COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TOME SECOND.

COURS DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE DU CORPS DE L'ARTILLERIE.

Par M. Bézout, de l'Académie des Sciences et de celle de Marine, Examinateur des Élèves et des Aspirans au Corps de l'Artillerie, et des Gardes du Pavillon et de la Marine; Censeur de Livres.

TOME SECOND,

Contenant l'Algèbre, et l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

Nouvelle Édition, revue, corrigée et augmentée de l'Exposition abrégée du nouveau Système des Poids et Mesures, d'après le Mètre définitif; par le C. Guillard, Professeur de Mathématiques.

École Centrale du Dépt. de l'Ardèche an 9.

A PARIS,
Chez Richard, Caille et Ravier, Libraires, rue Haute-Feuille, N°. 11.

AN VII.

DE L'ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION,

Dans laquelle on donne les principes du calcul des quantités Algébriques.

1. Le but de la Science qu'on appelle *Algèbre*, est de donner les moyens de ramener à des règles générales, la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Ces règles, pour être générales, ne doivent pas dépendre des valeurs particulières des quantités que l'on considère, mais bien de la nature de chaque question, et doivent être toujours les mêmes pour toutes les questions d'une même espèce.

Il suit de-là que l'Algèbre ne doit point se borner à employer, pour représenter les quantités, les mêmes caractères ou les mêmes signes que l'Arithmétique. En effet, lorsque par les règles de celle-ci, on est parvenu à un résultat, rien ne retrace plus à l'esprit la route qui y a conduit. Qu'une ou plusieurs opérations arithmétiques m'aient donné 12 pour résultat, je ne vois rien dans 12 qui m'indique si ce nombre est venu de la multiplication de 3 par 4, ou de 2 par 6, ou de l'addition de 5 avec 7 ou de 2 avec 10, ou, en général, de toute autre combinaison d'opérations. L'Arithmétique donne des règles pour trouver certains résultats ; mais ces résultats ne peuvent pas fournir des régles: l'Algèbre doit remplir ces deux objets ; et pour y parvenir, elle représente les quantités par des signes généraux (ce sont les lettres de l'alphabet) qui n'ayant aucune relation plus particulière avec un nombre qu'avec tout autre, ne représentent que ce qu'on veut ou ce que l'on convient de leur faire représenter. Ces signes toujours présens aux yeux dans toute la suite d'un calcul, conservent, pour ainsi dire, l'empreinte des opérations par lesquelles ils passent, ou du moins offrent dans les résultats de ces opérations, des traces de la route qu'on doit tenir pour arriver au même but par les moyens les plus simples. Nous ne nous attachons point ici à développer davantage cette légère idée que nous donnons de l'Algèbre ; la suite de cet Ouvrage y est destinée.

Non-seulement on représente, en Algèbre, les quantités, par des signes généraux : on y représente aussi leur manière d'être les unes a l'égard des autres, et les différentes opérations qu'on a dessein de faire sur elles : en un mot, tout est représentation ; et lorsqu'on dit qu'on fait une opération, c'est une nouvelle forme qu'on donne à une quantité. A mesure que nous avancerons, nous ferons connoître ces différentes manières de représenter ce qui a rapport aux quantités.

Des Opérations fondamentales sur les quantités considérées généralement.

2. On fait, en Algèbre, sur les quantités représentées par des lettres, des opérations analogues à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres ; c'es-à-dire, qu'on les ajoute, on les soustrait, on les multiplie, on les divise, etc. mais ces opérations diffèrent de celles de l'Arithmétique, en ce que leurs résultats ne sont souvent que des indications d'opérations arithmétiques.

De l'Addition et de la Soustraction.

3. L'addition des quantités semblables n'a besoin d'aucune règle ; il est évident que pour ajouter une quantité représentée par a, avec la même quantité a, il faut écrire $2\,a$. Pour ajouter $2\,a$ avec $3\,a$, il faut écrire $5\,a$, et ainsi de suite.

Quant aux quantités dissemblables, et qu'on représente toujours par des lettres différentes, on ne fait qu'indiquer cette addition ; et cela s'indique par le moyen de ce signe $+$, qui se prononce *plus*.

Ainsi, si l'on veut ajouter une quantité représentée par a, avec une autre représentée par b, on ne peut faire autre chose qu'écrire $a + b$; en sorte qu'on ne connoît véritablement le résultat, que quand on connoît les valeurs particulières des quantités représentées par a et par b ; si a vaut 5, et b 12, $a + b$ vaudra 17.

Pareillement, pour ajouter.	$5\,a + 3\,b$
avec	$9\,a + 2\,c$
et	$9\,b + 3\,d$
on écrira	$5\,a + 3\,b + 9\,a + 2\,c + 9\,b + 3\,d$
que l'on réduit à	$14\,a + 12\,b + 2\,c + 3\,d$

en rassemblant les quantités semblables.

4. Il y a les mêmes choses à dire sur la soustraction que sur l'addition. Si les quantités sont semblables, on n'a besoin d'aucune règle : il

est évident qne si de $5a$, on veut retrancher $2a$, il reste $3a$.

Mais si les quantités sont dissemblables, on ne peut qu'indiquer la soustraction ; cela s'indique à l'aide de ce signe —, qu'on prononce en disant *moins*.

Ainsi, si l'on a b à retrancher de a, on écrira $a - b$.

Pour retrancher $3b$ de $5a$, on écrira $5a - 3b$.

Si de . . . . $9a + 6b$
on veut retrancher. . . . . $5a + 4b$

on écrira . . . . $9a + 6b - 5a - 4b$

que l'on réduit à . . . . $4a + 2b$
en faisant déduction sur les quantités semblables ; ce qu'on appelle faire la *réduction*.

5. Un nombre qui précède une lettre, s'appelle le *coëfficient* de cette lettre ; ainsi dans $3b$, 3 est le *coëfficient* de b. Lorsqu'une lettre doit avoir 1 pour coëfficient, on ne met point ce coëfficient : ainsi lorsque de $3a$ on retranche $2a$, il reste $1a$; on écrit seulement a. Il faut donc bien se garder de croire que le coëfficient d'une lettre, lorsqu'il ne paroît point, soit zéro ; il est alors l'unité ou 1.

6. Il importe peu dans quel ordre on écrive les quantités qu'on ajoute ou qu'on retranche ; si l'on a a à ajouter avec b, on peut indiffé-

remment écrire $a + b$ ou $b + a$; et pour retrancher b de a, on peut écrire également $a - b$ ou $- b + a$.

7. Remarquons encore que lorsqu'une quantité n'a point de signe, elle est censée avoir le signe $+$; a est la même chose que $+ a$. On est dans l'usage de supprimer le signe, dans la quantité qu'on écrit la première, lorsque cette quantité doit avoir le signe $+$; mais si elle devoit avoir le signe $-$, il ne faudroit pas l'omettre.

8. Lorsqu'à la suite d'une opération, on fait la réduction, il peut arriver que la quantité précédée du signe $-$, ait un coëfficient plus grand que celui de la quantité semblable précédée du signe $+$; mais dans tous les cas, l'opération se réduit à cette règle générale : *L'addition des quantités algébriques se fait en écrivant leurs parties à la suite les unes des autres avec leurs signes tels qu'ils sont : on réduit ensuite les quantités semblables, à une seule, en rassemblant d'une part toutes celles qui ont le signe $+$, et d'une autre part, toutes celles qui ont le signe $-$; enfin on retranche le plus petit résultat du plus grand, et on donne au reste, le signe qu'avoit le plus grand.*

Par exemple, si à la suite d'une opération, on trouvoit

$14a + 12b + 2c + 3d + a + b + 4d - 4c$; on réduiroit cette quantité à $15a + 13b - 2c + 7d$; dans laquelle au lieu de $2c - 4c$ qu'on avoit dans la première, on a écrit $-2c$, parce qu'ayant $4c$ à retrancher d'une quantité dans laquelle il n'y a que $2c$ qui s'offrent immédiatement, il faut marquer qu'il reste encore $2c$ à retrancher sur la totalité des autres quantités.

EXEMPLE.

On veut ajouter les quatre quantités suivantes :

$$\begin{array}{l} 5a + 3b - 4c \\ 2a - 5b + 6c + 2d \\ a - 4b - 2c + 3e \\ 7a + 4b - 3c - 6e \end{array}$$

Somme.......... $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Faisant la réduction, j'ai pour les a, $15a$; pour les b, j'ai $+7b$ d'une part et $-9b$ de l'autre, et par conséquent $-2b$ pour reste ; pour les c, j'ai $-9c$ d'une part, et $+6c$ de l'autre, et par conséquent $-3c$ pour reste; réduisant les autres de même, on trouve enfin $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9. Les quantités séparées par les signes $+$ et $-$, s'appellent les *termes* des quantités dont elles font parties.

10. Une quantité est appelée *Monome*, *Binome*, *Trinome*, etc. selon qu'elle est composée de 1,

ou de 2, ou de 3, etc. termes ; et une quantité composée de plusieurs termes dont on ne définit pas le nombre, s'appelle en général un *Polynome*.

11. A l'égard de la soustraction des quantités algébriques, voici la règle générale : *Changez les signes des termes de la quantité que vous devez soustraire, c'est-à-dire, changez + en —, et — en + ; ajoutez ensuite cette quantité, ainsi changée, avec celle dont on doit soustraire, et réduisez.*

EXEMPLE.

De.............	$6a - 3b + 4c$
on veut retrancher..	$5a - 5b + 6c$
j'écris......	$6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$
et réduisant, j'ai pour reste.	$a + 2b - 2c$.

Pour rendre raison de cette règle, prenons un exemple plus simple. Supposons que de a on veuille retrancher b ; il est évident qu'on doit écrire $a - b$; mais si de a on vouloit retrancher $b - c$, je dis qu'il faut écrire $a - b + c$; en effet, il est clair qu'ici ce n'est pas b tout entier qu'il s'agit de retrancher, mais seulement b diminué de c ; si donc on retranche d'abord b tout entier en écrivant $a - b$, il faut ensuite, pour compenser, ajouter ce qu'on a ôté de trop ;

il faut donc ajouter c, il faut donc écrire $a - b + c$, c'est-à-dire, qu'il faut changer les signes de tous les termes de la quantité qu'on doit soustraire.

12. Les quantités précédées du signe $+$, se nomment quantités *positives ;* et celles qui sont précédées du signe $-$, se nomment quantités *négatives.* Nous entrerons par la suite, dans quelque détail sur la nature et les usages de ces quantités considérées séparément l'une de l'autre.

De la Multiplication.

13. La multiplication Algébrique exige quelques considérations qui lui sont particulières, et qui n'ont pas lieu dans la multiplication Arithmétique. Indépendamment des quantités, il y a encore les signes à considérer.

Au reste, à ne considérer que les valeurs numériques des quantités représentées par les lettres, on doit se former de la multiplication algébrique la même idée que de la multiplication arithmétique ; ainsi, multiplier a par b, c'est prendre la quantité représentée par a, autant de fois qu'il y a d'unités dans la quantité représentée par b.

14. Mais comme l'objet est ici de faire ou de représenter la multiplication, indépendamment

des valeurs numériques des quantités, il faut convenir des signes par lesquels nous indiquerons cette multiplication.

Outre le signe $\times$, par lequel nous avons dit, dans l'Arithmétique, que l'on désignoit la multiplication, on fait aussi usage du point, que l'on interpose entre les deux quantités qu'on doit multiplier ; en sorte que $a.b$ et $a \times b$ signifient la même chose.

On indique encore la multiplication (du moins entre les quantités monomes) en ne mettant aucun signe entre le multiplicande et le multiplicateur ; ainsi $a \times b$, $a.b$, ab sont trois expressions dont chacune désigne qu'on doit multiplier a par b. Cette dernière est la plus usitée.

15. Pour multiplier ab par c, on écrira donc abc. Pour multiplier ab par cd, on écrira $abcd$, et ainsi de suite : il importe peu d'ailleurs dans quel ordre ces lettres soient écrites, parce que le produit est toujours le même dans quelque ordre qu'on multiplie.

16. De cette manière de représenter la multiplication des quantités monomes, il suit que *le produit de la multiplication de plusieurs quantités algébriques monomes, doit renfermer toutes les lettres qui se trouvent tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.*

17. Si les quantités qu'on doit multiplier, étoient composées de la même lettre, cette lettre se trouveroit donc écrite dans le produit autant de fois qu'elle l'est dans tous les facteurs ensemble, quelque soit le nombre des quantités qu'on a à multiplier.

Ainsi a multiplié par a donneroit aa: aa multiplié par aaa, donneroit $aaaaa$: aa multiplié par aaa et multiplié encore par a, donneroit $aaaaaa$.

Dans ce cas, on est convenu de n'écrire cette lettre qu'une seule fois, mais de marquer, par un chiffre qu'on appelle *Exposant*, et qu'on place sur la droite et un peu au-dessus de la lettre, combien de fois cette lettre est facteur, ou combien de fois elle doit être écrite.

Au lieu de aa, on écrira donc a^2: au lieu de aaa, on écrira a^3: au lieu de $aaaaa$, on écrira a^5, et ainsi des autres.

Souvenons-nous donc à l'avenir, que *l'exposant d'une lettre, marque combien de fois cette lettre est facteur dans un produit.*

Dans $a^3 b^2 c$ il y a trois facteurs de valeur différente, savoir, a, b, c: mais, de ces lettres, la première est facteur trois fois; la seconde, deux fois; et la troisième, une fois: en effet a^3b^2c équivaut à $aaabbc$.

18. Puisque l'exposant marque combien de fois

la quantité est facteur, il marque donc aussi à quelle puissance cette quantité est élevée.

Ainsi dans a^5 l'exposant 5 marque que a est élevé à la cinquième puissance.

19. Il faut bien se garder de confondre l'exposant avec le coëfficient; de confondre, par exemple, a^2 avec $2\,a$, a^3 avec $3\,a$: dans $2\,a$, le coëfficient 2 marque que a est ajouté avec a, c'est-à-dire, que $2\,a$ équivaut à $a + a$; mais dans a^2, l'exposant 2 marque que la letttre a devroit être écrite deux fois de suite sans aucun signe; qu'elle est multipliée par elle-même, ou enfin qu'elle est facteur deux fois; c'est-à-dire, que a^2 équivaut à $a \times a$; ensorte que si a vaut 5, par exemple, $2\,a$ vaut 10; mais a^2 vaut 25.

20. On voit donc que *pour multiplier deux quantités monomes qui auroient des lettres communes, on peut abréger l'opération, en ajoutant tout de suite les exposans des lettres semblables du multiplicande et du multiplicateur.*

Ainsi pour multiplier a^5 par a^3, j'écris a^8, c'est-à-dire, que j'écris la lettre a en lui donnant pour exposant, les deux exposans 5 et 3 réunis. De même pour multiplier $a^3\,b^2\,c$ par $a^4\,b^3\,c\,d$, j'écris $a^7\,b^5\,c^2\,d$, en écrivant d'abord toutes les lettres différentes $a\,b\,c\,d$, et donnant ensuite à la première pour exposant 7 qui est la somme des exposans 3 et 4; à la seconde, 5 qui est la somme des deux exposans 2 et 3; et à la troisième, 2 qui est la somme des deux exposans 1 et 1; car quoique l'exposant de c ne soit pas marqué, on doit néanmoins sous-entendre qu'il est 1, puisque c est facteur une fois.

Donc *toute lettre dont l'exposant n'est point écrit, est censée avoir* 1 *pour exposant; et réciproquement, toutes les fois qu'une lettre devra avoir* 1 *pour exposant, on peut se dispenser d'écrire cet exposant.*

Telle est la règle pour les lettres dans les quantités monomes.

21. Quand les quantités monomes sont précédées d'un chiffre, c'est-à-dire, d'un coëfficient, il faut commencer la multiplication par ce coëfficient; et cette multiplication se fait suivant les règles de l'Arithmétique.

Ainsi pour multiplier $5a$ par $3b$, je multiplie d'abord 5 par 3, puis a par b, et je trouve $15ab$ pour produit. Pareillement, si j'ai $12a^3b^2$ à multiplier par $9a^4b^3$, j'aurai $108a^7b^5$.

22. Ces principes posés, venons à la multiplication des quantités complexes. Il faut, pour cette multiplication, suivre le même procédé qu'on suit en Arithmétique pour les nombres qui ont plusieurs chiffres, c'est-à-dire, qu'il faut multiplier successivement chacun des termes du multiplicande, par chacun des termes du multiplicateur, et cela en observant les règles

que nous venons de donner pour les monomes. On n'est point assujetti, comme en Arithmétique, à opérer en allant de droite à gauche, plutôt que de gauche à droite; cela est indifférent; nous prendrons même ce dernier parti qui est le plus en usage.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier. . . . $a + b$
par. . . . . $c + d$

Produit. . . . . . . $ac + bc + ad + bd$

1°. Je multiplie a par c, ce qui (14) me donne ac. 2°. Je multiplie b par c, ce qui me donne bc; j'ajoute ce second produit au premier en les unissant par le signe $+$, et j'ai $ac + bc$ pour produit de $a + b$ par c.

Je multiplie de même a et b par d, ce qui me donne $ad + bd$, qui joint au premier produit, donne $ac + bc + ad + bd$. En effet, multiplier $a + b$ par $c + d$, c'est prendre non-seulement a, mais encore b, autant de fois qu'il y a d'unités dans la totalité de $c + d$, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unités dans c, plus autant de fois qu'il y a d'unités dans d.

EXEMPLE II.

On propose de multiplier. . . . . $a - b$
par. . . . . $c - d$

Produit. . . . . $ac - bc - ad + bd$

Après avoir multiplié a par c, ce qui donne ac, je multiplie b par c, ce qui donne bc; mais au lieu d'ajouter ce dernier produit au premier, je l'en retranche, parce qu'en multipliant a tout entier, ainsi qu'on le fait par la première opération, il est visible qu'on y multiplie de trop la quantité b dont a devoit être diminué; il faut donc ôter de ce produit, la quantité b multiplié par c; c'est-à-dire, ôter bc.

On trouvera de même, que $a - b$ multiplié par d, donne $ad - bd$; mais comme le signe du multiplicateur actuel d, est —, on retranchera ce second produit, du premier, et (11) l'on aura $ac - bc - ad + bd$.

En effet, puisque le multiplicateur $c - d$ est moindre que c, de la quantité d, il marque qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'autant de fois qu'il y a d'unités dans c diminué de d: or il est clair qu'ayant pris d'abord, $a - b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans c, le produit est trop grand de la valeur de $a - b$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans d; il faut donc retrancher le produit de $a - b$ par d.

23. Si l'on fait attention aux signes des termes qui composent le produit total $ac - bc - ad + bd$, et qu'on les compare avec les signes des termes du multiplicande et du multiplicateur qui les ont donnés, on observera 1°. que le terme a qui est censé avoir le signe +, étant multiplié par le terme c qui est censé aussi avoir le signe +, a donné pour produit ac qui est censé avoir le signe +.

2°. Que le terme b qui a le signe —, étant multiplié par le terme c qui est censé avoir le signe +, a donné pour produit bc avec le signe —.

3°. Que le terme a qui a le signe $+$, multiplié par le terme d qui a le signe $-$, a donné pour produit ad avec le signe $-$.

4°. Enfin, que le terme b qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme d qui a aussi le signe $-$, a donné pour produit le terme bd qui a le signe $+$.

Donc, à l'avenir, nous pourrons reconnoître facilement dans les multiplications partielles, si les produits particuliers doivent être ajoutés ou retranchés ; il suffira pour cela d'observer les deux règles suivantes que nous fournissent les observations que nous venons de faire.

24. *Si les deux termes que l'on doit multiplier ont tous deux le même signe, c'est-à-dire, ou tous deux $+$, ou tous deux $-$; leur produit aura toujours le signe $+$. Si au contraire ils ont différens signes, c'est-à-dire, l'un $+$ et l'autre $-$, ou l'un $-$ et l'autre plus $+$; leur produit aura toujours le signe $-$.*

A l'aide de ces règles, on est en état de faire toute multiplication algébrique. Mais pour procéder avec méthode, on observera d'abord la règle des signes, puis celle des coëfficiens, enfin celle des lettres et des exposans.

Terminons par un exemple où toutes ces règles soient appliquées.

EXEMPLE III.

EXEMPLE III.

On propose de multiplier $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$

par . . . . $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{r} 5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ -20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ +10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \\ \hline \end{array}$$

Produit..... $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Je multiplie successivement les trois termes $5a^4$, $-2a^3b$, $+4a^2b^2$, par le premier terme a^3 du multiplicateur. Les deux termes $5a^4$ et a^3 ayant le même signe, le produit (24) doit avoir le signe $+$; mais j'omets ce signe, parce qu'il appartient au premier terme du produit (7). Je multiplie ensuite le coëfficient 5 de a^4 par le coëfficient 1 de a^3, ce qui me donne 5; enfin multipliant a^4 par a^3 selon la règle donnée (20), c'est-à-dire, ajoutant les deux exposans 4 et 3, j'ai a^7, et par conséquent $5a^7$ pour produit.

Je passe au terme $-2a^3b$; et pour le multiplier par a^3, je vois que les signes de ces deux quantités étant différens, le produit doit avoir le signe $-$; je multiplie ensuite le coëfficient 2 de a^3b par le coëfficient 1 de a^3, et enfin a^3b par a^3, et j'ai $-2a^6b$ pour produit.

Par un procédé semblable, le terme $+4a^2b^2$ multiplié par a^3 donnera $+4a^5b^2$.

Après avoir multiplié tous les termes du multiplicande par a^3, il faut les multiplier par le second terme $-4a^2b$ du multiplicateur. Le terme $5a^4$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-20a^6b$; le terme $-2a^3b$ multiplié par $-4a^2b$ de même signe, donnera $+8a^5b^2$: et le terme $+4a^2b^2$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-16a^4b^3$.

Enfin on passera à la multiplication par le terme $+ 2b^3$, et en suivant les mêmes règles, on trouvera $+ 10a^4b^3$, $- 4a^3b^4$, $+ 8a^2b^5$ pour les trois produits partiels.

Ajoutant tous ces produits, et faisant la réduction, on a $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ pour produit total.

25. Pour se familiariser avec la pratique de cette règle, on prendra des exemples dans la Table que l'on trouve ci-après la division ; voici quelques remarques sur quelques-uns de ces exemples.

Dans le premier, on a multiplié $a + b$ qui représente généralement la somme de deux quantités, par $a - b$ qui représente généralement leur différence, et l'on trouve pour produit $a^2 - b^2$ qui est la différence du quarré de la première au quarré de la seconde, ou la différence des quarrés de ces deux quantités. On peut donc dire généralement, que *la somme de deux quantités, multipliée par leur différence, donne toujours, pour produit, la différence des quarrés de ces mêmes quantités.* Que l'on prenne deux nombres quelconques, 5 et 3 par exemple ; leur somme est 8 et leur différence 2, lesquelles multipliées l'une par l'autre, donnent 16, qui est en effet la différence du quarré de 5 au quarré de 3, c'est-à-dire, de 25 à 9. Et réciproquement, *la différence des quarrés de deux quantités, peut toujours être considérée comme formée par la multiplication de la somme de ces deux quantités par leur différence.* Ainsi la quantité $b^2 - c^2$, qui est la différence du quarré de b au quarré de c, vient de la multiplication de $b + c$ par $b - c$. Ces deux propositions nous seront utiles par la suite.

On peut déjà remarquer en passant, un des usages de l'Algèbre pour découvrir des vérités générales.

N° 1

Le second exemple fait voir d'une manière générale et simple ce que nous avons dit en Arithmétique sur la composition du quarré, savoir, que *le quarré de la somme* a + b *de deux quantités, est composé du quarré* a^2 *de la première, du double* 2ab *de la première multipliée par la seconde, et du quarré* b^2 *de la seconde.*

Le troisième exemple confirme ce que nous avons dit aussi en Arithmétique sur la formation du cube. On y voit $a^2 + 2ab + b^2$, quarré de $a + b$, qui après avoir été encore multiplié par $a + b$, donne $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, dont le premier terme est le cube de a, le second qui est le même que $3a^2 \times b$, est le triple du quarré de a, multiplié par b; on voit de même que $3ab^2$ est le triple de a multiplié par le quarré de b; et enfin b^3 est le cube de b.

26. Pour indiquer la multiplication entre deux quantités complexes, on est dans l'usage de renfermer chacune de ces deux quantités entre deux crochets, et d'interposer entr'elles l'un des signes de multiplication dont nous avons parlé plus haut (14); quelquefois même on n'interpose aucun signe; ainsi pour marquer que la totalité de la quantité $a^2 + 3ab + b^2$ doit être multipliée par la totalité de $2a + 3b$, on écrit $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$ ou $(a^2 + 3ab + b^2) . (2a + 3b)$ ou simplement $(a^2 + 3ab + b^2)(2a + 3b)$. Quelquefois au lieu d'écrire chaque quantité entre deux crochets, on couvre chacune d'une barre, en cette manière, $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$.

27. Il y a beaucoup de cas où il est plus

avantageux d'indiquer la multiplication que de l'exécuter. On ne peut donner de règles générales sur ce sujet, parce que cela dépend des circonstances qui donnent lieu à ces opérations : nous verrons par la suite plusieurs de ces cas. C'est principalement par l'usage qu'on apprend à les distinguer. On peut cependant, dire assez généralement, qu'il convient de se contenter d'indiquer les multiplications, lorsque celles-ci doivent être suivies de la division, parce que cette dernière opération s'exécutant souvent, ainsi qu'on va le voir, par la seule suppression des facteurs communs au dividende et au diviseur, on distingue plus facilement ces facteurs communs, lorsqu'on n'a fait qu'indiquer la multiplication.

De la Division.

28. La manière de faire cette opération en Algèbre, dépend beaucoup des signes que nous sommes convenus d'employer pour la multiplication. L'objet en est d'ailleurs le même qu'en Arithmétique.

29. Lorsque la quantité qu'on proposera à diviser, n'aura aucune lettre commune avec le diviseur, alors il n'est pas possible d'exécuter l'opération ; on ne peut que l'indiquer, et cela

se fait en écrivant le diviseur au-dessous du dividende, en forme de fraction, et séparant l'un de l'autre par un trait.

Ainsi pour marquer qu'on doit diviser a par b, on écrit $\frac{a}{b}$, et l'on prononce *a divisé par b*, pour marquer qu'on doit diviser $aa + bb$ par $c + d$, on écrit $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30. Lorsque le dividende et le diviseur sont monomes, si toutes les lettres qui se trouvent dans le diviseur, se trouvent aussi dans le dividende, la division peut être faite exactement, et on l'exécutera en suivant cette règle....... *Supprimez dans le dividende, toutes les lettres qui lui sont communes avec le diviseur; les lettres qui resteront, composeront le quotient.*

Ainsi pour diviser ab par a, je supprime a dans le dividende ab, et j'ai b pour quotient. Pour diviser abc par ab, je supprime ab dans le dividende, et j'ai c pour quotient.

En effet, puisque (14) les lettres écrites sans aucun signe interposé, sont les facteurs de la quantité dans laquelle elles entrent, les lettres du diviseur, qui sont communes au dividende, sont donc facteurs de ce dividende; or nous avons vu en Arithmétique que lorsqu'on divise un produit par un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur; donc le quotient doit être composé des lettres du dividende qui ne sont point communes entre celui-ci et le diviseur.

31. Il suit de-là que lorsqu'il y aura des exposans, la règle qu'on doit suivre, est de *retrancher l'exposant de chaque lettre du diviseur, de l'exposant de pareille lettre du dividende.*

Ainsi pour diviser a^3 par a^2, je retranche 2 de 3, il me reste 1, et par conséquent j'ai a^1 ou a pour quotient. De même, ayant à diviser $a^4b^3c^2$ par a^2bc, j'aurai a^2b^2c.

En effet $\frac{a^3}{a^2}$ est la même chose que $\frac{aaa}{aa}$ qui, selon la règle donnée (30), se réduit à a, en ôtant les lettres communes au dividende et au diviseur.

32. Donc si une lettre a le même exposant dans le dividende et dans le diviseur, elle aura zéro pour exposant dans le quotient.

Ainsi a^3 divisé par a^3 donnera a^0; a^3bc^2 divisé par a^2bc^2 donne $a^1b^0c^0$ ou ab^0c^0.

Dans ce cas, on peut se dispenser d'écrire les lettres qui ont o pour exposant ; car chacune d'elles n'est autre chose que l'unité. En effet, lorsqu'on divise a^3 par a^3, on cherche combien de fois a^3 contient a^3 ; or il le contient évidemment 1 fois ; le quotient doit donc être 1 ; d'un autre côté a^3 divisé par a^3 donne pour quotient a^0 ; donc a^0 vaut 1. En général, *toute quantité qui a zéro pour exposant, vaut* 1.

33. Si quelques lettres du diviseur ne sont pas communes au dividende, ou si quelques-uns des exposans du diviseur sont plus grands que ceux de pareilles lettres du dividende, alors la division ne peut être faite exactement : on ne peut que l'indiquer comme il a été dit ci-dessus (29). Mais on peut simplifier le quotient ou la quantité fractionnaire qui le représente alors. La règle qu'il faut suivre pour cela, est de supprimer dans le dividende et dans le diviseur, les lettres qui leur sont communes ; en sorte que s'il y a des exposans, on efface la lettre qui a le plus petit exposant, et l'on diminue de pareille quantité le plus grand exposant de la même lettre.

Par exemple, si l'on propose de diviser a^5bc^3 par $a^2b^3c^4$, on écrira $\frac{a^5bc^3}{a^2b^3c^4}$ que l'on réduira en cette manière ; on effacera a^2 dans le diviseur, et l'on écrira seulement a^3 dans le dividende ; on effacera b dans le dividende, et l'on écrira seulement b^2 dans le diviseur ; enfin on effacera c^3 dans le dividende, et l'on écrira seulement c dans le diviseur ; en sorte qu'on aura $\frac{a^3}{b^2c}$. On trouvera de même, que $\frac{a^2b^5c^3}{a^3bc^2d}$ se réduit à $\frac{b^4c}{ad}$.

Si, par ces opérations, il ne restoit plus aucune lettre dans le dividende, il faudroit écrire l'unité.

Ainsi $\frac{a^2}{a^3}$ se réduira à $\frac{1}{a}$.

La raison de ces règles est facile à saisir après tout ce qui a été dit ci-dessus ; car, supprimer, ainsi qu'on le prescrit, le même nombre de lettres dans le dividende et dans le diviseur, c'est diviser, par une même quantité, chacun des deux termes de la fraction qui exprime le quotient ; or cette opération n'en change point la valeur et simplifie la fraction, ainsi qu'on l'a vu en Arithmétique.

34. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard aux coëfficiens que peuvent avoir le dividende, ou le diviseur, ou tous les deux. La règle qu'on doit suivre à leur égard, est de les diviser comme en Arithmétique ; et si la division ne peut pas être faite exactement, on les laisse sous la forme de fraction, que l'on réduit à sa plus simple expression, lorsque cela est possible.

Par exemple, ayant à diviser $8a^3b$ par $4a^2b$, je divise 8 par 4, et j'ai pour quotient, 2 ; divisant ensuite a^3b par a^2b, j'ai pour quotient, a ; et par conséquent $2a$ pour quotient total.

Ayant à diviser $8a^3b^2$ par $6ab$, j'écris $\frac{8a^3b^2}{6ab}$ que je réduis à $\frac{4a^2b}{3}$.

35. La règle que nous venons de donner (33) est générale, soit que le dividende et le diviseur soient monomes, soit qu'ils soient complexes ou polynomes, pourvu que dans ce dernier cas,

les lettres communes au dividende et au diviseur soient en même temps communes à tous les termes séparés par les signes + et —.

C'est ainsi qu'ayant $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ à diviser par $a^3 - 5a^2b$, on réduira le quotient $\frac{a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3}{a^3 - 5a^2b}$, à la quantité $\frac{a^3 + 4a^2b - 5b^3}{a - 5b}$, en supprimant a^2 qui est facteur commun de tous les termes du dividende et du diviseur. 36

36. Si le dividende et le diviseur sont complexes, on ne peut donner de règles générales pour reconnoître, par l'inspection seule, si la division peut ou ne peut pas être faite exactement. Il faut, pour s'en assurer et trouver en même temps le quotient, faire l'opération que nous allons enseigner.

1°. Disposer, sur une même ligne, le dividende et le diviseur, et *ordonner* leurs termes par rapport à une même lettre commune à l'un et à l'autre, c'est-à-dire, écrire, par ordre de grandeur, les termes où cette lettre a des exposans consécutivement plus petits.

2°. Cette disposition faite, on sépare le dividende, du diviseur, par un trait, et on procède à la division en prenant seulement le premier terme du dividende, que l'on divise, suivant les règles données ci-dessus (30 et suiv.) par le premier terme du diviseur, et l'on écrit le quotient sous le diviseur.

3°. On multiplie successivement tous les termes du diviseur, par le quotient qu'on vient de trouver, et on porte les produits sous le dividende, en observant de changer leur signe.

4°. On souligne le tout ; et après avoir fait la réduction des termes qui sont semblables dans le dividende et dans le produit, on écrit le reste au-dessous pour commencer une seconde division de la même manière, en prenant pour premier terme, celui des termes restans qui a le plus fort exposant.

Sur quoi il faut remarquer qu'ici, comme dans la multiplication, on doit avoir égard aux signes du terme du dividende et du terme du diviseur que l'on emploie : la règle est la même que pour la multiplication, c'est-à-dire, que . . . . . .

Si le dividende et le diviseur ont le même signe, le quotient aura le signe $+$.

Si, au contraire, ils ont différens signes, le quotient aura le signe $-$.

Cette règle pour les signes, est fondée sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, doit reproduire le dividende. Il faut donc que le quotient ait des signes tels qu'en le multipliant par le diviseur, on reproduise le dividende avec les mêmes signes ; or cette condition entraîne nécessairement la règle que nous venons de donner.

Pour procéder avec ordre, on commencera par les signes, puis on divisera le coëfficient, enfin les lettres.

EXEMPLE.

On propose de diviser $aa - bb$ par $b + a$.

J'ordonne le dividende et le diviseur par rapport à l'une ou à l'autre des deux lettres a et b, par rapport à a, par exemple; et je les écris comme on le voit ici :

Dividende..........	$aa - bb$	$a + b$ Diviseur.
	$- aa - ab$	$a - b$ Quotient.
Reste................	$- ab - bb$	
	$+ ab + bb$	
Reste	0	

Le signe du premier terme aa du dividende, étant le même que celui de a premier terme du diviseur, je dois mettre $+$ au quotient; mais comme c'est le premier terme, je puis omettre le signe $+$.

Je divise aa par a; j'ai pour quotient a que j'écris sous le diviseur.

Je multiplie successivement les deux termes a et b du diviseur, par le premier terme a du quotient, et j'écris les produits aa et ab sous le dividende, avec le signe $-$, contraire à celui qu'a donné la multiplication, parce que ces produits doivent être retranchés du dividende.

Je fais la réduction en effaçant les deux termes aa et $- aa$ qui se détruisent; il me reste $- ab$ qui, avec la partie restante $- bb$ du dividende, compose ce qui me reste à diviser.

Je continue la division en prenant $- ab$ pour premier terme de mon nouveau dividende.

Divisant $-ab$ par a, j'écris — au quotient, parce que les signes du dividende et du diviseur sont différens ; quant aux lettres, je trouve b pour quotient, et je l'écris à la suite du premier quotient.

Je multiplie les deux termes a et b du diviseur, par le terme $-b$ du quotient ; les deux produits sont $-ab-bb$; je change leurs signes et j'écris $+ab$, $+bb$ sous les parties restantes du dividende. Je fais la réduction en effaçant les parties semblables et de signe contraire : comme il ne reste rien, j'en conclus que le quotient est $a-b$.

On auroit pu également ordonner le dividende et le diviseur par rapport à la lettre b, et alors on auroit eu $-bb+aa$ à diviser par $b+a$, ce qui, en opérant de la même manière, auroit donné $-b+a$ pour quotient, quantité qui est la même que $a-b$.

Voyez les exemples de la Table ci-jointe.

37. Il arrive souvent qu'une quantité résultante de plusieurs opérations différentes, peut être mise sous la forme d'un produit ou résultat de multiplication : lorsque cela arrive, il est très-souvent utile de lui donner cette forme, en indiquant la multiplication entre ses facteurs. Quoique la méthode générale pour découvrir ces facteurs dépende de connoissances que nous ne donnerons que par la suite, néanmoins nous observerons que lorsqu'on s'est un peu familiarisé avec la multiplication et la division, on les apperçoit, dans beaucoup de cas avec facilité.

Par exemple, si on avoit à ajouter $5ab-3bc+a^2$,

Exemples de Multiplication.

$$
\begin{array}{r}
a + b \\
a - b \\ \hline
a^2 + ab \\
- ab + b^2 \\ \hline
a^2 - b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a + b \\
a + b \\ \hline
a^2 + ab \\
+ ab + b^2 \\ \hline
a^2 + 2ab + b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a^2 + 2ab + b^2 \\
a + b \\ \hline
a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
+ a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline
+ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{5}a^2b + \frac{1}{2}b^3 \\
\frac{3}{5}ab - 2b^2 \\ \hline
\frac{2}{5}a^4b - \frac{12}{25}a^3b^2 + \frac{3}{10}ab^4 \\
-\frac{4}{3}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 - b^5 \\ \hline
\frac{2}{5}a^4b - \frac{136}{75}a^3b^2 + \frac{8}{5}a^2b^3 + \frac{3}{10}ab^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\
4a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \hline
20a^5 - 16a^4b + 20a^3b^2 - 12a^2b^3 \\
- 25a^4b + 20a^3b^2 - 25a^2b^3 + 15ab^4 \\
+ 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 \\ \hline
20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5
\end{array}
$$

Exemples de Division.

$$
\begin{array}{r|l}
a^3 - b^3 & a - b \\ \cline{2-2}
- a^3 + a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \cline{1-1}
+ a^2b - b^3 & \\
- a^2b + ab^2 & \\ \cline{1-1}
+ ab^2 - b^3 & \\
- ab^2 + b^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
8a^4 - 2a^3b - 13a^2b^2 - 3ab^3 & 4a^2 + 5ab + b^2 \\ \cline{2-2}
- 8a^4 - 10a^3b - 2a^2b^2 & 2a^2 - 3ab \\ \cline{1-1}
- 12a^3b - 15a^2b^2 - 3ab^3 & \\
+ 12a^3b + 15a^2b^2 + 3ab^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
a^4 + 2aabb + b^4 - c^4 & aa + bb + cc \\ \cline{2-2}
- a^4 - aabb - aacc & aa + bb - cc \\ \cline{1-1}
+ aabb - aacc + b^4 - c^4 & \\
- aabb - b^4 - bbcc & \\ \cline{1-1}
- aacc - bbcc - c^4 & \\
+ aacc + bbcc + c^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
\frac{2}{7}a^3 - \frac{9}{35}a^2b + \frac{1}{6}a^2b - \frac{3}{20}b^3 & \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{5}b^2 \\ \cline{2-2}
- \frac{2}{7}a^3 + \frac{9}{35}ab^2 & \frac{3}{7}a - \frac{1}{4}b \\ \cline{1-1}
\frac{1}{6}ab - \frac{3}{20}b^3 & \\
- \frac{1}{6}ab + \frac{3}{20}b^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & 5a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 3b^3 \\ \cline{2-2}
- 20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12a^2b^3 & 4a^2 - 5ab + 2b^2 \\ \cline{1-1}
- 25a^4b + 30a^3b^2 - 33a^2b^3 + 25ab^4 - 6b^5 & \\
+ 25a^4b - 20a^3b^2 + 25a^2b^3 - 15ab^4 & \\ \cline{1-1}
+ 10a^3b^2 - 8a^2b^3 + 10ab^4 - 6b^5 & \\
- 10a^3b^2 + 8a^2b^3 - 10ab^4 + 6b^5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

avec $3ab + 3bc - 2a^2$, on auroit $8ab - a^2$ qui, à cause de la lettre a qui est facteur commun des deux termes $8ab$ et a^2, peut être considéré comme étant venu de la multiplication de $8b - a$ par a, et peut être représenté par $(8b - a) \times a$. Il est utile de s'exercer à ces sortes de décompositions.

De la manière de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales.

38. La méthode pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales, est analogue à celle que l'on suit dans l'Arithmétique pour les nombres. Il faut, après avoir ordonné les deux quantités par rapport à une même lettre, diviser celle où cette lettre a le plus grand exposant, par la seconde, et continuer la division jusqu'à ce que cet exposant y soit devenu moindre que dans la seconde, ou tout au plus égal. On divise ensuite la seconde, par le reste de cette division, et avec les mêmes conditions. On divise après cela, le second reste par le premier, et l'on continue de diviser le nouveau reste par le précédent, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à une division exacte : alors le dernier diviseur qu'on aura employé, est le plus grand commun diviseur cherché.

Avant de mettre cette règle en pratique, nous ferons une observation qui peut en faciliter l'usage ; cette observation est, qu'on ne change rien au plus grand commun diviseur de deux quantités, lorsqu'on multiplie ou lorsqu'on divise l'une des deux par une quantité qui n'est point diviseur de l'autre, et qui n'a aucun commun diviseur avec cette autre. Par exemple, ab et ac ont pour commun diviseur a ; si je multiplie ab par d, il deviendra

abd, qui n'a avec ac d'autre commun diviseur que a, c'est-à-dire, le même qui étoit entre ab et ac.

Il n'en seroit pas de même, si je multipliois ab par un nombre qui fût diviseur de ac, ou qui eût un facteur commun avec ac : par exemple, si je multipliois ab par c, il deviendroit abc, dont le diviseur commun avec ac est ac lui-même. Pareillement, si je multipliois ab par cd, qui a un facteur commun avec ac, j'aurois $abcd$ dont le diviseur commun avec ac est ac.

39. Concluons de-là 1°. que si en cherchant le plus grand commun diviseur de deux quantités, on s'apperçoit dans le cours des divisions que l'on fera successivement, que le dividende ou le diviseur ait un facteur, ou un diviseur qui ne soit point facteur de l'autre, on pourra supprimer ce facteur.

2°. Qu'on pourra multiplier l'une des deux quantités par tel nombre qu'on voudra, pourvu que ce nombre ne soit point diviseur de l'autre quantité, et n'ait aucun facteur commun avec elle.

Appliquons maintenant la règle et les remarques que nous venons de faire.

Supposons qu'on demande le plus grand commun diviseur de $aa - 3ab + 2bb$ et $aa - ab - 2bb$.

EXEMPLE I.

$$\begin{array}{r|l} \text{1}^{\text{er}}\text{. Divid.} & \text{1}^{\text{er}}\text{. Divis.} \\ aa - 3ab + 2bb & aa - ab - 2bb \\ -aa + ab + 2bb & \overline{\quad 1 \qquad \text{1}^{\text{er}}\text{. Quot.}} \\ \hline \text{1}^{\text{er}}\text{. Reste..} -2ab + 4bb & \end{array}$$

Il faut donc diviser $aa - ab - 2bb$ par $-2ab + 4bb$: mais comme ce dernier a pour facteur $2b$, qui n'est point facteur commun de tous les termes du premier, il suffit de diviser $aa - ab - 2bb$ par $-a + 2b$, que l'on a en supprimant le facteur $2b$. Donc

$$\begin{array}{l|l} \text{2}^{e}\text{. Divid.} & \text{2}^{e}\text{. Divis.} \\ aa - ab - 2bb & -a + 2b \\ \underline{-aa + 2ab} & -a - b \quad \text{2}^{e}\text{. Quot.} \\ \quad + ab - 2bb & \\ \quad \underline{- ab + 2bb} & \\ \text{Reste} \ldots\ldots\ 0. & \end{array}$$

Le commun diviseur est donc $-a + 2b$.

EXEMPLE II.

$$5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3 \left\{ 7a^2 - 23ab + 6b^2 \right.$$

Comme on ne peut diviser 5 par 7, et que d'ailleurs celui-ci n'est pas facteur commun de tous les termes de la seconde quantité, je multiplie la première par 7, et alors

$$\begin{array}{ll|l} & \text{1}^{er}\text{. Divid.} & \text{1}^{er}\text{. Divis.} \\ \text{j'ai} & 35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ & \underline{-35a^3 + 115a^2b - 30ab^2} & 5a \quad \text{1}^{er}\text{. Quotient.} \\ \text{1}^{er}\text{. Reste} \ldots & -11a^2b + 47ab^2 - 42b^3 & \end{array}$$

Je puis encore diviser par le même diviseur, en multipliant par 7, et omettre le facteur b, alors

$$\begin{array}{ll|l} & \text{2}^{e}\text{. Divid.} & \text{2}^{e}\text{. Divis.} \\ & -77a^2 + 329ab - 294b^2 & 7a^2 - 23ab + 6b^2 \\ & \underline{+77a^2 - 253ab + 66b^2} & -11 \quad \text{2}^{e}\text{. Quotient.} \\ \text{2}^{e}\text{. Reste} \ldots & +76ab - 228b^2 & \end{array}$$

Il faut donc diviser $7a^2 - 23ab + 6b^2$ par $76ab - 228b^2$ ou plutôt par $a - 3b$, en supprimant le facteur $76b$. Donc

$$
\begin{array}{l|l}
\text{3}^{\text{e}}\text{. Divid.} & \text{3}^{\text{e}}\text{. Divis.} \\
\quad 7a^2 - 23ab + 6b^2 & \quad a - 3b \\
-7a^2 + 21ab & \\
\hline
\qquad -2ab + 6b^2 & 7a - 2b \quad \text{3}^{\text{e}}\text{. Quotient.} \\
\qquad +2ab - 6b^2 & \\
\hline
\text{Reste} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ 0. &
\end{array}
$$

Donc le commun diviseur des deux quantités proposées, est $a - 3b$.

Des Fractions littérales.

40. Les fractions littérales se calculent suivant les mêmes règles que les fractions numériques, mais en appliquant en même temps les règles que nous avons données ci-dessus, concernant l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Comme cette application est facile, nous la ferons très-sommairement.

41. La fraction $\frac{a}{b}$ peut être transformée, sans changer de valeur, en $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{aa}{ab}$, ou $\frac{aa + ab}{ab + bb}$, et ainsi de suite.

En effet, ces dernières ne sont autre chose que la première dont on a multiplié les deux termes, par c dans le premier cas, par a dans le second,

et

et par $a+b$ dans le troisième, ce qui n'en change point la valeur.

42. La fraction $\frac{aac}{abc}$ est la même chose que $\frac{a}{b}$; la fraction $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ est la même que $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Cela est évident, en divisant les deux termes de la première par ac, et les deux termes de la troisième, par $3a^2$. Au reste, cette réduction des fractions à leur plus simple expression, est comprise dans ce qui a été dit (33).

La règle générale pour réduire une fraction quelconque à ses moindres termes, est de diviser les deux termes par leur plus grand commun diviseur.

43. Pour réduire à une seule fraction, une quantité composée d'un entier et d'une fraction, il faut, comme en Arithmétique, multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne.

Par exemple, $a+\frac{bd}{c}$, peut être changé en $\frac{ac+bd}{c}$. De même, $a+\frac{cd-ab}{b-d}$, se réduit à $\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}$, en multipliant l'entier a par le dénominateur $b-d$; et en reduisant, on a $\frac{-ad+cd}{b-d}$ ou $\frac{cd-ad}{b-d}$.

44. Pour tirer les entiers qu'une fraction littérale peut renfermer, cela se réduit, comme en

Arithmétique, à diviser le numérateur, par le dénominateur, autant qu'il est possible, et en suivant les règles données ci-dessus pour la division.

Ainsi la quantité $\frac{3ab + ac + cd}{a}$, peut être réduite à $3b + c + \frac{cd}{a}$; pareillement la quantité.......... $\frac{a^2 + 4ab + 4bb + cc}{a + 2b}$, se réduit à $a + 2b + \frac{cc}{a + 2b}$, en faisant la division par $a + 2b$.

45. Pour réduire plusieurs fractions litterales, au même dénominateur, la règle est la même qu'en Arithmétique.

Ainsi, pour réduire à un même dénominateur, les trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, je multiplie les deux termes de la première, par df; les deux termes de la seconde, par bf: et les deux termes de la dernière, par bd: et les trois fractions, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

On se conduiroit de la même manière, si les numérateurs ou les dénominateurs, ou tous les deux étoient complexes, mais en observant les règles de la multiplication des nombres complexes.

C'est ainsi qu'on trouvera que les deux fractions $\frac{b + c}{a + b}$ et $\frac{a - 2c}{a - b}$, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{ab + ac - bb - bc}{aa - bb}$, et $\frac{aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$; en multipliant les deux termes de la première, par $a - b$; et les deux termes de la seconde, par $a + b$.

46. A l'égard de l'addition et de la soustraction ; lorsqu'on a réduit les fractions au même dénominateur, il ne s'agit plus que de faire l'addition ou la soustraction des numérateurs, en conservant le dénominateur commun.

Ainsi, les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ et $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, ont donné ci-dessus........ $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ et $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$; si donc on veut ajouter, on aura $\frac{ab+ac-bb-bc+aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$ qui se réduit à $\frac{2ab-ac-bb-3bc+aa}{aa-bb}$. Au contraire, si l'on veut retrancher la seconde de la première, on aura $\frac{ab+ac-bb-bc-aa+2ac-ab+2bc}{aa-bb}$, qui se réduit à $\frac{3ac-bb+bc-aa}{aa-bb}$.

47. Remarquons en passant que, pour retrancher la seconde fraction, nous avons changé les signes du numérateur seulement : si l'on changeoit les signes du numérateur et du dénominateur en même temps, on ne changeroit point la fraction, et par conséquent, au lieu de la retrancher, on l'ajouteroit; en effet $\frac{a}{b}$ est la même chose que $\frac{-a}{-b}$, selon la règle qui a été donnée (36).

48. Pour multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, on écrira $\frac{ac}{bd}$, en multipliant numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur, conformément aux règles de l'Arithmétique. De même $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ donnera $\frac{1}{4}ab$.

49. Pour diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, l'opération se réduit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, ce qui s'exécute par la règle précédente, et donne $\frac{ad}{bc}$; et pour diviser $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{c+d}{a-b}$, cela se réduit à multiplier $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{a-b}{c+d}$, ce qui donne $\frac{(a+b)\ (a-b)}{(c+d)\ (c+d)}$ ou $\frac{(a+b)\ (a-b)}{(c+d)^2}$, ou, en faisant la multiplication indiquée dans le numérateur, $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

Des Équations.

50. Pour marquer que deux quantités sont égales, on les sépare l'une de l'autre par ce signe $=$, qui se prononce par le mot *égal*, ou par les mots *est égal à;* ainsi cette expression $a = b$, se prononceroit en disant a égale b, ou a est égal à b.

L'assemblage de deux ou de plusieurs quantités séparées ainsi par le signe $=$, est ce qu'on appelle une *Équation*. La totalité des quantités qui sont à la gauche du signe $=$, forme ce qu'on appelle le *premier membre* de l'équation, et la totalité de celles qui sont à la droite de ce même signe, forme le *second membre*. Dans l'équation $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ forme le premier membre, et $2x + 7$ forme le second. Les équations sont d'un très-grand usage pour la résolution des questions qu'on peut proposer sur les quantités.

Toute question qui peut être résolue par l'Algèbre, renferme toujours dans son énoncé, soit explicitement, soit implicitement, un certain nombre de conditions qui sont autant de moyens de saisir les rapports des quantités inconnues aux quantités connues dont celles-là dépendent. Ces rapports peuvent toujours, ainsi qu'on le verra par la suite, être exprimés par des équations dans lesquelles les quantités inconnues et les quantités connues se trouvent combinées les unes avec les autres, et cela d'une manière plus ou moins composée, selon que la question est plus ou moins difficile.

Ainsi pour résoudre, par Algèbre, les questions qu'on peut proposer sur les quantités, il faut trois choses.

1°. Saisir dans l'énoncé ou dans la nature de la question, les rapports qu'il y a entre les quantités connues et les quantités inconnues. C'est une faculté que l'esprit acquiert, comme beaucoup d'autres, par l'usage; mais il n'y a point de règles générales à donner là-dessus.

2°. Exprimer chacun de ces rapports par une équation. Cette condition peut être réduite à une seule règle, que nous exposerons par la suite; mais dont l'application est plus ou moins facile selon la nature des questions, la capacité et l'exercice que peut avoir celui qui entreprend de résoudre.

3°. Résoudre cette équation, ou ces équations, c'est-à-dire, en déduire la valeur des quantités inconnues. Ce dernier point est susceptible d'un nombre déterminé de règles : c'est par lui que nous allons commencer.

Comme les questions qu'on peut avoir à résoudre, peuvent conduire à des équations plus ou moins composées, on a partagé celles-ci en plusieurs classes ou degrés que l'on distingue par l'exposant de la quantité ou des quantités inconnues qui s'y trouvent : nous ferons connoître ces équations à mesure que nous avancerons : celles dont nous allons nous occuper d'abord, sont les *équations du premier degré*. On nomme ainsi les équations dans lesquelles les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entr'elles.

Des Équations du premier degré, à une seule inconnue.

51. Résoudre une équation, c'est la réduire à une autre, dans laquelle l'inconnue, ou la lettre

qui la représente, se trouve seule dans un membre, et où il n'y ait plus que des quantités connues dans l'autre membre.

Les règles pour résoudre les équations dont il s'agit ici, c'est-à-dire, pour les réduire à avoir l'inconnue seule dans un membre, se réduisent à trois qui sont relatives aux trois différentes manières dont l'inconnue peut se trouver mêlée ou engagée avec des quantités connues.

Dorénavant nous représenterons les quantités inconnues par quelques-unes des dernières lettres x, y, z de l'alphabet, pour les distinguer des quantités connues que nous représenterons, ou par des nombres, ou par les premières lettres de l'alphabet.

52. L'inconnue peut se trouver mêlée avec des quantités connues, en trois manières; 1°. par addition ou soustraction, comme dans l'équation $x + 3 = 5 - x$. 2°. Par addition, soustraction et multiplication, comme dans l'équation $4x - 6 = 2x + 16$. 3°. Enfin par addition, soustraction, multiplication et division, comme dans l'équation $\frac{9}{5}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$, ou par ces deux dernières opérations seulement, ou par la dernière seulement.

Voici les règles qu'il faut suivre pour dégager l'inconnue dans ces différens cas.

53. *Pour faire passer un terme quelconque d'une équation, d'un membre de cette équation dans l'autre; il faut effacer ce terme, et l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire à celui qu'il a dans le membre où il est.* Sur quoi il faut se rappeler qu'un terme qui n'a pas de signe, est censé avoir le signe $+$.

Par exemple, dans l'équation $4x + 3 = 3x + 12$, si je veux faire passer le terme $+3$ dans le second membre, j'écris $4x = 3x + 12 - 3$, où l'on voit que le terme 3 n'est plus dans le premier membre; mais il est dans le second avec le signe $-$, contraire au signe $+$ qu'il avoit dans le premier.

Cette équation réduite, revient à $4x = 3x + 9$; si l'on veut maintenant faire passer le terme $3x$, dans le premier membre, on écrira $4x - 3x = 9$, qui en réduisant, devient $x = 9$.

Pareillement, si dans l'équation $5x - 7 = 21 - 4x$, je veux faire passer le terme -7 dans le second membre, j'écrirai $5x = 21 - 4x + 7$, qui se réduit à $5x = 28 - 4x$; si je veux ensuite faire passer $-4x$, j'écrirai $5x + 4x = 28$, ou, en réduisant, $9x = 28$. Nous verrons dans quelques momens, comment s'achève la résolution de cette équation.

La raison de cette règle est bien facile à saisir. Puisque les quantités qui composent le premier membre, sont, ensemble, égales à la totalité de celles qui composent le second; il est évident qu'on ne trouble point cette égalité, si ayant ajouté ou ôté à l'un des membres un terme quelconque, on ajoute ou l'on ôte à l'autre, ce même terme : or, lorsqu'on efface un terme qui a le signe $+$, c'est diminuer le membre où il se trouve ; il faut donc diminuer l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire, y écrire ce terme avec le signe $-$. Au contraire, lorsqu'on efface un terme qui a le signe $-$, il est évident qu'on augmente le membre où il se trouve, il faut donc augmenter l'autre de pareille quantité, c'est-à-dire, y écrire ce terme avec le signe $+$.

54. On voit donc que par cette règle on peut faire passer à la fois, dans un même membre, tous les termes affectés de l'inconnue, et toutes les quantités connues dans l'autre.

C'est ainsi que de l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$, on conclud $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Pareillement l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, devient $ax - cx + bx = ac - bc$.

55. Il peut arriver, par cette transposition, que ce qui reste des x, après la réduction, se trouve avoir le signe $-$; par exemple, si l'on avoit $3x - 8 = 4x - 12$; en passant tous les x dans le premier membre, on auroit $3x - 4x = -12 + 8$, qui se réduit à $-x = -4$; alors, il n'y a qu'à changer les signes de l'un et de l'autre membre, ce qui, dans le cas présent, donne $+x = +4$ ou $x = 4$. En effet, on étoit également maître de transposer les x dans

le second membre, ce qui auroit donné $-8+12 = 4x - 3x$, qui se réduit à $4 = x$, qui est la même chose que $x = 4$.

56. Lorsqu'on a passé dans un membre, tous les termes affectés de l'inconnue, et toutes les quantités connues dans l'autre membre ; s'il n'y a point de fractions dans l'équation, il ne s'agit plus que d'exécuter la règle suivante, pour avoir la valeur de l'inconnue. *Écrivez l'inconnue seule dans un membre, et donnez pour diviseur au second membre, la quantité qui multiplioit l'inconnue dans le premier.*

Par exemple, dans l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$ que nous avons traitée ci-dessus, nous avons eu par la transposition, et la réduction, $11x = 22$; pour avoir x, je n'ai autre chose à faire qu'à écrire $x = \frac{22}{11}$, qui se réduit à $x = 2$; c'est-à-dire, écrire x seul dans le premier membre, et faire servir son multiplicateur 11, de diviseur au second membre 22. En effet, lorsqu'au lieu de $11x$, j'écris seulement x, je n'écris que la onzième partie du premier membre ; il faut donc, pour conserver l'égalité, n'écrire que la onzième partie du second membre, c'est-à-dire, diviser le second membre par 11.

Pareillement, si l'on proposoit l'équation $12x - 15 = 4x + 25$; après avoir (54) passé tous les x d'un côté, et les quantités connues de l'autre, on aura $12x - 4x = 25 + 15$, ou, en réduisant, $8x = 40$; maintenant pour avoir x j'écris $x = \frac{40}{8}$, qui se réduit à $x = 5$. Car lorsqu'au lieu de $8x$ j'écris x seulement, je n'écris que la huitième partie du premier membre ; je dois donc, pour maintenir l'égalité, n'écrire que la huitième partie du second membre, c'est-à-dire, n'écrire que $\frac{40}{8}$.

Si les quantités connues qui multiplient x, au lieu d'être des nombres, étoient représentées par des lettres, la règle ne seroit pas différente pour cela.

Ainsi dans l'équation $ax = bc$, il n'y a autre chose à faire, pour avoir x, que d'écrire $x = \frac{bc}{a}$.

Si après la transposition faite, il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue, la règle est encore la même.

Ainsi, dans l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, que nous avons eue ci-dessus, on a, après la transposition, $ax - cx + bx = ac - bc$; pour avoir x, il ne s'agit plus que d'écrire $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$; c'est-à-dire, écrire x seul dans un membre, et donner pour diviseur au second, la quantité qui multiplioit x dans le premier, laquelle est ici $a - c + b$, puisque la quantité $ax - cx + bx$ est x multiplié par la totalité des trois quantités $a - c + b$.

Pareillement, l'équation $ax = bc - 2x$, donne, par la transposition, $ax + 2x = bc$; et en appliquant la règle actuelle, ou la division, on aura $x = \frac{bc}{a + 2}$. De même l'équation $x - ab = bc - ax$, donne, par la transposition, $x + ax = bc + ab$, et par conséquent $x = \frac{bc + ab}{1 + a}$; car il ne faut pas oublier ici que le multiplicateur de x

dans le premier terme de $x + ax$, est 1 ; en sorte que dans $x + ax$, x est multiplié par $1 + a$; en effet, dans $x + ax$, x se trouve une fois de plus que dans ax.

57. Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en un autre dans laquelle il n'y en ait plus, *il faut multiplier chaque terme qui n'a pas de dénominateur, par le produit de tous les dénominateurs; et multiplier le numérateur de chaque fraction, par le produit des dénominateurs des autres fractions seulement.*

Par exemple, si j'avois l'équation $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$; je multiplierois le numérateur $2x$ de la fraction $\frac{2x}{3}$, par 35, produit des deux dénominateurs 5 et 7, ce qui me donneroit $70x$. Je multiplierois le terme 4, qui n'a point de dénominateur, par 105, produit des trois dénominateurs 3, 5, 7, ce qui me donneroit 420. Je multiplierois le numérateur $4x$ de la fraction $\frac{4x}{5}$, par 21, produit des deux dénominateurs 3 et 7, et j'aurois $84x$. Je multiplierois 12, qui n'a pas de dénominateur, par le produit 105 des trois dénominateurs, et j'aurois 1260. Enfin je multiplierois le numérateur $5x$ de la fraction $\frac{5x}{7}$, par 15, produit des deux autres dénominateurs, ce qui me donne $75x$; en sorte que l'équation proposée, est changée en celle-ci, $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, dans laquelle, pour avoir x, il ne s'agit plus que d'appliquer les deux règles précédentes. Par la première (53) on changera cette équation en $70x - 84x + 75x = 1260 - 420$; ou, en réduisant, $61x = 840$; et par la seconde (56), $x = \frac{840}{61}$, qui en faisant la division, se réduit à $x = 13\frac{47}{61}$.

La raison de cette règle est facile à apercevoir, si l'on se rappelle ce qui a été dit en Arithmétique pour reduire plusieurs fractions au même dénominateur. En effet, si dans l'équation proposée $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, on vouloit réduire au même dénominateur, les trois fractions $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, il faudroit multiplier leurs numérateurs, par les mêmes nombres par lesquels notre règle actuelle prescrit de les multiplier, et donner à ces nouveaux numérateurs, pour dénominateur commun, le produit de tous les dénominateurs; en sorte que l'équation proposée seroit changée en cette autre $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, qui est la même dans le fond, puisque les nouvelles fractions sont les mêmes que les premières. Or, si nous voulons aussi réduire les entiers en fraction, il faut multiplier ces entiers par le dénominateur de la fraction qui les accompagne, c'est-à-dire, ici par 105 qui a été formé du produit de tous les dénominateurs qui se trouvent dans l'équation; alors on aura $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$; mais il est évident qu'on peut, sans troubler l'égalité, supprimer de part et d'autre le dénominateur commun, puisque si ces deux quantités sont égales étant divisées par un même nombre, elles doivent l'être aussi sans cette division; on a donc alors $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, comme ci-dessus.

58. Si les différens termes qui composent l'équation, sont tous des quantités littérales, la règle ne sera pas, pour cela différente. Il faut seulement observer les règles de la multiplication des quantités littérales.

Ainsi dans l'équation $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$, je multiplie le numérateur ax par le produit cd des deux autres dénominateurs, ce qui donne $acdx$. Je multiplie le terme $+ b$, par le produit bcd de tous les dénominateurs, et j'ai $+ b^2 cd$. Je multiplie cx par bc, et j'ai $bc^2 x$; enfin je multiplie ab par bd, et j'ai $ab^2 d$; en sorte que l'équation devient $acdx + b^2 cd = bc^2 x + ab^2 d$, laquelle, par transposition, donne $acdx - bc^2 x = ab^2 d - b^2 cd$, et par division (56), $x = \frac{ab^2 d - b^2 cd}{acd - bc^2}$.

59. Lorsque les dénominateurs sont complexes, on peut, pour soulager l'esprit, commencer par indiquer seulement les opérations, pour les exécuter ensuite; ce qui est plus facile en les voyant ainsi indiquées.

Par exemple, si j'avois $\frac{ax}{a-b} + 4b = \frac{cx}{3a+b}$, j'écrirois $ax \times (3a + b) + 4b \times (a - b) \times (3a + b) = cx \times (a - b)$; alors faisant les opérations indiquées, j'aurois $3a^2x + abx + 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 = acx - bcx$; transposant, $3a^2x + abx - acx + bcx = 4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b$; et enfin, en divisant (56) $x = \frac{4b^3 + 8ab^2 - 12a^2b}{3a^2 + ab - ac + bc}$.

Application des principes précédens à la résolution de quelques questions simples.

60. Quoique nous nous soyons proposés de ne traiter, avec quelque détail, des usages de l'Algèbre, que dans la seconde section, nous croyons néanmoins à propos de préparer à ces usages, en appliquant dès-à-présent les principes précédens, à quelques questions assez faciles. Cela nous donnera lieu, d'ailleurs, de faire quelques remarques utiles pour la suite.

Les règles que nous venons de donner, sont suffisantes pour résoudre toute question du premier degré, lorsqu'une fois elle est exprimée par une équation. Pour mettre une question en équation, on peut faire usage de la règle suivante : *Représentez la quantité ou les quantités cherchées, chacune par une lettre ; et ayant examiné avec attention, l'état de la question, faites, à l'aide des signes algébriques,* *sur ces quantités et sur les quantités connues, les mêmes opérations et les mêmes raisonnemens que vous feriez, si connoissant les valeurs des inconnues, vous vouliez les vérifier.*

Cette règle est générale, et conduira toujours à trouver les équations que la question peut fournir. Mais il est bon d'en diriger l'application par quelques exemples.

Question première. *Deux mortiers ont tiré 100 bombes : le premier en a tiré 40 plus que l'autre : combien chacun en a-t-il tiré?*

Avec une attention médiocre, on voit que la question se réduit à celle-ci : Trouver deux quantités qui réunies fassent 100, et dont l'une surpasse l'autre de 40. Or, il est facile de voir que dès que l'une de ces quantités sera connue, la seconde le sera aussi, puisque, si la plus grande, par exemple, étoit connue, il ne s'agiroit que d'en ôter 40 pour avoir la plus petite.

Je représente donc la plus grande par x.

Maintenant, si connoissant la valeur de x, je voulois la vérifier, j'en retrancherois 40 pour avoir le plus petit nombre ; je réunirois ensuite le plus grand et le plus petit, pour voir s'ils composent 100. Imitons donc ce procedé.

Le plus grand nombre est......... x

Le plus petit sera donc........... $x - 40$

Ces deux nombres réunis font..... $2x - 40$

Or, par les conditions de la question, ils doivent faire.................. 100.

Donc......................... $2x - 40 = 100$.

Il

Il ne s'agit plus, pour avoir x, que d'appliquer les règles données (53) et (56). La première donne $2x = 100 + 40$ ou $2x = 140$, et la seconde $x = \frac{140}{2} = 70$; ayant trouvé le plus grand nombre x, j'en retranche 40 pour avoir le plus petit, et j'ai 30 pour celui-ci. Ainsi les deux nombres demandés sont 70 et 30.

En réfléchissant sur la manière dont nous nous sommes conduits pour résoudre cette question, on peut voir que les raisonnemens que nous avons employés, ne sont point dépendans des valeurs particulières des nombres 100 et 40 qui entrent dans cette question ; et que si, au lieu de ces nombres, on en eût proposé d'autres, il eût fallu se conduire de même. Ainsi si l'on proposoit la question de cette manière générale : *Deux nombres réunis font une somme connue et représentée par* a ; *ces deux nombres diffèrent entr'eux d'un nombre connu représenté par* b : *comment trouverois-je ces deux nombres ?*

Ayant représenté le plus grand par . . . . x.
Le plus petit sera donc . . . . $x - b$.
Ces deux nombres réunis font . . . . . . $2x - b$.
Or selon la question, ils doivent composer le nombre a; il faut donc que $2x - b = a$.

Transposant, on a $2x = a + b$, et divisant, $x = \frac{a+b}{2}$ ou $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

C'est-à-dire, que pour avoir le plus grand, il faut prendre la moitié de a, et y ajouter la moitié de b; ce qui m'apprend que, lorsque je connoîtrai la somme a de deux nombres inconnus et leur différence b, j'aurai le plus grand de ces deux nombres inconnus, en prenant la moitié de la somme, et y ajoutant la moitié de la différence.

Puisque le plus petit des deux nombres est $x - b$, il sera donc $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, ou, en réduisant tout en une seule fraction, il sera $\frac{a+b-2b}{2}$; c'est-à-dire, $\frac{a-b}{2}$ ou $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; donc pour avoir le plus petit, il faut ôter la moitié de b, de la moitié de a; c'est-à-dire, retrancher la moitié de la différence, de la moitié de la somme.

On voit par-là, comment en représentant d'une manière générale, c'est-à-dire, par des lettres, les quantités connues qui entrent dans les questions, on parvient à trouver des règles générales pour la résolution de toutes les questions de même espèce.

Souvent des questions paroissent différentes au premier coup-d'œil, et cependant, après un léger examen, on trouve qu'elles ne diffèrent que par l'énoncé. Par exemple, si on proposoit cette question :

Partager un nombre connu et représenté par a, *en deux parties, dont l'une soit moindre ou plus grande que l'autre, d'une quantité connue et représentée par* b. Il est facile de voir que cette question revient au même que la précédente.

QUESTION SECONDE : *On veut distribuer 720 canonniers dans trois places de guerre, et en mettre dans la plus grande 80 de plus que dans la plus petite, et 40 de plus dans la moyenne que dans la plus petite ? combien doit-on mettre dans chaque place ?*

Si l'on me disoit quel est le plus petit nombre, pour le vérifier, j'y ajouterois 40 d'une part, ce qui me donneroit le second, et 80 d'une autre part, ce qui donneroit le plus grand; alors réunissant ces trois nombres, il faudroit que leur somme formât 720.

Nommons donc ce plus petit nombre x; et en procédant de la même manière, nous dirons:

Le plus petit nombre est	x
Donc le moyen est	$x + 40$
Et le plus grand	$x + 80$
Or ces trois nombres réunis font	$3x + 120$;
D'ailleurs la question exige qu'ils fassent	720.

Il faut donc que $3x + 120 = 720$.

Appliquant les règles ci-dessus, on aura $3x = 720 - 120$ ou $3x = 600$, et par conséquent $x - 200$; donc le second nombre est 240; et le plus grand 280; ces trois nombres réunis font en effet 720.

Il est encore évident, dans cet exemple, que quand les nombres proposés, au lieu d'être 720, 40 et 80, eussent été différens, la question auroit toujours pu se résoudre de la même manière; ainsi pour résoudre toutes les questions dans lesquelles il s'agit de partager un nombre connu a en trois parties, telles que l'excès de la plus grande sur la plus petite, soit un nombre connu et représenté par b, et que l'excès de la moyenne sur la plus petite soit c; en raisonnant de même, on dira:

Représentons la plus petite, par . . .	x
La moyenne sera	$x + c$
Et la plus grande	$x + b$
Ces trois parts réunies, font	$3x + b + c$
Or elles doivent faire	a

Il faut donc que $3x + b + c = a$;

Donc transposant, $3x = a - b - c$, et divisant, $x = \frac{a - b - c}{3}$.

C'est-à-dire, que pour avoir la plus petite, il faut retrancher du nombre qu'il s'agit de partager, les deux excès, et prendre le tiers du reste : alors les deux autres sont faciles à trouver. Ainsi si l'on demande de partager 642 en trois parties, dont la moyenne surpasse la plus petite de 75, et dont la plus grande surpasse la plus petite de 87 ; j'ajouterois les deux différences 75 et 87, ce qui me donneroit 162 ; retranchant 162 de 642, il reste 480, dont le tiers 160 est la plus petite part. Les deux autres sont donc $160 + 75$ ou 235, et $160 + 87$ ou 247.

Au reste, les deux questions que nous venons de donner pour exemple, n'ont pas besoin du secours de l'Algèbre ; mais leur simplicité est propre à faire voir clairement la manière dont on doit faire usage du principe que nous avons donné pour mettre une question en équation.

QUESTION TROISIÈME : *Partager 14250 cartouches à fusil, à trois détachemens dont les forces sont entr'elles comme les nombres 3, 5 et 11 ; c'est-à-dire, dont le premier est au second* :: 3 : 5, *et dont le premier est au troisième* :: 3 : 11.

Si je connoissois ce que doit avoir l'un des détachemens, le premier, par exemple ; voici comment je vérifierois ce nombre.

Je chercherois, par une règle de trois, un nombre qui fût à ce premier :: 5 : 3 ; ce seroit le second. Je chercherois, de même, un autre nombre qui fût à ce même premier :: 11 : 3 ; ce seroit le troisième ; réunissant ces trois nombres, ils devroient former 14250. Imitons donc ce procédé.

Soit le premier nombre. . . . . x.

Pour trouver le second, je calcule le quatrième terme de cette proportion $3 : 5 :: x :$.

Ce quatrième terme sera donc . . . . $\frac{5x}{3}$.

Pour trouver le troisième nombre, je calcule le quatrième terme de cette proportion $3 : 11 :: x :$

Ce quatrième terme ou le troisième nombre, sera donc . . . . $\frac{11x}{3}$.

Ces trois nombres réunis font $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, ou $x + \frac{16x}{3}$.

Mais la question exige qu'ils fassent 14250 ; il faut donc que $x + \frac{16x}{3} = 14250$.

Pour avoir la valeur de x, je fais (57) disparoître le dénominateur 3, et j'ai $3x + 16x = 42750$, ou $19x = 42750$; donc (56) en divisant par 19, $x = \frac{42750}{19} = 2250$. La seconde part qui est $\frac{5x}{3}$, sera donc $\frac{5 \times 2250}{3}$, ou $\frac{11250}{3}$, ou 3750; et la troisième qui est $\frac{11x}{3}$, sera $\frac{11 \times 2250}{3}$, ou $\frac{24750}{3}$, ou 8250 ; ces trois parts réunies, forment en effet 14250 ; d'ailleurs les trois nombres 2250, 3750, 8250, sont entr'eux comme les trois nombres 3, 5 et 11, ce qu'il est facile de voir en divisant les trois premiers, par le même nombre 750, ce qui ne change point leur rapport.

Si le nombre qu'on propose de partager, au lieu d'être 14250, étoit tout autre ; s'il étoit en général représenté par a, et que les nombres proportionnels aux parties en lesquelles on veut le partager, au lieu d'être 3, 5, 11, fussent en général trois nombres connus et représentés par les lettres m, n, p; il est visible qu'il ne faudroit qu'imiter ce que nous venons de faire.

Ainsi la première part étant représentée par . . . x.

Pour avoir la seconde, je calculerois le quatrième terme de cette proportion $m : n :: x :$

Ce quatrième terme, ou la seconde part, seroit donc $\frac{nx}{m}$.

Et pour avoir la troisième, je calculerois le quatrième terme de cette proportion $m : p :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troisième part, seroit donc $\frac{px}{m}$.

Les trois parts réunies seroient donc $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, ou $x + \frac{nx + px}{m}$; or elles doivent faire a; il faut donc que $x + \frac{nx+px}{m} = a$.

Chassant le dénominateur, on a $mx + nx + px = ma$, et par conséquent en divisant, $x = \frac{ma}{m+n+p}$; ce qui nous donne lieu de faire remarquer l'utilité de l'Algèbre, pour découvrir des règles de calcul.

Si l'on vouloit calculer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $m+n+p : m :: a :$; il est visible, par les principes de l'Arithmétique, que ce quatrième terme seroit $\frac{am}{m+n+p}$; et puisque nous trouvons que x est exprimé par la même quantité, concluons-en que, pour avoir x, il faut calculer le quatrième terme d'une proportion dont le premier est la somme des parties proportionnelles; le second, la première de ces parties; et le troisième est le nombre même qu'il s'agit de partager ; ce qui est précisément la règle que l'on donne en Arithmétique, pour ces sortes de questions.

QUESTION QUATRIÈME : *On a fait partir de Landau, un convoi d'Artillerie pour le bas Rhin : ce convoi fait 4 lieues par jour. Un jour après, on en fait partir un autre de Strasbourg pour la même armée, et celui-ci fait 6 lieues par jour. On demande où il rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a* 18 *lieues de Strasbourg à Landau.*

Si l'on me disoit combien le second convoi doit faire de lieues pour attraper le premier, je vérifierois ce nombre, en cette manière. Je chercherois combien le premier a dû faire de chemin pendant que le second a été en marche ; et comme ils en doivent faire, en même temps, à proportion de leur vîtesse, c'est-à-dire, à proportion du nombre de lieues qu'ils font par jour; je trouverois combien le premier a dû faire, en calculant le quatrième terme de cette proportion. . . . . 6 est à 4, comme le nombre de lieues faites par le second, est au nombre de lieues que le premier aura faites dans le même temps. Ayant trouvé ce quatrième terme, j'y ajouterois le nombre de lieues que le premier convoi a dû faire pendant un jour qu'il avoit d'avance, et enfin les 18 lieues de Strasbourg à Landau, qu'il avoit aussi d'avance ; et le tout devroit former le nombre de lieues que le second a faites. Conduisons-nous donc de la même manière, en représentant par x, le nombre de lieues que fera le second convoi.

Soit donc le nombre de lieues que fera le 2^d^. convoi.	x.
Dans le même temps, celui de Landau fera.	$\frac{4}{6}x$ ou $\frac{2}{3}x$.
Et pendant un jour d'avance.	4.
Et pour la distance de Strasbourg à Landau.	18.
Or ces trois dernières quantités font. . . .	$\frac{2}{3}x + 22$.

On a donc $\frac{2}{3}x + 22$ pour le chemin qu'aura dû faire le second convoi, lorsqu'il attrapera le premier. Puis donc, qu'on a supposé qu'alors il auroit fait x de lieues, il faut que $\frac{2x}{3} + 22 = x$; d'où par les règles précédentes, on conclura $x = 66$; c'est-à-dire, que les deux convois se rencontreront, lorsque le second convoi aura fait 66 lieues, ou qu'ils se rencontreront à 66 lieues de Strasbourg.

En effet, pendant que le second fera 66 lieues, le premier en fera 44, puisqu'il fait 4 lieues pendant que le second en fait 6; or il a 4 lieues d'avance, par les 24 heures dont son départ précède celui du second, et il a de plus 18 lieues d'avance, comme partant de Landau; il sera donc alors à 66 lieues de Strasbourg, c'est-à-dire, au même endroit que le second.

Avec un peu d'attention, on voit que quand on changeroit les nombres qui entrent dans cette question, la manière de raisonner et d'opérer n'en seroit pas, pour cela, différente. Représentons donc, en général, par a, l'intervalle des deux lieues de départ, qui étoit 18 lieues dans la question précédente: représentons par b, le nombre de jours dont le départ du premier convoi précède celui du second; par c, le nombre de lieues que le premier fait par jour; et par d, le nombre de lieues que fait le second par jour.

Si nous représentons toujours par x le nombre de lieues que le second convoi doit faire pour rencontrer le premier, x sera encore composé de l'intervalle des deux lieux de départ, du chemin que le premier peut faire pendant le nombre b de jours, et enfin du chemin que le premier fera pendant tout le temps que le second sera en marche.

Pour déterminer ce dernier chemin, j'observe que les deux convois marchant alors pendant le même temps, doivent faire du chemin à proportion de leurs vîtesses; ainsi x étant le chemin que le second est supposé faire, j'aurai celui que fait le premier pendant ce temps, en calculant le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci, $d : c :: x :$; ce quatrième terme sera donc $\frac{c \times x}{d}$, ou simplement $\frac{cx}{d}$. Or, puisque ce premier convoi est supposé faire le nombre c de lieues par jour, il a dû, dans le nombre b de jours, en faire b de fois autant, c'est-à-dire, 8 fois si b vaut 8, 30 fois si b vaut trente; en général, il en doit faire autant qu'il y a d'unités dans $c \times b$ ou bc: il en a donc fait une quantité exprimée par bc.

Réunissons donc maintenant le nombre de lieues $\frac{cx}{d}$ avec le nombre de lieues bc, et avec le nombre de lieues a, et le tout $\frac{cx}{d} + bc + a$ sera ce que le second a dû faire: or on a supposé que x étoit ce qu'il a dû faire; donc $x = \frac{cx}{d} + bc + a$. D'où l'on tire $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, qui donne la solution de toutes les questions de cette espèce, au moins tant qu'on suppose que les deux convois vont du même côté, et que le départ du convoi qui va le moins vîte, précède celui du second.

Pour montrer l'usage de cette formule, reprenons l'exemple précédent, et rappelons-nous que, dans ce cas, a représente 18 lieues; c'est-à-dire, $a = 18^{\text{lie.}}$, $b = 1^{\text{j.}}$, $c = 4^{\text{lie.}}$, $d = 6^{\text{lie.}}$. Alors la valeur générale de x devient $x = \frac{1 \times 4 \times 6 + 18 \times 6}{6 - 4}$; c'est-à-dire, $x = \frac{24 + 108}{2} = 66$; comme ci-dessus.

Tel est donc l'usage de ces solutions générales, qu'en y substituant à la place des lettres, les nombres qu'elles sont destinées à représenter, et faisant les opérations que la disposition et les signes de ces lettres indiquent, on trouve la résolution de toutes les questions particulières de même espèce.

Par exemple, si l'on proposoit cette autre question : *L'aiguille des heures d'une montre répond à 17 minutes, et celle des minutes répond à 24 minutes, c'est-à-dire, qu'il est 3^{h}. $24'$: on demande à quel nombre d'heures et de minutes ces deux aiguilles seront l'une sur l'autre.*

Puisque l'aiguille des heures et celle des minutes marchent en même temps, la quantité b, par laquelle nous avons représenté ce dont le départ d'un des convois précède celui du second, est ici zéro. L'intervalle des deux lieux de départ est ici le chemin que l'aiguille des minutes a à faire pour venir de la vingt-quatrième division du cadran, à la dix-septième, c'est-à-dire, que $a = 53$ divisions : or, pendant que l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions, celle des heures n'en parcourt que 5 ; on a donc $c = 5$, $d = 60$. Puisque $b = 0$, je rejette de la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le terme bcd, ou $b \times cd$, parce que zéro multiplié par tout ce qu'on voudra, fait toujours zéro. J'aurai donc, pour le cas présent, $x = \frac{ad}{d - c}$; et en substituant pour a, d, c, leurs valeurs, $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55} = 57\frac{45}{55} = 57\frac{9}{11}$, c'est-à-dire, qu'il faudra que l'aiguille des minutes parcourre encore 57 divisions et $\frac{9}{11}$; ainsi, puisqu'elle répondoit à la vingt-quatrième division, elle répondra à 81 divisions et $\frac{9}{11}$; ou, puisque 60 divisions font un tour, les deux aiguilles seront l'une sur l'autre à $21' \frac{9}{11}$ de l'heure suivante, c'est-à-dire, $4^{h.}\ 21' \frac{9}{11}$.

L'avantage des solutions littérales sur les solutions numériques, ne consiste pas seulement en ce que, pour chaque question particulière, il ne s'agit plus que de substituer des nombres : souvent, par une certaine préparation, on rend ces solutions susceptibles d'un énoncé simple et facile à retenir. Par exemple, la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ que nous venons de trouver, est dans ce cas : la quantité d étant facteur commun des deux termes du numérateur, on peut écrire la valeur de x en cette manière, $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$; or, sous cette forme, on peut reconnoître que la valeur de x est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $d - c : d :: a + bc :$; mais, de ces trois termes, le premier, $d - c$, marque la différence des vîtesses des deux convois ; le second, d, marque la vîtesse du second convoi ; et le troisième $a + bc$, est composé de l'intervalle a des des lieues de départ, et de la quantité bc ou $c \times b$, qui exprime combien le premier convoi fait de lieues pendant le nombre de jours qu'il a d'avance ; en sorte que $a + bc$, marque toute l'avance que le premier a sur le second ; la résolution de la question peut donc se réduire à cet énoncé : *Multipliez le chemin que le premier fait par jour, par le nombre de jours qu'il a d'avance, et l'ayant ajouté à l'intervalle des deux lieux de départ, faites cette règle de trois....* La différence des vîtesses des deux convois, est à la vîtesse du second, comme la somme des deux nombres que vous venez d'ajouter, est à un quatrième terme ; ce sera le nombre de lieues que le second convoi doit faire pour rencontrer le premier. Ainsi dans le premier exemple ci-dessus, le premier convoi ayant un jour d'avance, et faisant 4 lieues par jour, on a 4 lieues à ajouter à 18 lieues, intervalle des deux lieues de départ, ce qui donne 22. Je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $6-4:6::22:$, ou $1:3::22:$; ce quatrième terme est 66, comme ci-dessus.

Réflexions sur les quantités positives et les quantités négatives.

61. Lorsqu'on a ainsi résolu, d'une manière générale, toutes les questions d'une même espèce, on peut souvent faire usage de ces formules générales, pour la résolution d'autres questions dont les conditions seroient toutes opposées à celles qu'on a eu en vue de remplir : un simple changement de $+$ en $-$, ou de $-$ en $+$ dans les signes des quantités, suffit souvent. Mais avant de faire connoître ce nouvel usage des signes, il faut les considérer sous un nouvel aspect.

Les lettres ne représentent que la valeur absolue des quantités. Les signes $+$ et $-$ n'ont représenté jusqu'ici que les opérations de l'addition et de la soustraction ; mais ils peuvent aussi représenter, dans plusieurs cas, la manière d'être des quantités les unes à l'égard des autres.

Une même quantité peut être considérée sous deux points de vue opposés, ou comme capable d'augmenter une quantité, ou comme capable de la diminuer. Tant qu'on ne représentera cette quantité que par une lettre ou par un nombre, rien ne désignera quel est celui des deux aspects sous lequel on la considère. Par exemple, dans l'état d'un homme qui auroit autant de bien que de dettes, le même nombre peut servir à exprimer la quantité numérique des unes et des autres; mais ce nombre, tel qu'il soit, ne feroit point connoître la différence des unes aux autres. Le moyen le plus naturel de faire sentir cette différence, c'est de les désigner par un signe qui indique l'effet qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre : or l'effet des dettes étant de retrancher sur les possessions, il est naturel de désigner celles-là, en leur appliquant le signe —.

Pareillement si l'on regarde une ligne droite (*fig.* 1) comme engendrée par le mouvement d'un point A, mu perpendiculairement à la ligne BC, on voit que ce point pouvant aller, ou de A vers D, ou de A vers E, si l'on représente par a le chemin AD ou AE qu'il a fait, on ne détermine pas encore absolument la situation de ce point. Le moyen de la fixer, est d'indiquer, par quelque signe, si la quantité a doit être considérée à droite ou à gauche : or les signes $+$ et — sont propres à cet effet; car si l'on estime le mouvement du point A, à l'égard d'un point L connu et regardé comme terme fixe ; lorsque le point A se meut vers D, ce qu'il décrit tend à augmenter LA ; et lorsqu'il se meut vers E, ce qu'il décrit tend au contraire à diminuer LA ; il est donc naturel de représenter AD par $+ a$, ou simplement par a, et au contraire, de représenter AE par $- a$. Ce seroit tout le contraire, si au lieu de rapporter le mouvement du point A au point L, on l'avoit rapporté au point O.

Les quantités négatives ont donc une existence aussi réelle que les positives, et elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles ont une acception toute contraire, dans le calcul.

Les quantités positives et les quantités négatives peuvent se trouver et se trouvent souvent mêlées ensemble dans un calcul, non-seulement parce que certaines opérations ont conduit, comme nous l'avons vu jusqu'ici, à retrancher certaines quantités d'autres quantités ; mais encore, parce que l'on a souvent besoin d'exprimer dans le calcul, les différens aspects sous lesquels on considère les quantités.

Au reste, quel que soit celui de ces deux aspects sous lequel on se représente les quantités négatives, les règles que nous avons données pour les différentes opérations sur les quantités, ne sont pas moins toujours les mêmes ; c'est ce que l'on verra encore plus clairement, par les réflexions suivantes.

62. Si donc après avoir résolu une question, il arrivoit que la valeur de l'inconnue trouvée par les méthodes ci-dessus, fût négative ; par exemple, si l'on arrivoit à un résultat tel que celui-ci, $x = -3$, il faudroit en conclure que la quantité qu'on a désignée par x, n'a point les propriétés qu'on lui a supposées en faisant le calcul, mais des propriétés toutes contraires. Par exemple, si l'on proposoit cette question : *Trouver un nombre qui étant ajouté à 15 donne 10* ; cette question est évidemment impossible. Si l'on représente le nombre cherché par x, on aura cette équation $x + 15 = 10$, et par conséquent, en vertu des règles ci-dessus, $x = 10 - 15$ ou $x = -5$. Cette dernière conclusion me fait donc voir que x que j'avois considéré comme devant être ajouté à 15 pour former 10, en doit au contraire être retranché. Ainsi toute solution négative indique quelque fausse supposition dans l'énoncé de la question ; mais en même temps elle en indique la correction, en ce qu'elle marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens tout opposé à celui dans lequel elle a été prise.

63. Concluons donc de-là, que si après avoir résolu une question dans laquelle quelques-unes des quantités étoient prises dans un certain sens; si, dis-je, on veut résoudre cette même question en prenant ces mêmes quantités dans un sens tout opposé, il suffira de changer les signes qu'ont actuellement ces quantités. Par exemple, dans la question quatrième, résolue généralement pour le cas où les deux convois alloient vers un même côté, si je veux avoir la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer dans le cas où ils viennent au-devant l'un de l'autre, j'y satisferai, en changeant, dans la valeur de x que nous avons trouvée $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le signe de c. En effet, puisque le premier convoi vient au-devant du second, au lieu de s'en éloigner, il diminue le chemin que celui-ci doit faire; il le diminue à raison du chemin c qu'il fait par heure; il faut donc exprimer que c, au lieu d'ajouter, retranche; il faut donc, au lieu de $+ c$, mettre $- c$. Ce changement donnera $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$; car en changeant le signe de c, dans le terme $+ bcd$, qui n'est autre chose que $+ bd \times + c$, il faudroit écrire $+ bd \times - c$, qui (24) revient à $- bcd$. Car le signe — de la quantité c, indique, suivant l'idée que nous venons d'en donner, que c doit être

être employé à des usages contraires à ceux qu'il auroit s'il avoit le signe $+$; or dans ce dernier cas, c seroit employé à marquer combien de fois on doit ajouter bd ; il marque donc ici combien de fois on doit le retrancher, en sorte que le produit est $-bcd$. En général, dès que les quantités négatives ont essentiellement une acception toute contraire à celles qu'elles auroient étant positives, et que cette diversité d'acception est indiquée par les signes de deux opérations contraires, il faut nécessairement que ce qui est addition pour les unes, soit soustraction pour les autres, *et vice versâ ;* en sorte que, si b retranché de a, donne $a-b$; $-b$ retranché de a, donne nécessairement $a+b$. D'où l'on voit que si on interprète le tout, conformément à l'idée qu'on doit attacher aux quantités négatives, ces deux opérations se changent l'une en l'autre, lorsqu'on passe des quantités positives aux négatives, *et vice versâ ;* et ne conservent, à proprement parler, que le nom ; ensorte que ce n'est que par une espèce d'analogie que l'on dit qu'on retranche $-b$ de a.

Confirmons, par un exemple, ce que nous venons de dire sur l'usage des changemens de signes, pour résoudre les questions dont les conditions sont contraires. Supposons deux courriers venant en sens contraire, et partis de deux endroits éloignés de 100 lieues. Le premier part sept heures avant le second, et fait 2 lieues par heure; le second en fait 3 par heure. En nommant x le chemin que fera celui-ci jusqu'à la rencontre, je vois que x sera égal à la différence entre la distance totale et le chemin qu'aura fait le premier courrier : or le chemin qu'aura fait celui-ci, est composé du chemin qu'il peut faire pendant sept heures, et du chemin qu'il fera pendant que le second sera en marche : à l'égard de ce dernier chemin, on le déterminera en calculant le quatrième terme de cette proportion $3 : 2 :: x :$; ce quatrième terme sera $\frac{2x}{3}$; et puisque le chemin que fait le premier courrier pendant les sept heures qu'il a d'avance, doit être de 14 lieues, à raison de 2 lieues par heure, il aura donc fait en tout $14 + \frac{2x}{3}$; donc il ne reste à faire pour le second courrier, que la quantité $100 - 14 - \frac{2x}{3}$ ou $86 - \frac{2}{3} x$; il faut donc que $x = 86 - \frac{2}{3} x$; équation d'où l'on tire $x = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$. Or si l'on substitue dans la formule $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$ que nous prétendons convenir à ce cas; si l'on substitue, dis-je, 100 pour a, 7 pour b, 3 pour d, et 2 pour c, on aura pareillement $x = 51\frac{3}{5}$.

A mesure que nous avancerons, nous aurons soin de fixer de plus en plus l'idée qu'on doit se faire des quantités négatives.

64. Comme il importe beaucoup d'acquérir la facilité de mettre en équation, nous joignons ici quelques questions simples, pour exercer les commençans, nous contentant d'en donner le

résultat pour servir à confirmer leurs essais. Après avoir résolu ces questions en nombres, ainsi qu'elles sont proposées, on fera très-bien de s'exercer à les résoudre, en substituant des lettres aux nombres : c'est en imitant ainsi les solutions particulières, que l'on acquiert la facilité de généraliser et d'étendre ses idées.

Trouver un nombre qui étant successivement ajouté à 5 *et à* 12, *donne deux sommes qui soient l'une à l'autre, comme* 3 *est à* 4. . . . . Réponse 16.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers et les $\frac{2}{3}$ *réunis, surpassent ce nombre de* 7. . . . . Réponse 30.

On emploie trois ouvriers, dont le premier fait 5 *toises d'ouvrage par jour, le second* 7, *et le troisième* 8 : *on demande en quel temps ces trois ouvriers travaillant ensemble, feront* 100 *toises.* . . . . Réponse 5 jours.

On a loué un ouvrier paresseux, à raison de 24 *sous pour chaque jour qu'il travailleroit ; mais à condition de lui retenir, sur ce qui lui seroit dû,* 6 *sous pour chaque jour qu'il ne travailleroit pas. On lui fait son compte au bout de* 30 *jours, et il se trouve qu'il n'a rien à recevoir : on demande combien de jours il a travaillé.* . . . . Réponse 6 jours.

Un Entrepreneur achette des bois qu'il vend ensuite 1500## *de plus qu'il ne les a achetés. A ce marché il se trouve gagner* 10 *pour cent du prix qu'il les vend ; on demande combien il les avoit achetés.* . . . . Réponse 13500 livres.

On a payé une certaine somme en quinze payemens qui ont été en augmentant toujours de la même quantité ; le premier *payement a été de 7 livres, le dernier de 37 livres : on demande de combien chaque payement augmentoit. . . . .* Réponse $2\frac{1}{7}$.

On a une composition d'artifice, qui sur 8 livres de salpêtre, contient une livre de soufre ; on demande combien il faudroit y ajouter de salpêtre pour que sur 9 livres du mélange, il n'y eût plus que 4 onces de soufre. . . . . . . Réponse 27 livres.

Des Équations du premier degré, à plusieurs inconnues.

65. Soit qu'il y ait plusieurs inconnues, soit qu'il n'y en ait qu'une, la méthode qu'on doit suivre, pour mettre en équation est toujours la même. Mais, en général, il faut former autant d'équations que peuvent en donner les conditions de la question. Si ces conditions sont toutes distinctes et indépendantes les unes des autres ; et si, en même-temps, chacune peut être exprimée par une équation, la question ne peut avoir plus d'une solution, lorsque toutes ces équations sont du premier degré, et qu'en même-temps il y en a autant que d'inconnues. Mais si quelqu'une des conditions se trouve ou explicitement ou implicitement comprise dans quelqu'une des autres, ou si le nombre des conditions est moindre que le nombre des inconnues,

alors on aura moins d'équations que d'inconnues; et la question peut avoir une infinité de solutions, à moins que quelque condition particulière, mais qui ne peut être exprimée par une équation, n'en limite le nombre. Nous éclaircirons tout cela par des exemples.

Nous supposerons d'abord deux équations et deux inconnues.

Les règles que nous avons établies concernant les équations à une inconnue, ont également lieu pour les équations à plusieurs inconnues; mais il faut y ajouter la règle suivante pour les équations à deux inconnues.

66. *Prenez dans chaque équation la valeur d'une même inconnue, en opérant comme si tout le reste étoit connu: égalez ces deux valeurs, et vous aurez une équation qui ne renfermera plus que la seconde inconnue, que vous déterminerez par les règles précédentes. Celle-ci étant trouvée, substituez sa valeur dans l'une ou l'autre des deux valeurs que vous avez prises par la première opération, et vous aurez la seconde inconnue.*

Par exemple, si j'avois les deux équations $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$. De la première, je tirerois $x = \frac{24 - y}{2}$. Et de la seconde $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

J'égale les deux valeurs de x, en écrivant $\frac{24-y}{2} = \frac{65-3y}{5}$, équation qui ne renferme plus que la seconde inconnue y, et qui par les règles des équations à une seule inconnue, donne $y = 10$.

Pour avoir x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 10 dans la première valeur de x trouvée ci-dessus (On pourroit également substituer dans la seconde). Cette substitution me donne $x = \frac{24-10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

67. Prenons pour second exemple, les deux équations $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, et $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Je commence par réduire (57) ces équations, à ces deux autres, $24x - 25y = 60$ et $8x + 9y = 228$.

De la première de ces deux-ci, je tire $\cdots x = \frac{60+25y}{24}$.

De la seconde, j'ai.................... $x = \frac{228-9y}{8}$.

J'égale ces deux valeurs de x, et j'ai $\frac{60+25y}{24} = \frac{228-9y}{8}$; équation qui ne renferme plus que y, et dont on conclura $y = 12$.

Pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 12 dans l'une ou l'autre des deux valeurs de x ; dans la première, par exemple, c'est-à-dire, dans $x = \frac{60+25y}{24}$, laquelle devient par-là, $x = \frac{60+25\times 12}{24} = \frac{360}{24} = 15$.

68. Prenons pour troisième exemple, les deux équations $\frac{2}{5}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$ et $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Je commence par faire disparoître les dénominateurs (57).

J'ai $56x = 35x + 60y - 1260$.

Et $56x - 20y = 35y - 420$.

De la première, je tire $x = \frac{60y - 1260}{21}$.

La seconde me donne $x = \frac{55y - 420}{56}$.

Égalant ces deux valeurs de x, j'ai $\frac{60y - 1260}{21} = \frac{55y - 420}{56}$, équation qui donne $y = 28$.

Pour avoir la valeur de x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 28, dans l'équation $x = \frac{60y - 1260}{21}$ trouvée ci-dessus; ce qui donne $x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20$

69. Prenons les deux équations littérales $ax + by = c$, et $dx + fy = e$, dans lesquelles a, b, c, d, e, f, marquent des quantités connues, positives ou négatives. La première donne $x = \frac{c - by}{a}$. La seconde donne de même $x = \frac{e - fy}{d}$. Égalant ces deux valeurs de x, on a $\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$; chassant les fractions et transposant, on a $afy - bdy = ae - cd$; d'où l'on tire $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Pour avoir la valeur de x, il faut substituer, au lieu de y, sa valeur $\frac{ac - cd}{af - bd}$, dans l'une des deux valeurs de x, dans $x = \frac{c - by}{a}$, par exemple. Cette substitutiion

donnera $x = \dfrac{c - b \times \dfrac{ae - cd}{af - bd}}{a}$, ou réduisant c en fraction, $x = \dfrac{\dfrac{afc - bcd - abe + bcd}{af - bd}}{a}$, ou.....;
$x = \dfrac{afc - abe}{aaf - abd}$, ou enfin (33), $x = \dfrac{fc - be}{af - bd}$.

70. Nous avons supposé jusqu'ici, que les deux inconnues se trouvoient toutes deux dans chaque équation. Lorsque cela n'arrive point, le calcul ne diffère des précédens qu'en ce qu'il est plus simple.

Par exemple, si l'on avoit $5\,ax = 3\,b$, et $cx + dy = e$; la première donneroit $x = \dfrac{3b}{5a}$; et la seconde, $x = \dfrac{e - dy}{c}$. Égalant ces deux valeurs, on auroit $\dfrac{3b}{5a} = \dfrac{e - dy}{c}$; d'où chassant les dénominateurs, transposant et réduisant, on tire $y = \dfrac{5ae - 3bc}{5ad}$.

Des Équations du premier degré, à trois et à un plus grand nombre d'inconnus.

71. Ce que nous venons de dire étant une fois bien conçu, il est facile de voir comment on doit se conduire, lorsque le nombre des inconnues et des équations est plus considérable.

6
3
18
6
26
16 4
2 2

Nous supposerons toujours qu'on ait autant d'équations que d'inconnues. Si l'on en a trois, *on prendra dans chacune la valeur d'une même inconnue, comme si tout le reste étoit connu. On égalera ensuite la première valeur à la seconde, et la première à la troisième ; ou bien l'on égalera la première à la seconde, et la seconde à la troisième. On aura, par ce procédé, deux équations à deux inconnues seulement, et on les traitera par la règle précédente* (66).

Soient, par exemple, les trois équations,

$$3x + 5y + 7z = 179$$
$$8x + 3y - 2z = 64$$
$$5x - y + 3z = 75$$

De la première, je tire $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

De la seconde . . . . . $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

De la troisième. . . . . $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Égalant la première valeur de x à la seconde, j'ai $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Égalant de même la première à la troisième, j'ai $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Comme il n'y a plus que deux inconnues, je traite ces deux dernières équations, suivant la règle donnée (66) pour les équations à deux inconnues.

Je prends donc dans chacune de ces équations la valeur de y. La première me donne $y = \frac{1240 - 62z}{31}$. La seconde me donne $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

J'égale ces deux valeurs de y, et j'ai $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$, qui ne renferme plus qu'une inconnue dont la valeur est $z = \frac{13950}{930} = 15$.

Pour avoir y, je mets, au lieu de z, sa valeur 15, dans l'équation $y = \frac{1240 - 62z}{31}$, que nous venons de trouver ci-dessus ; ce qui me donne $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Enfin, pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 10, et au lieu de z, sa valeur 15, dans l'une des trois valeurs de x, trouvées ci-dessus ; par exemple, dans $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$, qui devient par-là . . . . $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

Si toutes les inconnues n'entroient pas à la fois dans chaque équation, le calcul seroit plus simple, mais se feroit toujours d'une manière analogue.

Par exemple, si l'on avoit les trois équations, $5x + 3y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$. La première donneroit $x = \frac{65 - 3y}{5}$; la seconde ne donneroit point de valeur de x ; la troisième donneroit $x = \frac{57 - 4z}{3}$; il n'y auroit donc que ces deux valeurs de x à égaler, elles donnent $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, équation qui ne renferme plus d'x, et qui étant traitée, avec la seconde équation $2y - z = 11$, selon les règles des équations à deux inconnues, donnera les valeurs de y et de z. En achevant le calcul, on trouvera $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

72. On voit par-là, que s'il y avoit un plus grand nombre d'équations, la règle générale seroit....... *Prenez, dans chaque équation, la valeur d'une même inconnue; égalez l'une de ces valeurs à chacune des autres, et vous aurez une équation et une inconnue de moins. Traitez ces nouvelles équations comme vous venez de faire pour les premières, et vous aurez encore une équation et une inconnue de moins. Continuez ainsi jusqu'à ce qu'enfin vous parveniez à n'avoir plus qu'une inconnue.*

73. Il ne sera peut-être pas inutile de placer ici une autre méthode pour déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré.

Soient les deux équations $3x + 4y = 81$ et $3x - 4y = 9$. Si l'on retranche la seconde de la première, on aura $8y = 72$, et par conséquent, $y = \frac{72}{8} = 9$. Au contraire, si l'on ajoute la première équation à la seconde, on aura $6x = 90$, et par conséquent, $x = \frac{90}{6} = 15$. On voit donc que lorsque les deux équations sont telles que le coëfficient de l'une des inconnues, est le même dans chacune, il est très-facile par une simple addition ou une simple soustraction, de réduire les deux équations à n'avoir qu'une inconnue.

Mais ne peut-on pas ramener les équations à cet état? On le peut toujours; il suffit pour cela de multiplier l'une des deux équations par un nombre convenable. Voici comment on doit s'y prendre pour trouver ce nombre. Soient les deux équations $4x + 3y = 65$, et $5x + 8y = 111$.

Je représente par m, le nombre dont il s'agit, et je multiplie l'une des deux équations, la seconde, par exemple, par m, ce qui me donne $5mx + 8my = 111m$. Je l'ajoute avec la première, et j'ai $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$, qu'on peut écrire ainsi $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Si je veux maintenant faire disparoître les x, je n'ai qu'à supposer que le nombre m est tel que $4 + 5m = 0$, ce qui me donne $m = -\frac{4}{5}$. Cette supposition réduit l'équation à $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, qui donne $y = \frac{65 - 111m}{3 + 8m}$; équation, qui, en mettant pour m sa valeur $-\frac{4}{5}$, devient $y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = 7$.

Si au contraire, j'avois voulu faire disparoître les y, j'aurois supposé m tel que $3 + 8m = 0$, c'est-à-dire, que j'aurois égalé à zéro, le coëfficient ou multiplicateur de y, ce qui m'auroit donné $m = -\frac{3}{8}$. Cette supposition réduit l'équation à $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, qui donne $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m}$, équation, qui, en mettant pour m sa valeur actuelle $-\frac{3}{8}$, devient $x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = 11$.

Si l'on avoit trois équations et trois inconnues, on multiplieroit la seconde par un nombre m, et la troisième par un nombre n, et les ajoutant, ainsi multipliées, à la première, on supposeroit égal à zéro, le coëfficient de chacune de deux des trois inconnues x, y et z. On auroit, pour déterminer m et n, deux équations que l'on traiteroit comme dans le cas précédent.

Par exemple, prenons les trois équations $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$

que nous avons déjà traitées. En multipliant la seconde par m, la troisième par n, et les ajoutant à la première, on aura $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$ qu'on peut écrire ainsi, $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 5m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Si c'est z que je veux avoir, je supposerai $3 + 8m + 5n = 0$ et $5 + 3m - n = 0$; ce qui réduit l'équation à $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, qui donne $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; il ne s'agit donc plus que de déterminer m et n, ce que l'on fera par le moyen des deux équations $3 + 8m + 5n = 0$, et $5 + 3m - n = 0$, que l'on traitera comme dans le cas précédent, c'est-à dire, qu'on multipliera la seconde par un nombre p, et on l'ajoutera à la première, ce qui donnera $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = 0$, qu'on écrira ainsi, $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$, pour avoir n, on supposera $8 + 3p = 0$, ce qui réduira l'équation à $3 + 5p + (5 - p)n = 0$, qui donne . . , . . . $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; or, l'équation $8 + 3p = 0$, donne $p = -\frac{8}{3}$; donc $n = \frac{31}{23}$; par une opération semblable, on trouvera $m = -\frac{28}{23}$; substituant donc dans la valeur de z, on aura $z = 15$. On voit par-là, comment on s'y seroit pris, si au lieu de z, on avoit voulu avoir y ou x; mais, lorsque l'une des inconnues est trouvée, il seroit superflu de recommencer un calcul semblable pour chacune des autres, il faut substituer la valeur de cette inconnue dans les équations proposées; et employant une équation de moins, on détermine les autres valeurs, comme pour le cas où il y a une équation de moins.

Application des Règles précédentes, à la résolution de quelques questions qui renferment plus d'une inconnue.

74. QUESTION PREMIÈRE : *On a deux espèces de boulets : six de la plus forte espèce, avec dix de la seconde, pèsent 304 livres ; et dix de la première espèce, avec quinze de la seconde, pèsent 480 livres. On demande le poids de chaque espèce de boulets ?*

Si l'on savoit combien pèse chaque espèce de boulet, en multipliant le poids d'un boulet de la première espèce, par six, et celui d'un boulet de la seconde espèce, par dix, et ajoutant les deux produits, on trouveroit 304 liv. ; pareillement, en multipliant le poids d'un boulet de la première espèce, par dix, celui de la seconde par quinze, et ajoutant les deux produits, on trouveroit 480 livres ; cela étant, si je représente par x le nombre de livres ou le poids d'un boulet de la première espèce, et par y celui d'un boulet de la seconde espèce ; en raisonnant de la même manière, j'aurai les deux équations $6x + 10y = 304$ et $10x + 15y = 480$.

Il ne s'agit donc plus que de trouver les valeurs de x et de y. Pour cet effet, je prends dans chaque équation la valeur de x. La première me donne, après la transposition et la division, $x = \frac{304 - 10y}{6}$; la seconde me donne $x = \frac{480 - 15y}{10}$; j'égale ces deux valeurs de x, et j'ai l'équation $\frac{304 - 10y}{6} = \frac{480 - 15y}{10}$, d'où par les règles ci-dessus, je tire $y = 16$.

Pour avoir x, je reprends la première valeur de x, savoir $x = \frac{304 - 10y}{6}$, et substituant pour y, sa valeur 16, j'ai $x = \frac{144}{6} = 24$: donc les plus gros boulets sont de 24 livres, et les moindres de 16 livres. En effet, six boulets de 24 livres font 144 livres, qui avec dix boulets de 16 livres ou 160 livres, font 304 livres. De plus, dix boulets de 24 livres, qui font 240 livres, avec quinze boulets de 16 livres, qui font 240 livres, donnent 480 liv.

QUESTION SECONDE : *Une pièce de 24, composée de rosette et d'étain, pèse* $5531^{\text{liv.}}$ *et renferme 8,95 pieds cubes, en matière ; sachant qu'un pied cube de rosette pèse* $630^{\text{liv.}}$, *et qu'un pied cube d'étain pèse* $512^{\text{liv.}}$, *comment peut-on déterminer la quantité de rosette, et la quantité d'étain qui entrent dans cette pièce ?*

Si l'on connoissoit le nombre de pieds cubes de chaque espèce de matière, en ajoutant ces deux nombres, ils donneroient 8,95 pour leur somme. De plus, en prenant $630^{\text{liv.}}$ autant de fois qu'il y a de pieds cubes de rosette, on auroit le poids de la rosette qui entre dans le mélange ; et en multipliant de même 512 par le nombre des pieds cubes d'étain, on auroit le poids de l'étain ; et en ajoutant ces deux produits, ils formeroient $5531^{\text{liv.}}$.

Raisonnons donc de la même manière en représentant par x le nombre des pieds cubes de rosette, et par y le nombre des pieds cubes d'étain : il faut donc que $x + y = 8{,}95$, et $630x + 512y = 5531$.

De ces deux équations, je tire $x = 8{,}95 - y$ et $x = \frac{5531 - 512y}{630}$; donc $8{,}95 - y = \frac{5531 - 512y}{630}$; d'où l'on tire $y = \frac{107{,}5}{118} = 0{,}911$.

Substituant cette valeur, dans celle de x, savoir dans $x = 8.95 - y$, on a $x = 8,039$.

Si les deux matières qu'on a mêlees avoient des pesanteurs spécifiques (*) différentes, et si le volume, ainsi que le poids total du mélange, étoient différens de ce qu'on vient de supposer, la méthode, pour trouver les quantités de chaque espèce de matière, n'en seroit pas moins la même ; ainsi, pour renfermer dans une seule, toutes les solutions des questions de cette espèce, supposons généralement que le nombre total des pieds cubes des deux espèces de matières soit . . . .

Que le poids total du mélange exprimé en livres soit . . . . b.

Que le poids d'un pied cube de la première matière soit . . . . c.

Et celui d'un pied cube de la seconde soit . . . . d.

c et d étant exprimés en livres.

Alors si nous représentons par x le nombre des pieds cubes de la première matière, et par y le nombre de pieds cubes de la seconde ; les deux équations seront

$$x + y = a$$

$$\text{et } cx + dy = b.$$

Cela posé, la première équation donne $x = a - y$:

(*) On appelle *pesanteur spécifique*, la pesanteur d'un corps dont le volume est connu. Quand on dit : *Un tel corps pèse 12 livres ;* on ne détermine que le poids de ce corps, et non pas celui de l'espèce de matière dont il est composé ; mais quand on dit, par exemple, 12 *pouces cubes d'eau commune, pèsent* 7 *onces* 6 *gros*, alors on détermine la pesanteur de cette espèce d'eau : on met en état de déterminer combien pèse tout autre volume connu de cette même eau.

la

la seconde donne $x = \frac{b-dy}{c}$; égalant ces deux valeurs, on a $a - y = \frac{b-dy}{c}$; d'où l'on tire $y = \frac{ac-b}{c-d}$.

Pour avoir la valeur de x, il faut substituer dans l'équation $x = a - y$, la valeur qu'on vient de trouver pour y ; et l'on aura $x = a + \frac{b-ac}{c-d}$, qui (43) se réduit à $x = \frac{b-ad}{c-d}$.

Les valeurs $x = \frac{b-ad}{c-d}$, et $y = \frac{ac-b}{c-d}$ que l'on vient de trouver, peuvent fournir une règle susceptible d'un énoncé assez simple, pour la résolution générale de toutes les questions de cette espèce.

Pour trouver cette règle, il faut faire attention, 1°. que b marque le poids total du mélange ; 2°. que a marquant le nombre total des parties du mélange, et d le poids d'une des parties de la seconde espèce, ad marque ce que pèseroit le volume du mélange, s'il étoit composé seulement de la matière de la seconde espèce. Enfin le dénominateur $c - d$ est la différence des pesanteurs spécifiques de chaque espèce de matière.

Si l'on analyse, de même, la valeur de y, on verra que ac est ce que pèseroit le volume du mélange, s'il étoit uniquement composé de la première matière. De là on pourra conclure cette règle.

Calculez ce que pèseroit le volume du mélange, s'il étoit composé seulement de la seconde matière ; retranchez ce poids, du poids total actuel du mélange, et divisez le reste par la différence des pesanteurs spécifiques des deux matières : le quotient sera le nombre des parties de la première matière qui entre dans le mixte.

Au contraire, *pour avoir le nombre des parties de la seconde matière, calculez ce que pèseroit le volume du mélange, s'il* *étoit tout entier de la première matière ; retranchez - en le poids total actuel du mélange, et divisez le reste par la même quantité que ci-dessus.*

Cette règle est précisément ce qu'on appelle en arithmétique, *la règle d'Alliage.*

On peut, à cette même question, en ramener une infinité d'autres, qui, au premier coup-d'œil, ne semblent pas de même espèce. Par exemple, celle-ci : *Faire* 522 *livres en* 42 *pièces, les unes de* 24 *livres et les autres de* 6 *livres ;* car avec un peu d'attention, on voit que cette question est la même que cette autre ; *un mixte composé de* 42 *pieds cubes de matière, pèse* 522 *livres : des deux matières qui y entrent, l'une pèse* 24 *livres par pied cube, et l'autre* 6 *livres.* En suivant la régle précédente, on trouvera qu'il faut 15 pièces de 24 livres, et 27 pièces de 6 livres.

La même règle serviroit encore à résoudre cette autre question. *Un pied cube d'eau de mer pèse* 74 *livres ; un pied cube d'eau de pluie pèse* 70 *livres ; combien faudroit-il mêler ensemble d'eau de mer et d'eau de pluie pour faire de l'eau qui pesât* 73 *livres par pied cube.*

On voit par-là, combien il peut être utile de s'accoutumer de bonne heure à représenter, d'une manière générale, les quantités connues qui entrent dans les questions, et à interpréter ou traduire les résultats algébriques des solutions des problèmes.

QUESTION TROISIÈME : *On a trois lingots, dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent et du cuivre. L'alliage dans le premier est tel, que sur* 16 *onces, il y en a* 7 *d'or,* 8 *d'argent et* 1 *de cuivre. Dans le second, sur* 16 *onces, il y en a* 5 *d'or,* 7 *d'argent et* 4 *de cuivre. Dans le troisième, sur* 16 *onces, il y en a* 2 *d'or,* 9 *d'argent et* 5 *de* *cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces trois alliages, composer un troisième lingot, tel que sur 16 onces, il s'en trouve 4 onces et $\frac{15}{16}$ en or, 7 $\frac{10}{16}$ en argent, et 3 $\frac{7}{16}$ en cuivre.*

Représentons par x le nombre d'onces qu'il faut prendre du premier lingot ; par y, le nombre d'onces qu'il faut prendre du second ; et enfin par z, le nombre d'onces qu'il faut prendre du troisième.

Puisque 16 onces du premier, contiennent 7 onces d'or, on trouvera ce que x d'onces de ce même lingot peuvent contenir d'or, en calculant le quatrième terme de cette proportion $16 : 7 :: x :$; ce quatrième terme sera $\frac{7x}{16}$; par un raisonnement semblable, on trouvera qu'en prenant y d'onces du second lingot, on prend $\frac{5y}{16}$ en or, et sur le troisième $\frac{2z}{16}$. Ces trois quantités réunies font $\frac{7x+5y+2z}{16}$; or, on veut qu'elles fassent $4\frac{15}{16}$ ou $\frac{79}{16}$: donc $\frac{7x+5y+2z}{16}=\frac{79}{16}$.

Pour satisfaire à la seconde condition, on remarquera, de même, qu'en prenant x d'onces sur le premier lingot, on prend nécessairement $\frac{8x}{16}$ d'onces en argent, sur le second $\frac{7y}{16}$, et enfin sur le troisième, on prend nécessairement $\frac{9z}{16}$; ces trois quantités réunies font. . . . . $\frac{8x+7y+9z}{16}$, et comme on veut qu'elles fassent $7\frac{10}{16}$ ou $\frac{122}{16}$, on aura $\frac{8x+7y+9z}{16}=\frac{122}{16}$.

En procédant de la même manière, on aura, pour satisfaire à la troisième condition, l'équation $\frac{x + 4y + 5z}{16} = \frac{55}{16}$.

Comme le nombre 16 est diviseur commun des deux membres de chacune des trois équations qu'on vient de trouver, on peut le supprimer; et alors on aura les trois équations suivantes,

$$7x + 5y + 2z = 79,$$
$$8x + 7y + 9z = 122,$$
$$x + 4y + 5z = 55.$$

Tirant de chacune, la valeur de x, on aura

$$x = \frac{79 - 5y - 2z}{7},$$

$$x = \frac{122 - 7y - 9z}{8},$$

$$x = 55 - 4y - 5z.$$

Égalant la première valeur de x à la seconde et à la troisième (71),

on aura $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$,

et $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z$,

équations qui ne renferment plus que deux inconnues, et qu'il faut, par conséquent, traiter, selon ce qui a été dit (66).

Pour cet effet, je commence par faire disparoître les diviseurs; puis tirant les valeurs de y,

j'ai $y = \frac{222 - 47z}{9}$

et $y = \frac{306 - 33z}{23}$.

Égalant ces deux valeurs de y, j'ai $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$, et après les opérations ordinaires, $z = \frac{2352}{784} = 3$.

Pour avoir la valeur de y, je substitue dans l'une des deux valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour y, j'y substitue, dis-je, au lieu de z, sa valeur 3, qu'on vient de trouver; par exemple, en substituant dans $y = \frac{222 - 47z}{9}$, j'ai $y = \frac{81}{9} = 9$.

Enfin, pour avoir x, je substitue, au lieu de y et de z, leurs valeurs 9 et 3 dans l'une des trois valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour x; par exemple, dans la dernière, savoir $x = 55 - 4y - 5z$, et cette valeur devient $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; c'est-à-dire, puisqu'on trouve $x = 4$, $y = 9$ et $z = 3$, qu'il faut prendre 4 onces du premier lingot, 9 du second et 3 du troisième, et alors le nouveau lingot contiendra en or, 4 onces et $\frac{15}{16}$; en argent, 7 onces $\frac{10}{16}$; et en cuivre, 3 onces $\frac{7}{16}$.

En effet, puisque le premier lingot contient sur 16 onces, 7 onces d'or, 8 d'argent et 1 de cuivre; il est évident que si l'on prend 4 onces seulement de ce lingot, on aura $\frac{28}{16}$ d'once en or, $\frac{32}{16}$ en argent et $\frac{4}{16}$ en cuivre. Par une raison semblable, en prenant 9 onces du second lingot, on aura $\frac{45}{16}$ en or, $\frac{63}{16}$ en argent et $\frac{36}{16}$ en cuivre; et en prenant 3 onces du troisième lingot, on aura $\frac{6}{16}$ en or, $\frac{27}{16}$ en argent, et $\frac{15}{16}$ en cuivre.

Réunissant les trois quantités de chaque espèce de matière, provenantes des trois lingots, on aura $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$ ou

$4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ et $3\frac{7}{16}$ pour les quantités d'or, d'argent et de cuivre qui entreront, en effet, dans le quatrième lingot.

Des cas où les questions proposées restent indéterminées, quoiqu'on ait autant d'Équations que d'inconnues ; et des cas où les questions sont impossibles.

75. Il arrive quelquefois que quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, la question qui a conduit à ces équations reste néanmoins indéterminée, c'est-à-dire, qu'elle est alors susceptible d'un nombre indéfini de solutions.

Ce cas a lieu lorsque quelques-unes des conditions, quoique différentes en apparence, se trouvent être les mêmes dans le fond. Alors les équations qui expriment ces conditions sont, ou des multiples les unes des autres, ou, en général, quelques-unes d'entr'elles sont composées d'une ou de plusieurs des autres, ajoutées ou soustraites, multipliées ou divisées par certains nombres. Par exemple, une question qui conduiroit à ces trois équations

$$5x + 3y + 2z = 17,$$
$$8x + 2y + 4z = 20,$$
$$18x + 8y + 8z = 54,$$

seroit susceptible d'un nombre indéfini de solutions, quoiqu'il semble, d'après ce que nous avons vu plus haut, que x, y et z ne peuvent avoir chacun qu'une seule valeur. De ces trois équations, la dernière est composée de la seconde ajoutée avec le double de la première. Or il est évident que les deux premières étant une fois supposées avoir lieu, la troisième s'ensuit nécessairement ; que par conséquent elle n'exprime aucune nouvelle condition ; on est donc dans le même cas que si l'on avoit seulement les deux premières équations : or nous verrons dans peu que lorsqu'on n'a que deux équations pour trois inconnues, chaque inconnue est susceptible d'un nombre indéfini de valeurs.

76. Le calcul fait toujours connoître les cas dont il s'agit ici : voici comment. Il n'y a qu'à procéder à la recherche des inconnues, selon les règles données ci-dessus : alors si quelqu'une des équations est comprise dans les autres, on arrivera dans le cours du calcul, à une équation *identique*, c'est-à-dire, à une équation dans laquelle les deux membres seront non-seulement égaux, mais encore composés de termes semblables et égaux : autant on trouvera d'équations identiques, autant il y aura d'équations inutiles parmi celles qui auront été formées.

Par exemple, si de chacune des deux équations $6x + 8y = 12$ et $x + \frac{4}{3}y = 2$, je tire la valeur de x, j'aurai $x = \frac{12 - 8y}{6}$ et $x = 2 - \frac{4}{3}y$: égalant ces deux valeurs, j'aurai $\frac{12 - 8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, ou chassant les dénominateurs, $36 - 24y = 36 - 24y$, équation identique et qui ne peut faire connoître la valeur de y, parce qu'après la transposition et la réduction, on est conduit à cette équation $0 = 0$.

Pareillement, si l'on avoit les trois équations suivantes :

$$5x + 3y + 2z = 24$$
$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$
$$15x + 9y + 6z = 72$$

La première donneroit $x = \frac{24 - 3y - 2z}{5}$; la seconde, après avoir chassé les dénominateurs, transposé, réduit, etc., donneroit $x = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$; et la troisième $x = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$. Égalant la première de ces valeurs à la seconde et à la troisième, on auroit $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{120 - 15y - 10z}{25}$,

et $\frac{24 - 3y - 2z}{5} = \frac{72 - 9y - 6z}{15}$;

et en chassant les dénominateurs, $600 - 75y - 50z = 600 - 75y - 50z$, et $360 - 45y - 30z = 360 - 45y - 30z$, équations identiques et dont on ne peut tirer ni y ni z, parce qu'elles se réduisent chacune à $0 = 0$. Il n'y a donc ici, à proprement parler, qu'une seule équation.

Les questions qui conduisent à de pareils résultats, sont indéterminées, mais ne sont pas impossibles. Nous verrons dans peu, comment on doit les traiter.

77. Lorsqu'une question qui ne conduit qu'à des équations du premier degré est impossible, on s'en apperçoit à ce que la suite du calcul conduit à une absurdité ; par exemple, conduit à dire, $4 = 3$.

Si l'on avoit, par exemple, les deux équations . . .

$$5x + 3y = 30$$

$$\text{et } 20x + 12y = 135$$

La première donneroit $x = \frac{30 - 3y}{5}$, et la seconde $x = \frac{135 - 12y}{20}$; égalant ces deux valeurs, on a . . . $\frac{30 - 3y}{5} = \frac{135 - 12y}{20}$; en chassant les dénominateurs, on a $600 - 60y = 675 - 60y$ qui conduit à $600 = 675$, ce qui est absurde ; donc la question qui conduiroit aux deux équations, $5x + 3y = 30$, et $20x + 12y = 135$, est impossible et absurde.

78. Les solutions négatives indiquent aussi une sorte d'impossibilité dans la question ; mais cette impossibilité n'est pas absolue, elle est relative au sens dans lequel les quantités ont été prises ; en sorte qu'il y a un sens dans lequel ces solutions sont naturelles et admissibles ; *voyez ce qui a été dit* (62).

Des Problèmes indéterminés.

79. On appelle *Problème indéterminé*, toute question à laquelle on peut satisfaire en plusieurs manières, sans pouvoir déterminer parmi toutes ces manières, quelle est celle qui donne lieu à la question. Ces sortes de Problèmes ont toujours moins de conditions que d'inconnues ; et envisagés généralement, ils sont susceptibles d'une infinité de solutions ; mais il arrive souvent aussi que le nombre de ces solutions est limité par quelques conditions qui ne pouvant pas être réduites en équations, ne permettent pas de déterminer d'une manière directe le nombre des solutions que la question peut avoir.

Si l'on proposoit cette question : *Trouver deux nombres qui pris ensemble fassent* 24 ; en nommant x l'un de ces nombres, et y l'autre, on auroit $x + y = 24$, équation de laquelle on tire $x = 24 - y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par x et y on entend indifféremment des nombres entiers ou des nombres fractionnaires, et des nombres positifs ou négatifs : il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour y tel nombre qu'on voudra, et de conclure la valeur de x de l'équation $x = 24 - y$, en y substituant pour y le nombre qu'on aura pris arbitrairement ; ainsi si l'on suppose successivement $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, etc. on aura $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$, ect. Mais si l'on ne veut que des nombres entiers et positifs, alors le nombre des solutions est limité ; car pour que x soit positif, il faut que y ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation ne peut avoir en tout que 25 solutions en y comprenant 0 : en sorte que supposant successivement $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, etc. on aura $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$, etc.

80. Mais, lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers et positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut satisfaire à cette condition : les questions suivantes sont propres à le faire connoître.

QUESTION PREMIÈRE. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres en donnant des pièces de 17 livres et en recevant en échange des pièces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre des pièces de 17 livres, et par y celui des pièces de 11 livres ; en donnant x pièces de 17 livres, on payera x fois 17 livres ou $17x$; en recevant y pièces de 11 livres on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; et puisqu'on veut payer 542 livres, on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, et nous aurons $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation; mais comme la question exige que x et y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible à $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier, on aura $\frac{6x - 3}{11} = u$, et par conséquent $6x - 3 = 11u$ et $x = \frac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier; on aura $\frac{5u + 3}{6} = t$, et par conséquent $5u + 3 = 6t$ et $u = \frac{6t - 3}{5} = t + \frac{t - 3}{5}$: il faut donc que $\frac{t - 3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t - 3}{5} = s$, et par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x et y; puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$, en mettant pour t sa valeur $5s+3$, on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s+3$; et puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s+6$; enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en subtituant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11}$ $= 17s-40$; ainsi les valeurs correspondantes de x et de y sont $x = 11s+6$, et $y = 17s-40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x et de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini; ainsi posant successivement $s=3$, $s=4$, $s=5$, $s=6$, $s=7$, etc. on aura les valeurs correspondantes de x et de y, comme il suit.

$$\begin{aligned} x &= 39 \ldots\ldots & y &= 11. \\ &= 50 & &= 28 \\ &= 61 & &= 45 \\ &= 72 & &= 62 \\ &= 83, \text{ etc.} & &= 79. \end{aligned}$$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pièces de 17 livres, désigné par x; et recevant le nombre correspondant de pièces de 11 livres, désigné par y, on payera 542 livres.

QUESTION SECONDE : *Faire 741 livres en 41 pièces, de trois espèces; savoir, de 24 livres, de 19 livres et de 10 livres.*

Soient x, y et z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces; puisqu'on veut en tout 41 pièces, on aura 1°. $x + y + z = 41$.

2°. Chaque pièce de la première espèce valant 24 liv. le nombre x de pièces vaudra x fois 24 liv. ou $24\,x$; par la même raison y pièces de la seconde espèce vaudront $19\,y$, et z pièces de la troisième espèce vaudront $10\,z$; ainsi les valeurs réunies des trois nombres de pièces différentes, monteront à $24\,x + 19\,y + 10\,z$; et comme elles doivent monter à 741 livres, on aura $24\,x + 19\,y + 10\,z = 741$.

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur d'une même inconnue, peu importe laquelle; de x, par exemple, et j'ai $x = 41 - y - z$, et $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; j'égale ces deux valeurs, et j'ai $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$, ou chassant le dénominateur, $984 - 24\,y - 24\,z = 741 - 19\,y - 10\,z$; transposant et réduisant, on a $243 = 5\,y + 14\,z$.

Je prends maintenant la valeur de y qui a le plus petit coëfficient, et j'ai $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2\,z + \frac{3 - 4z}{5}$; or y et z devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{3 - 4z}{5}$ soit un nombre entier : soit donc t ce nombre entier, on aura $\frac{3-4z}{5} = t$, ou $3 - 4z = 5t$; donc $z = \frac{3-5t}{4} = -t + \frac{3-t}{4}$; il faut donc que $\frac{3-t}{4}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre, on aura $\frac{3-t}{4} = u$, ou $3 - t = 4u$, et par conséquent $t = 3 - 4u$.

Remontons maintenant aux valeurs de y, z et x.

Puisqu'on vient de trouver $z = \frac{3-5t}{4}$, on aura, en mettant pour t sa valeur, $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; et puisqu'on a trouvé $y = \frac{243 - 14z}{5}$, en mettant pour z, sa valeur, on aura $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Enfin, puisqu'on a trouvé $x = 41 - y - z$, on aura $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$; en sorte que les valeurs correspondantes de x, y et z, sont $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, et $z = 5u - 3$, dans lesquelles on peut mettre pour u, tel nombre entier qu'on voudra, pourvu qu'il en résulte des nombres positifs pour x, y et z; or cette condition emporte ces trois autres. 1°. Que $9u$ soit plus grand que 13; ou que u soit plus grand que $\frac{13}{9}$ ou $1\frac{4}{9}$. 2°. Que 57 soit plus grand que $14u$, ou que u soit plus petit que $\frac{57}{14}$; c'est-à-dire, plus petit que $4\frac{1}{14}$, 3°. Enfin que $5u$ soit plus grand que 3, ou u plus grand que $\frac{3}{5}$; ce qui ne peut manquer d'arriver, dès qu'on observera la première condition : ainsi le nombre des solutions est donc très-limité, et se réduit à trois que l'on trouve, en donnant à u pour valeur les nombres 2, 3 et 4, qui sont les seuls que l'état de la question admette. On ne peut donc faire 741 livres en 41 pièces des trois espèces proposées, qu'en prenant les nombres de pièces marquées ci-dessous, et qu'on trouve, en mettant pour u, les nombres 2, 3 et 4, successivement dans chacune des valeurs de x, y et z.

x	y	z
5	29	7
14	15	12
23	1	17

Des Équations du second degré à une seule inconnue.

81. On appelle *Équations du second degré*, celles dans lesquelles la plus haute puissance de l'inconnue, est cette même inconnue multipliée par elle-même, ou élevée à son quarré.

Ainsi l'équation $5x^2 = 125$, est une équation du second degré, parce que dans le terme $5x^2$ la quantité x est multipliée par elle-même.

82. Lorsque l'équation ne renferme d'autre puissance de l'inconnue, que le quarré, elle est toujours facile à résoudre : il suffit de dégager le quarré de l'inconnue, de tout ce qui peut le multiplier ou le diviser, ou des quantités qui peuvent se trouver jointes avec lui par les signes + ou —, ce qui se fait par les règles données

(53 *et suiv.*) ; après quoi il n'y a plus qu'à tirer la racine quarrée de chaque membre.

Par exemple, de l'équation $5x^2 = 125$, je conclus, $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, et tirant la racine quarrée de chaque membre, $x = 5$.

Pareillement, si j'ai l'équation $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$; chassant les fractions et transposant, j'ai $25x^2 - 12x^2 = 105$, ou $13x^2 = 105$, ou $x^2 = \frac{105}{13}$; donc $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Ce signe $\sqrt{}$ marque qu'on doit tirer la racine quarrée. Lorsqu'on doit tirer la racine quarrée de la fraction, comme dans le cas présent, on fait descendre les jambes du signe $\sqrt{}$ (qu'on appelle *signe radical*), au-dessous de la barre qui sépare les deux termes de la fraction. Mais si l'on n'avoit à représenter que la racine quarrée de l'un ou de l'autre des deux termes de la fraction, le radical seroit tout entier au-dessus ou au-dessous de la barre de division ; ainsi pour marquer qu'on veut diviser par 3, la racine quarrée de 40, on écriroit $\frac{\sqrt{40}}{3}$. Si la quantité dont on doit tirer la racine quarrée étoit complexe, on donneroit, au radical, une queue qui recouvrît toute la quantité ; par exemple, pour marquer la racine quarrée de $3ab + b^2$, on écriroit $\sqrt{3ab + b^2}$. Quelquefois aussi, sans donner une queue au radical, on renferme la quantité complexe entre deux crochets, qu'on fait précéder du signe $\sqrt{}$, en cette manière, $\sqrt{}(3ab + b^2)$.

83. Nous avons vu (24) que lorsque le multiplicande et le multiplicateur avoient tous deux le même signe, le produit avoit toujours le signe $+$; cela étant, lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité qui a le signe $+$, on doit indifféremment donner à cette racine quarrée le signe $+$ ou le signe $-$.

Ainsi dans l'équation précédente $x^2 = 25$, on peut, lorsqu'on tire la racine quarrée, dire également qu'elle est $+5$, ou qu'elle est -5, parce que chacun de ces nombres multiplié par lui-même reproduit toujours $+25$; en sorte que la résolution de l'équation $x^2 = 25$, s'écrit ainsi $x = \pm 5$, ce qui se prononce en disant *x égale plus ou moins* 5, et équivaut à ces deux équations $x = +5$ et $x = -5$ (*).

Pareillement, pour la seconde équation ci-dessus, on écriroit $x = \pm \sqrt{\frac{105}{13}}$.

84. Lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une

(*) On pourroit demander ici pourquoi nous ne donnons pas aussi le double signe $\pm$ au premier membre? La réponse est, qu'on le peut; mais cela ne mène à rien de nouveau. En effet, si l'on écrit $\pm x = \pm 5$, on en tire ces quatre équations $+x = +5$, $+x = -5$ $-x = +5$ $-x = -5$. La dernière, en changeant les signes, revient à la premiere. Il en est de même de la troisième, relativement à la seconde.

Il faut se garder de considérer la valeur de x dans la première équation $x = 5$, comme étant la même que dans la seconde $x = -5$, quoique ces deux valeurs soient exprimées par le même caractère ou la même lettre x. La lettre x est un signe par lequel on représente la quantité que l'on cherche; elle peut désigner des quantités différentes, comme le mot *Écu* désigne des quantités différentes, dans différens pays.

quantité précédée du signe —, on affecte le tout, du radical que l'on fait aussi précéder du double signe $\pm$.

Ainsi, si l'on avoit $x^2 = -4$, on écriroit $x = \pm \sqrt{(-4)}$; et quoiqu'on puisse tirer la racine quarrée de 4, qui est 2, il ne faudroit pas écrire $x = \pm 2$; il est essentiel ici de faire attention au signe — de la quantité qui est sous le radical.

85. Lorsqu'une équation conduit ainsi à tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on peut conclure que le Problème qui a conduit à cette équation, est impossible : en effet, une quantité négative ne peut avoir de racine quarrée, ni exactement, ni par approximation ; car il n'y a aucune quantité, soit positive, soit négative, qui étant multipliée par elle-même, puisse produire une quantité négative : il est bien vrai que -4, par exemple, peut être considéré comme venant de $+2$ multiplié par -2; mais ces deux quantités ayant un signe différent ne sont point égales, et par conséquent leur produit n'est pas un quarré. Ainsi, lorsqu'on propose de tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on propose une chose absurde ; donc tout problème qui se réduira à une pareille opération sera un problème impossible. C'est à ce caractère qu'on distingue l'impossibilité des questions du second degré.

Au reste, il ne faut pas pour cela regarder, comme inutile, la considération des racines quarrées des quantités négatives : il arrive assez souvent qu'une question très-possible, n'admet de solution que par le concours de pareilles quantités dans lesquelles à la fin, ce qu'il y a d'absurde, disparoît. On appelle ces sortes de quantités, *quantités imaginaires*.

Ainsi, $\sqrt{(-a)}$, est une quantité imaginaire ; $a+\sqrt{(-b)}$, est une quantité imaginaire.

86. Ce que nous venons de dire, suffit pour la résolution des équations du second degré, lorsqu'il n'y a pas d'autre puissance de x que le quarré. Mais outre le quarré de l'inconnue, il peut encore y avoir (et cela arrive le plus souvent) la première puissance de l'inconnue multipliée ou divisée par quelque quantité connue, comme dans cette équation $x^2 - 4x = 12$. Alors l'artifice qu'on doit employer pour résoudre l'équation, consiste à préparer le premier membre de manière à en faire un quarré parfait : cette préparation suppose avant tout, trois choses; 1°. qu'on ait passé dans un seul membre tous les termes affectés de x, et les quantités connues dans l'autre; cela s'exécute par ce qui a été dit (53) : 2°. que le terme qui renferme x^2, soit positif ; s'il avoit le signe —, on changeroit tous les signes de

l'équation, ce qui ne troubleroit point l'égalité : 3°. que le terme qui renferme x^2, soit libre de tout multiplicateur et de tout diviseur ; s'il n'étoit point dans cet état on l'y ameneroit, en multipliant tous les autres termes de l'équation par ce diviseur, et en les divisant par le multiplicateur.

Par exemple, si j'avois à résoudre l'équation $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$, 1°. je passerois tous les x dans le premier membre, en écrivant le terme x^2 le premier, et j'aurois $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, ou $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2°. je changerois les signes pour rendre x^2 positif, et j'aurois $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3°. je multiplierois par 5, ce qui me donneroit $3x^2 - 30x = -20$; enfin je diviserois par 3, et j'aurois $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Comme on peut toujours ramener, à cet état, toute équation du second degré, nous ne nous occuperons actuellement que d'une équation préparée de cette manière.

87. Cela posé, pour résoudre une équation du second degré, il faut suivre cette règle :

Prenez la moitié de la quantité connue qui multiplie x *dans le second terme : élevez cette moitié au quarré, et ajoutez ce quarré à chaque membre de l'équation, ce qui ne changera rien à l'égalité. Le premier membre sera alors un quarré parfait. Tirez la racine quarrée de chaque membre, et faites pré-*

céder celle du second membre, du double signe ±; l'équation sera réduite au premier degré.

Quant à la manière de tirer la racine quarrée du premier membre, on tirera la racine quarrée du quarré de l'inconnue, et celle du quarré qu'on a ajouté : on joindra cette seconde à la première, par le signe qu'aura le second terme de l'équation.

Par exemple, ayant l'équation $x^2 + 6x = 16$, je prends la moitié de la quantité connue 6, qui multiplie x dans le second terme : je quarre cette moitié, et j'ajoute à chaque membre le quarré 9 ; j'ai $x^2 + 6x + 9 = 25$; il ne s'agit plus que de tirer la racine quarrée, ce que je fais en prenant la racine quarrée de x^2 qui est x, puis celle de 9 qui est 3 ; et comme le second terme $6x$ de l'équation a le signe $+$, j'en conclus que $x + 3$, est la racine quarrée du premier membre ; quand à celle du second, elle est 5 ou plutôt (83) ± 5 ; par conséquent $x + 3 = \pm 5$. Pour avoir x, il ne s'agit plus que de transposer, et l'on aura $x = \pm 5 - 3$; c'est-à-dire, que x a deux valeurs ; savoir $x = + 5 - 3 = 2$, et $x = - 5 - 3 = - 8$. Nous verrons ci-après ce que signifie cette seconde valeur.

Pour entendre la raison de cette règle, il faut se rappeler ce que nous avons remarqué (25), savoir que le quarré d'une quantité composée de deux termes, contient toujours le quarré du premier terme, le double du premier terme multiplié par le second, et le quarré du second.

Cela posé, lorsqu'il s'agit d'ajouter à une quantité telle que $x^2 + 6x$, ce qui est nécessaire pour en faire un quarré parfait, il faut remarquer, 1°. que cette quantité contient déjà un quarré x^2 qu'on peut considérer comme le quarré du premier terme x d'un binome. 2°. Qu'on peut toujours considérer le terme suivant $6x$, comme étant le double de x multiplié par une autre quantité. 3°. Que cette autre quantité est nécessairement la moitié de 6 multiplicateur de x. Il ne manque donc plus que le quarré de cette seconde quantité, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du multiplicateur de x dans le second terme. On voit que ce raisonnement est général, quel que soit le multiplicateur de x.

Quant à la règle que nous donnons en même temps pour extraire la racine quarrée du premier membre, elle est également une suite de la formation du quarré; puisque les deux quarrés extrêmes qui se trouvent dans le quarré d'un binome étant les quarrés des deux termes de la racine, il est évident qu'il ne s'agit que de tirer séparément les racines de ces deux quarrés pour avoir ces deux termes. Mais on doit donner au second terme de la racine, le même signe qu'a le second terme de l'équation, parce que de même que le calcul fait voir que le quarré de $a + b$ est $a^2 + 2ab + b^2$, de même il fait voir que le quarré de $a - b$ est $a^2 - 2ab + b^2$.

Application de la règle précédente, à la Résolution de quelques questions du second degré.

88. De quelque degré que doive être l'équation, il faut toujours, pour mettre la question en équation, faire usage de la règle que nous avons donnée (60).

QUESTION PREMIÈRE : *Trouver un nombre tel que si à son quarrè, on ajoute* 8 *fois ce même nombre, le tout fasse* 33 ?

Si je connoissois ce nombre que j'appelle x, il est évident que j'en prendrois le quarré x^2 ; qu'à ce quarré j'ajouterois huit fois ce nombre, c'est-à-dire, $8x$, et que le tout x^2+8x formeroit 33 ; il faut donc que $x^2+8x=33$.

Pour résoudre cette équation, j'ajoute à chaque membre, le nombre 16 qui est le quarré de la moitié du nombre 8 qui multiplie x dans le second terme, et j'ai $x^2+8x+16=49$; équation dont le premier membre est un quarré parfait. Je tire la racine quarrée de chaque membre, en observant la règle donnée (87), et j'ai $x+4=\pm 7$; par conséquent $x=\pm 7-4$, qui donne ces deux valeurs de x, $x=+7-4=3$ et $x=-7-4=-11$.

De ces deux valeurs, la première satisfait à la question, puisque 9, qui est le quarré de 3, étant ajouté à 8 fois 3 ou 24, fait 33. A l'égard de la seconde, comme elle est négative, elle indique qu'il y a une autre question dans laquelle prenant x dans un sens tout contraire, la solution seroit 11 ; c'est-à-dire, que la seconde valeur de x doit satisfaire à cette autre question. *Trouver un nombre tel que* *si de son quarré, on retranche 8 fois ce même nombre, le reste soit 33* : ce qui est en effet ; car le quarré de 11 est 121, et 8 fois 11 font 88, lesquels retranchés de 121, il reste 33.

Pour confirmer ce que nous avons dit sur les quantités négatives (62), remarquons que cette seconde question mise en équation, donne $x^2 - 8x = 33$, laquelle étant résolue selon la règle, donne $x = \pm 7 + 4$; c'est-à-dire, ces deux valeurs, $x = 11$ et $x = -3$, qui sont précisément le contraire de celles de la première question.

89. On voit par-là qu'une équation du second degré, à une seule inconnue, a toujours deux solutions.

Car les deux valeurs 11 et -3, substituées, au lieu de x, dans l'équation $x^2 - 8x = 33$, la résolvent également, c'est-à-dire, réduisent également le premier membre à 33. On vient de le voir pour 11. A l'égard de -3, son quarré est $+9$; et 8 fois -3, font -24, qui retranchés de $+9$, donnent $+9+24$, selon ce qui a été enseigné (11).

Mais on voit en même temps que si toute équation du second degré a deux solutions, il n'en est pas toujours de même de la question qui a conduit à cette équation.

Car dans le cas présent, la seconde valeur -3, ne résout que la question contraire. Au reste, il arrive souvent que les deux solutions de l'équation, sont aussi toutes deux, solutions de la question. Nous en verrons un exemple dans la troisième question.

QUESTION SECONDE : *On devoit partager 175 liv. entre un certain nombre de personnes; mais il y en a deux d'absentes et qui, par cette raison, ne doivent pas avoir part. Cette circonstance augmente de 10 livres la part de chaque présent; on demande combien il devoit d'abord y avoir de partageans?*

Si je savois quel est ce nombre, je diviserois 175 par ce nombre, pour connoître combien chacun auroit eu, si toutes les personnes eussent été présentes. Je diviserois ensuite par ce même nombre diminué de deux, pour connoître combien chaque partageant aura réellement; enfin je verrois si en ôtant 10 livres de ce second quotient, le reste est égal au premier. Imitons ces opérations, en représentant par x le nombre cherché.

Si tous étoient présens, chacun auroit donc $\frac{175}{x}$; mais s'il manque deux personnes, chaque partageant aura $\frac{175}{x-2}$; puis donc que ce dernier nombre doit être plus grand de 10 que le premier, il faut que $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Pour résoudre cette équation, je chasse les dénominateurs, et selon la remarque faite (59), j'écris $175x - 10(x-2)x = 175 \times (x-2)$, puis faisant les opérations indiquées, j'ai $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$, ou $10xx - 20x = 350$; enfin divisant par 10, il vient $xx - 2x = 35$, équation à laquelle il ne s'agit plus que d'appliquer la règle donnée (87). Je prends donc la moitié -1 du multiplicateur -2 de x. Je quarre cette moitié, ce qui me donne $+1$, que j'ajoute à chaque membre, et j'ai $x^2 - 2x + 1 = 36$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - 1 = \pm 6$, et par conséquent $x = \pm 6 + 1$, qui donne $x = 7$ et $x = -5$. La première est le nombre cherché; car 175 divisé par 7, donne 25 ; et 175 divisé par 7 — 2 ou 5, donne 35 qui excède 25 de 10. Quant à la seconde, elle résout la question où l'on supposeroit qu'il s'agit de partager 175 livres avec deux nouveaux survenus, et que cette circonstance diminue de 10 livres la part que chacun auroit eue sans cela.

QUESTION TROISIÈME : *Un homme achète un cheval, qu'il vend, au bout de quelque temps, pour 24 pistoles. A cette vente, il perd autant pour cent, que le cheval lui avoit coûté. On demande combien il l'avoit acheté ?*

Si l'on me disoit ce que le cheval a coûté, je vérifierois ce nombre en cette manière. Je le retrancherois de 100, et je ferois cette régle de *Trois : Si* 100 *se réduisent au nombre que vient de donner la soustraction, à combien le nombre prétendu doit-il se réduire ?* Ayant trouvé ce quatrième terme, il devroit être égal à 24.

Nommons donc x le nombre cherché, c'est-à-dire, le nombre de pistoles que le cheval a coûté. Alors puisque 100 sont supposés se réduire à $100 - x$, je trouverai à combien x doit être réduit, en faisant cette règle de Trois, $100 : 100 - x :: x :$; le quatrième terme sera $\frac{(100 - x)\,x}{100}$ (*Arithm.* 169), ou $\frac{100x - xx}{100}$; puis donc qu'on suppose que le prix du cheval a été réduit à 24 pistoles, il faut que $\frac{100x - xx}{100} = 24$.

Pour résoudre cette équation, je chasse le dénominateur, et j'ai $100x - xx = 2400$, ou en changeant les signes $xx - 100x = - 2400$. Je prends donc (87) la moitié de -100 qui est -50 ; je l'élève au quarré, ce qui me donne $+2500$ à ajouter à chaque membre. L'équation devient $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$, tirant la racine quarrée, j'ai $x - 50 = \pm 10$, et par conséquent, $x = 50 \pm 10$, qui donne ces deux valeurs $x = 60$ et $x = 40$, dont chacune résout la question; en sorte que le prix du cheval peut également avoir été de 60 ou de 40 pistoles; l'énoncé de la question n'est pas suffisant pour déterminer lequel de ces deux prix a eu lieu. Si l'on veut vérifier ces deux solutions, on verra qu'en supposant que le cheval a été acheté 60 pistoles; puisqu'alors 100 se réduisent à 40, 60 se réduiront à 24. Et dans le second cas, on verra de même, que 100 se réduisant à 60, 40 se réduiront à 24.

90. Dans les questions précédentes, l'équation a eu deux solutions, l'une positive, l'autre négative. Dans la dernière, elle en a deux positives ; elle peut en avoir aussi deux négatives : mais cela n'arrive que lorsque l'énoncé de la question est vicieux ; car alors chacune de ces deux solutions négatives indique (62) que l'inconnue doit être prise dans un sens opposé à celui de l'énoncé.

Par exemple, si l'on proposoit cette question : *Trouver un nombre tel que si à son quarré on ajoute neuf fois ce même nombre, et encore le nombre* 50, *le tout fasse* 30.

Cette question mise en équation, donneroit $x^2 + 9x + 50 = 30$, qui, en suivant les règles données plus haut, deviendroit successivement $x^2 + 9x = -20$ $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; tirant la racine quarrée, $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, qui donne $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, et $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$. Ce qui indique que la question doit être changée en cette autre : *Trouver un nombre tel que si après avoir ajouté* 50 *à son quarré*, *on retranche du tout, 9 fois ce même nombre demandé, il reste 30.*

91. L'Algèbre a donc cet avantage, que non-seulement elle résout les questions, mais elle sait encore distinguer si elles sont bien ou mal proposées ; et si elles sont impossibles, elle le fait connoître aussi : nous en avons déjà donné le caractère (85).

Si l'on en veut un exemple, il n'y a qu'à résoudre la question troisième, en y supposant 26 pistoles au lieu de 24. L'équation sera $\frac{100x - xx}{100} = 26$, ou $100x - xx = 2600$, ou $xx - 100x = -2600$, qui, selon la règle (87), devient $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$; tirant la racine quarrée $x - 50 = \pm\sqrt{(-100)}$, et enfin $x = 50 \pm \sqrt{(-100)}$; or nous avons vu (85) que la racine quarrée d'une quantité négative est impossible.

QUESTION QUATRIÈME : *Deux personnes se sont réunies dans un commerce : l'une a mis 30 louis qui ont resté 17 mois dans la société. La seconde n'a fourni ses fonds qu'au bout de 5 mois ; c'est-à-dire, qu'ils n'ont été que 12 mois dans la société. Ces fonds que l'on ne connoît point, font, avec le gain qui lui revient, 26 louis. Le gain total a été de 18 louis et $\frac{3}{4}$: on demande ce que le second avoit mis, et combien chacun a gagné.*

La question se réduit à trouver la mise du second ; car il est évident que le gain de chacun sera facile à trouver ensuite. Représentons cette mise, ou le nombre de louis de cette mise, par x. Puisque les 30 louis du premier ont été 17 mois dans la société, ils doivent lui avoir produit autant que produiroient 17 fois 30 louis ou 510 louis pendant un mois. Pareillement, puisque la mise x du second a été 12 mois dans la société, elle doit lui avoir produit autant que 12 fois x de louis ou $12x$, produiroient pendant un mois ; ainsi, on peut regarder la société, comme n'ayant duré qu'un mois, mais en supposant que les mises aient été 510 et $12x$; cela étant, pour savoir ce que le second doit gagner, il faut (*Arith.* 187) calculer le quatrième terme de cette proportion $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x :$

Ce quatrième terme sera $\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}$, qui revient à $\frac{225x}{510 + 12x}$; or il est dit dans la question, que le gain du second et sa mise x font 26 louis ; donc $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Pour résoudre cette équation, chassons le dénominateur, et nous aurons $225x + x(510 + 12x) = 26(510 + 12x)$, ou, en faisant les multiplications indiquées, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Transposant et réduisant, on a $12xx + 423x = 13260$; divisant par 12, $x^2 + \frac{423}{12}x = \frac{13260}{12}$ qui se réduit à $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; prenant donc la moitié de $\frac{141}{4}$, qui est $\frac{141}{8}$; élevant cete moitié au quarré, et l'ajoutant à chaque membre, on aura $x^2 + \frac{141}{4}x + \frac{19881}{64} = \frac{19881}{64} + 1105 = \frac{90601}{64}$. Tirant donc la racine quarrée, on aura $x + \frac{141}{8} =$

$\pm \sqrt{\left(\frac{90601}{64}\right)} = \pm \frac{301}{8}$. Donc $x = -\frac{141}{8}$ $\pm \frac{301}{8}$, qui donne pour la seule valeur, qui satisfasse à la question, $x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20$; la mise du second étoit donc de 20 louis, par conséquent son gain étoit de 6, et celui du premier de $12\frac{3}{4}$.

92. A l'égard des équations littérales, la règle est absolument la même.

Si l'on avoit à résoudre l'équation $abx - axx = b^2c$; conformément à ce qui a été dit (86 et 87) je changerois cette équation en $axx - abx = -b^2c$, puis en $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; j'ajouterois à chaque membre le quarré de $-\frac{b}{2}$; c'est-à-dire, $+\frac{bb}{4}$, et j'aurois $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$, et enfin $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$.

93. Lorsque l'équation est littérale, elle peut se présenter sous une forme plus composée que nous ne l'avons vue jusqu'ici ; mais on peut toujours la ramener à trois termes, en cette manière.

Soit l'équation $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Je passe dans un seul membre tous les termes affectés de x, en observant d'écrire de suite tous ceux qui ont les mêmes puissances de x, et j'ai $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Je remarque, à présent; que $ax^2 - bx^2$ n'est autre chose que $(a-b) \times x^2$, ou $(a-b)\ x^2$; pareillement $bcx + acx$ n'est autre chose que $(ac+bc)x$, en sorte que l'équation $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ peut s'écrire ainsi $(a-b)x^2 + (bc+ac)x = a^2b - ab^2$; or les quantités a, b, c étant des quantités connues, on doit regarder $a-b$, $bc+ac$, et $a^2b - ab^2$ comme des quantités toutes connues; on peut donc, pour abréger, représenter chacune de ces quantités par une seule lettre, et supposer $a - b = m$, $bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, et alors l'équation est réduite à $mx^2 + nx = p$, qui est dans le cas des précédentes; et qui étant résolue suivant les mêmes règles, deviendra successivement $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, puis $x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$ (en ajoutant le quarré de la moitié de $\frac{n}{m}$, c'est-à-dire, de $\frac{n}{2m}$); tirant la racine quarrée, $x + \frac{n}{2m} = \pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; enfin, $x = \frac{-n}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{2m}\right)}$.

94. Au reste, on ne fait ces sortes de transformations que lorsque le calcul qu'on auroit à faire sans elles, seroit très-composé; car dans ce même exemple, après avoir mis l'équation proposée, sous la forme $(a-b)$ $x^2 + (bc+ac)\ x = a^2b - ab^2$, on peut la traiter, sans trop de calcul, comme les précédentes, en divisant

divisant d'abord par $a-b$, ce qui donne $x^2+\frac{bc+ac}{a-b}x=\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$; maintenant il faut ajouter de part et d'autre le quarré de la moitié de $\frac{bc+ac}{a-b}$, c'est-à-dire, le quarré de $\frac{bc+ac}{2a-2b}$; mais on peut se contenter de l'indiquer en cette manière $\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2$; ainsi on aura $x^2+\frac{bc+ac}{a-b}x+\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2=\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+\frac{a^2b-ab^2}{a-b}$; tirant la racine quarrée, on aura $x+\frac{bc+ac}{2a-2b}=\pm\sqrt{\left[\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+\frac{a^2b-ab^2}{a-b}\right]}$, et enfin $x=\frac{-bc-ac}{2a-2b}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{bc+ac}{2a-2b}\right)^2+\frac{a^2b-ab^2}{a-b}\right]}$.

De la Formation des puissances des quantités monomes, de l'extraction de leurs racines, et du calcul des radicaux et des exposans.

95. Nous avons déjà dit qu'on appelle *puissance* d'une quantité, le produit de cette quantité multipliée par elle-même plusieurs fois de suite. a^3 est la troisième puissance ou le cube de a, parce que a^3 résulte de $a\times a\times a$. La quantité qu'on a multipliée est autant de fois facteur dans la puissance, qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette même puissance.

Ainsi dans a^5, a est cinq fois facteur ; dans $(a+b)^6$ $a+b$ est 6 fois facteur.

96. Puisque pour multiplier les quantités littérales monomes qui ont des exposans, il suffit (20) d'ajouter l'exposant de chaque lettre du multiplicande, avec l'exposant de la lettre semblable du multiplicateur, il s'ensuit donc que *pour élever à une puissance proposée, une quantité monome, il suffira de multiplier l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque à quelle puissance on veut élever cette quantité.* Nous appellerons ce nombre *l'exposant de la puissance.*

Ainsi pour élever $a^2 b^3 c$ à la quatrième puissance, j'écrirai $a^8 b^{12} c^4$, en multipliant les exposans 2, 3 et 1 de a, b, c, par l'exposant 4 de la puissance à laquelle on veut élever $a^2 b^3 c$. En effet, pour élever $a^2 b^3 c$ à la quatrième puissance, il faudroit multiplier $a^2 b^3 c$ par $a^2 b^3 c$, puis le produit par $a^2 b^3 c$, et ce second produit par $a^2 b^3 c$; or pour faire ces multiplications, il faut (20) ajouter les exposans ; puis donc qu'ils sont les mêmes dans chaque facteur, il faut ajouter chaque exposant à lui-même 3 fois ; c'est-à-dire, le multiplier par 4. Le raisonnement est le même à quelqu'autre puissance qu'on veuille élever un monome, et quels que soient les exposans actuels des lettres de ce monome.

Lorsqu'on a à faire sur les exposans des quantités, des raisonnemens ou des opérations qui ne dépendent point de certaines valeurs particulières de ces exposans, mais qui sont également applicables à toutes sortes d'exposans, on représente ces exposans par des lettres.

Ainsi pour en faire l'application à la règle que nous venons de donner, si l'on veut élever la quantité quelconque $a^m b^n c^p$ à une puissance quelconque désignée par r, on écrira $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

97. Si la quantité qu'on veut élever à une puissance proposée, étoit une fraction, on élèveroit à cette puissance, le numérateur et le dénominateur.

Ainsi $\frac{a^2 b^3}{c d^2}$ élevé à la cinquième puissance, devient $\frac{a^{10} b^{15}}{c^5 d^{10}}$; pareillement $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ élevé à la puissance r, devient $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

98. Si la quantité proposée avoit un coëfficient, on l'éléveroit à la puissance proposée, en le multipliant par lui-même, selon les règles de l'Arithmétique.

Ainsi $4 a^3 b^2$ élevé à la cinquième puissance, donneroit $1024 a^{15} b^{10}$.

Quelquefois on se contente d'indiquer cette élévation comme pour les lettres;

Ainsi on peut écrire $4^5 a^{15} b^{10}$.

99. A l'égard des signes, si l'exposant de la puissance à laquelle il s'agit d'élever, est pair, le résultat aura toujours le signe + ; mais s'il est impair, il aura le signe + ou le signe — selon que la quantité proposée aura elle-même le signe + ou le signe —; c'est une suite immédiate de la règle donnée pour les signes (24).

100. Il suit de tout ce que nous venons de dire, que dans une puissance quelconque, l'exposant actuel de chaque lettre contient l'exposant de sa racine, autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance que l'on considère; par exemple, dans la quatrième puissance, l'exposant de chaque lettre est quadruple de ce qu'il étoit dans la quantité primitive qui en est la racine.

101. Donc pour revenir d'une puissance quelconque à sa racine, c'est-à-dire, *pour extraire une racine, d'un degré proposé, d'une quantité monome quelconque, il faut diviser l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.* On appelle ce nombre *l'exposant de la racine.*

Ainsi pour tirer la racine troisième ou cubique de $a^{12}b^6c^3$, je diviserois chacun des exposans par 3, et j'aurois $a^4 b^2 c$. Pareillement pour tirer la racine cinquième de $a^{20}b^{15}c^5$, je diviserois chacun des exposans par 5, et j'aurois $a^4 b^3 c$.

En général, pour tirer la racine du degré r de la quantité $a^m b^n$, jécrirois $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

102. A l'égard du signe de la racine, il sera indifféremment $+$ ou $-$ si le degré de la racine est pair, mais si ce degré est impair, la racine aura le signe de la quantité même.

Ainsi la racine quatrième de $a^{12} b^8$ est $\pm a^3 b^2$; la racine cinquième de $- a^5 b^{10}$, est $- a b^2$.

103. Si la quantité proposée étoit une fraction, on tireroit séparément la racine du numérateur et celle du dénominateur.

104. S'il y avoit des coëfficiens, on en tireroit la racine quarrée ou cubique par les méthodes données en Arithmétique ; et par celle qu'on verra par la suite, lorsque cette racine est plus élevée.

105. Lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire, ne divise pas exactement chacun des exposans de la quantité proposée, c'est une preuve que cette quantité n'est point une puissance parfaite du degré dont il s'agit. Alors, l'exposant reste fractionnaire, et marque une racine qui reste à extraire.

Ainsi, si l'on demande la racine cubique de $a^9 b^3 c^4$, on aura $a^3 b c^{\frac{4}{3}}$ ou $a^3 b c c^{\frac{1}{3}}$, dans laquelle l'exposant $\frac{1}{3}$

marque qu'il reste encore à extraire la racine cubique de c.

106. On indique aussi les extractions de racines supérieures au second degré, en employant le signe $\sqrt{}$; mais on place dans l'ouverture de ce signe, le nombre qui marque le degré de la racine dont il s'agit.

Ainsi $\sqrt[3]{a}$, marque la racine cubique de a; $\sqrt[7]{a}$ marque la racine septième de a. Il faut donc regarder ces deux expressions $\sqrt[3]{a}$ et $a^{\frac{1}{3}}$ comme signifiant la même chose ; il en est de même de $\sqrt[5]{a^4}$ et $a^{\frac{4}{5}}$.

107. La remarque que nous venons de faire (105) peut servir à simplifier les quantités radicales ou affectées du signe $\sqrt{}$.

Par exemple, si j'avois $\sqrt[3]{a^4 b^5}$; comme cette quantité équivaut à $a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{5}{3}}$ ou à $a a^{\frac{1}{3}} b b^{\frac{2}{3}}$ qui n'est autre chose (105) que $ab\sqrt[3]{ab^2}$; j'aurois donc $\sqrt[3]{a^4 b^5} = ab\sqrt[3]{ab^2}$.

De même $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a\,\frac{a^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = a\sqrt{\frac{a}{f}}$;

ou bien en multipliant le numérateur et le dénominateur, par $\sqrt{f}$, $\sqrt{\frac{a^3}{f}} = \sqrt{\frac{a^3 f}{f^2}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} f^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{f}\, a^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{f}\sqrt{af}$.

108. S'il y avoit un coëfficient, on chercheroit

à le décomposer en facteurs dont le produit fût une puissance parfaite du degré de la racine qu'on veut extraire, ou un multiple de cette puissance, et on opèreroit comme dans les exemples précédens.

Par exemple, si on avoit $\sqrt{48a^2b^3}$, on le transformeroit en $\sqrt{3 \times 16a^2b^3}$ ou $\sqrt{3 \times 4^2a^2b^3}$ qui se réduit à $4ab\sqrt{3b}$. Pareillement $\sqrt[3]{81a^5b^4} = \sqrt[3]{3 \cdot 27a^5b^4} = 3ab\sqrt[3]{3a^2b}$.

109. Lorsque la quantité est complexe, il ne faut pas diviser chacun de ses exposans ; mais il faut considérer la totalité de ses parties, comme ne faisant qu'une seule quantité dont l'exposant est naturellement 1, que l'on divise par l'exposant de la racine qu'il s'agit d'extraire, ce qui n'est, à proprement parler, qu'une indication de cette racine.

Par exemple, au lieu de $\sqrt[4]{a^2 + b^2}$ qui est la même chose que $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^1}$; on écrit $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{4}}$ ou $\overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Si la quantité totale qui est sous le radical, avoit déjà un exposant, on diviseroit de même cet exposant, par celui de la racine qu'on a dessein d'extraire.

Ainsi, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2 + b^2)^3}$, on peut écrire $(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}$.

110. L'addition et la soustraction des quantités radicales se réduit à les joindre par le signe de ces opérations, si elles sont dissemblables ; ou à ajouter ou soustraire leurs coëfficiens, comme dans l'addition et la soustraction ordinaires, si elles sont semblables.

Ainsi pour ajouter $\sqrt[3]{a}$ avec $\sqrt[4]{b}$, on écrira $\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{b}$.
Pour retrancher $7a\sqrt[3]{b}$ de $9a\sqrt[3]{b}$, on écrira $2a\sqrt[3]{b}$.

111. Pour multiplier ou diviser les quantités radicales du même degré, on opérera comme s'il n'y avoit pas de radical, et on donnera au produit ou au quotient, le radical commun.

Ainsi $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a\sqrt[7]{a}$.
$\sqrt[5]{a^2b^3} \times \sqrt[5]{a^3b^2} = \sqrt[5]{a^5b^5} = ab$; $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}$.

Pareillement $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{b} = \sqrt{(-ab)}$.
$\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)} = \sqrt{(-a \times -b)} = -\sqrt{(ab)}$.

Ce dernier exemple mérite une explication : il paroîtroit que $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)}$ donnant suivant la règle $\sqrt{(-a \times -b)}$, et par conséquent $\sqrt{(+ab)}$ ou $\sqrt{ab}$; et tout radical pair (102) étant susceptible des deux signes $\pm$, on devroit avoir $\pm\sqrt{ab}$; mais il faut observer que $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-1)}$ et $\sqrt{(-b)} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$, donc $\sqrt{(-a)} \times \sqrt{(-b)}$

$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\cdot \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{(-1)^2}$; or $\sqrt{(-1)^2}$ n'est pas indifféremment ± 1, parce que l'existence actuelle du signe — dans $\sqrt{(-1)^2}$ fait connoître par quelle opération on arrive au quarré $(-1)^2$ dont il s'agit d'extraire la racine.

112. Pour diviser $\sqrt[7]{a^5}$ par $\sqrt[7]{a^3}$, on divisera a^5 par a^3, et l'on donnera au quotient a^2 le signe $\sqrt[7]{}$, ce qui donnera $\sqrt[7]{a^2}$.

De même $\dfrac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} = \sqrt[5]{\dfrac{a^4 b^3}{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2}$;

$\dfrac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$ $= \dfrac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\dfrac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; car la racine cinquième de 1 est 1. En général, toute puissance, ou toute racine de l'unité, est l'unité.

113. S'il s'agit d'élever un radical quelconque à une puissance dont l'exposant soit le même que celui du radical, il suffira d'ôter ce radical; ainsi $\left(\sqrt[5]{a}\right)^5 = a$; ce qui est évident en général, si l'on fait attention que l'objet est alors de ramener la quantité à son premier état.

Pour élever une quantité radicale monome à une puissance quelconque, il faut élever chacun de ses facteurs à cette puissance, selon la règle donnée (96).

Ainsi $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ élevé à la puissance quatrième, donne $\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$, qui se réduit à $ab\sqrt[7]{ab^5}$; ce qu'on peut voir encore en cette autre manière, $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ étant la même chose (106) que $a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$; pour élever celui-ci à la quatrième puissance, je multiplie ses exposans par 4, ce qui me donne $a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = ab a^{\frac{1}{7}} b^{\frac{5}{7}} = ab\sqrt[7]{ab^5}$.

114. Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale, il faut multiplier l'exposant actuel du radical, par l'exposant de cette nouvelle racine.

Ainsi, pour extraire la racine troisième de $\sqrt[5]{a^4}$, on écrira $\sqrt[15]{a^4}$, en multiplant 5 par 3. En effet, $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$: or (101) pour extraire la racine de celui-ci, il faut diviser son exposant par 3, ce qui donne $a^{\frac{4}{15}}$; qui est la même chose que $\sqrt[15]{a^4}$.

115. Lorsque les quantités radicales proposées, ne sont pas toutes du même degré, il faut pour pratiquer sur elles les opérations de multiplication et division, les ramener au même degré, ce qui est facile par cette règle.

S'il n'y a que deux radicaux, multipliez l'expo-

sant de l'un par l'exposant de l'autre ; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir les deux radicaux : élevez en même temps la quantité qui est sous chaque radical, à la puissance marquée par l'exposant de l'autre radical.

Par exemple, pour réduire à un même radical, les deux quantités $\sqrt[5]{a^3}$ et $\sqrt[7]{a^4}$, je multiplie 5 par 7, et j'ai 35 pour l'exposant du nouveau radical qui sera $\sqrt[35]{}$; j'élève a^3 à la septième puissance, et a^4 à la cinquième, ce qui me donne a^{21} et a^{20} ; en sorte que les quantités proposées sont changées en $\sqrt[35]{a^{21}}$ et $\sqrt[35]{a^{20}}$.

S'il y a plus de deux quantités radicales, *multipliez entr'eux les exposans de tous les radicaux ; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir tous ces radicaux. Elevez, en même temps, la quantité qui est sous chaque radical, à une puissance d'un degré marqué par le produit des exposans de tous les radicaux autres que celui dont il s'agit.*

Par exemple, si j'avois les trois radicaux $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$ et $\sqrt[8]{a^7}$, je multiplierois les trois exposans 5, 7 et 8, ce qui me donneroit 280 pour l'exposant commun des nouveaux radicaux; j'élèverois a^3 à la puissance 7×8 ou 56; a^2 à la puissance 5×8 ou 40; et a^7 à la puissance 5×7 ou 35, ce qui me donneroit $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

La raison de cette règle est facile à appercevoir, en observant sur le premier exemple, que lorsqu'on élève, selon la règle, a^3 à la septième puissance, on rend a, 7 fois aussi souvent facteur qu'il l'étoit; mais en rendant l'exposant de son radical 7 fois aussi grand qu'il l'étoit, on rend a, 7 fois moins souvent facteur; il y a donc compensation, et il n'y a que la forme de changée.

116. On peut conclure de ce raisonnement, que lorsque l'exposant de la quantité qui est sous le radical, et celui du radical même, ont un diviseur commun, on peut en simplifier l'expression, en divisant par ce diviseur commun, l'un et l'autre de ces deux exposans.

Par exemple, $\sqrt[12]{a^8}$, peut se réduire à $\sqrt[3]{a^2}$, en divisant 12 et 8 par 4. Pareillement $\sqrt[4]{a^2}$ peut se réduire à $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{a^3}$ se réduit à $\sqrt{a}$.

117. Concluons encore que lorsque l'exposant de la racine qu'on veut extraire est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres nombres, on peut faire cette extraction successivement en cette manière :

Supposons qu'on demande la racine sixième de a^{24}; je puis tirer d'abord la racine quarrée, puis la racine cubique; et j'aurai la racine sixième. En effet, $\sqrt[6]{a^{24}}$, se réduit (116) à $\sqrt[3]{a^{12}}$, puis à $\sqrt[1]{a^4}$ ou a^4, ce qui est la même chose que si l'on avoit pris tout de suite la racine sixième de a^{24} en divisant l'exposant 24 par 6 (101).

Au reste, comme les exposans fractionnaires tiennent lieu des radicaux, et que les premiers sont plus commodes à employer dans le calcul que les derniers, nous dirons encore un mot sur le calcul des exposans.

Si j'avois $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[5]{a^4}$, je changerois cette opération en celle-ci : $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, qui (20) donne $a^{\frac{7}{5}}$ ou $a\,a^{\frac{2}{5}}$ qui se réduit à $a\sqrt[5]{a^2}$. Si j'avois $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[7]{a^4}$, j'écrirois $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$ ou $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, ou (en réduisant les deux fractions au même dénominateur), $a^{\frac{21+20}{35}}$, ou $a^{\frac{41}{35}}$ qui revient à $a\,a^{\frac{6}{35}}$, ou enfin à $a\sqrt[35]{a^6}$.

En général, $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ se change en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$ qui revient à $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ou (en réduisant au même dénominateur) $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ou enfin (105) à $\sqrt[qm]{a^{qn+mr} b^{pq+ms}}$. Il en est de même de la division ; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ se change en $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (31), ou enfin en $\sqrt[5]{a}$. Pareillement

$\frac{\sqrt[5]{a^3 b^4}}{\sqrt[7]{a^2 b^3}}$ se change en $\frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}} = a^{\frac{3}{5} - \frac{2}{7}} b^{\frac{4}{5} - \frac{3}{7}}$ ou (en réduisant les fractions au même dénominateur) $a^{\frac{21 - 10}{35}} b^{\frac{28 - 15}{35}}$, qui se réduit à $a^{\frac{11}{35}} b^{\frac{13}{35}}$ qui est la même chose que $\sqrt[35]{a^{11} b^{13}}$. En général,

$$\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} = \frac{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m} - \frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m} - \frac{s}{q}}$$

$$= a^{\frac{qn - mr}{qm}} b^{\frac{pq - ms}{qm}} = \sqrt[qm]{a^{qn - mr} b^{pq - ms}}.$$

118. Dans ce dernier exemple, nous avons retranché l'exposant de chaque lettre du dénominateur, de l'exposant de la lettre correspondante dans le numérateur. La règle que nous avons donnée (31) pour la division, ne semble le permettre que lorsque l'exposant du dénominateur est plus petit que celui du numérateur; mais cela se peut en général, en donnant à l'excédant le signe —, après la réduction faite; en sorte qu'on peut en général remettre toute fraction algébrique sous la forme d'un entier.

Par exemple, au lieu de $\frac{a^3}{b^2}$, on peut écrire $a^3 b^{-2}$. En effet, suivant l'idée que nous avons donnée de la division, l'effet d'un diviseur est de détruire dans le dividende tous les facteurs qui se trouvent dans le diviseur;

dans $\frac{a^5}{a^2}$, qui se réduit à a^3, le diviseur a^2, détruit dans a^5 deux facteurs égaux à a. Pareillement, dans la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ l'effet de b^2 doit être de détruire dans a^3 deux facteurs égaux à b. Or quoique ces facteurs n'y soient pas explicitement, on peut toujours se les représenter : car on conçoit que a contient b un certain nombre de fois, soit entier, soit fractionnaire : soit m ce nombre de fois ; alors a vaut donc m fois b, ou $m\,b$: la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ sera donc $\frac{m^3\,b^3}{b^2}$ qui se réduit à $m^3\,b$; or la quantité $a^3\,b^{-2}$ devient en pareil cas $m^3\,b^3\,b^{-2}$, ou (20) $m^3\,b^{3-2}$, c'est-à-dire, $m^3\,b$; donc $\frac{a^3}{b^2}$ revient au même que $a^3\,b^{-2}$.

Donc en général *on peut faire passer une quantité, du dénominateur au numérateur, en l'écrivant dans celui-ci comme facteur, mais avec un exposant de signe contraire à celui qu'elle avoit dans le dénominateur.*

Ainsi, au lieu de $\frac{1}{a^3}$, on peut écrire $1 \times a^{-3}$ ou simplement a^{-3} ; au lieu de $\frac{1}{a^m}$, on peut écrire a^{-m} ; au lieu de $\frac{a^m\,b^n}{c^p\,d^q}$ on peut écrire $a^m\,b^n\,c^{-p}\,d^{-q}$. Au lieu de $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ on peut écrire $(a^3+b^3) + (a^2+b^2)^{-1}$; et eu égard à tout ce qui précède, au lieu de $\frac{\sqrt[5]{(a^3+b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}}$, on peut écrire $\frac{(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{4}}}$, et enfin $(a^3 + b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2 + b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

119. Et réciproquement, *si une quantité est composée de parties qui aient des exposans négatifs, on pourra faire passer ces parties au dénominateur, en rendant leurs exposans positifs.*

Ainsi, au lieu de $a^3 b^{-4}$, on pourra écrire $\frac{a^3}{b^4}$; au lieu de a^{m-3} qui est la même chose que $a^m \times a^{-3}$ on pourra écrire $\frac{a^m}{a^3}$, et ainsi de suite.

De la formation des puissances des quantités complexes, et de l'extraction de leurs racines.

120. Suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, il ne s'agit, lorsqu'on veut élever une quantité complexe à une puissance proposée, que de multiplier cette quantité par elle-même, autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance : mais en se bornant à ce moyen, on tomberoit souvent dans des calculs très-longs pour parvenir à des résultats qu'on peut avoir à bien moins de frais, en réfléchissant un peu sur les propriétés des produits de quelques-unes de ces multiplications. Nous

Nous allons nous occuper des puissances des quantités binomes, parce que celles-ci conduisent à la formation des puissances des quantités plus composées ; mais pour mieux faire sentir l'étendue de ce que nous avons à dire, nous reprendrons les choses d'un peu plus haut ; nous examinerons quelle est la nature des produits que l'on trouve en multipliant successivement plusieurs facteurs binomes qui auroient tous un terme commun : cette recherche qui nous conduira directement à notre objet, nous fournira en même-temps plusieurs propositions qui nous seront très-utiles par la suite.

121. Soient donc $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, etc. plusieurs quantités binomes qui ont toutes le terme x commun, et qu'on veut multiplier les unes par les autres.

En multipliant $x + a$

par . . . . $x + b$

on aura . . . . . . $x^2 + ax + ab$
$ + bx.$

Multipliant ce produit par $x + c$, on aura

$$\begin{array}{l} x^3 + ax^2 + abx + abc \\ + bx^2 + acx \\ + cx^2 + bcx. \end{array}$$

Multipliant ce second produit par $x + d$, on aura

$$\begin{array}{llll} x^4 & + ax^3 & + abx^2 & + abcx + abcd \\ & + bx^3 & + acx^2 & + abdx \\ & + cx^3 & + adx^2 & + acdx \\ & + dx^3 & + bcx^2 & + bcdx \\ & & + cdx^2, & \\ & & + cdx^2, & \end{array}$$

et ainsi de suite ; ce qui nous fournit les observations suivantes, en prenant pour un terme tout ce qui est dans une même colonne.

1°. Le premier terme de chaque produit est toujours le premier terme x, de chaque binome, élevé à une puissance marquée par le nombre de ces binomes ; en sorte que si le nombre des binomes étoit m, le premier terme de ce produit seroit x^m.

2°. Les puissances de x vont ensuite en diminuant continuellement d'une unité jusqu'au dernier terme qui ne renferme plus d'x.

3°. Les multiplicateurs de chaque puissance de x, (que nous nommerons à l'avenir, multiplicateur du terme où se trouvent ces puissances) sont, pour le second terme, la somme des seconds termes a, b, c, etc. des binomes ; pour le troisième terme, la somme des produits de ces quantités a, b, c, etc. multipliées deux à deux ; pour le quatrième, la somme des produits de ces quantités a, b, c, etc. multipliées trois à trois ; et ainsi de suite jusqu'au dernier qui est le produit de toutes ces quantités. Ces conséquences sont évidentes, quel que soit le nombre des quantités $x + a$, $x + b$, etc. qu'on a multipliées.

122. Si l'on suppose maintenant que toutes les quantités a, b, c, etc. soient égales, auquel cas tous les binomes qu'on a multipliés seront égaux, les produits trouvés ci-dessus, seront donc les puissances successives de l'un quelconque de ces binomes, de $x + a$, par exemple, si l'on suppose que les quantités b, c, d, etc. sont, chacune, égales à a. Si l'on met donc a dans ces produits, au lieu de chacune des lettres b, c, d, etc. on aura les résultats suivans pour les valeurs des puissances qui sont marquées à côté.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x + a)^3$$
$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x + a)^4.$$

Où l'on voit que si m est l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome, les puissances successives de x seront x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, etc.

Mais on ne voit pas aussi évidemment comment les coëfficiens des différens termes de chaque puissance dérivent les uns des autres, ni quelle est leur dépendance de l'exposant m, dont ils dépendent cependant comme on va le voir.

123. Pour trouver la loi de ces coëfficiens, il faut retourner à nos premiers produits, et remarquer que puisque le multiplicateur du second terme est la somme de toutes les quantités a, b, c, etc. il faudra, lorsque toutes ces quantités seront égales à a, qu'il soit composé de a, pris autant de fois qu'il y a de ces quantités; donc si leur nombre est m, ce multiplicateur sera m fois a, ou ma, c'est-à-dire, que son coëfficient m sera égal à l'exposant du premier terme de cette puissance. C'est ce que l'on voit aussi dans les trois puissances particulières que nous avons exposées ci-dessus.

Voyons maintenant quels doivent être les multiplicateurs des autres termes. Il est évident que tous les produits ab, ac, ad, bc, bd, etc. deviennent chacun égal à a^2, dans la supposition présente; pareillement tous les produits abc, abd, etc. deviennent chacun égal à a^3, et ainsi de suite. Donc le multiplicateur du troisième terme de chacun de nos premiers produits se réduit alors à a^2 pris autant de fois que les lettres a, b, c, etc. peuvent donner de produits deux à deux. Pareillement, celui du quatrième se réduit à a^3 pris autant de fois que les lettres a, b, c, etc. peuvent donner de produits trois à trois, et ainsi de suite ; donc pour avoir le coëfficient numérique, des troisième, quatrième, etc. termes de la puissance m du binome $x + a$, la question se réduit à déterminer combien un nombre m de lettres a, b, c, etc. peut donner de produits différens, lorsqu'on prend ces lettres deux à deux, trois à trois, etc.

124. Or je remarque que si l'on a un nombre quelconque m de lettres, et qu'on les combine de toutes les manières imaginables deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc. sans répéter une même lettre dans une même combinaison, je remarque, dis-je,

1°. Que le nombre des combinaisons deux à deux, sera double du nombre des produits de deux lettres réellement différens. En effet, deux lettres peuvent être combinées l'une avec l'autre de deux manières différentes; par exemple, a et b donnent ces deux combinaisons ab et ba; mais ces deux combinaisons ne font pas deux produits différens.

2°. Le nombre des combinaisons de plusieurs lettres trois à trois, sera sextuple du nombre des produits de trois lettres, réellement distincts: en effet, pour avoir les combinaisons de trois quantités a, b, c, il faut, après en avoir combiné deux, a et b, par exemple, ce qui donne ab et ba, combiner la troisième c avec chacune des deux premières combinaisons, c'est-à-dire, lui donner toutes les dispositions possibles à l'égard des lettres a et b qui entrent dans ab et ba; or cela donne six combinaisons de trois lettres, comme il est évident par les dispositions suivantes abc, acb, cab, bac, bca, cba; mais ces six combinaisons ne font chacune que le même produit.

Un raisonnement semblable prouvera que quatre quantités sont susceptibles de vingt-quatre combinaisons, dont chacune cependant ne fait que le même produit ; donc le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres quatre à quatre, est la vingt-quatrième partie du nombre total de ces combinaisons. Pareillement, le nombre des produits distincts qu'on peut avoir en combinant plusieurs lettres cinq à cinq, six à six, sept à sept, etc. est la cent vingtième, la sept cents vingtième, la cinq mille quarantième, etc. partie du nombre total de ces combinaisons, c'est-à-dire, est, en général, exprimé par une fraction qui a pour numérateur le nombre total des combinaisons, et pour dénominateur le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, etc. jusqu'à celui qui marque de combien de lettres chaque produit est composé.

125. Voyons donc quel est le nombre total des combinaisons que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, etc. prises deux à deux, trois à trois, etc.

Il est évident pour les combinaisons deux à deux, que puisqu'une même lettre ne doit pas être combinée avec elle-même, elle ne peut l'être qu'avec les $m - 1$ autres, et par conséquent elle doit donner $m - 1$ combinaisons; donc puisqu'il y a m de lettres en tout, elles donneront m fois $(m - 1)$ ou $m.(m - 1)$ combinaisons. Donc suivant ce qui vient d'être dit (124), le nombre des produits de deux lettres, réellement différentes, sera $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

A l'égard des combinaisons trois à trois : pour les avoir, il faut que chacune des combinaisons deux à deux, soit combinée avec chacune des lettres qu'elle ne renferme point, c'est-à-dire, avec un nombre de lettres marqué par $m - 2$; donc chacune de ces combinaisons donnera $m - 2$ combinaisons de trois lettres; donc puisqu'il y a $m.(m - 1)$ combinaisons de deux lettres, dont chacune doit donner $m - 2$ combinaisons de trois lettres, il y aura en tout $m.(m - 1).(m - 2)$ combinaisons de trois lettres, donc puisque (124) le nombre des produits réellement distincts, est la sixième partie de ce nombre total

de combinaisons, il sera $m \cdot \frac{(m-1)\cdot(m-2)}{6}$
ou $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$.

On prouvera de même, que le nombre des combinaisons quatre à quatre, sera $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; car il faudra combiner chaque combinaison de trois lettres, avec toutes les autres lettres que cette combinaison ne renferme point, et qui étant au nombre de $m-3$ donneront, pour chaque combinaison de trois lettres, $m-3$ combinaisons de quatre lettres, donc le nombre des combinaisons trois à trois étant $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$, celui des combinaisons quatre à quatre sera $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; et puisque le nombre des produits quatre à quatre réellement différens, est la vingt-quatrième partie de ce nombre de combinaisons, il sera donc $m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}$.

Le même raisonnement prouvera que le nombre des produits distincts qu'on peut former en multipliant un nombre m de lettres cinq à cinq, six à six, etc. sera exprimé par $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$, par $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$, et ainsi de suite.

126. Concluons donc de là, et de ce qui a

été dit (122), que les termes successifs du binome $x + a$ élevé à la puissance m ou de $(x + a)^m$ sont

$$x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \text{etc.}$$

C'est-à-dire, que le premier terme de la suite ou série qui exprime cette puissance, est le premier terme x du binome, élevé à la puissance m; qu'ensuite les exposans de x vont en diminuant d'une unité, et ceux de a en augmentant d'une unité, à partir du second terme où il commence à entrer. A l'égard des coëfficiens $m, m \cdot \frac{m-1}{2}$, etc. il faut remarquer que celui du second terme est égal à l'exposant du premier; que celui du troisième qui est $m \cdot \frac{m-1}{2}$ est le coëfficient m du précédent, multiplié par $\frac{m-1}{2}$; c'est-à-dire, par la moitié de l'exposant de x dans ce même terme précédent. Pareillement, le coëfficient du quatrième qui est $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}$, n'est autre chose que le coëfficient $m \cdot \frac{m-1}{2}$ du terme précédent, multiplié par $\frac{m-2}{3}$, c'est-à-dire, par le tiers de l'exposant de x dans ce même terme précédent, et ainsi de suite. Toutes ces conséquences, que l'inspection seule fournit, nous conduisent à cette règle générale : *Le coëfficient de l'un quelconque des termes, se trouve en multipliant le coëfficient du précédent, par l'exposant de* x *dans ce même terme précédent, et divisant par le nombre des termes qui précèdent, celui dont il s'agit.*

Formons d'après cette règle, la septième puissance de $x + a$, pour servir d'exemple. Nous aurons $(x + a)^7 = x^7 + 7\,a\,x^6 + 21\,a^2\,x^5 + 35\,a^3\,x^4 + 35\,a^4\,x^3 + 21\,a^5\,x^2 + 7\,a^6\,x + a^7$. En écrivant d'abord x^7, puis multipliant celui-ci par 7, diminuant l'exposant d'une unité et multipliant par a, ce qui donne $7\,a\,x^6$.

Je multiplie celui-ci par $\frac{6}{2}$, je diminue l'exposant de x d'une unité, et j'augmente celui de a d'une unité, et j'ai $21\,a^2\,x^5$ pour le troisième terme.

Je multiplie ce troisième, par $\frac{5}{3}$, je diminue l'exposant de x d'une unité, et j'augmente celui de a d'une unité, ce qui me donne $35\,a^3\,x^4$ pour le quatrième terme ; il est aisé d'achever.

Si au lieu de $x + a$, on avoit $x - a$; alors les termes auroient alternativement les signes $+$ et $-$, à commencer du premier ; car si dans a^4, par exemple, on substitue $-\,a$ au lieu de $+\,a$, le signe ne changera point (24) ; mais il changeroit, si l'on substituoit $-\,a$ dans une puissance impaire de a.

La même formule que nous venons de donner peut servir à élever à une puissance proposée, non-seulement un binome simple comme $x + a$, mais encore un binome composé tel que $x^2 + a^2$ ou $x^2 + a$ ou $x^3 + a^3$, etc. et même à élever non-seulement à une puissance dont l'exposant seroit un nombre entier positif, mais encore à une puissance dont l'exposant seroit positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Mais ces usages exigent pour plus de commodité que nous lui donnions une autre forme.

127. Reprenons donc la formule $(x + a)^m = x^m + m\,a\,x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2}\, a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot a^3 x^{m-3} +$, etc.

Suivant ce que nous avons dit (119), on peut, au lieu de x^{m-1}, écrire $\frac{x^m}{x}$; au lieu de x^{m-2}, écrire $\frac{x^m}{x^2}$; au lieu de x^{m-3}, écrire $\frac{x^m}{x^3}$, et ainsi de suite. Conformément à ce principe, nous pourrons donc changer notre formule en cette autre, $(x + a)^m = x^m + \frac{m\,a\,x^m}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2 x^m}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3 x^m}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4 x^m}{x^4}$, etc.

Si l'on fait attention maintenant que tous les termes ont pour facteur commun x^m, on pourra donner à la formule, cette autre forme $(x + a)^m = x^m \left(1 + \frac{ma}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2}\right.$

$\frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3}$ + etc.) dans laquelle x^m est censé multiplier tout ce qui est entre deux crochets. De-là nous concluons la règle suivante, pour former d'une manière commode la suite ou série des termes qui doivent composer la puissance m du binome $x + a$.

128. Écrivez sur une première ligne, comme il suit, les quantités

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \text{ etc.}$$

$$1 + m\frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2}\frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}\frac{a^3}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}\frac{a^4}{x^4}, \text{ etc.}$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous et à une place plus avant sur la gauche, formez la suite inférieure, par cette loi.

Multipliez cette unité, par le premier terme de la suite supérieure et par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le second terme de la série inférieure.

Multipliez ce second terme, par le second terme de la suite supérieure et encore par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le troisième terme de la série inférieure.

Multipliez ce troisième terme, par le troisième de la suite supérieure et encore par $\frac{a}{x}$, et vous aurez le quatrième terme de la série inférieure; et ainsi de suite.

Réunissez tous ces termes de la série inférieure, et multipliez la totalité par x^m, vous aurez la valeur de $(x + a)^m$.

129. Si au lieu de $x + a$, on avoit $x^2 + a^2$, ou $x^3 + a^3$, ou, etc. au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, on multiplieroit par $\frac{a^2}{x^2}$ dans le premier cas, par $\frac{a^3}{x^3}$ dans le second, et en général par le second terme du binome divisé par le premier; et on multiplieroit la totalité, dans le premier cas, par x^2 élevé à la puissance m; et dans le second cas, par x^3 élevé à la puissance m; c'est-à-dire, en général, par le premier terme du binome, élevé à la puissance proposée.

Enfin si le second terme du binome, au lieu d'avoir le signe + avoit le signe —, au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, lorsqu'on a $x + a$, ou par $\frac{a^2}{x^2}$, lorsqu'on a $x^2 + a^2$, on multiplieroit successivement par $-\frac{a}{x}$, ou par $-\frac{a^2}{x^2}$, et ainsi de suite.

Supposons, pour donner un exemple, qu'on demande la sixième puissance de $x^3 + a^3$: je procède comme ci-dessous. . .

$$6 \quad \frac{5}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$1 + \frac{6\,a^3}{x^3} + \frac{15 a^6}{x^6} + \frac{20\,a^9}{x^9} + \frac{15\,a^{12}}{x^{12}} + \frac{6\,a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}.$$

C'est-à-dire, qu'ayant écrit la suite 6, $\frac{5}{2}$ $\frac{4}{3}$, etc. qui répond à m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$, etc. et ayant écrit au-dessous, l'unité, pour premier terme de la seconde suite; je multiplie ce premier terme, par le premier terme 6 de la suite supérieure, et par $\frac{a^3}{x^3}$, ce qui me donne $\frac{6\,a^3}{x^3}$ pour second terme. Je multiplie $\frac{6\,a^3}{x^3}$ par le second terme $\frac{5}{2}$ de la suite supérieure, et par $\frac{a^3}{x^3}$, et j'ai $\frac{15 a^6}{x^6}$ pour troisième terme, et ainsi de suite. Enfin je multiplie la totalité des termes formés suivant cette loi, par x^3 élevé à la puissance 6, c'est-à-dire (96), par x^{18}, et j'ai $x^{18} + \frac{6\,a^3\,x^{18}}{x^3} + \frac{15\,a^6\,x^{18}}{x^6} + \frac{20\,a^9\,x^{18}}{x^9} + \frac{15\,a^{12}\,x^{18}}{x^{12}} + \frac{6\,a^{15}\,x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}\,x^{18}}{x^{18}}$, qui se réduit à $x^{18} + 6\,a^3\,x^{15} + 15\,a^6\,x^{12} + 20\,a^9\,x^9 + 15\,a^{12}\,x^6 + 6\,a^{15}\,x^3 + a^{18}$.

130. Si au lieu d'un binome on avoit un trinome à élever à une puissance proposée; si l'on avoit, par exemple, $a + b + c$ à élever à la troisième puissance,

on feroit $b + c = m$, et l'on auroit $a + m$ à élever à la troisième puissance, qui selon les règles qu'on vient de donner, seroit $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Remettant maintenant, au lieu de m sa valeur $b + c$, on auroit $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$. Or les puissances $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$, étant toutes des puissances de binome, se trouveront également par les règles précédentes ; il ne s'agira plus que de les multiplier respectivement par $3a^2$, $3a$ et 1. En achevant le calcul, on trouvera $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

De l'extraction des Racines des quantités complexes.

131. Lorsqu'une fois on est en état de trouver tous les termes dont une puissance proposée d'un binome doit être composée, il est aisé d'en conclure la méthode d'extraire une racine d'un degré proposé, soit que la quantité dont il s'agit soir littérale, soit qu'elle soit numérique. Par exemple, s'il s'agit de la racine quarrée, on trouvera (comme nous le savons déjà d'ailleurs) que le quarré est composé du quarré du premier terme du binome, du double du premier terme multiplié par le second, et du quarré du second. Donc après avoir ordonné tous les termes, on pourra opérer comme il suit.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l|l}
36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ racine.} \\
-\,36a^2 & 12a + 5b \\
\hline
+\,60ab + 25b^2 & \\
-\,60ab - 25b^2 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

Je prends la racine quarrée du premier terme $36a^2$, laquelle est $6a$ que j'écris à côté de la quantité proposée.

Je quarre cette racine, et j'écris le quarré $36a^2$ sous le premier terme, avec le signe —, pour le retrancher. La réduction faite, il reste $+60ab + 25b^2$.

Sous la racine $6a$ j'écris son double $12a$ que j'emploie pour diviser le premier terme $60ab$ de la quantité restante $60ab + 25b^2$. Je trouve pour quotient $+5b$ que j'écris à la suite de la racine $6a$, et j'ai $6a + 5b$ pour la racine cherchée ; mais pour confirmer cette opération, j'écris aussi le quotient $5b$ que je viens de trouver, à côté de $12a$, et je multiplie le total $12a + 5b$ par ce même quotient $5b$; je porte à mesure, les produits, sous la quantité $60ab + 25b^2$, en observant de changer les signes de ces produits ; faisant ensuite la réduction, il ne reste rien ; j'en conclus que la racine trouvée $6a + 5b$ est la racine quarrée exacte de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Prenons pour second exemple, la quantité $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. J'ordonne cette quantité par rapport à la lettre a, et j'ai :

EXEMPLE II.

EXEMPLE II.

$$\begin{array}{ll}
4a^2-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2 & \left\{\begin{array}{l} 2a-3b+4c \text{ racine} \\ \hline 4a-3b \\ 4a-6b+4c \end{array}\right. \\
-4a^2 & \\
\hline
1^{r}\text{ Reste } -12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2 & \\
\quad +12ab \qquad\qquad 9b^2 & \\
\hline
2^{d}\text{ Reste } \qquad +16ac-24bc+16c^2 & \\
\qquad\qquad -16ac+24bc-16c^2 & \\
\hline
\text{Dernier reste} \ldots\ldots\ldots\ldots 0 &
\end{array}$$

Je tire la racine quarrée de $4a^2$; elle est $2a$, que j'écris à côté. Je quarre $2a$, et je l'écris, avec le signe —, sous $4a^2$; faisant la réduction, il reste $-12ab+16ac+9b^2-24bc+16c^2$.

Au-dessous de la racine $2a$, j'écris son double $4a$, que j'emploie pour diviser le premier terme $-12ab$ du reste; je trouve pour quotient $-3b$, que j'écris à la suite du premier terme $2a$ de la racine; je l'écris aussi à côté du double $4a$, et je multiplie le tout $4a-3b$, par le même quotient $-3b$; écrivant les produits, après avoir changé leurs signes, sous le reste $-12ab+16ac$, etc. et faisant la réduction, j'ai pour second reste $+16ac-24bc+16c^2$.

Je considère à présent les deux termes de la racine $2a-3b$, comme ne faisant qu'une seule quantité; je double cette quantité, et je l'écris au-dessous pour servir de diviseur au second reste; mais pour faire cette division, je me contente, selon ce qui a été dit (36), de diviser le premier terme $+16ac$, par le premier terme $+4a$ de mon diviseur; je trouve pour quotient $+4c$, que j'écris à la suite de la racine $2a-3b$, et à la suite du double $4a-6b$; je multiplie cette dernière somme $4a-6b+4c$, par le nouveau terme $+ 4c$ de la racine ; et changeant, à mesure, les signes des produits, j'écris ces mêmes produits sous le second reste ; faisant la soustraction, il ne reste rien. D'où je conclus que la racine trouvée est exacte.

Ce que nous allons dire sur la racine cinquième suffira pour faire comprendre comment on doit se conduire dans les autres degrés.

Selon la formule des puissances d'un binome, la cinquième puissance de $a + b$, est $a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$. De ces 6 termes, les deux premiers suffisent pour établir la règle que nous cherchons.

Le premier est la cinquième puissance du premier terme du binome, et le second est le quintuple de la quatrième puissance de ce même premier terme, multiplié par le second terme ; donc pour avoir le premier terme de la racine, il faut, après avoir ordonné tous les termes de la puissance donnée, extraire la racine cinquième, du premier terme de cette puissance ; et pour avoir le second terme de la racine, il faut diviser le second terme de la quantité proposée, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine qu'on vient de trouver par la première opération. En effet, il est évident que la racine cinquième de a^5 est a, qui est le premier terme du binome dont la quantité $a^5 + 5 a^4 b +$, etc. est la cinquième puissance ; et il est également évident que $\frac{5a^4b}{5a^4}$ donne b qui est le second terme de ce binome. Mais comme il pourroit se faire que la quantité proposée ne fût pas une puissance parfaite du cinquième degré ; après avoir ainsi trouvé le second terme de la racine, il faudra vérifier cette racine en l'élevant au cinquième degré et retranchant le résultat, de la quantité proposée ; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de

$$\begin{array}{l|l} 32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & \text{Racine} \\ -32a^5 & 2a+3b \\ \hline \text{Reste } +240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3+810ab^4+243b^5 & 80a^4 \end{array}$$

Je tire la racine cinquième de $32a^5$, elle est $2a$ que j'écris à la racine.

J'élève $2a$ à la cinquième puissance, et j'écris le produit $32a^5$ avec un signe contraire, sous le premier terme $32a^5$ de la quantité proposée, ce qui le détruit.

J'élève la racine $2a$ à la quatrième puissance, ce qui me donne $16a^4$ que je quintuple, et j'ai $80a^4$ que j'écris sous la racine $2a$; je m'en sers pour diviser le premier terme $240a^4b$ du reste ; la division faite, j'ai pour quotient $3b$ que j'écris à la racine; en sorte que j'ai $2a+3b$ pour la racine cherchée ; mais pour m'en assurer davantage, j'élève $2a+3b$ à la cinquième puissance, je retrouve les mêmes termes que dans la quantité proposée ; faisant la soustraction, il ne reste rien ; d'où je conclus que la racine est exactement $2a+3b$.

S'il devoit y avoir encore un autre terme à la racine, alors il y auroit un reste ; après cette première opération :

je regarderois $2a + 3b$, comme une seule quantité, avec laquelle j'opérerois pour trouver le troisième terme, comme j'ai opéré avec $2a$ pour trouver le second.

132. A l'égard des quantités numériques, la règle est absolument la même; la seule chose qu'il faille éclaircir, est, à quel caractère on reconnoîtra ce qui répond au premier terme a^5, et ce qui répond au terme $5\,a^4\,b$.

Pour se conduire dans cette recherche, il n'y a qu'à imaginer que dans le binome $a + b$, a marque les dixaines et b les unités; alors il est évident que a^5 sera des centaines de mille, parce que la cinquième puissance de 10 est 100000; donc le premier terme a^5, ou la quantité dont il faudra tirer la racine 5^e^. pour avoir le premier chiffre de la racine, ne peut faire partie des cinq derniers chiffres sur la droite; on séparera donc les cinq derniers chiffres, et supposé qu'il en reste cinq seulement ou moins de cinq sur la gauche, on en cherchera la racine 5^e^. qui sera facile à trouver, ne pouvant avoir qu'un seul chiffre.

Quand on aura trouvé le premier chiffre de la racine, et qu'on aura retranché sa cinquième puissance, de la quantité qui a servi à trouver cette racine, on descendra, à côté du reste, les cinq chiffres séparés; et pour avoir la partie qu'il faut diviser par $5\,a^4$, c'est-à-dire, par le quintuple de la quatrième puissance des dixaines trouvées, il faudra séparer quatre chiffres sur la droite, et ne diviser que la partie restante à gauche : car $5 a^4 b$, qui est la partie qu'on doit diviser par $5 a^4$, pour avoir b, ne peut faire partie des quatre derniers chiffres, puisqu'étant le produit de $5 a^4$ par b, elle doit être au moins des dixaines de mille, puisque a^4 est des dixaines de mille.

Ces éclaircissemens posés, le procédé est le même que pour l'extraction littérale, voici un exemple.

On demande la racine cinquième de

$$\begin{array}{l|l} 3802.04032 & 52 \\ \underline{3125} & \\ \;\;6770.4032 & \\ \;\;\;3125 & \\ \underline{38020403 2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Je sépare les cinq derniers chiffres 04032, et je cherche la racine cinquième de 3802 qui ayant moins de cinq chiffres, ne peut donner qu'un chiffre pour cette racine ; elle est 5 que j'écris à côté.

J'élève 5 à la cinquième puissance, et j'écris le produit sous 3802 pour l'en retrancher ; il reste 677, à côté duquel j'abaisse les cinq chiffres séparés d'abord ; du total, je sépare quatre chiffres sur la droite, et je divise la partie restante 6770, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine trouvée 5, c'est-à-dire, par 5 fois 625, ou 3125. Je trouve pour quotient 2 que j'écris à côté du premier chiffre trouvé 5. Pour vérifier cette racine 52, je l'élève à la cinquième puissance, et je retrouve le nombre même proposé, d'où je conclus que 52 est exactement la racine.

S'il y avoit un reste, et qu'on voulût approcher plus près de la racine, on mettroit cinq zéros, et on continueroit pour avoir le troisième chiffre, qui seroit une décimale, comme on a fait pour avoir le second.

En général, pour tirer une racine de degré quelconque m, il faut séparer en allant de droite à gauche, en tranches de m chiffres chacune, dont la plus à gauche peut en avoir moins. Tirer la racine du degré m de cette dernière tranche, cette racine n'aura jamais qu'un seul chiffre ; à côté du reste, descendre la tranche suivante, en séparer $m - 1$ chiffres sur la droite, et diviser la partie restante à gauche, par m fois la racine trouvée, et élevée à la puissance $m - 1$, et ainsi de suite. Cela est fondé sur ce que les deux premiers termes d'un binome $a + b$ élevé à la puissance quelconque m, sont $a^m + m a^{m-1} b$, et sur ce que si a marque des dixaines et b des unités, a^m ne peut faire partie des m derniers chiffres, et $m a^{m-1} b$, ne peut faire partie des $m - 1$ derniers.

De la manière d'approcher de la racine des puissances imparfaites des quantités littérales.

133. Lorsque la quantité complexe proposée, n'est point une puissance parfaite du degré dont on demande la racine, alors il n'y a point de racine exacte à espérer : il faut se borner à en approcher aussi près que peut l'exiger la question pour laquelle cette extraction est nécessaire. on pourroit y parvenir en suivant la méthode que nous venons d'exposer pour les puissances parfaites : elle donneroit une suite de termes fractionnaires dont la valeur décroissant continuellement, permet de se borner à un nombre limité de termes et de négliger les autres : mais l'opération seroit longue et pénible. On peut parvenir au même résultat par une voie beaucoup plus courte, en employant la règle que nous avons donnée ci-dessus (128) pour élever un binome à une puissance proposée. Pour cet effet, il faut se rappeler (109) que toute racine peut être représentée par une puissance fractionnaire. Ainsi, demander la racine quarrée de $a + b$, ou d'évaluer $\sqrt{(a + b)}$, c'est demander d'élever $a + b$ à la puissance $\frac{1}{2}$, puisque (109) $(a + b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a + b)}$.

Donc, suivant la règle donnée (128), j'écris la suite $\frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, $\frac{\frac{1}{2}-4}{5}$, etc. qui se réduit à $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, etc.

Et posant 1 pour premier terme de la seconde suite, je forme cette seconde.............................

$$1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}, \text{ etc.}$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier terme $\frac{1}{2}$ de la première suite, et par $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire, par le second terme du binome $a+b$, divisé par le premier; j'ai $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$ pour le second terme.

Je forme de même le troisième, en multipliant ce second, par le second terme $-\frac{1}{4}$ de la première suite, et par $\frac{b}{a}$, ce qui me donne $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ pour le troisième terme. Pour le quatrième, je multiplie ce troisième, par le troisième terme $-\frac{1}{2}$ de la première suite et par $\frac{b}{a}$, et j'ai $+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$ pour quatrième terme, et ainsi de suite.

Enfin je multiplie la totalité de ces termes, par le premier terme du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, et j'ai pour la valeur de $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{(a+b)}$, la quantité suivante,

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5}, \text{ etc.}\right)$$

qu'il est facile de prolonger autant qu'on le jugera à propos.

Nous verrons, par la suite, l'usage de ces sortes d'approximations ; pour le présent, nous nous contenterons de faire voir par un exemple en nombres, comment on peut les employer pour approcher des racines des quantités numériques. Supposons qu'on veut avoir la racine quarrée de 101. Je partagerai 100 en deux parties dont l'une soit un quarré, le plus grand qu'il sera possible ; par exemple, je le partage en ces deux parties 100 et 1 ; je prends la première pour a, et la seconde pour b, en sorte que je suppose $a = 100$, et $b = 1$; par conséquent $a^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; et $\frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; donc la série qui exprime $\sqrt{(a+b)}$, c'est-à-dire ici $\sqrt{101}$, deviendra, en mettant pour $a^{\frac{1}{2}}$ et $\frac{b}{a}$, leurs valeurs,

$$10\left(1 + \frac{0{,}01}{2} - \frac{(0{,}01)^2}{8} + \frac{(0{,}01)^3}{16} - \frac{5(0{,}01)^4}{128} + \frac{35(0{,}01)^5}{1280}, \text{ etc.}\right)$$

Supposons qu'on veut avoir cette racine jusqu'à un dix millième près seulement ; alors il suffit de prendre les trois premiers termes ; car le quatrième qui est $\frac{(0{,}01)^3}{16}$ revient à $\frac{0{,}000001}{16}$, c'est-à-dire, à 0,0000000625 ; et quoiqu'il doive être multiplié par 10 qui doit multiplier tous les termes de la série ; il ne produira que 0,000000625 qui est bien au-dessous d'un dix-millième. Les termes suivans sont, à plus forte raison, beaucoup au-dessous, puisqu'étant continuellement multipliés par 0,01 qui est une fraction, ils doivent diminuer continuellement ; car en multipliant par une fraction, on ne prend qu'une partie du multiplicande.

La valeur de $\sqrt{101}$ se réduit donc à............

$10\left(1+\frac{0{,}01}{2}-\frac{(0{,}01)^2}{8}\right)$, c'est-à-dire, à $10\,(1+0{,}005-0{,}0000125)$, ou $10\times 1{,}0049875$, ou $10{,}049875$; c'est-à-dire, $10{,}0499$ en se bornant aux dix millièmes.

Cette méthode peut s'appliquer à toutes sortes de racines et à toutes sortes de quantités ; nous en donnerons encore un exemple sur $\sqrt[5]{(a^5-x^5)}$. Je change donc cette quantité en $(a^5-x^5)^{\frac{1}{5}}$, et procédant comme ci-dessus, j'écris

$$\tfrac{1}{5},\ \frac{\frac{1}{5}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{5}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{5}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{5}-4}{5},\ \text{etc.}$$

ou $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{7}{10}$, $-\frac{19}{25}$, ect.

Et posant 1, pour premier terme de la seconde suite, je forme cette seconde,

$$1-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}-\frac{2}{25}\frac{x^{10}}{a^{10}}-\frac{6}{125}\frac{x^{15}}{a^{15}}-\frac{42}{1250}\frac{x^{20}}{a^{20}}-\frac{798}{31250}\frac{x^{25}}{a^{25}},\ \text{etc.}$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier terme $\frac{1}{5}$, de la suite supérieure, et par $-\frac{x^5}{a^5}$, c'est-à-dire par le second terme du binome, divisé par le premier ; ce qui donne $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$ pour second terme de la série.

Pour avoir le troisième, je multiplie celui-ci par le second terme $-\frac{2}{5}$, de la suite supérieure, et par $-\frac{x^5}{a^5}$, ce qui me donne $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$.

En calculant de même les suivans jusqu'au sixième, et multipliant le tout par le premier terme a^5 du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire (96) par $a^{5 \times \frac{1}{5}}$ ou par a, j'ai pour valeur approchée de $\sqrt[5]{(a^5 - x^5)}$, la quantité $a\left(1 - \frac{x^5}{5a^5} - \frac{2x^{10}}{25a^{10}} - \frac{6x^{15}}{125a^{15}} - \frac{42x^{20}}{1250a^{20}}\text{, etc.}\right)$

134. Observons à l'égard de ces séries et de toutes les autres qu'on peut former de la même manière, qu'on doit toujours prendre pour premier terme de la quantité proposée, le plus grand terme, par exemple, dans $\sqrt{(a+b)}$ nous avons pris ci-dessus a pour premier terme ; mais si b étoit plus grand que a, il auroit fallu prendre b pour premier terme. La raison en est que lorsque b est plus grand que a, la 1re. série $a^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\text{, etc.}\right)$ est trompeuse ; car $\frac{b}{a}$ étant alors plus grand que l'unité, les termes suivans qui sont continuellement multipliés par $\frac{b}{a}$ vont toujours en augmentant, en sorte qu'on n'a aucune raison de s'arrêter après un certain nombre de termes. Mais si dans ce même cas on forme la série en prenant b pour premier terme, on aura $b^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{b} - \frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}\text{, etc.}\right)$ dans laquelle les termes vont en décroissant.

Les séries dont les termes vont en augmentant de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine, s'appellent *séries divergentes ;* et au contraire on appelle *séries convergentes* celles dont les termes diminuent de valeur à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine.

135. Nous avons vu (118) que toute fraction algébrique pouvoit être mise sous la forme d'un entier, en faisant passer son dénominateur au numérateur avec un exposant négatif. Cette observation nous fournit le moyen de réduire en série toute fraction dont le dénominateur seroit complexe, ce qui sera utile par la suite.

Par exemple, si j'avois $\frac{a^2}{a^2 - x^2}$; au lieu de cette quantité, j'écrirois $a^2 \times (a^2 - x^2)^{-1}$ et alors j'élèverois $a^2 - x^2$ à la puissance -1 selon la règle donnée (128); c'est-à-dire, que je poserois d'abord la série -1, $\frac{-1-1}{2}$, $\frac{-1-2}{3}$, $\frac{-1-3}{4}$, etc. ou -1, -1, -1, -1.

Et je formerois la série suivante,

$$1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \text{ etc.}$$

en multipliant le premier terme 1 de cette seconde, par le premier terme -1 de la série supérieure et par $-\frac{x^2}{a^2}$, ce qui donneroit $+\frac{x^2}{a^2}$; multipliant celui-ci par le second terme -1 de la série supérieure, et par $-\frac{x^2}{a^2}$, et ainsi de suite. Après quoi je multiplierois la totalité, par le premier terme a^2 élevé à la puissance -1, c'est-à-dire (96) par $a^{2 \times -1}$ ou a^{-2}, ce qui me donneroit $a^{-2}\left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}, \text{ etc.}\right)$

pour valeur de $(a^2 - x^2)^{-1}$; donc pour avoir $a^2 (a^2 - x^2)^{-1}$, il ne s'agit plus que de multiplier par a^2; or $a^2 \times a^2$ donnant a^{2-2}, ou a^0, qui se réduit à 1; on aura donc $a^2 (a^2 - x^2)^{-1} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8}$, etc.

On s'y prendroit de même pour réduire en série $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^3}$; on considéreroit cette quantité comme $a^2 (a^2 + x^2)^{-3}$. Pareillement au lieu de $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2 + x^2)^3}}$, on écriroit $\frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{5}}}$, et ensuite $a^2 (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{5}}$, et ainsi des autres.

Des Equations à deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

136. Une équation à une seule inconnue est dite du troisième, du quatrième, du cinquième, etc. degré, lorsque la plus haute puissance de l'inconnue est la troisième, la quatrième, la cinquième, etc.; mais outre cette puissance, une équation peut encore renfermer toutes les puissances inférieures.

Ainsi $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$, sont toutes des équations du troisième degré.

Une équation à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues, est dite passer le premier degré, non-seulement lorsque l'une de ces inconnues passe le premier degré; mais encore, lorsque quelques-unes de ces mêmes inconnues sont multipliées entr'elles ; et en général, le degré s'estime par la plus forte somme que puissent faire les exposans dans un même terme.

L'équation $x^3 + y^3 = a^2b$ est du troisième degré ; l'équation $bx^2 + x^2y + ay^2 = ab^2$ est aussi du troisième degré, parce que les exposans de x et de y dans le terme x^2y font 3 ; dans les autres termes, les exposans sont moindres.

137. Pour résoudre les questions qui conduisent à des équations à plusieurs inconnues, et au-delà du premier degré, il faut, comme pour celles du premier degré, réduire ces équations à une seule qui ne renferme plus qu'une inconnue.

Si l'on a deux équations et deux inconnues, et que, dans l'une de ces équations, l'une des inconnues ne passe pas le premier degré, *prenez, dans celle-ci, la valeur de cette inconnue, comme si tout le reste étoit connu ; substituez cette valeur dans l'autre équation, et vous aurez une nouvelle équation qui ne renfermera plus qu'une inconnue.*

Par exemple, si l'on me proposoit cette question ; *Trouver deux nombres dont la somme soit* 12, *et dont le produit soit* 35. En représentant ces deux nombres par x et y, j'aurois $x + y = 12$, et $xy = 35$.

De la première je tire $x = 12 - y$; substituant dans la seconde équation, cette valeur de x, j'aurai $(12 - y)y =$

35 ou $12y - yy = 35$, équation du second degré, qui étant résolue suivant les règles données (87 *et suiv.*), donnera $y = 6 \pm 1$, c'est-à-dire $y = 7$ ou $y = 5$; et et puisque $x = 12 - y$, on aura $x = 5$ ou $x = 7$; c'est-à-dire, que les deux nombres cherchés sont 5 et 7 ou 7 et 5.

Pareillement, si j'avois les équations $x + 3y = 6$ et $x^2 + y^2 = 12$ de la première, je tirerois $x = 6 - 3y$; substituant dans la seconde, j'aurois $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; faisant l'opération indiquée, j'ai $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$; ou en passant tout d'un même côté et réduisant, $10y^2 - 36y + 24 = 0$, équation du second degré, qu'on peut résoudre par les règles données (87 *et suiv.*).

Prenons pour troisième exemple, les deux equations $xy + y^2 = 5$ et $x^3 + x^2y = y^2 + 7$. La première donne $x = \frac{5 - y^2}{y}$; substituant dans la seconde, on a $\left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^3 + \left(\frac{5 - y^2}{y}\right)^2 y = y^2 + 7$, qui après les opérations indiquées, et les réductions ordinaires, devient $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, équation qui ne renferme plus que y, mais qui est du cinquième degré.

138. *Si dans l'équation la moins élevée, l'une des deux inconnues ne passe pas le second degré; prenez dans celle-ci la valeur du quarré de l'inconnue la moins élevée, et substituez-la dans l'autre, à la place du quarré de cette même inconnue et de ses puissances; et continuez de substituer jusqu'à ce que cette inconnue ne se trouve plus qu'au premier*

degré. Alors tirez de cette dernière équation, la valeur de cette même inconnue, et substituez-la dans l'équation la moins élevée.

Par exemple, si j'avois $x^2 + 3y^2 = 6x$ et $2x^3 - 3y^2 = 8$, je prendrois, dans la première, la valeur de x^2 qui est $x^2 = 6x - 3y^2$; la substituant dans la seconde, j'aurois (en faisant attention que x^3 est $x^2 \times x$), $2(6x - 3y^2), x - 3y^2 = 8$, qui se réduit à $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; comme il y a encore x^2 dans celle-ci, j'y substitue de nouveau, la même valeur de x^2 que ci-dessus, et j'ai $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$, équation dans laquelle x n'est plus qu'au premier degré.

J'en tire la valeur de x, et j'ai $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; je substitue cette valeur dans la première équation $x^2 + 3y^2 = 6x$: il me vient $\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^2 + 3y^2 = 6\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y}\right)$ ou $\frac{(39y^2 + 8)^2}{(72 - 6y^1)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2 + 48}{72 - 6y^2}$ ou $(39y^2 + 8)^2 + 3y^2(72 - 6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72 - 6y^2)$, équation dans laquelle il n'y a plus à faire que des multiplications et les réductions ordinaires.

Des Equations à deux termes.

139. On appelle *Équations à deux termes*, celles dans lesquelles il n'entre qu'une seule puissance de l'inconnue, parce qu'elles peuvent toujours être réduites à deux termes.

Par exemple, l'équation $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ est une équation à deux termes, parce qu'en la mettant sous

sous cette forme $(a+b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, on voit que a et b étant des quantités connues, on pourra toujours réduire $a+b$ à une seule quantité, et $a^4b^2 - a^3b^3$ pareillement à une seule quantité; en sorte que cette équation peut être représentée par cette autre $px^5 = q$.

Ces équations sont très-faciles à résoudre ; car il est évident qu'après avoir dégagé la puissance de l'inconnue, par les mêmes règles que dans les autres équations, il ne reste plus qu'à tirer la racine du degré marqué par l'exposant de l'inconnue.

Par exemple, l'équation $px^5 = q$, deviendroit $x^5 = \frac{q}{p}$, et tirant la racine cinquième, $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

140. Lorsque l'exposant est impair, il n'y a jamais qu'une seule valeur réelle. Par exemple, si l'on avoit cette équation $x^5 = 1024$, on auroit $x = \sqrt[5]{(1024)} = 4$; or il est évident qu'il n'y a qu'un seul nombre réel qui, élevé à la cinquieme puissance, puisse produire 1024.

Si le second membre de l'équation avoit le signe —, la valeur de x auroit le signe —; parce que — combiné par multiplication, avec —, un nombre impair de fois, donne — ; mais lorsque l'exposant est pair, l'inconnue a deux valeurs, l'une positive, l'autre négative, et qui peuvent être ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Ce dernier cas aura lieu si le second membre a le signe —.

Si l'on avoit l'équation $x^4 = 625$, on en concluroit $x = \sqrt[4]{625} = 5$; mais puisque — multiplié par —, un nombre pair de fois, donne la même chose que $+$ multiplié par $+$, -5 peut satisfaire aussi bien que $+5$; ainsi il faut écrire $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$ comme dans les équations du second degré. Si, au contraire, on avoit eu $x^4 = -625$, on auroit conclu $x = \pm \sqrt[4]{(-625)}$; mais ces deux valeurs sont imaginaires, parce qu'il n'y a aucun nombre positif ou négatif, qui, multiplié par lui-même un nombre pair de fois, puisse produire une quantité négative.

Appliquons ces équations à une question. Supposons qu'on demande de *trouver deux moyennes proportionnelles entre* 5 *et* 625. En nommant x et y ces inconnues, on aura $\div\!\div 5 : x : y : 625$, qui donne ces deux proportions. . . .

$$5 : x :: x : y$$

$$\text{et} \quad x : y :: y : 625$$

D'où l'on déduit ces deux équations, en multipliant les extrêmes et les moyens, $5y = x^2$, et $625\,x = y^2$. La première donne $y = \frac{x^2}{5}$; substituant dans la seconde, on a $625\,x = \frac{x^4}{25}$ divisant par x et multipliant par 25, on a $x^3 = 15625$, et enfin $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; donc $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

Des Équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré.

141. Ces équations ne doivent renfermer que deux puissances différentes de x, mais dont l'une ait un exposant double de celui de l'autre. Par exemple, $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, sont dans ce cas. Ces équations se résolvent comme celles du second degré; après avoir rendu la plus haute puissance positive, si elle ne l'est pas, et après avoir dégagé cette même puissance, des quantités qui la multiplient ou la divisent, on prend la moitié de ce qui multiplie la puissance inférieure de l'inconnue, et on ajoute à chaque membre le quarré de cette moitié, ce qui rend le premier membre un quarré parfait. Alors on tire la racine quarrée de chaque membre, en donnant à celle du second, le double signe $\pm$. L'équation est réduite à une équation à deux termes.

Par exemple, si l'on demandoit de *trouver deux nombres dont la somme des cubes fût* 35, *et dont le produit fût* 6; on auroit ces deux équations $x^3 + y^3 = 35$ et $xy = 6$. Cette dernière donne $y = \frac{6}{x}$, valeur qui, substituée dans la première, donne $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; chassant le dénominateur et transposant, on a $x^6 - 35x^3 = -216$.

Je prends donc la moitié de 35 qui est $\frac{35}{2}$; j'en ajoute le quarré à chaque membre, et j'ai $x^6 - 35x^3 + (\frac{35}{2})^2 = (\frac{35}{2})^2 - 216$; tirant la racine quarrée, $x^3 - \frac{35}{2} = \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}$; transposant, $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}$, et enfin tirant la racine cubique, $x = \sqrt[3]{[\frac{35}{2} \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}]}$; or $(\frac{35}{2})^2 = \frac{1225}{4}$; et $(\frac{35}{2})^2 - 216 = \frac{1225-864}{4} = \frac{361}{4}$; donc $\sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]} = \sqrt{(\frac{361}{4})} = \frac{19}{2}$. Donc $x = \sqrt[3]{(\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2})}$ qui donne ces deux valeurs $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35+19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, et $x = \sqrt[3]{(\frac{35-19}{2})} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; et puisqu'on a trouvé $y = \frac{6}{x}$, on aura $y = 2$ et $y = 3$.

Lorsque le plus haut exposant est 4 ou un multiple de 4, il peut y avoir jusqu'à quatre racines réelles.

De la composition des Équations.

142. Nous venons de voir que les équations à deux termes ne donnoient, pour l'inconnue, qu'une seule valeur réelle lorsqu'elles sont de degré impair, deux lorsqu'elles sont de degré pair; elles en donnent, outre cela, plusieurs autres qui sont imaginaires, mais qui ne sont pas moins utiles, ainsi que nous le verrons lors de la résolution des équations et ailleurs. En général, *une équation quelconque donne toujours autant de valeur pour l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le*

plus haut exposant de cette équation. De ces valeurs, qu'on nomme aussi *racines* de l'équation, les unes peuvent être positives, les autres négatives ; les unes réelles, les autres imaginaires.

143. Pour rendre toutes ces vérités sensibles, il faut observer que lorsque dans une équation on a fait passer tous les termes dans un seul membre, et que l'on a ordonné toutes les puissances de x ou de l'inconnue, on peut toujours considérer ce membre comme le résultat de la multiplication de plusieurs facteurs binomes simples qui auroient tous pour terme commun x.

Par exemple, lorsque l'équation $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$ a été mise sous la forme suivante, par la transposition de ses termes.. $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, on conçoit que $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, peut très-bien résulter de la multiplication de trois facteurs binomes simples $x - a$, $x - b$, $x - c$.

En effet, si on multiplie ces trois facteurs, on aura

$$\begin{aligned} x^3 - a x^2 &+ a b x - a b c = 0. \\ - b x^2 &+ a c x \\ - c x^2 &+ b c x. \end{aligned}$$

Or pour que ces deux équations soient les mêmes, il ne s'agit que de trouver pour a, b, c, des valeurs telles que $a + b + c = 8$, $ab + ac + bc = 7$, et $abc = 9$.

Pour trouver chacune de ces quantités, a, par exemple; aprés avoir multiplié la première équation par a^2, et la deuxième par a, ce qui donnera $a^3 + a^2 b + a^2 c = 8 a^2$, $a^2 b + a^2 c + a b c = 7 a$, et $a b c = 9$, il faut, dis-je, retrancher la seconde de la première, et y ajouter la troisième; ce qui donne $a^3 = 8 a^2 - 7 a + 9$, ou, en transposant $a^3 - 8 a^2 + 7 a - 9 = 0$.

On trouvera de la même manière, que l'équation qui donneroit b, est $b^3 - 8 b^2 + 7 b - 9 = 0$, et que celle qui donneroit c, est $c^3 - 8 c^2 + 7 c - 9 = 0$. Ce qui nous fournit les propositions suivantes.

144. 1°. Puisque l'équation qui doit donner a, est la même que celle qui doit donner b, et la même que celle qui doit donner c; et que d'ailleurs il est facile de voir que les valeurs de a, b, c ne peuvent être égales, il faut donc, que l'une quelconque de ces trois équations, puisse donner les valeurs de a, de b et de c; donc chacune de ces équations doit avoir trois racines, dont l'une sera la valeur de a; la seconde, la valeur de b, et la troisième, la valeur de c.

2°. Chacune de ces équations est la même que l'équation même proposée $x^3 - 8 x^2 + 7 x - 9 = 0$, à la seule différence près, que a, ou b, ou c, est changé en x. Donc celle-ci doit avoir trois racines, et ces trois racines doivent être les trois valeurs de a, b, c.

Donc les quantités qu'il faut mettre pour a, b, c dans $x - a$, $x - b$, $x - c$, pour produire l'équation $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, par la multication de ces facteurs simples, sont les racines mêmes de cette équation.

145. Si les coëfficiens des différentes puissances de x, au lieu d'être 8, 7, etc. étoient d'autres nombres, et si l'équation, au lieu d'être du troisième degré, étoit du quatrième, du cinquième, etc. les conséquences que nous venons de tirer, seroient encore de même nature. Ainsi, si l'on avoit en général $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, p, q, r, s étant des nombres connus, on pourroit, de même, considérer cette équation, comme formée du produit de quatre facteurs simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$. En effet, ces quatre facteurs étant multipliés, donneroient. . . . .

$$\begin{array}{llllll} x^4 & - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd & = 0: \\ & - bx^3 & + acx^2 & - abdx & & \\ & - cx^3 & + adx^2 & - acdx & & \\ & - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & & \\ & & + bdx^2 & & & \\ & & + cdx^2 & & & \end{array}$$

Or pour que cette équation soit la même que

$x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, il faut que a, b, c, d soient telles que l'on ait $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$.

Si l'on multiplie la première de ces équations par a^3, la seconde par a^2, la troisième par a, et qu'on retranche la seconde et la quatrième, de la première et de la troisième réunies, on aura $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra - s$, ou $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$; on trouveroit de même que l'équation en b, est $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; que l'équation en c est $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$, et que l'équation en d est $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. Ainsi l'équation qui donnera a, doit donc aussi donner b, c et d; elle doit donc avoir quatre racines qui seront la valeur des quatre quantités a, b, c, d. Et comme chacune de ces équations est la même que l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, les quantités a, b, c, d qu'il faut prendre pour produire cette dernière par la multiplication de quatre facteurs simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, sont donc les racines mêmes de cette équation.

146. Donc, en général, 1°. *une équation de degré quelconque peut toujours être considérée comme formée du produit d'autant de facteurs binomes*

simples, qui ont tous pour terme commun la lettre qui représente l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'inconnue. 2°. Les seconds termes de ces binomes, sont les racines de cette équation, chacune étant prise avec un signe contraire.

147. Si l'équation, au lieu d'avoir ses termes alternativement positifs et négatifs, comme nous l'avons supposé ci-dessus, dans l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, avoit toute autre succession de signes, par exemple, si elle étoit $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$; on n'en démontreroit pas moins, et de la même manière, qu'elle peut toujours être représentée par $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$; a, b, c, d étant les racines de cette dernière équation.

148. Puisque a, b, c, d, etc. sont les racines de l'équation, il suit des équations $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$; 1°. que dans l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; et en général dans toute équation, *le coëfficient* — p *du second terme, pris avec un signe contraire, c'est-à-dire,* + p, *est égal à la somme de toutes les racines.*

2°. Que *le coëfficient* q *du troisième terme est* *égal à la somme des produits de ces racines multipliées deux à deux.*

3°. Que *celui du quatrième, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines multipliées trois à trois;* et ainsi de suite, et qu'*enfin le dernier terme, est le produit de toutes les racines.*

Cela est général, quels que soient les différens signes des termes de l'équation, prenant toujours avec un signe contraire, le coëfficient de chaque terme de numéro pair.

D'où il suit, que *dans une équation qui n'a pas de second terme, il y a sûrement des racines positives et des racines négatives, et la somme des unes est égale à la somme des autres.*

Ainsi dans l'équation $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, la somme des trois racines est -2; la somme de leurs produits, multipliés deux à deux, est -23; la somme de leurs produits, trois à trois, ou le produit des trois racines est $+60$. En effet, les trois racines sont $+5$, -4, -3, ainsi qu'on peut le voir en mettant chacun de ces nombres, au lieu de x, dans l'équation; car chacun réduit le premier membre à zéro. Or il est évident que la somme de ces trois nombres, c'est-à-dire, $+5-4-3$ est -2; que la somme de leurs produits deux à deux, ou $-20-15+12$, est -23; et que le produit des trois, est $5 \times -4 \times -3$, c'est-à-dire $+60$.

Pareillement, dans l'équation $x^3 - 19x + 30 = 0$, comme le second terme manque, je conclus qu'il y a des racines positives et des racines négatives, et que la somme des unes est égale à la somme des autres ; en effet, les trois racines sont $+2$, $+3$ et -5.

149. En considérant une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs binomes simples, on se rend aisément raison, comment il peut se faire qu'il y ait plusieurs nombres différens qui satisfassent à une équation. Par exemple, si l'on proposoit cette question, *trouver un nombre tel que si on en retranche 5, et qu'à ce même nombre on ajoute successivement les nombres 4 et 3, les deux sommes multipliées entr'elles, et par le reste, fassent zéro :* on aura, en nommant x ce nombre, $x-5$ pour le reste et $x+4$, $x+3$ pour les deux sommes ; il faut donc que $(x+4)\times(x+3)\times(x-5)=0$, c'est-à-dire, que $x^3+2x^2-23x-60=0$; or on voit évidemment que ce produit ou son égal $(x+4)\times(x+3)\times(x-5)$ peut devenir zéro dans trois cas différens ; savoir si $x=-4$, si $x=-3$, et si $x=5$. En effet, dans le premier cas, il devient $0\times(-4+3)\times(-4-5)$ ou 0 ; dans le second, il devient $(-3+4)\times(0)\times(-3-5)$ ou 0, et dans le troisième, $(5+4)\times(5+3)\times(0)$ ou 0. Or quand on propose une équation telle que $x^3+2x^2-23x-60=0$, rien ne détermine à prendre -4 plutôt que -3, ou plutôt que $+5$, puisque chacun réduisant éga-

lement le premier membre, à zéro, satisfait également à l'équation.

150. Nous placerons encore ici une autre remarque qui peut avoir son utilité. Les équations $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, nous ont, toutes, conduit à la même équation, soit pour avoir a, soit pour avoir b, soit, etc. La raison en est que a, b, c, d, étant toutes disposées de la même manière dans chaque équation, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par aucune opération différente de celles qui détermineroient l'autre ; donc en général, si dans la recherche de plusieurs quantités inconnues, on est obligé d'employer pour chacune, les mêmes raisonnemens, les mêmes opérations et les mêmes quantités connues, toutes ces quantités seront nécessairement racines d'une même équation ; et par conséquent cette question conduira à une équation composée.

151. Puisqu'on peut considérer une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on peut aussi la considérer comme formée du produit de plusieurs facteurs composés.

Ainsi une équation du troisième degré peut être considérée comme formée du produit d'un facteur du second degré, tel que $x^2 + ax + b$, par un facteur du premier, tel que $x + c$: en effet, $x^2 + ax + b$ peut toujours représenter le produit des deux autres facteurs simples.

De même, une équation du quatrième degré peut être considérée comme formée, ou du produit de quatre facteurs simples, ou de deux facteurs du second degré, ou d'un facteur du troisième et d'un facteur du premier.

152. Et puisqu'une équation du second degré peut avoir des racines imaginaires, les équations de degrés supérieurs au second, peuvent donc aussi avoir des racines imaginaires.

Des transformations qu'on peut faire subir aux Équations.

153. On peut faire subir aux équations différentes transformations, dont il est à propos que nous parlions avant de passer à la résolution de ces mêmes équations.

154. *Si l'on change dans une équation les signes des termes qui renferment des puissances impaires, les racines positives de cette équation seront changées en négatives, et les négatives en positives.*

En effet, pour changer les signes des racines de l'équation, il suffit de mettre $-x$ au lieu de $+x$; or cette substitution ne change point les signes des termes qui renferment des puissances paires de x, et change, au contraire, les signes de ceux qui renferment des puissances impaires.

155. *Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, et cela sans donner un coëfficient au premier terme*, il faut substituer au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs ; et multiplier ensuite toute l'équation par le dénominateur qu'aura alors le premier terme.

Par exemple, si j'ai $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$; je ferai $x = \frac{y}{mnp}$; et substituant dans l'équation, j'aurai $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; multipliant par $m^3n^3p^3$, j'ai $y^3 + \frac{am^3n^3p^3y^2}{m^3n^2p^2} + \frac{m^3n^3p^3c}{mn^2p}y + \frac{m^3n^3p^3d}{p} = 0$; et faisant les divisions indiquées, $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

156. Si m, n et p étoient égaux, il suffiroit de faire $x = \frac{y}{m}$. D'où il suit que pour changer une équation dont tous les coëfficiens sont des nombres entiers, mais dont le premier terme a un coëfficient, en une autre dans laquelle celle-ci n'en ait plus, et où les autres aient néanmoins des entiers pour coëfficiens, il faut faire $x = \frac{y}{m}$, m marquant ce coëfficient du premier terme. En effet, si j'ai l'équation $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$; en divisant par m,

j'aurai $x^3 + \frac{a}{m} x^2 + \frac{b}{m} x + \frac{c}{m} = 0$, où tous les dénominateurs sont égaux.

157. *Pour faire disparoître le second terme d'une équation*, il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coëfficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, et divisé par l'exposant du premier.

En effet, représentons, en général, cette équation, par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots k = 0$. Si on suppose $x = y + s$, on aura deux équations et trois inconnues; on sera donc maître de déterminer l'une d'entr'elles, par telles conditions que l'on voudra.

Or si l'on substitue, dans chaque terme, au lieu de la puissance de x qu'il renferme, une puissance semblable de $y + s$, on aura (126) une suite de termes telle que celle-ci,

$$\begin{array}{llll} y^m + msy^{m-1} & + m.\frac{m-1}{2}.s^2y^{m-2} & \text{etc.} \ldots + k = 0. \\ \quad + ay^{m-1} & + (m-1).asy^{m-2} & \text{etc.} \\ & + by^{m-2} & \text{etc.} \end{array}$$

Si donc nous regardons y comme l'inconnue, il est évident que cette équation sera sans second terme, si s est telle que l'on ait $ms + a = 0$, c'est-à-dire, si l'on prend $s = \frac{-a}{m}$, qui est la valeur que cette équation donne pour s. Or nous venons de voir que nous pouvions prendre pour l'une des trois inconnues, et par conséquent pour s, telle valeur que nous jugerions à propos; puis donc que $\frac{-a}{m}$ est la valeur qu'il faut lui donner pour que l'équation en y soit sans second terme; il s'en suit que pour changer l'équation proposée $x^m + ax^{m-1} +$, etc. en une autre qui n'ait point de second terme, il faut faire $x = y - \frac{a}{m}$, ce qui démontre la règle que nous venons de donner.

Par exemple, pour faire disparoître le second terme de l'équation $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$; je fais $x = y - \frac{6}{3}$, c'est-à-dire, $x = y - 2$. En substituant, j'aurai.................

$$\begin{array}{rrrr} y^3 - 6y^2 & + 12y & - 8 & = 0, \\ + 6y^2 & - 24y & + 24 & \\ & - 3y & + 6 & \\ & & + 4 & \end{array}$$

qui se réduit à $y^3 - 15y + 26 = 0$, équation qui n'a point le second terme y^2.

De la Résolution des Équations composées.

158. Nous supposerons, dans tout ce que nous allons dire, qu'on ait fait passer dans un seul membre, tous les termes de l'équation.

Résoudre généralement une équation d'un degré quelconque, telle que $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \ldots k = 0$, c'est trouver pour l'inconnue autant de valeurs qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette inconnue, et dont chacune

chacune soit exprimée par les lettres p, q, etc. k combinées entre elles de quelque manière que ce soit ; telle cependant que chacune de ces valeurs substituées au lieu de x dans l'équation, réduise le premier membre à zéro, indépendamment de toute valeur particulière de p, q, etc.

Nous bornerons au troisième degré, l'application de la méthode que nous allons donner, quoiqu'elle s'étende indéfiniment à tous les degrés, et par conséquent au quatrième. Mais pour celui-ci, nous emploierons une méthode fondée sur les mêmes principes, mais plus expéditive. Chacune de ces méthodes consiste à considérer l'équation qu'il s'agit de résoudre, comme le résultat de deux équations à deux inconnues. On peut toujours parvenir à réduire ces deux-ci à une seule, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Il s'agit donc de les choisir telles que l'élimination produise une équation que l'on puisse supposer la même que l'équation proposée. Nous allons voir quelles elles doivent être pour cet effet.

Quoique cette méthode n'exige pas qu'on fasse disparoître le second terme de l'équation proposée, cependant les calculs étant plus simples, lorsqu'il n'y a pas de second terme, nous supposerons qu'on a fait évanouir celui-ci, par la méthode donnée (157).

Ainsi nous supposerons que $x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} +$ etc. $+ k = 0$, est en général l'équation qu'il s'agit de résoudre.

On prendra les deux équations... $y^m - 1 = 0$. et $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} +$ etc. .. $+ x = 0$, a, b, c, etc. étant des quantités inconnues que l'on déterminera comme il va être dit.

Par le moyen de ces deux dernières, on éliminera y, ce qui conduira à une équation en x, qui sera du degré m, et n'aura point de second terme.

Les coëfficiens des différentes puissances de x, seront composés de a, b, c et leurs puissances.

On égalera chaque coëfficient au coëfficient de pareille puissance de x dans l'équation proposée $x^m + px^{m-2} +$ etc. ce qui donnera autant d'équations pour déterminer a, b, c, etc. qu'il y a de ces quantités. Lorsque a, b, c, etc. auront été déterminés, on aura toutes les racines ou valeurs de x, en substituant dans l'équation $ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} + dy^{m-4} +$ etc..... $+ x = 0$, ces valeurs de a, b, c, etc. et mettant successivement pour y, chacune des racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, qui sont faciles à déterminer, comme nous le verrons par la suite.

Application au troisième Degré.

159. Soit donc $x^3 + px + q = 0$, l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Je prends $y^3 - 1 = 0$, et $ay^2 + by + x = 0$. Pour chasser y, je multiplie cette dernière par y, et mettant pour y^3, sa valeur 1 tirée de l'équation $y^3 - 1 = 0$, j'ai $by^2 + xy + a = 0$. Je multiplie de même celle-ci par y, et mettant encore pour y^3, sa valeur 1, j'ai $xy^2 + ay + b = 0$.

Ainsi, j'ai les trois équations

$$ay^2 + by + x = 0,$$
$$by^2 + xy + a = 0,$$
$$xy^2 + ay + b = 0.$$

Par le moyen des deux premières, je prends la valeur de y^2 et celle de y, selon la méthode des équations du premier degré, à deux inconnues; j'ai $y^2 = \frac{xx - ab}{bb - ax}$ et $y = \frac{aa - bx}{bb - ax}$.

Je substitue ces valeurs dans la troisième équation $xy^2 + ay + b = 0$; j'ai $\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{bb - ax} + b = 0$, ou, chassant le dénominateur, et réduisant,

$$x^3 - 3abx + a^3 \atop \qquad\qquad\quad + b^3 = 0.$$

Comparant cette équation avec $x^3 + px + q = 0$; il faut, pour qu'elles soient les mêmes, que $-3ab = p$, et $a^3 + b^3 = q$; ce sont-là les deux équations qui donneront a et b.

La première donne $b = -\frac{p}{3a}$; substituant dans la seconde, on a $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, ou en multipliant par a^3, et transposant, $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$, équation qu'on peut (141) résoudre comme une équation du second degré, et qui par conséquent deviendra. . . . . $a^6 - qa^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, puis $a^3, - \frac{1}{2}q = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; transposant, $a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, et enfin $a =$* $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Pour avoir b, je mets dans l'équation $a^3 + b^3 = q$, la valeur de a^3, que nous venons de trouver, et j'ai $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} + b^3 = q$, et par conséquent $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; donc $b = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Or l'équation $ay^2 + by + x = 0$, donne $x = - ay^2 - by$; on a donc $x = - y^2 \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} - y\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, qui renferme les trois racines.

Il ne s'agit donc plus que de connoître les valeurs de y. Or l'équation $y^3 - 1 = 0$, donne $y^3 = 1$, et par conséquent, en tirant la racine cubique, $y = 1$. Pour avoir les deux autres racines, je divise (151) $y^3 - 1$ par $y - 1$, et j'ai $y^2 + y + 1$, qui étant égale à zéro, donne l'équation qui renferme les deux autres racines. Cette équation $y^2 + y + 1 = 0$ étant résolue, donne $y = \frac{-1 \pm \sqrt{(-3)}}{2}$; les trois valeurs de y sont donc $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}$. Substituant successivement ces valeurs, dans $x = - y^2 \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]}$;

* Je ne donne ici qu'un seul signe au second radical, parce que je n'ai besoin que d'une valeur de a; il importe peu laquelle; chacune satisfait également.

$-y\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]}$, et faisant attention que $\left(\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}\right)^2$ se réduisent, le premier à $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, et le second à $\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}$, on a ces trois valeurs de x,

$$x = -\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]}.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]} + \frac{1-\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]}.$$

$$x = \frac{1-\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]} + \frac{1+\sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{\left(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3\right)}\right]}.$$

160. En considérant les trois valeurs de x que nous venons de trouver, on voit que tant que p sera positif, la quantité $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$ sera toujours positive, parce que $\frac{1}{4}q^2$ qui est le quarré de $\frac{1}{2}q$ sera toujours positif, quand même q seroit négatif. Cette même quantité sera encore positive, tant que $\frac{1}{4}q^2$ sera plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, p étant négatif. Dans ces deux cas, les deux dernières valeurs de x sont imaginaires. Car les deux radicaux cubes étant alors des quantités réelles et inégales, leur produit par les quantités $\sqrt{(-3)}$ et $-\sqrt{(-3)}$ de signe contraire, ne se détruiront pas mutuellement; ainsi il restera de l'imaginaire dans chacune de ces deux valeurs de x. Il n'y a donc alors que la première valeur de x, qui soit réelle.

161. Mais si p étant négatif, $\frac{1}{27}p^3$ se trouvoit plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, alors $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ seroit une quantité négative,

et la quantité $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ seroit imaginaire ; néanmoins les trois valeurs de x sont alors réelles.

Quoiqu'on soit sûr qu'alors les trois racines sont réelles, on n'a pu néanmoins jusqu'à présent les avoir sous une forme réelle, que par approximation. Il faudra donc dans ce cas avoir recours à la méthode d'approximation dont nous parlerons dans peu. Ce cas est ce qu'on appelle le *cas irréductible.*

Voyons un exemple du premier cas.

Supposons qu'on demande les racines de l'équation $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$; je commence par faire disparoître (157) son second terme, en faisant $y = x - 2$; cela réduit l'équation à $x^3 - 15x + 26 = 0$; or nous avons représenté toute équation du troisième degré, sans second terme, par $x^3 + px + q = 0$; nous avons donc $p = -15$, $q = 26$; donc $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; $\frac{1}{3}p = -5$ et $\frac{1}{27}p^3 = -125$; donc $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$ $= \sqrt{(169 - 125)} = \sqrt{(44)}$; les trois valeurs de x seront donc

$$x = -\sqrt[3]{\left[13 + \sqrt{(44)}\right]} - \sqrt[3]{\left[13 - \sqrt{(44)}\right]}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[13 + \sqrt{(44)}\right]} + \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[13 - \sqrt{(44)}\right]}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[13 + \sqrt{(44)}\right]} + \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[13 - \sqrt{(44)}\right]}.$$

C'est-à-dire, que la première est négative, et les deux autres imaginaires.

Pour le quatrième Degré.

162. Pour appliquer la méthode précédente au quatrième

degré, on prendroit les deux équations $y^4 - 1 = 0$, et $y^3 + ay^2 + by + x = 0$. Multipliant celle-ci trois fois consécutives par y, et substituant à mesure, pour y^4 sa valeur 1, on auroit quatre équations en y et x, de trois desquelles tirant les valeurs de y^3, y^2 et y, et les substituant dans la quatrième, on auroit une équation du quatrième degré en x, que l'on compareroit terme à terme, comme ci-devant, avec l'équation générale du quatrième degré.

163. Mais la résolution sera encore plus facile en prenant les deux équations $y^2 - 1 = 0$, et $y(ax + b) + x^2 + c = 0$. Multipliant cette dernière par y, et substituant pour y^2 sa valeur 1, on a les deux équations

$$y(ax + b) + x^2 + c = 0.$$
$$y(x^2 + c) + ax + b = 0.$$

Substituant dans la seconde, la valeur de y, tirée de la première, on a, toute réduction faite,

$$\begin{array}{l} x^4 + 2cx^2 - 2abx + cc = 0. \\ \quad\;\; - aax^2 \qquad\qquad - bb \end{array}$$

Qui étant comparée avec l'équation générale du quatrième degré $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, donne $2c - aa = p$, $-2ab = q$, $cc - bb = r$. De ces trois équations, la première donne $c = \frac{p + aa}{2}$; la seconde, $b = \frac{-q}{2a}$; substituant dans la troisième, on a toute réduction faite,

$$a^6 + 2pa^4 + (pp - 4r)a^2 - qq = 0.$$

Équation qui, quoique du sixième degré, se résout néanmoins comme une du troisième, parce qu'elle ne renferme que des puissances de a^2.

Ayant donc trouvé a^2 par la méthode donnée (159), on aura a, et par conséquent b et c, par les équations $b = \frac{-q}{2a}$, et $c = \frac{p + aa}{2}$. Alors l'équation... $y(ax + b) + x^2 + c = 0$, étant résolue en regardant

y, a, b et c comme connues, donnera pour chaque valeur de y, deux valeurs de x. Et comme l'équation $y^2 - 1 = 0$, ou $y^2 = 1$, donne pour y, les deux valeurs $y = 1$, et $y = -1$, en mettant successivement ces deux valeurs pour y, on aura les quatre valeurs de x.

Des Diviseurs commensurables des Équations.

164, Lorsque parmi les racines de l'équation, il doit y en avoir de commensurables, on peut les avoir plus facilement que par la résolution générale de l'équation, d'aprés les réflexions et la méthode suivante.

165. Comme le dernier terme d'une équation est le produit de toutes les racines (148), aucun nombre ne peut donc être la valeur commensurable de x dans une équation, qu'autant qu'il sera diviseur exact du dernier terme. On pourroit donc prendre successivement tous les diviseurs du dernier terme, et les substituer successivement tant en + qu'en —, (car x peut avoir aussi-bien des valeurs négatives comme des positives), au lieu de x dans l'équation : alors le diviseur qui, substitué ainsi, réduiroit toute l'équation à zéro, seroit la valeur de x.

Mais cette opération seroit souvent très-longue; nous allons faire voir à quel caractère on distingue ceux qu'on doit admettre et ceux qu'on doit rejeter ; mais auparavant, il faut exposer comment on trouve tous les diviseurs d'un nombre.

166. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, il faut le diviser successivement par les nombres premiers par lesquels il pourra être divisé, en commençant par les plus simples, et continuer de diviser par le même nombre tant que cela se pourra. Alors on écrit à part et sur une même ligne tous ces nombres premiers, et chacun autant de fois qu'il a pu diviser. On les multiplie ensuite, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc. ces produits et les nombres premiers qu'on a trouvés, et l'unité, forment tous les diviseurs cherchés.

Par exemple, veut-on avoir tous les diviseurs de 60.

Je divise 60 par 2, ce qui me donne 30 ; je divise 30 par 2, ce qui me donne 15 ; je divise 15 par 3, ce qui me donne 5 ; enfin je divise 5 par 5, ce qui me donne 1. Ainsi les diviseurs premiers sont 2, 2, 3, 5 ; je les multiplie deux à deux, ce qui me donne 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Je les multiplie trois à trois, et j'ai, 12, 20, 30, 30 ; enfin les multipliant quatre à quatre, j'ai 60.

Rassemblant tous ces diviseurs, en rejettant cependant ceux qui se trouvent répétés, j'ai, en y comprenant l'unité qui est diviseur de tout nombre,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

167. Supposons maintenant qu'on veut avoir les diviseurs commensurables d'une équation, lorsqu'elle en a. Par exemple, d'une équation du quatrième degré, représentée généralement par $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Représentons ce diviseur par $x + a$; alors l'équation proposée peut donc (151) être considérée comme ayant été formée de la multiplication de $x + a$ par un facteur du troisième degré, tel que $x^3 + kx^2 + mx + n$; multiplions donc ces deux facteurs l'un par l'autre ; nous aurons

$$\begin{array}{l} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an = 0 \\ \quad\; + ax^3 + akx^2 + amx, \end{array}$$

qui devant être la même chose que $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, donne les équations suivantes, $k + a = p$, $m + ak = q$, $n + am = r$, $an = s$, ou $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r-n}{a}$, $k = \frac{-m}{a}$, $1 = \frac{p-k}{a}$.

Supposons donc maintenant qu'ayant pris pour a un des diviseurs du dernier terme, je veux savoir s'il peut être admis ; les équations $n = \frac{s}{a}$, $m = \frac{r-n}{a}$, etc. me disent ; divisez le dernier terme de l'équation par ce diviseur ; retranchez le quotient, du coëfficient de x, et divisez le reste par ce même diviseur ; retranchez ce second quotient du coëfficient de x^2, et divisez le reste, encore, par le même diviseur ; et continuez toujours de même jusqu'à ce que vous soyez arrivé au coëfficient du second terme de l'équation, pour lequel vous devez trouver 1 pour quotient. Si le diviseur que vous avez pris, satisfait à toutes ces divisions, il peut sûrement être pris pour a ; mais si l'une seulement de ces divisions ne peut être faite exactement, le nombre que vous avez choisi doit être rejeté.

Comme l'unité est toujours diviseur de tout nombre, il est visible qu'il faudra aussi tenter l'unité, tant en $+$ qu'en $-$; mais on aura plutôt fait pour celle-ci de l'examiner en substituant successivement $+1$ et -1 au lieu de x dans l'équation ; substitution qui est très-facile, puisque toute puissance de $+1$ est $+1$, et que toute puissance paire de -1 est $+1$, et toute puissance impaire, -1. Si ni l'une ni l'autre de ces deux substitutions ne donnent 0 pour résultat, alors a ne peut être ni $+1$, ni -1.

Cela posé, voici comment on procédera à l'examen de tous les diviseurs du dernier terme, autres que l'unité.

Supposons qu'on demande si l'équation $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$, a quelque diviseur commensurable ; je cherche les diviseurs du dernier terme 15, autres que l'unité ; les ayant trouvés, je les écris par ordre de grandeur (en les prenant tant en + qu'en —), comme on le voit ici à la première ligne des nombres.

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0.$$

Diviseurs de 15...	+ 15,	+ 5,	+ 3,	— 3,	— 5,	— 15
	+ 1,	+ 3,	+ 5,	— 5,	— 3,	— 1
	— 21,	— 23,	— 25,	— 15,	— 17,	— 19
			+ 5			
			+ 18			
			— 6			
			— 3			
			+ 1			

Je divise le dernier terme + 15 par chacun des nombres de la première ligne, et j'écris les quotiens, pour seconde ligne.

Je retranche chaque terme de la seconde ligne, du coëfficient de x, c'est-à-dire, de — 20, et j'écris les restes pour la troisième ligne.

Je divise chaque terme de celle-ci par le terme correspondant de la première ligne, et à mesure que je trouve un quotient exact, je l'écris. Ici je n'en trouve qu'un, savoir + 5 ; ainsi je suis sûr qu'il ne peut y avoir qu'un diviseur commensurable. Mais soit qu'il n'y ait qu'un quotient exact, soit qu'il y en ait plusieurs, on continuera en cette manière.

Je retranche chaque quotient, du coëfficient 23 de x^2, et j'écris les restes pour cinquième ligne ; c'est ici + 18.

Je divise, de même que ci-devant, chacun de ces restes par le terme correspondant de la première ligne, et j'écris chaque quotient au-dessus ; c'est ici — 6.

Je retranche chacun de ces nouveaux quotiens, du coëfficient — 9 de x^3 ; j'écris les restes au-dessous ; c'est ici — 3.

Enfin je divise ceux-ci, encore par le terme correspondant de la première suite. Je trouve pour quotient + 1 ;

d'où je conclus que le terme correspondant — 3, de la première ligne est a; et que par conséquent le diviseur $x + a$, est $x - 3$; c'est-à-dire, que $x - 3$ divise l'équation; donc $x = 3$ est la valeur commensurable de x dans l'équation proposée.

De la manière d'approcher des racines des Équations composées.

168. La méthode que nous allons exposer pour approcher de la valeur de l'inconnue dans les équations, suppose qu'on ait déjà une valeur de cette racine, approchée seulement jusqu'à sa dixième partie près. Voyons donc comment on peut se procurer cette première valeur. Prenons pour exemple, l'équation $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Je substitue dans cette équation, au lieu de x, plusieurs nombres, tant positifs que négatifs, jusqu'à ce que deux substitutions consécutives me donnent deux résultats de signes contraires. Lorsque j'en ai rencontré deux de cette qualité, je conclus que la valeur de x est entre les deux nombres qui, substitués au lieu de x, ont donné ces deux résultats, en sorte que si ces deux nombres ne diffèrent l'un de l'autre que de la dixième partie de l'un d'entre eux, j'ai la valeur approchée que je cherche, en prenant l'un ou l'autre, ou un milieu entre eux.

Mais s'ils diffèrent davantage, alors j'opère comme on va le voir.

Je substitue dans l'équation $x^3 - 5x + 6 = 0$, les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc. mais je m'aperçois bientôt qu'ils donnent tous des résultats positifs, et que cela iroit toujours de même à l'infini. C'est pourquoi je substitue les nombres 0 — 1, — 2, — 3, etc. ce qui me donne les résultats suivans.

Subtitutions.	*Résultats.*
0	+ 6
— 1	+ 10
— 2	+ 8
— 3	— 6.

Je m'arrête donc à ces deux derniers, et je conclus que l'une des racines est entre — 2 et — 3. Mais comme ces nombres diffèrent de 1, qui est plus grand que la dixième partie de chacun, je prends un milieu entre les deux nombres, c'est-à-dire, que je prends la moitié — 2,5 de leur somme — 5. Je substitue — 2,5, au lieu de x dans l'équation, et je trouve pour résultat + 2,875, c'est-à-dire une quantité positive; je conclus donc que la racine est entre — 2, 5 et — 3.

Je prends un milieu entre — 2, 5 et — 3; c'est — 2,7, en négligeant au-delà des dixièmes.

Je substitue — 2,7 dans l'équation, au lieu de x, je trouve pour résultat — 0,183, c'est-à-dire, une quantité négative. Donc puisque — 2,5 a donné un résultat positif, et que — 2,7 en donne un négatif, la valeur de x, est entre — 2,5 et — 2,7; or ces deux nombres ne diffèrent que de 0,2 qui est plus petit que le dixième de chacun d'eux; donc la valeur de x est (en prenant un milieu entre deux) — 2,6 à moins d'un dixième près.

Ayant ainsi trouvé un nombre qui ne diffère pas de x, d'un dixième de la valeur de cette même quantité, je suppose x égal à ce nombre plus une nouvelle inconnue z; c'est-à-dire ici, je suppose $x = - 2,6 + z$, et je substitue cette quantité au lieu de x, dans l'équation; mais comme z

est tout au plus un dixième de la quantité 2,6; que par conséquent son quarré sera tout au plus la centième partie du quarré de celui-ci ; son cube tout au plus la millième partie du cube de celui-ci, et ainsi de suite, je néglige dans cette substitution, toutes les puissances de z au-dessus de la première ; et afin de ne pas faire de calculs inutiles, je n'admets dans la formation du cube de $-2,6+z$ (et des autres puissances s'il y en avoit) que les deux premiers termes que doit donner la règle donnée (126).

Pour substituer avec ordre, j'écris comme on le voit ici ;

$$x^3 = (-2,6+z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 . z$$
$$-5x = -5(-2,6+z) = -5(-2,6) - 5z$$
$$+6 = +6$$

Réunissant donc, j'aurai pour le résultat de la substitution, $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 . z - 5.(-2,6) - 5z + 6 = 0$, ou, en faisant les opérations indiquées, et les réductions, $15,28z + 1,424 = 0$; d'où je tire $z = -\frac{1,424}{15,28}$, qui, en réduisant en décimales, donne $z = -0,09$; quantité dans laquelle je ne pousse la division que jusqu'à un chiffre significatif seulement. En général, il ne faut la pousser, que jusqu'à autant de chiffres significatifs, (y compris le premier qu'on trouve) qu'il y a de places entre celui-ci et le premier chiffre de la première valeur approchée de x; ici entre 9 (qui est le premier chiffre significatif du quotient 0,09) et 2 (qui est le premier chiffre de 2,6) première valeur approchée de x, il n'y a qu'une place ; c'est pourquoi, je m'arrête au premier chiffre significatif 9.

La valeur de x, savoir $x = -2,6 + z$, devient donc $x = -2,6 - 0,09$, c'est-à-dire, $x = -2,69$.

Pour avoir cette valeur de x plus exactement, je suppose actuellement $x = -2,69 + t$;

J'aurai donc
$$\begin{aligned} x^3 &= (-2{,}69)^3 + 3\,(-2{,}69)^2 \cdot t \\ -5x &= -5\,(-2{,}69) - 5t \\ +6 &= +6 \end{aligned}$$

Et par conséquent, après les opérations faites, $-0{,}015109 + 16{,}7083\,t = 0$; d'où je tire $t = \frac{0{,}015109}{16{,}7083}$, qui revient à $t = 0{,}000904$.

La valeur de x, savoir $x = -2{,}69 + t$, devient donc $x = -2{,}69 + 0{,}000904 = -2{,}689096$.

Si l'on veut pousser plus loin, on fera............. $x = -2{,}689096 + u$, et on se conduira de la même manière.

SECONDE

SECONDE SECTION,

Dans laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique et à la Géométrie.

169. LORSQU'ON a représenté d'une manière générale chacune des quantités, soit connues, soit inconnues, qui entrent dans une question, et que l'on a exprimé, par des équations, toutes les conditions qu'elle renferme, on peut alors abandonner totalement de vue la question, pour s'occuper uniquement de ces équations et de l'application des règles qui leur conviennent. Alors si l'on a bien présent à l'esprit ce que l'on est convenu d'entendre, soit par les signes, soit par la disposition des lettres, chaque équation devient, comme un livre, où l'on peut lire, avec plus de facilité, les différens rapports qui lient les quantités les unes aux autres. On peut, par différentes applications des règles exposées dans la première section, donner à ces équations de nouvelles formes qui rendent encore ces rapports plus faciles à saisir. En un mot, on peut les considérer comme le dépôt des propriétés de ces quantités, et des solutions générales d'un grand nombre de questions qu'on n'avoit point

en vue, qu'on ne soupçonnoit pas même tenir de si près à la question principale.

En effet, puisque les règles qui servent à trouver les valeurs des inconnues, ont toutes pour objet de ramener chaque quantité inconnue à former seule le premier membre d'une équation dont le second seroit composé de toutes les autres quantités, et que ces règles sont évidemment applicables à chacune des quantités qui entrent dans ces équations, il est visible qu'on peut toujours, par ces mêmes règles, parvenir à avoir seule dans un membre, l'une quelconque des quantités qui entrent dans une équation, et n'avoir que les autres dans le second membre. Alors on est dans le même cas que si l'on avoit eu à résoudre la question où toutes ces dernières seroient connues, et celle-là seule, inconnue. On voit donc qu'une même équation résout autant de questions différentes qu'elle renferme de quantités différentes. Rendons cela sensible, par des exemples.

Propriétés générales des Progressions arithmétiques.

170. Nous avons vu (*Arith.* 190) qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique croissante, étoit composé du premier, plus autant

de fois la différence commune, qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.

Si donc on représente par a la valeur numérique du premier terme ; par u, celle du terme dont il s'agit ; par d, la différence commune, ou la raison de la progression ; et enfin par n, le nombre total des termes ; alors le nombre des termes qui précèdent le terme u, sera exprimé par $n - 1$; et la proposition que nous venons de citer, pourra se traduire en langage algébrique, par cette équation ; $u = a + (n - 1) d$, qui résout la question où connoissant la raison d d'une progression, le nombre n des termes, et la valeur a du premier, on demanderoit quelle doit être la valeur du dernier u.

Mais puisqu'il entre quatre quantités dans cette équation, je dis qu'elle résout quatre questions générales. En effet,

1°. Si l'on regarde a, comme l'inconnue et que l'on en cherche la valeur, suivant les règles de la première section, on aura $a = u - (n - 1) d$, qui nous apprend que le premier terme d'une progression arithmétique croissante se trouve en retranchant du dernier u, la différence d prise $n - 1$ de fois, c'est-à-dire, la différence prise autant de fois moins une qu'il y a de termes en tout.

2°. Si l'on regarde n comme l'inconnue, l'équation $u = a + (n - 1) d$, qui n'est autre chose que $u = a + nd - d$, donne en transposant, $nd = u - a + d$, et en divisant, $n = \frac{u-a+d}{d} = \frac{u-a}{d} + 1$, qui m'apprend que connoissant le premier terme a, le dernier u et la raison d d'une progression arithmétique, je saurai combien il y a de termes, en retranchant le premier du dernier, divisant le reste par la raison d, et ajoutant une unité au quotient. Par exemple, si je sais que le premier terme d'une progression est 5, le dernier 37, et la différence 2; de 37 je retranche 5, ce qui me donne 32 qui étant divisé par la différence 2, donne 16 auquel ajoutant 1, j'ai 17 pour le nombre des termes de cette progression.

3°. Enfin, si je regarde d comme l'inconnue dans l'équation $u = a + (n - 1) d$, j'aurai, en transposant, $(n - 1) d = u - a$, et en divisant par $n - 1$, $d = \frac{u-a}{n-1}$, qui m'apprend que pour connoître la différence qui doit régner dans une progression arithmétique dont le premier terme, le dernier et le nombre des termes sont connus, il faut retrancher le premier du dernier, et diviser le reste par le nombre des termes moins un. Cette règle revient à celle que nous avons donnée (*Arith.* 193) pour trouver un nombre déterminé de moyennes proportionnelles entre deux quantités données. Nous avons dit qu'il falloit retrancher la plus petite de la plus grande, et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité, ce qui est évidemment la même chose, puisque le nombre des moyens est moindre de deux unités que le nombre total des termes de la progression.

La seule équation $u = a + (n - 1) d$, nous donne donc la résolution de quatre questions générales ; c'est-à-dire, nous met en état de résoudre celle-ci qui les comprend toutes quatre : De ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes et la différence d'une progression arithmétique, trois quelconques étant connues, trouver la quatrième.

171. Toute autre propriété générale, énoncée aussi d'une manière générale, nous conduira par les mêmes moyens, à la résolution d'autant de questions différentes qu'il entrera de quantités dans l'énoncé de cette propriété.

Par exemple, c'est encore une propriété des progressions arithmétiques, que *pour avoir la somme de tous les termes de quelque progression arithmétique que ce soit, il faut ajouter le premier terme avec le dernier, et multiplier le résultat par la moitié du nombre des termes.*

Par exemple, pour avoir la somme des cent premiers termes de cette progression $\div$ 1 . 3 . 5 . 7, etc. dont le centième est 199 ; au dernier 199 j'ajouterois le premier terme 1, et je multiplierois le résultat 200, par 50, qui est la moitié de 100, nombre des termes ; ce qui me donne 10000 pour la somme des cent premiers nombres impairs.

Nous allons démontrer cette propriété, dans un instant ; mais pour ne point perdre de vue notre objet, si en conservant les mêmes dénominations que ci-devant, nous nommons, de plus, s la somme de tous les termes ; nous aurons pour la traduction algébrique de cette propriété $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

Cette équation nous met en état de résoudre cette question générale qui en comprend quatre. *De ces quatre choses, le premier terme, le dernier, le nombre des termes, et la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, trois étant connues, trouver la quatrième.*

En effet, 1°. si l'on connoît a, u et n, l'équation donne immédiatement la valeur de s. 2°. Si l'on connoît a, u et s ; pour avoir n, on chassera le diviseur 2, et l'on aura $2s = (a + u) \times n$ ou $(a + u) \times n = 2s$; et en divisant par $a + u$, $n = \frac{2s}{a+u}$, équation où n est connu, puisqu'on suppose que l'on connoît les quantités a, u et s qui entrent dans sa valeur. 3°. et 4°. Si l'on connoît a, s et n, ou u, s et n, et que l'on veuille avoir u ou a, on reprendra l'équation $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$; chassant la fraction, on a $2s = (a + u) \times n$; divisant par n, il vient $a + u = \frac{2s}{n}$; d'où l'on tire $u = \frac{2s}{n} - a$, qui satisfait à la première question, et $a = \frac{2s}{n} - u$, qui satisfait à la seconde.

Démontrons maintenant la propriété que nous venons de supposer.

Il est évident que si nous continuons de représenter le premier terme par a, et la différence par d, nous pouvons représenter toute progression arithmétique croissante par la suivante $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d$, etc. Concevons que, sous cette progression arithmétique, on fasse répondre terme pour terme, la même progression, mais dans un ordre renversé, on aura

$$\begin{array}{l} \div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d \\ \div a + 6d . a + 5d . a + 4d . a + 3d . a + 2d . a + d . a \end{array}$$

Comme ces deux progressions sont égales, il est évident que la somme des termes de l'une des deux, est la moitié des deux réunies; or si l'on y fait attention, on voit que les deux termes correspondans font et doivent toujours faire une même somme, et que cette somme est celle du premier et du dernier terme de la première progression, réunis; donc la totalité des deux progressions se trouvera en ajoutant le premier et le dernier terme de l'une, et prenant ce résultat autant de fois qu'il y a de termes; donc pour l'une seulement de ces deux progressions, il faudra ajouter le premier et le dernier, prendre ce résultat, seulement moitié autant de fois qu'il y a de termes, c'est-à-dire, le multiplier par la moitié du nombre des termes.

172. Les huit questions générales que nous venons de résoudre, tiennent donc à deux principes seulement, savoir, celui que nous avons énoncé (170), et celui que nous avons énoncé (171); et puisque leur résolution se tire immédiatement des deux équations qui sont la traduction algébrique de ces deux énoncés, on voit comment à l'aide de l'Algèbre, on peut faire découler d'une même source toutes les vérités qui en dépendent.

Quoique ces propriétés ne soient pas toutes également utiles, cependant commes elles sont simples, elles en sont d'autant plus propres à faire bien sentir l'usage des équations. C'est pourquoi nous continuerons d'exposer cet usage, en les prenant encore pour exemple.

Dans ce que nous venons d'exposer, nous n'avons considéré qu'une seule équation à la fois.

Mais si deux ou un plus grand nombre d'équations qui expriment des propriétés différentes de quelques quantités, se trouvent avoir quelques-unes de ces quantités qui leur soient communes, alors on peut encore en dériver un très-grand nombre d'autres propriétés, et cela avec une très-grande facilité. Par exemple, les deux équations fondamentales des progressions arithmétiques, savoir $u = a + (n - 1)\ d$ et $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, ont trois quantités communes entr'elles, savoir a, u et n. Si l'on prend successivement dans chacune de ces deux équations la valeur de l'une quelconque de ces trois quantités, et si l'on égale ensuite ces deux valeurs, on aura une nouvelle équation dans laquelle cette quantité ne sera plus, et qui exprimera le rapport que les quatre autres ont entr'elles, indépendamment de celle-là. Par exemple, si je prends dans chaque équation la valeur de a, j'aurai ces deux valeurs $a = u - (n - 1)\ d$, et $a = \frac{2s}{n} - u$; donc en égalant, j'aurai $u - (n - 1)\ d = \frac{2s}{n} - u$, équation de laquelle, en considérant successivement u, n, d et s comme inconnues, je tirerai comme ci-dessus, quatre nouvelles propriétés générales des progressions arithmétiques. Par exemple, en regardant s comme inconnue, je tirerai $s = \frac{2\,nu - n.(n - 1)\ d}{2}$, qui me donne le moyen de connoître la somme d'une progression arithmétique, par le moyen du dernier terme, de la différence, et du nombre des termes, puisqu'il n'entre que ces trois quantités et des nombres connus, dans le second membre.

Si au lieu de chasser ou d'éliminer a, nous eussions éliminé u ou n, nous aurions eu, de même, pour chaque élimination, une nouvelle équation qui auroit renfermé quatre des cinq quantités a, u, n, d, s; et en considérant successivement chacune de ces quatre quantités, comme inconnues, on tireroit de chaque nouvelle équation quatre nouvelles formules, qui sont autant d'expressions différentes des quantités a, u, n, d, s; expressions dont chacune a son utilité particulière, selon que dans la question qu'on proposera relativement aux progressions arithmétiques, on connoîtra telles ou telles de ces quantités. Par exemple, si l'on me demandoit la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, dont on me feroit connoître le premier, la différence, et le nombre des termes; alors comme le dernier terme m'est inconnu, j'éliminerois u, et j'aurois une équation qui ne renfermant plus que a, n, d et s, me feroit aisément connoître s.

Concluons de-là que les deux équations $u = a + (n - 1)\, d$ et $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$

donnent la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les progressions arithmétiques, lorsqu'on y connoît immédiatement trois des cinq quantités a, u, n, d, s.

173. Pour donner quelqu'application de ces principes, supposons qu'on demande le nombre des boulets de la base d'une pile triangulaire.

Il est clair que le nombre des boulets contenus dans chaque bande parallèle à l'un des côtés, diminue de 1 à chaque bande ; et que le nombre des bandes est le même que le nombre des boulets rangés sur un côté. Donc si on appelle n ce nombre, la totalité des boulets sera la somme de tous les termes d'une progression arithmétique croissante qui commence par 1, dont le dernier terme est n, et dont le nombre des termes est n ; elle est donc exprimée par $(n + 1) \times \frac{n}{2}$. Si le côté est de 6, par exemple, il aura 21 boulets.

Ce même principe de la formation des termes d'une progression arithmétique, peut être employé de même à trouver la surface d'un trapèze ou d'un triangle. Car imaginant la hauteur partagée en une infinité de parties égales, par des parallèles à la base, il est aisé de voir que le trapèze total sera partagé en une infinité de petits trapèzes qui iront en augmentant d'une même quantité. Il ne s'agit donc pour avoir leur totalité (171) que d'ajouter les deux extrêmes, et d'en multiplier la moitié par le nombre des termes ; mais à cause que ces trapèzes sont d'une hauteur infiniment petite, chacun peut être censé égal à sa base, multiplié par sa petite hauteur. Donc si on appelle B et b les deux bases de ces trapèzes extrêmes, h leur hauteur commune, et n le nombre des parties de la hauteur totale, on aura . . . $\frac{Bh + bh}{2} \times n$ ou $\frac{B + b}{2} \times nh$; mais nh fait la hauteur totale du trapèze; donc il faut multiplier la moitié de la somme des deux bases opposées, par la hauteur du trapèze proposé.

De la sommation des Puissances des termes d'une progression arithmétique quelconque.

174. Soient a, b, c, d, etc. plusieurs nombres en progression arithmétique, dont la différence soit r. On aura 1°. $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$, $e = d + r$.

2°. En quarrant, on aura

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + 2ar + r^2, \\ c^2 &= b^2 + 2br + r^2, \\ d^2 &= c^2 + 2cr + r^2, \\ e^2 &= d^2 + 2dr + r^2. \end{aligned}$$

3°. En cubant, on aura

$$\begin{aligned} b^3 &= a^3 + 3a^2r + 3ar^2 + r^3, \\ c^3 &= b^3 + 3b^2r + 3br^2 + r^3, \\ d^3 &= c^3 + 3c^2r + 3cr^2 + r^3, \\ e^3 &= d^3 + 3d^2r + 3dr^2 + r^3. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute maintenant, les équations des quarrés, entr'elles; et celles des cubes, aussi entr'elles, on aura, après avoir effacé les termes égaux et semblables qui se trouveront dans différens membres.

1°. $e^2 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^2$ ou $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$; et lon voit qu'en général si le nombre des quantités a, b, c, d, etc. étoit marqué par n; que la dernière fût marquée par u, et la somme de toutes ces mêmes quantités par s', on auroit $u^2 = a^2 + 2r(s' - u) + (n - 1)r^2$; car $2r$ est multiplié par toutes les quantités a, b, c, etc. excepté la dernière, et r^2 est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'équations, c'est-à-dire autant de fois moins une qu'il y a de quantités a, b, c, etc. Or cette équation renfermant s', il est aisé d'en tirer la valeur de cette quantité, et par conséquent, l'expression de la somme de tous les termes d'une progression arithmétique. Cette valeur de s' est $s' = \frac{u^2 - a^2 - (n - 1)r^2}{2r} + u$.

2°. Si l'on ajoute de même les équations des cubes, on aura, après avoir effacé les quantités semblables et égales qui se trouveront dans différens membres,

$e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$.

C'est-à-dire, $e^3 = a^3 + 3r\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2\,(a + b + c + d) + 4\,r^3$.

Où l'on voit que la quantité qui multiplie $3r$, est la somme de tous les quarrés, excepté le dernier; que la quantité qui multiplie $3r^2$, est la somme de toutes les quantités, excepté la dernière; et qu'enfin le cube r^3 a été ajouté à lui-même autant de fois qu'il y avoit d'équations, c'est-à-dire, autant de fois moins une qu'il y a de quantités; par conséquent, en général, et en nommant s'', la somme des quarrés, u le dernier terme, on aura $u^3 = a^3 + 3r\,(s'' - u^2) + 3r^2\,(s' - u) + (n - 1)\,r^3$.

Donc, connoissant le premier terme, le dernier, la différence, et le nombre des termes, on pourra avoir par le moyen de cette équation, la valeur de s'', c'est-à-dire, de la somme des quarrés; car la quantité s' a été déterminée ci-dessus. Si donc on substitue pour s', sa valeur, on aura $u^3 = a^3 + 3r\,(s'' - u^2 + 3r\left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1)\,r^2}{2}\right) + (n - 1)\,.\,r^3$, ou $2\,u^3 = 2\,a^3 + 6\,rs'' - 6\,ru^2 + 3\,ru^2 - 3\,ra^2 - 3\,.\,(n - 1)\,.\,r^3 + 2\,.\,(n - 1)\,.\,r^3$, qui, après les opérations ordinaires, donne. . . . .

$$s'' = \frac{2\,u^3 - 2\,a^3 + 3\,ru^2 + 3\,ra^2 + (n - 1)\,.\,r^3}{6\,r}.$$

Si l'on prend de même les quatrièmes puissances des équations $b = a + r$, $c = b + r$, etc. qu'on les ajoute et qu'on les traite de la même manière, on trouvera de même la somme des cubes. On s'y prendra de même pour trouver la somme des puissances plus élevées.

Si l'on suppose que la progression arithmétique dont il s'agit, soit la suite naturelle des nombres, à commencer par l'unité, c'est-à-dire, soit, 1, 2, 3, etc.

Alors on aura $a = 1$, $u = n$; car, en général, u est $= a + (n - 1) . r$, qui devient ici, $u = 1 + n - 1 = n$. La valeur de s'' deviendra donc $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, c'est-à-dire, $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n . \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}$ $= n . \frac{(n + 1) . (2n + 1)}{6}$.

175. Pour application de ces méthodes, supposons qu'on veut savoir combien il y a de boulets dans une pile quarrée dont on connoît le nombre des boulets d'un des côtés de la base. Il est évident que cette pile est composée de rangs parallèles à la base, qui sont tous des quarrés dont le côté va continuellement en diminuant de 1 à compter de la base, ou en augmentant de 1 à compter du sommet. La totalité est donc la somme des quarrés de la suite naturelle des nombres, prise jusqu'au nombre n qui marque le nombre des boulets d'un des côtés de la base; cette totalité est donc exprimée par $\frac{n . (n + 1) . (2n + 1)}{6}$; c'est-à-dire, que pour

l'avoir, il faut suivre cette règle. . . . . . . *Au nombre des boulets d'un des côtés de la base et à son double, ajoutez un; multipliez les deux résultats l'un par l'autre, et leur produit par le nombre même des boulets du côté; et prenez le sixième de ce dernier produit.* Par exemple, si la pile quadrangulaire a 6 boulets de côté, à 6 et à son double 12, j'ajoute 1, ce qui me donne 7 et 13, qui, multipliés l'un par l'autre, font 91; je multiplie celui-ci par 6, ce qui fait 546, dont le sixième 91 est le nombre des boulets de la pile.

Lorsque la pile n'a point pour base un quarré, mais un parallélogramme, il faut la concevoir partagée en deux parties (*fig.* 2) dont l'une est la pile quadrangulaire dont nous venons de parler, et dont l'autre est un prisme dont on évaluera la totalité des boulets en multipliant le nombre des boulets contenus dans le triangle CEH, par le nombre des boulets de CB ou de $AB - 1$.

176. Donc, et d'après ce qui a été dit (173), si on nomme m le nombre des boulets de l'arête supérieure AB, on aura $\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} + n . \frac{n+1}{2} . (m-1)$ pour le nombre total des boulets contenus dans la pile oblongue. Or cette quantité est

$$= n . \frac{n+1}{2} \times \left(\frac{2n+1}{3} + m - 1\right)$$

$$= n . \frac{n+1}{2} \left(\frac{3m + 2n - 2}{3}\right)$$

$$= n . \frac{n+1}{2} . \left(\frac{m + 2(m+n-1)}{3}\right).$$

Et comme il est évident que $m + n - 1$ exprime le nombre des boulets contenus dans l'arête DF ou dans sa parallèle GI, il s'ensuit que *pour avoir le nombre des boulets contenus dans une pile oblongue, il faut multiplier le nombre des*

des boulets de la face triangulaire, par le tiers de la somme des trois arêtes parallèles.

Ainsi la plus petite arête AB étant de 21, et le côté de la base triangulaire, de 8; ce qui donne $21 + 8 - 1$ ou 28 pour chacune des deux autres arêtes parallèles, j'opère comme il suit :

Côté de la base triangulaire.	8.
Ajoutant 1.	9.
Face triangulaire, ou moitié du produit.	36.
Somme des trois arêtes.	77.
Totalité des boulets (tiers du produit).	924.

177. Nous avons vu en Géométrie, que pour avoir la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il falloit multiplier la surface de la base, par le tiers de la hauteur. On peut le démontrer aussi par la formule de la somme des quarrés; mais auparavant, il faut remarquer que si dans la formule $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$, on suppose que le nombre n des termes est infini, cette formule se réduit à $s'' = \frac{n^3}{3}$, ou à cause que $u = n$, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, $s'' = \frac{u^2 n}{3} = u^2 . \frac{n}{3}$. En effet, supposer que n est infini, c'est supposer qu'il ne peut plus être augmenté par aucune quantité finie; ainsi pour que le calcul exprime la supposition que l'on fait, que n est infini, il faut nécessairement regarder $n + 1$ et n, comme étant la même chose, $2n + 1$ et

$2n$, comme étant aussi égaux entr'eux ; alors la formule $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ se change en $s'' = \frac{n.n.2n}{6}$ $= \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}$, ou $s'' = u^2 \cdot \frac{n}{3}$, en mettant pour n sa valeur u dans n^2.

Or nous avons démontré (*Géom.* 202), qu'en concevant une pyramide comme composée de tranches parallèles à la base, ces tranches étoient entr'elles, comme les quarrés de leurs distances au sommet ; donc en concevant la hauteur partagée en une infinité de parties égales, les distances suivront la progression naturelle des nombres, et les tranches suivront celles de leurs quarrés ; donc la somme des tranches se trouvera de la même manière que celle des quarrés ; or la formule $s'' = u^2 \cdot \frac{n}{3}$, fait voir qu'il faut multiplier le dernier des quarrés, par le tiers de leur nombre ; il faut donc, pour avoir la somme des tranches, multiplier la dernière, c'est-à-dire, la base, par le tiers du nombre des tranches, c'est-à-dire, par le tiers de la hauteur.

178. Lorsqu'une fois on sait trouver la somme des puissances de plusieurs nombres en progression arithmétique, il est fort aisé de trouver celle d'une infinité d'autres espèces de progressions. Par exemple, si ayant une progression arithmétique, telle que $\div$ 3 . 7 . 11 . 15 . 19 etc. on conçoit qu'on en ajoute successivement les termes, on formera la suite 3, 10, 21, 36, 55, etc. que l'on peut sommer. Et si l'on ajoute de même les termes de celle-ci, on aura la suite 3, 13,

34, 70, 125, etc. qu'on peut pareillement sommer ; il en sera de même des termes de celle-ci, ajoutés de la même manière et ainsi à l'infini.

En effet, la somme des termes de la progression arithmétique, est $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, ou, en mettant pour u sa valeur $u = a + r(n - 1)$; $s = [2a + r.(n - 1)] \times \frac{n}{2}$. Cette valeur de s exprime donc un terme quelconque de la seconde suite. Donc pour avoir la somme des termes de la seconde suite, il faut sommer la suite des quantités que donneroit $[2a + r.(n - 1)] \cdot \frac{n}{2}$ en mettant successivement pour n tous les nombres de la progression naturelle, 1, 2, 3, etc. Or cette quantité revient à $an + \frac{r}{2}n^2 - \frac{r}{2}n$, dans laquelle a et r restant toujours les mêmes, quelque valeur qu'on donne à n, il est clair que pour sommer toutes les quantités représentées par an, il suffit de sommer les quantités représentées par n, et multiplier cette somme par a; or la somme des quantités représentées par n, est la somme de la progression arithmétique des nombres naturels. Le raisonnement est le même pour $\frac{r}{2}n$. A l'égard de $\frac{r}{2}n^2$, puisque r reste le même, quelque nombre que l'on substitue pour n, on sommera donc toutes les quantités représentées par n^2, c'est-à-dire, qu'on prendra la somme des quarrés des nombres naturels, et on la multipliera par $\frac{r}{2}$. Ainsi pour la somme des quantités an, on aura $a.(n+1)\cdot\frac{n}{2}$; pour celle des quantités $\frac{r}{2}n$, on aura $\frac{r}{2}\cdot(n+1)\cdot\frac{n}{2}$; et pour celle des quantités $\frac{r}{2}n^2$, on aura $\frac{r}{2}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$; en sorte que la somme des quantités $an+\frac{r}{2}n^2-\frac{r}{2}n$, ou la somme des termes de la seconde suite, sera $a.(n+1)\cdot\frac{n}{2}+\frac{r}{2}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{6}-\frac{r}{2}.(n+1)\frac{n}{2}$, qui se réduit à $a.(n+1)\cdot\frac{n}{2}+r.\frac{(n-1).n.(n+1)}{6}$; et puisque chaque terme de la troisième suite, est la somme des termes de la seconde, on sommera cette troisième en sommant les différentes parties de ce dernier résultat, qui n'exigera encore que des sommations des puissances de la suite naturelle des nombres, et ainsi à l'infini. Si l'on suppose $a=1$, et $r=1$, c'est-à-dire, si la progression primitive est la suite des nombres naturels, les progressions dont il s'agit actuellement, deviennent alors ce qu'on appelle les *nombres figurés*.

On peut de même sommer les suites que l'on formeroit en ajoutant la suite des quarrés, ou la suite des cubes, etc. de cette même manière.

En un mot, on peut sommer par ces mêmes moyens, toute suite de quantités, dont un terme quelconque sera exprimé par tant de puissances parfaites que l'on voudra d'un même nombre n, ces puissances étant d'ailleurs multipliées par tels nombres connus que l'on voudra.

On peut appliquer ce que nous venons de dire, à trouver le nombre des boulets d'une pile triangulaire. En effet, chaque rang de boulets parallèle à la base, a pour expression (173) $n \cdot \frac{n+1}{2}$. Donc la totalité est la somme des quantités $n \cdot \frac{n+1}{2}$, qui en faisant, dans la valeur de cette somme trouvée ci-dessus, $r = 1$, et $a = 1$, devient $n \cdot \frac{n+1}{2} \frac{n+2}{3}$; ce qui fournit une règle très-simple.

179. Réciproquement, si, connoissant le nombre total des boulets de la pile triangulaire, on veut connoître le nombre n des boulets de chaque arête; en représentant par a le nombre total, on aura. . . . .

$n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} = a$, ou $n^3 + 3n^2 + 2n = 6a$, équation que l'on peut résoudre par la méthode donnée (159). Mais sans avoir recours à ces moyens, on peut la résoudre plus promptement en observant que $n^3 + 3n^2 + 2n$ étant plus petit que le cube de $n + 1$, $6a$ est plus petit que le cube de $n + 1$; donc la racine cubique de $6a$ sera plus petite que $n + 1$. Par la même raison, n devant être un nombre entier, $n^3 + 3n^2 + 2n$ est plus grand que le cube de $n - 1$; donc la racine cubique de $6a$ est plus grande que $n - 1$; donc la racine cubique de $6a$ ne peut pas différer de n, d'une unité ; donc n est la racine cubique du plus grand cube contenu dans $6a$.

S'il s'agit de la pile quarrée, on aura (175). . . . $n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}$ ou $\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = a$ ou $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 3a$; d'où en raisonnant comme ci-dessus, on conclura que n est la racine cubique du plus grand cube contenu dans $3a$.

Propriétés et usages des Progressions géométriques.

180. On peut aussi trouver la somme des termes d'une progression géométrique, par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour sommer les puissances des termes d'une progression arithmétique.

Supposons que a, b, c, d, e, etc. soient les termes consécutifs d'une progression géométrique croissante, dont la raison soit q. Puisque chaque terme contient q de fois celui qui le précède, on aura les équations suivantes, $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, etc. Donc ajoutant ces équations, on aura $b + c + d + e = (a + b + c + d)q$, où l'on voit qu'en général, le premier membre sera toujours la somme de tous les termes excepté le premier ; et le second, sera toujours la raison q

multipliée par la somme de tous les termes excepté le dernier. Donc si l'on appelle s la somme de tous les termes, et u le dernier, cette équation se changera en $s-a=(s-u)q$ ou $s-a=qs-qu$; d'où l'on tire $qu-a=qs-s=(q-1)s$; et par conséquent $s=\frac{qu-a}{q-1}$, formule par laquelle, connoissant le premier terme a, le dernier u et la raison q, on aura la somme s de tous les termes.

Cette même formule peut servir aussi pour les progressions décroissantes, puisque la progression décroissante prise dans un ordre renversé, est une progression croissante; il n'y aura de changement à faire que celui de dire *dernier terme*, au lieu de *premier*, et *premier* au lieu de *dernier*.

Si la progression décroissante s'étendoit à l'infini, la somme s se réduiroit alors à $s=\frac{qu}{q-1}$, u marquant le premier terme. En effet, pour exprimer que la progresion s'étend à l'infini, il faut introduire dans le calcul, ce que cette supposition renferme, savoir que le dernier terme est infiniment petit: or le moyen d'exprimer cette dernière condition, c'est de le supposer nul à l'égard du terme qu; car si on le laissoit subsister, ce seroit supposer qu'il peut encore diminuer qu, ce qui est contre la première supposition.

On voit donc que *pour avoir la somme de tous les termes d'une progression géométrique, il faut multiplier le plus grand terme, par la raison* (*) *de la progression, et ayant retranché du produit, le plus petit terme de cette même progression, diviser le reste par la raison diminuée d'une unité;* en sorte que, lorsque la progression est décroissante à l'infini, cela se réduit à multiplier le plus grand terme par la raison, et diviser ensuite par la raison diminuée d'une unité.

Ainsi la somme des termes de cette progression continuée à l'infini $\div\!\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$, etc. est $\dfrac{\frac{1}{2} \times 2}{2 - 1}$ ou 1; il en est de même de la somme des termes de celle-ci $\div\!\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81}$, etc. dont la raison, en considérant cette progression comme croissante, est 3, puisque $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{2}{9}$ donne 3. En effet, la somme des termes de cette progression est $\dfrac{\frac{2}{3} \times 3}{3 - 1}$, qui se réduit à 1. En général, toute progression géométrique décroissante à l'infini, dont

*) Par *la raison*, nous entendons, en général, le nombre de fois qu'un terme de la progression contient celui qui est immédiatement plus petit, en sorte que cet énoncé convient à la progression décroissante comme à la progression croissante.

chaque terme a pour numérateur constant, un nombre moindre d'une unité que le dénominateur du premier terme, vaut 1. Car cette progression est en général $\div\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} : \frac{n}{(n+1)^4}$, etc. dont la somme est $\dfrac{\frac{n}{n+1} \times (n+1)}{n+1-1}$, ou $\frac{n}{n}$, c'est-à-dire, 1.

181. Nous avons vu (*Arith.* 196) qu'un terme quelconque d'une progression géométrique étoit composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un degré égal au nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit. Donc si l'on nomme a, le premier terme, u un terme quelconque, q la raison, n le nombre des termes, on aura $u = a\,q^{n-1}$; et comme il entre quatre quantités dans cette équation, on peut en tirer quatre formules, qui serviront à résoudre cette question générale; trois de ces quatre choses étant données, le premier terme, le dernier, la raison, et le nombre des termes d'une progression géométrique, trouver la quatrième. Car 1°. l'équation donne immédiatement la valeur de u. 2°. On trouvera facilement que celle de a est $a = \frac{u}{q^{n-1}}$; à l'égard de celle de q, on trouvera par ce qui a été dit (139), $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Sur quoi nous remarquerons que

cette dernière équation renferme la régle que nous avons donnée en arithmétique (198) pour insérer plusieurs moyens proportionnels entre deux quantités données. Ces quantités sont ici a et u ; mais pour avoir la raison q qui doit régner dans la progression, on voit ici qu'il faut diviser la plus grande u, par la plus petite a, et tirer la racine du degré $n-1$, du quotient $\frac{u}{a}$; or n étant le nombre total des termes, $n-1$ est plus grand d'une unité que le nombre des moyens, ce qui s'accorde avec l'article cité.

Quant à la manière d'avoir n, dans l'équation $u = aq^{n-1}$, l'Algèbre ne fournit pas de moyens directs ; mais on peut la résoudre facilement, quoiqu'indirectement, en employant les logarithmes. Nous avons vu (*Arith.* 213) que pour élever à une puissance, par le moyen des logarithmes, il falloit multiplier le logarithme de la quantité, par l'exposant de cette puissance. Ainsi en représentant par L, les mots *Logarithme de*, on pourra, au lieu de La^2, prendre $2La$; au lieu de La^3, prendre $3La$; au lieu de La^n, prendre nLa. Donc, en se rappelant que pour multiplier par le moyen des logarithmes, il faut ajouter les logarithmes, et qu'au contraire pour diviser, il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende, on aura dans l'équation $u = aq^{n-1}$, $Lu = La + Lq^{n-1}$, ou $Lu = La + (n-1)Lq$; donc en transposant, $(n-1)Lq = Lu - La$; et par conséquent, en divisant par Lq, $n - 1 = \frac{Lu - La}{Lq}$, et enfin $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$.

Pour donner quelqu'application de ceci, supposons qu'on ait placé au denier 20 une somme de 60000ᵗᵗ, à condition que les intérêts que cette somme produira chaque année, soient traités comme un nouveau fonds qui produira également intérêt, et ainsi d'année en année, jusqu'à ce que le fonds soit monté à 1000000 livres. On demande combien on doit attendre pour toucher cette dernière somme.

Puisque l'intérêt est ici $\frac{1}{20}$ du fonds de l'année précédente ; au bout d'une année quelconque, le fonds sera égal au fonds de l'année précédente, plus la vingtième partie de ce même dernier fonds ; ainsi, si l'on représente par a, b, c, d, e, les fonds successifs d'année en année, on aura $b = a + \frac{1}{20}a$, $c = b + \frac{1}{20}b$, $d = c + \frac{1}{20}c$, $e = d + \frac{1}{20}d$; c'est-à-dire, $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c(1 + \frac{1}{20})$, $e = d(1 + \frac{1}{20})$; on voit donc que chaque fonds contient toujours celui qui le précède, le même nombre de fois marqué par $1 + \frac{1}{20}$ ou $\frac{21}{20}$. La suite de ces fonds forme donc une progression géométrique dont le premier terme a est 60000 livres ; le dernier u, est 1000000 livres, la raison q, est $\frac{21}{20}$, et le nombre des termes est inconnu. On le trouvera donc en substituant dans la formule $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$, au lieu de a, u et q, leurs valeurs, ce qui donnera

$n = \frac{L\ 1000000 - L\ 60000}{L\ \frac{21}{20}} + 1$, ou (parce que $L\ \frac{21}{20} = L\ 21 - L\ 20$) $n = \frac{L\ 1000000 - L\ 60000}{L\ 21 - L\ 20} + 1$;

or, par les tables, on trouve. . . . .
$L\ 1000000 = 6{,}0000000$; $L\ 60000 = 4{,}7781513$;
$L\ 21 = 1{,}3222193$, $L\ 20 = 1{,}3010300$; donc

$n = \frac{6{,}0000000 - 4{,}7781513}{1{,}3222193 - 1{,}3010300} + 1 = \frac{1{,}2218487}{0{,}0211893} + 1 =$ 58,7 à-peu-près ; c'est-à-dire, que le fonds de 60000# sera monté à 1000000# au bout de 57 ans 8 mois $\frac{1}{2}$, à-peu-près.

Puisque (*Arith.* 214) pour extraire, par le moyen des logarithmes, une racine d'un degré proposé, il faut diviser le logarithme de la quantité, par l'exposant ; on peut, par le moyen des logarithmes, résoudre facilement en nombres l'équation $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; car on aura $L q = \frac{L \frac{u}{a}}{n-1} = \frac{Lu - La}{n-1}$.

Si l'on veut appliquer ceci à un exemple, il n'y a qu'à chercher quel devroit être, dans le précédent, l'intérêt, pour qu'en 57 ans et $\frac{7}{10}$, le fonds de 60000 liv. montât à 1000000 livres. On a ici $a = 60000$, $u = 1000000$, $n = 58{,}7$; en employant les logarithmes des tables, on trouvera $L q = \frac{6{,}0000000 - 4{,}7781513}{58{,}7 - 1} = \frac{1{,}2218487}{57{,}7}$ qui donne $L q = 0{,}0211757$; ce logarithme répond dans les tables, à 1,0500 à très-peu près; et ce dernier nombre réduit en vingtièmes, donne 21, d'où l'on conclura que l'intérêt est à très-peu près $\frac{1}{20}$.

182. L'équation $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, donnera aussi quatre équations qui serviront à résoudre ce problème général; trois de ces quatre choses, la somme, la raison, le premier et le dernier termes d'une progression géométrique, étant données, trouver le quatrième. Cela est trop facile, à présent, pour nous y arrêter.

Enfin, si de l'une des deux équations $s = \frac{qu - a}{q - 1}$ et $u = aq^{n-1}$, on tire la valeur d'une même quantité a, ou q ou u. etc. et qu'on la substitue dans l'autre, on aura les autres équations qui peuvent servir à résoudre la question suivante, encore plus générale; de ces cinq choses, le premier terme, le dernier, la raison, la somme, et le nombre des termes d'une progression géométrique, trois étant données, trouver chacune des deux autres.

De la Construction Géométrique des Quantités Algébriques.

183. Les lignes, les surfaces et les solides étant des quantités, on peut faire sur chacune

de ces trois espèces d'étendue, les mêmes opérations qu'on fait sur les nombres et sur les quantités algébriques, mais les résultats de ces opérations peuvent être évalués de deux manières principales, ou en nombres, ou en lignes. La première manière supposant que chacune des quantités données est exprimée en nombres, ne peut avoir à présent aucune difficulté : il ne s'agit que de substituer à la place des lettres, les quantités numériques qu'elles représentent, et faire les opérations que la disposition des signes et des lettres indique.

Quant à la manière d'évaluer en lignes les résultats des solutions que l'Algèbre a fournies, elle est fondée sur la connoissance de ce que signifient certaines expressions fondamentales, auxquelles on rapporte ensuite toutes les autres. Nous allons faire connoître les premières, et nous ferons voir ensuite comment on y rapporte les autres : c'est-là ce qu'on appelle *construire* les quantités algébriques, ou les problèmes qui ont conduit à ces quantités.

184. Si la quantité qu'il s'agit de construire est rationnelle, (c'est-à-dire sans radicaux) et si le nombre des dimensions du numérateur ne surpasse que d'une unité celui des dimensions du dénominateur, la construction se réduira

toujours à chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données. En voici des exemples.

Si l'on avoit à construire une quantité telle que $\frac{ab}{c}$, dans laquelle a, b, c marquent des lignes connues; on tireroit (*fig.* 3) deux lignes indéfinies AZ, AX faisant entr'elles un angle quelconque. Sur l'une AX de ces lignes, on prendroit une partie AB égale à la ligne qu'on a représentée par c, puis une partie AD, égale à l'une ou à l'autre des deux lignes a et b, à a, par exemple; ensuite sur la seconde AZ, on prendroit une partie AC égale à la ligne b. Ayant joint les extrémités B et C de la première et de la troisième, par la ligne BC, on mèneroit par l'extrémité D de la seconde, la ligne DE parallèle à BC; elle détermineroit sur AZ la partie AE pour la valeur de $\frac{ab}{c}$; car (*Géom.* 102) les parallèles DE et BC donnent cette proportion $AB : AD :: AC : AE$, c'est-à-dire, $c : a :: b : AE$; donc $AE = \frac{ab}{c}$. C'est-à-dire, qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle, aux trois lignes données, c, a, b. Et puisque (*Géométrie* 118) nous avons donné deux manières de trouver cette quatrième proportionnelle, on peut employer indifféremment l'une ou l'autre pour construire $\frac{ab}{c}$.

On voit donc que si l'on avoit à construire $\frac{aa}{c}$, ce cas rentreroit dans le précédent, puisqu'alors la ligne b est égale à a.

Si l'on avoit à construire $\frac{ab+bd}{c+d}$, on remarqueroit que cette quantité est la même que $\frac{(a+d)\times b}{c+d}$; regardant donc $a+d$ comme une seule ligne, représentée par m, et $c+d$ aussi comme une seule ligne n, on auroit $\frac{mb}{n}$ à construire, ce qui se rapporte au cas précédent.

Que l'on ait $\frac{aa-bb}{c}$, on se rappellera que $aa-bb$ est (25) la même chose qne $(a+b)\times(a-b)$; ainsi on se représentera $\frac{aa-bb}{c}$, sous cette forme $\frac{(a+b)(a-b)}{c}$, et l'on cherchera une quatrième proportionnelle à c, $a+b$ et $a-b$.

Si la quantité à construire est $\frac{abc}{de}$, on mettra cette quantité sous cette forme $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$; et ayant construit $\frac{ab}{a}$, comme on vient de l'enseigner, on nommera m la ligne qu'aura donné cette construction; alors $\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$ devient $\frac{mc}{e}$, qui se construit comme ci-dessus.

On voit donc que pour construire $\frac{a^2b}{c^2}$, on se le représenteroit comme $\frac{a^2}{c}\times\frac{b}{c}$; on construiroit $\frac{a^2}{c}$, et en ayant représenté la valeur par m, on construiroit $\frac{mb}{c}$.

Ainsi tout l'art consiste à décomposer la quantité en portions, dont chacune revienne à la forme $\frac{ab}{c}$ ou $\frac{a^2}{c}$; et et quoique cela puisse paroître difficile en quelques occasions, on en vient cependant facilement à bout, en employant des transformations.

Par exemple, si j'avois à construire $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$, je supposerois arbitrairement, $b^3 = a^2 m$, et $c^2 = a\,n$; alors $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ se changeroit en $\frac{a^3 + a^2 m}{a^2 + a n}$ qui se réduit à $\frac{a^2 + a m}{a + n}$, ou $\frac{(a + m) \times a}{a + n}$, quantité facile à construire (après ce qui a été dit ci-dessus), dès qu'on connoîtra m et n. Or pour connoître m et n, les équations $b^3 = a^2 m$ et $c^2 = a\,n$, donnent $m = \frac{b^3}{a^2}$ et $n = \frac{c^2}{a}$ qui se construisent par ce qui précède.

Il arrive quelquefois que les quantités se présentent sous une forme qui semble rendre inutile le secours des transformations, c'est lorsque la quantité n'est pas *homogène;* c'est-à-dire, lorsque chacun des termes du numérateur ou du dénominateur n'est pas composé du même nombre de facteurs; par exemple, lorsque la quantité est telle que $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$. Mais il faut observer que l'on n'arrive jamais à un pareil résultat, que lorsque dans le cours d'un calcul on a supposé (dans la vue de simplifier le calcul) quelqu'une des quantités égale à l'unité. Par exemple; si dans $\frac{a^3 + b^2 c}{a^2 + c^2}$, je suppose b égal à 1, alors j'aurai $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. Mais comme on ne peut jamais entreprendre de construire, sans connoître les élémens qu'on emploie pour cette construction, on sait toujours dans chaque cas qu'elle est cette quantité qu'on a supposée égale à l'unité ; on pourra donc toujours la restituer ; et il ne peut y avoir d'embarras là-dessus, parce que le nombre des dimensions devant toujours être le même dans chaque terme du numérateur et du dénominateur, (quoiqu'il puisse être différent des termes de l'un aux termes de l'autre) on restituera dans chaque terme une puissance de la ligne qu'on a prise pour unité, suffisamment élevée pour completter le nombre des dimensions; ainsi, si j'avois à construire $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$; supposant que d soit la ligne qui a été prise pour unité, j'écrirois $\frac{a^3 + bd^2 + c^2 d}{ad + b^2}$, que je construirois en faisant $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ et $a^3 = d^2 p$, ce qui la changeroit en $\frac{d^2 p + bd^2 + d^2 n}{ad + dm}$, ou $\frac{dp + bd + nd}{a + m}$, ou $\frac{(p + b + n) d}{a + m}$, quantité facile à construire, dès qu'on aura construit les valeurs de m, n et p, savoir $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^3}{d^2}$, qui sont elles-mêmes faciles à construire, d'après ce qui a été dit ci-dessus.

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que le nombre des facteurs, ou le nombre des dimensions de chaque terme du numérateur, ne surpassoit que d'une unité, celui des dimensions du dénominateur. Il peut le surpasser de deux, et même de trois, mais jamais de plus, à moins que quelque ligne n'ait été supposée égale à l'unité, ou que quelques-uns des facteurs ne représentent des nombres.

185. Lorsque le nombre des dimensions du

numérateur de la quantité proposée surpasse celui des dimensions du dénominateur de deux unités, alors la quantité exprime une surface dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélogramme, et même d'un quarré.

Par exemple, si j'avois à construire la quantité $\frac{a^3 + a^2 b}{a + c}$, je la considérerois comme $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; or $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, se construit aisément par ce qui a été dit ci-dessus, en le considérant comme $a \times \frac{a + b}{a + c}$. Supposons donc que m soit la valeur de la ligne qu'aura donnée cette construction; alors $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$ deviendra $a \times m$; or si l'on fait de a, la hauteur, et de m, la base d'un parallélogramme, on aura $a \times m$ pour la surface de ce parallélogramme, donc réciproquement cette surface représentera $a \times m$ ou $\frac{a^3 + a^2 b}{a + c}$

On ramènera de même à une pareille construction, la quantité $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, en faisant $bc = am$ et $d^2 = an$; car alors elle deviendra $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$, qui est la même chose que $a\left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}\right)$. Or le facteur $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ se rapporte aux constructions précédentes, ainsi que les valeurs de m et de n. Ayant trouvé la valeur de ce facteur, si je la représente par p, il ne s'agira plus que de construire $a \times p$, c'est-à-dire, faire un parallélogramme dont la hauteur soit a, et la base p.

186. Enfin si le nombre des dimensions du numérateur surpasse de 3 celui des dimensions du dénominateur, alors la quantité exprime un solide dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélipipède.

Par exemple, si j'avois à construire $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$, je considérerois cette quantité comme étant la même que $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; et ayant construit $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, selon ce qui a été dit ci-dessus, si je représente par m la ligne qu'aura donnée cette construction; la question sera réduite à construire $ab \times m$; or ab représente, ainsi que nous venons de le voir, un parallélogramme; si donc on conçoit un parallélipipède qui ait pour base ce parallélogramme, et qui ait pour hauteur la ligne m, la solidité de ce parallélipipède représentera $ab \times m$, c'est-à-dire $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$.

187. Ce que nous venons de dire, suffit pour construire toute quantité rationnelle. Voyons maintenant les quantités radicales du second degré.

On peut les construire ou par une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, ou par l'hypothénuse, ou l'un des côtés d'un triangle rectangle.

Par exemple, pour construire $\sqrt{ab}$, il faut (*fig.* 4) tirer une ligne indéfinie AB, sur laquelle on prendra de suite la partie AC égale à la ligne a, et la partie CB égale à la ligne b : sur la totalité AB comme diamètre, on décrira un demi-cercle qui coupe en D la perpendiculaire CD élevée sur AB au point C; alors CD sera la valeur de $\sqrt{ab}$; c'est-à-dire (*Géom.* 122) que pour avoir la valeur de $\sqrt{ab}$, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les deux quantités représentées par a et b : en effet, on sait (*Géom.* 121) que $AC : CD :: CD : CB$, ou $a : CD :: CD : b$; donc, en multipliant les extrêmes et les moyens, on a $(CD)^2 = ab$, et par conséquent $CD = \sqrt{ab}$.

On voit par-là, comment on doit s'y prendre pour transformer en un quarré, une furface quelconque ; s'il s'agit d'un parallélogramme dont a soit la hauteur et b la base, en nommant x le côté du quarré cherché, on aura $x^2 = ab$, et par conséquent $x = \sqrt{ab}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre la base et la hauteur. S'il s'agit d'un triangle, que l'on sait être la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur, on prendra une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur et la moitié de la base.

S'il s'agit d'un cercle, on prendra une moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence ; et s'il s'agit d'une figure rectiligne quelconque, comme on sait (*Géom.* 137) qu'elle est réductible à un triangle, on la réduira aisément en un quarré, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base et la moitié de la hauteur de ce triangle.

Mais si la figure n'étoit point construite, et que l'on eût seulement l'expression algébrique de sa surface, par le moyen de quelques-unes de ses dimensions, alors on construiroit comme pour les quantités que nous allons parcourir.

Si l'on avoit $\sqrt{(3ab + b^2)}$, on considéreroit cette quantité comme étant la même que $\sqrt{[(3a + b) \times b]}$; on prendroit donc une moyenne proportionnelle entre $3a + b$ et b.

Pareillement, si l'on a $\sqrt{(aa - bb)}$, on considérera cette quantité comme étant la même que $\sqrt{[(a + b) \times (a - b)]}$; ainsi l'on prendra une moyenne proportionnelle entre $a + b$ et $a - b$. Si l'on a $\sqrt{(a^2 + bc)}$, on fera $bc = am$, et alors on aura $\sqrt{(a^2 + am)}$ ou $\sqrt{[(a + m) \times a]}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre $a + m$ et a, après avoir construit la valeur de $m = \frac{bc}{a}$, en suivant les règles données ci-dessus.

Pour construire $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, on pourroit aussi faire $b^2 = am$ et construire $\sqrt{(a^2 + am)}$ selon ce qui vient d'être dit. Mais la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) nous en fournit une construction plus simple; la voici: Tirez une ligne AB (*fig.* 5) égale à la ligne a; à son extrémité A, élevez une perpendiculaire AC égale à la ligne b; alors si vous tirez BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{(a^2 + b^2)}$: en effet, puisque le triangle CAB est rectangle, on a (*Géom.* 164) $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$; donc $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

On peut aussi, par le moyen du triangle rectangle, contruire $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus. Pour cet effet, on tirera (*figure* 7), une ligne AB égale à a, et ayant décrit sur AB comme diamètre, le demi-cercle ACB, on tirera du point A, une corde $AC = b$; alors si l'on tire BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; car le triangle ABC étant rectangle (*Geom.* 164), on a $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$; donc $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$; donc $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

On peut donc construire aussi $\sqrt{(a^2 + bc)}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus, en s'y prenant de cette manière. Faire $bc = m^2$, et construire $\sqrt{(a^2 + m^2)}$, comme il vient d'être dit; et pour cet effet, on commencera par déterminer m en prenant une moyenne proportionnelle entre b et c, ainsi que l'indique l'équation $bc = m^2$, qui donne $m = \sqrt{bc}$.

S'il y avoit plus de deux termes sous le radical, on rameneroit toujours la construction à quelques-unes des méthodes précédentes, par le moyen de transformations. Par exemple, si j'avois $\sqrt{(a^2 + bc + ef)}$, je ferois $bc = am$, $ef = an$, et j'aurois $\sqrt{(a^2 + am + an)}$ ou $\sqrt{[(a + m + n) \times a]}$, que je construirois en prenant une moyenne proportionnelle entre a et $a + m + n$, après avoir construit les valeurs de m et de n, savoir $m = \frac{bc}{a}$, $n = \frac{ef}{a}$. Je pourrois encore faire $bc = m^2$, $ef = n^2$, et alors j'aurois à construire $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2)}$. Or lorsque le radical renferme ainsi une suite de quarrés positifs, par exemple, $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \text{etc.})}$, on fera $\sqrt{(a^2 + m^2)} = h$, $\sqrt{(h^2 + n^2)} = i$, $\sqrt{(i^2 + p^2)} = k$, et ainsi de suite; et comme chacune de ces quantités se trouve déterminée par la précédente, la dernière donnera la valeur de $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2 + \text{etc.})}$. Pour construire ces quantités de la manière la plus simple, on regardera successivement chaque hypothénuse comme un côté; par exemple (*fig.* 6), ayant pris $AB = a$, élevez la perpendiculaire $AC = m$, et tirez BC qui sera h, on élèvera au point C, sur BC, la perpendiculaire $CD = n$; et ayant tiré BD qui sera i, à son extrémité D, on élèvera sur BD la perpendiculaire $DE = p$, et BE sera k ou $\sqrt{(a^2 + m^2 + n^2 + p^2)}$.

Si quelques-uns de ces quarrés sont négatifs, alors on réunira à ce que nous venons de dire, ce qui a été dit pour construire $\sqrt{(a^2 - b^2)}$.

Enfin si l'on avoit à construire une quantité de cette forme $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}$, on la changeroit en $\frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$ en multipliant haut et bas par $\sqrt{(d+e)}$; alors cherchant une moyenne proportionnelle entre $b + c$ et $d + e$, et la nommant m, on auroit à construire $\frac{am}{d+e}$, ce qui est facile.

Au reste, il s'agit ici de règles générales; on peut souvent construire d'une manière beaucoup plus simple, en partant toujours des mêmes principes; mais ces simplifications se tirent de quelques considérations particulières et propres à chaque question, et ne peuvent, par conséquent, être exposée qu'à mesure que les questions en amènent l'occasion. Nous remarquerons seulement, en terminant cette matière, que quoique la construction des quantités radicales, dont il vient d'être question, se réduise à prendre des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, et à construire des triangles rectangles; cependant on peut quelquefois avoir des constructions plus ou moins simples ou élégantes, selon la méthode qu'on emploie pour trouver ces moyennes proportionnelles; c'est pourquoi nous enseignerons ici deux autres manières de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

La première consiste à décrire sur l'une AB des deux lignes données (*fig.* 7) un demi-cercle ACB; et ayant pris une partie AD égale à la seconde, élever la perpendiculaire DC, et tirer la corde AC qui sera moyenne proportionnelle entre AB et AD; car en tirant CB, le triangle ACB (*Géom.* 65) est rectangle, et par conséquent (*Géom.* 112) AC est moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse AB et le segment AD.

La seconde manière consiste (*fig.* 8) à tirer une ligne AB égale à la plus grande ligne donnée, et ayant pris sur elle une partie AC égale à la plus petite, décrire sur le reste BC, un demi-cercle CDB, auquel on mène la tangente AD, qui (*Géom.* 124) est moyenne proportionnelle entre AB et AC.

On voit donc que les quantités rationnelles peuvent toujours être construites par le moyen des lignes droites, et que les quantités radicales du second degré peuvent être construites par le cercle et la ligne droite réunis.

Quant aux quantités radicales de degrés supérieurs, leur construction dépend de la combinaison de différentes lignes courbes.

Nous allons nous occuper, pour le présent, des questions dont la solution dépend de quantités ou rationnelles, ou radicales du second degré.

Diverses questions de Géométrie, et Réflexions tant sur la manière de les mettre en équation, que sur les diverses solutions que donnent ces Équations.

188. Le principe que nous avons donné (60) pour mettre les questions en équation, s'applique également aux questions de Géométrie. Il faut de même représenter ce que l'on cherche, par un signe particulier, et raisonner ensuite à l'aide de ce signe et de ceux qui représentent les autres quantités, comme si tout étoit connu, et que l'on voulût vérifier. Cette méthode ou manière de procéder est ce qu'on appelle l'*Analyse*. Pour être en état de faire les raisonnemens qu'exige cette vérification, il faut connoître au moins quelques propriétés de la quantité que l'on cherche. Il est donc clair que pour être en état de mettre les questions de Géométrie, en équation, il faut avoir présentes à l'esprit les connoissances que nous avons données dans la seconde partie de ce Cours. Dans la plupart des questions numériques, ou de la nature de celles que nous avons parcourues dans la première section, il suffit le plus souvent, pour appliquer le principe, de traduire en langage algébrique l'énoncé de la question; mais dans

l'application de l'Algèbre à la Géométrie, il faut souvent employer encore d'autres moyens : nous tâcherons de les faire connoître à mesure que nous avancerons ; mais ce que nous pouvons dire en général, pour le présent, c'est qu'il n'est pas toujours nécessaire, pour vérifier une quantité, d'examiner si elle satisfait immédiatement aux conditions de la question : cette vérification se fait souvent avec plus de facilité, en examinant si cette quantité a certaines propriétés qui sont essentiellement liées avec les conditions de la question. Après cette réflexion dont nous aurons occasion de faire usage, nous passons aux exemples, qui dans cette matière sont toujours plus faciles à saisir que les préceptes généraux.

189. Proposons-nous donc pour première question, de *décrire un quarré* ABCD (fig. 9) *dans un triangle donné* EHI.

Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, etc.

Avec peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF; ainsi l'équation se présente tout naturellement, il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB, et celle de FG, et ensuite les égaler.

Nommons donc a la hauteur connue EF; b la base connue HI, et x la ligne inconnue GF; alors EG vaudra $a - x$.

Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 109) avoir $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; c'est-à-dire, $EF : EG :: HI : AB$, ou $a : a - x :: b : AB$, donc (*Arith.* 169) $AB = \frac{ab - bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\frac{ab - bx}{a} = x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x = \frac{ab}{a+b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (184), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b, et a, ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire, égale à $EF + HI$, et l'on tirera EO; puis ayant pris FM égale à $HI = b$, on mènera, parallèlement à EO, la ligne MG, qui par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x; car les triangles semblables EFO, GFM, donnent $FO : FM :: FE : FG$, ou $a + b : b :: a : FG$; FG vaudra donc $\frac{ab}{a+b}$.

190. Proposons-nous pour seconde question, celle-ci.... *Connoissant la longueur de la ligne* BC (fig. 10), *et les angles* B *et* C *que forment avec elle les deux lignes* BA *et* CA, *déterminer la hauteur* AD *à laquelle ces deux dernières lignes se rencontrent.*

On fait entrer les angles dans le calcul algébrique, à l'aide des mêmes lignes qu'on emploie dans la Trigonométrie, c'est-à-dire, à l'aide des sinus, tangentes, etc. Ainsi quand on dit qu'on donne un angle, l'angle C, par exemple, on entend que l'on donne la valeur de son sinus ou de sa tangente; cela posé, nommons $BC = a$, $AD = y$. Dans le triangle rectangle ADC, nous aurons (*Géom.* 300) $CD : DA$ comme le rayon est à la tangente de l'angle ACD, ou $CD : y :: r : m$, en appelant r le rayon et m la tangente de l'angle ACD; donc (*Arith.* 169) $CD = \frac{ry}{m}$. Par un raisonnement semblable, on trouvera, en nommant n la tangente de ABD, $BD : y :: r : n$; donc $BD = \frac{ry}{n}$; or $BD + DC = BC = a$; donc $\frac{ry}{m} + \frac{yr}{n} = a$. D'où l'on tire $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

On peut rendre cette expression plus simple, en introduisant, au lieu des tangentes m et n des deux angles C et B, leurs cotangentes que nous nommerons p et q. Pour cet effet, il faut se rappeler (*Géom.* 295) que *tang.* : r :: r : *cot*; en vertu de cette proposition, on aura $m : r :: r : p$ et $n : r :: r : q$; d'où l'on tire $m = \frac{r^2}{p}$ et $n = \frac{r^2}{q}$; par conséquent $m\,n = \frac{r^4}{p\,q}$, et $r\,n + r\,m = \frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q} = \frac{r^3\,(p+q)}{p\,q}$; donc $y = \frac{a\,r}{p+q}$, qui se construit facilement en prenant une quatrième proportionnelle à $p + q$, r et a.

191. *Connoissant les hauteurs* AC *et* BD *de deux objets* C *et* D (fig. 11) *au-dessus d'un plan, et leur distance* AB *parallèlement à ce plan, trouver sur* AB *le point* E *également éloigné de* C *et de* D?

S'il est possible de tirer une ligne droite de C à D, il n'y aura autre chose à faire qu'à élever sur le milieu de CD une perpendiculaire KE qui déterminera le point E. Mais si on ne peut tirer la ligne CD, on déterminera le point E de la manière suivante.

Soit $AC = a$, $DB = b$, $AB = c$, $AE = x$; donc $BE = c - x$, $CE = \sqrt{(aa + xx)}$ (*Géom.* 164), $DE = \sqrt{[bb + (c - x)^2]}$. Or on veut que $CE = DE$; donc. . . . . $\sqrt{(aa + xx)} = \sqrt{[bb + (c - x)^2]}$.

D'où, en quarrant et réduisant, on tire. . . . .

$$x = \frac{cc - aa + bb}{2c} = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}.\frac{(a-b)(a+b)}{c}$$

que l'on construira de la manière suivante.

Par le milieu L de AB, on mènera ILG parallèle à AC, qui rencontrera en G la droite DF parallèle à AB; on prendra $LI = \frac{1}{2}c = LA$, $LH = \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}CF$, et $LO = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a-b) + b = GH$. Tirant IO, on lui mènera, par le point H, la parallèle HE, qui déterminera sur AB, le point cherché E. Car $LI : LO :: LH : LE$; c'est-à-dire $\frac{1}{2}c : \frac{1}{2}(a+b) :: \frac{1}{2}(a-b) : LE$; donc $LE = \frac{\frac{1}{2}(a+b) \times \frac{1}{2}(a-b)}{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; or $AE = AL - LE = \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c}$; donc $AE = x$.

192. Nous choisirons pour quatrième exemple une question qui nous donne lieu tout-à-la-fois de faire voir la manière de mettre en équation les questions de Géométrie, et comment par différentes préparations de ces équations, on peut découvrir de nouvelles propositions.

Connoissant les trois côtés d'un triangle ABC (fig. 12), *trouver les segmens* AD *et* DC *formés par la perpendiculaire* BD, *et la perpendiculaire* BD *elle-même?*

Si je connoissois chacune de ces lignes, voici comment je les vérifierois. J'ajouterois le quarré de BD avec le quarré CD, et je verrois si la somme est égale au quarré de BC, ce qui doit être, puisque le triangle BDC est rectangle (*Géom.* 164). J'ajouterois de même le quarré de AD au quarré de BD, et je verrois si la somme est égale au quarré de AB.

Imitons donc ce procédé, et pour cet effet nommons BD, y; CD, x; $BC = a$; $AB = b$; $AC = c$; alors AD qui est $= AC - CD$ sera $= c - x$. Nous aurons donc $xx + yy = aa$, et $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Comme xx et yy n'ont, dans chaque équation, d'autre coëfficient que l'unité, je retranche la seconde équation de la première, ce qui me donne tout de suite, $2cx - cc = aa - bb$; d'où l'on tire $x = \frac{aa - bb + cc}{2c} = \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$, qu'on peut écrire ainsi,

$$x = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c.$$

Or, sous cette forme, on voit d'après ce qui a été dit (184), que pour avoir x, il faut chercher une quatrième proportionnelle à c, $a + b$ et $a - b$; et l'ayant trouvée, en prendre la moitié que l'on ajoutera avec $\frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, avec la moitié du côté AC; ce qui est absolument conforme à ce que nous avons dit (*Géom.* 307).

Mais

Mais on peut tirer plusieurs autres conclusions de ces mêmes équations : nous allons en exposer quelques-unes pour accoutumer les commençans à lire dans une équation ce qu'elle renferme.

193. 1°. L'équation $2cx - cc = aa - bb$, est la même chose que $c \cdot (2x - c) = (a + b)(a - b)$. Or, puisque le produit des deux premiers facteurs est égal au produit des deux derniers, on peut considérer les deux premiers, comme les extrêmes, et les deux derniers comme les moyens d'une proportion, et l'on aura par conséquent $c : a + b :: a - b : 2x - c$; or $2x - c$ est $x - (c - x)$; donc en remettant à la place de ces lettres, les lignes qu'elles représentent, on aura $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$, ce qui est précisément ce que nous avons démontré (*Géom.* 306).

194. 2°. Si du point C comme centre, et d'un rayon égal à BC, on décrit l'arc BO, et si l'on tire la corde BO, on aura $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; or $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; donc $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$; mais nous avons trouvé ci-dessus $yy + xx = aa$; donc $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$; mettant donc pour x, sa valeur $\frac{aa - bb + cc}{2c}$, on aura $(BO)^2 = 2a\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) = 2a\left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) = \frac{a}{c} \times [bb - (a - c)^2]$; parce que $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(a - c)^2$; or en considérant $a - c$ comme une seule quantité, on a $bb - (a - c)^2 = (b + a - c)$

$(b - a + c)$; donc $(BO)^2 = \frac{a}{c}(b + a - c)$ $(b - a + c)$ qu'on peut mettre sous cette autre forme $(BO)^2 = \frac{a}{c}(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$; donc si on nomme $2s$ la somme des trois côtés, on aura $(BO)^2 = \frac{a}{c}(2s - 2c)(2s - 2a) = 4\frac{a}{c}$ $(s - c)(s - a)$; or si du point C, on abaisse sur OB la perpendiculaire CI, on aura (*Géom.* 299) dans le triangle rectangle CIO, cette proportion $CO : OI :: R$ $: sin.\ OCI$, c'est-à-dire, $a : \frac{1}{2}BO :: R : sin.\ OCI$; donc $\frac{1}{2}BO = \frac{a \text{ sin. } OCI}{R}$, ou $BO = \frac{2a \text{ sin. } OCI}{R}$; et par conséquent $(BO)^2 = \frac{4a^2(\text{sin. } OCI)^2}{R^2}$ égalant ces deux valeurs de $(BO)^2$, on aura $\frac{4a}{R^2}(sin.\ OCI)^2 =$ $\frac{4a}{c}(s - c)(s - a)$, ou en divisant par $4a$, et chassant les dénominateurs, $ac\,(sin.\ OCI)^2 = R^2(s - c)$ $(s - a)$, d'où l'on tire cette proportion $ac : (s - c)$ $(s - a) :: R^2 : (sin.\ OCI)^2$, qui fournit une règle simple pour calculer un angle quelconque d'un triangle rectiligne dont on connoît les trois côtés. La voici.

On ajoutera ensemble les trois côtés, et de la moitié de cette somme on retranchera successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché; ce qui donnera deux restes; puis on fera cette proportion.................. Le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est au produit des deux restes, comme le quarré du rayon est à un quatrième terme qui sera le quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché.

Par logarithmes, cette règle se réduit à la suivante.

Ajoutez ensemble les trois côtés ; de la moitié de cette somme, retranchez successivement chacun des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, ce qui donnera deux restes............. Puis ajoutez ensemble les logarithmes de ces deux restes et les complémens arithmétiques des logarithmes des deux côtés qui comprennent l'angle cherché. La moitié de la somme de ces logarithmes sera le logarithme du sinus de la moitié de l'angle cherché.

195. 3°. L'équation $yy + xx = aa$, donne $yy = aa - xx = (a + x)(a - x)$; donc en mettant pour x, sa valeur, on aura.................

$$yy = \left(a + \frac{aa - bb + cc}{2c}\right)\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) =$$
$$\left(\frac{2ac + aa + cc - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) =$$
$$\left(\frac{(a + c)^2 - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb - (a - c)^2}{2c}\right) =$$
$$\left(\frac{a + c + b)(a + c - b}{2c}\right) \times \left(\frac{b + a - c) \times (b - a + c}{2c}\right);$$

donc $4ccyy = (a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)$, ou $4ccyy = (a + b + c)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$; donc en nommant $2s$ la somme $a + b + c$ des trois côtés, on aura $4ccyy = 2s \cdot (2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2a)$, ou $4ccyy = 16s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)$, ou divisant par 16, réduisant, et tirant la racine quarrée, $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)]}$. Mais $\frac{cy}{2}$ ou $\frac{AC \times BD}{2}$ est la surface du triangle ABC; donc pour avoir la surface d'un triangle, par le moyen des trois côtés, il faut de la demi-somme retrancher successivement chacun des trois côtés ; multiplier les trois restes entr'eux et par la demi-somme, et enfin tirer la racine quarrée de ce produit.

196. 4°. L'équation $2cx - cc = aa - bb$, donne $bb = aa + cc - 2cx$; mais si la perpendiculaire tomboit hors du triangle, on auroit, en conservant les mêmes dénominations (*fig.* 13), $yy + xx = aa$, et $yy + cc + 2cx + xx = bb$, parce que AD qui étoit $c - x$, est ici $c + x$. Donc retranchant la première équation de la seconde, on auroit $cc + 2cx = bb - aa$, ou $c(c + 2x) = (b + a) \times (b - a)$, qui donne $c : b + a :: b - a : c + 2x$; or $c + 2x$ étant $x + c + x$ est $CD + AD$; donc $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, ce qui est la seconde partie de la proposition que nous avons démontrée (*Géom.* 306).

197. 5°. La même équation $cc + 2cx = bb - aa$, donne $bb = aa + cc + 2cx$; comparant donc à l'équation $bb = aa + cc - 2cx$ qui convient à la *fig.* 12, on voit que le quarré bb du côté AB opposé à l'angle aigu C, vaut moins que la somme $aa + cc$ des quarrés des deux autres côtés, puisqu'il vaut cette somme diminuée de $2cx$. Au contraire, le quarré bb du côté AB opposé à l'angle obtus (*fig.* 13) vaut $aa + cc + 2cx$, c'est-à-dire, plus que la somme des quarrés des deux autres côtés. On peut donc, par ces deux remarques, lorsqu'on a à calculer les angles d'un triangle par le moyen des côtés, reconnoître si l'angle que l'on cherche, doit être aigu ou obtus.

198. 6°. Les deux équations $bb = ac + cc - 2cx$, et $bb = aa + cc + 2cx$, confirment ce que nous

avons dit sur les quantités négatives. Car on voit que selon que la perpendiculaire BD (*fig.* 12 *et* 13) tombe dans le triangle ou au dehors, le segment CD est de différens côtés. Or dans ces équations le terme $2cx$ a en effet des signes contraires. Donc réciproquement, quels que soient les calculs que l'on aura faits pour l'un de ces triangles, on aura ceux qui conviennent pour les cas analogues du second, en donnant des signes contraires aux parties qui seront situées de différens côtés, sur une même ligne : or dans ce que nous avons dit ci-dessus, tant sur le calcul de l'un des angles, que sur celui de la surface, le segment CD n'y entre plus ; donc ces deux propositions appartiennent indifféremment à toute espèce de triangle rectiligne.

199. Quoiqu'en général on ait d'autant plus de ressources et de facilité pour mettre les questions de Géométrie en équation, que l'on connoît un plus grand nombre de propriétés des lignes ; cependant, comme l'Algèbre elle-même fournit les moyens de trouver ces propriétés, le nombre des propositions vraiment nécessaires, est assez limité. Ces deux propositions, que *les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels*, et que *dans un triangle rectangle, la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit est égale au quarré de l'hypothénuse*, ces deux propositions, dis-je, sont la base de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Mais selon la nature des questions, il peut y avoir bien des manières de faire usage de ces

deux propositions : cet usage n'étoit point difficile à apercevoir dans la question que nous venons de traiter ; mais dans les conséquences que nous avons tirées de sa résolution pour le calcul de l'angle, par le moyen des trois côtés, l'idée de décrire l'arc *BO* (*fig.* 12) pour calculer la corde *BO* ; et par sa moitié *OI*, calculer le sinus de l'angle *OCI*, cette idée ne se présente pas d'abord. Il en est de même de beaucoup d'autres questions. Tantôt ce sont des lignes qu'il faut prolonger jusqu'à ce qu'elles en rencontrent d'autres ; tantôt des lignes qu'il faut mener parallèles à quelque autre, ou faisant un angle donné avec quelqu'autre. En un mot, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, ainsi qu'à toute autre matière, exige de la part de l'*Analyste*, un certain discernement dans le choix et l'emploi des moyens. Mais comme ce discernement s'acquiert en grande partie par l'usage, nous allons appliquer ces observations à divers exemples.

200. Proposons-nous d'abord cette question, *d'un point* A (fig. 14) *dont la situation est connue à l'égard de deux lignes* HD *et* DI *qui font entr'elles un angle connu* HDI; *tirer une ligne droite* AEG, *de manière que le triangle intercepté* EDG, *ait une surface donnée ; c'est-à-dire une surface égale à celle d'un quarré connu* cc.

Du point A menons la ligne AB parallèle à DH, et la ligne AC perpendiculaire sur DG prolongée; du point E où la ligne AEG doit couper DH, concevons la perpendiculaire EF. Si nous connoissions EF et DG, en les multipliant l'une par l'autre, et prenant la moitié du produit, nous aurions la surface du triangle EDG, laquelle devroit être égale à cc.

Supposons donc $DG = x$; à l'égard de EF, voyons si nous ne pouvons pas en déterminer la valeur, tant par le moyen de x, que de ce qu'il y a de connu dans la question.

Puisqu'on suppose que la situation du point A est connue, on doit regarder comme connue la distance BD à laquelle passe la parallèle AB, et la distance AC du point A à la ligne DG prolongée. Nommons donc BD, a et AC, b; alors les triangles semblables ABG et EDG, nous donnent $BG : DG :: AG : EG$; et les triangles semblables ACG, EFG, nous donnent $AG : EG :: AC : EF$; donc $BG : DG :: AC : EF$; c'est-à-dire, $a + x : x :: b : EF$; donc $EF = \frac{bx}{a + x}$; puis donc que la surface du triangle EDG doit être égale au quarré cc, il faut que $EF \times \frac{DG}{2}$ ou $\frac{bx}{a + x} \times \frac{x}{2} = cc$, c'est-à-dire que $\frac{bxx}{2a + 2x}$

$= cc$, ou chassant le dénominateur, $bxx = 2acc + 2ccx$.

Cette équation résolue suivant les règles des équations du second degré (81 et *suiv.*), donne ces deux valeurs, $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$; dont celle qui a le signe — est inutile à la question présente.

Pour construire la première, je la mets sous la forme suivante, ... , ...
$x = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$; cela posé, ayant tiré une ligne indéfinie PQ (*fig.* 15), sur un point quelconque C de cette ligne, j'élève la perpendiculaire $AC = b$, et je prends sur CA et CP les lignes CO, CM, égales chacune au côté c du quarré donné; ayant tiré AM, je lui mène par le point O la parallèle ON qui me détermine CN pour la valeur de $\frac{cc}{b}$, puisque les triangles semblables ACM, OCN donnent $AC : OC :: CM : CN$, c'est-à-dire $b : c :: c : CN$; donc $CN = \frac{cc}{b}$; cela étant, la valeur de x devient donc $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; or $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$ exprime (187) une moyenne proportionnelle entre CN et $CN + 2a$; il ne s'agit donc plus que de déterminer cette moyenne proportionnelle, et de l'ajouter à CN.

Pour cet effet, sur NC prolongée, je prends $CQ = 2a$; et sur la totalité NQ, je décris le demi-cercle NVQ rencontré en V par CA; je porte la corde NV de N en P, et j'ai CP pour la valeur de x; car NV (*Géom.* 112) est moyenne proportionnelle entre NC et NQ, c'est-à-dire, entre CN et $CN + 2a$; donc NV ou $PN = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; donc $CP = CN + PN = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]} = x$; on portera donc CP de D en G (*fig.* 14), et l'on aura le point G par lequel et par le point A tirant AG, on aura le triangle EDG égal au quarré cc.

201. Si l'on veut savoir ce que signifie la seconde valeur de x, savoir, $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$, on remarquera que rien, dans la question, ne déterminant s'il s'agit plutôt de l'angle EDG (*fig.* 14) que de son égal $E'DG'$ formé par le prolongement des lignes GD, ED; et les quantités données étant les mêmes pour celui-ci que pour l'autre, cette seconde solution doit être celle de la question où il s'agiroit de faire dans l'angle $E'DG'$ la même chose que nous avons faite dans l'angle EDG. En effet, en nommant DG', x; et conservant les autres dénominations, les triangles ABG', $E'DG'$, semblables à cause des parallèles AB et DE' donnent $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; et en abaissant la perpendiculaire $E'F'$, les triangles semblables ACG', $E'F'G'$ donnent $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; donc $BG' : DG' :: AC : F'E'$, c'est-à-dire, $a - x$

$: x :: b : F'E'$; donc $F'E' = \frac{bx}{a-x}$; puis donc que la surface du triangle $G'E'D$ doit être égale au quarré cc, il faut que $\frac{bx}{a-x} \times \frac{x}{2} = cc$; ce qui donne $bxx = 2acc - 2ccx$, et par conséquent, $x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ valeurs de x qui sont précisément les mêmes que celles du cas précédent, avec cette différence qu'elles ont des signes contraires, ainsi que cela doit être, puisqu'ici la quantité x est prise du côté opposé à celui où on la prenoit d'abord. Nouvelle confirmation de ce que nous avons déjà dit plus d'une fois, que les valeurs négatives devoient être prises dans un sens opposé à celui où l'on a pris les positives.

La construction que nous avons donnée pour le cas précédent, sert aussi pour celui-ci avec ce seul changement, de porter (*fig.* 15) NV de N en K vers Q ; alors la valeur de x qui, dans le cas précédent, étoit CP, sera CK dans celui-ci. En effet, la valeur de x, qui convient au cas présent, est $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ ou $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$, c'est-à-dire, $x = -CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; puis donc que $NV = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN)}$, on a $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$; ainsi on portera CK de D en G' (*fig.* 14), et l'on aura le point G' par lequel et par le point A tirant $AG'E'$, on aura le triangle $G'DE'$ égal au quarré cc ; c'est-à-dire, la seconde solution de la question.

202. Nous avons supposé que le point A (*fig.* 14)

étoit au-dessus de la ligne BG; s'il étoit au-dessous, (*fig.* 16) la quantité b, ou la ligne AC seroit négative, et les deux premières valeurs de x seroient par conséquent $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$ ou $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; où l'on voit que le problême n'est possible alors que lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, puisque lorsqu'il est plus grand, la quantité qui est sous le radical, est négative, et par conséquent (85) les valeurs de x sont imaginaires ou absurdes. Lorsque $2a$ est plus petit que $\frac{cc}{b}$, les deux valeurs de x sont négatives; c'est-à-dire, qu'alors le problême est impossible à l'égard de l'angle HDI; mais il a deux solutions à l'égard de son égal $E'DG'$. Pour avoir ces deux solutions, il faut construire les deux valeurs $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$, ce que l'on fera de la manière suivante. Ayant déterminé, comme ci-dessus, la valeur CN de $\frac{cc}{b}$, on prendra (*fig.* 17) $NQ = 2a$, et ayant décrit sur NQ comme diamètre, le demi-cercle NVQ, on lui mènera la tangente CV; on portera ensuite CV de C en P vers N, et de C en K à l'opposite; alors NP et NK seront les deux valeurs de x; on les portera (*fig.* 16) de D en G et de D en G'; et tirant par le point A et par les points G et G' les deux droites EG, $E'G'$, chacun des deux triangles EDG,

$E'DG'$ sera égal au quarré cc. Quant à ce que nous disons que NP et NK (*fig.* 17) seront les deux valeurs de x, cela se tire de ce que (*Géom.* 124) CV étant moyenne proportionnelle entre CN et CQ, est $= \sqrt{(CQ \times CN)}$, ou (en mettant pour ces lignes, leurs valeurs) CV ou CP ou $CK = \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; donc $NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \frac{cc}{b}\right]}$; et $NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; or ces deux quantités sont les mêmes que les valeurs de x, en changeant les signes; donc ces mêmes quantités portées de D vers G (*fig.* 16) seront les valeurs de x.

203. Si le point A (*fig.* 18) étoit dans l'angle même HDI, alors BD tombant du côté opposé à celui où il tomboit d'abord, a seroit négatif et les deux valeurs primitives de x, deviendroient $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$ qui sont les mêmes (en changeant les signes) que celles que nous venons de construire. On voit donc qu'alors on doit construire, comme on l'a fait (*fig.* 17); mais porter les valeurs NP et NK de x, les porter, dis-je, (*fig.* 18) de D vers I; et l'on aura les deux triangles DEG, $DE'G'$ qui satisferont tous deux à la question.

204. Enfin, le point A (*fig.* 19) pourroit être situé au-dessous de BD, mais dans l'angle BDE'.

Alors a et b seroient tous deux négatifs, ce qui donneroit $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ qui sont précisément de signe contraire aux premières valeurs que nous avons trouvées pour x. On construira donc, comme on l'a fait (*fig.* 15). Alors CK sera la valeur positive de x, et CP sa valeur négative ; on portera la première (*fig.* 19), de D en G vers B, et l'autre à l'opposite, c'est-à-dire, de D en G'.

Nous avons insisté sur les différens cas de cette solution, pour faire voir comment une seule équation les comprend tous ; comment on les en déduit par le seul changement des signes ; comment les positions contraires des lignes sont désignées par la contrariété des signes ; et réciproquement. Il nous reste encore à indiquer quelques usages de cette même solution.

205. Si l'on proposoit cette question : *D'un point donné* A (fig. 20) *hors d'un triangle ou dans un triangle donné* DHI, *mener une ligne* AF *qui divise ce triangle en deux parties* DEF, EFIH *qui soient entr'elles dans un rapport connu et marqué par le rapport de* m : n ; cette question trouveroit sa solution dans la précédente. Car puisque le triangle DHI est donné, et que l'on sait quelle partie le triangle DEF doit être du triangle DHI ; si l'on cherche le quatrième terme de cette proportion $m + n : m ::$ la surface du triangle DHI, est à un quatrième terme ; ce quatrième terme sera la surface que doit avoir le triangle DEF. Or on peut toujours trouver un quarré cc égal à cette surface (185) ; la question est donc réduite à mener par le point A, une ligne AEF qui comprenne avec les deux côtés DH,

DI, un triangle *DEF* égal au quarré *cc*; c'est-à-dire, est réduite à la question précédente.

206. On voit encore qu'on rameneroit à la même question, celle de partager une figure rectiligne quelconque (*fig.* 21) par une ligne tirée d'un point quelconque *A*; en deux parties *BCFE*, *EFDHK*, qui fussent entr'elles dans un rapport donné. En effet, la figure *BCDHK* étant supposée connue, on connoît tous ses angles et tous ses côtés; on connoîtra donc facilement le triangle *BLC* formé par les deux côtés *KB* et *DC* prolongés, puisqu'on connoît dans ce triangle le côté *BC* et les deux angles *LBC*, *LCB* supplémens des angles connus *CBK* et *BCF*; ainsi on doit regarder la surface du triangle *LBC* comme connue; et puisque celle de *EBCF* doit être une portion déterminée de la surface totale, elle est donc connue aussi; la question est donc réduite à mener une ligne *AEF* qui forme dans l'angle *KLD*, un triangle égal à un quarré connu. Enfin, on voit par-là comment on partageroit cette figure, en un plus grand nombre de parties dont les rapports seroient donnés.

207. Une remarque qu'il est encore à propos de faire, c'est que, si quelques-unes des quantités données qui entrent dans l'équation qui sert à résoudre une question, sont telles qu'en changeant leurs signes, en signes contraires, l'équation ne change point; ou si un changement de position dans la ligne, ou les lignes cherchées de la figure, n'entraîne aucun changement de position ni de grandeur dans les lignes données; alors parmi les

différentes valeurs de x, lorsqu'il y en a plusieurs dans l'équation, on en trouvera toujours une qui sera la solution propre pour le cas qu'indique ce changement.

Par exemple, dans la question que nous venons de traiter, on a vu que l'une des valeurs de x donnoit directement la solution pour le cas où la ligne *AEG* (*fig.* 14) devoit traverser l'angle *HDI*, ainsi qu'on l'a supposé en faisant le calcul; mais on a vu en même temps que la seconde valeur de x donnoit la solution pour le cas où il s'agiroit non pas de l'angle *HDI*, mais de son opposé au sommet.

La raison en est qu'ayant dans chaque cas, les mêmes quantités données à employer, et les mêmes raisonnemens à faire, on ne peut être conduit qu'à la même équation; donc la même équation doit donner les deux solutions.

208. Supposons maintenant qu'il s'agit de *trouver sur la direction de la ligne donnée* AB (fig. 22) *un point* C *tel que sa distance au point* A, *soit moyenne proportionnelle entre sa distance au point* B *et la ligne entière* AB.

Je nommerai a, la ligne donnée AB; et x la distance cherchée AC; alors BC sera $a - x$, et puisqu'on veut que $AB : AC :: AC : CB$, ou que $a : x :: x : a - x$, il faut, en multipliant les extrêmes et les moyens, que $xx = aa - ax$, ou $xx + ax = aa$ équation du second degré qui, étant résolue, donne $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$.

Pour construire la première valeur $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, il faut selon ce qui a été enseigné (187) élever au point B la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, et ayant tiré AD, on aura $AD = \sqrt{[(BD)^2 + (AB)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa}$; il ne s'agit donc plus que de retrancher de cette ligne, la quantité $\frac{1}{2}a$, ce qui se fera en portant DB de D en O, alors AO vaudra $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)} - \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire, sera égale à x; on portera donc AO de A en C vers B, et le point C où elle aboutira sera le point cherché.

Quant à la seconde valeur de x, savoir $-\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; si l'on porte BD de D en O' sur le prolongement de AD, alors AO' vaudra $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; puis donc que la valeur de x est cette même quantité, prise négativement, on portera AO' de A en C' sur AB prolongée du côté opposé à celui vers lequel on a supposé, dans la solution, que x tendoit, et l'on aura un second point C' qui sera aussi, tel que sa distance au point A sera moyenne proportionnelle entre sa distance au point B et la ligne entière AB.

Remarquons, en passant, que cette question renferme celle de *couper une ligne donnée* AB *en moyenne et extrême raison*; aussi la construction que nous venons d'en donner, est-elle la même que celle que nous avons donnée (Géom.

(*Géom.* 125). Mais on voit que l'Algèbre nous conduit à trouver cette construction ; au lieu qu'en Géométrie, nous supposions la construction déjà trouvée, et nous en démontrions seulement la légitimité.

209. Si l'on fait un peu d'attention à la marche que nous avons observée dans les questions précédentes, on verra que nous avons toujours pris, pour l'inconnue, une ligne, qui étant une fois connue, serviroit à déterminer toutes les autres, en observant les conditions de la question. C'est ce qu'on doit toujours pratiquer ; mais il y a encore un choix à faire pour se déterminer sur cette ligne : il y en a souvent plusieurs dont chacune auroit également la propriété de déterminer toutes les autres si une fois elle étoit connue ; or parmi celles-là il en est qui conduiroient à des équations plus composées les unes que les autres. Pour aider à se déterminer dans ces cas, nous placerons ici la règle suivante.

210. *Si parmi les lignes ou les quantités qui étant prises chacune pour l'inconnue, pourroient servir à déterminer toutes les autres quantités, il s'en trouve deux qui y servent de la même manière, en sorte qu'on prévoit que l'une ou l'autre conduiroit à la même équation (aux signes + ou — près) ; alors, on fera bien de n'employer ni l'une ni l'autre, mais de prendre pour inconnue une autre quantité*

qui dépende également de l'une et de l'autre de ces deux-là ; par exemple, de prendre pour inconnue leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou un moyen proportionnel entr'elles, ou, etc. On arrivera toujours à une équation plus simple qu'en cherchant l'une ou l'autre.

La question suivante nous en fournira plusieurs exemples.

211. *D'un point* D (fig. 23) *situé dans l'angle droit* IAE, *et également éloigné des deux côtés* IA *et* AE, *mener une ligne droite* DB, *de manière que la partie* CB *comprise dans l'angle droit* EAB *soit égale à une ligne donnée.*

Ayant abaissé les perpendiculaires DE, DI, je puis indifféremment prendre pour inconnue, CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB. Si je prends, par exemple CE pour l'inconnue, alors nommant CE, x; et désignant par a, chacune des deux lignes égales DE, DI qui sont censées connues ; nommant de plus c, la ligne donnée à laquelle BC doit être égale, j'aurai $AC = AE - CE = a - x$; et les triangles semblables DEC, CAB, me donneront AB par cette proportion, $CE : DE :: AC : AB$; c'est-à-dire, $x : a :: a - x : AB$; d'où l'on tire $AB = \frac{aa - ax}{x}$. Or par la propriété du triangle-rectangle (*Géom.* 164) on a $(AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2$: substituant, au lieu de ces lignes, leurs valeurs algébriques, on aura $(a - x)^2 + \left(\frac{aa - ax}{x}\right)^2 = cc$, ou $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc$, ou, en chassant le dénominateur, transposant et réduisant, $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$; équation du quatrième degré, mais qui n'est pas, à beaucoup près, la plus simple qu'on puisse employer pour résoudre cette question.

Si, au lieu de prendre CE pour inconnue, nous prenions IB; alors nommant IB, x, et imitant la solution precédente, on auroit une équation qui ne differeroit de celle qu'on vient de trouver, qu'en ce qu'au lieu de $a - x$, on auroit $x - a$; c'est-à-dire, qui seroit absolument la même, puisque ces quantités y sont au quarré. De même, celle où l'on prendroit AB pour inconnue, ne differeroit que par les signes, de celle où l'on prendroit AC pour inconnue. A l'égard de DB et de DC, l'équation où l'une sera prise pour inconnue, ne differera que par les signes, de celle où l'on prendroit l'autre pour inconnue; il ne faut donc prendre aucune de ces lignes.

Mais si nous prenons pour inconnue la somme des deux lignes DB et DC, et si nous représentons cette somme par $2x$, alors (*Géom.* 305.)

nous aurons $DB = x + \frac{1}{2}c$, et $DC = x - \frac{1}{2}c$; or les parallèles DI et CA, nous donnent, pour trouver AB et AC, les deux proportions suivantes, $DC : CB :: IA$ ou $DE : AB$, et $DB : CB :: DI : AC$; c'est-à-dire, $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB$, et $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC$; donc $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$ et $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; donc puisque le triangle rectangle CAB, donne $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, on aura $\frac{a^2c^2}{(x-\frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x+\frac{1}{2}c)^2} = cc$; ou bien, chassant les fractions, et divisant par cc, $a^2(x + \frac{1}{2}c)^2 + a^2(x - \frac{1}{2}c)^2 = (x + \frac{1}{2}c)^2 (x - \frac{1}{2}c)^2$; faisant les opérations indiquées, transposant et réduisant, on a $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, équation du quatrième degré, à la vérité, mais plus facile à résoudre que la précédente, puisque (141) elle se résout à la manière de celles du second degré.

On parviendra encore à des équations assez simples si on emploie deux inconnues, dont l'une soit la somme des deux lignes AB et AC, et l'autre leur différence; c'est-à-dire, si l'on fait $AB + AC = 2x$, et $AB - AC = 2y$, ce qui donnera $AB = x + y$ et $AC = x - y$; le triangle-rectangle ABC donnera $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, et les triangles semblables ABC, IBD donneront $AB : AC :: IB : ID$; ce qui donnera les deux équations nécessaires pour déterminer x et y ; de l'une on tirera la valeur de xx, qui étant substituée dans l'autre, donnera pour y, une équation du second degré. Mais nous laissons aux commençans à achever ce calcul pour s'exercer, et nous revenons à notre équation.

Conformément à ce qui a été enseigné (141), on aura $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 = (\frac{1}{4}cc + aa)^2 + \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4 = aacc + a^4$; tirant la racine quarrée, $x^2 - (\frac{1}{4}cc + aa) = \pm\sqrt{(aacc + a^4)}$, et par conséquent $x^2 = \frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}$: tirant de nouveau la racine quarrée, nous aurons enfin . . . . $x = \pm\sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa \pm \sqrt{(aacc + a^4)}]}$ ou $x = \pm\sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa \pm a\sqrt{(cc + aa)}]}$.

Des quatre valeurs de x que donne la double combinaison des deux signes $\pm$, il n'y en a qu'une qui appartienne à la question telle qu'elle a été proposée, et cette valeur est . . . . . . $x = +\sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa + a\sqrt{(cc + aa)}]}$.

La valeur $x = +\sqrt{[\frac{1}{4}cc + aa - a\sqrt{(cc + aa)}]}$ résout la question pour le cas où l'on demanderoit que la ligne CB fût dans le même angle que le point D (*voyez fig.* 24) ; et alors x représente, non pas la demi-somme, mais la demi-différence des deux lignes DB et DC ; c'est ce dont il est facile de se convaincre en nommant $2x$ cette différence, et résolvant le problême de la même manière que ci-dessus ; car on aura $DB = \frac{1}{2}c + x$, $CD = \frac{1}{2}c - x$, et les parallèles DI et CA donneront $DB : CB :: DI : CA$, et $DC : CB :: AI : AB$, ou $\frac{1}{2}c + x : c :: a : CA$, et $\frac{1}{2}c - x : c :: a : AB$; donc $CA = \frac{ac}{\frac{1}{2}c + x}$, et $AB = \frac{ac}{\frac{1}{2}c - x}$; donc à cause du triangle rectangle CAB, on aura $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c + x)^2} + \frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c - x)^2} = c^2$, ou, après les mêmes opérations que ci-dessus, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, équation qui est absolument la même que celle que nous venons de trouver pour la somme des deux lignes BD et CD (*fig.* 23.). Donc la même équation satisfaisant aux deux cas, l'une des racines doit donner la somme, et une autre doit donner la différence ; or il est facile de voir que les deux que l'on doit prendre, sont celles que nous venons d'indiquer, puisque les deux autres racines étant toutes négatives, ne peuvent appartenir qu'à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.

Quant à ces deux autres racines, pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou du moins, dans l'équation, si le point D (*fig.* 23) est, comme on l'a supposé d'abord, au-dessous de AI et à gauche de AE, ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première, et à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de $A'I'$ et de $A'E'$; or dans ce cas, la quantité a tombant de côtés opposés à ceux où elle tomboit d'abord, est négative, donc on aura la solution qui convient à ce cas, si l'on met $-a$, au lieu de $+a$ dans l'équation $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2$ etc. trouvée ci-dessus; mais comme cette équation ne change pas alors, il s'ensuit que cette même équation doit aussi résoudre ces deux nouveaux cas; donc les deux autres valeurs de x sont, l'une, la somme des deux lignes DB' et DC' (*figure* 23); et l'autre leur différence (*figure* 24). Et l'on voit en effet que dans cette nouvelle position, les points B et C tombent de côtés opposés à ceux où ils tomboient d'abord, et que par conséquent la somme, ainsi que la différence des deux lignes DB' et DC' doit être négative, comme l'équation les donne en effet.

Pour construire la solution qu'on vient de trouver, on prendra sur EA prolongée (*fig.* 23 *et* 24), la partie $AN = c$, et ayant tiré IN, on portera cette dernière sur DI prolongée de I en K; sur DK comme diamètre, on décrira le demi-cercle KLD rencontré en L par AI prolongée. Du milieu H de AN, on tirera IH que l'on portera de I en M (*fig.* 23), et on aura LM pour la première valeur de x; mais dans la *figure* 24, on décrira du point L comme centre, et d'un rayon égal à IH, un petit arc qui coupe IK en M, et IM sera la seconde valeur de x; et puisqu'on a $BD = x + \frac{1}{2}c$, on aura BD

$= LM + AH$ (*fig.* 23), et $BD = IM + AH$ (*fig.* 24) ; ainsi il n'y aura plus qu'à décrire du point D comme centre, et du rayon BD qu'on vient de déterminer, un arc qui coupe IA prolongée en quelque point B, la droite BD sera telle qu'on la demande. En effet, le triangle rectangle IAN (*figures* 23 *et* 24) donne IH ou $IK = \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(aa + cc)}$, et puisque LI est moyenne proportionnelle entre DI et IK, on a $IL^2 = DI \times IK = a\sqrt{(aa + cc)}$; or le triangle rectangle IAH donne IH ou $MI = \sqrt{(IA^2 + AH^2)} = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}cc)}$, et le triangle rectangle LIM donne (*fig.* 23) $LM = \sqrt{(MI^2 + IL^2)} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{(aa + cc)}]} = x$; et (*fig.* 24) $IM = \sqrt{(LM^2 - IL^2)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa + cc)}]} = x$.

Il faut remarquer au sujet de cette dernière valeur, que la construction que nous venons d'en donner, suppose que IH (*fig.* 24) est plus grand que LI, ou tout au plus égal. S'il étoit plus petit, la question seroit impossible pour ce dernier cas ; c'est ce que fait voir aussi l'Algèbre, car dans la valeur $\ldots\ldots\ldots\ldots$ $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa + cc)}]}$, si $aa + \frac{1}{4}cc$, qui est $(IH)^2$, est plus petit que $a\sqrt{(aa + cc)}$ qui est $(IL)^2$, la quantité que couvre le radical supérieur, sera négative, et par conséquent la valeur de x sera imaginaire.

212. En prenant pour inconnue la somme des deux lignes DB et DC (*fig.* 23) ou leur différence (*fig.* 24), nous sommes arrivés à une équation plus simple qu'en prenant CE, ou AC, ou AB, ou IB, parce que la relation des lignes DB et DC aux lignes IB et AB est semblable à celle que les mêmes lignes DB et DC ont avec les lignes AC et CE; c'est-à-dire, qu'elles peuvent être déterminées par des opérations semblables en employant IB et AB, ou AC et CE. En général, comme l'équation doit renfermer tous les différens rapports que la quantité cherchée peut avoir avec celles dont elle dépend, cette équation sera toujours d'autant plus simple que la quantité qu'on choisira pour inconnue, aura moins de rapports différens avec les autres.

213. Supposons que $ABED$ (*fig.* 25) représente une sphère engendrée par la rotation du demi-cercle ABE autour du diamètre AE. Le secteur ABC, dans ce mouvement, engendre un secteur sphérique qui est composé d'un segment sphérique engendré par la rotation du demi-segment ABP, et d'un cône engendré par le triangle rectangle BPC. On demande en quel endroit le segment sphérique et le cône seront égaux entr'eux.

Pour résoudre cette question, il faut se rappeler (*Géom.* 247) que le secteur sphérique est égal au produit de la surface de la calotte BAD par le tiers du rayon AC. Or la surface de la calotte (*Géom.* 226) se trouve en multipliant la circonférence $ABED$ par la hauteur AP de cette calotte. Donc si on représente par le rapport de $r : c$, le rapport du rayon d'un cercle à sa circonférence, et si l'on nomme AC, a; AP, x; on aura la circonférence $ABDE$ par cette proportion $r : c :: a : ABDE$ qui sera donc $\frac{ca}{r}$; donc la surface de la calotte sera $\frac{cax}{r}$, et par conséquent, la solidité du secteur sera $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ ou $\frac{caax}{3r}$.

Pour avoir la solidité du cône, il faut multiplier la surface du cercle qui lui sert de base, c'est-à-dire la surface du cercle qui a pour rayon BP, par le tiers de la hauteur CP: or puisque $CP = CA - AP = a - x$, et que $CB = a$, on aura dans le triangle rectangle BPC, $BP = \sqrt{(CB^2 - CP^2)} = \sqrt{(aa - aa + 2ax - xx)} = \sqrt{(2ax - xx)}$; mais pour avoir la surface du cercle qui a pour rayon BP, il faut multiplier sa circonférence par la moitié du rayon, et pour avoir cette circonférence, il faut calculer le quatrième terme de cette proportion $r : c :: \sqrt{(2ax - xx)}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{c\sqrt{(2ax - xx)}}{r}$; multipliant donc par la moitié du rayon $\sqrt{(2ax - xx)}$, on aura $\frac{c.(2ax - xx)}{2r}$ pour la surface de la base du cône ; multipliant cette surface par le tiers de la hauteur CP, c'est-à-dire, par $\frac{a - x}{3}$, on aura $\frac{c.(2ax - xx)}{2r} \times \frac{a - x}{3}$ pour la solidité du cône ; or pour que le cône soit égal au segment, il faut que le secteur qui est la somme des deux, soit double de l'un ou de l'autre, il faut donc que $\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a - x}{3}$, ou $\frac{caax}{3r} = \frac{c.(2ax - xx).(a - x)}{3r}$, en supprimant 2, facteur commun du numérateur et du dénominateur ; telle est l'équation qui résoudra la question. On peut simplifier cette équation en supprimant $3r$, qui est diviseur commun, et cx qui est multiplicateur commun des deux membres ; alors on aura $aa = (2a - x).(a - x)$, ou $xx - 3ax = - aa$; d'où l'on tire, selon les règles de la première section, $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$; or de ces deux solutions, il n'y a que $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ qui puisse satisfaire, puisqu'il est évident que $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ valant plus que $2a$, c'est-à-dire, plus que le diamètre, la solution qu'elle indique, ne peut convenir à la sphère.

Si l'on veut construire la solution $x = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, on lui donnera cette forme $x = \frac{3}{2}a -$

$\sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; et ayant pris $AM = \frac{3}{2}a$, on décrira sur AM comme diamètre, le demi-cercle AOM, et ayant inscrit la corde AO égale à a, on tirera OM que l'on portera de M en P vers A; le point P où elle aboutira, déterminera la hauteur AP ou x. En effet, à cause du triangle rectangle AOM on a OM ou $PM = \sqrt{(AM^2 - AO^2)} = \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)}$; donc $AP = AM - PM = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}aa - aa)} = x$.

Quand à la seconde solution $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, elle n'appartient point, ainsi que nous venons de le dire, à la question présente; mais elle appartient, ainsi que la première, à cette autre question abstraite, que la lecture de l'équation $xx - 3ax = -aa$, ou $3ax - xx = aa$, fournit: *la ligne connue* AN (fig. 26) *étant partagée en trois parties égales aux points* B *et* D, *trouver sur la direction de cette ligne un point* P, *tel que la partie* AD *soit moyenne proportionnelle entre les distances du point* P *aux extrémités* A *et* N? En effet, si l'on nomme a le tiers AD de la ligne connue AN, et AP, x, on aura $PN = 3a - x$; et les conditions de la question donnent cette proportion $x : a :: a : 3a - x$, d'où l'on tire cette équation $3ax - xx = aa$, dont les deux racines sont $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ comme ci-dessus; on les aura toutes deux aussi par la même construction, excepté que pour la seconde, c'est-à-dire, pour $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, on portera MO de M en P' vers N, et alors AP et AP' seront les deux valeurs de x.

Autres Applications de l'Algèbre, à divers objets.

214. Les corps que nous avons considérés en Géométrie, reviennent souvent dans plusieurs questions, et principalement dans les questions Physico-mathématiques, parce qu'ils sont les élémens de tous les autres. Il est donc à propos de se familiariser avec les expressions algébriques, soit de leur totalité, soit de leurs parties. Outre que cela sera utile dans la suite de ce Cours, cela nous fournira encore l'occasion de faire voir l'utilité de l'Algèbre pour la comparaison de ces corps, et pour la mesure de ceux qu'on peut y rapporter.

Si l'on représente en général par $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle [rapport que l'on connoît avec une exactitude plus que suffisante (*Géom.* 146) pour la pratique]; alors la circonférence de tout autre cercle dont le rayon seroit a, sera $\frac{ca}{r}$, et sa surface $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2}a$, ou $\frac{ca^2}{2r}$.

On voit par-là que les surfaces des cercles croissent comme les quarrés de leurs rayons ; car $\frac{c}{2r}$ étant toujours de même valeur, la quantité $\frac{ca^2}{2r}$ ne croît qu'à proportion de ce que croît a^2.

Si h est la hauteur d'un cylindre dont le rayon de la base est a, on aura (*Géom.* 237) $\frac{ca^2}{2r} \times h$ pour sa solidité ; par la même raison, on aura $\frac{cd^2}{2r} \times h'$, pour la solidité d'un autre cylindre dont la hauteur seroit h', et dont le rayon de la base seroit a' ; en sorte que les solidités de ces deux cylindres seront entr'elles :: $\frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{cd^2}{2r} \times h'$, ou :: $a^2 h : a'^2 h'$, en supprimant le facteur commun $\frac{c}{2r}$; c'est-à-dire, que les solidités des cylindres sont comme les produits de leurs hauteurs par les quarrés des rayons de leurs bases. Si les hauteurs sont proportionnelles aux rayons des bases, alors on a $h : h' :: a : a'$, et par conséquent $h' = \frac{ha'}{a}$; et le rapport $a^2 h : a'^2 h'$ devient $a^2 h : \frac{a'^3 h}{a}$, ou, (en supprimant le facteur commun h, multipliant par a, et supprimant le dénominateur a) devient $a^3 : a'^3$; c'est-à-dire, qu'alors les solidités sont comme les cubes des rayons des bases.

En général, les surfaces, comme nous l'avons vu en Géométrie, dépendent du produit de deux dimensions, et les solides du produit de trois dimensions; ainsi si chaque dimension de l'un de deux solides ou de deux surfaces que l'on compare, est à chaque dimension de l'autre, dans le même rapport, ces deux surfaces seront entr'elles comme les quarrés, et ces deux solides seront comme les cubes de deux dimensions homologues; et plus généralement encore, si deux quantités quelconques de même nature, sont exprimées par le produit de tant de facteurs qu'on voudra, et si chaque facteur de l'une est à chaque facteur de l'autre, dans un même rapport, ces deux quantités seront entr'elles comme un facteur homologue de chacune élevé à une puissance d'un degré égal au nombre de ces facteurs. Par exemple, si une quantité est exprimée par $a\,b\,c\,d$ et une autre par $a'\,b'\,c'\,d'$, auquel cas ces deux quantités sont l'une à l'autre :: $a\,b\,c\,d : a'\,b'\,c'\,d'$, alors si l'on a $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on tirera des porportions que donnent ces rapports, $b' = \frac{a'\,b}{a}$, $c' = \frac{a'\,c}{a}$, $d' = \frac{a'\,d}{a}$, et par conséquent le rapport $a\,b\,c\,d : a'\,b'\,c'\,d'$, deviendra $a\,b\,c\,d : \frac{a'^4\,b\,c\,d}{a^3}$, ou $a : \frac{a'^4}{a^3}$, ou $a^4 : a'^4$.

La même chose auroit lieu, quand même ces quantités ne seroient pas exprimées par des monomes; si, par exemple, elles étoient exprimées, l'une par $ab + cd$, et l'autre par $a'b' + c'd'$, dans le cas où les dimensions de la première seront proportionnelles aux dimensions de la seconde, ces quantités seront l'une à l'autre $:: a^2 : a'^2$; en effet, puisqu'on suppose que $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on aura $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, et par conséquent le rapport $ab + cd : a'b' + c'd'$ deviendra $ab + cd : \frac{a'^2 b}{a} + \frac{a'^2 cd}{a^2}$, ou $ab + cd : \frac{a'^2 ab + a'^2 cd}{a^2}$, ou $a^2 (ab + cd) : a'^2 (ab + cd)$, ou enfin $a^2 : a'^2$.

Cette dernière observation démontre d'une manière générale, que les surfaces des figures semblables sont comme les quarrés de deux de leurs dimensions homologues, et les solidités des solides semblables comme les cubes; car quelles que soient ces figures ou ces solides, les premières peuvent toujours être considérées comme composées de triangles semblables dont les hauteurs et les bases sont proportionnelles dans chaque figure; et les derniers peuvent être considérés comme composés de pyramides semblables dont les trois dimensions sont aussi proportionnelles.

On

On voit par-là comment on peut comparer facilement les quantités, lorsqu'on en a l'expression algébrique ; et cela, soit que ces quantités soient de même espèce ou d'espèce différente, comme un cône et une sphère, un prisme et un cylindre, pourvu seulement qu'elles soient de même nature ; c'est-à-dire, ou toutes deux des solides, ou toutes deux des surfaces, ou toutes deux, etc.

Par exemple, si on veut comparer le rapport des solidités à celui des surfaces : en représentant les solidités ou volumes de deux corps semblables par V et u ; leurs surfaces par S et s ; leurs lignes homologues par L et l ; on aura $V : u :: L^3 : l^3$ ou $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} :: L : l$. Pareilllement, on aura $\sqrt{S} : \sqrt{s} :: L : l$; donc $\sqrt[3]{V} : \sqrt[3]{u} :: \sqrt{S} : \sqrt{s}$, ou $V : u :: \sqrt{S^3} : \sqrt{s^3}$, ou $\sqrt[3]{V^2} : \sqrt[3]{u^2} :: S : s$, qui fait voir que les surfaces augmentent dans un moindre rapport que les solidités.

215. Nous avons dit (*Géom.* 243) comment on devoit s'y prendre pour avoir la solidité d'une pyramide tronquée ou d'un cône tronqué. Si donc on nomme h la hauteur de la pyramide entière, et h' la hauteur de la pyramide retranchée ; s la surface de la base inférieure, et s' celle de la base supérieure, on aura (*Géom.* 202), $s : s' :: h^2 : h'^2$; et par conséquent $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$ ou

$h' = h\sqrt{\left(\frac{s'}{s}\right)}$; mais si on nomme k la hauteur du tronc, on aura $k = h - h'$, et par conséquent $k = h - h\sqrt{\left(\frac{s'}{s}\right)}$ ou $k = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$; d'où l'on tire $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}$. Or la solidité de la pyramide totale est $s \times \frac{h}{3}$, et celle de la pyramide retranchée est $s' \times \frac{h'}{3}$, ou (en mettant pour h' la valeur qu'on vient de trouver) $s' \times \frac{h}{3} \sqrt{\frac{s'}{s}}$; donc la solidité du tronc sera $\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}$ ou $\frac{h}{3} \cdot \left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$, ou enfin $\frac{h}{3} \cdot \left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$; mettons donc pour h la valeur que nous venons de trouver, et nous aurons $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s} - \sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, qui se réduira à $\frac{k}{3}\left(\frac{s\sqrt{s} - s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s} - \sqrt{s'}}\right)$, ou, en faisant la division par $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$, se réduit à $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$, qui nous apprend que toute pyramide ou tout cône tronqué est composé de trois pyramides de même hauteur, dont l'une a pour base la base inférieure s du tronc, l'autre la base supérieure s', et la troisième, une moyenne proportionnelle $\sqrt{ss'}$ entre la base supérieure s' et la base inférieure s; car pour avoir la solidité de ces trois pyramides, il suffiroit, puisqu'elles sont de même hauteur, de réunir les trois bases, ce qui donneroit $s + \sqrt{ss} + s'$, et de multiplier la totalité par le tiers $\frac{k}{3}$ de la hauteur commune, ce qui donne la même quantité qu'on vient de trouver.

De-là on peut déduire une formule assez simple pour la solidité d'un cône tronqué, creusé cylindriquement et concentriquement à son axe. En effet, soit m le rayon du cylindre creux; e la plus petite épaisseur, E la plus grande. La surface du cercle étant égale (*Géom.* 157) au quarré du rayon, multiplié par le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura $\frac{c}{2r} \times (m+e)^2$, $\frac{c}{2r} \times (m+E)^2$, et $\frac{c}{2r} \times (m+e)(m+E)$ pour les trois surfaces dont il vient d'être question; multipliant donc la totalité par le tiers de la hauteur h, et retranchant la solidité $\frac{c}{2r} \times m^2h$ ou $\frac{c}{6r} \times 3m^2h$ du cylindre intérieur, on aura $\frac{ch}{6r} \times [(3E+3e) \times m + E^2 + Ee + e^2]$ ou $\frac{ch}{2r} \times [(E+e)(3m+E)+e^2]$ pour la solidité cherchée.

Cette formule peut servir pour trouver le poids d'une pièce de canon dont on connoît les dimensions, un canon n'étant autre chose que l'assemblage de trois cônes tronqués, creusés cylindriquement, dont le premier forme le premier renfort, le second le second renfort, et le troisième la volée; à quoi l'on ajoutera le cylindre qui forme l'épaisseur de la culasse dans le fond de l'ame. A l'égard des tourillons, anses, et toutes les moulures; on peut les évaluer à environ six fois un tourillon dans les pièces construites suivant l'Ordonnance de 1732, et à cinq fois un tourillon pour les pièces de campagne légères.

216. Si a représente le rayon d'une sphère, $\frac{ca^2}{2r}$ sera la surface de son grand cercle; $\frac{4ca^2}{2r}$ ou $\frac{2ca^2}{r}$ sera la surface de cette même sphère. et par conséquent $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, ou $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ sera sa solidité (*Géom.* 223 *et* 244).

Si l'on nomme x la hauteur d'un segment quelconque, on aura, comme nous l'avons vu dans la solution de la dernière question (213), $\frac{caax}{3r}$ pour la solidité du secteur, et $\frac{c}{2r} \times (2ax - xx) \times \frac{a-x}{3}$ pour celle du cône qui en fait partie; donc celle du segment sera . . .

$$\frac{caax}{3r} - \frac{c}{2r} \cdot (2ax - xx) \cdot \frac{a-x}{3} =$$

$$\frac{c}{3r}\left[aax - \frac{(2ax - xx)}{2} \times (a - x)\right] =$$

$$\frac{c}{3r} \cdot \frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2} =$$

$$\frac{c}{3r} \cdot \frac{3axx - x^3}{2} = \frac{c}{6r} \cdot (3ax^2 - x^3).$$

Quand on a les expressions algébriques des quantités, il est facile, après cela, de résoudre plusieurs questions qu'on peut faire sur ces mêmes quantités.

Par exemple, si l'on demandoit quelle doit être la hauteur d'un cône qui seroit égal en solidité à une sphère donnée, et qui auroit pour rayon de sa base le rayon de la sphère : en nommant h cette hauteur et a le rayon de la base, on aura $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2 h}{3}$ pour la solidité de ce cône ; et puisqu'il doit être égal à la sphère qui a aussi pour rayon a, on aura $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2 h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$, d'où l'on tire $h = 4a$, en effaçant, dans chaque membre, le facteur commun $\frac{c}{2r} \cdot \frac{a^2}{3}$.

Cette valeur de h nous fait connoître que la hauteur doit être double du diamètre de la sphère, ce qui doit être en effet; car la sphère étant (*Géom.* 246) les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, doit être le double d'un cône de même base et de même hauteur que ce cylindre, c'est-à-dire, égale à un cône de même base et d'une hauteur double.

217. Pour donner encore un exemple, proposons-nous cette question.

Connoissant le poids d'une mesure connue de poudre, on demande les dimensions que doit avoir une mesure cylindrique, capable de contenir un poids donné de poudre, le rapport de la hauteur au diamètre de cette mesure, étant déterminé.

Soit $m : n$ le rapport de la hauteur au diamètre, et x la hauteur; $\frac{nx}{m}$ sera le diamètre, et $\frac{c}{8r} \times \frac{n^2 x^3}{m^2}$ la solidité. Supposons que p soit le poids de la quantité de poudre que peut contenir un cylindre, dont la hauteur seroit égale au diamètre de la base, et dont par conséquent la solidité seroit $\frac{c}{8r} \times a^3$; nous aurons donc en nommant P le poids de la quantité de poudre que doit contenir la mesure en question, $\frac{c}{8r} a^3 : \frac{c}{8r} \times \frac{n^2 x^3}{m^2} :: p : P$; d'où l'on tire $x = a \sqrt[3]{\left(\frac{m^2 P}{n^2 p}\right)}$.

Un cylindre de 12 pouces de hauteur et 12 pouces de diamètre, contient à-peu-près 51 livres de poudre; ainsi si l'on vouloit une mesure cylindrique qui contînt 4 liv. $\frac{1}{2}$ de poudre, et dont le diamètre fût les $\frac{3}{4}$ de la hauteur, on feroit $a = 12$; $p = 51$; $P = 4,5$; $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$, et l'on trouveroit $x = 6^{\text{Po.}}, 47$.

Des Lignes courbes en général, et en particulier des Sections coniques.

218. Parmi les lignes courbes que l'on considère en Géométrie, les unes sont telles que chacun de leurs points peut être déterminé par une même loi; c'est-à-dire par des calculs et des opérations semblables : dans d'autres, chaque point se détermine par une loi différente, c'est-à-dire, par des calculs ou des opérations différentes; mais cette différence elle-même est assujettie à une loi.

Quant aux lignes tracées au hasard, telles que seroient par exemple, les traits qu'imprime sur le papier, la plume d'un écrivain, ils ne peuvent être l'objet d'une Géométrie rigoureuse. Néanmoins les recherches dont celle-ci s'occupe conduisent même à imiter, par des procédés directs et certains, des contours qui ne semblent assujettis à aucune loi; et l'art de lier ainsi, par des rapports approchés, des quantités dont la loi véritable seroit ou inconnue ou trop composée, n'est pas une des applications les moins utiles de la Géométrie et de l'Algèbre.

Pour pouvoir tracer les lignes courbes qui font l'objet de la Géométrie, il faut donc connoître la loi à laquelle sont assujettis les différens points de leur contour. Or cette loi peut être donnée de plusieurs manières : ou en indiquant un procédé par lequel ces courbes peuvent être décrites d'un mouvement continu; tel est le cercle qui se décrit en faisant tourner dans un plan, une ligne donnée, et autour d'un point donné. Ou bien en faisant connoître quelque propriété qui appartienne constamment à chacun des points de cette courbe. Enfin cette loi peut être donnée par une équation, et on peut toujours supposer qu'elle est donnée par ce dernier moyen, parce que les deux autres dont nous venons de faire mention servent à trouver l'équation qui exprime cette loi. C'est sous ce dernier point de vue que nous allons principalement considérer les courbes. C'est tout-à-la-fois le plus simple et le plus fécond pour en connoître les propriétés, les singularités et les usages. Voyons donc comment une équation peut exprimer la nature d'une courbe, et puisque jusqu'ici nous ne connoissons encore que la circonférence du cercle, commençons par celle-ci.

219. Supposons donc que AMB (*fig.* 27) est une courbe à laquelle nous ne connoîtrions encore d'autre propriété que celle-ci ; que la perpendiculaire PM abaissée d'un point quelconque M de cette courbe, sur la ligne AB, est moyenne proportionnelle entre les deux parties AP et PB. Voyons comment l'Algèbre peut nous aider à trouver chacun des points de cette courbe, et ses différentes propriétés.

Si je nomme a la ligne AB ; la partie AP, x ; et la perpendiculaire PM, y ; alors PB sera $a - x$; et puisque nous supposons PM moyenne proportionnelle entre AP et PB, nous aurons $x : y :: y : a - x$; et par conséquent, $yy = ax - xx$.

Concevons maintenant que AB soit partagé en un certain nombre de parties égales, en 10 par exemple ; et que par chaque point de division on élève des perpendiculaires pm, pm, pm, etc. il est visible que si, dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on suppose x successivement égal à chacune des lignes Ap, Ap, etc. y deviendra égal à chaque ligne correspondante pm, pm, etc. puisque l'équation $yy = ax - xx$ exprime que y est toujours moyenne proportionnelle entre x et $a - x$, quel que soit d'ailleurs x, ce qui est la propriété que nous supposons à chaque perpendiculaire pm. Donc on peut trouver successivement chacun des points de cette courbe, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, et calculant les valeurs correspondantes de y : en voici un exemple.

Dans la supposition que nous venons de faire, que a est divisé en 10 parties, ou qu'il est composé de 10 parties, nous aurons $a = 10$, et par conséquent l'équation devient $yy = 10x - xx$. Si donc nous supposons successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$, $x = 10$; on trouvera successivement $y = \sqrt{9}$, $y = \sqrt{16}$, $y = \sqrt{21}$, $y = \sqrt{24}$; $y = \sqrt{25}$, $y = \sqrt{24}$, $y = \sqrt{21}$, $y = \sqrt{16}$, $y = \sqrt{9}$, $y = \sqrt{0}$; ou bien $y = 3$; $y = 4$; $y = 4, 5$; $y = 4, 9$; $y = 5$; $y = 4, 9$; $y = 4, 5$; $y = 4$; $y = 3$; $y = 0$. Ainsi, si l'on porte ces valeurs de y successivement sur les perpendiculaires correspondantes aux valeurs 1, 2, 3, etc. de x, les points m, m, déterminés de cette manière appartiendront tous à une courbe qui aura cette propriété que chaque perpendiculaire pm sera moyenne proportionnelle entre les deux parties Ap et pB de la droite AB, courbe que nous allons voir, dans un moment, être la circonférence même du cercle.

Nous avons vu que toute racine paire avoit deux valeurs, l'une positive, l'autre négative. Ainsi outre les valeurs de y que nous venons de trouver, on a encore ces autres-ci, $y = -3$; $y = -4$; $y = -4, 5$; $y = -4, 9$; $y = -5$; $y = -4, 9$; $y = -4, 5$; $y = -4$; $y = -3$; $y = 0$.

Pour avoir les points de la courbe qu'annoncent ces nouvelles valeurs de y, il faut, conformément à ce que nous avons déjà dit plusieurs fois sur les quantités négatives, prolonger les perpendiculaires pm, pm, etc. et porter à l'opposite, c'est-à-dire, de p en m', les quantités pm', pm', etc. égales chacune à sa correspondante pm.

Si l'on veut avoir un plus grand nombre de points de la courbe, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer AB divisé en un plus grand nombre de parties, par exemple en 100; c'est-à-dire, supposer $a = 100$; ou bien en conservant à a la même valeur 10, que ci-dessus, supposer à x des valeurs intermédiaires entre celles qu'on lui a données ci-dessus; on trouvera de même les valeurs intermédiaires de y, et par conséquent de nouveaux points de la courbe.

La valeur $y = 0$, qu'on a trouvée ci-dessus, fait voir que la courbe rencontre la ligne AB au point B ou $x = a = 10$, puisque la perpendiculaire pm ayant alors pour valeur zéro, la distance du point m à la droite AB est nulle. On peut voir, aussi avec facilité, qu'elle doit rencontrer la ligne AB au point A : en effet, puisqu'aux endroits où la courbe rencontre cette ligne, la valeur de y doit être o; pour savoir quels sont ces endroits, il n'y a qu'à supposer que y est zéro dans l'équation $yy = ax - xx$; ce qui la réduit à $0 = ax - xx$; or $ax - xx$ étant $= x \times (a - x)$, ce produit est zéro, dans deux cas, lorsque $x = 0$, et lorsque $x = a$. Donc réciproquement y sera aussi zéro dans ces deux cas; or x est évidemment $= 0$ au point A, et il est $= a$, au point B; donc la courbe rencontre en effet la ligne AB, aux points A et B.

D'après cet exemple, on peut commencer à apercevoir comment une équation sert à déterminer les différens points d'une courbe. Nous en verrons d'autres exemples; mais auparavant expliquons-nous sur certains mots dont nous ferons usage par la suite.

220. Lorsqu'on veut exprimer, par une équation, la nature d'une ligne courbe, on rapporte, ou l'on conçoit qu'on rapporte chacun des points m, m, etc. à deux lignes fixes AB et OAO, qui font entr'elles un angle déterminé (aigu, droit ou obtus); et en imaginant que de chaque point m on mène les lignes mp et mp' parallèles aux lignes OAO et AB, il est évident qu'on connoîtra la situation de ce point, si l'on connoît les valeurs des lignes mp' ou Ap et pm, ou (ce qui revient au

même) si l'on connoît l'une de ces lignes, et son rapport avec l'autre. Or ce que l'on entend, lorsqu'on dit qu'une équation exprime la nature d'une ligne courbe, c'est que cette équation donne le rapport qu'il y a, pour chaque point m, entre la ligne Ap et la ligne pm, en sorte que l'une étant connue, l'équation fait connoître l'autre; et selon que ce rapport est plus ou moins composé, la courbe est elle-même d'un ordre plus ou moins élevé.

Les lignes Ap ou mp', qui mesurent la distance de chaque point m à l'une OAO des deux lignes de comparaison, s'appellent les *abscisses;* et les lignes mp ou $p'A$ qui mesurent la distance à l'autre ligne AB de comparaison, s'appellent les *ordonnées;* la ligne AB s'appelle l'*axe des abscisses*, et la ligne OAO s'appelle l'*axe des ordonnées.* Le point A d'où l'on commence à compter les abscisses, s'appelle l'*origine des abscisses;* on appelle de même *origine des ordonnées*, celui d'où l'on commence à compter les ordonnées Ap' ou pm: dans la *fig.* 27, ces deux points sont un seul et même point, savoir le point A; rien n'assujettit à compter les abscisses depuis le même point d'où l'on compte les ordonnées; mais quand aucune circonstance ne détermine à faire autrement, il est toujours plus simple de les compter du même point.

Les lignes Ap, pm, se nomment d'un nom commun, les *coordonnées de la courbe;* et considérées comme appartenant indifféremment à un point quelconque de la courbe, on les appelle des *indéterminées;* on donne le même nom aux lettres ou signes algébriques x et y par lesquelles on représente ces lignes Ap et pm.

221. Revenons maintenant à notre équation, et voyons comment on peut en tirer les propriétés de la courbe.

1°. Du milieu C de AB, tirons, à un point quelconque M de la courbe, la droite CM; en quelqu'endroit que ce soit, le triangle MPC sera toujours rectangle, et l'on aura, par conséquent, $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$, c'est-à-dire, (puisque $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$), $yy + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; or puisque la droite MP, ou y, est par-tout moyenne proportionnelle entre AP et PB, on a, par-tout, $yy = ax - xx$; on aura donc aussi, par-tout, $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; c'est-à-dire, $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$, qui donne $MC = \frac{1}{2}a$; chaque point M ou m, est donc également éloigné du point C; la courbe est donc une circonférence de cercle.

2°. D'un point quelconque M ou m de la courbe, menons aux deux extrémités A et B, les droites MA et MB; les triangles rectangles MPA, MPB, nous donneront $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$, et $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$, ou en mettant les valeurs algébriques, $xx + yy = (AM)^2$, et $aa - 2ax + xx + yy = (MB)^2$; donc en ajoutant ces deux équations, et mettant pour yy sa valeur $ax - xx$, on aura $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$; c'est-à-dire, $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; propriété du triangle rectangle, et qui par conséquent nous fait connoître que l'angle AMB est toujours droit en quelqu'endroit que soit le point M sur la courbe, (*voyez Géom.* 65).

3°. Si dans l'équation $xx + yy = (AM)^2$; on met pour yy, sa valeur $ax - xx$, on aura $(AM)^2 = ax$, qui donne cette proportion $a : AM :: AM : x$, ou $AB : AM :: AM : AP$; c'est-à-dire, que la corde AM est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le segment ou l'abscisse AP; (*voyez Géom.* 112).

On trouveroit de même toutes les autres propriétés du cercle que nous avons démontrées en Géométrie, et cela en partant toujours de cette supposition, que l'ordonnée PM ou pm est moyenne proportionnelle entre AP et PB, ou Ap et pB.

Nous avons compté les abscisses, depuis le point A origine du diamètre, et nous avons eu l'équation $yy = ax - xx$. Si nous voulions compter les abscisses depuis le centre, c'est-à-dire, prendre pour abscisses les lignes CP, Cp, etc. alors représentant chacune de ces lignes par z, nous aurions $CP = AC - AP$, c'est-à-dire, $z = \frac{1}{2}a - x$, et par conséquent $x = \frac{1}{2}a - z$. Mettant donc pour x, cette valeur dans l'équation $yy = ax - xx$, on aura $yy = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$, qui se réduit à $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, c'est-là l'équation du cercle en supposant les coordonnées perpendiculaires, et leur origine au centre.

Au reste, toute propriété qui appartiendra essentiellement à chaque point de la courbe, donnera toujours, en la traduisant algébriquement, la même équation pour la courbe; du moins tant qu'on prendra les mêmes abscisses et les mêmes ordonnées; mais quand on changera l'origine, ou la direction des coordonnées, ou toutes les deux, on pourra avoir une équation différente; mais elle sera toujours du même degré. Nous venons de voir la vérité de la dernière partie de cette proposition, dans le changement que nous venons de faire pour les abscisses; au lieu de l'équation $yy = ax - xx$, nous avons eu $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, qui étant déduite de la première, a pour base la même propriété; mais si nous partions de cette autre propriété, que chaque distance MC est toujours la même, et $= \frac{1}{2} a$; alors nommant CP, z; et PM, y; nous aurions, à cause du triangle rectangle MPC, $yy + zz = \frac{1}{4} aa$, qui donne $yy = \frac{1}{4} aa - zz$; équation qui est la même que tout-à-l'heure, quoique déduite d'une propriété différente.

De l'Ellipse.

222. Proposons-nous maintenant d'examiner quelle seroit la courbe qui auroit cette autre propriété, que la somme des deux distances $MF + Mf$ (*fig.* 28) de chacun de ses points à deux points fixes F et f, seroit toujours égale à une ligne donnée a.

Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *Ellipse*, il faut chercher une équation qui exprime quelle relation il y a, en vertu de cette propriété connue, entre les perpendiculaires PM menées de chaque point M sur une ligne déterminée tel que Ff, par exemple, et leurs distances FP ou AP à quelque point F ou A pris arbitrairement.

Dans cette vue, je prends pour origine des abscisses le point A, déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff, la ligne $CA = \frac{1}{2} a$; et ayant fait $CB = CA$, je nomme AP, x; PM,

PM, y; la ligne AF qui est censée connue, c; et la ligne FM, z; alors $FP = AP - AF$ $=$ (*) $x - c$; $Mf = FMf - FM = a - z$, et $fP = PB - Bf = AB - AP - Bf$ $= a - x - c$.

Cela posé, les triangles rectangles FPM, fPM, donnent $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$, et $(Mf)^2 = (PM)^2 + (fP)^2$, ou $zz =$ $yy + xx - 2cx + cc$, et $aa - 2az + zz =$ $yy + aa - 2ax + xx - 2ac + 2cx + cc$. Retranchant la seconde de ces deux dernières équations, de la première, et effaçant aa qui se trouvera de part et d'autre, j'ai $2az = 2ax +$ $2ac - 4cx$, et par conséquent $z = \frac{ax + ac - 2cx}{a}$; mettant donc pour z, cette valeur dans l'équation $zz = yy + xx - 2cx + cc$, j'aurai $\frac{aaxx + 2aacx + aacc - 4acx^2 - 4ac^2x + 4ccxx}{aa} =$ $yy + xx - 2cx + cc$, ou chassant le dénominateur, transposant et réduisant, $aayy =$ $4aacx - 4accx - 4acx^2 + 4ccx^2$, ou $aayy = (4ac - 4cc)\,ax + (4cc - 4ac)\,x^2$, ou, parce que $4cc - 4ac$ est la même chose

(*) Si le point M avoit été pris de manière que la perpendiculaire MP tombât entre A et F, alors FP seroit $c - x$; mais cela n'apporteroit aucun changement à l'équation finale, parce que dans la formation de cette équation, on n'emploie que le quarré de FP, qui est toujours $xx - 2cx + cc$, soit qu'il vienne de $x - c$, soit qu'il vienne de $c - x$.

que $-(4ac-4cc)$, on a $aayy=(4ac-4cc)ax-(4ac-4cc)x^2$, ou enfin $aayy=(4ac-4cc)(ax-xx)$; d'où l'on tire $yy=\frac{4ac-4cc}{aa}.(ax-xx)$.

Telle est l'équation de la courbe dont chaque point a la propriété que nous avons supposée.

223. Cette équation peut servir à décrire la courbe par points, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, comme nous l'avons fait ci-dessus à l'occasion du cercle, et calculant en même temps les valeurs de y. Comme le procédé est absolument le même, nous n'en ferons point le calcul.

224. On peut encore décrire l'ellipse par points, en cette manière; après avoir fait $CB=CA=\frac{1}{2}a$, on prend un intervalle quelconque Br, et l'on décrit au-dessus et au-dessous de AB, du point f comme centre et du rayon Br, un arc que l'on coupe en M et M' par un arc décrit du point F comme centre et du rayon Ar. Tous les points M et M' trouvés de cette manière, sont à l'ellipse.

225. La propriété fondamentale d'après laquelle nous venons de trouver l'équation, donne elle-même un moyen fort simple de décrire cette courbe par un mouvement continu. En effet, ayant choisi les deux points F et f tels qu'on les veut, on placera deux pointes ou piquets, aux deux points F et f, et y ayant fixé les deux extrémités d'un fil plus grand que la distance Ff, si l'on tend ce fil par le moyen d'un style M que l'on fera marcher, en tenant toujours ce fil tendu, ce style M tracera la

courbe en question, puisque la somme des deux distances du style aux deux points F et f sera toujours égale à la longueur totale du fil.

226. De-là il est aisé de voir, puisque FMf a été pris égale à AB, que la courbe passera par les deux points A et B. Car puisque $Cf = CF$, on aura $AF = Bf$, et par conséquent $AF + Af = Af + Bf = a$, et $BF + Bf = BF + AF = a$. C'est ce que l'équation fait voir aussi ; car pour savoir ou la courbe rencontre la droite Ff prolongée, il faut faire $y = 0$; or cette supposition donne $\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx) = 0$, et comme $\frac{4ac - 4cc}{aa}$ ne peut être zéro, il faut, pour que cette équation ait lieu, que $ax - xx$ ou $x \times (a - x) = 0$, ce qui a lieu dans deux cas; savoir, lorsque $x = 0$, c'est-à-dire, au point A; et lorsque $x = a$, c'est-à-dire, au point B.

227. L'équation fait voir aussi que la courbe s'étend au-dessous comme au-dessus de la ligne AB, et qu'elle est absolument la même de part et d'autre de l'axe AB. En effet, cette équation donne $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)\right]}$, qui fait voir que pour chaque valeur de x ou de AP il y a deux valeurs de y ou de PM parfaitement

égales, mais qui étant de signes contraires, doivent être portées de côtés opposés.

Il est encore évident que si sur le milieu C de AB on élève la perpendiculaire DD', la courbe sera partagée en deux parties parfaitement égales et semblables : c'est une suite immédiate de la description ; c'est aussi une suite de l'équation ; mais on l'en conclura plus aisément, quand nous aurons fait, sur cette équation, les autres remarques qui nous restent à faire.

228. La ligne AB s'appelle le *grand axe* de l'ellipse, et la ligne DD' le *petit axe*. Les deux points F et f s'appellent les *foyers*. Les points A, B, D, D', sont les *sommets* des axes; et le point C le centre.

229. Si l'on veut avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le foyer, il faut supposer AP ou $x = AF = c$; alors on aura $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \times (ac - cc) = \frac{4.(ac-cc)^2}{aa}$; donc, tirant la racine quarrée, $y = \pm \frac{2.(ac-cc)}{a}$; donc $m''m''' = \frac{4.(ac-cc)}{a}$; cette ligne $m''m'''$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'ellipse. *Le paramètre est donc moindre que le quadruple de la distance* c *du sommet au foyer*,

puisque sa valeur $\frac{4.(ac - cc)}{a}$ qui est la même chose que $4c - \frac{4cc}{a}$ est évidemment moindre que $4c$.

Si l'on nomme p cette valeur du paramètre, on aura $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, et par conséquent, $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4cc}{aa}$; on pourra donc changer l'équation à l'ellipse, en cette autre $yy = \frac{p}{a} . (ax - xx)$ qui est plus simple.

230. Si l'on veut savoir quelle est la valeur de la ligne CD, il n'y a qu'à supposer dans l'équation $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} . (ax - xx)$; que AP ou x est AC ou $\frac{1}{2}a$; on aura $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} (\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa)$, qui se réduit à $yy = ac - cc$; c'est-à-dire, que $(CD)^2 = ac - cc = c . (a - c) = AF \times BF$; d'où l'on tire $AF : CD :: CD : BF$. On voit donc que CD *ou le demi-petit axe, est une moyenne proportionnelle entre les deux distances d'un même foyer aux deux sommets* A *et* B.

Comme la ligne DD' est une des lignes les plus remarquables de l'ellipse, on l'introduit dans l'équation de préférence à la ligne AF ou c. Pour nous conformer à cet usage, nous nommerons b

cette ligne DD'; nous aurons donc $CD = \frac{b}{2}$, et puisque nous venons de trouver $(CD)^2 = ac - cc$, nous aurons $\frac{bb}{4} = ac - cc$, ou $bb = 4ac - 4cc$; l'équation à l'ellipse pourra donc être changée en $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$.

Puisque nous avons $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, ou $pa = 4ac - 4cc$, et $bb = 4ac - 4cc$; de ces deux équations nous conclurons $pa = bb$, et par conséquent, en réduisant cette équation en proportion $a : b :: b : p$; *le paramètre est* donc *une troisième proportionnelle au grand axe et au petit axe.*

231. Si dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$, on chasse le dénominateur, on aura $aayy = bb(ax - xx)$, et par conséquent $yy : ax - xx :: bb : aa$; faisant donc attention que $ax - xx$ est la même chose que $x \times (a - x)$, et mettant, au lieu des quantités algébriques, les lignes de la figure qu'elles représente, on aura $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$; c'est-à-dire, que *le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe de l'ellipse, est au produit des deux abscisses* AP *et* PB, *comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.* Et puisque

cette propriété a lieu pour tous les points de l'ellipse, il s'ensuit que *les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

232. L'équation $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ ne diffère (221) de celle du cercle qui seroit décrit sur AB comme diamètre (*fig.* 29), qu'en ce que la quantité $ax - xx$, est multipliée par $\frac{bb}{aa}$, c'est-à-dire, par le rapport du quarré du petit axe au quarré du grand; en sorte que si l'on nomme z une ordonnée quelconque PN du cercle, on aura $zz = ax - xx$; mettant donc pour $ax - xx$, cette valeur zz dans l'équation à l'ellipse, on aura $yy = \frac{bb}{aa} zz$, et tirant la racine quarrée, $y = \frac{b}{a} z$ ou $ay = bz$ qui donne $y : z :: b : a$, ou $PM : PN :: DD' : AB$, ou $:: CD : AC$ ou CE; on voit donc que *les ordonnées à l'ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur le grand axe, diminuées proportionnellement, c'est-à-dire, dans le rapport du grand axe au petit axe.*

De-là il est aisé de décrire une ellipse par le moyen du cercle. On voit en même-temps que le cercle est une ellipse dont les deux axes a et b sont égaux, ou dont la distance du sommet au foyer est égale au demi-grand axe, ou encore dont le paramètre est égal au diamètre. Car en supposant dans les équations ci-dessus, $b = a$, ou $c = \frac{1}{2} a$, ou $p = a$, on a $yy = ax - xx$ équation au cercle.

233. Par les équations que nous avons trouvées jusqu'ici, il paroît donc qu'il n'en est pas de l'ellipse comme du cercle : une seule ligne détermine celui-ci, c'est son diamètre ; au lieu que le grand axe AB (*fig.* 28) ne suffit pas pour déterminer l'ellipse ; il faut encore connoître ou le petit axe b ou son paramètre p, ou la distance c du sommet au foyer. Quand on connoît le grand axe et la distance c, l'ellipse est facile à décrire, comme on l'a vu ci-dessus. Mais si l'on donnoit le grand axe et le petit axe, il faudroit, pour décrire l'ellipse par un mouvement continu, déterminer les foyers ; c'est une chose facile, en prenant le demi-grand axe pour rayon, et traçant de l'extrémité D (*fig.* 28) du petit axe, comme centre, deux petits arcs qui coupent le grand axe aux deux points F et f qui seront les foyers ; car la somme des deux distances $FD + Df$ devant être égale à a, il faut, lorsque ces deux lignes sont égales, que chacune soit égale à $\frac{1}{2} a$.

Si l'on donnoit le grand axe et le paramètre, on détermineroit le petit axe en prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes ; c'est ce qu'enseigne la proportion $a : b :: b : p$, trouvée ci-dessus (230).

Le petit axe étant trouvé, on acheveroit, comme il vient d'être dit.

234. *Si pour quelque point* M *que ce soit de l'ellipse* (fig. 28) *on prolonge la ligne* fM *tirée d'un des foyers, jusqu'à ce que son prolongement* MG

soit égal à l'autre distance MF; *et qu'ayant tiré* GF, *on lui mène du point* M *la perpendiculaire* MOT, *cette dernière sera tangente à l'ellipse.*

En effet, à cause des lignes égales MF et MG, la ligne MT est perpendiculaire sur le milieu de GF. Donc si de tel autre point N que ce soit, de cette ligne, on mène les deux droites NG et NF, elles seront égales. Supposons donc que MT pût rencontrer l'ellipse en quelqu'autre point N; alors en tirant Nf, il faudroit que $FN + Nf$ pût être égal à $MF + Mf$, ou à $GM + Mf$, c'est-à-dire à Gf; mais Gf est plus petit que $GN + Nf$; et par conséquent plus petit que $FN + Nf$; donc le point N est hors de l'ellipse.

235. Les angles FMO, OMG sont égaux, d'après la construction qu'on vient de donner; or OMG est égal à son opposé fMN; donc FMO est égal à fMN. Donc *les deux lignes qui vont d'un même point de l'ellipse aux deux foyers, font des angles égaux avec la tangente.*

L'expérience apprend qu'un rayon de lumière qui tombe sur une surface, se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; donc si F est un point lumineux, tous les rayons qui partis du point F, tomberont sur la concavité MAM', iront se rassembler en f, et réciproquement.

Si du point M, on élève sur MT la perpendiculaire MI (qui sera en même temps perpendiculaire à la courbe), cette ligne divisera l'angle FMf en deux parties égales; car si des angles droits IMT et IMN on retranche les angles égaux FMT et fMN, les angles restans FMI et IMf seront égaux.

236. De-là on peut calculer la valeur de la distance PI depuis l'ordonnée jusqu'à l'endroit où la perpendiculaire MI rencontre l'axe. Cette ligne PI s'appelle *Sou-normale*, et la ligne MI, *Normale*.

Pour calculer PI, nous allons d'abord calculer FI. Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales, on a $Mf : MF :: fI : FI$ (*Géom.* 104); et par conséquent (*Géom.* 98) $Mf + MF : Mf - MF :: fI + FI : fI - FI$. Or $Mf + MF = a$; et en nommant MF, z, comme ci-dessus (222), $Mf = a - z$, et par conséquent $Mf - MF = a - 2z$; d'ailleurs $fI + FI = Ff = AB - 2AF = a - 2c$, et $fI - FI = Ff - 2FI = a - 2c - 2FI$; donc $a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2FI$; donc $aa - 2ac - 2a \times FI = aa - 2ac - 2az + 4cz$; d'où l'on tire $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, ou en mettant pour z, sa valeur

$\frac{ax + ac - 2cx}{a}$ trouvée (222), on a $FI = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$; mais $FI = FP + PI = AP - AF + PI = x - c + PI$; donc $PI = FI - x + c = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa} - x + c = \frac{2aac - 2acc - 4acx + 4ccx}{aa} = \frac{2a.(ac - cc) - 4x.(ac - cc)}{aa} = \frac{2a - 4x}{aa} \times (ac - cc)$, ou en mettant pour $ac - cc$ sa valeur $\frac{bb}{4}$ (230); on a enfin $PI = bb\,\frac{(a - 2x)}{2aa}$ ou $PI = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{2}a - x\right)$.

237. De-là il est aisé d'avoir la valeur de la distance PT depuis l'ordonnée jusqu'à la rencontre de la tangente, ce qu'on appelle la *soutangente.* Car le triangle INT étant rectangle, et PM une perpendiculaire abaissée de l'angle droit, on a (*Géom.* 112) $PI : PM :: PM : PT$; c'est-à-dire, $\frac{bb}{aa} \times \left(\frac{1}{2}a - x\right) : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bb\left(\frac{1}{2}a - x\right)}$, ou $\Big($en mettant pour yy, la valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)\Big)$, $PT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x}$.

Les expressions algébriques des deux lignes PI et PT peuvent servir à mener une perpendiculaire et une tangente à l'ellipse, en quelque point M que ce soit. Car lorsque le point M est donné, en abaissant la perpendiculaire MP, on a la valeur de AP, x. Et comme on est supposé connoître a et b, on connoît donc tout ce qui entre dans la valeur de PI et dans celle de PT.

238. De l'expression de PT, on peut conclure que si l'on mène une tangente au cercle décrit sur le grand axe AB (*fig.* 29) au point N où ce cercle est rencontré par l'ordonnée PM à l'ellipse, les tangentes NT et MT aboutiront au même point T sur l'axe. Car puisque le second axe b n'entre point dans l'expression de PT, cette ligne PT sera donc toujours la même tant que a sera le même et x le même. Ainsi toutes les tangentes aux points correspondans de toutes les ellipses décrites sur AB comme grand axe, se rencontrent au même point T.

239. Si à PT (*fig.* 28), on ajoute CP qui est $\frac{1}{2}a - x$, on aura $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$, qui, en réduisant tout en fraction, se réduit à $\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$; c'est-à-dire, que $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$, d'où l'on tire cette proportion $CP : AC :: AC : CT$.

240. Si l'on veut avoir l'expression de TM, cela sera facile, par le moyen du triangle rectangle TPM qui donne $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = \left[ax - xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2\right] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

241. Si de quelque point M que ce soit de l'ellipse, on mène sur le petit axe DD' la perpendiculaire ou l'ordonnée MP', et qu'on nomme DP', x'; MP', y'; on aura $DP' = CD - CP' = CD - PM$, c'est-à-dire, $x' = \frac{1}{2}b - y$, et par conséquent $y = \frac{1}{2}b - x'$. On aura de même $MP' = CP = CA - AP$; c'est-à-dire, $y' = \frac{1}{2}a - x$, et par conséquent $x = \frac{1}{2}a - y'$. Si l'on substitue ces valeurs de x et de y, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, ou $aayy = bb(ax - xx)$, on aura $\frac{1}{4}aabb - aabx' + aax'x' = \frac{1}{2}aabb - abby' - \frac{1}{4}aabb + abby' - bby'y'$, qui se réduit à $bby'y' = aabx' - aax'x'$; d'où l'on tire $y'y' = \frac{aa}{bb}(ax' - x'x')$, équation semblable à celle qu'on a eue pour le grand axe, et dont on tirera par conséquent des conclusions semblables, savoir que *le quarré d'une ordonnée* P′M *au petit axe, est au produit des deux abscisses* DP′ × P′D′, *comme le quarré du grand axe, est au quarré du petit*; en effet, on tire de cette équation, $y'y' : ax' - x'x' :: aa : bb$; or $ax' - x'x'$ est $x'(a - x')$ ou $DP' \times P'D'$. On en conclura aussi que *les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes*; et que *l'ellipse peut être décrite par le moyen du cercle décrit sur son petit axe, en alongeant les*

ordonnées de ce cercle dans le rapport du petit axe au grand.

242. Par ce qui précède, on voit donc que les propriétés à l'égard du second axe, sont semblables à celles qu'on a trouvées à l'égard du premier, du moins en ce qui ne dépend point des foyers. Si l'on veut avoir sur le second axe les lignes analogues à celles que nous venons de calculer sur le premier axe, c'est-à-dire, $P'I'$, $P'T'$, CT', et MT' (*fig.* 28), on les trouvera aisément par le moyen de leurs correspondantes qu'on vient d'avoir, et des triangles semblables qu'il est aisé de reconnoître dans la figure. Si on exprime ces lignes par le moyen des abscisses DP' ou x', on trouvera leurs expressions toutes semblables à celles qu'on a eues en x, pour les lignes analogues sur le premier axe.

On donne aussi un *paramètre* au second axe; mais ce qu'on entend alors par cette ligne, ce n'est pas une ligne qui passe par le foyer de ce second axe (car il n'a point de foyer); mais une troisième proportionnelle à ce second axe et au premier.

243. Jusqu'ici nous n'avons compté les abscisses que depuis le sommet; si nous voulions les compter depuis le centre C, alors nommant

l'abscisse CP, z, nous aurions AP ou $x = \frac{1}{2}a - z$; substituant cette valeur de x, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, et dans les valeurs de PI, PT, CT, et $(TM)^2$, on aura $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - zz)$; $PI = \frac{bbz}{aa}$; $PT = \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$; $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$; $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa})\ \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$.

244. Si d'un point quelconque M de l'ellipse (*fig.* 30), on mène au milieu C de l'axe AB, c'est-à-dire, au centre, une droite MCM' terminée de l'autre part à l'ellipse, on appelle cette droite un *diamètre*. Et si par le sommet M, on mène la tangente MT, et par le centre C le diamètre NN' parallèle à MT, celui-ci s'appellera *diamètre conjugué* du premier. Une ligne mO menée d'un point m de l'ellipse parallèlement à MT, et terminée au diamètre MM', s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre, et MO s'appelle l'*abscisse*. Le paramètre du diamètre MM' est une troisième proportionnelle à MM' et NN'.

245. Nous allons faire voir maintenant, que les ordonnées mO, à un diamètre quelconque, ont des propriétés semblables à celles des ordonnées aux axes.

Pour cet effet, j'abaisse des points m et O, les perpendiculaires mp, OQ, sur l'axe AB; et je mène la ligne mS parallèle au même axe. Je nomme AB, a; PM, y; CP, z; Qp, g; CQ, k; j'aurai $AP = \frac{1}{2}a - z$, $PB = \frac{1}{2}a + z$; $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$; $pB = CB + Cp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Les triangles semblables TPM, mSO, donnent $TP : PM :: mS$ ou $pQ : SO$; c'est-à-dire, $\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Les triangles semblables CMP, COQ, donnent $CP : PM :: CQ : QO$; c'est-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$; donc $mp = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Or puisque le point m est un point de l'ellipse, il faut (231) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: AP \times pB : AP \times PB$; c'est-à-dire, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}\right)^2 : yy :: (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z)(\frac{1}{2}a + z)$, ou $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(\frac{1}{4}aa - zz)} + \frac{ggzzyy}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} : yy :: \frac{1}{4}aa - kk - 2kg - gg : \frac{1}{4}aa - zz$, ou, en multipliant les extrêmes et les moyens, et faisant attention aux quantités qui se trouveront multipliées et divisées en même temps par $\frac{1}{4}aa - zz$, et à celles qui le seront aussi par z, on on aura $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{\frac{1}{4}aa - zz}$ $= \frac{1}{4}aayy - kkyy - 2gkyy - ggyy$, ou, en développant le terme $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz)$ et supprimant $-kkyy$ et $-2gkyy$ qu'on aura alors de part et d'autre; divisant de plus par yy, on aura $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, équation qni nous est nécessaire pour notre objet; mais, avant de l'y employer, tirons-en une connoissance dont nous avons besoin.

Si l'on suppose que le point O, qu'ici nous avons supposé quelconque, soit le point C, c'est-à-dire, que la ligne mO passe par le centre, ou devienne CN, alors CQ ou k devient zéro, et la ligne Qp ou g, devient CR. Or si dans l'équation qu'on vient de trouver, on fait $k = 0$, on aura, après avoir chassé le dénominateur, transposé, réduit et divisé par $\frac{1}{4}aa$, $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; c'est-à-dire, $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z)(\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

Après cette remarque, revenons à notre objet, et nommons CM, $\frac{1}{2}a'$; CN, $\frac{1}{2}b'$; $mO\, y'$; CO, z'. Les triangles semblables CPM, CQO, donnent $CM : CO :: CP : CQ$, ou $\frac{1}{2}a' : z' :: z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$. Les triangles CNR, mSO, semblables à cause des côtés parallèles, donnent $mO : mS :: CN : CR$, ou $y' : g :: \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$;

donc $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}gg b'b'}{y'y'}$; mais on vient de voir que $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$; donc $\frac{\frac{1}{4}gg b'b'}{y'y'} = \frac{1}{4}aa - zz$; d'où l'on tire $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$.
Reprenons maintenant l'équation $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$ et substituons-y pour gg et kk les valeurs que nous venons de trouver ; nous aurons $\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)} = \frac{1}{4}aa - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, ou, en réduisant et divisant ensuite par $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; ou, chassant les dénominateurs $\frac{1}{4}a'a'$ et $\frac{1}{4}b'b'$, on a $\frac{1}{4}b'b'z'z' = \frac{1}{16}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, et enfin $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$; d'où l'on tire $y'y' : \frac{1}{4}a'a' - z'z' :: b'b' : a'a'$; c'est-à-dire, $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$. Ainsi l'équation par rapport à deux diamètres conjugués quelconques, est semblable à celle qu'on a eue à l'égard des deux axes.

246. Si l'on fait $y' = 0$, on trouve $\frac{1}{4}a'a' - z'z' = 0$, et par conséquent $z' = \pm \frac{1}{2}a'$. La courbe rencontre donc la ligne MM' en deux points M et M' également éloignés du centre C ; ainsi *tous les diamètres de l'ellipse se coupent en deux parties égales au centre.*

247. L'équation $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}\left(\frac{1}{4}a'a' - z'z'\right)$ donnant $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{\left(\frac{1}{4}a'a' - z'z'\right)}$, fait voir que si l'on prolonge mO de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe ; donc *chaque diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine* M.

248. De-là on peut conclure, 1°. que la tangente à l'extrémité N du diamètre NN', est parallèle au diamètre MM'. 2°. De ce que $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{\left(\frac{1}{4}a'a' - z'z'\right)}$, on peut conclure que les ordonnées Om au diamètre MM', sont celles du cercle qui auroit MM' pour diamètre, mais diminuées ou augmentées dans le rapport de a' à b', et inclinées sous un angle égal à celui des diamètres conjugués. Si $a' = b'$, ces ordonnées sont précisément égales à celles de ce même cercle. Enfin si l'on veut savoir à quel endroit de l'ellipse les deux diamètres conjugués peuvent être égaux, il n'y a qu'à chercher à quel endroit on a $CP = CR$ ou $(CP)^2 = (CR)^2$; c'est-à-dire, $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; or cette équation donne $z = \sqrt{\left(\frac{1}{8}aa\right)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, que l'on construira ainsi ; ayant décrit sur le grand axe AB comme diamètre (*fig.* 29) le demi-cercle $ANEB$ coupé en E par le petit axe CD,

on divisera l'arc AE en deux parties égales en N'', et ayant abaissé $N''P$ qui coupe l'ellipse en M'' et M', CM'' et CM' seront les deux demi-diamètres conjugués, égaux. Car si l'on nomme CP, z, comme le triangle CPN'' est rectangle et isocèle, à cause de l'angle ACN'' de 45 degrés, on aura $zz + zz = (CN'')^2 = \frac{1}{4}aa$; donc $zz = \frac{1}{8}aa$, et $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

249. Si du centre C (*fig.* 30) on mène la perpendiculaire CF sur la tangente TM, les triangles semblables TPM, TCF donneront $TM : PM :: CT : CF$; d'où $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Pareillement les triangles TPM et CNR, semblables à cause des côtés parallèles, donneront $TM : PT :: CN : CR$; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; et par conséquent, on aura $CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, ou, en quarrant, $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; or nous avons vu ci-dessus que yy ou $(PM)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - zz)$; $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, $(PT)^2 = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}$; et $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$ (245). Substituant ces quantités, on aura, après les réductions faites, $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16}aabb$, et par conséquent $CN \times CF = \frac{1}{4}ab$; or en

menant la tangente NT'' qui rencontre TM en I, $CN \times CF$ exprime la surface du parallélogramme $CMIN$, et $\frac{1}{4}ab$ ou $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ exprime celle du rectangle formé sur les deux demi-axes ; donc *les parallélogrammes formés par les tangentes aux extrémités des diamètres conjugués, sont égaux entre eux et au rectangle formé sur les deux axes.*

250. Les mêmes triangles semblables TPM et CRN donnent $PT : PM :: CR : RN$; donc $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, ou $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{PT^2} = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa}$; mais les triangles rectangles CRN et CPM donnent $(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$ et $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$; donc $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$; substituant dans le premier membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques, on aura, toute réduction faite, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$; donc *la somme des quarrés de deux diamètres conjugués quelconques de l'ellipse, est égale à la somme des quarrés des deux demi-axes.*

251. Si dans $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$, on substitue pour CR et RN leurs valeurs, on aura $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; or nous

avons trouvé ci-dessus $(TM)^2 = \ldots\ldots$ $\left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; par conséquent $(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; mais les triangles semblables TPM, $MP'T'$ donnent, en quarrant, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (MT')^2$; ou $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz :$ $(MT')^2$; donc $(MT')^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}$; donc $(TM)^2 \times (MT')^2 = (CN)^4$ ou $TM \times MT'$ $= (CN)^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura $2CM : 2CN ::$ $2CN : p'$ (244) ; et par conséquent $2p' \times CM$ $= 4(CN)^2$ ou $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; donc $TM \times MT' = \frac{1}{2}p' \times CM$; et par conséquent $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

Si, sur TT' comme diamètre (*fig.* 31), on décrit un demi-cercle, il passera par le point C, puisque l'angle TCT' est droit ; or si l'on prolonge CM jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en V, on aura, par la nature du cercle (*Géom.* 120) $CM : TM :: MT' : MV$; donc $MV = \frac{1}{2}p'$.

252. De-là on peut tirer une méthode simple pour avoir les axes d'une ellipse, et par conséquent pour la décrire, lorsqu'on ne connoît que deux diamètres conjugués MM' et NN', et l'angle qu'ils font entr'eux.

On prolongera CM d'une quantité MV égale à son demi-paramètre ; et du milieu X de CV on élèvera une perpendiculaire XZ, qui rencontre en Z la ligne indéfinie TT' menée par le point M, parallèlement à NN'. Du point Z comme centre, et de la distance ZC comme rayon, on décrira un cercle qui rencontrera TT' en deux points T et T' par lesquels et le point C tirant TC et $T'C$, ce seront les directions des deux axes. On déterminera ensuite la grandeur de ces axes, en abaissant les perpendiculaires MP et MP', et prenant CA égal à la moyenne proportionnelle entre CT et CP; et CD égal à la moyenne proportionnelle entre CT' et CP'; car on a vu ci-dessus (239) que $CP : CA :: CA : CT$; et il est aisé de prouver (par le moyen des triangles semblables TPM et TCT', et des valeurs connues de TP, PM et CT), que $CT' = \frac{(CD)^2}{CP'}$, c'est-à-dire, que $CP' : CD :: CD : CT'$.

De l'Hyperbole.

253. Considérons maintenant la courbe (*fig.* 32) qui auroit, en chacun de ses points M, cette propriété, que la différence $Mf - MF$ des distances Mf et MF à deux points fixes f et F, fût toujours la même, et égale à une ligne donnée a.

Nous allons chercher, comme nous l'avons fait pour l'ellipse, une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires PM menées sur la ligne Ff, et leurs distances FP ou AP

à quelque point fixe F ou A, pris arbitrairement sur la ligne Ff.

Je prends donc, pour origine des abscisses, le point A, déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff, la ligne $CA = \frac{1}{2}a$, et je fais $CB = CA$. Cela posé, je nomme AP, x; PM, y; la ligne AF qui est censée connue, c; et la ligne FM, z; alors $FP = AF - AP = c - x$ (*); $fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x$; et puisqu'on a $Mf - MF = a$, on aura $Mf = a + MF = a + z$.

Les triangles rectangles FPM, fPM, donnent $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, et $(fP)^2 + (PM)^2 = (fM)^2$; c'est-à-dire, $cc - 2cx + xx + yy = zz$ et $cc + 2ac + aa + 2cx + 2ax + xx + yy = aa + 2az + zz$. Retranchant la première de ces deux équations, de la seconde, on a, en effaçant aa qui se trouvera de part et d'autre, $4cx + 2ac + 2ax = 2az$; d'où l'on tire $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; mettant donc pour z, cette valeur dans la première équation, nous aurons $cc - 2cx + xx + yy = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$,
ou, chassant le dénominateur, transposant et réduisant, $aayy = 4aacx + 4accx + 4acxx$

(*) Si le point P étoit au-delà de F par rapport à A, FP seroit $x - c$; mais cela ne changeroit rien à l'équation finale.

$+ 4ccxx$, ou $aayy = (4ac + 4cc)(ax + xx)$; d'où l'on tire $yy = \frac{4ac+4cc}{aa}(ax + xx)$.

254. Cette équation peut servir à décrire la courbe, par des points trouvés successivement, en donnant à x plusieurs valeurs.

On peut encore décrire la courbe, par points, en prenant arbitrairement une partie Br plus grande que BF, et décrivant du point f comme centre, et du rayon Br, un arc que l'on coupera en quelque point M par un autre arc décrit du point F comme centre, et du rayon Ar.

Enfin on peut décrire cette même courbe, par un mouvement continu, de la manière suivante.

On fixera au point f, une règle indéfinie qui puisse tourner autour de ce point. Au point F et à l'un des points Q de cette règle, on attachera les extrémités d'un fil FMQ, moins long que fQ, et dont la différence avec fQ, soit égale à AB; alors par le moyen d'une pointe, ou style M, on appliquera une partie MQ du fil, contre la règle : faisant mouvoir le style de M vers A en tenant toujours le fil tendu, la règle s'abaissera, la partie FM diminuera, et le style M décrira la courbe AM dont il s'agit, et qu'on appelle une *hyperbole*. En effet, il est évident que la totalité fQ ou $fM + MQ$ étant toujours de même grandeur, et $FM + MQ$ étant aussi toujours de même grandeur, leur différence $fM + MQ - FM - MQ$, ou $fM - FM$, sera aussi toujours de même grandeur.

255. L'équation $yy = \frac{4ac+4cc}{aa}(ax + xx)$ donnant $y = \pm\sqrt{\left[\frac{4ac+4cc}{aa}(ax + xx)\right]}$,

fait voir que pour une même abscisse AP, ou x, on a toujours deux ordonnées égales PM, PM', qui tombent de part et d'autre du prolongement de AB, qu'on appelle le *premier axe*; ainsi la courbe a une seconde branche AM' parfaitement égale à la première ; et l'une et l'autre s'étendent à l'infini, puisqu'il est évident que plus on augmentera x, plus les deux valeurs $\pm\sqrt{\left[\frac{4ac+4cc}{aa}(ax+xx)\right]}$ augmenteront.

256. Si dans cette même quantité on fait x négatif, c'est-à-dire, si l'on suppose que le point P tombe au-dessus de A, elle deviendra $\pm\sqrt{[\frac{4ac+4cc}{aa}(x^2-ax)]}$; or $xx-ax$, ou $x(x-a)$ étant négatif tant que x est plus petit que a, la quantité $\pm\sqrt{[\frac{4ac+4cc}{aa}(xx-ax)]}$ est alors imaginaire ; et par conséquent y n'a aucune valeur réelle depuis A jusqu'à B ; mais sitôt que x surpasse a, $xx-ax$ redevenant positif, les valeurs de y redeviennent réelles ; il part donc du point B une nouvelle portion de courbe mBm' qui, comme la première, s'étend à l'infini de chaque côté du prolongement de AB, et qui est parfaitement égale à celle-là, parce que si l'on prend $Bp=AP$, alors $xx-ax$ ou $Ap\times pB$ devient égal à $AP\times PB$; donc aussi pm est égale à PM.

257. Si dans l'équation $yy = \frac{4ac+4cc}{aa} \times (ax + xx)$, on fait $y = 0$, on trouvera que $ax + xx$ ou $x.(a + x) = 0$, qui donne $x = 0$, et $x + a = 0$ ou $x = - a$; donc la courbe rencontre l'axe AB aux deux points A et B.

258. Si l'on suppose $AP = AF$, c'est-à-dire, $x = c$, pour avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le point F (qu'on appelle le *foyer*, ainsi que le point f), on aura . . . $y = \pm \sqrt{[\frac{4ac+4cc}{aa}(ac + cc)]} = \pm \sqrt{[\frac{(4ac+4cc)^2}{aa}]} = \pm \frac{2(ac+cc)}{a}$; donc la double ordonnée $m''m''' = \frac{4(ac+cc)}{a}$: cette ligne est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'hyperbole; ainsi en représentant cette ligne par p, on aura $p = \frac{4(ac+cc)}{a}$, et par conséquent $\frac{p}{a} = \frac{4(ac+co)}{aa}$. Substituant dans l'équation de la courbe, on la changera en cette autre plus simple, $yy = \frac{p}{a}(ax + xx)$.

De la valeur de p, on peut couclure que *le paramètre du premier axe de l'hyperbole est plus que le quadruple de la distance du sommet* A *au foyer* F; car cette valeur $p = \frac{4ac+4cc}{a}$, se réduit à $p = 4c + \frac{4cc}{a}$, qui est évidemment plus grande que $4c$.

259. Si sur le milieu C de AB, on élève une perpendiculaire DD', dont la moitié CD soit moyenne proportionnelle entre c et $a + c$, c'est-à-dire, entre AF et fA, cette perpendiculaire est ce qu'on appelle le *second axe* de l'hyperbole; ainsi en la nommant b, on aura $\frac{bb}{4} = c.(a+c)$, ou $bb = 4ac + 4cc$; et en introduisant cette valeur de bb dans l'équation $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}$ $(ax + xx)$, celle-ci se changera en $yy = \frac{bb}{aa}$ $(ax + xx)$. On voit donc que ces trois équations de l'hyperbole, ne diffèrent des trois équations correspondantes de l'ellipse, que par le signe du quarré cc et du quarré xx.

Cette même équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ nous fournit aussi une propriété analogue à celle que nous avons remarquée dans l'ellipse : en effet, si l'on chasse le dénominateur aa, on aura $aayy = bb\,(ax + xx)$, qui donne cette proportion, $yy : ax + xx :: bb : aa$, ou $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$ ou $:: (CD)^2 : (AC)^2$; *le quarré d'une ordonnée au premier axe de l'hyperbole, est donc au produit* AP × PB *des deux abscisses, comme le quarré du second axe est* *au quarré du premier* et par conséquent, *les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

Lorsque les deux axes a et b sont égaux, l'équation est $yy = ax + xx$ qui ne diffère de celle du cercle que par le signe du quarré xx. L'hyperbole s'appelle alors *hyperbole équilatère.*

De l'équation $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, on tire $4ac + 4cc = ap$, et puisqu'on a aussi $4ac + 4cc = bb$, on a donc $ap = bb$ qui donne $a : b :: b : p$; donc le paramètre du premier axe, est une troisième proportionnelle à ce premier axe et au second.

260. Si du point D au point A, on tire la droite DA, le triangle rectangle DCA donnera $DA = \sqrt{[(CD)^2 + (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$, ou, en mettant pour bb sa valeur $4ac + 4cc$, $DA = \sqrt{(cc + ac + \frac{1}{4}aa)} = c + \frac{1}{2}a = AF + CA = CF$.

Donc, pour avoir les foyers quand on a les axes, il faut porter DA de C en F; et au contraire pour avoir le second axe quand on a le premier et les foyers, il faut décrire du point A comme centre et du rayon CF, un arc qui coupe la perpendiculaire DD', en quelque point D.

261. On voit aussi que la description de l'hyperbole dépend de deux quantités, savoir, le grand axe et le petit axe; ou le grand axe et les foyers; ou le grand axe

et le paramètre. D'après ce que nous venons de dire, on ramènera toujours aisément la description de l'hyperbole à l'une des méthodes que nous venons d'indiquer. Car si l'on donnoit, par exemple, le grand axe et le paramètre, alors prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes, on auroit le second axe qui serviroit à trouver les foyers.

262. *Si l'on prend sur* Mf, *la partie* MG=MF, *et qu'ayant tiré* FG, *on lui mène du point* M *la perpendiculaire* MOT, *cette ligne sera tangente à l'hyperbole.*

En effet, d'un autre point quelconque N pris sur TM, menons aux deux foyers les droites Nf et NF, et au point G la droite NG; il est évident, par la construction, que NF et NG seront égales; or Nf est plus petit que $NG+Gf$, et par conséquent, plus petit que $NF+Gf$; donc $Nf-NF$ est plus petit que Gf, c'est-à-dire, que $Mf-MF$; donc le point N est hors de l'hyperbole; on démontrera la même chose de tout point de TM, autre que le point M.

Les angles FMO et OMG sont égaux, d'après la construction précédente; or OMG est égal à son opposé NMQ; donc FMO est égal à NMQ; donc la ligne MF, qui va au foyer F, fait avec la tangente, le même angle que fait, avec cette même tangente, le prolongement MQ de la ligne fM qui va à l'autre foyer.

Donc, si le point F est un point lumineux, tous les rayons qui, partis du point F, tomberont sur la concavité MAM', se réfléchiront comme s'ils partoient du point f.

263. Déterminons maintenant la soutangente PT.

Puisque l'angle FMf' est divisé en deux parties égales par la tangente MT, on aura (*Géom.* 104) $fM : MF :: fT : FT$; or en nommant, comme ci-dessus, MF, z, on a $fM = z + a$: d'ailleurs Ff ou $Bf + AB + AF$ valant $a + 2c$, la ligne fT ou $Ff - FT$, vaudra $a + 2c - FT$; on aura donc $z + a : z :: a + 2c - FT : FT$; donc en multipliant les extrêmes et les moyens, on aura $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$; d'où, après les opérations ordinaires, on tire $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$; or nous avons trouvé (253) $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; donc $2z + a = \frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} = \frac{(2c + a) \cdot 2x + (2c + a)a}{a} = \frac{(2c + a)(2x + a)}{a}$; substituant ces valeurs, dans celle de FT, on aura $FT = \frac{(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \times \frac{2x + a}{a}}$; ou, en supprimant le facteur commun, $\frac{2c + a}{a}$, $FT = \frac{2cx + aa + ax}{2x + a}$. Ayant ainsi trouvé FT, il est aisé d'avoir la soutangente PT ; car $PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; donc $PT = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; d'où l'on voit que l'expression de la soutangente, pour l'hyperbole, ne diffère que par les signes, de celle qu'on a eue pour l'ellipse.

264 Si de PT on retranche AP, on aura AT ou la distance du sommet jusqu'à l'endroit où la tangente rencontre l'axe. Cette distance sera donc exprimée par $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$, qui se réduit à $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a +}$.

265. Cette expression de AT nous donne lieu de faire quelques remarques sur la courbure de l'hyperbole. Nous avons vu ci-dessus que chacune des deux branches AM, AM' s'étendoit à l'infinité. Cependant leur courbure est telle que toutes les tangentes que l'on peut mener à chacun des points de ces branches infinies, ne rencontrent jamais l'axe que dans l'intervalle compris entre A et C. En effet, si dans la valeur de AT on substitue pour x, toutes les quantités imaginables depuis o jusqu'à l'infini, la valeur de AT ne croît que depuis o jusqu'à $\frac{1}{2}a$; car quand x est infini, le dénominateur $\frac{1}{2}a + x$

doit

doit essentiellement être regardé comme la même chose que x, puisque si l'on conservoit alors $\frac{1}{2}a$, ce seroit supposer qu'il peut augmenter x, et détruire, par conséquent, la supposition qu'on fait que x est infini : or dans ce cas la quantité AT se réduit à $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a$; donc la tangente à l'extrémité infinie de chaque branche AM et AM', passe par le centre C. Et puisque les branches opposées Bm et Bm' sont parfaitement égales à celles-là, et que les points A et B sont également éloignés de C, il s'ensuit que ces mêmes tangentes sont aussi tangentes aux extrémités infinies des branches Bm et Bm'. On les voit (*fig.* 33) représentées par les lignes CX, CY.

266- Ces tangentes s'appellent les *asymptotes* de l'hyperbole : ce sont, comme on le voit, des lignes qui partant du centre, s'approchent sans cesse de l'hyperbole, sans pouvoir l'atteindre qu'à une distance infinie.

Si par le sommet A (*fig.* 32), on mène la droite At parallèle à PM, les triangles semblables TAt, TPM, donnent $TP : PM :: TA : At$; c'est-à-dire, $\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} : At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a+x} \times \frac{\frac{1}{2}a+x}{ax+xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a+x}$, ou, en mettant pour y sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{(ax+xx)}$, $At = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{(ax+xx)}}{a+x}$, qui lorsque x est infini, devient $\frac{1}{2}b$ ou CD, parce que ax doit être supprimé vis-à-vis de xx, et a vis-à-vis de x. Voici donc comment on déterminera les asymptotes. On élevera au point A (*fig.* 33) une perpendiculaire AL, que l'on prolongera de part et d'autre du point A, d'une quantité égale à CD; alors tirant par le centre C et par les deux extrémités L et L' deux lignes droites, elles seront les asymptotes.

267. Pour avoir l'expression de CT (*fig.* 32), il faut de CA retrancher AT, et l'on aura $CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{(CA)^2}{CP}$, qui donne cette proportion $CP : CA :: CA : CT$.

268. Si l'on veut avoir l'expression de TM, le triangle rectangle TPM donne $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa}.(ax+xx) + \frac{(ax+xx)^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2} = \left[\frac{bb}{aa}.(\frac{1}{2}a+x)^2 + ax + xx\right] \frac{(ax+xx)}{(\frac{1}{2}a+x)^2}$.

169. Pour avoir l'expression de PI ou de la sou-normale, les triangles TPM, MPI (sem-

blables à cause que l'angle TMI est droit, et que PM est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit) donneront $TP : PM :: PM : PI$, ou, $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a + x)}{ax + xx}$, ou, à cause que $y^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax + xx)$, $PI = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a + x)$.

270. Cherchons maintenant l'équation par rapport au second axe DD'; et pour cet effet, menons la perpendiculaire MP' sur ce second axe, et nommant MP', y'; DP', x'; on aura $CP' = PM = y = \frac{1}{2}b - x'$; $P'M = CP = \frac{1}{2}a + x = y'$; et par conséquent $x = y' - \frac{1}{2}a$; substituant donc pour x et y, ces valeurs, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$ ou $aayy = bb(ax + xx)$, on aura, après les réductions faites, $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$; d'où l'on voit qu'il n'en est pas de l'hyperbole comme de l'ellipse; l'équation à l'égard du second axe, n'est pas semblable à celle qu'on a à l'égard du premier.

271. Enfin si l'on veut l'équation par rapport à l'axe AB, en prenant les abscisses depuis le centre C; on nommera CP, z; et l'on aura $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; et par

conséquent $x = z - \frac{1}{2}a$; substituant dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax + xx)$, on aura $yy = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$, pour l'équation par rapport au premier axe, les abscisses étant prises du centre.

Et à l'égard du second axe DD', si l'on nomme CP', z'; on aura $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$; et par conséquent $x' = \frac{1}{2}b - z'$; substituant dans l'équation $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$ que nous avons trouvée (270) pour le second axe, on aura $y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

272. Si l'on veut rapporter au centre C, les expressions de PT, CT, PI et PM, trouvées ci-dessus, il n'y a qu'à substituer, dans ces expressions, $z - \frac{1}{2}a$, au lieu de x, et l'on trouvera $PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, $CT, = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, $PI = \frac{bbz}{aa}$, $(TM)^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$.

Et si l'on prolonge MT jusqu'à ce qu'elle rencontre le second axe en T', les triangles semblables TPM, TCT' donneront $TP : PM :: CT : CT'$, ou $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT' = \frac{\frac{1}{4}aay}{zz - \frac{1}{4}aa}$; mais $zz - \frac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}$; donc $CT' =$

$\frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{(CD)^2}{PM} = \frac{(CD)^2}{CP'}$; donc $CP' : CD :: CD : CT'$.

273. Si par le centre C de l'hyperbole (*fig.* 33) on mène une droite quelconque MCM' terminée de part et d'autre à l'hyperbole, cette droite s'appelle un *diamètre*. Toute droite mO menée d'un point m de la courbe, parallèlement à la tangente en M, et terminée au diamètre MM' prolongé, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre; MO et OM' en sont les *abscisses*. Nous allons démontrer que les propriétés des ordonnées mO, à l'égard des diamètres terminés à la courbe, sont les mêmes que celles des ordonnées MP à l'égard du premier axe.

Menons des points m et O, les perpendiculaires mp et OQ sur l'axe AB; et du point m menons mS parallèle à AP; nommons PM, y; CP z; Qp, g; CQ, k; nous aurons $AP = CP - CA = z - \frac{1}{2}a$; $BP = CP + BC = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Les triangles semblables CPM, CQO, donnent $CP : PM :: CQ : QO$; c'est-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$. Les triangles semblables TPM, mSO, donnent $PT : PM :: mS$ ou

$Qp : SO$; c'est-à-dire (272) $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; donc $mp = SQ = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; or puisque le point m appartient à l'hyperbole, il faut (259) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$: c'est-à-dire, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}\right)^2 : yy :: (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a)(z + \frac{1}{2}a)$, ou $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(zz - \frac{1}{4}aa)} + \frac{ggzzyy}{(zz - \frac{1}{4}aa)^2} : yy :: kk - 2kg + gg - \frac{1}{4}aa : zz - \frac{1}{4}aa$; donc, en multipliant les extrêmes et les moyens, et faisant attention aux quantités qui se trouveront multipliées et divisées, en même temps, par $zz - \frac{1}{4}aa$, et à celles qui le seront aussi par z, on aura $\frac{kkyy}{zz}(zz - \frac{1}{4}aa) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{zz - \frac{1}{4}aa} = kkyy - 2gkyy + ggyy - \frac{1}{4}aayy$, ou, en développant le terme $\frac{kkyy}{zz}(zz - \frac{1}{4}aa)$, et supprimant $kkyy$ et $-2gkyy$ que l'on aura alors dans chaque membre; divisant de plus par yy, on aura $-\frac{1}{4}\frac{aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, équation qui va nous servir à démontrer la propriété dont il s'agit; mais auparavant nous ferons observer que si de part ou d'autre du centre C, on prend sur l'axe AB la partie CR qui soit moyenne proportionnelle entre BP et AP; c'est-à-dire, telle que $(CR)^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$; et si ayant élevé la perpendiculaire RN' terminée en N' par la ligne NN' menée par le centre C parallèlement à TM, on fait $CN = CN'$, alors NN' est ce qu'on appelle *un diamètre conjugué* au diamètre MM'; et l'on appelle *paramètre* du diamètre MM', une troisième proportionnelle à MM' et NN'.

Revenons maintenant à notre objet; nommons CM, $\frac{1}{2}a'$; CN ou CN', $\frac{1}{2}b'$; CO, z'; et Om, y' Les triangles semblables CPM, CQO, donnent $CM : CP :: CO : CQ$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a' : z :: z' : k$; donc $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$.

Les triangles mSO et $CN'R$, semblables, à cause des côtés parallèles, donnent $CN' : CR :: mO : mS$, ou $\frac{1}{2}b' : CR :: y' : g$; donc $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b'}$, et par conséquent $gg = \frac{CR^2 \times y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, ou, puisqu'on a fait $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$, $gg = \frac{y'y'(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Substituons pour gg et kk, les valeurs que nous venons de trouver, substituons-les, dis-je, dans l'équation $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz}+\frac{ggzz}{zz-\frac{1}{4}aa}=gg-\frac{1}{4}aa$, trouvée ci-dessus, et nous aurons $-\frac{1}{4}aa$. $\frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz}+\frac{y'y'zz(zz-\frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'(zz-\frac{1}{4}aa)}=\frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}-\frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'}-\frac{1}{4}aa$, ou (en réduisant et divisant ensuite par $\frac{1}{4}aa$) $\frac{-z'z'}{\frac{1}{4}a'a'}=-\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}-1$, ou, après les opérations ordinaires $y'y'=\frac{b'b'}{a'a'}(z'z'-\frac{1}{4}a'a')$ équation semblable à celle qu'on a eue pour le premier axe.

274. Si l'on fait $y'=0$, on trouve $z'z'-\frac{1}{4}a'a'=0$, qui donne $z'=\pm\frac{1}{2}a'$; la courbe rencontre donc la ligne MM' en deux points opposés M et M', éloignés du centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2}a'$, ou CM; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

275. L'équation $y'y'=\frac{b'b'}{a'a'}(z'z'-\frac{1}{4}a'a')$ donnant $y'=\pm\frac{b'}{a'}\sqrt{(z'z'-\frac{1}{4}a'a')}$; c'est-à-dire, deux valeurs égales et de signe contraire, pour y', fait voir que si l'on prolonge mO, de manière que $Om'=Om$, le point m' appartiendra à la courbe; chaque diamètre MM' coupe donc en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine M.

276. La même équation donne $a'a'y'y' = b'b'(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; d'où l'on tire $y'y' : z'z' - \frac{1}{4}a'a' :: b'b' : a'a'$, ou $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$; c'est-à-dire, *le quarré d'une ordonnée quelconque* mO *à un diamètre terminé à la courbe, est au produit* MO × OM′ *de ses deux abscisses, comme le quarré du diamètre conjugué, est au quarré de ce premier diamètre.*

277. Si du centre C on abaisse sur TM la perpendiculaire CF, les triangles semblables CFT, TPM, donneront $TM : PM :: CT : CF$, et par conséquent $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Les triangles semblables CRN', TPM, donneront $PT : TM :: CR : CN'$ ou CN ; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; donc $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, ou en quarrant, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; or on a $(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$; $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (273) ; et (272) $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, $(PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$; substituant ces valeurs, on a, après les réductions faites, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, ou $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$; or si l'on prolonge MT jusqu'à l'asymptote en I, MI sera

égal à CN, comme nous le verrons ci-dessous, et $CIMN$ sera, par conséquent, un parallélogramme, dont la surface sera $= CF \times MI = CF \times CN$; donc quelque part où soit le point M, le parallélogramme $CIMN$ sera toujours égal en surface au rectangle des deux demi-axes; c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ ou $\frac{1}{4}ab$.

278. Les triangles semblables TPM et CRN' donnent $TP : PM :: CR : RN'$; donc $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, et $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2}$ $= \frac{bbzz}{aa}$ en substituant les valeurs abgébriques et réduisant; or les triangles rectangles CPM et CRN' donnent $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$, et $(CN')^2$ ou $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$; donc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN')^2$; substituant dans le second membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques trouvées ci-dessus, on aura, après les réductions faites, $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; c'est-à-dire que *la différence des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques, est toujours la même, et égale à la différence des quarrés des deux demi-axes.*

Il suit de là que dans l'hyperbole équilatère, chaque diamètre est égal à son conjugué; car si $a = b$, on a $(CM)^2 - (CN)^2 = 0$, et par conséquent, $CM = CN$.

279. Si dans $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$ on substitue pour CR et RN' leurs valeurs algébriques, on aura $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$; or nous avons trouvé ci-dessus (272), $(TM)^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right) \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$; donc $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times (CN)^2$; mais les triangles semblables MPT et $MP'T'$ donnent, en quarrant, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (T'M)^2$, ou $\frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz} : \frac{(CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4}aa)}{zz} :: zz : (T'M)^2$; donc $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$; donc $(TM)^2 \times (TM)^2 = (CN)^4$, ou $TM \times T'M = (CN)^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura $2CM : 2CN :: 2CN : p'$; et par conséquent $2p' \times CM = 4(CN)^2$, ou $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; donc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, d'où l'on tire $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

280. De-là on peut conclure la méthode suivante pour avoir les axes de l'hyperbole, et par conséquent pour décrire cette courbe, lorsqu'on ne connoît que deux diamètres conjugués, et l'angle qu'ils font entr'eux.

On prendra sur MC (*fig.* 34) une ligne $MH = \frac{1}{2}p'$, et sur le milieu I de CH on élèvera une perpendiculaire IK, qui coupera en quelque point K la ligne MT' menée par le point M parellèlement au conjugué NN'. De ce point K, comme centre et d'un rayon égal à la distance de K à C, on décrira un cercle qui rencontrera MT' aux deux points T et T' par lesquels et par le centre C tirant TC et CT', ce seront les directions des axes; car il est clair 1°. que l'angle TCT' sera droit, puisque la circonférence passe par le poiut C, et qu'elle a TT' pour diamètre; 2°. par la nature du cercle, on a (*Géom.* 120) $CM : TM :: T'M : MH$; donc puisqu'on a fait $MH = \frac{1}{2}p'$, on a $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

Ayant ainsi déterminé les directions des axes, on en déterminera la grandeur en abaissant du point M, les perpendiculaires MP, MP', et prenant CA moyenne proportionnelle entre CP et CT, et CD' moyenne proportionnelle entre CP' et CT'; c'est une suite des expressions que nous avons trouvées (272) pour $C'T$ et CT'.

Quand les deux diamètres conjugués que l'on connoît sont égaux, alors le paramètre leur est égal aussi, ce qui rend $MH = MC$; les deux points de section H et C se confondant alors, MC est une tangente au cercle; ainsi, il faut tout simplement, pour avoir le centre K, élever sur CM une perpendiculaire au point C.

De l'Hyperbole entre ses asymptotes.

281. L'hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes, a quelques propriétés dont la connoissance peut être utile; nous allons les exposer.

Il faut se rappeler ici comment on détermine les asymptotes ; (*voyez* 266).

Nous allons rapporter chaque point E de l'hyperbole (*fig.* 35), aux deux asymptotes CLO, $CL'o$, en menant la ligne EQ parallèle à l'une d'entr'elles; et nous chercherons la relation qu'ont entr'elles les lignes EQ et CQ.

Pour trouver cette relation, nous mènerons par le point quelconque E, la ligne OEo parallèle au second axe DD', et la ligne ES parallèle à CLO; par le sommet A nous tirerons AG parallèle à $CL'o$. Et nous nommerons CA, $\frac{1}{2}a$; CD ou AL ou AL', $\frac{1}{2}b$; CP, z; PE, y; AG, m; GL, n; CQ, t; QE, u.

Les triangles semblables CPO, CAL, nous donnent $CA : AL :: CP : PO$, ou $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$, ou $a : b :: z : PO = Po = \frac{bz}{a}$; donc $EO = \frac{bz}{a} - y$, et $EO = \frac{bz}{a} + y$; par conséquent $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$ (en mettant pour yy sa valeur $\frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$ et réduisant); c'est-à-dire, que $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$, propriété qui appartient à tout point de l'hyperbole, puisque le point E a été pris arbitrairement.

282. Les triangles QEO, ESo, et AGL

semblables entr'eux, donnent $AL : AG :: EO : EQ$, et $AL : GL :: Eo : ES$; donc, multipliant ces deux proportions par ordre, afin d'y introduire $EO \times Eo$ dont on a la valeur, on aura $(AL)^2 : AG \times GL :: EO \times Eo : EQ \times ES$; c'est-à-dire, $\frac{1}{4}bb : mn :: \frac{1}{4}bb : ut$; donc $ut = mn$; équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. Ainsi en quelque point E que ce soit de l'hyperbole, on a toujours $EQ \times ES$, ou plutôt $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Or si l'on suppose que le point E tombe en A, CQ devient CG, et QE devient AG; on a donc $CG \times AG = AG \times GL$; donc $CG = GL$. Mais le point G se trouvant, par-là, être le milieu de CL, on doit avoir $CG = AG = GL$; car le cercle décrit sur CL comme diamètre, et qui auroit par conséquent CG pour rayon, passeroit par le point A, à cause de l'angle droit A; on a donc $m = n$, et par conséquent $ut = m^2 = (CG)^2$.

Ce quarré constant m^2 ou $(CG)^2$, auquel le produit ut ou $CQ \times QE$ est toujours égal, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole.

283. De la propriété que nous venons de démontrer, on peut déduire cette autre : *De quelque point* E *que ce soit de l'hyperbole, si l'on tire, de quelque manière que ce soit, une droite* REr

terminée aux asymptotes, les parties RE, mr, *interceptées entre la courbe et les asymptotes, seront égales.*

Car si par le point m on mène hmH parallèle à OEo, les triangles semblables REO, et RmH donnent $ER : Rm :: EO : Hm$; et les triangles semblables rhm et roE donnent $Er : mr :: Eo : mh$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh$; or les deux produits $EO \times Eo$ et $Hm \times mh$ sont égaux chacun à $(CD)^2$ (282); donc $ER \times Er = Rm \times mr$, ou $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; faisant les multiplications indiquées, et supprimant, de part et d'autre, $ER \times mr$, on aura $ER \times Em = Em \times mr$; donc $ER = mr$.

284. De là on conclura que toute tangente Tt à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact M.

285. Si, par le point M, on tire IMi parallèle à DD', et si, par un point quelconque E, on tire REr parallèle à la tangente Tt, les triangles semblables TMI et REO donneront $TM : MI :: RE : EO$; et les triangles semblables Mit, Eor, donneront Mt ou

$TM : Mi :: Er : Eo$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $(TM)^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$; or les deux produits $MI \times Mi$ et $EO \times Eo$ sont chacun égal à $(CD)^2$; donc $(TM)^2 = RE \times Er$.

286. Si, du centre C, on mène le diamètre CMV, il divisera en deux parties égales la ligne Rr parallèle à Tt, puisque (284) il passe par le milieu M de Tt; nommant donc CM, $\frac{1}{2}a'$; TM, $\frac{1}{2}q$; CV, z'; l'ordonnée VE, y'; les triangles semblables CMT, CVR donneront $CM : MT :: CV : VR$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$ ou $a' : q :: z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; donc $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, et $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; donc puisque $RE \times Er = (TM)^2 = \frac{1}{4}qq$, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; or (273) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; donc en substituant, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, ou $(qq - b'b')\frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq - b'b')$, ou $(qq - b'b')\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}(qq - b'b') = 0$; ou $(qq - b'b')\left(\frac{z'z'}{a'a'} - \frac{1}{4}\right) = 0$; et divisant par

par $\frac{z''}{a'a'} - \frac{1}{4}$, on aura $qq - b'b' = 0$, qui donne $q = b'$, ou $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$; c'est-à-dire, $MT = CN$, CN étant le demi-diamètre conjugué de CM; c'est ce que nous avons promis (277) de démontrer. On a donc (*fig.* 33) $MI = CN$.

287. On a donc aussi pour toute droite REr parallèle au conjugué CN (*fig.* 35) $RE \times Er = (CN)^2$.

288. On voit donc que, connoissant deux demi-diamètres conjugués CM, CN, (*fig.* 36), et l'angle qu'ils font entr'eux, il est très-facile de décrire l'hyperbole par des points trouvés successivement. En effet, ce qui a été dit (284 et 286) fait voir qu'en menant par l'origine M du demi-diamètre CM la ligne TMt parallèle à CN, et prenant de part et d'autre du point M les parties MT, Mt égales chacune à CN; si par le centre C, on tire les lignes CT et Ct, elles seront les asymptotes. Et ce qui a été démontré (283) fait voir que si par le point M, on tire arbitrairement tant de droite PMQ, PMQ qu'on voudra, et qu'on fasse sur chacune $PO = MQ$, les points O trouvés de cette manière, appartiendront tous à l hyperbole cherchée. On peut ensuite faire servir chaque point O, à en trouver d'autres tels que V, V, etc. en tirant les droites ROS, ROS, etc. et faisant $SV = RO$.

289. On voit aussi, par-là, comment, entre deux lignes

données pour asymptotes, on peut décrire une hyperbole qui passe par un point donné entre ces lignes.

290. Enfin, en divisant l'angle des asymptotes et son supplément, chacun en deux parties égales, on aura les directions des deux axes, dont on déterminera la grandeur comme il a été dit (280) ce qui donne un second moyen de résoudre la question dont il s'agissoit au même endroit.

De la Parabole.

291. Il s'agit maintenant de trouver les propriétés de la courbe dont chaque point seroit aussi éloigné d'un point fixe F (*fig.* 37), que d'une droite XZ dont la position est connue; c'est-à-dire, d'une courbe telle que pour chaque point M, abaissant la perpendiculaire MH, on auroit toujours $MF = MH$.

Du point F, menons FV perpendiculaire sur XZ, et partageons FV en deux parties égales en A; A sera un point de la courbe, puisque $AV = AF$; ce point est le *sommet*.

Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *parabole*; nous allons chercher une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires MP abaissées sur FV, et leurs distances AP au point A. Nous nommerons donc AV ou AF, c; AP, x; PM, y; alors nous aurons $VP = AV + AP = c + x = MH$; et puisque $MF = MH$, nous aurons aussi $MF = c + x$; d'ailleurs $FP = AP - AF = x - c$; or le triangle rectangle FPM donne $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$: donc $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$; donc transposant, et réduisant, $yy = 4cx$; c'est-là l'équation de la courbe, et voici ce qu'elle nous apprend.

1°. Cette équation donne $y = \pm\sqrt{(4cx)}$; donc, pour une même valeur de x ou AP, on a deux valeurs égales de y ou PM; mais comme l'une est positive, et l'autre négative, elles tombent de côtés opposés de la ligne indéfinie API qu'on appelle l'*axe*; c'est-à-dire, qu'elles sont PM et PM' : la courbe a donc deux branches AM, AM' parfaitement égales et qui s'étendent à l'infini, puisqu'il est clair que plus x augmentera, plus $\sqrt{(4cx)}$, et par conséquent y augmentera.

2°. Si l'on fait x négatif, on aura $y = \pm\sqrt{(-4cx)}$; c'est-à-dire, imaginaire; la courbe ne s'étend donc point au-dessus du point A.

3°. Si l'on fait $x = c$ pour avoir l'ordonnée qui passe par le point F qu'on appelle *le foyer*, on a $y = \pm\sqrt{(4cc)} = \pm 2c$; c'est-à-dire, que $Fm'' = 2c$; donc $m''m''' = 4c$. Cette ligne

$m''m'''$ qui passe par le foyer est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'axe de la parabole. Ainsi le *paramètre de l'axe de la parabole est quadruple de la distance* AF *du sommet au foyer.*

4°. Donc, si l'on nomme p ce paramètre, on aura $4c = p$, et l'équation de la parabole deviendra par conséquent $yy = px$.

292. Ayant l'équation d'une parabole, il est aisé de décrire cette courbe par des points trouvés successivement, en donnant à x plusieurs valeurs, et calculant les valeurs correspondantes de y.

293. On peut encore la décrire par points, de cette autre manière ; ayant choisi le point A que l'on veut prendre pour sommet et la ligne indéfinie TVI qui doit être la direction de l'axe, on prendra les parties AV, AF, égales chacune à $\frac{1}{4}p$, le point F sera le foyer ; alors on élèvera sur chaque point de l'axe des perpendiculaires indéfinies MM', et traçant du point F comme centre, et de la distance VP comme rayon, deux petits arcs qui coupent chaque perpendiculaire en deux points M et M', ces points seront à la parabole, puisque FM, qu'on fait par-là égal à VP sera égal à MH, en imaginant la droite VH perpendiculaire à l'axe. Cette droite XVH s'appelle la *directrice*.

294. Enfin on peut décrire la parabole par un mouvement continu en employant une *équerre* VHf; on attache sur un point quelconque f d'une des branches de cette équerre, l'extrémité d'un fil de longueur égale à fH; et ayant attaché l'autre extrémité au point F, on applique

par le moyen d'un style *M*, une partie du fil contre *fH*, et tenant toujours le fil tendu, on fait glisser l'autre côté de l'équerre, le long de *ZX*; le style *M* dans ce mouvement, trace la parabole *MA*.

295. L'équation $yy = px$, nous apprend que pour chaque point *M*, *le quarré de l'ordonnée* MP, *est égal au produit de l'abscisse correspondante, par le paramètre.*

On voit dans cette même équation, que *les quarrés* yy *des ordonnées, sont entr'eux comme les abscisses* x, c'est-à-dire, que $(PM)^2 : (pm)^2 :: AP : Ap$; car $(PM)^2 = p \times AP$ et $(pm)^2 = p \times Ap$; donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : Ap$, en divisant par p.

L'équation à l'ellipse, trouvée (222) est $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$; si l'on y suppose que le grand axe a est infini, alors xx doit être supprimé comme incapable de diminuer ax; il en est de même de $4cc$ à l'égard de $4ac$; l'équation se réduit donc à $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4aacx}{aa}$; c'est-à-dire, $yy = 4cx$, qui est l'équation à la parabole; *la parabole n'est donc qu'une ellipse dont le grand axe est infini.*

296. Si après avoir joint les points *F* et *H* par la ligne *FH*, on mène du point *M*, sur cette ligne, la perpendiculaire *MOT*; cette dernière sera tangente à la parabole.

En effet, d'un autre point quelconque N de cette ligne, menons NF, NH, et la ligne NZ perpendiculaire sur XZ; si quelqu'autre point tel que N de cette ligne pouvoit appartenir à la parabole, il faudroit que $NF = NZ$; or NZ est plus petit que NH, qui, en vertu de la construction, est égal à NF.

297. L'angle FMO, étant, par cette construction, égal à OMH, lequel est égal à son opposé fMN, il s'ensuit que FMO est égal à fMN.

Donc les rayons de lumière partis du point F et tombant sur la concavité $M'AM$, se réfléchissent tous parallèlement à l'axe; et réciproquement les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe, vont tous se rassembler au foyer F.

298. La ligne MH étant parallèle à VP, les triangles HOM, TOF sont semblables, et de plus égaux, puisque HO est égal à OF; donc $FT = MH = PV = x + c$; par conséquent, $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; donc la *soutangente* PT *de la parabole est double de l'abscisse* AP.

299. Si du point M, on mène la perpendiculaire MI sur la tangente TM, les triangles semblables TPM, PMI donneront $TP : PM :: PM : PI$; c'est-à-dire, $2x : y :: y : PI = \frac{y^2}{2x}$,

ou (à cause que $y^2 = px$), $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$. *La sou-normale de la parabole, est donc la même pour chaque point, et égale à la moitié du paramètre.*

300. On voit donc que connoissant l'abscisse et l'ordonnée d'un même point quelconque M d'une parabole, on peut toujours facilement déterminer le paramètre. Car en prenant $PT = 2AP$, TM est la tangente (298; et élevant sur celle-ci au point M la perpendiculaire MI, elle détermine (299) sur AP prolongée, la partie PI égale à la moitié du paramètre.

301. Toute ligne MX (*fig.* 38) tirée d'un point M de la parabole parallèlement à l'axe AQ, s'appelle un *diamètre ;* chaque diamètre a son *paramètre*, qui est en géneral le quadruple de la distance MF de l'origine de ce diamètre au foyer. Toute droite mO menée d'un point m de la parabole, parallèlement à la tangente TM qui passe par l'origine ou le sommet M de ce diamètre, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. Nous allons voir que les ordonnées à un diamètre quelconque, ont la même propriété que les ordonnées à l'axe.

Menons l'ordonnée MP à l'axe, et des points m et O, menons-lui les parallèles mp, OQ; enfin du point m, menons mS parallèle à l'axe. Nommons AP, x; PM, y; Qp, g; AQ, k. Nous aurons $Ap = k - g$. Les triangles semblables TPM, mSO, donnent $TP : PM :: mS : SO$; c'est-à-dire, $2x : y :: g : SO = \frac{gy}{2x}$; donc $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; or puisque le point m appartient à la parabole, il faut (295) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap : AP$; c'est-à-dire, $\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : yy :: k - g : x$; ou $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy :: k - g : x$; donc, en multipliant les extrêmes et les moyens, on a $xyy - gyy + \frac{ggyy}{4x} = kyy - gyy$, qui se réduit (en divisant par yy, et supprimant les termes qui sont les mêmes de part et d'autre) à $x + \frac{gg}{4x} = k$ ou $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Nommons maintenant l'abscisse MO, x'; et l'ordonnée mO, y'; nous aurons $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; donc $x' = k - x$, et par conséquent $\frac{gg}{4x} = x'$, ou $gg = 4xx'$; mais le triangle rectangle mSO, donne $(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$; c'est-à-dire, $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Mettant donc pour gg sa valeur $4xx'$, et pour yy sa valeur px, on aura, après les réductions faites, $4xx' + px' = y'y'$, ou $(4x + p)x' = y'y'$.

Mais si on appelle p' le paramètre du diamètre MX, on aura $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$; donc enfin $p'x' = y'y'$. L'équation à l'égard d'un diamètre quelconque est donc la même qu'à l'égard de l'axe. *Le quarré de l'ordonnée* mO *à un diamètre quelconque* MX, *est donc égal au produit de l'abscisse par le paramètre de ce diamètre ; et les quarrés des ordonnées à un diamètre quelconque de la parabole sont entr'eux comme les abscisses correspondantes.*

302. Il suit de tout ce qui précède, que si l'on veut décrire une parabole qui ait une ligne indéfinie MX pour diamètre, une ligne donnée p' pour paramètre de ce diamètre, et dont les ordonnées fassent un angle donné avec ce même diamètre ; on tirera par l'origine M une ligne NMT, faisant avec MX l'angle NMX égal à l'angle donné. Par le même point M, on mènera MF faisant de l'autre part avec MT l'angle FMT égal à NMX; et ayant fait $MF = \frac{1}{4}p'$, le point F sera le foyer de la parabole (297 et 301); tirant donc par le point F la ligne indéfinie TFQ parallèle à MX, et qui rencontre TM en T, ce sera la direction de l'axe, dont on déterminera le sommet A en abaissant la perpendiculaire MP, et partageant PT en deux parties égales en A (298). Alors ayant le foyer et le sommet, il sera facile de décrire la parabole (293 et 294).

303. Les trois courbes que nous venons de considérer successivement, ont été nommées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en cou-

pant un cône par un plan. Par exemple, on a l'ellipse $AMmB$ (*fig.* 39) si l'on coupe le cône CHI par un plan AMm, de manière que ce plan rencontre les deux côtés CH, CI, en deçà du sommet C; il faut seulement en excepter le cas où ce plan feroit avec le côté CI le même angle que fait l'autre côté CH avec la base; dans ce cas la section est un cercle.

Si au contraire le plan coupant ne rencontre l'un des côtés CH qu'autant que celui-ci sera prolongé, on a l'hyperbole AMm (*fig.* 40).

Enfin, on a la parabole, si le plan coupant est parallèle à l'un CH des côtés du cône (*fig.* 41): en voici la démonstration.

Concevons le cône CHI (*fig.* 39 et 40) coupé par un plan qui passe par la droite qui joindroit le sommet C, et le centre du cercle qui sert de base: c'est-à-dire, par un plan qui passe par l'axe du cône: la section sera un triangle. Coupons maintenant le cône par trois plans AMm, FMG, HmI perpendiculaires à ce triangle, et dont les deux derniers soient parallèles à la base du cône. Les deux sections FMG, HmI seront des cercles (*Géom.* 199), qui rencontreront la section AMm en M et en m. Les intersections FG, HI des plans des cercles, avec le triangle par l'axe, seront les diamètres de ces mêmes cercles. Les intersections PM, pm de ces cercles avec le plan AMm seront (*Géom.* 190) perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, et seront en même temps ordonnées de ces cercles et de la section AMm.

Cela posé, les triangles semblables APG, ApI donnent $AP : Ap :: PG : pI$, et les triangles semblables BFP, BHp donnent $PB : pB :: FP : Hp$; multipliant ces deux proportions par ordre, on a $AP \times PB : Ap \times pB :: FP \times PG : Hp \times pI$: or par la nature du cercle $FP \times PG = (PM)^2$, et $Hp \times pI = (pm)^2$; donc $AP \times PB : Ap \times pB :: (PM)^2 : (pm)^2$; donc les quarrés des ordonnées de la section AMm sont entr'eux comme les produits des abscisses; or ces abscisses tombent de différens côtés de l'ordonnée (*fig.* 39) et d'un même côte (*fig.* 40); donc AMm (*fig.* 39) est une ellipse, et (*fig.* 40) une hyperbole.

Quand à la *figure* 41, en supposant les mêmes choses que ci-dessus, on a, par la nature du cercle, $(PM)^2 = FP \times PG$, et $(pm)^2 = Hp \times pI$, ou (à cause des parallèles Pp, FH, et FP, Hp qui donnent $FP = Hp$) $(pm)^2 = FP \times pI$; donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$, à cause des triangles semblables APG, ApI; donc les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses; donc la courbe est une parabole.

Réflexions sur les Équations aux Sections coniques.

304. Il suit de ce que nous avons démontré (245) que si dans l'ellipse, on nomme x, l'abscisse CO (*fig.* 30) prise depuis le centre sur le diamètre MM'; y l'ordonnée mO parallèle au diamètre conjugué CN on aura $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$ pour l'équation à ce diamètre, quelqu'angle que fassent d'ailleurs ces deux diamètres conjugués. Et si, par le point m, on mène mO' parallèle à MM', et qui sera alors une ordonnée au diamètre NN'; alors nommant CO', x'; et mO' y'; on aura $y = x'$ et $x = y'$; et l'équation deviendra $x'x' = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - y'y')$; d'où l'on tire $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - x'x')$. C'est-à-dire, qu'en prenant les abscisses du centre, l'équation, par rapport à quelque diamètre que ce soit, est toujours de même forme, tant qu'on prend les ordonnées parallèles au diamètre conjugué.

Si b est égal à a, l'équation devient $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, que nous avons vu (221) appartenir au cercle. Mais il faut bien faire attention que c'est en supposant les ordonnées perpendiculaires au diamètre ; car lorsqu'elles font tout autre angle qu'un angle droit, l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ appartient à l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués égaux.

Pour l'hyperbole, si l'on nomme x, l'abscisse CO (*figure* 33) prise depuis le centre sur le diamètre MM' terminé à la courbe, et y l'ordonnée mO parallèle au diamètre conjugué NN' on aura (273) $yy = \frac{bb}{aa} \times (xx - \frac{1}{4}aa)$ pour l'équation à ce diamètre, quel que soit d'ailleurs l'angle compris entre les deux diamètres conjugués. Mais si menant, par le point m', la ligne $m'O'$ parallèle au diamètre CM, on nomme y' la ligne $m'O'$, qui est alors une ordonnée au diamètre NN' ; et si l'on nomme x' l'abscisse CO', on aura $x' = y$ et $y' = x$, ce qui changera l'équation en $x'x' = \frac{bb}{aa}(y'y' - \frac{1}{4}aa)$ qui donne $y'y' = \frac{aa}{bb}(x'x' + \frac{1}{4}bb)$; d'où l'on voit que l'équation, par rapport au diamètre conjugué NN', n'est pas semblable à celle que l'on trouve pour le diamètre MM' terminé à la courbe.

A l'égard de la parabole, nous avons vu (301) qu'en prenant les abscisses sur un diamètre quelconque, depuis l'origine de ce diamètre, et prenant les ordonnées parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, l'équation étoit toujours $yy = px$, en nommant y l'ordonnée, x l'abscisse et p le paramètre de ce diamètre.

Enfin à l'égard de l'hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes, en prenant les abscisses depuis le centre, sur une des asymptotes, et les ordonnées parallèles à l'autre asymptote; nommant les premières x, les secondes y, et aa la puissance de l'hyperbole, l'équation de l'hyperbole, sous ce dernier aspect est $xy = aa$.

305. Mais il faut bien remarquer que pour que ces équations se rapportent aux lignes auxquelles nous venons de les rapporter, il est essentiel que l'une des indéterminées, que y, par exemple, se compte depuis la ligne même sur laquelle les x sont comptés; car on pourroit avoir une équation de quelqu'une des formes que nous venons de parcourir, et qui cependant ne se rapporteroit point aux diamètres conjugués, si cette équation est à l'ellipse ou à l'hyperbole; ou qui, lorsqu'elle appartient à une parabole, n'expri-

meroit point la relation entre les abscisses et ce que nous avons appelé jusqu'ici les *ordonnées* ; par exemple, si (*fig.* 42) CM', CN sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, à l'égard desquels on ait l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, CM' étant $\frac{1}{2}a$; CN, $\frac{1}{2}b$; CQ, x ; et QM, y ; si par le centre C on tire une droite indéfinie FCE qui rencontre les ordonnées QM en E ; si l'on nomme les lignes CE, z ; qu'enfin par un point B pris à une distance connue $BC = m$, on mène BF parallèle à QM, et qu'on nomme CF, n ; alors les triangles semblables CBF, CQE, donnent $m : n :: x : z$, donc $x = \frac{mz}{n}$; si on substitue cette valeur de x dans l'équation ci-dessus, elle deviendra $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - \frac{mmzz}{nn})$ ou $aannyy = \frac{1}{4}aabbnn - bbmmzz$, ou (en divisant le second membre par $bbmm$ et indiquant en même-temps la multiplication par $bbmm$) $aannyy = bbmm(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz)$; ou enfin $yy - \frac{bbmm}{aann}(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz)$, équation de même forme, mais que l'on auroit tort, comme on le voit, de regarder comme appartenant aux diamètres conjugués ; car les abscisses z étant prises sur CE, les ordonnées y ou QM se comptent du point Q où la ligne EM parallèle à CN rencontre CM'.

306. On voit donc, en général, 1°. que si l'on a une équation du second degré, à deux indéterminées x et y, et si l'une des indéterminées se compte depuis la ligne sur laquelle l'autre se compte, cette équation appartiendra à l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, ou au cercle; si ne renfermant d'autres puissances de x et y que les quarrés, ces deux quarrés se trouvent avec différens signes dans chaque membre, et si en même-temps la quantité toute connue qui se trouve dans un même membre avec le quarré qui aura le signe —, a elle-même le signe +; car si l'on avoit, par exemple, $yy = \frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa - xx)$; cette équation n'exprimeroit aucune ligne possible; puisqu'elle donne.... $y = \pm\sqrt{[\frac{bb}{aa}(-\frac{1}{4}aa - xx)]}$, quantité absurde.

307. 2°. Si les deux quarrés yy et xx, passés dans différens membres, ont le même signe, et s'il n'y a d'autres puissances de x et de y que ces quarrés, l'équation appartiendra toujours à une hyperbole, laquelle sera rapportée à un diamètre terminé à la courbe, ou à son conjugué, selon que le terme tout connu, aura un signe contraire à celui des quarrés xx et yy, ou le même signe que ces quarrés.

308. 3°. Si l'équation ne renferme que l'un des

des quarrés et n'a que deux termes, dont le second soit le produit de l'autre indéterminée, par une quantité connue, elle appartiendra à une parabole rapportée à l'un de ses diamètres, si ces deux termes placés dans différens membres ont le même signe; mais s'ils ont différens signes, l'équation n'exprime aucune ligne possible.

309. 4°. Enfin si l'équation n'ayant que deux termes, l'un est le produit des deux indéterminées x et y, et l'autre une quantité toute connue, elle exprime une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

310. Telles sont les équations aux sections coniques rapportées aux différentes lignes auxquelles nous venons de les rapporter. Nous en verrons l'usage dans peu ; mais il n'est pas inutile de dire d'avance que toutes les fois qu'on aura une équation à deux indéterminées x et y, qui aura les conditions que nous venons d'exposer, il sera toujours facile de construire la section conique à laquelle elle appartiendra, et cela en se conduisant comme dans cet exemple.

Supposons qu'on ait l'équation $ncd - qyy = gxx$; je l'écrirois ainsi, $qyy = ncd - gxx$; divisant le second membre par g, et indiquant en même temps la multiplication par g, $qyy = g\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$, et enfin $yy =$

$\frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$; or sous cette forme, je vois (243 et 245) que cette équation appartient à une ellipse dont le rapport des quarrés des deux diamètres conjugués est $\frac{g}{q}$, et dont le quarré de celui de ces diamètres sur lequel les x sont comptés, est $\frac{4ncd}{g}$. En effet, comparant cette équation, à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$; j'ai $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, et $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$. De ces deux équations, on tire $a = \sqrt{\left(\frac{4ncd}{g}\right)}$, et $b = \sqrt{\left(\frac{4ncd}{q}\right)}$, ce qui détermine les deux diamètres conjugués. Quant à l'angle que font ces deux diamètres conjugués, c'est celui que font les lignes x et y, angle qui est censé connu par la question qui aura conduit à l'équation $ncd - qyy = gxx$. Or nous avons vu (252) comment, connoissant ces trois choses, on peut décrire l'ellipse.

On se conduira de même pour les équations aux autres sections, lorsqu'elles se rapporteront à quelques-unes de celles que nous avons exposées ci-dessus. Nous allons voir qu'en général toute équation du second degré à deux indéterminées, exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune ligne possible (*); et cela

(*) Il faut seulement en excepter le cas où elle seroit le produit de deux facteurs du premier degré, tels que $ax + by + c$ et $dx + fy + g$; auquel cas même, elle n'est pas réellement du second degré; mais ce cas ne pouvant nous servir, nous ne nous en occuperons point.

se démontre en faisant voir que toute équation pareille peut toujours être ramenée à quelqu'une de celles que nous avons données ci-dessus. Nous allons en donner la méthode ; mais pour répandre plus de jour sur l'usage de cette méthode et sur les constructions auxquelles elle conduit, il est à propos de placer ici les réflexions suivantes.

311. Puisque toute question qui peut être résolue par l'Algèbre, conduit toujours à une ou plusieurs équations, toute équation à deux indéterminées, u et t peut toujours être considérée comme venant d'une quesstion où ces deux indéterminées u et t représentoient les deux inconnues. Quelle qu'ait été cette question, on peut toujours considérer l'équation comme exprimant la nature d'une courbe ; et cela est bien facile à concevoir ; car si l'on donne arbitrairement et successivement à l'une des deux inconnues, à u, par exemple, plusieurs valeurs ; et qu'à l'aide de l'équation et des règles de l'Algèbre, on calcule à chaque fois la valeur de t, il est évident que rien n'empêche de marquer sur une ligne indéfinie AR (*fig.* 42, 43 et 44) les valeurs AP, AP, etc. qu'on a données à u, de mener par les points P, P, etc. des lignes PM, PM, etc. parallèles entr'elles et sous un angle déterminé, et de faire

ces dernières égales aux valeurs correspondantes qu'on a trouvées pour t; la suite des points M, M, etc. déterminés de cette manière formera une courbe dont la nature dépendra du rapport des lignes AP et PM; et puisque ce rapport est exprimé par l'équation dont ces lignes ont été déduites, cette équation exprime donc la nature de cette courbe.

Cela posé, concevons que la courbe soit une section conique; il est clair que, comme dans la question qui a donné cette équation, on ignoroit, ou l'on pouvoit ignorer totalement si un pareil usage de cette équation, donneroit une section conique, on n'a pas cherché à disposer les lignes AP et PM, de manière que l'une ayant sa direction sur un diamètre, l'autre fût parallèle à la tangente menée par le sommet de ce diamètre, ce qui est d'abord nécessaire pour que l'équation ait l'une des formes ci-dessus. On voit donc par là comment il peut se faire qu'une équation, quoique n'ayant pas l'une de ces formes, appartienne néanmoins à une section conique.

212. Voyons donc maintenant comment on peut ramener toute équation du second degré, et qui renferme deux indéterminées, à avoir l'une des formes que nous avons vues appartenir aux

sections coniques rapportées aux lignes auxquelles nous les avons rapportées (304).

313. La méthode que nous allons exposer, suppose qu'on sache faire disparoître le second terme dans une équation du second degré à une inconnue. La règle pour cette opération est simple; il faut égaler l'inconnue augmentée (ou diminuée si le second terme a le signe —) de la moitié du coëfficient ou multiplicateur de x dans le second terme, à une nouvelle inconnue, après avoir préalablement dégagé le quarré de l'inconnue.

Par exemple, pour faire disparoître le second terme de l'équation $4x^2 + 12x = 9$, je divise par 4, et j'ai $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; je fais $x + \frac{3}{2} = z$; en quarrant, j'ai $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = zz$, et par conséquent $x^2 + 3x = zz - \frac{9}{4}$; substituant dans l'équation $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, j'ai $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, ou $zz = \frac{18}{4}$, équation qui n'a plus de second terme.

Si j'avois $x^2 - 4x = 7$, je ferois $x - 2 = z$; quarrant, j'aurois $x^2 - 4x + 4 = zz$, ou $x^2 + 4x = zz - 4$; d'où, en substituant, il vient $zz - 4 = 7$, ou $zz = 11$, équation sans second terme.

314. On peut même, si on le veut, égaler l'inconnue augmentée de la moitié du coëfficient du second terme, non à une inconnue simple, mais à une inconnue multipliée ou divisée par une quantité arbitraire; et cette remarque nous servira dans quelques momens.

Par exemple, dans l'équation $x^2 - 4x = 7$, au lieu de faire simplement $x - 2 = z$, comme ci-dessus, je puis faire $x - 2 = \frac{k}{n} z$, j'aurai, en opérant toujours de la même manière, $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, et par conséquent $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$; d'où, en substituant, on tire $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$, et par conséquent $\frac{kk}{nn} zz = 11$; on n'en aura pas moins la même valeur pour x, quelque valeur qu'on donne à k et à n; en effet, cette équation donne $\frac{k}{n} z = \sqrt{(11)}$; et puisque $x - 2 = \frac{k}{n} z$, on a $x - 2 = \sqrt{(11)}$, précisément comme par le premier procédé. En un mot, cela ne change rien à ce que l'on cherche; mais en introduisant ainsi une quantité arbitraire, on se ménage les moyens de remplir certaines vues, auxquelles on ne satisferoit quelquefois que d'une manière indirecte, ou moins simple, en s'y prenant autrement.

Moyens de ramener aux Sections coniques, toute Équation du second degré à deux indéterminées, lorsqu'elle exprime une chose possible.

315. Supposons qu'on ait l'équation $dtt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$, qui renferme toutes les équations du second degré à

deux indéterminées u et t, dont aucun terme ne manque. Concevons que cette équation appartienne à une courbe MM (*fig.* 42 et 43) dont AP et PM sont les coordonnées. Voici comment on s'assurera que cette courbe est toujours une section conique, et comment on déterminera cette section.

Il faut, lorsqu'il ne manque aucun des deux quarrés t^2 et u^2, faire disparoître successivement le second terme de cette équation par rapport à t, et le second terme par rapport à u, ce que l'on fera de la manière suivante.

Après avoir renfermé entre deux crochets tout ce qui multiplie la première puissance de t, je dégage tt et j'ai $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{euu}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0 \, (A)$.

Je fais donc (313) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; en quarrant, j'aurai $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} = yy$; et par conséquent $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t = yy - \frac{1}{4}ff - \frac{fcu}{2d} - \frac{ccuu}{4dd}$. Substituant dans l'équation (A), et transposant ensuite pour laisser yy seul; j'ai $yy = \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} - \frac{euu}{d} - \frac{geu}{d} - hd$, ou, en multipliant tout par $4dd$, et rassemblant ensuite les termes qui sont multipliés par des puissances semblables de u, $4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$.

Comme les quantités d, c, e, f, etc. représentent des quantités connues, on peut, pour abréger le calcul, représenter $ffdd - 4hd^3$ par une seule lettre r; représenter de même, $2cfd - 4ged$, par q; et $cc - 4de$, par m; l'équation deviendra $4ddyy = r + qu + mu^2$, m, q, r pouvant être positives ou négatives.

Faisons maintenant disparoître le second terme par rapport à u; et pour cet effet, commençons par dégager uu, ce qui donne $u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$. (B). Mais au lieu de faire simplement $u + \frac{q}{2m} =$ à une nouvelle indéterminée x, selon la règle donnée (313), je le fais $= \frac{qx}{2mn}$ (314); c'est-à-dire, égal à une nouvelle indéterminée x multipliée par la moitié du coëfficient du second terme, et divisée par une quantité arbitraire n inconnue pour le moment, mais que nous déterminerons dans peu (*).

J'ai donc $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; quarrant, il me vient $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mm} = \frac{qqxx}{4mmnn}$, ou $uu +$

(*) Cette quantité n est introduite pour pouvoir ramener directement l'équation aux diametres conjugués. Si l'on égaloit simplement à x, l'équation finale acquerroit la forme de l'équation à l'ellipse ou à l'hyperbole, mais elle seroit dans le cas que nous avons examiné (305).

$\frac{qu}{m} = \frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm}$. Substituant dans l'équation (B), j'ai $\frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, équation qui appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, tant qu'aucune des quantités d, m, q, r etc. n'est zéro; excepté le cas où nous allons voir qu'elle n'exprimeroit aucune ligne possible.

Examinons maintenant dans quels cas la courbe est une ellipse, dans quels cas une hyperbole, et enfin dans quels cas il n'y a pas de courbe.

Pour cet effet, dégageons yy, et nous aurons $yy = \frac{qqxx}{16mnndd} - \frac{qq}{16mdd} + \frac{r}{4dd}$, ou, en divisant le second membre par le coëfficient de xx, et indiquant en même temps la multiplication par ce même coëfficient, $yy = \frac{qq}{16mnndd}\left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$ équation dans laquelle les quantités q, n et d étant au quarré, les signes ne peuvent changer que lorsque m ou r, au lieu d'être positifs, seront négatifs; mais le changement du signe de r n'en apportant aucun à ceux des quarrés yy et xx, la courbe ne change point par le changement du signe de r. A l'égar de m, s'il est négatif, l'équation est alors

$$yy = \frac{qq}{-16mnndd} \times \left(xx - nn - \frac{4mrnn}{qq}\right),$$

ou, en changeant les signes en haut et en bas,

$$yy = \frac{qq}{16mnndd} \times \left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx\right).$$

On voit donc (306 et 307) que tant que m sera positif, la courbe sera une hyperbole ; et qu'au contraire, elle sera une ellipse, quand m sera négatif ; or la quantité m a représenté ci-dessus $cc - 4de$, et dans cette dernière, la quantité c étant au quarré, est toujours positive ; donc m ou $cc - 4de$ ne peut devenir négatif qu'autant que $4de$ surpassera cc; et cela, soit que d et e soient tous deux positifs, soit qu'ils soient tous deux négatifs.

316. Donc, *si l'on veut savoir dans quels cas une équation du second degré à deux indéterminées* u *et* t, *telle que* $dt^2 + cut + eu^2 \times fdt + geu + hd^2 = 0$, *appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, il n'y a qu'à examiner si le quarré* cc *du coëfficient du terme* ut, *moins le quadruple du produit* de *des coëfficiens de* t^2 *et de* u^2, *fait une quantité positive ou négative ; dans le premier cas, la courbe sera une hyperbole ; et dans le second cas, une ellipse.* Il faut seulement en excepter le cas où r étant négatif, seroit plus grand que $\frac{qq}{4m}$ pour l'ellipse ; car alors la quantité $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ devenant $nn - \frac{4mrnn}{qq}$, ou

$nn\left(1-\frac{4mr}{qq}\right)$ est négative si $\frac{4mr}{qq}$ est plus grand que 1, ou, ce qui revient au même, si $4mr$ est plus grand que qq, ou enfin si r est plus grand que $\frac{qq}{4m}$, ce qui rend la valeur de y, et par conséquent, la courbe imaginaire.

Il reste à faire voir comment on peut décrire l'ellipse et l'hyperbole que nous venons de reconnoître; considérons l'ellipse.

317. Des deux équations $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, et $u+\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$, que nous avons eues pour faire disparoître les seconds termes, la seconde, par la supposition actuelle, que m est négatif, se change en $u-\frac{q}{2m}=\frac{-qx}{2mn}$; mais comme n est une quantité introduite arbitrairement, on peut la supposer indifféremment positive ou négative; en la supposant négative, on a $u-\frac{q}{2m}=\frac{qx}{2mn}$; construisons ces deux équations pour avoir la position des diamètres conjugués.

La première, savoir $t+\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}=y$, fait voir que pour avoir y, il faut augmenter chaque t de la quantité $\frac{1}{2}f+\frac{cu}{2d}$; on mènera donc, par le point A, origine des u et des t (*fig.* 42), la ligne $AB = \frac{1}{2}f$, parallèle aux lignes PM ou t. Par le point B, on mènera BKI parallèle à la ligne AR, sur laquelle se comptent les u, et ayant pris arbitrairement la ligne BK, on mènera parallèlement à AB, la ligne KL qui soit à $BK :: \frac{1}{2}c : d$; si l'on tire par les points B et L la ligne indéfinie BLQ, alors les lignes QM comptées des points Q où cette ligne coupe les lignes PM, seront les valeurs de y. En effet, on a $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ = t + \frac{1}{2}f + IQ$; or les triangles semblables BKL et BIQ, donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : IQ$; c'est-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$; donc $QM = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Puisque les y se comptent depuis la ligne LQ, il s'ensuit (305) que pour que l'équation à l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués, les x doivent être comptés sur la ligne BLQ, et que le point d'où elles seront comptées, sera le centre; en sorte que QLB est la direction d'un des diamètres. Voyons à déterminer ce centre.

La seconde équation $\frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, fait voir que si sur AP ou u, on prend $AG = \frac{q}{2m}$, la quantité GP qui vaut $AP - AG$, vaudra $u - \frac{q}{2m}$, et par conséquent $\frac{qx}{2mn}$; on a donc $GP = \frac{qx}{2mn}$; or si par le point G, on mène NGC parallèle aux lignes PM, le point C où elle rencontrera LQ, sera l'origine des x, et par conséquent le centre; en effet, nous venons de voir que les x devoient être comptées sur LQ; or, lorsque GP est zéro, sa valeur $\frac{qx}{2mn}$ doit être zéro; x doit donc être zéro alors, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les x commenceront au point C; ainsi les lignes QM étant y, les lignes CQ sont x. De-là il est facile d'avoir la valeur de n; car on a $GP = \frac{qx}{2mn}$, ou (en mettant pour x, sa valeur CQ, et pour $\frac{q}{2m}$, sa valeur AG) $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$; donc $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mais les parallèles QP, CG et AB, donnent $GP : AG :: CQ : BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; on a donc $n = BC$; c'est-à-dire, que pour que l'équation à l'ellipse trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués, dont les directions sont QB et CN, il faut mettre pour n, la valeur de BC, qui est déterminée par les constructions précédentes.

Il ne reste donc plus, pour être en état de décrire cette ellipse, qu'à déterminer la grandeur des diamètres conjugués; car l'angle BCN qu'ils font entr'eux, se trouve déterminé par les opérations précédentes. Or cela est facile, en imitant ce que nous avons fait (310). Il ne s'agit que de comparer l'équation $yy = \frac{qq}{16mddnn}(nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx)$, à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$. Cette comparaison donne $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddnn}$, et $\frac{1}{4}aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; donc $a = \sqrt{\left(4nn + \frac{16mnnr}{qq}\right)}$, et $b = \sqrt{\left(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd}\right)}$; et puisque n, m, q, r, d sont toutes des quantités connues, on a donc les valeurs des diamètres conjugués a et b, avec lesquelles, et connoissant d'ailleurs l'angle BCN qu'ils doivent faire, on décrira l'ellipse de la manière qui a été enseignée (252).

318. Remarquons que si les valeurs de a et de b sont égales, et qu'en même temps l'angle BCN soit droit, la courbe est alors un cercle. Si l'on veut déterminer dans quels cas cela aura lieu, il n'y a 1°. qu'à supposer dans notre équation à l'ellipse, que $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, c'est-à-

dire, que $qq = 16mddnn$, ce qui donne $nn = \frac{qq}{16mdd}$. 2°. Si l'angle BCD est droit, on doit avoir $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; or $BC = n$; et les triangles semblables BCD, BLK, donnent $BK : KL :: BD$ ou $AG : CD$, c'est-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: \frac{q}{2m} : CD$, d'où l'on tire $CD = \frac{qc}{4md}$; donc $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, ou $m + cc = 4dd$; mais puisque m est négatif, on a $cc - 4de = -m$, ou $m = 4de - cc$; il faudra donc que $4de = 4dd$, ou que $d = e$.

319. On voit donc que *pour savoir si la courbe est un cercle, une ellipse ou une hyberbole*, il est inutile d'avoir égard aux trois derniers termes fdt, geu, et hd^2 de l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$; cela dépend seulement des trois premiers, en sorte que si d, c et e sont tels que $cc - 4de$ soit positif, la courbe sera une hyperbole; elle sera une ellipse, si au contraire $cc - 4de$ est négatif, excepté le cas où l'on aura en même temps $d = e$, c'est-à-dire, où les deux quarrés u^2 et t^2 auront le même coëfficient, alors elle sera un cercle, si l'angle BCD résultant de la construction précédente est droit.

320. Tout ce que nous venons de dire, à l'ex-

ception de ce que renferme le numéro 318, s'applique également à l'hyperbole, c'est-à-dire, à l'équation $yy = \frac{qq}{16mnndd}\left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$, à la différence des signes près. Ainsi en relisant tout ce qui précède et l'appliquant à la *figure* 43, il n'y a d'autre changement à faire que de porter AG à l'opposite de AP, ce qui est indiqué par l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que l'on a eue d'abord (317). Du reste, tout est le même en changeant le mot *ellipse* en celui d'*hyperbole*.

Dans les différens cas particuliers, les quantités AG, BK, AB, KL, (*fig.* 42 *et* 43) peuvent se trouver disposées tout au contraire de ce que l'on voit ici; mais ces changemens seront toujours indiqués par les signes des quantités d, c, f, m, q, etc. dans les équations $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, et $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ que l'on a en faisant disparoître les seconds termes.

321. Il nous reste deux cas à examiner; ce sont 1°. celui où l'on auroit $cc - 4de = 0$; 2°. celui où l'on auroit tout-à-la-fois $d = 0$, et $e = 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $cc - 4de = 0$, ou $cc = 4de$, la courbe est

est une parabole. Comme la quantité m est alors zéro, la construction précédente devient inutile; parce qu'après avoir fait évanouir le second terme par rapport à t, le terme u^2 ne s'y trouve plus. Ce cas se reconnoît facilement en examinant si dans l'équation, on a $cc = 4de$, c'est-à-dire, si les trois termes t^2, ut et u^2 forment un quarré; car de ce que $cc = 4de$ on déduit $c = 2\sqrt{de}$, ce qui change les trois premiers termes de l'équation, en $dt^2 + 2ut\sqrt{de} + eu^2$, qui est le quarré de $t\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

Dans ce cas on fera, comme ci-devant, disparoître le second terme, par rapport à t, et alors l'équation se réduira, en opérant mot à mot comme ci-dessus, à $4ddyy = r + qu$; alors pour ramener cette dernière à la forme $yy = px$, qui (301) est celle de la parabole rapportée à un diamètre dont les ordonnées sont parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, on dégagera yy, ce qui donne $yy = \frac{r+qu}{4dd}$; on fera ce second membre égal à une nouvelle indéterminée x, multipliée par une quantité n que l'on déterminera comme on va le voir; c'est-à-dire, qu'on fera $\frac{r+qu}{4dd} = nx$; alors on aura $yy = nx$. Il ne s'agira donc plus que de construire l'équation $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, qui a servi à faire disparoître le second terme par rapport à t, et l'équation $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, qui aura servi à la seconde réduction. La première de ces deux équations étant précisément la même que celle que nous avons construite (317), se construira de même ici; ainsi il n'y a qu'à appliquer à la *figure* 44, mot à mot ce qui a été dit (317) pour la *figure* 42, relativement à la construction de $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, les y seront les lignes QM (*fig.* 44), et l'on aura BLQ pour la direction du diamètre sur lequel les x doivent être comptés.

Pour déterminer l'origine des x, et par conséquent le sommet de ce diamètre, on emploiera l'équation $\frac{r + qu}{4dd} = nx$, qui donnant $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, fait voir que si l'on prend à l'opposite de AP, la quantité $AG = \frac{r}{q}$, on aura $GP = \frac{4ddnx}{q}$, puisque $GP = AP + AG = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; donc si par le point G, on mène GCD parallèle aux lignes PM, et qui rencontre QLB en C, le point C sera l'origine des x, puisque l'équation $GP = \frac{4ddnx}{q}$ fait voir que quand GP est zéro, x doit être zéro; et que d'ailleurs les x devant être comptés sur la ligne de laquelle partent les y, doivent être comptés sur BQ.

Il ne s'agit plus que de déterminer le paramètre n. Or on vient de voir que $GP = \frac{4ddnx}{q}$; mais les parallèles CD et QI donnent $BC : BD$ ou $AG :: CQ : DI$ ou GP; c'est-à-dire, $BC : \frac{r}{q} :: x : \frac{4ddnx}{q}$; donc $BC = \frac{r}{4ddn}$; donc $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; or r et d sont donnés dans l'équation, et BC est déterminé par la construction; on connoît donc n ou le paramètre; d'ailleurs cette même construction détermine en même temps l'angle des coordonnées CQ et QM ou x et y; il est donc aisé de construire la parabole selon qu'il a été enseigné (302).

322. Puisque l'équation générale appartient à la parabole lorsqu'on a $cc = 4de$, il s'ensuit que lorsque le produit ut des deux indéterminées ne se trouve point dans cette équation, il faut pour qu'elle appartienne à la parabole, qu'il y manque aussi un des deux quarrés t^2 ou u^2; car c étant alors zéro, l'équation $cc = 4de$ ou $o = 4de$, fait voir que d ou $e = o$.

323. Si les deux quarrés sont tous deux dans

l'équation, et que le produit ut ne s'y trouve point, alors la construction donnée (317) et qui convient aux *figures* 42 et 43, devient plus simple, parce que c étant zéro, la ligne KL est zéro, et BL tombe sur BK, qui devient alors un diamètre; les lignes des x et des y sont donc parallèles à celles des u et des t. Dans ce même cas, l'évanouissement du second terme par rapport à u se fera sans employer l'inconnue n, parce que BC qui est n (317) étant alors égal à BD ou à AG, on a $n = \frac{q}{2m}$, ce qui réduit l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ qu'on a eue pour faire disparoître le second terme, par rapport à u, à celle-ci $u + \frac{q}{2m} = x$.

Il suit de-là, qu'outre les conditions mentionnées (318), il faut dans le cas présent, pour que la courbe soit un cercle, que l'angle des coordonnées u et t soit droit.

324. Lorsque le produit ut se trouve dans l'équation, si après avoir fait évanouir le second terme par rapport à l'une des deux indéterminées, par exemple, par rapport à t, il ne se trouvoit plus d'autre puissance de l'indéterminée u, que le quarré, alors quoiqu'il n'y ait plus de second terme à faire disparoître, il n'en faudroit pas moins faire une transformation qui consisteroit à faire

$u = \frac{lx}{n}$, $\frac{l}{n}$ étant une fraction inconnue, mais que l'on détermineroit lors de la construction, d'une manière semblable à ce que nous venons de faire (331). Nous en donnerons un exemple plus bas.

325. Si des trois termes t^2, ut, et u^2, il ne manque que l'un des deux quarrés, l'équation appartient toujours à une hyperbole, ou n'exprime aucune courbe; parce que si d ou e est zéro, la quantité $cc - 4de$ se réduisant à cc, est essentiellement positive.

326. Enfin si les deux quarrés t^2 et u^2 manquent en même temps, auquel cas on a une équation de cette forme, $gut + ht - ku - l = 0$; g, h, k, l pouvant être indifféremment positifs ou négatifs; on peut encore faire usage de la construction donnée (317). L'équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; mais comme les abscisses et les ordonnées ne sont point comptées du centre, on les y ramènera de la manière suivante.

On dégagera le produit ut; ce qui donnera $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$. On fera la somme des quantités qui multiplient u, égale à une indéterminée y, c'est-à-dire, $t - \frac{k}{g} = y$;

ce qui donne $t = y + \frac{k}{g}$; substituant dans l'équation $ut + \frac{ht}{g}$, etc. $= 0$, on aura $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$; après cette transformation, on fera la somme de toutes les quantités qui multiplient y, égale à une nouvelle indéterminée x, c'est-à-dire, $u + \frac{h}{g} = x$, ce qui réduira l'équation à $xy + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$, ou $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ qui appartient à l'hyperbole entre ses asymptotes, les abscisses x étant comptées depuis le centre sur une des asymptotes, et les ordonnées y étant comptées depuis cette asymptote parallèlement à l'autre ; enfin la puissance de cette hyperbole est $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (282).

Pour construire cette hyperbole, on construira, de la manière suivante, les deux équations $t - \frac{k}{g} = y$, et $u + \frac{h}{g} = x$ qui ont servi à réduire. La première fait voir qu'il faut diminuer chaque t de la quantité $\frac{k}{g}$ pour avoir y. On mènera donc par le point A (*fig.* 45), origine des u et des t, une ligne AB parallèle aux lignes PM ou t, et égale à $\frac{k}{g}$; tirant ensuite par le point B la ligne CBQ parallèle à AP, les lignes QM seront les y, puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Pour avoir les x, l'équation $u + \frac{h}{g}$ fait voir qu'il faut augmenter les u, c'est-à-dire, les lignes AP, de la quantité $\frac{h}{g}$; on portera donc à l'opposite de AP, la ligne $AG = \frac{h}{g}$, et tirant GS parallèle aux lignes PM et qui rencontre BQ en C, CQ sera x, et C sera le centre de l'hyperbole dont CQ et CS seront les asymptotes ; ayant les asymptotes et l'équation $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, on décrira l'hyperbole de la manière qui a été enseignée (289).

Si les trois premiers termes t^2, ut et u^2 manquoient dans l'équation, alors elle n'exprimeroit plus qu'une ligne droite dont la construction est facile après ce que nous avons dit sur la construction des équations qui ont servi aux réductions précédentes.

327. Ainsi 1°. toute équation du second degré à deux indéterminées exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune courbe possible.

2°. Cette courbe est ellipse, ou hyperbole ou parabole, selon que le quarré du coëfficient du produit ut des deux indéterminées, moins le quadruple du produit des coëfficiens des deux quarrés t^2 et u^2 est négatif, ou positif ou zéro; et en particulier elle peut être un cercle, lorsque ce même résultat étant négatif, les coëfficiens de u^2 et t^2 sont égaux. 3°. Et pour ramener toute équation appartenante à une section conique, aux équations que nous avons données en traitant de ces courbes, il faut se conformer à ce qui a été enseigné (315, 317, 320, 321, et 326).

Application de ce qui précède, à la résolution de quelques questions indéterminées.

328. Pour faire connoître l'usage des transformations que nous venons d'enseigner, proposons-nous pour première question, de *trouver quelle est la courbe* (fig. 46) *dont les distances de chaque point* M *à deux points fixes* A *et* B *seroient toujours dans un même rapport, marqué par celui de* g *à* h.

Imaginons que de chaque point M, on ait abaissé une perpendiculaire MP sur la ligne AB; cherchons la relation de ces perpendiculaires, avec leurs distances AP au point A; et pour cet effet, nommons AP, u; PM, t; et la ligne connue $AB = c$.

Cela posé, le triangle rectangle APM donne $AM = \sqrt{[(AP)^2 + (PM)^2]} = \sqrt{(uu + tt)}$, et le triangle rectangle BPM donne $BM, = \sqrt{[(BP)^2 + (PM)^2]}$; or $BP = AP - AB = u - c$; donc $BM =$

$\sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$; puis donc que l'on veut que $AM : BM :: g : h$, on aura $\sqrt{(uu + tt)} : \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)} :: g : h$; donc $h\sqrt{(uu + tt)} = g\sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$, ou, en quarrant, $hhuu + hhtt = gguu - 2ggcu + ggcc + ggtt$, ou $(gg - hh)uu + (gg - hh)tt - 2ggcu + ggcc = 0$, équation qui (318) appartient au cercle, puisque les deux quarrés uu et tt, ont, dans le même membre, le même signe et le même coëfficient.

Pour ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (317), je vois que n'y ayant point de second terme par rapport à t, il suffit à l'égard de cette indéterminée, de supposer $t = y$, ce qui donne $(gg = hh)uu + (gg - hh)yy - 2ggcu + ggcc = 0$; il faut donc à présent, faire disparoître le second terme par rapport à u; et comme le produit ut ne se trouve point dans l'équation, il suffit (323) d'employer la règle donnée (313). Je dégage donc uu, et j'ai $uu - \frac{2ggcu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$; je fais $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$; quarrant, et substituant au lieu du premier membre, $uu +$ etc. sa valeur $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2}$ qu'on aura par cette opération, il me vient $xx - \frac{g^4cc}{(gg - hh)^2} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$, ou $yy = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2} - xx$, équation qui étant comparee à l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, me donne $\frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg - hh)^2}$, et par conséquent le rayon $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2 - h^2}$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre, qui doit être sur ABP, puisqu'on a $t = y$. Or l'équation $u - \frac{ggc}{gg - hh} = x$, qui a servi à réduire, fait voir que pour avoir x, il faut diminuer u de la quantité $\frac{ggc}{gg - hh}$; on prendra donc $AC = \frac{ggc}{gg - hh}$, et alors CP sera x, puisqu'il vaut $AP - AC$, c'est-à-dire, $u - \frac{ggc}{gg - hh}$; ainsi du point C comme centre, et du rayon $\frac{hgc}{g^2 - h^2}$ on décrira un cercle; chaque point M de ce cercle aura la propriété dont il s'agit.

Au reste, on peut trouver le centre et le rayon d'une manière assez simple, par le moyen de la première équation $uu - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh} - yy$; car puisque le centre doit être sur AP, ainsi qu'on vient de le remarquer, si l'on fait $y = 0$, on aura, en résolvant l'équation, les deux valeurs de u qui expriment les distances AD, AE auxquelles le cercle DME rencontre la droite AB; prenant donc le milieu de DE, on aura le centre et le rayon CE. Or si l'on résout l'équation $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg - hh} = \frac{-ggcc}{gg - hh}$, on aura $u = \frac{g^2c}{gg - hh} \pm \sqrt{\left(\frac{gghhcc}{(gg - hh)^2}\right)} = \frac{g^2c \pm ghc}{gg - hh} = \frac{gc\,(g \pm h)}{(g - h)\,(g + h)}$ qui donne ces deux valeurs $u = \frac{gc}{g + h} = AD$, et $u = \frac{gc}{g - h} = AE$.

329. Nous prendrons pour seconde question, celle-ci; *Trouver hors de la ligne donnée* AR (fig. 47) *tous les différens points* M, *tels qu'en tirant aux deux points* A et R, *les lignes* MA, MR, *l'angle* AMR *soit toujours égal à un même angle donné.*

Représentons par r le rayon des tables, et par m la tangente de l'angle donné, auquel AMR doit être égal, abaissons la perpendiculaire MP; nommons AP, u; PM, t; AR, b; alors PR sera $b - u$.

Rappelons-nous ces trois propositions démontrées (*Géométrie* 282, 286 et 287), savoir, que si A et B sont deux angles, on a. . . . .

1°. $\sin. (A + B) = \dfrac{\sin. A \cos. B + \sin. B \cos. A}{r}$;

2°. $\cos. (A + B) = \dfrac{\cos. A \cos. B - \sin. A \sin. B}{r}$;

3°. $\text{tang.} (A + B) = \dfrac{r \sin. (A + B)}{\cos. (A + B)}$.

Cela posé, les triangles rectangles APM, RPM donnent (*Géom.* 299) $AM : AP :: r : \sin. AMP$; $AM : PM :: r : \sin. MAP$ ou $\cos. AMP$; $RM : RP :: r : \sin. RMP$; $RM : PM :: r : \sin. MRP$ ou $\cos. RMP$; d'où l'on tire $\sin. AMP = \dfrac{r \times AP}{AM}$; $\cos. AMP = \dfrac{r \times PM}{AM}$; $\sin. RMP = \dfrac{r \times RP}{RM}$; $\cos. RMP = \dfrac{r \times PM}{RM}$; donc, puisque $AMR = AMP + RMP$, on aura, par les formules qu'on vient de rappeler, $\sin. AMR = \dfrac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \dfrac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}$, et $\cos. AMR = \dfrac{r \times (PM)^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}$;

donc $\frac{r \sin. AMR}{\cos. AMR}$, ou *tang.* AMR. . . . .

$= \frac{r \times AR \times PM}{PM^2 - AP \times RP}$; ou, en mettant les valeurs algébriques, et réduisant, $m = \frac{rbt}{tt - bu + uu}$, ou $mtt + muu - mbu - rbt = 0$, équation au cercle, ainsi qu'on devoit bien s'y attendre.

Pour déterminer le centre et le rayon, il faut ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. Pour cet effet, je dégage tt, ce qui me donne $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = 0$; je fais (313) $t = \frac{rb}{2m} + y$; opérant comme à l'article cité, mon équation se change en $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu + 0$. Reste donc à faire disparoître le second terme, par rapport à u; et puisque le produit ut n'entre point dans l'équation, je fais (323) simplement $u - \frac{b}{2} = x$; opérant de la même manière, l'équation devient $yy - \frac{rrbb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = 0$, ou $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, qui étant comparée avec l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, me donne $\frac{1}{4}aa = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}$, et par conséquent le rayon $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$.

Pour trouver le centre, et déterminer en même temps ce rayon, l'équation $t - \frac{rb}{2m} = y$, m'apprend que si je mène AB parallèle à PM, c'est-à-dire, si j'élève au point A la perpendiculaire $AB = \frac{rb}{2m}$, et si je mène BCQ parallèle à AR, les lignes QM seront y, puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$. Mais l'équation $u - \frac{b}{2} = x$, me fait voir que si je prends sur AR la partie $AG = \frac{b}{2}$, GP sera x, puisque $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$; donc, si par le point G, je mène GC parallèle à PM, le point C sera le centre. D'ailleurs, si l'on tire AC, on aura, à cause de l'angle droit, G, $AC = \sqrt{[(AG) + (GC)^2]} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$; AC sera donc le rayon.

Cette construction se réduit donc à élever sur le milieu de AR la perpendiculaire $GC = \frac{rb}{2m}$, et à décrire du point C comme centre, et du rayon CA, un cercle; tout angle MAR qui aura son sommet à la circonférence de ce cercle, et qui passera par les points A et R, sera égal à l'angle donné. Or pour construire la quantité $\frac{rb}{2m}$, il n'y a autre chose à faire qu'à mener une droite AO, qui fasse avec AB l'angle BAO égal à l'angle donné; elle coupera GC au point cherché C; car dans le triangle rectangle ABC, on a r : *tang.* BAC :: AB : BC ou AG; c'est-à-dire, $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; donc AB ou $GC = \frac{rb}{2m}$.

On peut voir encore aisément, que tout se réduit à mener par le point A la ligne AO qui fasse avec AR, l'angle RAO égal au complément de l'angle donné; cette ligne coupera en C la perpendiculaire elevée sur le milieu de AR; en sorte que C sera le centre, et CA le rayon.

330. De-là il est facile de résoudre la question suivante : *Connoissant la position des trois points* R, A, R′, (fig. 48) *et les angles sous lesquels on voit les lignes* RA, AR′, *d'un certain point* M, *trouver ce point* M?

Sur les milieux G et G' des deux lignes RA et $R'A$, on élèvera les perpendiculaires GC et $G'C'$; par le point A, on mènera les lignes AC et AC' faisant avec AR et AR', chacune avec chacune, les angles RAC, $R'AC'$ égaux chacun au complement de l'angle RMA, $R'MA$ sous lequel la ligne correspondante est vue. Des points C et C' comme centres, et des rayons CA et $C'A$, on décrira deux cercles qui se couperont en A et en M; le point M sera le point cherché. C'est une suite évidente de la solution de la question précédente.

Ce problême peut servir à marquer sur la carte d'un pays la position d'un point d'où l'on a relevé trois objets connus.

Si les angles observés ARM, $R'MA$ étoient égaux aux angles $RR'A$ et $R'RA$, alors le problême ne seroit plus déterminé, les deux cercles se confondroient, et chaque point de leur circonférence satisferoit à la question.

331. Pour troisième question, il s'agira de trouver la courbe ou les courbes qui auroient la propriété suivante; AZ, AT (fig. 49) *sont deux lignes qui font entr'elles un angle donné quelconque; il s'agit de trouver les courbes dont la distance de chaque point* M *à un point fixe* F *pris sur* AZ, *soit toujours dans un même rapport avec la distance* MT *du*

même point M *à la droite* AT, *cette distance étant mesurée parallèlement à* AZ?

D'un point quelconque M de cette courbe, imaginons la ligne MP parallèle à AT, et la perpendiculaire MS sur AZ; l'angle MPS est donné; c'est pourquoi son sinus et son cosinus sont censés connus; nous les nommerons p et q, en représentant par r le rayon des tables (*). Nommons AP, u; et PM, t; la ligne connue AF, c.

Cela posé, dans le triangle rectangle MSP, nous aurons (*Géométrie* 299) $r : \sin. MPS :: MP : MS$, et $r : \sin. PMS$ ou $\cos. MPS :: PM : PS$; cest-à-dire, $r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}$ et $r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$. Donc $FS = PS - PF = PS - AP + AF = \frac{qt}{r} - u + c$; or le triangle rectangle MSF donne $MF = \sqrt{[(MS)^2 + (FS)^2]}$; donc. . . .
$$MF = \sqrt{\left(\frac{p^2t^2}{r} + \frac{q^2t^2}{r} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)};$$
ou [parce que (*Géom.* 283) $p^2 + q^2 = r^2$] on aura
$$MF = \sqrt{(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)};$$
puis donc que MF doit être à MT ou AP, dans un rapport donné, si l'on représente ce rapport par celui

(*) On peut supposer, comme nous le faisons ici, que les quantités p, q, r, sont données par les tables de Trigonométrie; mais on peut les déterminer par une construction simple en faisant un triangle rectangle qui ait un de ses angles aigus, égal à l'angle donné MPS, et une hypothénuse telle que l'on voudra. En prenant celle-ci pour r, les deux autres côtés seront p et q.

de g à h, on aura. . . . .
$\sqrt{}(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc) : u$
$:: g : h$, et par conséquent, $gu =$ . . . .
$h\sqrt{}(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc)$, ou en quarrant, et transposant ensuite, $h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2qt}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$, équation qui renferme les sections coniques (315 *et suiv.*), et qui (316) appartiendra à l'ellipse si le quarré de $-\frac{2qh^2}{r}$, moins le quadruple de h^2 multiplié par $h^2 - g^2$ est négatif ; c'est-à-dire, si $\frac{4q^2h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2g^2$ ou $\frac{4q^2h^2 - 4r^2h^4 + 4r^2h^2g^2}{r^2}$ est négatif ; ou (parce que $r^2 - q^2 = p^2$) si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est négatif ; au contraire, elle appartiendra à l'hyperbole si. . . . . $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est positif. Elle sera à la parabole si $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ est zéro ; c'est-à-dire, si $4r^2h^2g^2 = 4p^2h^4$, ou si $rg = ph$; enfin la courbe sera un cercle lorsqu'on aura $h^2 = h^2 - g^2$, ce qui ne peut jamais avoir lieu qu'autant que g sera zéro, ou que h sera infini, parce que dans ce dernier cas on doit négliger g^2 vis-à-vis de h^2.

Si l'on veut maintenant construire la courbe dans chacun de ces cas, il n'y a qu'à imiter ce que nous avons fait (317 *et suiv.*); comme nous avons alors opéré sur l'ellipse, pour faire voir la similitude des opérations et des constructions à l'égard de ces deux courbes, nous allons ici

ici appliquer à l'hyperbole ce qui a été fait au même endroit cité, c'est-à-dire, chercher à ramener notre équation, à la forme $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$.

Je dégage donc t^2 dans l'équation trouvée ci-dessus, ce qui me donne $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$. Pour faire disparoître le second terme, par rapport à t, je fais $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, ce qui, en quarrant et transposant ensuite, me donne $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, et par conséquent, en substituant, ... $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Il faut donc maintenant faire disparoître le second terme par rapport à u; mais auparavant j'observe que les termes $-\frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2$, ou $-\frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{h^2}$, ou $\frac{r^2u^2 - q^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2}$ se réduisent à $\frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2}$, et les deux termes $\frac{2cq^2u}{r^2} - 2cu$, ou $\frac{2cq^2u - 2cr^2u}{r^2}$ se réduisent à $-\frac{2cp^2u}{r^2}$; de même les deux termes $-\frac{c^2q^2}{r^2} + c^2$, se réduisent à $+\frac{c^2p^2}{r^2}$; parce que $r^2 - q^2 = p^2$. L'équation se change donc en $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} + \frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2} = 0$, ou chassant les dénominateurs, et faisant ensuite (pour faciliter le calcul) $p^2h^2 - r^2g^2 = r^2kk$, $r^2h^2y^2 + c^2h^2p^2 - 2ch^2p^2u + r^2k^2u^2 = 0$.

Dégageons donc u^2, ce qui donne $u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2}u + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$; et faisons $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, en introduisant l'inconnue n, parce que le produit ut se trouve dans l'équation primitive (315). Alors en opérant comme ci-dessus, nous aurons, après la substitution faite, $\frac{c^2h^4p^4x^2}{r^4k^4n^2} - \frac{c^2h^4p^4}{r^4k^4} + \frac{h^2}{k^2}y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$, ou supprimant le facteur commun $\frac{h^2}{k^2}$, et laissant y^2 seul dans un membre, nous aurons $y^2 = -\frac{c^2h^2p^4x^2}{r^4k^2n^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} + \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2}$, ou, divisant le second membre par le multiplicateur de x^2, et indiquant en même temps la multiplication par le même multiplicateur, $y^2 = -\frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 + \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$; mais puisqu'il s'agit de l'hyperbole, il faut remarquer que la quantité r^2k^2, qui n'est autre chose que $p^2h^2 - r^2g^2$, est négative, puisque, selon la remarque que nous venons de faire ci-dessus, $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ ou $\frac{4h^2}{r^2}$ $(r^2g^2 - p^2h^2)$ doit être positif pour que la courbe soit une hyperbole. Ainsi il faut rendre k^2 négatif, en observant lorsqu'on voudra mettre sa valeur dans l'équation, de remettre pour cette valeur, la quantité $r^2g^2 - p^2h^2$, au lieu de $p^2h^2 - r^2g^2$; l'équation devient donc $y^2 = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}\left(x^2 - \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} - nn\right)$. Comparant cette équation avec $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4}aa)$, pour déterminer les diamètres conjugués, on aura $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2h^2p^4}{r^4k^2n^2}$ et

$\frac{1}{4}aa = \frac{r^2n^2k^2}{p^2h^2} + nn$; d'où l'on tirera aisément a et b; c'est-à-dire, les deux diamètres conjugués, que nous allons voir être les deux axes mêmes de l'hyperbole.

Déterminons donc la direction des diamètres conjugués auxquels notre équation réduite se rapporte. Conformément à ce qui a été fait (317), il faut construire les deux équations $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, et $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; mais comme nous venons d'observer que k^2 est négatif dans le cas de l'hyperbole dont il s'agit ici, il faut changer cette dernière, en $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; je ne change point le signe du terme affecté de x, quoique k^2 y entre, parce que la quantité n peut être prise arbitrairement positive ou négative. Il faut donc, en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité, mener par le point A parallèlement à PM la ligne $AB = \frac{cq}{r}$, et tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ, prendre arbitrairement BK, et mener KL parallèle à PM, et telle que l'on ait $BK : KL :: r : q$; alors si, par le point B et le point L, vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q, les lignes QM seront y. Car $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r}$; or les triangles semblables BKL et BQI donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : QI$; c'est-à-dire, $r : q :: u : QI = \frac{qu}{r}$; donc $QM = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Mais on peut abréger cette construction, en menant tout de suite du point F la ligne FB perpendiculaire sur TA; car il est évident que l'angle FAB est égal à APM, et que par conséquent dans le triangle rectangle ABF, on a $r : q :: c : AB = \frac{qc}{r}$; ainsi puisque QM est parallèle à AB, les y sont perpendiculaires sur BQ, et par conséquent BQ est la direction d'un des axes, dont l'autre par conséquent est parallèle à QM.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre. Or la seconde équation $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, fait voir qu'il faut prendre, à l'opposite des u, la quantité $AG = \frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$, et tirer GC parallèle à PM ou perpendiculaire à BQ, qui déterminera le pont C pour l'origine des x, et par conséquent pour le centre. En effet les x doivent être comptés sur CQ, puisque les y se comptent depuis cette ligne; or l'équation $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, ou $AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, ou $GP = \frac{AG \times x}{n}$ fait voir que ces lignes x commencent en même temps que les lignes GP; donc les lignes x doivent commencer au point C, et sont par conséquent CQ; donc le point C est le centre.

On s'y prendra d'une manière semblable pour l'ellipse.

A l'égard de la parabole, puisqu'on a, dans ce cas, $rg = ph$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, l'équation que l'on a eue en y et u, après l'évanouissement du second terme, par rapport à t, et après avoir introduit pour $r^2 - q^2$

sa valeur p^2, devient, en mettant dans la valeur de k^2, au lieu de g, sa valeur $\frac{ph}{r}$ tirée de $rg = ph$, devient, dis-je, $y^2 + \frac{c^2 p^2}{r^2} - \frac{2cp^2 u}{r^2} = 0$, ou $y^2 = \frac{2cp^2 u}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2}$. Pour la réduire à la forme ordinaire de l'équation à la parabole, on fera donc, conformément à ce qui a été dit (321), $\frac{2cp^2 n}{r^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2} = nx$; ce qui donnera $yy = nx$; et ayant construit de la même manière que dans le cas précédent, l'équation $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, qu'on a eue pour l'évanouissement du second terme par rapport à t, on construira l'équation $\frac{2cp^2 u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, d'une manière analogue à ce qui a été fait (321); c'est-à-dire, qu'ayant dégagé u, ce qui donne $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 nx}{2cp^2}$, on prendra sur AP (*fig.* 50) la partie $AG = \frac{1}{2}c$, et tirant GC parallèle à PM, le point C sera l'origine des x qui seront CQ; en sorte que CQ sera la direction du diamètre, le sommet de ce diamètre sera en C; et son paramètre sera n, que l'on déterminera ainsi; puisque $AG = \frac{1}{2}c$, on a $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 nx}{2cp^2} = \frac{r^2 n}{2cp^2} \times CQ$; donc $n = \frac{2cp^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$; or les parallèles PQ, CG et AB donnent $CQ : GP :: CF : GF :: BF : AF$; c'est-à-dire, $CQ : GP :: BF : c$, donc $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; mettant pour GP cette valeur dans celle de n, on aura $n = \frac{2c^2 p^2}{r^2 \times BF}$, quantité connue, puisque c, p, r sont des quantités données, et que BF est connue par la construction. Mais on peut simplifier cette valeur, en remarquant que le triangle rectangle FAB donne $r : p :: AF : BF :: c : BF$; donc $BF = \frac{cp}{r}$; par conséquent $n = \frac{2(BF)^2}{BF} = 2BF$.

Application des mêmes principes à quelques questions déterminées.

332. Après avoir résolu la seconde question indéterminée que nous nous sommes proposée (329), nous en avons fait usage (330) pour résoudre une question déterminée. Nous avons tacitement considéré cette dernière, comme en renfermant deux autres toutes deux indéterminées, et qui étant chacune de même espèce que la première, ont été résolues, chacune de la même manière. L'intersection des deux courbes ou cercles qui étoient le *lieu* de chacune de ces deux questions partielles, a donné la résolution de la question déterminée. Lorsque l'équation finale qui exprime les conditions d'une question, passe le second degré, on s'y prend d'une manière semblable pour la résoudre. Dans les cas où l'on pourroit n'employer qu'une inconnue, on en emploie deux, et l'on cherche à former par les conditions de la question deux équations qui étant construites séparément, donnent chacune une courbe dont chaque point satisfait à l'équation qui lui appartient; si le problème est possible, les deux courbes se rencontrent en un ou plusieurs points selon que la question est susceptible d'une ou de plusieurs solutions, ou selon qu'elle renferme plusieurs cas dépendans des mêmes données et des mêmes raisonnemens. Ces intersections fournissent les différentes solutions de la question.

Tant que les deux équations à deux indéterminées, ne passeront pas le second degré, on voit donc que la résolution ne dépendra jamais que de l'intersection de deux sections coniques tout au plus. Au lieu que dans ces mêmes cas, si on n'employoit qu'une seule inconnue, ou si par le moyen des deux équations trouvées, on éliminoit ou chassoit une des deux inconnues, l'équation monteroit au troisième et plus souvent au quatrième degré. Mais si l'une des équations ou toutes les deux passent le second degré, alors la résolution dépend de l'intersection de courbes plus élevées que les sections coniques.

Voyons quelques exemples de questions qui ne passeroient pas le quatrième degré.

333. Proposons-nous, pour première question, de *trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données* a *et* b.

Si je nomme t et u ces deux moyennes proportionnelles, j'aurai la progression $\div a : t : u : b$, qui me donne ces deux proportions $a : t :: t : u$ et $t : u :: u : b$, et par conséquent, ces deux équations $au = t^2$ et $bt = u^2$, qui toutes deux se rapportent directement à la parabole. C'est pourquoi si l'on tire (*fig.* 51) deux lignes indéfinies AZ, AX qui fassent entr'elles un angle quelconque (pour plus de simplicité, on peut le supposer droit), et si sur l'une AZ comme diamètre, et du point A comme sommet de ce diamètre, on construit (302) une parabole dont le paramètre du diamètre AZ soit a, et dont l'angle des coordonnées soit XAZ, cette parabole sera le lieu de l'équation $au = t^2$, en sorte que les lignes AP étant u, les lignes PM seront t. Pareillement, si sur AX comme diamètre et du point A comme sommet, on construit une parabole dont le paramètre du diamètre AX

soit b, et dont l'angle des coordonnées soit XAZ, cette parabole sera le lieu de l'équation $bt = u^2$; en sorte que les lignes AP' étant t, les lignes $P'M'$ seront u. Mais pour que la question soit résolue, il faut que les deux équations $au = t^2$ et $bt = u^2$, aient lieu en même-temps; c'est-à-dire, que la valeur de u dans l'une soit la même que la valeur de u dans l'autre, et qu'il en soit de même de t; or c'est ce qui arrive évidemment au point M où se rencontrent les deux paraboles; car les u étant comptés sur AZ, et les t sur AX ou parallèlement à AX, il est visible que si l'on tire MP et MP parallèles à AX et AZ, la valeur MP de u dans la parabole AMM' est la même que la valeur AP de u dans la parabole AMM; pareillement la valeur AP de t dans la parabole AMM' est la même que la valeur PM de t dans la parabole AMM; et il est visible qu'il n'y a qu'au point M où la valeur de u étant la même dans chacune, la valeur de t soit aussi la même dans chacune, si ce n'est cependant au point A où les deux courbes se rencontrent aussi. Mais comme u et t y sont zéro, il est évident que ce point ne satisfait pas à la question. Les valeurs de u et t sont donc AP et PM, le point M étant le point de rencontre.

334. Au reste, quoiqu'on puisse toujours parvenir à la solution en construisant séparément les équations que l'on trouve, quelquefois en préparant ces équations, on peut trouver des constructions plus simples. Par exemple, si l'on ajoute les deux équations $au = t^2$ et $bt = u^2$, on aura $au + bt = u^2 + t^2$; équation au cercle en supposant que les u et les t seront pris sur des lignes perpendiculaires entr'elles. Or quoique la parabole soit facile à construire, le cercle l'est encore davantage : ainsi dans le

cas présent, je préférerois de construire d'abord l'équation $au = t^2$ seulement, comme ci-dessus; après quoi je construirois l'équation au cercle $au + bt = u^2 + t^2$; en la changeant en cette autre $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$, par l'évanouissement des seconds termes par rapport à t et à u, en faisant $t - \frac{1}{2}b = y$, et $u - \frac{1}{2}a = x$. Alors prenant $AB = \frac{1}{2}b$, et tirant BQ parallèle à AP, j'aurois les lignes QM pour les valeurs de y. Prenant ensuite $AO = \frac{1}{2}a$, et menant OC parallèle à AX, j'aurois les lignes CQ pour valeurs de x; c'est pourquoi, du point C comme centre, et du rayon $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$, c'est-à-dire, du rayon AC, je décrirois un cercle qui coupant la parabole AM au point M, me donneroit MP et AP pour les valeurs de t et de u.

335. On peut varier beaucoup ces constructions; on peut, par exemple, ajouter l'une des deux équations, avec l'autre multipliée par une quantité arbitraire $\frac{l}{n}$ positive ou négative, ce qui donne $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$, équation qui peut appartenir à l'ellipse ou à l'hyperbole selon la quantité qu'on prendra pour $\frac{l}{n}$, en sorte qu'on peut construire avec l'une ou l'autre de ces deux courbes, comme on vient de construire avec le cercle. On peut même construire avec l'une et avec l'autre, ou avec l'une seulement combinée avec un cercle, et cela en donnant à $\frac{l}{n}$, des valeurs convenables, et qui sont faciles à déterminer d'après ce qui a été dit (319 *et suiv.*).

336. Proposons-nous pour seconde question de *diviser un angle ou un arc donné, en trois parties égales.*

Soit EO (*fig.* 52) l'arc qu'il s'agit de diviser; A son centre; imaginons que EM est le tiers de EO, et ayant tiré les rayons EA, MA, abaissons les perpendiculaires MP, OR. Les lignes OR et AR qui sont le sinus et le cosinus de l'arc donné OE, sont censées connues; nous les nommerons d et c; et nous nommerons r le rayon AE. Enfin nous nommerons u et t, les inconnues AP et PM.

Cela posé, le triangle rectangle APM donne $u^2 + t^2 = rr$. Et les triangles semblables APM, ARS donnent $AP : PM :: AR : RS$; c'est-à-dire, $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Or si l'on prolonge la perpendiculaire MP jusqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en V, l'arc MV sera égal à l'arc MO, comme étant chacun double de ME; donc l'angle $OMS = AMP = ASR$ (à cause des parallèles) $= OSM$. Donc le triangle SOM est isocèle, et par conséquent $OS = OM = MV = 2t$; donc puisque $OR = OS + SR$, on aura $d = 2t + \frac{ct}{u}$, ou $2tu + ct = du$, ou $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

Les deux équations à construire sont donc $u^2 + t^2 = r^2$, ou $t^2 = r^2 - u^2$, et $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$. La première est toute construite, puisque c'est l'équation même du cercle EMO.

Quant à la seconde, elle appartient à l'hyperbole (226); et comme les deux quarrés manquent, il faut, conformément à ce qui a été dit au même endroit cité, passer tous les termes affectés de u, dans un même membre, ce qui donne $tu - \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}ct$, ou $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; faisant $\frac{1}{2}d - t = y$, et substituant pour t, sa valeur, on a $uy = -\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}cd$, ou $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$.

Je fais ensuite $u + \frac{1}{2} c = x$, et j'ai $xy = \frac{1}{4} cd$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes que l'on déterminera de la manière suivante.

L'équation $\frac{1}{2} d - t = y$, fait voir que si par le point A, origine des u et des t, on mène AB parallèle à PM, et égale à $\frac{1}{2} d$, et que l'on tire QBC parallèle à AP, les lignes QM comptées dans un sens opposé aux PM, seront y; en effet, $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2} d - t = y$; donc CQ est la direction d'une des asymptotes.

La seconde équation $u + \frac{1}{2} c = x$, fait voir que si l'on prolonge AP vers G de la quantité $AG = \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} AR$, les lignes GP ou leurs égales CQ (en tirant GC parallèle à PM) seront x; donc C est le centre, et les lignes CQ et CG sont les asymptotes. On décrira donc par la méthode donnée (289) une hyperbole entre ces asymptotes, laquelle passe par le point A, ainsi que l'indique l'équation $xy = \frac{1}{4} cd = \frac{1}{2} c \times \frac{1}{2} d = AG \times AB = CB \times AB$; cette hyperbole coupera le cercle au point cherché M.

Si l'arc EO étoit de plus que 90 degrés, son cosinus AR tombant alors du côté opposé, seroit négatif; il faudroit dans les équations ci-dessus, supposer c négatif. Et si l'arc EO étoit de plus de 180 degrés, et de moins que 270 degrés, comme l'arc $EO\,E'\,O'$, son sinus et son cosinus seroient négatifs; il faudroit donc changer les signes de c et d dans les mêmes équations ci-dessus.

Si l'on prolonge de la quantité $CG' = CG$; et CB de la quantité $CB' = CB$, et qu'ayant mené $B'A'$ et $G'A'$ parallèles à CG' et CB', on décrive entre les lignes $C G'$ et $C B'$ (prolongées indéfiniment) comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A', cette hyperbole rencontrera le cercle en deux points A', M', comme la première le rencontre aux deux points M et M''. Or de ces quatre points, trois méritent d'être remarqués ; savoir, les points M, M' et M''. Le premier donne l'arc EM pour le tiers de l'arc donné $E O$. Le second, M', donne l'arc $E' M'$ pour le tiers de $E' O$, supplément de $E O$. Enfin le troisième M'', donne $E' M''$ pour le tiers de $E O E' O'$, c'est-à-dire, de l'arc $E O$ augmenté de la demi-circonférence.

En effet, l'arc $E' O$ a pour sinus et cosinus les lignes $R O$ et $A R$, ainsi que l'arc $E O$, avec cette seule différence que $A R$ considéré comme cosinus de l'arc $E' O$ plus grand que 90 degrés, est négatif ; donc pour avoir la solution dans ce second cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer dans la solution ci-dessus, que c est négatif; or ce changement n'affecte que la seconde équation, et change sa réduite $xy = \frac{1}{4} c d$, en $xy = -\frac{1}{4} c d$, équation qui appartient à l'hyperbole $A' M'$, et qui fait donc voir que la solution de ce cas sera fournie par l'intersection M' de cette branche d'hyperbole avec le cercle. (Nous verrons dans un moment, pourquoi ce n'est pas le point A'). $P' M'$ est donc le sinns de l'arc cherché, dans ce second cas. Cet arc est donc $E' M'$; c'est-à-dire, que $E' M'$ est le tiers de $E' O$.

A l'égard de la troisième solution, si l'on augmente l'arc $E O$ de 180 degrés, ce qui se fera en prenant $E' O' = E O$, alors l'arc $E O E' O'$ a pour sinus et cosinus les lignes $R' O'$, $A R'$, qui sont nécessairement égales aux lignes $R O$ et $A R$, avec cette différence seulement que tombant toutes deux de côtés opposés à ces dernières, elles sont négatives ; donc pour avoir la solution qui convient à ce cas, il n'y a autre chose à faire que de supposer c et d négatifs. Or ce changement n'en produit aucun dans l'équation, où entrent c et d, c'est-à-dire, dans l'équation $xy = \frac{1}{4}cd$; donc la première hyperbole doit donner par son intersection M'', la solution de ce troisième cas; donc $P''M''$ est le sinus de l'arc cherché dans ce troisième cas ; cet arc est donc $E'M''$, c'est-à-dire, que $E'M''$ est le tiers de $EOE'O'$.

Ainsi la même construction qui sert à trouver le tiers d'un arc donné A, sert aussi à trouver le tiers de 180 degrés $- A$, et le tiers de 180 degrés $+ A$.

On peut appliquer ici ce que nous avons dit (335) sur les différentes sections coniques qu'on peut employer pour construire, en combinant à volonté les deux équations en u et t.

A l'égard de la quatrième intersection, nous avons dit qu'elle se faisoit au point A', ce qui est évident, puisque l'hyperbole est assujettie à passer par le point A', qui est déterminé en faisant $B'A' = AB$, et $B'C = CB$, ce qui fait voir que $AR' = AR$ et $R'A' = RO$; donc le point A' appartient à la circonférence. Mais il ne donne point une nouvelle solution ; puisqu'il est connu et déterminé par des opérations indépendantes des équations qui ont donné la solution.

337. Si de l'équation $2tu + ct = du$, trouvée ci-dessus, on tire la valeur de t, pour la substituer dans l'équation $u^2 + t^2 = r^2$, qu'on a eue en même temps, on aura, après avoir mis pour $c^2 + d^2$, sa valeur r^2, transposé et réduit, $4u^4 + 4cu^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, ou $4u^3(u+c) - 3r^2u(u+c) - cr^2 \times (u+c) = 0$, qui étant divisée par $u + c$, donne $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$,

équation qui doit renfermer les trois cas que nous venons d'examiner ; elle doit donc avoir trois racines ; or la construction fait voir que u a en effet trois valeurs ; savoir AP, AP' et AP'' ; et ces deux dernières tombant de côtés opposés à la première, on voit que cette équation a trois racines ou valeurs de u, dont deux sont négatives ; savoir, $u = -AP'$, $u = -AP''$, et la troisième positive, savoir $u = AP$.

338. L'équation $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, ou $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, est dans le cas irréductible ; et ses racines étant les cosinus de $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180^d - EO)$, $\frac{1}{3}(180^d + EO)$, on peut donc, par le moyen des tables des sinus, trouver les trois racines d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible, par une approximation suffisante et prompte ; en voici la méthode. Représentons toute équation du troisième degré dans le cas irréductible, par l'équation $u^3 - pu + q = 0$; en comparant à l'équation $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, nous aurons $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, et $-\frac{cr^2}{4} = q$; de la première de ces deux dernières équations, on tire $r = \sqrt{(\frac{4}{3}p)}$; et de la seconde, $c = -\frac{3q}{p}$. Représentons par R le rayon des tables ; alors nous aurons le cosinus de l'arc EO, tel qu'il est dans les tables, si nous calculons le quatrième de cette proportion $r : c$ ou $\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} :: R :$ un quatrième terme ; ce quatrième terme, savoir $\frac{3qR}{p\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}$, étant cherché dans les tables, donnera le sinus du complément de l'arc EO ; c'est pourquoi ajoutant 90 degrés au nombre de degrés que l'on trouvera, ou au contraire, retranchant ce nombre

de 90 degrés, selon que q sera positif ou négatif dans l'équation, on aura l'arc EO, que je représente par A; on cherchera donc dans les mêmes tables, les cosinus des trois arcs $\frac{A}{3}$, $\frac{180^d - A}{3}$, et $\frac{180^d + A}{3}$; et pour les réduire au rayon r, on multipliera chacun par $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire, par $\frac{\sqrt{(\frac{4}{3}p)}}{R}$, puisque pour y réduire, par exemple, $cos. \frac{A}{3}$ pris dans les tables, il faut faire cette proportion $R : cos. \frac{A}{3} :: r :$ au cosinus du même arc dans le cercle qui a pour rayon r, c'est-à-dire, est à AP ou u; les trois valeurs de u seront donc . . . . $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} cos. \frac{A}{3}$, $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} cos. \frac{180^d - A}{3}$, et $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} cos. \frac{180^d + A}{3}$; dans lesquelles il faudra observer de donner le signe — à celles dont l'arc passera 90 degrés, à moins qu'il ne fût plus grand que 270 degrés. On peut faciliter ces opérations par le moyen des logarithmes.

339. Proposons-nous maintenant cette question plus générale que celle que nous avons résolue (211); *d'un point* D (fig. 53) *donné de position à l'égard des deux lignes* AR, AP *qui font entr'elles un angle connu, mener la ligne* DP *de manière que sa partie interceptée* RP *soit égale à une ligne donnée?*

Du point D menons la ligne DS perpendiculaire à AP prolongée, et la ligne DO parallèle à AR; menons aussi du point R la ligne RN perpendiculaire à AP. Les lignes DO, DS, OS et AO sont censées connues tant à cause que la position du point D est supposée connue, que parce que l'angle RAP ou son supplément RAN égal à DOS est supposé connu ; c'est pourquoi nous nommerons DO, r; DS, p; OS, q; AO, d; et la ligne à laquelle RP doit être égale, c. Enfin nous nommerons u et t, les inconnues AP et AR.

Cela posé, les triangles semblables DSO, RNA donneront $DO : DS :: AR : RN$, et $DO : OS :: AR : AN$; c'est-à-dire, $r : p :: t : RN = \frac{pt}{r}$, et $r : q :: t : AN = \frac{qt}{r}$; par conséquent, $NP = \frac{qt}{r} + u$; or le triangle rectangle RNP, donne $(RN)^2 + (NP)^2 = (RP)^2$; c'est-à-dire, $\frac{qqtt}{rr} + \frac{2qut}{r} + uu + \frac{p^2t^2}{rr} = cc$, ou (à cause que $p^2 + q^2 = r^2$, dans le triangle rectangle DSO) $t^2 + \frac{2qut}{r} + u^2 = cc$.

Mais comme nous avons deux inconnues, il nous faut deux équations ; or les triangles semblables DOP; RAP donnent $DO : RA :: OP : AP$; c'est-à-dire $r : t :: d + u : u$, et par conséquent, $ru = td + ut$. Ce sont-là les deux équations qu'il faut construire pour résoudre la question. La première (319) appartient à l'ellipse, et la seconde à l'hyperbole.

Pour construire la première, je fais $t + \frac{qu}{r} = y$; en opérant comme dans les exemples semblables ci-dessus, j'aurai $yy - \frac{qquu}{rr} + uu = cc$, [ou à cause

que

que $-\frac{qquu}{rr} + uu = \left(\frac{rr - qq}{rr}\right) uu = \left.\frac{ppuu}{rr}\right] yy + \frac{ppuu}{rr} = cc$. Je fais $u = \frac{lx}{n}$ (324); et j'ai $yy + \frac{ppllxx}{rrnn} = cc$, ou (parce que je puis supposer arbitrairement une valeur à l'une des deux indéterminées l et n) faisant $l = r$, $yy = cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn}\left(\frac{ccnn}{pp} - xx\right)$. Comparant à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, on trouvera que les deux diamètres conjugués a et b sont $a = \frac{2cn}{p}$, et $b = 2c$. Déterminons leur position et la valeur de n; mais pour mieux sentir l'usage de cette construction, concevons auparavant, que donnant successivement à u ou AP plusieurs valeurs, on mène parallèlement à AR, les lignes PM égales aux valeurs correspondantes de t, ce qui produira la courbe dont l'équation nous occupe actuellement. Cela posé, ayant pris arbitrairement AK sur AP, et mené KL parallèle à PM, et qui soit à $AK :: q : r$, on aura $QM = PM + PQ = t + \frac{qu}{r}$, à cause des triangles semblables AKL et APQ; donc $QM = y$; AQ est donc la direction d'un des diamètres, et les x doivent être comptés sur ce diamètre; or l'équation $u = \frac{l}{n}x = \frac{r}{n}x$, fait voir que les x commencent en même temps que les u; donc les x sont AQ. Cela étant, l'équation $u = \frac{rx}{n}$, devient donc $AP = \frac{r \times AQ}{n}$ qui donne $n = \frac{r \times AQ}{AP}$

ou $AP : AQ :: r : n$; c'est-à-dire, $AK : AL :: r : n$; or comme AK est arbitraire, on peut le supposer $= r$, et l'on aura, par conséquent $n = AL$.

Il ne s'agit donc plus que de construire (252) une ellipse dont les diamètres conjugués fassent entr'eux un angle égal à AQM, et dont celui qui a AQ pour direction, soit $= \frac{2cn}{p}$, et l'autre qui a AR pour direction, soit $= 2c$. Cette ellipse sera le lieu de la première équation.

Il ne reste plus qu'à construire la deuxième équation $ru = dt + ut$ ou $ru - ut = dt$. Or selon les principes précédens, je fais $r - t = y'$, et ensuite $u + d = x'$, ce qui change cette équation en $x'y' = rd$; équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. On prendra donc, en vertu de l'équation $r - t = y'$, sur AR la quantité $AT = r = OD$, c'est-à-dire que par le point D on tirera DTV parallèle à AP; alors les lignes VM seront y' en les comptant en V vers M, c'est-à-dire, dans un sens opposé à PM; car $VM = PV - PM = r - t$; donc $VM = y'$. Ensuite, en vertu de l'équation $u + d = x'$, on prendra $OA = d$, c'est-à-dire, qu'on mènera par le point D la ligne DO parallèle à AT; alors les lignes DV seront x', puisque $DV = OP = OA + AP = d + u$. On construira donc (289) entre les lignes DO et DV, comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A, puisqu'on a $x'y' = rd = AO \times AT$; cette hyperbole rencontrera l'ellipse aux deux points M et M', par lesquels menant MR et $M'R'$ parallèles à AP, on aura deux points R et R', par lesquels et par le point D, tirant DRP et $DP'R'$, les parties PR et $P'R'$

interceptées dans les angles égaux RAP, $R'AP'$ seront égales à la ligne c.

Si en prolongeant les asymptotes, on décrit l'hyperbole opposée (*fig.* 54) $M''A'M'''$, dans le cas où elle rencontrera l'ellipse, elle déterminera deux nouveaux points M'', M''', par lesquels menant des parallèles à AP, on aura sur AT deux nouveaux points R'', R''', par lesquels et par le point D tirant deux lignes, les parties comprises dans l'angle TAS seront aussi égales à la ligne donnée c. Telle est en général la manière dont on doit s'y prendre pour résoudre les questions déterminées, qui n'excéderont pas le quatrième degré

340. Si l'on avoit résolu la question sans employer deux inconnues, on pourroit néanmoins faire usage de la même méthode, en introduisant une nouvelle inconnue. Par exemple, si l'on proposoit cette question : *Connoissant la flèche* CP *d'un segment sphérique* (fig. 55), *et la solidité de celui qui a pour flèche le reste* PM *du diamètre; déterminer le diamètre de la sphère?*

Soit $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence; a la flèche CP; t la flèche PM; $a + t$ sera le diamètre; et la solidité du segment qui a PM pour flèche, sera $\frac{c}{2r} \times tt\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}t\right)$. Or comme cette solidité est supposée connue, je la représente par $\frac{c}{2r} \times \frac{1}{6}aap$, p sera une quantité connue. J'aurai donc . . . .

$\frac{c}{2r}\, tt\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}t\right) = \frac{c}{2r}\, \frac{1}{6}aap$, ou

$t^3 + 3att - aap = 0$.

Pour construire cette équation, je supposerai $t^2 = au$;

et j'aurai, en substituant, $tu + 3au - ap = 0$, équation à l'hyperbole entre ses asymptotes, qui étant construite avec l'équation $t^2 = au$ à la parabole, donnera par l'intersection de ces deux courbes, la valeur de t.

Par-là on peut trouver le rayon du vide intérieur d'une bombe dont on connoît le poids, le diamètre, et la flèche du segment dont le culot est renforcé.

FIN.

TABLE
DES MATIÈRES.

PREMIÈRE SECTION.

SECONDE SECTION.

Fin de la Table des Matières.

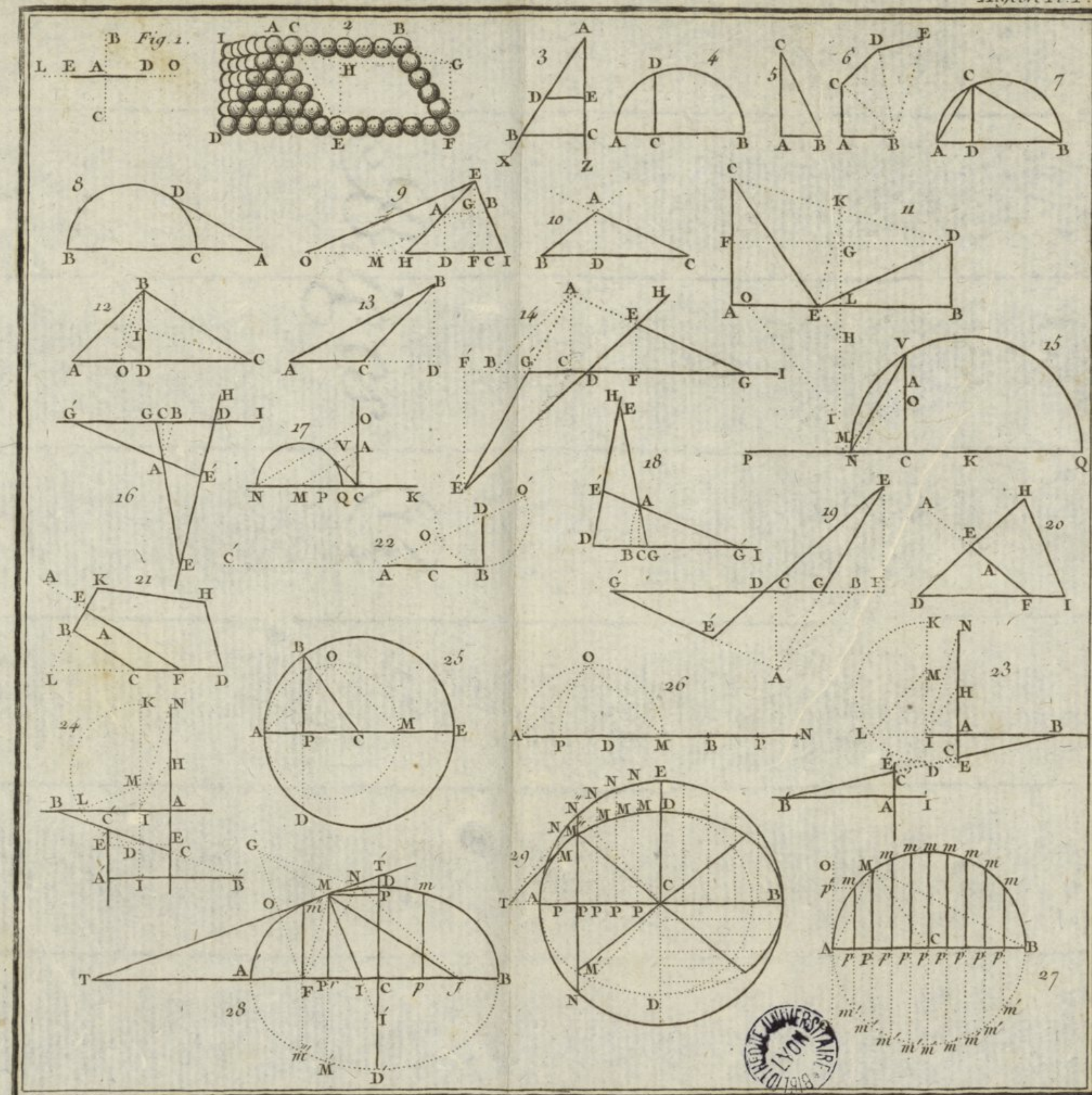
EXTRAIT DES REGISTRES
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Du 20 Décembre 1769.

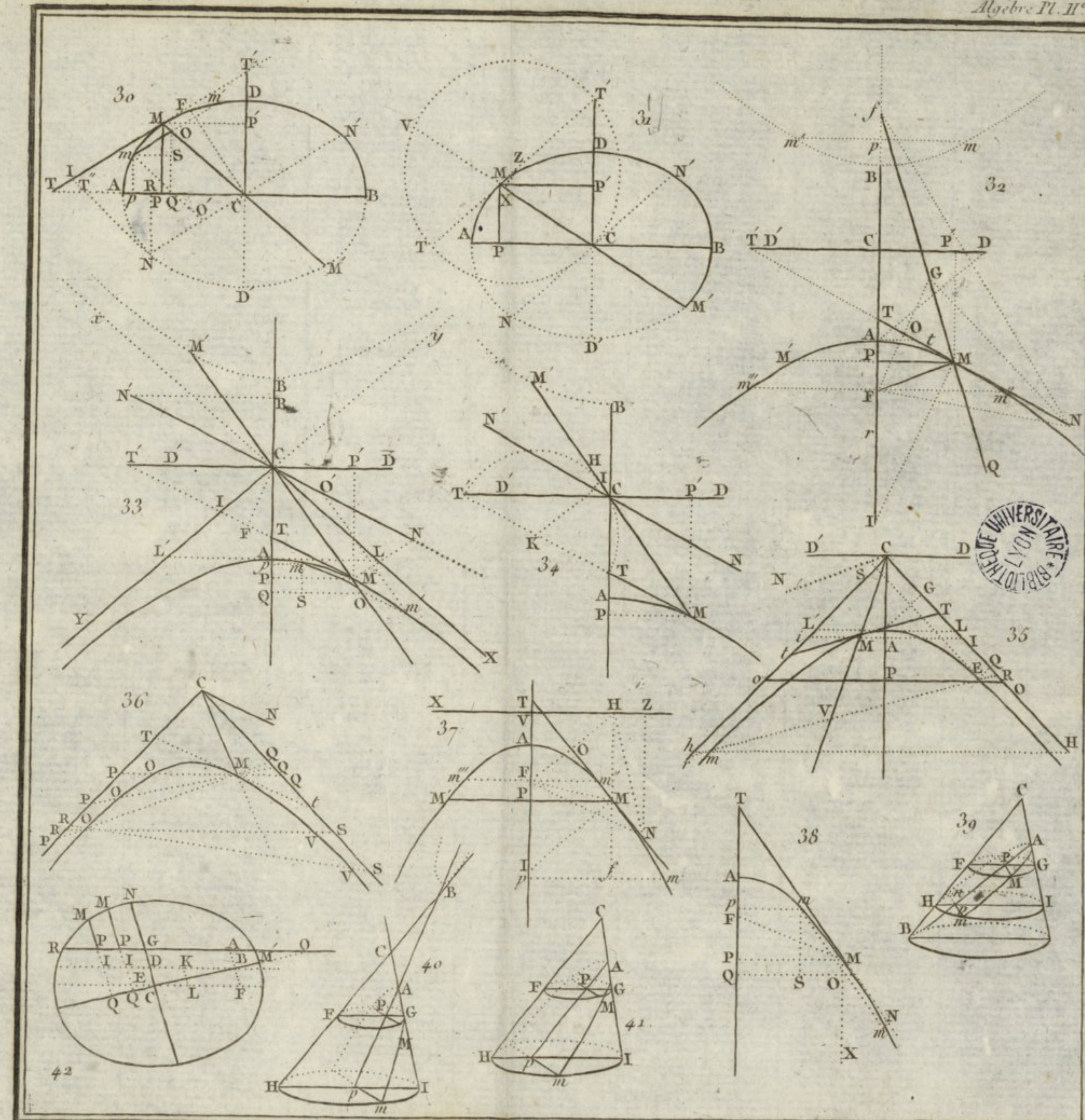
MRS DU SÉJOUR et le Chevalier DE BORDA qui avoient été nommés pour examiner les deux premiers Tomes du *Cours de Mathématiques à l'usage du Corps de l'Artillerie*, contenant l'Arithmétique, la Géometrie, la Trigonométrie, l'Algèbre, et l'application de l'Algèbre à la Géométrie, par M. BÉZOUT, en ayant fait leur rapport; l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression: en foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris, le vingt Décembre mil sept cent soixante-neuf.

Signé GRANDJEAN DE FOUCHY,

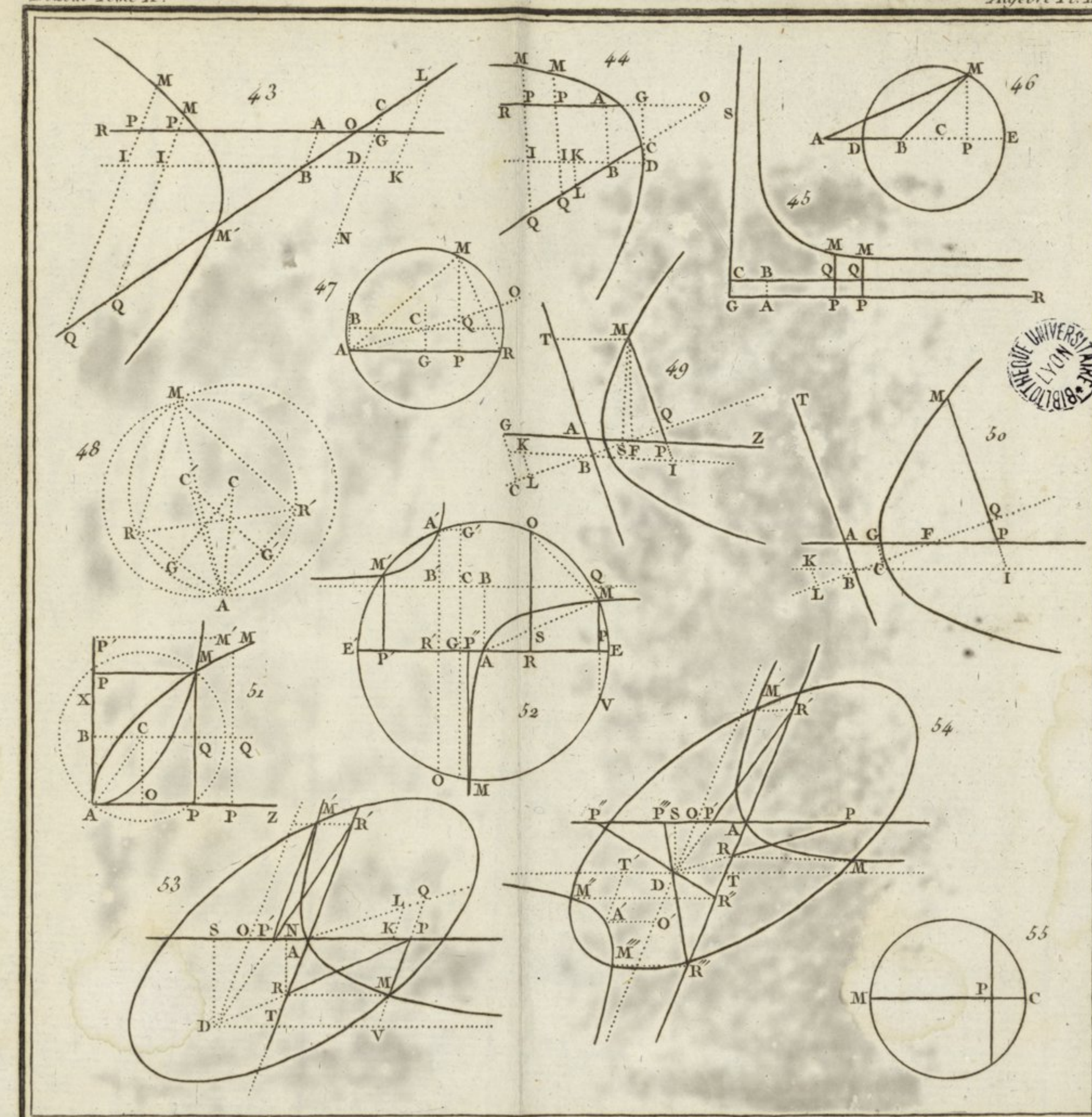
Secrétaire perpétuel de l'Academie des Sciences.



Fyssotte Sculp.



Prussotte Sculp.



Prussotte Sculp.