*, il peut agir pendant huit heures, & faire faire à la manivelle 30 tours par minute, en ſuppoſant 1°. que le rayon du cylindre & celui de la manivelle ſont égaux & chacun de 14 pouces; 2°. que le poids appliqué à la ſurface du treuil eſt de 25$^{\text{liv.}}$. Cette expérience détermine la valeur de $Mu + Mpt$, & par conſéquent ce au-delà de quoi on ne doit point compter dans l'évaluation de la force d'un homme appliqué à une machine, & qui doit agir pendant un certain temps. En effet, puiſque le

rayon de la manivelle & celui du cylindre ſont égaux, le poids fait ici le même chemin que la puiſſance. Ainſi puiſque ce rayon eſt de 14 pouces; à chaque tour, la puiſſance parcourt $28 \times \frac{22}{7}$ ou 88 pouces; & puiſqu'elle fait 30 tours par minute, à chaque ſeconde elle décrit donc 44 pouces, ou $\frac{44}{12}$ de pied; c'eſt-à-dire, que la vîteſſe $u = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$. La maſſe $M = 25^{\text{liv.}}$, $p = 30^{\text{p}},2$ & $t = 8^{\text{h}} = 28800''$. Les ſubſtitutions faites, dans $Mu + Mpt$, on a $Mu + Mpt = \frac{275}{3} + 21744000 = 21744092$. C'eſt par ce nombre qu'on pourra juger ſi avec la force d'un homme, on peut attendre tel ou tel effet que l'on ſe propoſe.

Par exemple, ſi l'on demande s'il eſt poſſible qu'un homme appliqué à la même machine que dans cet exemple, puiſſe mouvoir un poids de $60^{\text{liv.}}$ avec une vîteſſe de 10 pieds par ſeconde, pendant 6 heures, on verra qu'on ne doit pas y compter. En effet, ici on auroit $M = 60^{\text{liv.}}$; $u = 10$; $p = 30,2$; $t = 21600''$; ce qui donneroit $Mu + Mpt = 600 + 39139200 = 39139800$, qui ſurpaſſant de beaucoup 21744092, fait voir qu'un ſeul homme travaillant continuellement pendant ſix heures, n'eſt pas capable d'un pareil effort.

819. Dans tout ceci, nous avons fait abſtraction du frottement. Lorſque la machine a atteint l'uniformité, qui eſt l'état où il convient de conſidérer les machines, l'effet du frottement doit être conſidéré

comme constant, & on peut le comparer à une nouvelle masse qu'il s'agiroit de mouvoir avec la masse proposée. Ainsi, dans le même cas que ci-dessus, supposant que le frottement équivaut au poids d'une partie connue $\frac{n}{m}$ de la masse M, cette résistance exigera de la part de la puissance, une quantité de mouvement $= \frac{n}{m} Mpt$; ensorte que $Mu + \frac{n}{m} Mpt + Mpt$, ou $Mu + \left(\frac{n}{m} + 1\right) Mpt$, sera la mesure de la force motrice.

Dans l'expérience ci-dessus, quoique l'auteur qui la rapporte (Desaguilliers, *Cours de Physique Expérimentale*, *Tom. II, p. 594*) n'ait point parlé de l'effet du frottement, on doit penser qu'il le comprend tacitement dans le résultat de l'expérience. Si donc on suppose qu'eu égard à ce que l'axe a dû être d'un rayon beaucoup plus petit que celui du cylindre, le frottement ait été la douzième partie du poids, il faudra en négligeant Mu, comme on le peut ici, augmenter le nombre 21744000 de sa douzième partie; & alors la force d'un homme, en pareilles circonstances, doit être représentée par le nombre 23556000. On voit donc que pour être en état de donner une estimation suffisante de la force d'un homme, il faut préalablement s'assurer du rapport de la force du frottement, à celle du poids, dans l'expérience que l'on fait dans la vue de déterminer cette force. Alors ſi k eſt la valeur que cette expérience donne pour $\left(\frac{n}{m}+1\right)Mpt$, on aura $\left(\frac{n}{m}+1\right)Mpt=k$, en négligeant Mu; c'eſt-à-dire, lorſque u eſt petit par rapport à pt. Cette équation ſervira à juger dans toute autre ſuppoſition ſur la valeur de $\frac{n}{m}$, ſi la force d'un homme ſuffira pour mouvoir le poids M, pendant le temps propoſé t. On doit raiſonner de même pour la force du cheval ou de tout autre animal. On eſtime qu'un cheval peut, par un travail ſoutenu pendant pluſieurs heures, faire autant que ſept hommes; enſorte que la force d'un homme étant évaluée à $25^{\text{liv.}}$, celle d'un cheval doit être eſtimée de $175^{\text{liv.}}$.

820. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons regardé l'agent, comme s'il agiſſoit immédiatement ſur le poids, & comme s'il ne tiroit aucun avantage des circonſtances locales & des machines. Pluſieurs circonſtances peuvent ſouvent permettre de compter ſur un effet plus grand qu'il ne réſulteroit des ſeules conſidérations que nous venons d'expoſer. Par exemple, dans l'uſage de la poulie, un homme peut ajouter à ſa propre force, le poids de ſon corps, ou une bonne partie de ce poids; & il y a beaucoup d'autres circonſtances, & de machines, où il peut s'en aider. Souvent le

mouvement n'eſt pas continu, mais ſe fait par repriſes comme il arrive dans la poulie : & s'il y a de la perte de temps, il peut y avoir auſſi un bénéfice en ce que, par les repos alternatifs, l'agent peut être plus long-temps capable de la même action. Nous ne nous arrêterons point à ces détails, dont il ſera toujours facile de tenir compte, en ſuivant l'eſprit de ce que nous venons de dire, & ſur-tout en s'appuyant ſur des expériences, dans leſquelles on ait eu ſoin de diſcuter ce qui appartient à chacune des cauſes dont l'action de la force motrice dépend.

821. Quoique nous n'ayions conſidéré que le cas où le poids tranſmet toute ſa réſiſtance à la puiſſance, il n'en eſt pas moins facile, d'après ce que nous avons dit ſur le rapport du poids à la puiſſance, dans chaque machine, de déterminer de même, ſi à l'aide de telle ou telle machine, une puiſſance propoſée produira un effet propoſé. Par exemple, dans le treuil, ſi le rayon du cylindre eſt r; & celui de la roue, R; pour que le poids ſe meuve avec la vîteſſe u, il faut que la puiſſance y ait employé une quantité de mouvement $\frac{Mur}{R}$; & puiſque pendant le temps t, l'action de la peſanteur fait paſſer dans le corps M, la quantité de mouvement Mpt, la puiſſance doit employer à ſoutenir cet effort, la quantité de mouvement $\frac{Mptr}{R}$;

enfin si le frottement est équivalent à la partie $\frac{n}{m}$ de la masse M supposée appliquée à la distance r, la puissance aura encore à employer la quantité de mouvement $\frac{n}{m} \frac{Mptr}{R}$, ensorte que pour juger si la puissance pourra mouvoir avec la vîtesse u, pendant le temps t, la masse M, sur un treuil dont le rayon du cylindre seroit r, & celui de la roue, R; il faudra déterminer, par expérience, la valeur de $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right) \frac{Mptr}{R}$, en appliquant à un treuil de dimensions & d'un frottement connus, un moteur qui meuve une masse connue; & observant le temps pendant lequel ce moteur peut continuer son action, alors si k est la valeur qu'on aura trouvée en mettant pour M, u, r, R, $\frac{n}{m}$, & t, les valeurs que ces quantités ont eues dans l'expérience; il faudra dans tout autre cas, que $\frac{Mur}{R} + \left(\frac{n}{m} + 1\right) \frac{Mptr}{R}$ n'ait pas une valeur plus grande que k.

822. Pareillement, sur le plan incliné, la puissance tirant parallèlement au plan, avec une vîtesse u; si on appelle i l'inclinaison du plan, $Mpt \sin. i$ sera (426) la quantité de mouvement que la pesanteur fera passer successivement dans le mobile suivant la direction du plan, pendant le temps t; ainsi la puissance aura dû employer une quantité de mouvement $= Mu + Mpt \sin. i$; & si le frottement

eſt une partie $\frac{n}{m}$ du poids, elle aura dû employer une quantité de mouvement $= Mu + Mpt \; \textit{ſin.}\; i + \frac{n}{m} Mpt$. Ayant donc déterminé, par expérience, une valeur de $Mu + Mpt \; \textit{ſin.}\; i + \frac{n}{m} Mpt$, il faudra, lorſqu'on voudra déterminer ſi la même puiſſance peut mouvoir une maſſe déterminée M, avec une vîteſſe connue u, pendant un temps connu t, ſur un plan dont l'inclinaiſon eſt i, & ſur lequel le frottement eſt une partie connue du poids; il faudra, dis-je, examiner ſi la valeur qu'aura alors $Mu + Mpt \; \textit{ſin.}\; i + \frac{n}{m} Mpt$ eſt plus petite que celle de l'expérience, ou tout au plus égale: & alors la choſe ſera poſſible.

Si le temps t, pendant lequel la machine doit être en mouvement, n'étoit pas donné, mais que l'on connût l'eſpace que la puiſſance ou le poids doit parcourir; par exemple, celui que le poids doit parcourir avec la vîteſſe u; alors comme on ſuppoſe que le mouvement eſt uniforme, ſi l'on appelle E l'eſpace qu'on a deſſein que le poids parcoure, on mettroit au lieu de t ſa valeur $\frac{E}{u}$ (156).

Telle eſt, en ſubſtance, la manière dont on doit ſe conduire dans l'évaluation des forces appliquées aux machines. Chaque machine peut exiger des conſidérations particulières, eu égard à la nature de l'agent, & à la manière dont il peut être appliqué à cette machine. Mais c'eſt toujours en remontant à la quantité de mouvement que cet agent doit conſumer, qu'on eſtimera s'il eſt capable d'un effet propoſé ; & les principes que nous venons d'expoſer, pourront guider utilement dans ces recherches.

APPENDICE

Où l'on traite plus particulièrement du mouvement des projectiles dans un milieu résistant.

823. NOUS avons donné (501 & *suiv.*) un premier essai de la manière de déterminer la courbe décrite par les projectiles, dans un milieu résistant ; il s'agit actuellement de satisfaire à ce que nous y avons promis ; savoir, de donner à l'équation un plus grand degré d'exactitude, & d'avoir égard à la variation de densité. Avant que d'entrer dans la discussion de l'un & de l'autre de ces deux points, il est à propos de fixer, d'une manière plus positive que nous ne l'avons fait (515 & *suiv.*) quel est le véritable effet de notre première approximation sur les portées.

824. Nous avons vu (517) qu'à ne considérer que la partie variable de la valeur de dx, l'effet de cette approximation devoit être de rendre les portées trop courtes ; mais nous avons observé en même temps que comme la constante qu'on doit ajouter à l'intégration, dépendoit elle-même de cette approximation, elle contribueroit, pour la plus grande partie,

partie, à compenser l'erreur résultante de cette approximation, ensorte que même pour des angles de projection assez grands, l'équation donneroit les portées avec assez d'exactitude.

L'effet réel de cette constante, est non-seulement de compenser ce dont la supposition que nous avons faite, tend à rendre les portées trop courtes; mais encore de les rendre un peu plus grandes qu'elles ne doivent être; & voici comment on peut s'en convaincre.

Reprenons l'équation $\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a}\ log.\ \frac{C - \frac{2az}{1-zz}}{C - a\ \text{tang.}\ I}$ qui résulte de l'intégration faite (520).

Quoique dans les très-grandes vîtesses, C soit une fort petite quantité, elle est néanmoins toujours plus grande que $a\ tang.\ I$, & par conséquent, à plus forte raison, plus grande que $\frac{2az}{1-zz}$ dans la branche ascendante; puisque $\frac{2z}{1-zz}$ est plus petit que $tang.\ I$. Donc on peut (87) supposer $log.\left(C - \frac{2az}{1-zz}\right) = -\frac{a}{C} \times \frac{2z}{1-zz} - \frac{aa}{2CC} \times \frac{4z^2}{(1-zz)^2}$, &c. & $log.\ (C - a\ tang.\ I) = -\frac{a}{C}\ tang.\ I - \frac{aa}{2CC} \times tang.^2 I$, &c. Donc $\frac{1}{a} log.\ \frac{C - \frac{2az}{1-zz}}{C - a\ \text{tang.}\ I} = \frac{2px}{k^2} = \frac{1}{C}\left(tang.\ I - \frac{2z}{1-zz}\right) + \frac{a}{2CC}\left(tang.^2 I - \frac{4z^2}{(1-zz)^2}\right)$ + &c. Donc, puisqu'en ſuppoſant que *a* conſerve ſa valeur initiale, qui eſt la plus grande qu'il puiſſe avoir dans la branche aſcendante, on ſuppoſe à *a* une valeur plus grande qu'il ne l'a en effet, il s'enſuit qu'on rend trop grande l'amplitude de la branche aſcendante.

On prouvera de même que la portée eſt augmentée depuis le point de la plus grande élévation, juſqu'au point où la branche deſcendante fait, avec l'horizon, un angle égal à l'angle de projection, & qu'enſuite elle eſt diminuée.

825. Il ne faut pas croire cependant que l'erreur qui en réſulte puiſſe être conſidérable. Entre cette méthode & la ſeconde que nous donnerons, & dont l'effet eſt de rendre les portées plus courtes qu'elles ne ſont réellement, la différence ne commence à ſe faire ſentir que pour des vîteſſes très-grandes.

Pour des vîteſſes de projection, telles que le ſuppoſent les épreuves de bombes rapportées ci-deſſous, c'eſt-à-dire, pour des vîteſſes initiales de 4 à 500 pieds par ſeconde, les deux méthodes ne s'écartent pas l'une de l'autre de 6 toiſes ſur la valeur de la plus grande portée; & c'eſt ſur les plus grandes portées qu'elles doivent différer le plus.

Quant aux vîteſſes initiales de 14 à 1500 pieds par ſeconde, qui ſont même au-deſſus de celles que les épreuves rapportées ci-deſſous, attribuent aux boulets de 24, chaſſés avec 8$^{\text{liv.}}\frac{1}{2}$ de poudre, qui eſt l'une des plus fortes charges; la différence des plus grandes portées, ſelon les deux méthodes, eſt d'environ 100 toiſes; & comme l'une donne trop & l'autre trop peu, enſorte que l'erreur moyenne de l'une & de l'autre méthode ne peut être évaluée à plus de 50 ou 60 toiſes; on voit que même pour les plus grandes vîteſſes que donnent les bouches à feu, l'erreur qui peut réſulter de l'une ou de l'autre approximation eſt inférieure à celles que l'on ne peut éviter dans la pratique.

826. Comme la ſeconde méthode de calculer les portées, eſt d'un calcul plus pénible que la première, & que le degré d'approximation qu'elle donne de plus n'eſt pas conſidérable; on pourroit donc, ſans de grandes erreurs, s'en tenir à la première méthode pour le calcul des épreuves ci-deſſous, dont nous allons bientôt rendre compte.

Mais on peut donner à cette première méthode un degré d'exactitude très-approchant de celui de la ſeconde, en calculant ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante. D'après le raiſonnement par lequel nous venons de prouver que la première méthode donne les portées totales trop grandes, on verra qu'en calculant ſéparément, comme nous allons l'enſeigner, la branche aſcendante & la branche deſcendante, ſi la partie de l'amplitude qui répond à la première eſt un peu trop forte, la partie de l'amplitude qui répond à la ſeconde ſera un peu trop foible; enſorte que le réſultat ſera très-approchant de celui que donneroit la ſeconde méthode d'approximation, par une voie plus pénible.

C'eſt ainſi que nous nous y ſommes pris pour calculer les portées de boulets, mais en ayant égard à la variation de la denſité.

827. Il paroît très-difficile de donner une méthode directe d'approximation pour calculer l'effet de la denſité, laquelle puiſſe être appliquée aux cas où le projectile s'élève auſſi haut que le font les boulets de 24, lorſque l'angle de projection eſt fort grand. Mais au défaut de méthodes directes, on peut en employer d'indirectes, & dont l'exactitude ſoit ſuffiſante pour l'objet dont il s'agit ici.

C'eſt donc à la première méthode d'approximation que nous allons appliquer ce que nous avons à dire ſur la manière d'avoir égard au changement de denſité, mais en prenant ſéparément, pour plus d'exactitude, la branche aſcendante & la branche deſcendante. Nous ferons voir enſuite la ſeconde méthode d'approximation, laquelle donneroit plus rigoureusement la courbe, si la densité étoit constante; nous ferons voir aussi comment dans cette seconde approximation on peut avoir égard au changement de densité : ensorte que par ce moyen on aura des limites fort étroites pour la valeur des portées.

828. Reprenons donc l'équation primitive $\frac{2p\,dx}{k^2} = -\frac{d\left(\frac{2z}{1-zz}\right)}{C - \frac{z+z^3}{(1-zz)^2} - \frac{1}{2}\log.\frac{1+z}{1-z}}$ que nous avons trouvée (506). Nommons H l'angle que la courbe fait avec l'horizon en un point quelconque, & nous aurons $\frac{2z}{1-zz} = tang.\,H$, & $z = tang.\frac{1}{2}H$. Or $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} = \frac{2z}{1-zz} \times \frac{1}{2}\,\frac{1+zz}{1-zz} = \frac{1}{2}\,tang.\,H \times \frac{1+tang.^2\frac{1}{2}H}{1-tang.^2\frac{1}{2}H} = \frac{1}{2}\,tang.\,H \times \frac{cos.^2\frac{1}{2}H + sin.^2\frac{1}{2}H}{cos.^2\frac{1}{2}H - sin.^2\frac{1}{2}H} = \frac{1}{2}\,tang.\,H\,\frac{1}{cos.^2\frac{1}{2}H - sin.^2\frac{1}{2}H}$; mais (*Géom.* 287) $cos.^2\frac{1}{2}H - sin.^2\frac{1}{2}H = cos.\,H$; donc $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{tang.\,H}{cos.\,H} = \frac{1}{2}\,tang.\,H\,séc.\,H$.

D'un autre côté, $log.\,\frac{1+z}{1-z} = log.\,\frac{1+tang.\frac{1}{2}H}{1-tang.\frac{1}{2}H} = log.\,tang.\,(45^d + \frac{1}{2}H)$.

L'équation de la courbe devient donc $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{-d\,tang.\,H}{C - \frac{1}{2}\,tang.\,H\,séc.\,H - \frac{1}{2}\log.\,tang.\,(45^d + \frac{1}{2}H)}$, ou $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{-d\,tang.\,H}{C - tang.\,H\,[\frac{1}{2}\,séc.\,H + \frac{1}{2}\,cot.\,H\,log.\,tang.\,(45^d + \frac{1}{2}H)]}$.

La quantité $\frac{1}{2}\,séc.\,H + \frac{1}{2}\,cot.\,H\,log.\,tang.\,(45^d + \frac{1}{2}H)$ eſt donc ce que nous avons appelé a dans le calcul expoſé (519 & *ſuiv.*), & que nous avons ſuppoſé conſtant & égal à ſa valeur initiale. Cette quantité n'eſt pas conſtante en effet; mais l'erreur qui peut réſulter de cette ſuppoſition eſt petite, ainſi que nous l'avons déjà dit, & qu'on peut le voir encore en obſervant lorſque la vîteſſe eſt fort grande, 1°. que l'angle H ne commencera à varier ſenſiblement qu'après que le boulet a déjà décrit une grande partie de ſon trajet. 2°. Que l'erreur qui peut en réſulter ſur la valeur de dx n'eſt pas à beaucoup près proportionnel à la variation de a; mais qu'après avoir été croiſſante juſqu'à un certain terme, elle diminue enſuite juſqu'à s'anéantir, & recroît enſuite, puis diminue juſqu'à s'anéantir, & enfin croît dans la dernière partie de la branche deſcendante, où elle produit un effet contraire ſur les portées; on verra facilement toutes ces conſéquences, en comparant l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{C - a\,\text{tang.}\,H}$ à l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{C - \text{tang.}\,H\,[\frac{1}{2}\,\text{séc.}\,H + \text{cot.}\,H\,\text{log. tang.}\,(45^d + \frac{1}{2}H)]}$ & obſervant que ces deux équations reviennent abſolument à la même dans trois points de la courbe, ſavoir, au point de départ, au ſommet, & au point de la branche deſcendante qui a la même inclinaiſon que le point de départ.

829. Quand la densité est constante, l'équation peut donc être représentée d'une manière assez approchée par l'équation $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{C - a\,\text{tang.}\,H}$ dans laquelle $a = \frac{1}{2}\,\textit{séc.}\,I + \frac{1}{2}\,\textit{cot.}\,I\,\textit{log. tang.}\,(45^d + \frac{1}{2}I)$, I étant l'angle de projection.

830. Pour la rendre propre à représenter la courbe lorsque la densité est variable, je supposerai qu'elle a la même forme, mais diffère seulement par des constantes : c'est-à-dire, qu'au lieu de supposer $dx = \frac{\frac{k^2}{2p} \times -d\,\text{tang.}\,H}{C - a\,\text{tang.}\,H}$ je supposerai $dx = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,H}$. Cette supposition est ici d'autant plus permise, que la variation de densité n'est pas considérable : ensorte que l'équation dans l'hypothèse d'une densité constante, & l'équation dans l'hypothèse d'une densité qui varie peu, doivent être peu différentes l'une de l'autre. Je représente $\frac{2p}{k^2}$ par $2D$. Cela posé, l'équation générale étant

$$dx = \frac{-\frac{1}{2D} \times d\,\text{tang.}\,H}{C - \text{tang.}\,H\,[\frac{1}{2}\,\text{séc.}\,H + \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,H\,\text{log. tang.}\,(45^d + \frac{1}{2}H)]}.$$

Je détermine A & B par ces deux conditions. 1°. Qu'au point de départ, la densité, ou la quantité $2D$ qui lui est proportionnelle, soit égale à la valeur connue qu'elle doit avoir en ce point. 2°. Qu'au sommet de la courbe, où $H = 0$, la densité, ou la quantité $2D$ qui lui est proportionnelle, soit égale à la valeur qu'elle doit avoir en ce point, & que je représente par $2D'$.

J'aurai donc ces deux équations. . . . .

$\frac{-d\ \text{tang.}\ H}{A - B\ \text{tang.}\ I} = \frac{-\frac{1}{2D} \times d\,(\text{tang.}\ H)}{C - a\ \text{tang.}\ I}$; parce que $a = \frac{1}{2}\ \textit{séc.}\ I + \frac{1}{2}\ \textit{cot.}\ I\ \textit{log. tang.}\ (45^{d} + \frac{1}{2} I)$,

$$\& \frac{-d\ \text{tang.}\ H}{A} = -\frac{1}{2D'}\,\frac{d\ \text{tang.}\ H}{C}.$$

De ces deux équations, je tire . . . .

$A = 2CD'$, & $B = 2Da - \frac{2C(D - D')}{\text{tang.}\ I}$.

Les valeurs de A & B étant ainsi déterminées, j'ai donc $dx = \frac{-d\ \text{tang.}\ H}{A - B\ \text{tang.}\ H}$, & par conséquent $x = C' + \frac{1}{B}\ \textit{log.}\ (A - B\ \textit{tang.}\ H)$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{B}\ \textit{log.}\ \frac{A - B\ \text{tang.}\ H}{A - B\ \text{tang.}\ I}$, en déterminant la constante C' par la condition que $x = 0$, lorsque $H = I$, ainsi que cela doit être.

Comme rien n'exprime, dans cette équation, la variation de la densité dans la branche descendante, nous ne devons l'employer qu'à déterminer l'amplitude de la branche ascendante. Faisant donc $\textit{tang.}\ H = 0$, si on appelle X l'amplitude de cette branche, on aura $X = \frac{1}{B}\ \textit{log.}\ \frac{A}{A - B\ \text{tang.}\ I}$; & comme $A - B\ \textit{tang.}\ I = 2D\,(C - a\ \textit{tang.}\ I)$;

& que (520) $C - a$ *tang.* $I = \frac{k^2}{4ph\,\text{cof.}^2 I} = \frac{1}{4Dh\,\text{cof.}^2 I}$; on aura donc $X = \frac{1}{B}$ *log.* $2Ah$ *cof.*$^2 I$.

831. Avant que de calculer l'amplitude de la branche defcendante, il faut avoir la valeur de la plus grande ordonnée, ou de la plus grande hauteur à laquelle s'élèvera le projectile. Or, on a en général (503) $\frac{dy}{dx} =$ *tang.* H, ou $dy = dx$ *tang.* H; donc, puifque $dx = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,H}$, on aura $dy = \frac{-\text{tang.}\,H\,d\,(\text{tang.}\,H)}{A - B\,\text{tang.}\,H} = \frac{d\,\text{tang.}\,H}{B} - \frac{A}{B}\,\frac{d\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,H}$; donc $y = C'' + \frac{\text{tang.}\,H}{B} + \frac{A}{BB}$ *log.* ($A - B$ *tang.* H). Et puifque y doit être zéro lorfque $H = I$, on aura donc $y = \frac{\text{tang.}\,H - \text{tang.}\,I}{B} + \frac{A}{BB}$ *log.* $\frac{A - B\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,I}$.

Faifant donc $H = 0$, & nommant Y la plus grande ordonnée, on aura. . . . . $Y = \frac{-\text{tang.}\,I}{B} + \frac{A}{BB}$ *log.* $\frac{A}{A - B\,\text{tang.}\,I}$; c'eft-à-dire, $y = \frac{-\text{tang.}\,I + AX}{B}$.

Venons à la branche defcendante.

832. Pour déterminer l'équation de cette branche, j'imagine que le boulet part du fommet de la courbe,

chassé horizontalement avec la vîtesse qu'il y a réellement. L'équation de la courbe, qui est généralement $dx =$

$$\frac{-\frac{1}{2D}\,d\,\text{tang.}\,H}{C - \text{tang.}\,H\left[\frac{1}{2}\,\text{séc.}\,H + \text{cot.}\,H\,\log.\,\text{tang.}\,(45^d + \frac{1}{2}H)\right]},$$

sera, puisque H est négatif, $dx = \ldots\ldots$

$$\frac{\frac{1}{2D'}\,d\,(\text{tang.}\,H)}{C' + \text{tang.}\,H\left[\frac{1}{2}\,\text{séc.}\,H + \text{cot.}\,H\,\log.\,\text{tang.}\,(45^d + \frac{1}{2}H)\right]}.$$

C' étant la constante qui convient à la vîtesse initiale de la projection actuelle. Je suppose donc, à l'imitation de ce que nous avons fait ci-dessus, que cette équation puisse être représentée par $dx = \frac{d\,\text{tang.}\,H}{A' + B'\,\text{tang.}\,H}$, & je détermine A' & B' par la condition que la densité, ou la quantité $\frac{2p}{k^2}$ qui lui est proportionnelle, soit $2D'$ au sommet, & $2D$ au point de chute.

Représentant donc par a' la valeur de. . . . . $\frac{1}{2}$ *séc.* $H + \frac{1}{2}$ *cot.* H *log. tang.* $(45^d + \frac{1}{2}H)$, au point de chute, j'aurai pour déterminer A' & B', les deux équations suivantes. . . . .

$\frac{\frac{1}{2D}\;d\,\text{tang.}\,H}{C'} = \frac{d\,\text{tang.}\,H}{A'}$, & $\frac{\frac{1}{2D}\;d\,(\text{tang.}\,H)}{C' + a'\,\text{tang.}\,I'} =$ $\frac{d\,\text{tang.}\,H}{A' + B'\,\text{tang.}\,I'}$, en appellant I' l'angle de chute.

De ces deux équations, on tire $A' = 2C'D'$, & $B' = 2Da' + \frac{2C'(D - D')}{\text{tang.}\,I'}$. Déterminons donc C'.

Nous avons trouvé (504) $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = C - \frac{z + z^3}{(1 - zz)^2} - \frac{1}{2} \log. \frac{1 + z}{1 - z}$; c'est-à-dire, $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = C -$ tang. $H [\frac{1}{2}$ *féc.* $H + \frac{1}{2}$ *cot.* H *log. tang.* $(45^d + \frac{1}{2} H)]$; mais puisque, par l'hypothèse, on peut prendre $\frac{1}{A - B \text{ tang. } H}$ au lieu de $\frac{1}{2D[C - \text{tang. } H(\frac{1}{2} \text{ féc. } H + \&c.)]}$ on a $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A - B \text{ tang. } H}{2D}$; donc au sommet de la branche ascendante, on a $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A}{2Dk^2}$. Pareillement on a, pour la branche descendante, $C' +$ *tang.* $H (\frac{1}{2}$ *féc.* $H + \&c.) = \frac{k'^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A' + B' \text{ tang. } H}{2D'}$; donc, au sommet, on a $\frac{k'^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'}$ & $\frac{A'}{2D'} = C'$. Donc $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'k'^2} = \frac{A}{2Dk^2}$. Mais puisque $\frac{p}{k^2} : \frac{p}{k'^2} :: D : D'$, on aura $D'k'^2 = Dk^2$; donc $A' = A$, & $C' = \frac{A'}{2D'}, = \frac{A}{2D'}, = C$; donc enfin $A' = 2CD'$, & $B' = 2Da' + \frac{2C(D - D')}{\text{tang. } I'}$.

Nous verrons dans un moment, comment on détermine a' & *tang.* I'; poursuivons la recherche de l'équation.

Puisque $dx = \frac{d \text{ tang. } H}{A' + B' \text{ tang. } H}$, on aura donc $x = \frac{1}{B'} \log. \frac{A' + B' \text{ tang. } H}{A'}$, en observant que x doit être zéro, lorsque *tang.* $H = 0$.

A l'égard de y, on a $\frac{dy}{dx} = -$ *tang.* H; donc $dy = -dx\,tang.\,H = -\frac{\text{tang.}\,H\,d\,\text{tang.}\,H}{A' + B'\,\text{tang.}\,H} = -\frac{1}{B'}\,d\,tang.\,H + \frac{A'}{B'} \times \frac{d\,\text{tang.}\,H}{A' + B'\,\text{tang.}\,H}$; donc $y = C'' - \frac{1}{B'}\,tang.\,H + \frac{A'}{B'B'}\,log.\,(A' + B'\,tang.\,H)$. Or, lorſque *tang.* $H = 0$, on doit avoir $y = Y$; donc, $y = Y - \frac{\text{tang.}\,H}{B} + \frac{A'}{B'B'}\,log.\,\frac{A' + B'\,\text{tang.}\,H}{A'}$. Tirant de l'équation en x, la valeur de $log.\,\frac{A' + B'\,\text{tang.}\,H}{A'}$, & celle de *tang.* H, & les ſubſtituant dans celle-ci, on aura enfin $y = Y + \frac{A'}{B'}\,x - \frac{A'}{B'B}\,(e^{B'x} - 1)$, e étant le nombre dont le logarithme eſt 1.

Comme Y eſt déterminé par l'équation . . . . . $Y = \frac{A\,X - \text{tang.}\,I}{B}$ trouvée ci-deſſus, on aura donc la ſeconde partie x de la portée ou l'amplitude de la branche deſcendante, en ſubſtituant au lieu de x, dans l'équation qui donne y, ſucceſſivement pluſieurs nombres, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui donne $y = 0$.

833. Mais comme A' & B' dépendent de D, D', a, a', *tang.* I, *tang.* I', il s'agit de ſavoir comment on détermine ces dernières quantités.

D eſt donné immédiatement par ſa valeur $\frac{p}{k^2}$.

A l'égard de D', il eſt à D comme la denſité au ſommet de la courbe, eſt à la denſité connue au point de départ. Or il eſt plus que ſuffiſant, dans la recherche actuelle, de prendre pour denſité au ſommet de la courbe, celle qui convient à la plus grande ordonnée de la courbe, déterminée dans la ſuppoſition d'une denſité conſtante. Ainſi on déterminera la plus grande ordonnée, par ce qui a été dit (539), & la denſité par ce qui a été dit (341); d'où on conclura facilement D'.

A l'égard de *tang.* I', il ſuffit de le connoître à peu près; ainſi on peut, en toute ſûreté, prendre pour I' l'angle de chute de la courbe décrite dans la ſuppoſition d'une denſité conſtante; angle que l'on déterminera facilement dès qu'on aura trouvé la portée dans cette ſuppoſition, par la méthode donnée (519 & *ſuiv.*) Car l'équation $y = x\left(\text{tang.}\,I + \frac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}\right) - \frac{k^4}{8a^2p^2h\,\text{coſ.}^2 I}\left(e^{\frac{2apx}{k^2}} - 1\right)$ que nous avons trouvée (519) pour les cas de la denſité conſtante, étant différenciée, donne $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,I - \frac{k^2}{4aph\,\text{coſ.}^2 I}\left(e^{\frac{2apx}{k^2}} - 1\right)$. Or $\frac{dy}{dx}$ eſt la tangente de l'angle d'inclinaiſon de courbe à l'horiſon; ce ſera donc la tangente de l'angle de chute, ſi on y met pour x la valeur qui convient à $y=0$, dans l'équation $y=x$ (*tang.* I + &c.) — &c. c'est-à-dire la portée dans la supposition d'une densité constante.

La valeur de a' étant ce que devient. . . . . . $\frac{1}{2}$ *séc.* $H + \frac{1}{2}$ *cot.* H *log. tang.* $(45^d + \frac{1}{2} H)$ lorsque $H' = I'$, on aura donc aisément a' dès qu'on aura I'; & cette valeur de a' n'exige pas plus de scrupule que celle de I'.

834. Comme la valeur de a, & celle de a', c'est-à-dire, en général, comme la valeur de $\frac{1}{2}$ *séc.* $H + \frac{1}{2}$ *cot.* H *log. tang.* $(45^d + \frac{1}{2} H)$ est fondamentale dans la recherche actuelle; nous avons jugé devoir en dresser la Table suivante, qui ne peut manquer d'avoir son utilité.

TABLE DES VALEURS de la quantité appelée a *dans le calcul de la résistance de l'air au mouvement des projectiles.*

degrés.		degrés.		degrés.	
0.	1,00000	30.	1,05306	60.	1,38017
1.	1,00005	31.	1,05727	61.	1,40616
2.	1,00020	32.	1,06171	62.	1,43429
3.	1,00045	33.	1,06640	63.	1,46484
4.	1,00081	34.	1,07134	64.	1,49807
5.	1,00127	35.	1,07596	65.	1,53433
6.	1,00184	36.	1,08206	66.	1,57402
7.	1,00251	37.	1,08787	67.	1,61759
8.	1,00328	38.	1,09400	68.	1,66562
9.	1,00417	39.	1,10001	69.	1,71872
10.	1,00516	40.	1,10730	70.	1,77772
11.	1,00626	41.	1,11452	71.	1,84355
12.	1,00748	42.	1,12215	72.	1,91740
13.	1,00881	43.	1,13022	73.	2,00071
14.	1,00912	44.	1,13875	74.	2,09531
15.	1,01184	45.	1,14777	75.	2,20349
16.	1,01354	46.	1,15741	76.	2,32824
17.	1,01536	47.	1,16752	77.	2,47344
18.	1,01732	48.	1,17826	78.	2,64428
19.	1,01942	49.	1,18973	79.	2,84788
20.	1,02165	50.	1,20189	80.	3,09418
21.	1,02404	51.	1,21483	81.	3,39753
22.	1,02657	52.	1,22862	82.	3,77960
23.	1,02926	53.	1,24333	83.	4,27430
24.	1,03212	54.	1,25903	84.	4,93833
25.	1,03514	55.	1,27583	85.	5,87383
26.	1,03834	56.	1,29381	86.	7,28508
27.	1,04172	57.	1,31310	87.	9,90478
28.	1,04530	58.	1,33382	88.	14,39754
29.	1,04907	59.	1,35612	89.	28,69102
30.	1,05306	60.	1,38017	90.	infinie.

835. Voici donc à quoi se réduit le calcul des portées, eu égard à la variation de densité.

$\frac{p}{k^2}$ étant déterminé comme nous l'avons fait (524); h étant donné, ou étant conclu par la méthode expliquée (525), de quelque épreuve faite sous un angle connu, on commencera par calculer la portée, la plus grande ordonnée, & l'angle de chute, dans la supposition que la densité soit constante; ce que l'on fera par ce qui a été dit (520 & 539), & par ce qui vient d'être dit pour l'angle de chute.

La plus grande ordonnée fera connoître la densité au sommet de la courbe, par ce qui a été dit (341). On connoîtra donc $2D$, & $2D'$.

A l'égard de C, il est toujours facile à calculer, puisque (519) nous avons trouvé $C = \frac{k^2}{4ph\cos^2. I} + a\ tang.\ I.$

Par l'angle de projection, on aura a, & par l'angle de chute on aura a', à l'aide de la Table précédente. On aura donc toutes les quantités qui entrent dans A, A', B & B', & par conséquent on aura ces quantités elles-mêmes.

On calculera donc l'amplitude X de la branche ascendante, & sa plus grande ordonnée Y, à l'aide des équations $X = \frac{1}{B}\ log.\ 2\,Ah\,cos.^2 I$, & $Y = \frac{AX - \text{tang.}\, I}{B}$.

Ces quantités étant calculées, on déterminera l'amplitude de la branche descendante, par l'équation .... $y = Y + \frac{A'x}{B'} - \frac{A'}{B'B'}\left(e^{B'x} - 1\right)$, en substituant successivement pour x différentes valeurs, jusqu'à ce qu'on en trouve une qui donne $y = 0$. Ce sera la seconde partie de la portée, laquelle étant ajoutée à X, donnera la portée totale.

C'est

* *Mécanique*, *II*[e]. *partie*, *p.* 433.

TABLE DES PORTÉES DE BOMBES, *calculées* 1°. *en supposant que l'air ne résiste pas;* 2°. *ayant égard à la résistance de l'air, & comparées aux Portées observées dans les épreuves faites à la Fère, au mois d'Octobre 1771, par les ordres de M.*[gr] *le Marquis* DE MONTEYNARD, *Secrétaire d'État ayant le département de la Guerre, & sous la direction de M.* DE BEAUVOIR, *Brigadier des armées du Roi, Commandant en chef l'école d'Artillerie.*

ANGLES de PROJECTION.	PORTÉES CALCULÉES Sans égard à la résistance.	Eu égard à la résistance.	PORTÉES OBSERVÉES.	DURÉE DES PORTÉES Sans la résistance.	Eu égard à la résistance.	Selon l'Expérience.	ANGLES de CHUTE.
degrés.	toises.	toises.	toises.	secondes.	secondes.	secondes.	degrés.
10	253	227	257. 249. 221. 228.	$4\frac{1}{5}$	$4\frac{1}{20}$	4	14.
20	476	396	440. 424. 394. 398.	$8\frac{3}{10}$	8	$7\frac{1}{3}$	26.
30	640	500	451. 516. 537. 492.	$12\frac{1}{5}$	$11\frac{3}{10}$	$10\frac{3}{4}$	36.
40	728	547	569. 575. 574. 544. 577.	$15\frac{3}{5}$	$14\frac{2}{5}$	$14\frac{2}{3}$	48.
43	738	549	506. 517. 543. 509. 544.	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{5}$	14	$50\frac{1}{2}$.
45	739	547	490. 536. 505. 489. 554.	$17\frac{1}{5}$	$15\frac{4}{5}$	$15\frac{1}{5}$	$52\frac{2}{3}$.
50	728	534	481. 512. 488. 507.	$18\frac{3}{5}$	$16\frac{9}{10}$	16	$57\frac{1}{2}$.
60	640	467	457. 424. 457. 448.	21	$19\frac{3}{10}$	$19\frac{1}{3}$	68.
70	476	348	349. 297. 349. 328.	$22\frac{4}{5}$	$20\frac{7}{10}$	22	74.
75	370	277	298. 265. 261. 256.	$23\frac{2}{5}$	$21\frac{7}{10}$	22	78.

Les bombes dont on a fait usage dans ces épreuves, étoient de 11 pouces 10 lignes de diamètre, du poids de 142$^{liv.}$, y compris la terre dont on les avoit remplies; & elles ont été chassées avec 3$^{liv.}$ $\frac{3}{4}$ de poudre.

C'eſt de cette manière que nous avons calculé les portées de boulets que l'on voit dans la ſeconde Table ci-après.

Quant aux épreuves de bombes que l'on voit dans la Table ci-jointe, nous les avons toutes calculées ſans aucun égard à la variation de denſité, parce que les hauteurs auxquelles elles ont dû s'élever dans les plus grandes portées, qui ſont celles où l'effet de la variation de denſité eſt le plus ſenſible, ſont trop petites pour exiger ce ſcrupule. Nous les avons donc calculées par la méthode expoſée (520); & leur durée par la méthode donnée (542).

836. Pour mettre en état de juger juſqu'à quel point la ſuppoſition que la courbe décrite eſt une parabole, écarte de l'état réel des choſes, nous avons compris dans cette Table, les portées telles qu'elles auroient dû être ſi l'air ne faiſoit pas de réſiſtance ſenſible. Ayant remarqué, dans le procès-verbal qui a été dreſſé à l'occaſion de ces épreuves, que les portées ſous 10 & ſous 20 degrés avoient été accompagnées de quelques difficultés de pratique, nous n'avons employé ni l'un ni l'autre de ces angles pour déterminer la force de la poudre, mais nous avons pris la portée moyenne ſous 30 degrés; c'eſt de celle-ci que nous avons conclu, par la méthode expoſée (525), la valeur de k, ou la hauteur dûe à la vîteſſe de projection; c'eſt-à-dire la force de la poudre dans ces épreuves. Nous avons trouvé $h = 370$ toiſes; ce qui fait voir (176) que la vîteſſe avec laquelle la bombe étoit chaſſée, étoit une vîteſſe à parcourir 366 pieds par ſeconde, dans le vide.

A l'égard de la quantité $\frac{p}{k^2}$, voici comment nous l'avons déterminée. On doit ſe rappeler (501) que $\frac{p}{k^2} = \frac{nDS}{M}$.

Soit $2r$ le diamètre de la bombe ; on aura, en représentant par $1 : c$, le rapport du diamètre à la circonférence, cr^2 pour la surface du grand cercle de la bombe. Donc (396) on aura $S = \frac{1}{2}cr^2$. Le volume de la bombe sera $\frac{4}{3}cr^3$, & en appelant D' sa densité, on aura $\frac{4}{3}cr^3 D'$ pour sa masse M. D'ailleurs (382) on a $n = \frac{1}{2}$; on aura donc $\frac{p}{k^2} = \frac{3}{16} \times \frac{D}{D'r} = \frac{3}{8}\frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}$. Or le volume de la bombe étant $\frac{4}{3}cr^3$; puisqu'un pied cube d'air pèse $\frac{70^{\text{liv.}}}{850}$, le poids du volume d'air qu'occupe cette bombe, est donc $\frac{4}{3}cr^3 \times \frac{70}{850}$, r étant exprimé en pieds. Mais le poids de la bombe étoit de $142^{\text{liv.}}$, on a donc $D : D' :: \frac{4}{3}cr^3 \times \frac{70}{850} : 142$; & par conséquent $\frac{D}{D'} = \frac{\frac{4}{3}cr^3 \times 7}{85 \times 142}$; & comme le diamètre de ces bombes étoit de 11 pouces 10 lignes, ou de $0^{\text{pi.}},986111$, on aura $\frac{D}{D'} = 0{,}00029325$, & par conséquent $\frac{p}{k^2} =$ $\frac{3}{8} \times 0{,}00029325 \times \frac{1}{0^{\text{pi.}},986111} = \frac{3}{8} \times 0{,}00029325 \times \frac{1}{0^{\text{toi.}},164352}$ $= 0{,}0004812$.

837. Pour multiplier les comparaisons entre la théorie & l'expérience, nous avons aussi calculé, par les moyens enseignés (542), la durée des portées.

838. On peut remarquer sur ces portées, que presque toutes les portées calculées tombent entre les portées observées, & que pour celles qui sortent des limites des portées observées, l'écart est fort petit, & n'excède pas les écarts des portées entre elles. Il en est bien différemment, dans l'hypothèse que l'air ne résiste pas.

A l'égard des durées des portées, on voit avec quelle précision elles s'accordent.

839. Parlons actuellement de la Table des portées des boulets.

Pour plus d'exactitude dans la mesure de la force de la poudre, nous avons d'abord calculé h à l'aide de la portée moyenne sous 5 degrés; puis nous l'avons calculée à l'aide de la portée moyenne sous 10 degrés; & nous avons pris pour h la valeur moyenne entre ces deux-là. L'une & l'autre ont été calculées par la méthode donnée (525), sans égard au changement de densité qui ne produit que très-peu de chose sous ces deux angles. Ainsi la valeur de h étant le résultat moyen de huit observations, doit être regardée comme très-exacte. Nous avons donc trouvé $h = 4393$ toises; ce qui fait voir (176) que la vîtesse du boulet au sortir de la pièce, étoit une vîtesse à parcourir 1262 pieds par seconde, dans le vide. On peut donc estimer à 1262 pieds par seconde, la vîtesse qu'a reçu, dans ces épreuves, le boulet de 24, à la charge de $8^{\text{liv.}} \frac{1}{2}$ de poudre.

A l'égard de $\frac{p}{k^2}$, quoique les boulets dont on a fait usage dans ces épreuves, soient de 24, comme ceux dont il a été question (524); cependant comme ceux-ci ont été supposés avoir $5^{\text{po.}},444$ de diamètre, & que ceux des épreuves actuelles avoient $5^{\text{po.}},5$, nous avons diminué la valeur de $\frac{p}{k^2}$ trouvée (524) dans le rapport de 5,5 à 5,444, ainsi qu'on doit le faire, puisque $\frac{p}{k^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}$ (524). Ainsi nous avons pris $\frac{p}{k^2} = 0{,}00081189$.

840. C'est d'après ces données, & la méthode exposée (520 & 539), que nous avons calculé les portées & les hauteurs où le boulet a dû s'élever, dans la supposition d'une

densité constante. Les unes & les autres sont un peu trop fortes, ainsi que nous l'avons déjà dit ; mais comme ce calcul n'avoit pour objet que de déterminer l'angle de chute, & la densité au sommet de la courbe ; ce calcul est plus que suffisant, pour cet objet. Nous l'avons compris dans la Table, pour faciliter le calcul à ceux des lecteurs qui voudroient le répéter. Quant aux portées calculées, eu égard à la variation de densité, elles ont été calculées par la méthode que nous venons d'exposer (830 *& suiv.*) ; & on doit les regarder comme très-approchantes de ce que donneroit la théorie la plus rigoureuse.

841. On peut juger par la Table ci-après de l'effet prodigieux de la résistance de l'air. Il est fort aisé (474) de calculer, avec la force de la poudre que nous venons de déterminer, quelles auroient dû être les portées si l'air ne résistoit pas. A 45 degrés, par exemple, la portée auroit dû être de 8786 toises. Le calcul fait voir, qu'eu égard à la résistance, cette portée n'a dû être que de 1984 toises ; & l'expérience donne pour portée moyenne 2054 ; ainsi la théorie actuelle peut être ici supposée différer tout au plus de 70 toises à l'égard de l'expérience ; tandis que dans l'hypothèse de la parabole, elle différeroit de 6732 toises ; ainsi l'effet de la résistance de l'air selon l'expérience, est de 6732 toises, & selon la théorie, de 6802 toises.

842. Si on compare les portées calculées aux portées observées, on reconnoîtra facilement qu'elles s'accordent en général aussi bien qu'il est possible de le desirer dans des épreuves sujettes à autant de difficultés de pratique. On ne peut douter du soin avec lequel celles-ci ont été faites. Mais de l'aveu même du Chef éclairé qui a dirigé ces épreuves, quelque soin qu'on apporte à rendre toutes les circonstances

* Mécanique, IIe. partie, p. 437.

TABLE DE COMPARAISON *entre les Portées d'une pièce de 24, chargée à 8liv. ½ de poudre, telles qu'elles seroient 1°. sans la résistance de l'air; 2°. si la densité de l'air étoit la même à différentes hauteurs; 3°. dans l'air, eu égard à la diminution de densité, à mesure que le projectile s'élève; & les portées observées dans les épreuves faites à la Fère, au mois d'Octobre 1771, par les ordres de Mgr le Marquis* DE MONTEYNARD, *Secrétaire d'État ayant le département de la Guerre, & sous la direction de M.* DE BEAUVOIR, *Brigadier des armées du Roi, commandant en chef l'école d'Artillerie.*

ANGLES DE PROJECTION.	PORTÉES				HAUTEURS auxquelles le BOULET a dû s'élever.			DURÉE DES PORTÉES.			ANGLES DE CHUTE.
	Sans la résistance de l'air.	D'après une première approximation, la densité de l'air étant constante.	Ayant égard à la diminution de densité.	Selon l'Expérience.	Sans la résistance de l'air.	D'après une première approximation, la densité de l'air étant constante.	Ayant égard à la diminution de densité.	Sans la résistance de l'air.	Eu égard à la résistance de l'air.	Selon l'Expérience.	
degr.	toises.	toises.	toises.	toises.	toises.	toises.	toises.	secondes.	secondes.	secondes.	degr.
5.	1526	896	902	927 910 898 946	33	25	25	$7\frac{3}{10}$	$6\frac{1}{10}$	7	$8\frac{1}{2}$
10.	3005	1295	1313	1273 1218 1237 1199	133	80	81	$14\frac{1}{2}$	$10\frac{4}{5}$	$10\frac{1}{4}$	18.
15.	4393	1531	1575	1588 1669 1650 1495	294	155	158	$21\frac{3}{5}$	$14\frac{3}{5}$	$15\frac{1}{4}$	32.
20.	5644	1714	1774	1636 1689 1783 1796	514	243	267	$28\frac{3}{5}$	$18\frac{7}{10}$	19	42.
25.	6730	1823	1884	1740 1766 1805 1909	784	342	361	$35\frac{3}{10}$	22	20	50.
30.	7609	1889	1965	1945 1843 2030 1877	1098	447	475	$41\frac{4}{5}$	$25\frac{1}{5}$	$24\frac{1}{2}$	58.
35.	8274	1917	2040	1871 1960 1852 1839	1445	560	609	$47\frac{9}{10}$	28	27	64.
40.	8653	1913	2024	2023 2001 1913 1851 1967	1816	677	737	$53\frac{7}{10}$	$30\frac{4}{5}$	$32\frac{4}{5}$	68.
43.	8764	1896	2001	2210 2163 2146 2221 2176	2044	750	823	57	$32\frac{3}{10}$	34	70.
45.	8786	1879	1984	2094 2040 2167 2032 1955	2197	798	882	$59\frac{1}{10}$	$33\frac{2}{5}$	34	72.
50.	8653	1813	1893	2000 1980 1972 1952	2578	929	1036	64	$35\frac{4}{5}$	36	75.
60.	7609	1581	1646	1689 1584 1766 1487	3295	1173	1358	$72\frac{2}{5}$	$40\frac{1}{5}$	$43\frac{1}{2}$	81.
70.	5644	1202	1211	1123 1271 1351 1194	3879	1350	1668	$78\frac{1}{2}$	44	46	83.
75.	4393	932	937	885 882 917 910	4099	1522	1832	$80\frac{7}{10}$	$45\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	84.

égales, il en est, de l'égalité desquelles il est comme impossible de s'assurer, & qui cependant ont une influence sensible.

C'est à de pareilles causes, sans doute, qu'on doit attribuer deux inégalités que l'on pourra remarquer dans les portées observées sous 35 & sous 43 degrés. 1°. Celles de 35 degrés paroissent en général plus foibles que celles sous 30 degrés, quoiqu'elles dussent être plus fortes, selon l'expérience même, qui les donne plus grandes à 40 degrés. 2°. Les portées sous 43 degrés surpassent celles de 40, de beaucoup plus qu'elles ne paroîtroient devoir le faire. Il est indubitable cependant que dans le voisinage du *maximum* des portées, les différences doivent être plus petites que par-tout ailleurs. On le voit évidemment en comparant les trois différentes espèces de portées calculées dans cette Table ; & on sent d'ailleurs aisément que cela doit être, dans quelque hypothèse de résistance que ce soit.

843. Quoi qu'il en soit, les douze autres portées donnent lieu de regarder la théorie actuelle comme très-approchée ; & vu les difficultés inévitables dans la pratique, on peut douter que la théorie la plus rigoureuse s'accordât mieux avec l'expérience.

844. On peut remarquer dans cette Table, & dans celle que nous avons donnée sur les bombes, que l'angle de la plus grande portée, diffère sensiblement de ce qu'il auroit été dans le vide. Et l'expérience est, en cela, d'accord avec la théorie, quoique l'une & l'autre ne donnent pas le même angle. Mais il paroît très-difficile que l'expérience détermine jamais bien cet angle, parce que les différences des portées dans le voisinage de cet angle, ne pouvant manquer d'être

fort petites, feront au-deffous des différences que la pratique peut avoir entre les portées fous un même angle.

845. A l'égard de la durée des portées; dans le calcul que nous en avons fait, nous n'avons pas eu égard à la variation de denfité; non que cela eût été plus difficile, mais parce que la différence ne peut être que fort petite. Les durées obfervées, que l'on trouve dans la même Table, font les durées moyennes, entre celles qui ont été obfervées pour chacune des quatre portées correfpondantes à un même angle.

846. Faifons voir préfentement comment on peut déterminer plus rigoureufement la courbe décrite dans un milieu d'une denfité uniforme.

La valeur rigoureufe de dx eft donc $dx =$

$$\frac{-\frac{k^2}{2p}\, d\, tang.\, H}{C - \text{tang.}\, H \left[\frac{1}{2}\, \text{féc.}\, H + \frac{1}{2}\, \text{cot.}\, H\, \text{log. tang.}\, (45^d + \frac{1}{2} H)\right]}.$$

Je fuppofe que $\frac{1}{2}$ *fécante* H + $\frac{1}{2}$ *cotangente* H *logarithme tangente* $(45^d + \frac{1}{2} H)$ foit repréfenté par $1 + A\, tang.^2\, H$. Il eft facile de s'affurer par la Table des valeurs de a, donnée ci-deffus (*page 431*), que A fera toujours une quantité fort petite, & qui variera très-peu. Nous pouvons donc regarder A comme une quantité conftante dans toute l'étendue de la courbe; & la valeur conftante, la plus convenable que nous devions lui attribuer, eft fa valeur au point de projection. Nous prendrons donc $A = \frac{-1 + \frac{1}{2} \text{séc. } I + \frac{1}{2} \text{cot. } I \text{ log. tang. } (45^d + \frac{1}{2} I)}{\text{tang.}^2 I} =$ $\frac{a - 1}{\text{tang.}^2 I} = (a - 1) \, cot.^2 \, I$. Nous aurons donc $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d \text{ tang. } H}{C - \text{tang. } H - A \text{ tang.}^3 H}$.

J'observe présentement, 1°. que cette valeur de dx, d'ailleurs très-approchée, coincide avec sa valeur rigoureuse, en trois points de la courbe, savoir, au point de départ, au sommet, & au point de la branche descendante, qui a la même inclinaison que le point de projection. 2°. Que la valeur que nous venons d'attribuer à A étant la plus petite de toutes celles qu'il peut avoir dans la branche ascendante, le dénominateur de dx est en genéral un peu plus grand qu'il ne doit être; d'où, en raisonnant d'une manière semblable à ce que nous avons fait (515 & *suiv.* & 824), on conclura que les portées calculées dans la supposition actuelle, seront un peu plus courtes que les véritables. On aura donc dans cette méthode, & dans celle exposée (503 & *suiv.*), deux limites fort approchées des véritables portées.

847. Venons à l'intégration de la valeur de dx. Faisons $A = \frac{1}{B}$, & nous aurons $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{B \, d \text{ tang. } H}{-BC + B \text{ tang. } H + \text{tang.}^3 H}$. Soit c la racine réelle de

l'équation $tang.^3 H + B\ tang.\ H - BC = 0$; si on divise $tang.^3 H + B\ tang.\ H - BC$, par $tang.\ H - c$, on aura, en négligeant le reste de la division (qui, par l'hypothèse, doit être zéro), on aura, dis-je, $tang.^2 H + c\ tang.\ H + B + c^2$ pour le second facteur du dénominateur (*Algèbre*, 146 & 151).

On aura donc $\frac{2p\,dx}{k^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{B\,d\,\text{tang.}\,H}{(\text{tang.}\,H - c)\,(\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2)}.$$

Supposons (108) ce second membre décomposé en ces deux fractions $\frac{D\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H - c}$, & $\frac{E\,\text{tang.}\,H\,d\,\text{tang.}\,H + F\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}$. Nous trouverons (111) $E = -D$, $F = -2Dc$, & $D = \frac{B}{B + 3c^2}$. Nous aurons donc $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{D\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H - c}$ $- \frac{D\,\text{tang.}\,H\,d\,\text{tang.}\,H + 2Dc\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}$, ou $\frac{2p\,dx}{D\,k^2} =$

$$\frac{d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H - c} - \frac{1}{2} \times \frac{2\,\text{tang.}\,H\,d\,\text{tang.}\,H + c\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}$$

$$\frac{-\frac{3}{2}c\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H^2 + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}.$$

Les deux premiers termes sont évidemment des différentielles logarithmiques qui s'intègrent facilement. Quant au troisième, si on fait $tang.\ H + \frac{1}{2}c = z$; puis $B + \frac{3}{4}c^2 = ff$, & $z = fz'$, ce terme deviendra $- \frac{3}{2}\frac{c}{f}\frac{dz'}{z'z' + 1}$ qui (86) est la différentielle d'un arc de cercle dont le rayon est 1, & dont la tangente est z' ou $\frac{z}{f}$ ou $\frac{\text{tang.}\, H + \frac{1}{2} c}{f}$, donc en intégrant nous aurons $\frac{2px}{Dk^2}$ $= \log.\, (\text{tang.}\, H - c) - \frac{1}{2} \log.\, (\text{tang.}^2\, H + c\, \text{tang.}\, H + B + c^2)$ $- \frac{3}{2} \frac{c}{f}$ arc tang. $\left(\frac{\text{tang.}\, H + \frac{1}{2} c}{f}\right) + C'$; ou bien, en déterminant, comme on le doit, la constante C', par la condition que $x = 0$, lorsque $H = I$, & faisant attention que $\text{tang.}^2\, H + c\, \text{tang.}\, H + B + c^2$ $= (\text{tang.}\, H + \frac{1}{2} c)^2 + ff = ff\left[\left(\frac{\text{tang.}\, H + \frac{1}{2} c}{f}\right)^2 + 1\right]$, on aura. ....

$$\frac{2px}{Dk^2} = \log.\, \frac{\text{tang.}\, H - c}{\text{tang.}\, I - c} - \frac{1}{2} \log.\, \frac{\left(\frac{\text{tang.}\, H + \frac{1}{2} c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{tang.}\, I + \frac{1}{2} c}{f}\right)^2 + 1}$$

$$- \frac{3}{2} \frac{c}{f} \left(\text{arc tang.}\, \frac{\text{tang.}\, H + \frac{1}{2} c}{f} - \text{arc tang.}\, \frac{\text{tang.}\, I + \frac{1}{2} c}{f}\right).$$

848. Voyons présentement la valeur de y. Nous avons $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\, H$, ou $dy = dx\, \text{tang.}\, H$,

donc $\frac{2p\,dy}{k^2} = \frac{D\, \text{tang.}\, H\, d\, \text{tang.}\, H}{\text{tang.}\, H - c} -$ $\frac{D\, \text{tang.}^2\, H\, d\, \text{tang.}\, H + 2\, D\, c\, \text{tang.}\, H\, d\, \text{tang.}\, H}{\text{tang.}^2\, H + c\, \text{tang.}\, H + B + c^2}$ qui, en faisant la division partielle, se réduit à $\frac{2p\,dy}{k^2} =$ $\frac{D\, c\, d\, \text{tang.}\, H}{\text{tang.}\, H - c} - \frac{(D\, c - B\, D - D\, c^2)\, \text{tang.}\, H\, d\, \text{tang.}\, H}{\text{tang.}^2\, H + c\, \text{tang.}\, H + B + c^2}$

ou $\frac{2p\,dy}{D\,k^2} = \frac{c\, d\, \text{tang.}\, H}{\text{tang.}\, H - c} - \frac{\frac{1}{2} c\, (2\, \text{tang.}\, H + c)\, d\, \text{tang.}\, H}{\text{tang.}^2\, H + c\, \text{tang.}\, H + B + c^2}$

$$+ \frac{(B + \frac{1}{2} cc)\, d\,\text{tang.}\, H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\, H + B + c^2},$$ équation sur laquelle raisonnant & opérant, comme nous avons fait sur la valeur de dx, on a $\frac{2py}{Dk^2} = c\ log.\ \frac{\text{tang.}\ H - c}{\text{tang.}\ I - c}$

$$- \frac{1}{2}\, c\ log.\ \frac{\left(\frac{\text{tang.}\ H + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{tang.}\ I + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1} + \frac{B + \frac{1}{2}cc}{f}$$

$$\left(arc\ tang.\ \frac{\text{tang.}\ H + \frac{1}{2}c}{f} - arc\ tang.\ \frac{\text{tang.}\ I + \frac{1}{2}c}{f}\right).$$

Ainsi donnant à H telle valeur que l'on voudra dans chacune des deux équations que nous venons de trouver, on aura la valeur de y, & la valeur de x qui lui correspond.

Et pour avoir l'amplitude totale ou la portée, on substituera dans la dernière équation, successivement pour H différentes valeurs négatives, jusqu'à ce qu'on en trouve une qui donne $y = 0$. Alors cette même valeur de H substituée dans l'équation en x, donnera la valeur de x ou la portée.

849. Mais on peut beaucoup simplifier ces valeurs de x & de y; & voici comment :

Nommons M l'arc qui a pour tangente $\frac{\text{tang.}\ H + \frac{1}{2}c}{f}$, & M' celui qui a pour tangente $\frac{\text{tang.}\ I + \frac{1}{2}c}{f}$; nous aurons *arc tang.* $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f} = M$, & par conséquent $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f} = \textit{tang. } M$ & $\textit{tang. } H = f \textit{ tang. } M - \frac{1}{2}c$; on aura pareillement $\textit{tang. } I = f \textit{ tang. } M' - \frac{1}{2}c$. Substituant ces valeurs, on a $\frac{2px}{Dk^2} = \log. \frac{f \text{tang. } M - \frac{3}{2}c}{f\text{tang. } M' - \frac{2}{3}c} - \frac{1}{2}\log. \frac{\text{tang.}^2 M + 1}{\text{tang.}^2 M' + 1} - \frac{3}{2}\frac{c}{f}(M - M')$.

Soit $f = \frac{3}{2}c \textit{ tang. } l$; si on fait atttention à ce que $\frac{\text{sin. } A}{\text{cos. } A} = \textit{tang. } A$, $\textit{cos. } A \textit{ cos. } B - \textit{sin. } A \textit{ sin. } B = \textit{cos. }(A + B)$, on aura $\frac{2px}{Dk^2} = \log. \frac{\text{cos. }(M + l)}{\text{cos. }(M' + l)} \times \frac{\text{cos. } M'}{\text{cos. } M} - \frac{1}{2}\log. \frac{\text{cos.}^2 M'}{\text{cos.}^2 M} - \frac{3}{2}\frac{c}{f}(M - M')$; c'est-à-dire, $\frac{2px}{Dk^2} = \log. \frac{\text{cos. }(M + l)}{\text{cos. }(M' + l)} - \frac{3}{2}\frac{c}{f}(M - M')$. Et par un raisonnement semblable, on trouvera $\frac{2py}{Dk^2} = c \log. \frac{\text{cos. }(M + l)}{\text{cos. }(M' + l)} + \frac{B + \frac{3}{2}c^2}{f}(M - M')$.

850. Et pour récapituler, on aura c en résolvant l'équation $\textit{tang.}^3 H + B \textit{ tang. } H - BC = 0$; f, par l'équation $B + \frac{3}{4}c^2 = ff$; l, par l'équation $\frac{f}{\frac{3}{2}c} = \textit{tang. } l$; M, par l'équation $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f} = \textit{tang. } M$; M' par l'équation $\frac{\text{tang. } I + \frac{1}{2}c}{f} = \textit{tang. } M'$.

M & M' étant trouvés en degrés & minutes, on aura leurs valeurs absolues, en multipliant leurs valeurs en minutes, par 0,0002908882, qui exprime la longueur de l'arc d'une minute; ou bien en ajoutant au logarithme de M & M' comptés en minutes, le logarithme constant 6,4637261, on aura le logarithme de la valeur absolue de M & de M'.

851. D'après ce que nous avons dit (830), il est aisé de voir actuellement comment on peut, dans cette seconde méthode, avoir égard au changement de densité. Faisant $\frac{k^2}{2p} = \frac{1}{2D}$, on supposera que

$$\frac{-\frac{1}{2D}\, d\,\text{tang.}\, H}{C - \text{tang.}\, H\left[\frac{1}{2}\,\text{séc.}\, H + \frac{1}{2}\,\text{cot.}\, H\,\text{log. tang.}\,(45^d + \frac{1}{2} H)\right]}$$

est représenté par $\frac{-d\,\text{tang.}\, H}{A - B\,\text{tang.}\, H - E\,\text{tang.}^3 H}$, & l'on déterminera A, B, E, par les trois équations, $\frac{1}{2D(C - a\,\text{tang.}\, I)} = \frac{1}{A - B\,\text{tang.}\, I - E\,\text{tang.}^3 I}$, $\frac{1}{2D'C} = \frac{1}{A}$, & $\frac{1}{2D(C + a'\,\text{tang.}\, I')} = \frac{1}{A + B\,\text{tang.}\, I' + E\,\text{tang.}^3 I'}$, $\frac{1}{2D'}$ étant la valeur de $\frac{k^2}{2p}$ au sommet de la courbe, & $\frac{1}{2D}$ sa valeur au point de projection, & au point de chute.

852. On voit que, par cette seconde méthode,

on ne ſera pas obligé de calculer ſéparément la branche deſcendante & la branche aſcendante, pour avoir égard au changement de denſité.

853. Parmi les tentatives que l'on a faites juſqu'ici pour déterminer la courbe décrite par les projectiles dans un milieu réſiſtant, nous devons citer particulièrement un Mémoire que M. le chevalier de Borda a lu à l'Académie des Sciences, l'année dernière 1770; cet Académicien y traite le ſujet actuel par une méthode très-ingénieuſe, & d'ailleurs abſolument différente de chacune de celles que nous venons d'expoſer. J'ignore juſqu'à quel degré de préciſion la méthode de cet Académicien peut donner les portées, n'en ayant point calculé par cette voie. Mais les deux méthodes que nous propoſons ici offrent quelques avantages qui leur ſont particuliers; celui de calculer les portées, ſans être obligé néceſſairement à calculer ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante, & celui de donner les limites des portées, ce qui nous ſemble abſolument néceſſaire pour s'aſſurer de l'exactitude de ce genre d'approximation.

854. Nous terminerons en ajoutant une obſervation ſur ce que nous avons dit (416 & *ſuiv.*)

ſur les cauſes du recul. On doit encore, parmi ces cauſes, compter la maſſe de la poudre elle-même, ainſi que l'a très-bien obſervé M. le chevalier d'Arcy, dans ſon eſſai ſur la théorie de l'Artillerie. Quelque petite que ſoit la maſſe du fluide élaſtique qui ſe développe pendant chaque portion infiniment petite de la durée de l'inflammation de la poudre, l'extrême vîteſſe avec laquelle toute cette matière eſt lancée hors de la pièce, ſuppoſe une quantité de mouvement, & par conſéquent une réaction contre la pièce, qui ne peut être à négliger. Mais il paroit très-difficile de déterminer la loi ſuivant laquelle s'exerce l'action dépendante de la maſſe de la poudre.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

vertical

De l'Équilibre et du Mouvement dans les Machines.

APPENDICE, où l'on traite plus particulièrement du mouvement des Projectiles dans un milieu résistant.

Fin de la Table des Matières.

EXTRAIT DES REGISTRES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES;

Du 11 Décembre 1771.

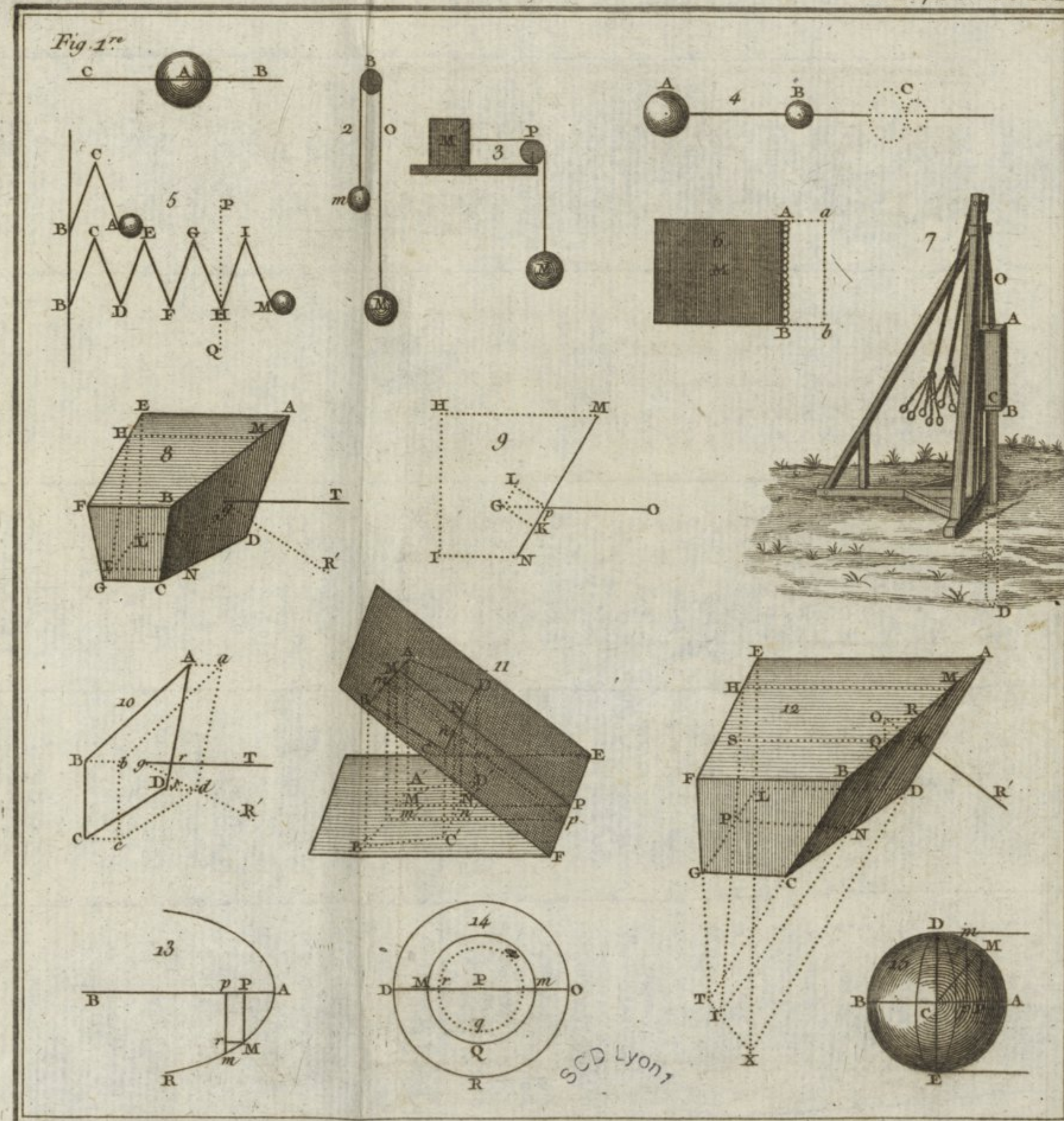
M.[rs] D'ALEMBERT, DU SÉJOUR & VANDER-MONDE, qui avoient été nommés pour examiner les troisiéme & quatrième Volumes du *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps de l'Artillerie*, par M. BÉZOUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression. A Paris, le onze Décembre mil sept cent soixante-onze.

Signé *GRANDJEAN DE FOUCHY*,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

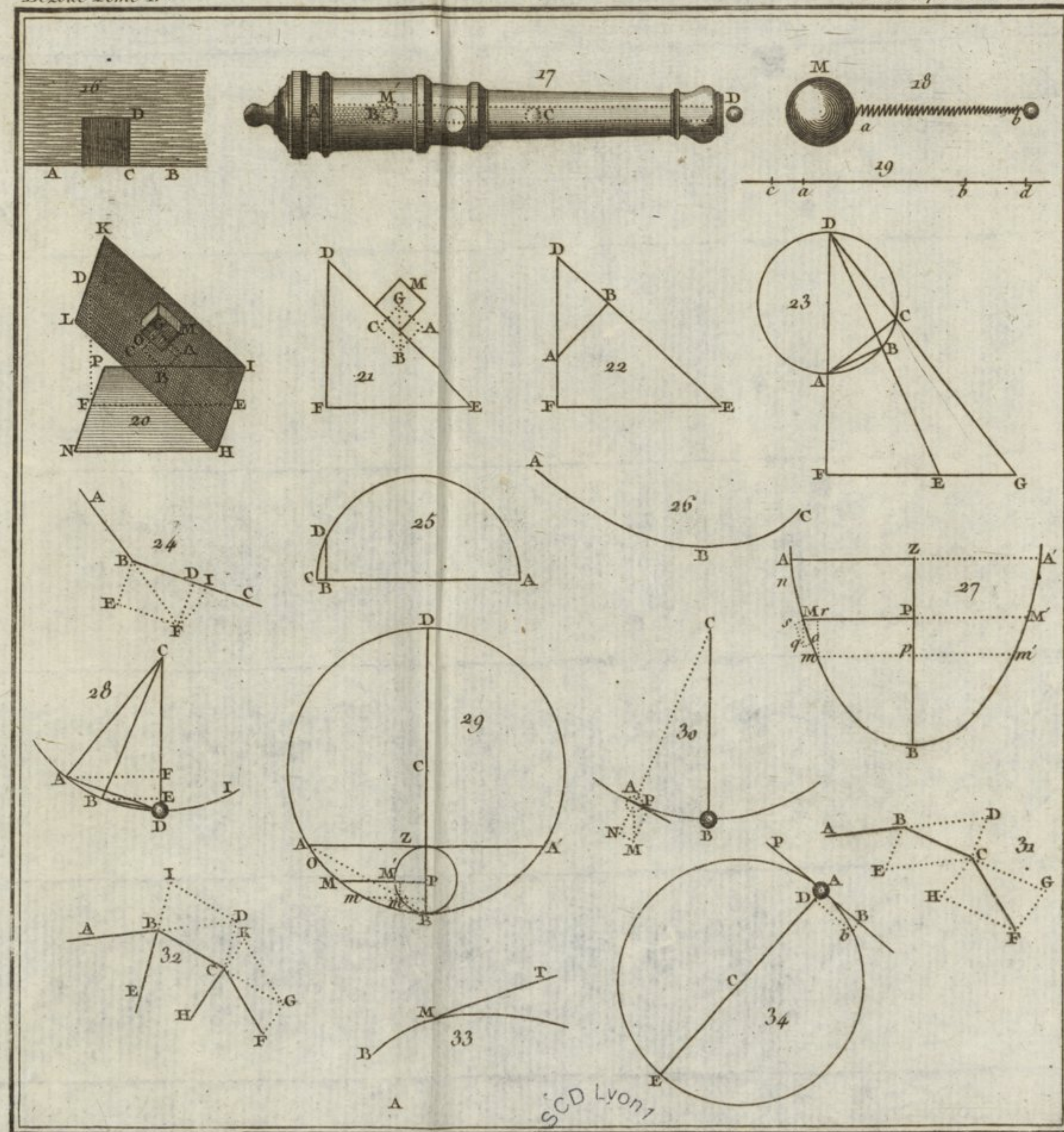
Faute à corriger.

Page 170, ligne 19, au lieu de (*page 155*), lisez (*page 146*).

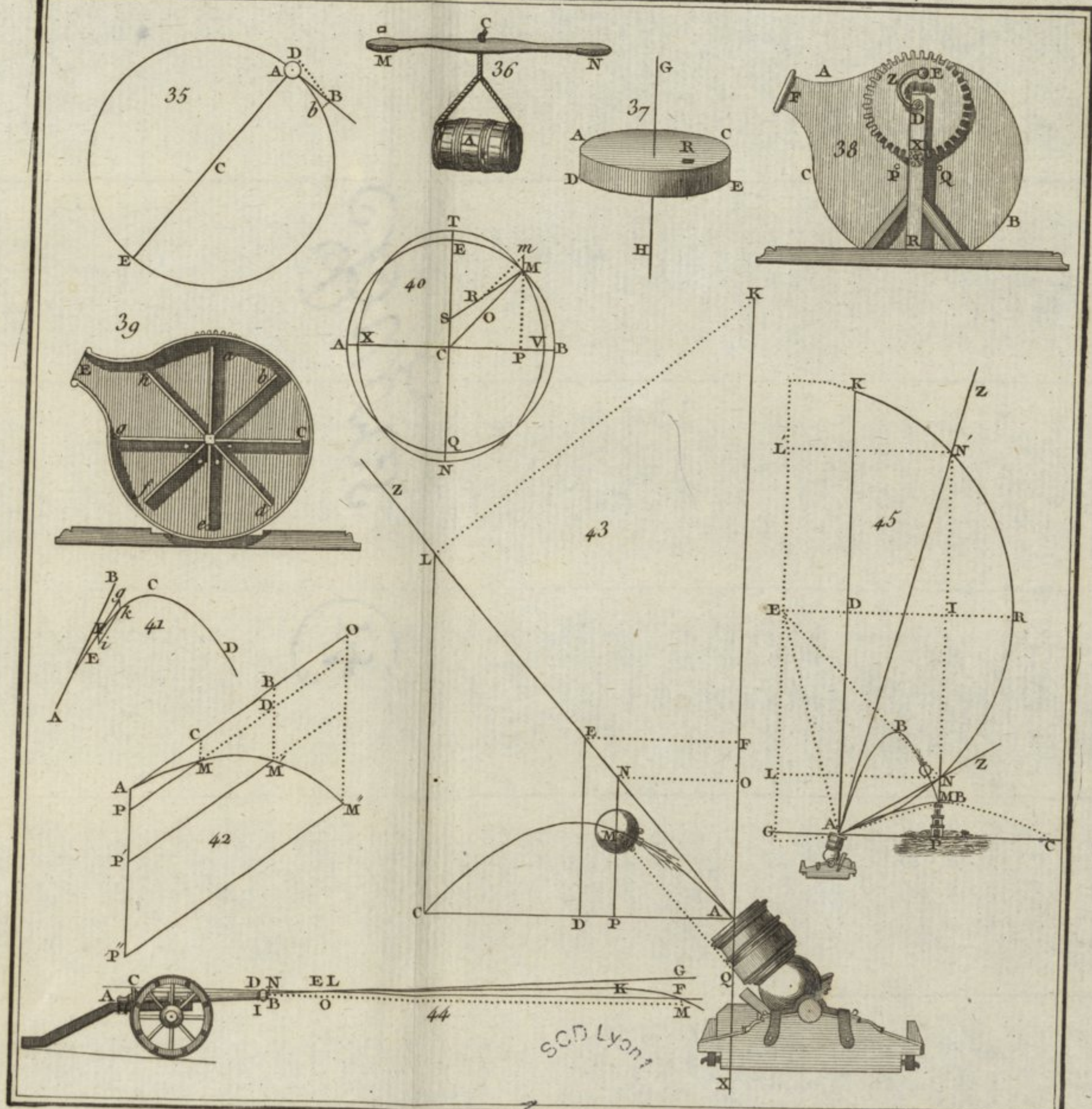
De l'Imprimerie de STOUPE, rue de la Harpe.



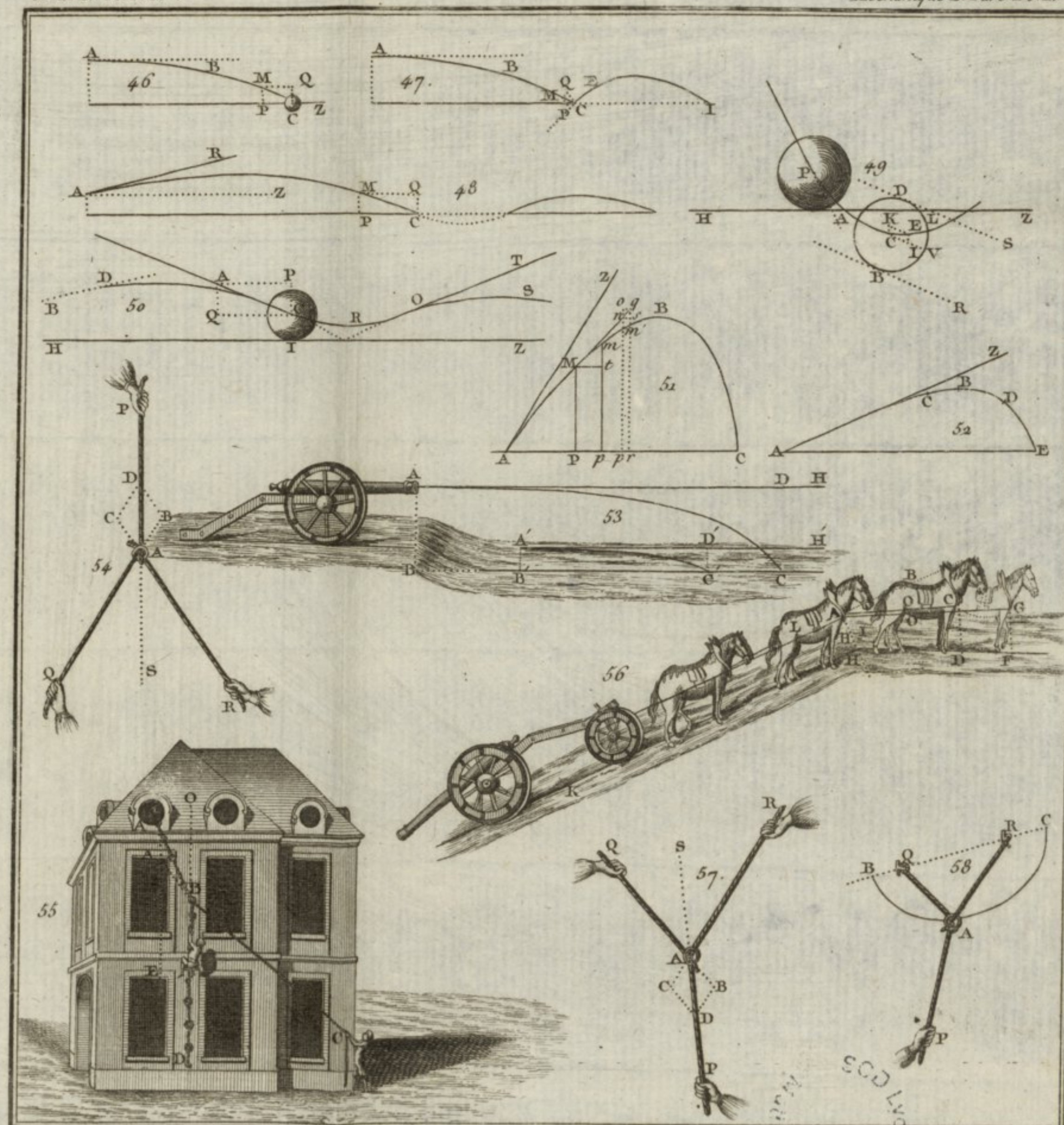
Frussotte Sculp.



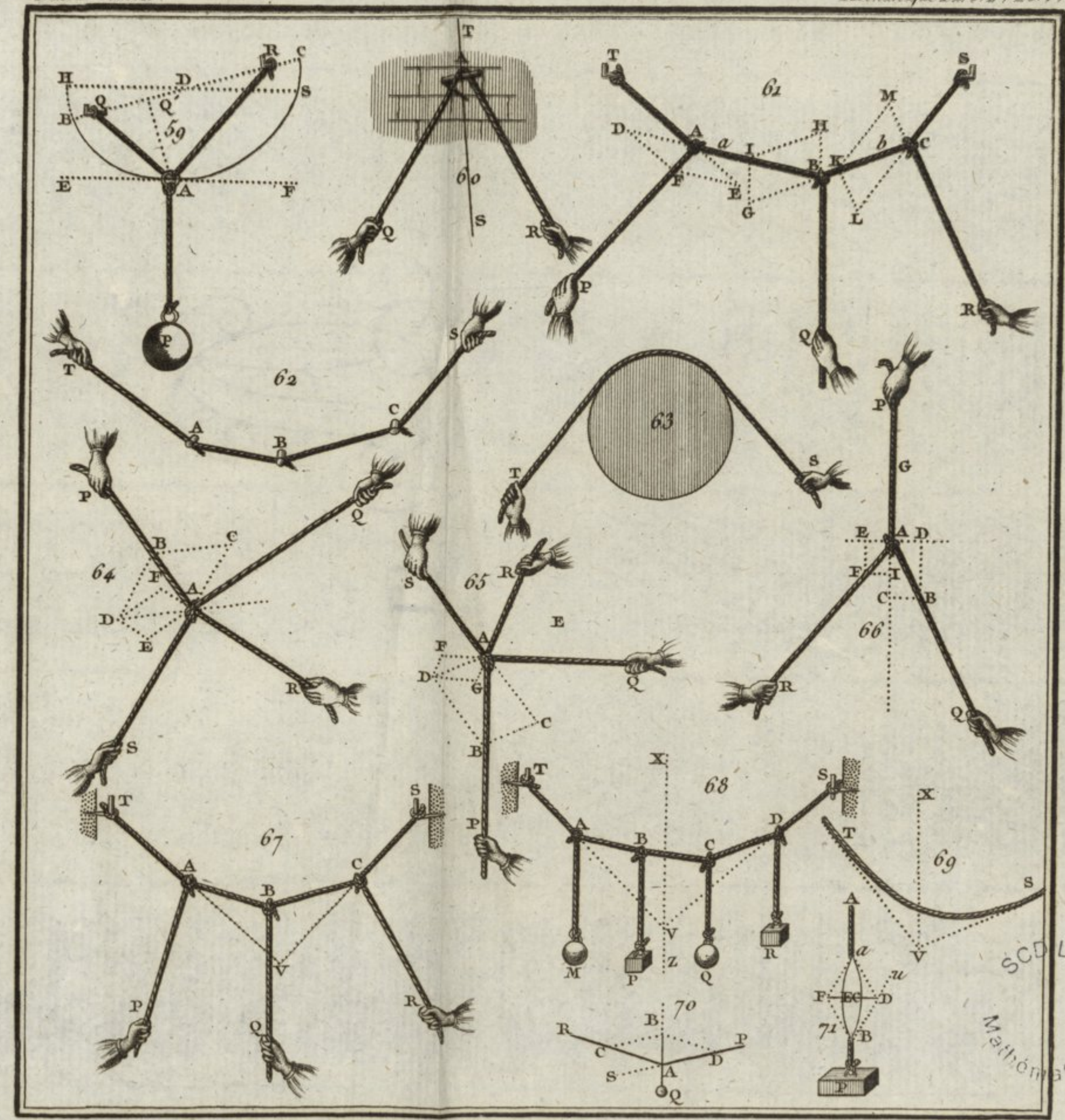
Frussotte Sculp.



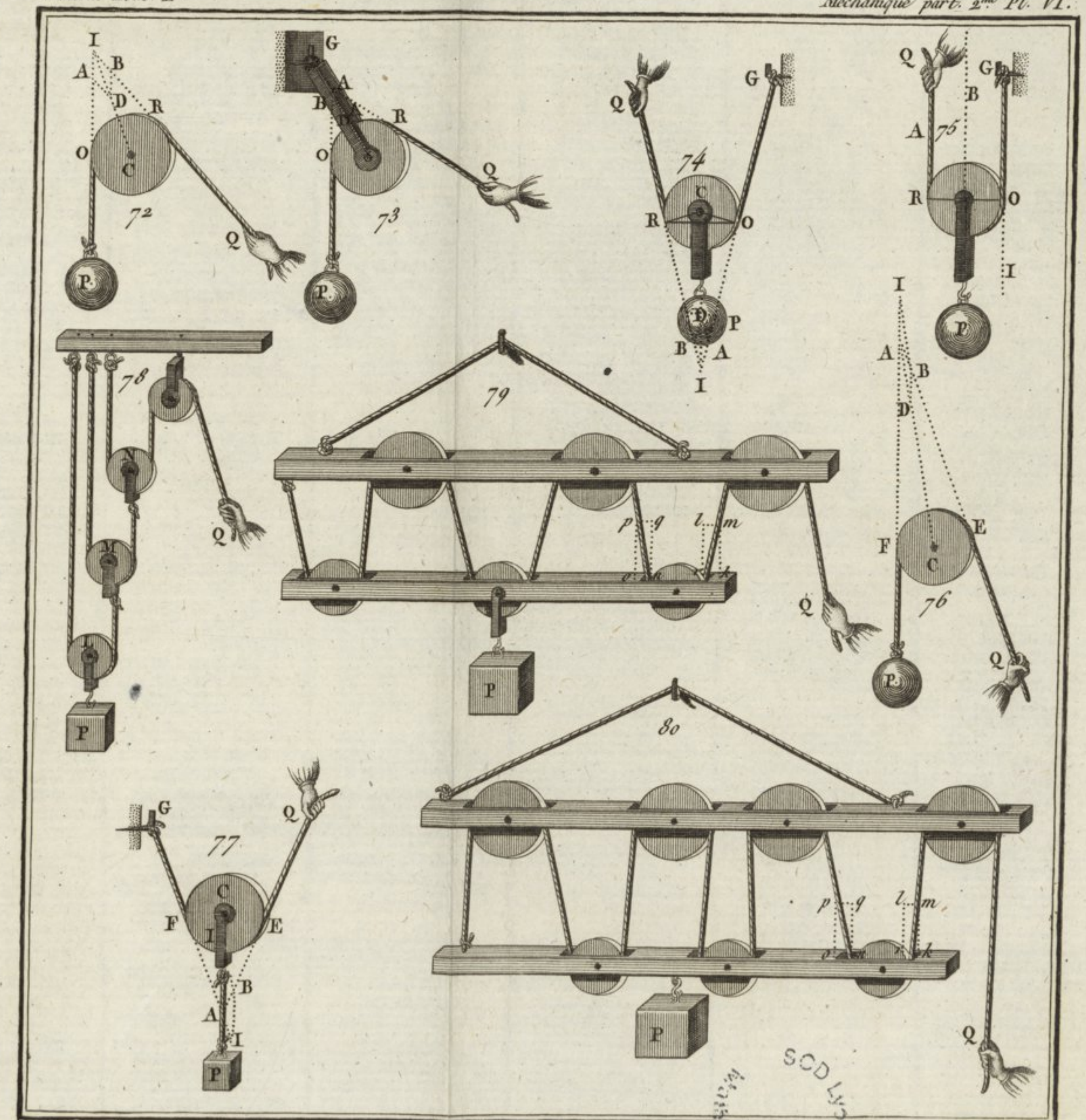
Frussotte Sculp.



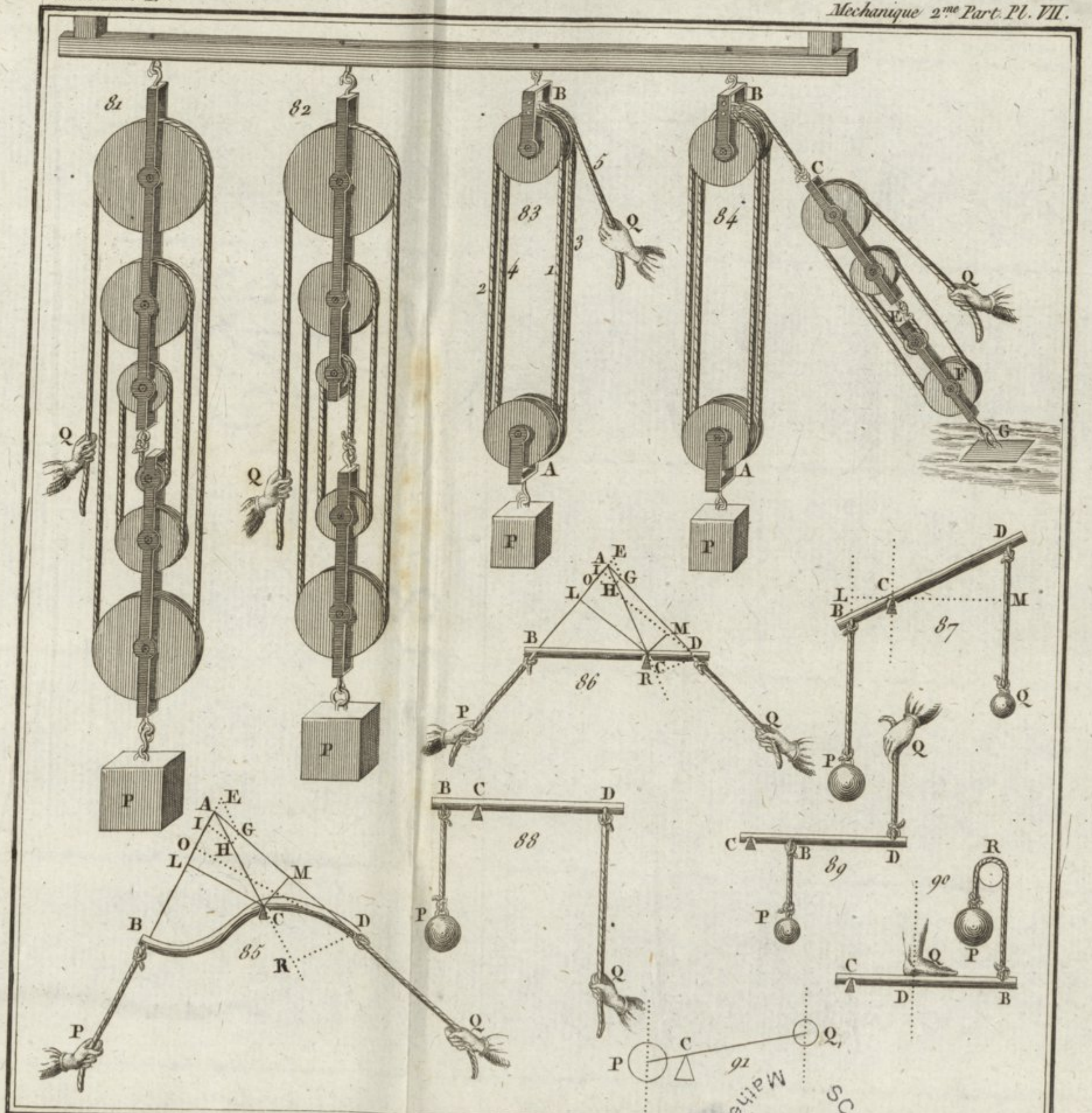
Frussotte Sculp.



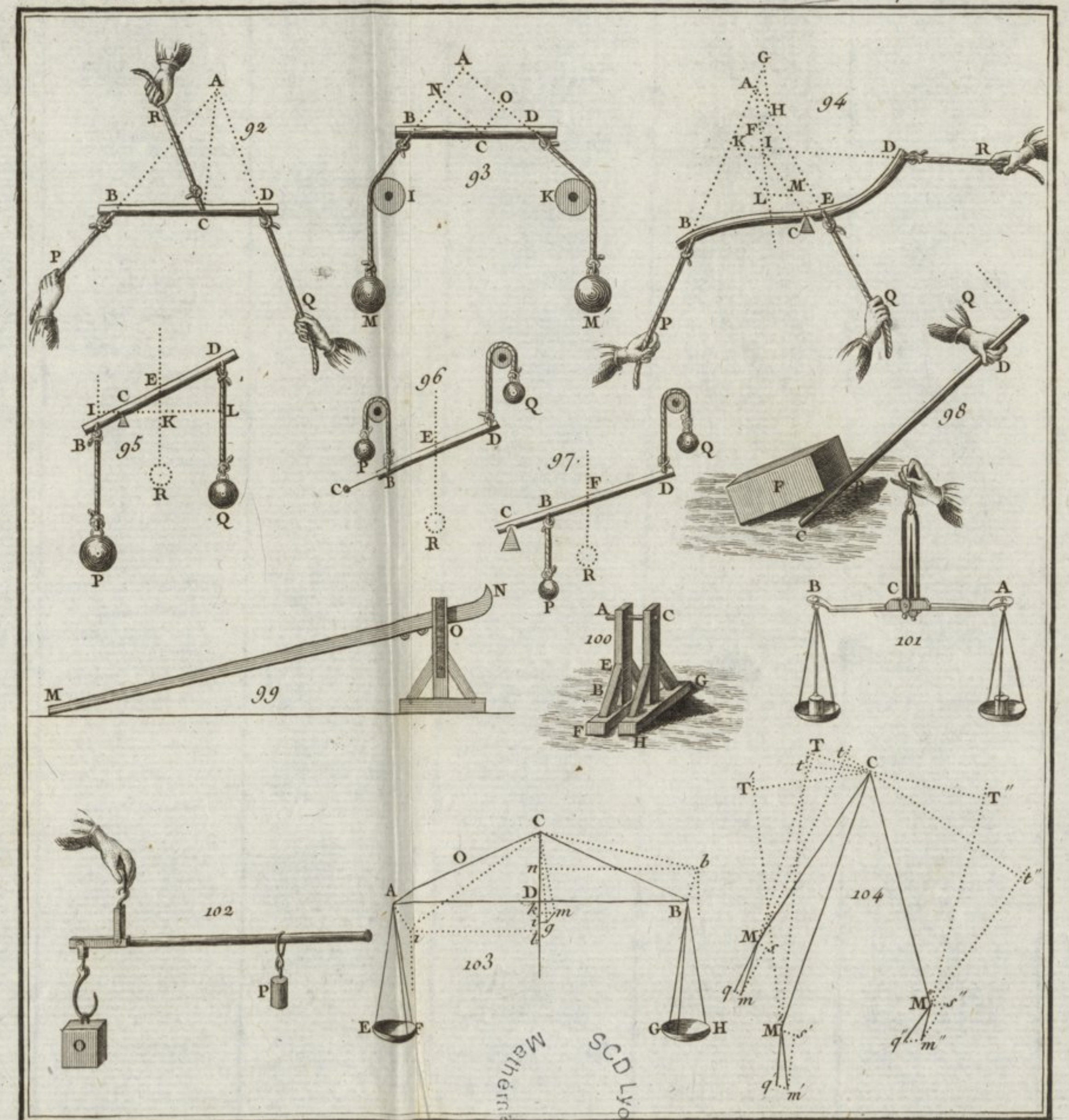
Frussotte Sculp



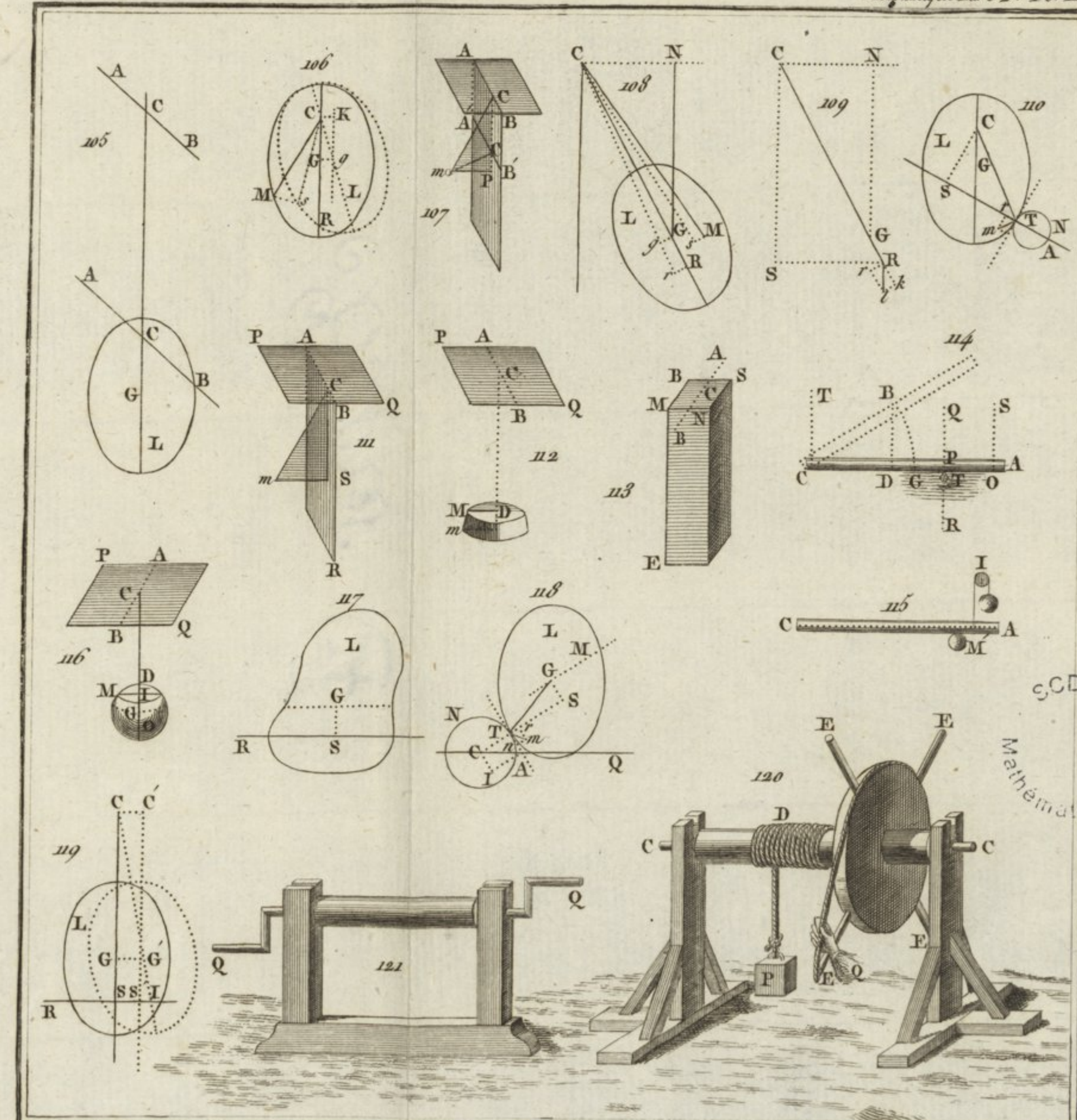
Frussotte Sculp.



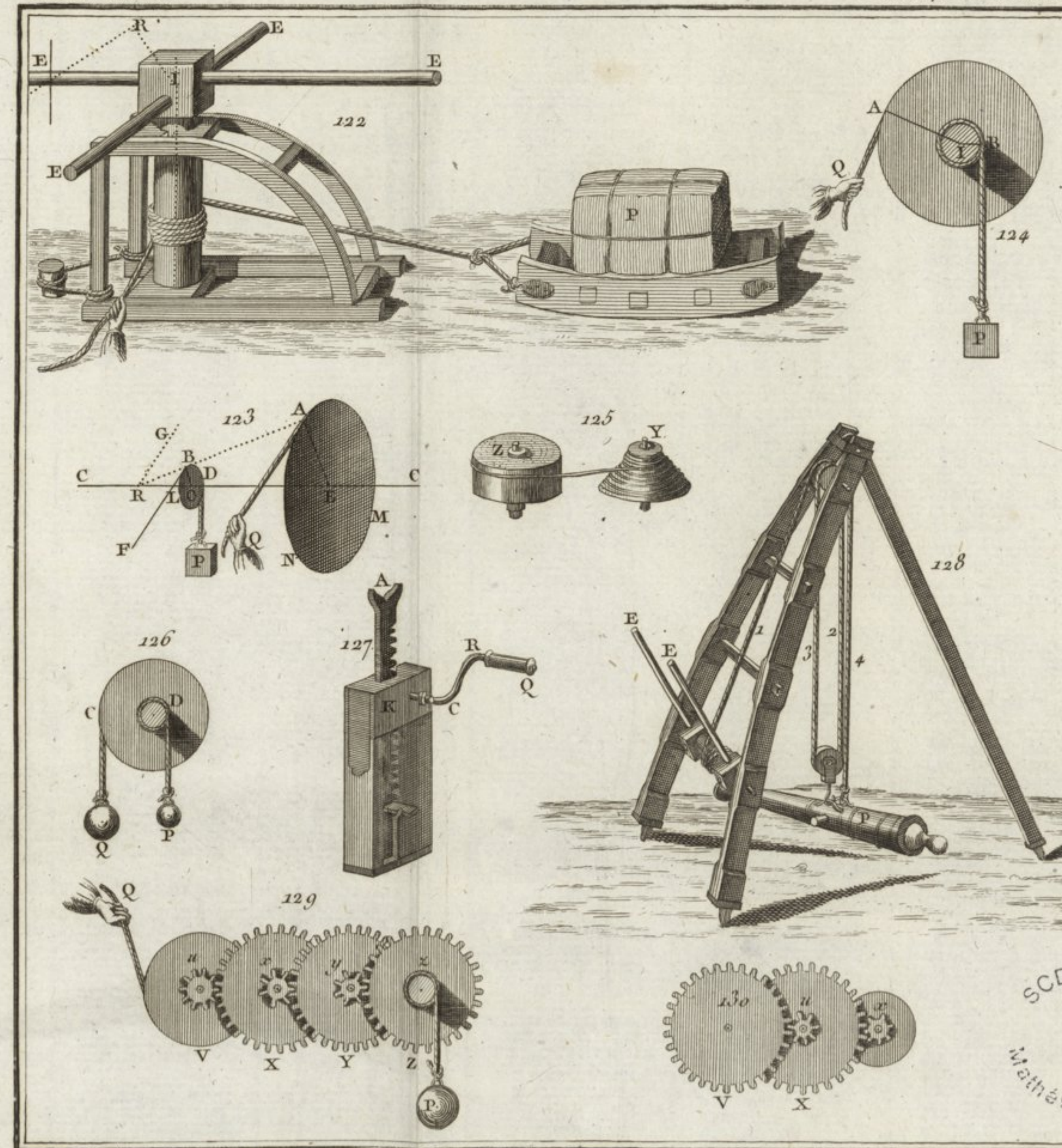
Prussotte Sculp.



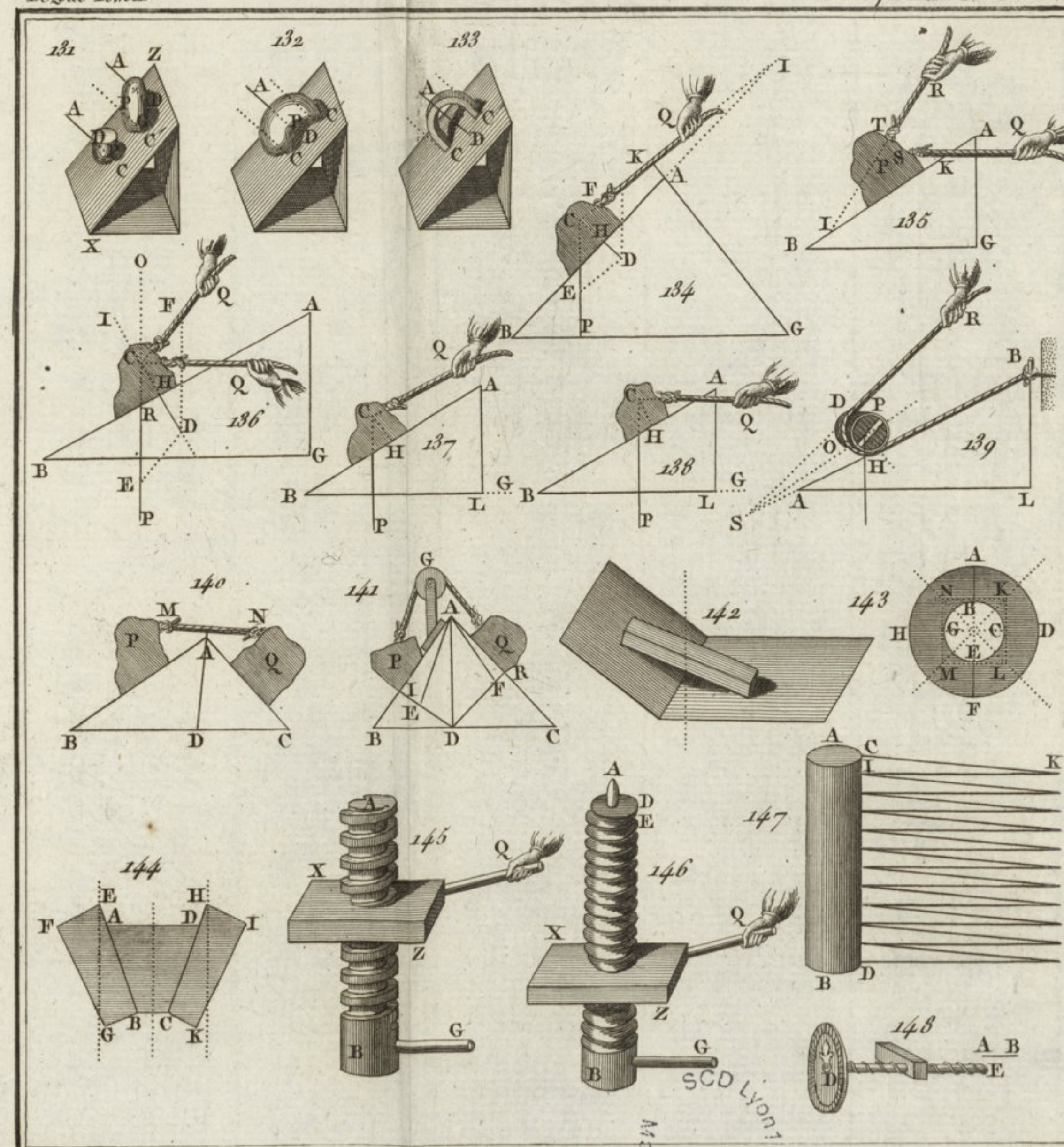
Frussotte Sculp.



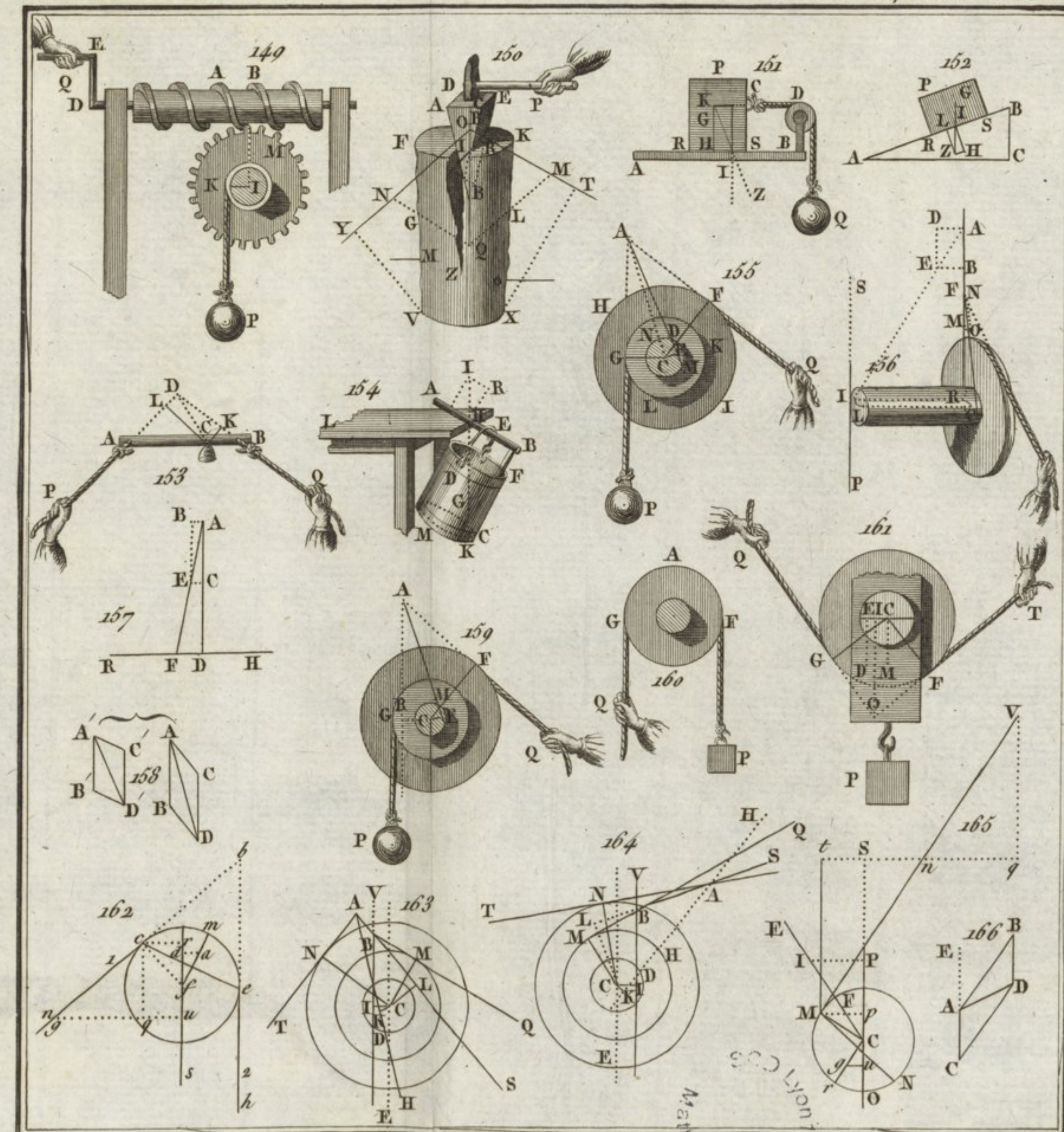
Prussotte Sculp.



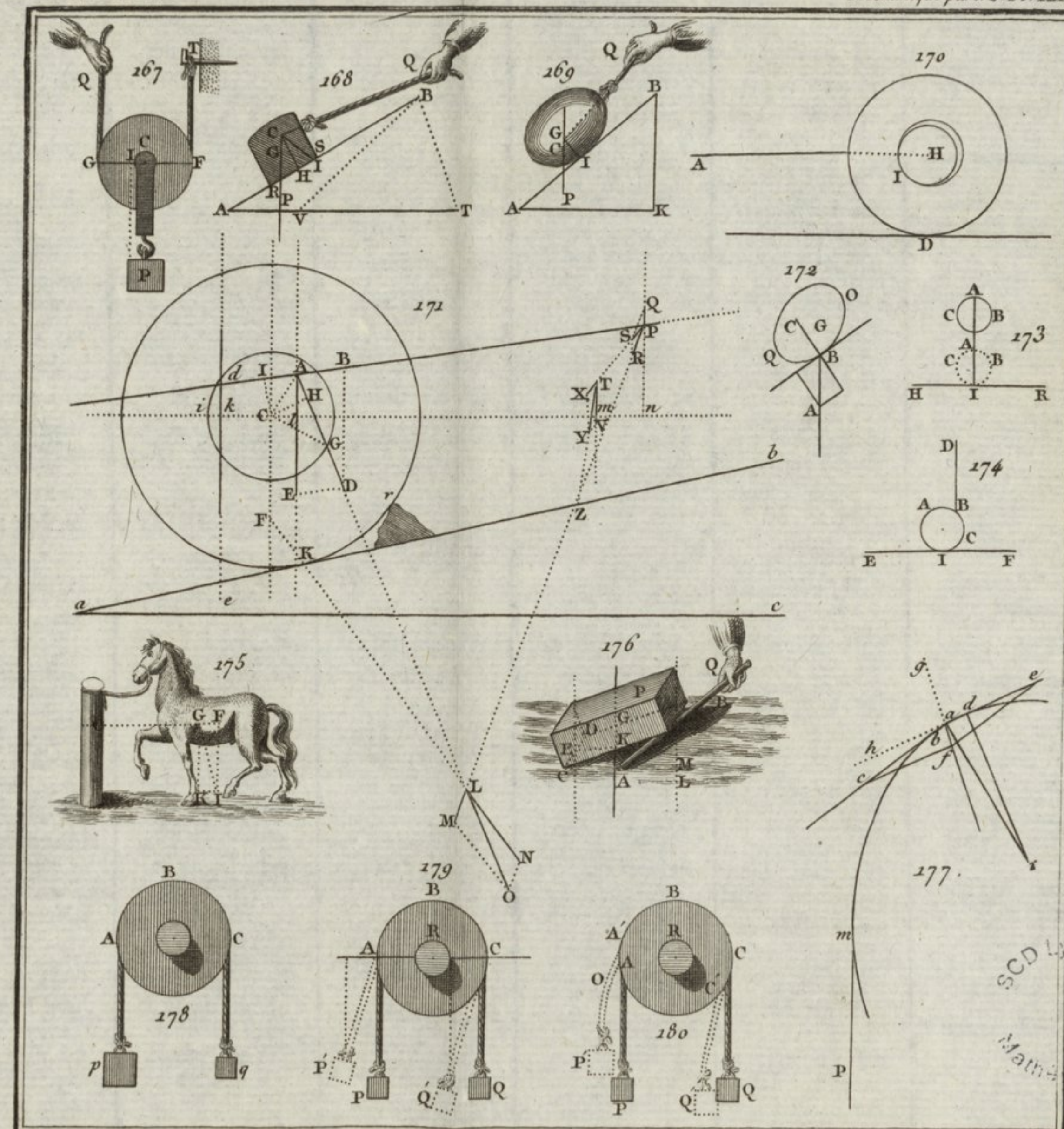
Frussotte Sculp



Frussotte Sculp.



Prussotte Sculp.



Frussotte Sculp.