ELÉMENS

DE

GÉOMETRIE.

ÉLÉMENS DE GÉOMETRIE.

Par M. CLAIRAUT, *de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.*

A PARIS,
Chez DURAND, Libraire, Rue Saint Jacques; au Griffon.

M. DCC. LIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

231

A MONSEIGNEUR
LE COMTE
DE MAUREPAS,
MINISTRE
ET SECRETAIRE D'ETAT,
COMMANDEUR DES ORDRES
DU ROY.

MONSEIGNEUR,

C'est peut-être oublier la supériorité de vos connoissances, que de vous *présenter des Elemens de Géométrie ; mais c'est connoître vos vûes que de vous offrir quelque chose d'utile.*

Je ne dois donc point appréhender de mettre sous votre protection un Ouvrage qui contient les principes d'une Science dont vous partagez nécessairement les succès. Je vous supplie très-humblement, MONSEIGNEUR, *de l'accepter, comme un hommage de ma reconnoissance, & comme une preuve du profond respect avec lequel je suis,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obeissant
Serviteur CLAIRAUT.

PREFACE.

QUOIQUE la Géométrie ſoit par elle-même abſtraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus ſouvent de la maniere dont elle eſt enſeignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toûjours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui ſemblent ne promettre rien que de ſec au au Lecteur. Les propoſitions qui viennent enſuite ne fixant point l'eſprit ſur des objets plus intéreſſans, étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les Commençans ſe fatiguent & ſe rebutent, avant que d'avoir aucune idée diſtincte de ce qu'on vouloit leur enſeigner.

Il eſt vrai que pour ſauver cette ſécchereſſe, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la ſuite de chaque propoſition eſſentielle, l'uſage qu'on en peut faire pour la pratique ; mais par-là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, ſans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque propoſition venant toûjours avant ſon uſage, l'eſprit ne revient à des idées ſenſibles, qu'après avoir eſſuyé la fatigue de ſaiſir des idées abſtraites.

Quelques réflexions que j'ai faites ſur l'origine de la Géométrie, m'ont fait eſpérer d'éviter ces inconvéniens, en réuniſſant les deux avantages d'intéreſſer & d'éclairer les Commençans. J'ai penſé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par dégrés; que c'étoit vraiſemblablement quelque beſoin qui avoit fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puiſque c'étoient des Commençans qui les avoient faits.

Prévenu de cette idée, je me ſuis propoſé de remonter à ce qui pouvoit avoir donné naiſſance à la Géométrie; & j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode aſſez naturelle, pour être ſuppoſée la même que celle des premiers Inventeurs; obſervant ſeulement d'éviter toutes les fauſſes tentatives qu'ils ont néceſſairement dû faire.

La meſure des Terrains m'a paru ce qu'il y avoit de plus propre à faire naître les premieres propoſitions de Géométrie; & c'eſt en effet l'origine de cette Science, puiſque Géométrie ſignifie *meſure de Terrain*. Quelques Auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Héritages détruites par les débordemens du Nil, jetterent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'aſſurer exactement de la ſituations de l'étendue & de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporteroit pas à ces Auteurs, du moins ne ſçauroit-on douter que dès les premiers tems, les hommes n'ayent cherché des méthodes pour meſurer & pour partager leurs terres. Voulant dans la ſuite perfectionner ces méthodes, les recherches particulieres les conduiſirent peu à peu à des recherches générales; & s'étant enfin propoſé de connoître le rapport exact de toutes ſortes de grandeurs, ils formerent une Science d'un objet beaucoup plus vaste, que celui qu'ils avoient d'abord embrassé, & à laquelle ils conserverent cependant le nom qu'ils lui avoient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commençans les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains, & des distances accessibles ou inaccessibles, &c. De-là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premieres, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter; & justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne sçauroit disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourroient être rebutés par la sécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications; mais j'espere qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher & à découvrir; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorêmes; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on eſt parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de Mathématiques ont préſenté leurs découvertes en théorêmes, ç'a été, ſans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la ſuite des idées qui les avoient conduits dans leurs recherches. Quoiqu'il en ſoit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à réſoudre des problêmes; c'eſt-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui eſt entre des grandeurs données, & des grandeurs inconnues qu'on ſe propoſe de trouver. En ſuivant cette voie, les Commencçans apperçoivent à chaque pas qu'on leur fait faire, la raiſon qui détermine l'Inventeur, & par-là ils peuvent acquérir plus facilement l'eſprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Elémens, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, & de ne m'attacher pas aſſez à l'exactitude rigoureuſe des démonſtrations. Je prie ceux qui pourroient me faire un pareil reproche, d'obſerver que je ne paſſe légérement, que ſur des propoſitions dont la vérité ſe découvre pour peu qu'on y faſſe attention. J'en uſe de la ſorte, ſurtout dans les commencemens, où il ſe rencontre plus ſouvent des propoſitions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avoient de la diſpoſition à la Géométrie, ſe plaiſoient à exercer un peu leur eſprit; & qu'au contraire, ils ſe rebutoient, lorſqu'on les accabloit de démonſtrations, pour ainſi dire, inutiles.

Qu'Euclide ſe donne la peine de démontrer, que deux cercles qui ſe coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, à la ſomme de ſes côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il eſt renfermé; on n'en ſera pas ſurpris. Ce Géométre avoit à convaincre des Sophiſtes obſtinés, qui ſe faiſoient gloire de ſe refuſer aux vérités les plus évidentes: il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le ſecours des raiſonnemens en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choſes ont changé de face. Tout raiſonnement qui tombe ſur ce que le bon ſens ſeul décide d'avance, eſt aujourd'hui en pure perte, & n'eſt propre qu'à obſcurcir la vérité, & à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourroit me faire, ce ſeroit d'avoir omis différentes propoſitions, qui trouvent leur place dans les Elémens ordinaires, & de me contenter, lorſque je traite des proportions, d'en donner ſeulement les principes fondamentaux.

A cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut servir à remplir mon projet, que les propositions que je néglige sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, & qui d'ailleurs ne sçauroient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit : Qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matiere que je traiterai plus à fond dans les Elémens d'Algébre, que je donnerai dans la suite.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Elémens avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurois pû de même, remonter à ces vérités en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurois voulu choisir ; mais alors la multitude des idées étrangeres, dont il auroit fallu s'occuper, auroit comme étouffé les idées géométriques, ausquelles seules je devois fixer l'esprit du Lecteur.

Extraits des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 31 Août 1740.

MEssieurs NICOLE & BOUGUER, qui avoient été nommés pour examiner *des Elémens de Géométrie* composés par M. Clairaut, en ayant fait le rapport, la Compagnie a jugé cet Ouvrage digne de l'Impression; en foi de quoi j'ai signé le present Certificat. A Paris ce 5 Août 1746.

GRANDJEAN DE FOURCHY, *Sécrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciencee.*

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roy de France & de Navarre: A nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT: Notre ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, Nous a très-humblement fait exposer, que depuis qu'il nous a plû lui donner par un Réglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sçiences, qui font l'objet de ses exercices; ensorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnés au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder des Lettres de Priviléges, attendu que celles que nous lui avons accordées, en date du 6 Avril 1693 n'ayant point eû de tems limité, ont été déclarées nulles par Arrêt de notre Conseil d'Etat du 16 Août 1704, celles de 1713. & celles de de 1717. étant autant aussi expirées; & désirant donner à notredite Académie en corps & en particulier, & à chacun de ceux qui la composent, toutes les facilités & les moyens qui peuvent contribuer à rendre leur travaux utiles au Public, Nous avons permis & permettons par ces Préſentes à notre Academie, de faire vendre ou faire vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéiſſance, par tel Imprimeur ou Libraire qu'elle voudra choiſir, *Toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les aſſemblées de notredite Académie Royale des Sciences; comme auſſi les Onvrages, Mémoires, ou Traités de chacun des Particuliers qui la composent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion;* & ce pendant le tems & l'eſpace de quinze années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Imprimeurs, Libraires & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter, ni contrefaire aucun deſdits Ouvrages ci-deſſus expoſés en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits, ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changement de Titre, feuilles même ſéparées, ou autres ſans la permiſſion expreſſe & par écrit de notre Académie, ou de ceux qui auront droit d'elle, & ſes ayans cauſe, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de dix mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & intérêts: à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris dans trois mois de la date d'icelles: que l'impreſſion de ces Livres ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs; & que notredite Académie ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril mil ſept cens vingt-cinq, & qu'avant que de les exposer en vente, les Manuscrits ou Imprimés qui auront servi de copie à l'impression des Ouvrages, seront remis dans le même état, avec les Approbations & Certificats qui en auront été données ès mains de notre très-cher & feal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur CHAUVELIN ; le tout à peine de nullité des Présentes : Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir notredite Académie, ou ceux qui auront droit d'elle, ou ses Ayans cause pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la Copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin des Ouvrages, soit tenue pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos Amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier, ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNE' à Fontainebleau le douziéme jour du mois de Novembre, l'An de grace mil sept cens trente-quatre, & de notre Regne le vingtiéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre VIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 792. Fol. 775. conformément aux Réglemens de 1723. qui font défenses, Art. IV. à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient autre que les Libraibraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & afficher aucuns Livres pour les vendre en leur nom, soit qu'ils s'en disent les Auteurs ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires prescrits par l'Art. CVIII. du même Réglement. A Paris le 15 Novembre mil sept cens trente-quatre.

Signé, *G. MARTIN, Syndic.*

ÉLÉMENS DE GÉOMETRIE.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la meſure des Terrains.

CE qu'il ſemble qu'on a dû meſurer d'abord, ce ſont les longueurs & les diſtances.

I.

POUR meſurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une ſorte de Géométrie naturelle, c'eſt de comparer la longueur d'une meſure connue à celle de la longueur qu'on veut connoître.

II.

La ligne droite eſt la plus courte d'un point à un autre, & par conſéquent la meſure de la diſtance entre deux points.

A l'égard de la diſtance, on voit que pour meſurer celle qui eſt entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, & que c'eſt ſur cette ligne qu'il faut porter la meſure connue; parce que toutes les autres faiſant néceſſairement un détour plus ou moins grand, ſont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

III.

OUTRE la néceſſité de meſurer la diſtance d'un point à un autre, il arrive ſouvent qu'on eſt encore obligé de meſurer la diſtance d'un point à une ligne. Un homme, par exemple, placé en D ſur le bord d'une riviere, ſe propoſe de ſçavoir combien il y a du lieu

PLANCHE PREMIERE Fig. 1.

où il eſt à l'autre bord A B. Il eſt clair que, dans ce cas, pour meſurer la diſtance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, &c. qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or il eſt aiſé de voir que cette ligne la plus courte dont on a beſoin, eſt la ligne D C qu'on ſuppoſe ne pancher ni vers A, ni vers B. C'eſt donc ſur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire, qu'il faut porter la meſure connue, pour avoir la diſtance D C, du point D, à la droite A B. Mais on voit auſſi que pour poſer cette meſure ſur la ligne D C, il faut que cette ligne ſoit préalablement tirée. Il étoit donc néceſſaire qu'on eût une méthode pour tracer des perpendiculaires.

Une ligne qui tombe ſur une autre ſans pancher ſur elle d'aucun côté, eſt perpendiculaire à cette ligne.

I V.

ON avoit encore beſoin d'en tracer dans une infinité d'autres occaſions. On ſçait, par exemple, que la régula-

Fig. 2. & 3.

Le rectangle est une figure de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres.

rité des figures telles que A B C D, FGHI, appellées rectangles, & composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, &c.

Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux.

La premiere ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément quarré. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

V.

Dans les différentes opérations qui demandent qu'on méne des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne d'un point pris audehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

Fig. 4.

Maniere d'élever une perpendiculaire.

Que du point C, pris dans la ligne A B, on veuille élever la ligne C D perpendiculaire à A B, il faudra que cette ligne ne panche ni vers A, ni vers B.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A & de B, & que la droite C D ne panche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A & de B; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que sa distance au point A soit égale à sa distance au point B : car, alors tirant par C, & par ce point une ligne droite C D, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourroit le chercher en tâtonnant; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici.

Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez, ou sur le terrain, ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous fixerez au point A, ou l'extrémité de la corde, ou la pointe du compas, & faisant tourner l'autre pointe, ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM. Puis, sans changer de mesure, vous opérerez de même par rapport au point B, & vous décrirez l'arc Q D N, qui coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs P D M, Q D N décrits par le moyen d'une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc C D ne panchera, ni vers A, ni vers B. Donc cette ligne sera perpendiculaire sur A B.

FIG. 5. Si le point C ne se trouve pas à égale distance de A & de B, il faut prendre deux autres points *a* & *b*, également éloignés de C, & s'en servir, à la place de A & de B, pour décrire les arcs P D M, Q D N.

V I.

FIG. 4. SI une des traces, telle que PDM,

étoit continuée en O, en E, en R, &c. jusqu'à ce qu'elle revint au même point P, la trace entiere s'appelleroit circonférence du cercle, ou simplement cercle.

Le cercle est la trace entiere que décrit la pointe mobile d'un compas pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appellée arc de cercle.

Le point fixe A son centre, ou celui du cercle.

Le centre est le lieu de la pointe fixe.

Et l'intervalle A D, son rayon.

Toute ligne, comme D A E, qui passe par le centre A, & qui se termine à la circonférence, est appellée diamétre; il est évident que cette ligne est double du rayon, ce qui fait que le rayon est quelquefois nommé demi-diamétre.

Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert.

Le diamétre est le double du rayon.

VII.

FIG. 6.

Maniere d'abaisser une perpendiculaire.

La maniere d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB, fournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne; car, plaçant en E, ou l'extrémité d'un fil, ou la pointe du compas, & d'un même intervalle E b, marquant deux points a & b ſur la ligne AB, on cherchera, comme dans l'article précédent, un autre point D, dont la diſtance au point a & au point b, ſoit la même, & par ce point & par E, on ménera la droite DE, qui ayant chacune de ſes extrémités également éloignée de a & de b, & ne penchant pas plus vers l'un de ces points que vers l'autre, ſera perpendiculaire ſur A B.

VIII.

De l'opération précédente, ſuit la ſolution d'un nouveau Problême.

FIG. 7.

Couper une ligne en deux parties égales.

Qu'il s'agiſſe de partager une ligne droite AB en deux parties égales; des points A & B, pris comme centres, & d'une ouverture de compas quelconque, on décrira les arcs REI, GEF, enſuite des mêmes centres, & de la même, ou de telle autre ouverture qu'on voudra, on décrira auſſi les arcs P D M, Q D N, alors la ligne E D qui joindra les points d'intersections E & D, coupera A B en deux parties égales au point C.

I X.

La maniere de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aisé que de s'en servir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles & quarrés, dont on a parlé dans l'Article IV. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés soient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre sur la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, ensuite tirer D C.

FIG. 2.

Faire un quarré ayant son coté.

X.

Si on vouloit tracer un rectangle FGHI, dont la longueur fût K, & la largeur L, on feroit F G égale à K, ensuite on éleveroit les perpendiculai-

FIG. 3.

Faire un rectangle, dont la longueur & la largeur ſont données.

res FI & GH, chacune égale à L; puis on tireroit HI.

XI.

Les paralleles ſont des lignes toujours également diſtantes les unes des autres.

DANS la conſtruction des ouvrages, comme des remparts, des canaux, des rues, &c. on a beſoin de mener des lignes paralleles, c'eſt-à-dire, des lignes dont la poſition ſoit telle que leurs intervalles ayent par-tout pour meſure des perpendiculaires de même longueur. Or pour mener ces paralleles, rien, ce ſemble, n'eſt plus naturel que de recourir à la méthode dont on ſe ſert pour tracer des rectangles. Que AB, par exemple, ſoit un des côtés ou de quelque canal, ou de quelque rempart, &c. auquel on voudra donner la largeur CA; ou pour énoncer la queſtion d'une maniere plus géométrique & plus générale, ſuppoſons qu'on veuille mener par C, la parallele CD à AB, on prendra à volonté un point B dans la ligne AB, & l'on opérera de la même façon que

FIG. 8.

Mener une parallele à une ligne par un point donné.

ſi, ayant la baſe A B, on vouloit faire un rectangle A B C D, qui eût A C pour hauteur. Alors les lignes C D, A B, étant prolongées à l'infini, ſeroient toujours paralleles, ou, ce qui revient au même, elles ne ſe rencontreroient jamais.

X I I.

La régularité des figures rectangulaires les faiſant ſouvent employer, comme nous avons déja dit, il ſe trouve bien des cas où l'on a beſoin de connoître leur étendue. Il s'agira, par exemple, de déterminer combien il faut de tapiſſerie pour une chambre, ou combien un enclos de maiſon ayant la forme d'un rectangle, doit contenir d'arpens, &c.

On ſent que pour parvenir à ces ſortes de déterminations, le moyen le plus ſimple & le plus naturel, eſt de ſe ſervir d'une meſure commune qui appliquée pluſieurs fois ſur la ſurface à mesurer, la couvre toute entiere : Méthode qui revient à celle dont on s'est déja servi pour déterminer la longueur des lignes.

Or il est évident que la mesure commune des surfaces, doit être elle-même un surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, &c. Ainsi mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre de toises quarrées, ou de pieds quarrés, &c. que contient sa surface.

Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. Supposons que le rectangle
FIG. 9. donné ABCD ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder ce rectangle comme partagé en 7 bandes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés; la valeur du rectangle sera donc 7 fois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.

Maintenant si on se rappelle les premiers élémens du calcul arithmétique, & qu'on se souvienne que multiplier deux nombres, c'eſt prendre l'un autant de fois que l'unité eſt contenue dans l'autre, on trouvera une parfaite analogie entre la multiplication ordinaire, & l'opération par laquelle on meſure le rectangle. On verra qu'en multipliant le nombre des toiſes, ou des pieds, &c. que donne ſa hauteur, par le nombre des toiſes ou des pieds, &c. que donne ſa baſe, on déterminera la quantité de toiſes quarrées, ou de pieds quarrés, &c. que contient ſa ſuperficie.

La meſure d'un rectangle eſt le produit de ſa hauteur par ſa baſe.

XIII.

Les figures qu'on a à meſurer, ne ſont pas toujours régulieres, comme les rectangles, cependant on a ſouvent beſoin d'avoir leur meſure; tantôt il s'agira de déterminer l'étendue d'un ouvrage conſtruit ſur un terrain qui manquera de régularité, tantôt on voudra ſçavoir ce qu'une terre irréguliérement bornée contiendra d'arpens : il étoit donc néceſſaire qu'à la méthode de déterminer l'étendue des rectangles; on ajoûtât celle de mesurer les figures qui ne sont pas rectangulaires.

Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites.

FIG. 10.

On voit d'abord, que pour la pratique, la difficulté ne tombe que sur la mesure des figures rectilignes, telles que ABCDE, c'est-à-dire, des figures terminées par des lignes droites; car si dans le contour du terrain, il se trouve quelques lignes courbes, comme dans la figure ABCDEFG, il est évident que ces lignes partagées en autant de parties qu'il sera nécessaire pour éviter toute erreur sensible, pourront toujours être prises pour un assemblage de lignes droites.

FIG. 11.

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites.

Cela posé, on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon, en les partageant en figures de trois côtés nommées communément triangles; ce qu'on fera de la maniere la plus simple & la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour de la figure ABCDE, on méne les lignes droites AC, AD, &c. aux points C, D, &c. FIG. 10.

XIV.

IL ne s'agira donc plus que d'avoir la mesure des triangles qu'on aura formés. Or on sçait que pour trouver ce qu'on ignore, le moyen le plus sûr est de chercher si dans ce qu'on connoît, rien ne se rapporteroit à ce qu'on veut connoître; mais on a déja vû que tout rectangle ABCD, est égal au produit de sa base AB par sa hauteur CB. D'ailleurs, il est aisé de s'appercevoir que cette figure coupée transversalement par la ligne AC, nommée diagonale, se trouve partagée en deux triangles égaux, & de-là on infére que chacun de ces triangles égalera la moitié du produit de leur base AB ou DC, par leur hauteur CB ou DA.

FIG. 12.

La Diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux.

Il est vrai qu'il n'arrive guéres que les triangles à mesurer, ayent deux de

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre.

leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, comme les triangles ABC, ADC, qu'on appelle triangles rectangles; mais rien n'empêche qu'on ne les réduise tous à des triangles de cette espece.

PLAN. II. FIG. 1.

Car que du point A, sommet d'un triangle quelconque ABC, on abaisse la perpendiculaire AD, sur la base BC, le triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ABC, ADC.

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base, & même hauteur.

Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ABD, ADC seront les moitiés des rectangles AEBD, ADCF, le triangle proposé ABC, sera, de même, la moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base, & AD pour hauteur: mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur EB ou AD par la base BC, le triangle ABC aura pour mesure la moitié du produit de la base BC par la perpendiculaire AD, hauteur du triangle.

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base.

On a donc la maniere de mesurer tous

tous les terrains terminés par des lignes droites, puisqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puisse réduire à des triangles, & que des sommets de ces triangles, on sçait abaisser des perpendiculaires sur leurs bases.

X V.

De ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour mesurer l'aire, ou la superficie des triangles, on n'employe que leur base & leur hauteur, sans égard à la longueur de leurs côtés, on tire cette proposition, ou ce théorême, que tous les triangles, tels que E C B, A C B, qui ont une base commune C B, & dont les hauteurs E F, A D, sont égales, ont la même superficie.

Fig. 2. Les triangles qui ont même hauteur & même base, ont des superficies égales.

X V I.

Pour faciliter l'intelligence du principe qui donne la mesure des triangles, nous avons crû ne devoir choisir pour base qu'un côté sur lequel pourroit tomber la perpendiculaire abaissée du sommet opposé, ce qu'on a toujours la liberté de faire, quand il ne s'agit que de la mesure des terrains. Mais parce que dans la comparaison des triangles qui ont même base, les perpendiculaires abaissées de leurs sommets peuvent tomber hors du triangle, comme dans la figure 3, il semble qu'il soit nécessaire de voir si les triangles, tels que B C G sont dans le cas des autres; c'est-à-dire, s'ils sont toujours moitié des rectangles E C B F, qui ont la perpendiculaire G H pour hauteur.

FIG. 3.

Mais c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que le triangle C G H, somme des deux triangles C G B, G B H, est la moitié du rectangle E C H G, somme des deux rectangles E C B F, F B H G; & qu'ainsi les deux triangles C G B, G B H, pris ensemble, valent la moitié du rectangle E C H G : or le triangle G B H, est la moitié du rectangle F B H G; donc le triangle proposé B C G, est la moitié de l'autre rectangle E C B F, qui a B C pour base, & G H pour hauteur.

XVII.

La proposition démontrée dans les trois articles précédens, peut encore s'énoncer généralement en ces termes: les triangles E B C, A B C, G B C, sont égaux, lorsqu'ils ont une base commune B C, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles E A G, C B H; c'est-à-dire, lorsque leurs sommets E, A, G, se trouvent dans une même ligne droite E A G, parallele à la droite C B. Car alors (Article XI.) leurs hauteurs, mesurées par les perpendiculaires E F, A D, G H, sont les mêmes.

Fig. 4.

Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égaux en superficie.

XVIII.

Entre les différentes figures rectilignes qu'on sçait mesurer par la méthode précédente, il y en a qui approchent de la régularité des rectangles, ce ſont des eſpaces tels que ABCD, terminés par quatre côtés, dont chacun eſt parallele au côté qui lui eſt oppoſé. Ces figures ſont appellées parallelogrammes; elles ſont plus aiſées à meſurer que les autres figures rectilignes, les rectangles exceptés. Car qu'on partage le parallelogramme ABCD, en deux triangles ABC, ACD, ces deux triangles ſeront viſiblement égaux: or comme chacun de ces triangles vaudroit la moitié du produit de la hauteur AF, par la baſe BC, le parallelogramme aura pour meſure le produit entier de la baſe BC par la hauteur AF.

FIG. 5.

Les parallelogrammes ſont des figures de quatre côtés, dont les deux oppoſés ſont paralleles.

On les meſure en multipliant leur hauteur par leur baſe.

XIX.

DE-là il ſuit, que tous les parallelogrammes ABCD, EBCF, qui auront une baſe commune, & qui ſe trouveront entre les mêmes paralleles, ſeront égaux; ce qu'il eſt aiſé de voir, même indépendamment de ce qui précéde,

FIG. 6. ou 7.

Les parallelogrammes qui ont une baſe commune, & qui ſont entre les en remarquant que le parallelogramme ABCD deviendra le parallelogramme EBCF, si on lui ajoûte le triangle DCF, & que, de la figure entiere ABCF, on retranche le triangle ABE; qu'ainsi les deux triangles DCF, ABE, étant supposés égaux, il sera évident que le parallelogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF. Or, pour s'assurer de l'égalité de ces deux triangles, il suffira d'observer que AB & CD étant paralleles, aussi-bien que BE & CF, le triangle ABE ne sera autre chose que le triangle DCF, qui aura glissé sur sa base; de maniere que le point A sera arrivé en D, & E en F.

mêmes paralleles, sont égaux en superficie.

XX.

Il y a encore d'autres figures rectilignes qu'il est aisé de mesurer, & qu'on nomme polygones réguliers, figures que terminent des côtés égaux, qui ont tous la même inclinaison les uns

Les polygones réguliers sont des figures que terminent des côtés égaux, & également inclinés les uns sur les autres.

* FIG. 8, 9, & 10.

sur les autres. Telles sont les figures ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH*.

Comme on a coutume de donner la forme symétrique de ces figures aux bassins, aux fontaines, aux places publiques, &c. je crois qu'avant que d'apprendre à les mesurer, il faut voir de quelle maniere on les trace.

XXI.

Maniere de décrire un polygone d'un nombre déterminé de côtés.

QU'ON décrive une circonférence de cercle; qu'on la partage en autant de parties égales qu'on voudra donner de côtés au polygone; qu'ensuite on mene les lignes AB, BD, DE, &c. par les points A, B, D, E, &c. qui partageront la circonférence, on aura le polygone cherché, qu'on nommera, ou pentagone, ou exagone, ou eptagone, ou octogone, ou enneagone, ou décagone, &c. suivant qu'il aura, ou cinq, ou six, ou sept, ou huit, ou neuf, ou dix, &c. côtés.

Le pentagone a 5 côtés, l'exagone 6, l'eptagone 7, l'octogone 8, l'enneagone 9, le décagone 10, &c.

XXII.

POUR avoir la mesure d'un polygone régulier, on pourroit employer la méthode qu'on a déja donnée (Article XIII.) pour toutes les figures rectilignes; mais on s'apperçoit aisément que le plus court est de partager le polygone en triangles égaux, qui ayent tous le centre C pour sommet. Car prenant un de ces triangles, C B D par exemple, & tirant sur la base B D la perpendiculaire CK, qui pour lors sera nommée l'apothéme du polygone, comme l'aire du triangle vaudra le produit de la base B D, par la moitié de CK, ce produit pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entiere.

Mesure de la surface d'un polygone régulier.

FIG. 10.

L'apothéme est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés.

XXIII.

QU'ON ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formeroit un triangle nommé

Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux.

communément triangle équilatéral ; qu'on partageât cette circonférence en quatre parties égales, on formeroit un quarré ; mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle ; c'est ce qu'on a déja vû (Art. IX.) pour le quarré. A l'égard du triangle équilatéral, il est aisé de s'appercevoir que pour le décrire sur une base donnée AB, il faut que des points A & B, comme centres, & d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF & GCH, qu'ensuite des points A & B on mene les lignes AC, BC, au point C, section commune des deux arcs DCF, GCH, & sommet du triangle.

Maniere de le décrire.

FIG. 11.

XXIV.

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral & le quarré, les premiers de tous les polygones, je pourrois joindre celle de tracer géométriquement un pentagone, comme plusieurs Auteurs l'ont fait dans les Elémens qu'ils nous ont donné; mais parce que les Commençans, pour qui seuls nous travaillons ici, n'appercevroient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit, en cherchant la maniere de tracer cette figure, route que l'Algébre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone au Traité qui suivra celui-ci, & dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus grand nombre de côtés, & qui, sans le secours de l'Algébre, ne pourroient être décrits géométriquement.

Des polygones qui ont plus de cinq côtés, & que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48, &c. côtés, & ceux de 8, de 16, de 32, de 64, &c. côtés, qu'on peut aisément décrire par les méhodes que fournit la Géométrie élémentaire, comme on le verra à la fin de cette premiere Partie.

XXV.

JE reviens à la mesure des Terrains, & je vois que ceux qu'on veut mesurer, sont souvent tels qu'ils se refusent aux opérations que prescrivent les méthodes précédentes.

FIG. 12. Je suppose que ABCDE soit la figure d'un champ, d'un enclos, &c. dont on voudra avoir la mesure. Suivant ce qu'on a vû, il faudroit partager ABCDE en triangles tels que ABC, ACD, ADE; ensuite mesurer ces triangles, après avoir abaissé les perpendiculaires EF, CH, BG: mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élévation par exemple, un bois, un étang, &c. qui empêche qu'on ne mene les lignes dont on aura besoin, que faudra-t-il faire alors? Quelle méthode faudra-t-il sui-

vre pour remédier à l'inconvénient du terrain ? Celle qui ſe préſente d'abord à l'eſprit, c'eſt de choiſir quelque terrain plat, ſur lequel on puiſſe aiſément opérer, & de décrire ſur ce terrain des triangles égaux, & ſemblables aux triangles ABC, ACD, &c. Voyons comment on s'y prendra, pour former les nouveaux triangles.

XXVI.

PLAN. III. FIG. 1.

Connoiſſant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui ſoit égal.

FIG. 1. & 2.

COMMENÇONS par ſuppoſer que l'obſtacle ſe trouve dans l'intérieur du triangle ABC, dont les côtés ſeront connus, & qu'on veille tracer un triangle égal & ſemblable ſur le terrain choiſi; d'abord on décrira une ligne DE égale au côté AB, enſuite prenant une corde de la longueur BC, & fixant une de ſes extrémités en E, on décrira l'arc IFG, qui aura la corde pour rayon; & par le moyen d'une autre corde, priſe égale à AC, & dont on attachera pareillement un des bouts en D, on tracera l'arc KFH, qui coupera le premier au point F; alors menant les lignes DF & FE, on aura un triangle DEF, égal & ſemblable au triangle propoſé ABC; ce qui eſt évident: car les côtés DF & EF, qui s'uniront au point F, étant reſpectivement égaux aux côtés AC & BC, unis au point C, & la baſe DE ayant été priſe égale à AB, il ne ſeroit pas poſſible que la poſition des lignes DF & EF ſur DE, fût différente de la poſition des lignes AC & BC ſur AB. Il eſt vrai qu'on pourroit prendre les lignes D*f*, E*f*, au-deſſous de DE; mais le triangle ſe trouveroit encore le même, il ſeroit ſimplement renverſé.

XXVII.

FIG. 3. SI on ne pouvoit meſurer que deux des trois côtés du triangle ABC, les deux côtés AB, BC, par exemple; il eſt clair qu'avec cela ſeul, on ne pour-

roit pas déterminer un ſecond triangle égal & ſemblable à A B C. Car quoiqu'on eût pris D E, égal à B C, & D F, égal à B A, on ne ſçauroit quelle poſition donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la reſſource qui ſe préſente eſt ſimple : on fait pancher D F, de la même maniere ſur DE, que AB panche ſur BC; ou, pour s'exprimer comme les Géométres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle A B C. Fig. 3. & 4.

Un angle eſt l'inclinaiſon d'une ligne ſur une autre.

XXVIII.

Maniere de faire un angle égal à un autre.

Pour faire cette opération, on prend un inſtrument tel que *abc*, compoſé de deux régles qui puiſſent tourner autour de *b*, & l'on poſe ces régles ſur les côtés A B, & B C. Par-là elles font entr'elles le même angle que les côtés AB & BC. Plaçant donc la régle *bc* ſur la baſe DE, de maniere que le centre *b* réponde au point D, & que l'ouverture de l'inſtrument reſte toujours la même, la régle *a b* donnera la poſition de la ligne DF, qui fera, avec la ligne DE, l'angle FDE, égal à l'angle ABC. Or la ligne DF aura été priſe de même longueur que BA. Donc il ne s'agira plus que de mener par F & par E la droite F E, pour avoir le triangle F E D entiérement égal, & ſemblable au triangle ABC. Pratique ſimple, qui ſuppoſe ce principe évident, qu'un triangle eſt déterminé par la longueur de deux de ſes côtés, & par leur ouverture; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle eſt égal à un autre, lorſque deux de leurs côtés ſont reſpectivement égaux, & que l'angle compris entre ces côtés eſt également ouvert.

Deux côtés & l'angle compris, étant donnés, le triangle eſt déterminé.

XXIX.

On pourroit encore faire l'angle FDE égal à l'angle ABC, de la maniere ſuivante.

Fig. 5. & 6.

Du centre B, & d'un intervalle quelconque B *a*, décrivez un arc *a h c*; ensuite du centre D, & du même intervalle, tracez l'arc *e i f*; alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point *f*, qui soit placé sur l'arc *e i f* de la même maniere que *a*, se trouvera placé sur l'arc *c h a*. Or vous trouverez facilement le point *f*, en vous servant de la droite *a c*, qui, suivant la définition ordinaire, se nommera la corde de l'arc *a h c*.

Seconde maniere de faire un angle égal à un autre.

La corde d'un arc de cercle, est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc.

Car si, du centre *e*, & d'un intervalle égal à *a c*, vous décrivez l'arc *l f k*, l'intersection des deux arcs *e i f*, *l f k*, vous donnera le point cherché *f*.

Tirez ensuite par D & par *f*, la ligne D *f* F, vous aurez l'angle F D E égal à l'angle ABC. Ce qui est évident (Article XXVI.) puisque les triangles B *a c* D *f e*, seront entiérement égaux, & semblables dans toutes leurs parties.

XXX.

LORSQU'ON veut faire le triangle

FIG. 3.& 4. FDE égal au triangle ABC, s'il arrive qu'on ne puisse mesurer qu'un des côtés, BC par exemple, on a recours aux angles ABC & ACB. Ayant fait DE égal à BC, on place les lignes FD & FE, de maniere qu'elles fassent, avec DE, les mêmes angles que AB & AC font avec BC : alors, par la rencontre de ces lignes, on a le triangle FDE égal & semblable au triangle ABC. Le principe que suppose cette opération, est de lui-même si simple, qu'il n'a pas besoin d'être démontré.

Deux angles & un côté déterminent le triangle.

XXXI.

FIG. 7.

SI des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit mesurer que la base BC, & qu'on sçût d'ailleurs que ce triangle fût isocele, c'est-à-dire, que les deux côtés AB & AC, fussent égaux : il est évident qu'il suffiroit de mesurer un des deux angles ABC, ACB; car alors l'autre lui seroit égal.

Le triangle isocéle est celui qui a deux côtés égaux.

On en voit aisément la raison, si on se

ſe repréſente ce qui arriveroit, en ſuppoſant que les deux côtés A B, A C, du triangle ABC, fuſſent d'abord couchés ſur B D, & ſur C E, prolongemens de la baſe B C, & qu'enſuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcheroit de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pancheroient également ſur la baſe B C. Donc l'angle A B C ſeroit égal à l'angle A C B.

Les angles que ces côtés font avec la baſe, ſont égaux entr'eux.

XXXII.

Pour revenir à la meſure des Terrains, on verra que quels que ſoient les obſtacles qu'on pourra rencontrer dans leur intérieur, il ſera aiſé, par la méthode précédente, de tranſporter ſur un terrain libre, tous les triangles qui partageront l'eſpace qu'on voudra meſurer.

Suppoſons, par exemple, que vous vouluſſiez meſurer un bois, dont la figure fût A B C D E F G.

Fig. 8.

D'abord vous prendriez un triangle égal à ABC, ce que vous pourriez faire ſans entrer dans l'intérieur de ce triangles, en meſurant les deux côtés A B, BC, & l'angle compris C B A.

Ce triangle décrit donneroit l'angle BCA, & la longueur de AC, & comme vous pourriez meſurer le côté extérieur DC, vous auriez dans le triangle CAD, les côtés D C & C A. Quant à l'angle DCA, vous le trouveriez en

FIG. 8. & 9. prenant d'abord l'angle I K L, égal à l'angle D C B, enſuite l'angle L K O, égal à l'angle B C A, ce qui vous donneroit l'angle reſtant I KO, égal à l'angle cherché D C A.

Le triangle A D C, ainſi déterminé par les deux côtés D C & CA, & par l'angle compris D C A, vous connoîtriez de même le triangle DAG, & le reſte de la figure.

XXXIII.

LA méthode qu'on vient de donner

pour mesurer les terrains, dans lesquels on ne sçauroit tirer des lignes, fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni & libre, assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrein dont on cherche la mesure. Et même quand on en trouveroit, la grande longueur des côtés des triangles, pourroit rendre les opérations très-difficiles : abaisser une perpendiculaire sur une ligne d'un point qui en est éloigné seulement de 500 toises, ce seroit un ouvrage extrêmement pénible, & peut être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bien-tôt dans l'esprit de représenter la figure à mesurer A B C D E, par une figure semblable *a b c d e*, mais plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *a b* soit de 100 pouces, si le côté A B est de

PLAN. IV.

FIG. 1. & 2.

100 toises, le côté *bc* de 45 pouces; si BC est de 45 toises, & de conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite *abcde*, est de 60000 pouces quarrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60000 toises quarrées.

Mais, avant toutes choses, il faut sçavoir en quoi consiste la ressemblance de deux figures.

XXXIV.

En quoi consiste la ressemblance de deux figures.

OR pour peu qu'on y réfléchisse, on reconnoîtra bien-tôt que les deux figures ABCDE, *abcde*, pour être semblables, doivent être telles que les angles A, B, C, D, E, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la petite, & que, de plus, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c. de la petite, contiennent autant de partie *p*, que les côtés AB, BC, CD, &c. de la grande, contiennent de parties P.

XXXV.

POUR exprimer cette seconde condition, les Géometres disent, qu'il faut que les côtés AB, BC, CD, &c. soient proportionnels aux côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c.; ou que le côté AB contienne *ab*, de la même maniere que BC contient *bc*, &c.; ou que le côté AB soit aussi grand, par rapport à *ab*, que BC l'est par rapport à *bc*, &c.; ou encore, qu'il y ait même raison, ou même rapport entre AB & *ab*, qu'entre BC & *bc*, &c.; ou enfin, que AB soit à *ab*, comme BC à *bc*, &c. Toutes façons d'exprimer la même chose, mais qu'il faut se rendre familieres, pour entendre le langage des Géometres.

XXXVI.

Maniere de faire une figure semblable à une autre.

APRES avoir vû en quoi consiste la ressemblance de deux figures, cherchons quelle voie la nature nous indique pour tracer une figure semblable à une autre. Pour cela, représentons-nous un Dessinateur, qui veut copier une figure en la réduisant.

D'abord prenant *ab*, pour représenter la base A B de la figure à copier A B C D E, il incline sur *a b* les côtés *a e* & *b c*, de la même façon que A E & B C sont inclinés sur A B, en observant que les longueurs de *a e* & de *b c*, soient à celle de *a b*, comme les longueurs de A E & de B C sont à celle de A B ; c'est-à-dire, que si A E, par exemple, est la moitié de A B, il fait *a e* égal à la moitié de *a b*, & qu'il en use de même pour déterminer la longueur de *b c*, relativement à B C.

Ayant ainsi déterminé les points *e* & *c*, il trace deux lignes *e d* & *c d*, qu'il incline sur *e a* & sur *c b*, de la même maniere que E D & C D sont inclinés sur E A & sur C B, & prolongeant ces lignes jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *d*, il acheve sa figure *a b c d e*.

XXXVII.

QU'ON réfléchiſſe préſentement ſur cette conſtruction, on verra qu'elle n'eſt appuyée que ſur l'égalité qui eſt entre les angles E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, & ſur la proportionalité des côtés E A, A B, B C, & des côtés *e a*, *a b*, *b c*; qu'ainſi la figure ſe trouve finie, ſans qu'on ait pris l'angle *d*, égal à l'angle D, ni les côtés *e d*, *c d*, proportionnels aux côtés E D, C D; réflexion, qui d'abord pourroit faire craindre que l'angle *d* ne fût pas effectivement égal à l'angle D, ni les côtés *e d*, *c d*, proportionnels aux côtés E D, C D, & que, par conſéquent, la figure *a b c d e* ne ſe trouvât pas entiérement ſemblable à la figure A B C D E; mais n'eût-on que l'expérience pour ſe raſſurer, ce doute ſe diſſiperoit bien-tôt; outre que pour peu d'attention qu'on y faſſe, on ſent que de l'égalité reſpective des quatre angles E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, &

de la proportionalité des trois côtés EA, AB, BC, & *ea*, *ab*, *bc*, résulte néceſſairement l'égalité des angles D, *d*, & la proportionnalité des côtés ED, CD, & *ed*, *cd*.

Cependant, pour écarter tout ſoupçon, faiſons voir que toutes les conditions que demande la reſſemblance de deux figures, ſont néceſſairement dépendantes les unes des autres; ce qu'il nous ſera aiſé de faire, en examinant d'abord les triangles, qui ſont les figures les plus ſimples, & qui entrent néceſſairement dans la compoſition de toutes les autres; examen qui nous conduira à toutes les propriétés & à tous les uſages des figures ſemblables.

XXXVIII.

FIG. 3. & 4. Si deux angles d'un triangle ſont egaux à deux angles d'un autre triangle, le troi-

SUPPOSONS que ſur la baſe *ab* on trace le triangle *abc*, en ne prenant que les angles *cab*, *cba*, égaux aux angles CAB, CBA, du triangle ABC, on s'aſſurera premierement que le troiſiéme angle *abc* égalera le troisiéme angle ACB.

Car soit posé le triangle *abc* sur le triangle ABC, de maniere que le point *a* se trouve sur le point A, *ab* sur AB, *ac* sur AC, il est clair que *cb* sera parallele à CB, & cela parce que le côté *cb*, prolongé, ne pourroit rencontrer le côté CB, que les deux lignes ne panchassent inégalement sur AB, & que, par conséquent, les angles *cba* & CBA fussent inégaux; ce qui seroit contre la supposition.

Comme, de l'égalité des angles *cba* & CBA, il suivra que les lignes *cb*, CB seront paralleles, du parallelisme de ces lignes, il suivra aussi que les angles A*cb*, ACB, seront égaux; ce qu'il s'agissoit de prouver.

siéme angle de l'un égalera le troisiéme angle de l'autre.

XXXIX.

MAINTENANT faisons voir que les côtés qui se répondent dans deux triangles *acb* & ACB, qui ont les mêmes angles, sont proportionnels.

Deux triangles, dont les angles sont respectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.

Pour fixer nos idées, ſuppoſons d'abord que *a b* ſoit la moitié de A B; il faudra que nous prouvions que *a c* ſera auſſi la moitié de AC, & *b c* la moitié de BC. Que *a c b*, ainſi que dans l'Article précédent, ait encore la poſition A *c b*, ſi on méne *c g*, parallele à AB, il eſt clair que cette ligne égalera *b* B, ou A*b*, & que *g* B égalera de même *c b*. Or comme les angles *c g* C & C *c g*, ſeront manifeſtement égaux aux angles *c b*A, & *c*A*b*, le triangle C *c g*, égalera le triangle *c*A*b*, (Article XXX.) Donc on aura C*c* égal à A*c*, & C*g* égal à *c b*, ou à *g*B. Donc A*c* ou *a c* ſera moitié de AC, & *c b* moitié de C B.

FIG. 3. & 5. Si *a b* étoit contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudroit, dans A B, il ſeroit également aiſé de démontrer que *a c* ſeroit contenu le même nombre de fois dans AC, & *c b* dans CB. Car des points de diviſion *b*, *f*, de la baſe AB, menant *b c*, *f h*, &c. paralleles à B C, on pourroit

placer le long de AC, trois, quatre, &c. triangles A*cb*, *chg*, *h*C*i*, &c. égaux au triangle *acb*.

Mais que *ab*, au lieu d'être contenu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois & demie, par exemple, on prouveroit que *ac* seroit aussi contenu deux fois & demie dans AC, & *bc* deux fois & demie dans BC. FIG. 3. & 6.

Car, quand par le moyen des paralleles *bc*, *fh*, on auroit placé le long de AC, les deux triangles A*cb*, *chg*, égaux à *acb*, il resteroit entre les deux paralleles *hf* & CB, de quoi placer un triangle C*hi*, dont les côtés seroient moitiés des côtés de *c*A*b*; ce qui est évident, puisque par la supposition, *f*B seroit la moitié de A*b*, & que la base *hi* du triangle C*hi* égaleroit *f*B, à cause des paralleles *hf*, CB. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, *abc*, ont les mêmes angles, ces triangles, nommés triangles semblables, ont leurs côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles, ABC, contiennent le même nombre de parties P, que les côtés *ab*, *bc*, *ac*, de l'autre triangle *abc*, contiennent de partie *p*. P étant le pied, la toise, &c. ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC, a été construit, & *p* celle dont on s'est servi en construisant *abc*.

XL.

De la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problême souvent utile dans la pratique.

Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.

On demande qu'une ligne soit divisée en un nombre donné de parties égales; ce qui se pourroit faire, à la vérité, en tâtonnant; mais jamais avec cette sûreté que donne l'exactitude géométrique.

Supposons, par exemple, qu'on ait à diviser AB en trois parties égales, on

FIG. 5.

commence par tirer une ligne indéfinie AC, qui faſſe un angle quelconque avec AB, enſuite on porte ſur cette ligne trois parties égales A*c*, *ch*, *h*C, d'une ouverture de compas priſe à volonté, puis on tire C B, & l'on méne à cette droite les paralleles *cb*, *hf*; par là, A B, coupée aux points *b* & *f*, ſe trouve partagée en trois parties égales; ce qui eſt clair par l'article précédent.

XLI.

Ce que c'eſt qu'une ligne quatriéme proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.

Fig. 6.

Si on vouloit diviſer une ligne en un nombre fractionnaire de parties, comme deux & demie, trois & un un quart, &c. ou bien qu'on propoſât en général, de diviſer la ligne AB au point *b*, enſorte que AB fût à A*b*, comme la ligne NO à la ligne MQ; on voit encore, que la ſolution du problême dépendroit de l'art. XXXIX; c'eſt-à-dire, qu'il faudroit tirer par A une droite quelconque, prendre ſur cette droite A*c* & AC, égales à MQ,

& à N O, & ensuite mener *c b*, parallele à C B; alors le point *b* seroit le point cherché.

Les Géometres énoncent de cette autre maniere le problême que nous venons de résoudre. Trouver à trois lignes N O, M Q, A B, une quatriéme proportionnelle.

XLII.

FIG. 7. & 8.

Les hauteurs des triangles semblables, sont proportionnelles à leurs côtés.

Il est évident que deux triangles semblables A B C, *a b c*, auront, non-seulement leurs côtés proportionnels, mais que les perpendiculaires C F, *c f*, qu'on abaissera des sommets C, *c*, sur les bases A B, *a b*, suivront encore la proportion des côtés : ce qui est si aisé à démontrer par ce qui précéde, que nous négligerons de nous y arrêter.

XLIII.

Quant à l'aire des triangles semblables A B C, *a b c*, on voit que celle du premier contiendra autant de quarrés X faits ſur la meſure P, que l'aire du ſecond, contiendra de quarrés *x*, faits ſur la meſure *p*. Car comme C F & A B, auront, par l'article précédent, autant de parties P, que *c f* & *a b*, auront de parties *p*; la moitié du produit de C F par A B, meſure A B C; (Article XIV.) donnera le même nombre que celui qui réſultera de la moitié du produit de *c f* par *a b*, meſure de *a b c*; mais avec cette différence, que C F & A B, ſe comptant en parties P, leur produit ſe comptera en quarrés X, & que *c f* & *a b*, qui ſe compteront en parties *p*, donneront un produit qui ſe comptera en quarrés *x*.

X L I V.

Ce que nous venons de dire ſur la meſure des triangles ſemblables, ſert de preuve à une propoſition, qui, dans les Elemens de Géometrie, s'énonce ordinairement ainſi. Les triangles ſemblables A B C, *a b c*, ſont entr'eux

Les aires des triangles ſemblables, font entre elles comme les quarrés des côtés homologues.

comme les quarrés ABDE, *abde*; de leurs côtés homologues ou correspondans AB, *ab*.

La démonstration que renferme l'Article précédent, mene absolument à cette conséquence; car le quarré ABDE, contenant autant de X que *abde* contient de *x*, il est évident que les deux nombres de quarrés X, qui expriment le rapport du triangle ABC, au quarré ABDE, sont les mêmes que les nombres de quarrés *x*, qui donnent le rapport du triangle *abc*, au quarré *abde*; ou, ce qui revient au même, que le triangle ABC est au quarré ABDE, comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

De-là il suit que si, par exemple, le côté AB étoit double du côté *ab*, le triangle ABC, seroit quadruple du triangle *acb*; que si AB étoit triple de *ab*, le triangle ACB seroit neuf fois plus grand que le triangle *acb*, &c.; car AB ne peut être double de *ab*, que le quarré ABDE

ABDE ne ſoit que quadruple du quarré *a b d e*, &c.

XLV.

Fig. 1. & 2. même Planche.

Propriétés des figures ſemblables, tirées de celles des triangles.

Pour paſſer préſentement des triangles aux autres figures, ſuppoſons qu'à chacun des triangles ſemblables ABD, *a b d*, on joigne deux autres triangles ADE & BDC, *ade* & *bdc*, les deux premiers ſemblables aux deux autres, on verra que dans les figures totales ABCDE, *a b c d e*.

1°. Les angles A, B, C, D, E, ſeront les mêmes que les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ce qui eſt clair, puiſque les uns & les autres ſeront, ou des angles correſpondans de triangles ſemblables, ou des angles compoſés de ces angles correſpondans.

2°. On verra que le rapport des côtés homologues ou correſpondans DE, *de*, BC, *bc*, &c. des figures ABCDE, *abcde*, ſera néceſſairement le même; c'eſt-à-dire, que ſi P, par exemple, ſe trouve un certain nombre de fois dans la base A B, & que p se trouve le même nombre de fois dans ab, P & p seront aussi contenus un même nombre de fois dans deux côtés homologues quelconques D E & de; car à cause de la ressemblance des triangles ABD, abd, la quantité de P que renfermera A D, égalera la quantité de p renfermée dans ad; alors regardant ces côtés comme les bases des triangles semblables ADE, ade, le nombre de parties P contenues dans D E, sera le même que le nombre de parties p que contiendra le côté de.

3°. On verra encore que si dans les deux figures on tiroit des lignes qui se répondissent, telles que CE, ce, ou les perpendiculaires DF, df, &c.; ces lignes seroient toujours entr'elles dans la même raison que les côtés homologues des deux figures.

Donc les figures ABCDE, $abcde$, seront entiérement semblables dans toutes leurs parties.

XLVI.

La figure *abcde* ainſi décrite, parfaitement ſemblable à la figure ABCDE, il eſt évident que ſi on vouloit tracer de nouveau une figure entiérement égale à *abcde*, & par conſéquent, encore ſemblable à ABCDE, il ſeroit inutile de meſurer tous les côtés & tous les angles de *abcde*; qu'il ſuffiroit, par exemple, de prendre les trois côtés *ab*, *ea*, *bc*, & les quatre angles *e*, *a*, *b*, *c*, & qu'avec cela ſeul on ſeroit ſûr de retracer la même figure *abcde*, ſemblable à ABCDE; ce qui forme une démonſtration complette de ce qu'on n'avoit fait que préſumer (Article XXXVII). Mais on peut aller plus loin; car il eſt clair qu'on aura toujours différentes façons de combiner la quantité d'angles & de lignes qu'on doit néceſſairement meſurer dans une figure quelconque, pour en faire une autre qui lui ſoit proportionnelle. Ce ſeroit fatiguer le Lecteur que d'entrer dans un plus grand détail.

XLVII.

Les aires des figures ſemblables, ſont entre elles comme les quarrés des côtés homologues.

ON démontreroit, par des raiſonnemens ſemblables à ceux de l'Article XLIII. que le nombre de quarrés X, que contient la figure ABCDE, eſt le même que celui des quarrés *x* renfermés dans la figure *abcde*; & qu'ainſi, les aires des figures ſemblables ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XLVIII.

Les figures ſemblables ne ſont différenciées que par les échelles ſur leſquelles elles ſont conſtruites.

TOUT ce qui vient d'être dit ſur les figures ſemblables, peut ſe réduire à ce ſeul & unique principe, que les figures ſemblables ne ſont différenciées que par les échelles ſur leſquelles elles ſont conſtruites.

XLIX.

MAINTENANT, pour mieux ſentir l'usage qu'on doit faire des triangles semblables & des réductions, pour avoir la mesure des terrains sur lesquels on ne pourroit pas commodément opérer, figurons-nous que A B C D E F représente le contour d'un Parc, d'un Etang, &c. dont on voudra déterminer l'étendue. D'abord on mesurera un des côtés de la figure, F E par exemple, & l'on verra combien ce côté aura de toises, de perches, &c. ensuite prenant telle échelle qu'on voudra, on tracera sur un carton, ou sur un papier, une ligne *fe*, égale à autant de parties de l'échelle, que F E contiendra de toises, de perches, &c. puis faisant les angles *def*, *dfe*, égaux aux angles DEF, DFE, on aura le triangle *edf*, dans lequel on abaissera *eg*, perpendiculaire sur *df*: cela fait, & les lignes *df* & *eg*, mesurées par le moyen de l'échelle, on conclura qu'autant que ces lignes contiendront de parties réduites, autant DF & EG contiendront de toises, de

PLAN. V. FIG. 1. & 2.

perches, &c. Ainſi, en multipliant D F par la moitié de E G, on aura la valeur du triangle E D F, & meſurant de la même maniere chacun des autres triangles DCF, BCF, ABF, l'aire de la figure entiere ſe trouvera déterminée.

L.

Maniere de meſurer la diſtance d'un lieu inacceſſible.

Il arrive ſouvent que dans la pratique, il faut meſurer la diſtance du lieu F, où l'on eſt placé à un autre lieu, où quelque obſtacle empêche qu'on ne ſe tranſporte; nouveau problême, mais dont la ſolution eſt déja donnée d'avance dans l'Article qui précéde celui-ci; car puiſque pour meſurer D F, on n'a eu beſoin que de la ſimilitude des triangles *d e f* & D E F, il eſt clair que ſi on meſure une baſe quelconque E F, & que des points F & E, on puiſſe appercevoir le Point D, le problême ſera réſolu; c'eſt-à-dire, qu'on aura la diſtance F D.

L I.

L'USAGE qu'on peut faire des inſtrumens particuliers, tels que *b* A *c*, que j'ai dit (Article XXVIII.) composé de deux branches unies au point A, autour duquel elles ont la liberté de tourner, expoſe ſouvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le tranſport; tantôt la forme qu'on eſt obligé de donner à l'inſtrument pour en faciliter l'uſage, empêchera qu'on ne puiſſe l'appliquer ſur le plan où devra ſe faire la réduction. FIG. 3.

Ajoûtons à cela, que chaque nouvel angle B A C, qu'on prend de cette façon, demande qu'on tranſporte de nouveau l'inſtrument ſur le papier, & que la ſeule reſſource qu'on ait pour comparer deux angles, c'eſt de les poſer l'un ſur l'autre, ſans que, par ce moyen, on puiſſe avoir au juſte, ni leur rapport, ni leur grandeur abſolue.

L I I.

Il étoit douc néceſſaire de chercher une meſure fixe pour les angles, comme on en avoit déja une pour les longueurs. Or cette meſure qu'il falloit avoir, il a été facile de la trouver. Car

Fig. 4.

que A *b* reſtant fixe, on lui applique d'abord le côté A *c*, qu'enſuite on faſſe tourner ce côté autour de A, il eſt clair que ſi on adapte à l'extrémité *c* de la branche mobile A *c*, ou une plume, ou un crayon, qui donne moyen de rendre ſenſible la trace du point *c*,

Un angle a pour meſure l'arc de cercle qu'interceptent ſes côtés.

cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la meſure de l'angle, pour chaque ouverture particuliere des côtés A *b*, A *c*, c'eſt-à-dire, qu'à cauſe de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera néceſſairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de *c* A *b*, répondra un arc double, triple, quadruple de *c b*.

LIII.

SUPPOSANT donc que la circonférence *b c d f g*, décrite par la révolution entiere du point *c*, ſoit diviſée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes A *c* & A *b*, meſurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle *c* A *b* qu'elles formeront.

Les Géometres ſont convenus de diviſer le cercle en 360 parties, qu'on appelle degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 ſecondes, &c. Ainſi, un angle *b* A *c*, par exemple, aura 70 degrés 20 minutes, ſi l'arc *b c*, qui lui ſervira de meſure, a 70 des 360 parties du cercle, & de plus 20 ſoixantiémes parties d'un degré.

Le cercle eſt partagé en 360 degrés ; chaque degré en 60 minutes, &c.

LIV.

DE-là il ſuit qu'un angle CAB de 90 degrés, nommé communément

FIG. 5. L'angle droit a 90

degrés, & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

angle droit, est celui dont les côtés AC & AB interceptent le quart BC de la circonférence, & sont perpendiculaires l'un à l'autre.

L V.

Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

ON appelle angle aigu tout angle plus petit qu'un angle droit, ou qui a moins de 90 degrés. Tels sont les angles CAB, FAG, EAG.

FIG. 6.

L V I.

Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit.

AU contraire, on appelle angle obtus, celui qui a plus de 90 degrés, comme FAB.

L V I I.

La somme des angles, faits du même côté sur une ligne droite, & qui ont le même sommet, vaut 180 degrés.

IL est évident que tous les angles, comme GAF, FAE, EAC, CAB, qu'on peut faire du même côté sur une ligne droite GB, & qui ont le même sommet A, sont égaux pris ensemble à 180 degrés, ou à deux angles droits, mesurés par la demi-circonférence.

LVIII.

De même la somme de tous les angles E A F, F A B, B A C, C A D, D A E, qu'on peut faire autour du point A, qui leur sert de sommet commun, est égale à 360 degrés, ou à quatre angles droits mesurés par la circonférence entiere B C D E F.

Fig. 7. Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, sont égaux, pris ensemble, à quatre droits.

LIX.

Apre's avoir trouvé que les angles ont les parties du cercle pour mesure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut mesurer contient de degrés.

On se sert d'un instrument I, qu'on appelle demi-cercle : cet instrument est composé de deux régles EAC, DAB, d'égale longueur qui se croisent en A, & qui sont chargées de pinnules à leurs extrémités. L'une de ces régles E C, qu'on nomme alidade, est mobile autour de A, & l'autre D B est fixe, &

Fig. 8. Usage de l'instrument appellé demi-cercle, pour prendre la grandeur d'un angle.

ſert de diamétre à un demi - cercle D C B diviſé en 180 degrés, &c.

Or veut-on connoître l'angle que forment deux lignes droites, tirés du lieu où l'on eſt, à deux objets quelconques F, G, on place d'abord la régle fixe DAB, de maniere que l'œil placé en D, apperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D & B : enſuite, ſans remuer l'inſtrument, on tourne l'alidade, juſqu'à ce que l'œil placé en E, apperçoive l'autre objet G, par les pinnules E & C; & alors l'alidade marque ſur le demi - cercle gradué, le nombre de degrés, minutes, &c. que contient l'angle propoſé G A F.

L X.

Uſage du rapporteur, pour faire un angle d'un nombre déterminé de degrés.

Si on veut faire ſur le papier un angle d'un nombre déterminé de degrés, on ſe ſert d'un inſtrument K*, diviſé en 180 degrés, qu'on appelle rapporteur, ou tranſporteur, & poſant le centre A ſur la pointe de l'an-

*Fig. 9.

gle qu'on veut tracer, & la ligne AB ſur la ligne AG, qu'on prend pour un des côtés de l'angle, on marque le point C, qui répond au nombre de degrés qu'on veut donner à l'angle propoſé, puis par ce point, & par le centre A, tirant la ligne ACO, on a l'angle OAG, qui contient le nombre de degrés demandé.

LXI.

SUPPOSONS maintenant qu'ayant pris une baſe FG ſur le papier, on veuille faire ſur cette baſe, un triangle FGH, ſemblable au triangle ABC, pris ſur un terrain. On ſe ſervira du demi-cercle pour ſçavoir ce que chacun des angles CAB, CBA, contiendra de degrés; enſuite, par le moyen du rapporteur, on fera les angles HFG & HGF, reſpectivement égaux aux angles CAB & CBA, & alors parce que le point H, auquel les côtés FH & GH ſe réuniront, ſera néceſſaire- PLAN. VI. FIG. 1. & 2.

ment déterminé par l'opération, aussi-bien que l'angle F H G, on aura le triangle F G H, entiérement semblable au triangle A B C.

LXII.

COMME il importe dans la pratique, ainsi que nous l'avons déja dit, que les angles soient exactement mesurés, il ne faut pas se contenter de les prendre, même avec les instrumens les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérifier leurs mesures, pour en faire la correction, s'il étoit nécessaire. Or ce moyen est simple & facile. Reprenons le triangle A B C. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celle des angles A & B; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes CA, B C changeroit, & par conséquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or si cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit préſumer que ce que les angles A & B renferment de degrés doit déterminer le nombre de degrés que doit renfermer l'angle C, & qu'ainſi il pourra ſervir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puiſqu'on ſera ſûr qu'on aura bien meſuré les angles A & B, ſi, en meſurant enſuite l'angle C, on lui trouve le nombre de degrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.

Pour trouver comment de la grandeur des Angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, ſi les lignes AC, BC, venoient ou à s'approcher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Suppoſons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il eſt clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement; & qu'au contraire, l'angle C ſe reſſerre- FIG. 3.

de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toujours la même, quelle que fût l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE.

LXIII.

Fig. 4.

Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part & d'autre, une ligne droite qui tombe sur deux paralleles.

Or cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ; car qu'on mene ID, parallele à AC, on verra premiérement que les angles ACB & CBD, appellés angles alternes, seront égaux, ce qui est évident, puisque les lignes AC & IB étant paralleles, elles seront également inclinées sur CBO, & qu'ainsi l'angle IBO égalera l'angle ACB. Mais l'angle IBO égalera aussi l'angle CBD, parce que la ligne ID ne sera pas plus inclinée sur CO d'un côté que de l'autre. Donc l'angle DBC égal à l'angle IBO, égalera l'angle ACB, son alterne.

Ces angles sont égaux.

LXIV.

LXIV.

On verra, en second lieu, que l'angle CAE sera égal à l'angle DBE, à cause des paralleles CA & DB. Donc les trois angles du triangle pourroient être mis à côté les uns des autres, & unis par leurs sommets aux points B, & alors on verroit que les trois angles DBE, CBD & CBA, qui égaleroient les trois angles CAB, ACB, CBA, seroient égaux à deux angles droits (Article LVII.) & comme tout ce que nous venons de dire pourra également s'appliquer à quelque triangle que ce soit, on sera assuré de cette propriété générale que la somme des trois angles d'un triangle est constamment la même, & qu'elle est égale à deux droits, ou, ce qui revient au même, à 180 degrés.

La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

LXV.

Donc, pour conclure la valeur du

troiſiéme angle d'un triangle, lorſqu'on en aura meſuré deux, il faudra retrancher de 180 degrés le nombre de degrés que les deux angles feront enſemble : propriété qui donne une maniere bien commode de vérifier la meſure des angles d'un triangle, & dont on verra une infinité d'autres utilités, à meſure qu'on avancera. Nous nous contenterons ici d'en tirer les conſéquences les plus immédiates.

LXVI.

Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ; à plus forte raiſon ne peut-il avoir plus d'un angle obtus.

LXVII.

Si l'un des trois angles d'un triangle eſt droit, la ſomme des deux autres angles eſt toujours égale à un droit.

Ces deux propoſitions ſont ſi claires, qu'elles n'ont pas beſoin d'être démontrées.

LXVIII.

SI on prolonge un des côtés du triangle A B C, le côté A B, par exemple, l'angle extérieur C B E vaudra ſeul les deux angles intérieurs oppoſés B C A, C A B; car qu'à l'angle C B A, on ajoûte, ou les deux angles B C A & C A B, ou l'angle C B E, la ſomme ſera toujours égale à 180 degrés, ou à deux angles droits (Article L X I V.).

L'angle extérieur d'un triangle, vaut les deux angles intérieurs oppoſés.

LXIX.

CONNOISSANT un des angles d'un triangle iſocèle A B C, on connoît les deux autres.

FIG. 5.

Qu'on ait l'angle au ſommet A, il eſt clair que ſi on retranche le nombre de degrés que contiendra cet angle des 180 degrés, meſure des trois angles du triangle, la moitié de la ſomme qui reſtera ſera la meſure de chacun des angles B, C, pris ſur la baſe.

Un angle d'un triangle iſocèle donne les deux autres.

Si c'étoit un des deux angles B, C, pris ſur la baſe qu'on connût, le double de ſa valeur retranché de 180 degrés, donneroit l'angle au ſommet A.

LXX.

Les angles d'un triangle équilatéral, ſont chacun de 60 degrés.

COMME un triangle équilatéral n'eſt autre choſe qu'un triangle iſocèle auquel chacun de ſes côtés peut également ſervir de baſe, il eſt clair que ſes trois angles ſont néceſſairement égaux, & qu'ils valent chacun 60 degrés, tiers de 180 degrés.

LXXI.

Deſcription de l'exagone.

DE-là ſe tire aiſément la deſcription de l'exagone ou polygone de ſix côtés, que nous avions promiſe (Article XXIV.)

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en ſix parties égales, il faudra que cette ligne ſoit la corde d'un arc de 60 degrés, ſixiéme partie de 360 degrés, valeur de la circonférence entiere. Suppoſant donc que A B soit cette corde, & du centre I menant aux extrémités A & B les rayons AI & IB, l'angle A I B vaudra 60 degrés, & parce que les deux côtés AI & I B seront égaux, le triangle AIB sera isocèle. Donc l'angle au sommet étant de 60 degrés, chacun des deux autres angles vaudra aussi 60 degrés, moitié de 120. Donc (Article LXX.) le triangle A I B sera équilatéral. Donc AB égalera le rayon du cercle. D'où il suit, que pour décrire un exagone, il faudra ouvrir le compas d'un intervalle égal au rayon, & le porter six fois de suite sur la circonférence, & l'on aura les six côtés de l'exagone. Fig. 6.

LXXII.

L'Exagone A B C D E F décrit, on décrira facilement le dodécagone ou polygone de douze côtés.

Pour cela, on divisera l'arc A K B, ou l'angle AIB, en deux parties égales, La moitié de l'angle au centre de l'exagone donne l'angle au centre du dodécagone.

& AK, corde de la moitié de l'arc AKB, ſera un des côtés du dodécagone.

LXXIII.

Partager un angle en deux également.

Or pour partager l'arc AKB, en deux arcs égaux AK & KB, on fera la même opération que s'il s'agiſſoit de couper la corde AB en deux parties égales ; c'eſt-à-dire, que des points A & B, comme centres, & d'un intervalle quelconque, on décrira les arcs MLN, OLP, & par le point L, ſection des deux arcs, & par le centre I on menera la ligne LI, qui diviſera en deux & l'arc AKB, & la corde AB.

LXXIV.

Deſcription des polygones de 24, 48, &c. côtés.

Qu'on ſuive la méthode précédente, & qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux, la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs, ſera le côté du polygone de 24 côtés. On aura de même les polygones de 48, 96, 192, &c. côtés.

LXXV.

MAINTENANT pour décrire un octogone, c'est-à-dire, un polygone de 8 côtés, on commencera par tracer un quarré dans le cercle; ce qu'on fera, si, après avoir mené deux diamétres AIB & CIE, qui se coupent à angles droits, on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE, AE.

Description de l'octogone.

FIG. 7.

Car à cause de la régularité du cercle, & de l'égalité des quatre angles que forment les perpendiculaires AIB, CIE, les quatre côtés AC, CB, BE, EA, seront nécessairement égaux, & se trouveront également panchés les uns sur les autres; ce qui ne pourra convenir qu'au quarré.

Le quarré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, &c. en deux parties égales ; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

Et des polygones de 16, 32, &c. côtés.

Qu'on partageât de même chacun des arcs CK, KB, &c. en 2, en 4, en 8, &c. parties égales, on auroit les polygones de 16, 32, 64, &c. côtés.

ÉLÉMENS
DE
GÉOMETRIE.

SECONDE PARTIE.

De la Méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

SI on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on est parvenu à mesurer les Terrains, on a dû reconnoître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres, fournissoient des remarques dignes d'attention par elles-mêmes; indépendamment de l'utilité dont elles pouvoient être dans la pratique; & il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers Géometres à pousser plus loin leurs découvertes; car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Ce qui a dû contribuer encore au progrès de la Géométrie, c'est le goût qu'on a naturellement pour cette précision rigoureuse, sans laquelle l'esprit n'est jamais satisfait.

Aussi lorsqu'en mesurant les figures, on s'est apperçu que dans une infinité de cas, les échelles & les demi-cercles ne donnoient que des valeurs approchées des lignes ou des angles, on a cherché des méthodes qui suppléassent au défaut de ces instrumens.

Ici nous reprendrons les figures rectilignes; mais dans les opérations que nous ferons pour découvrir leurs justes rapports, nous ne nous servirons que de la régle & du compas.

Il arrive souvent qu'on a besoin ou de rassembler dans une même figure, plusieurs figures qui lui soient semblables, ou de décomposer une figure en d'autres figures de même espece ; ce qu'on peut faire en opérant d'abord sur les rectangles, puisque toutes les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, & que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même hauteur & même base.

I.

POUR comparer les rectangles, il faut sçavoir changer un rectangle quelconque en un autre qui ait la même superficie, mais dont la hauteur soit différente. Car lorsque deux rectangles seront changés en deux autres de même hauteur, ils ne différeront plus que par leurs bases ; le plus grand sera celui qui aura la plus grande base, & il contiendra le plus petit de la même maniere que sa base contiendra celle du plus petit rectangle; ce qu'on énonce ordinairement ainsi : deux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

Deux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

II.

POUR ajoûter ces deux rectangles, il ne faudra que les poser l'un à côté de l'autre.

III.

IL ne sera pas plus difficile de retrancher le plus petit du plus grand.

IV.

ET pour partager un rectangle en un nombre déterminé de rectangles égaux, il faudra couper sa base en un pareil nombre de parties égales, ensuite élever des perpendiculairer sur les points de division.

V.

MAINTENANT soit proposé de changer le rectangle ABCD en un autre BFEG, qui ait la même superficie, & dont la hauteur soit BF, on remarquera que puisque sa valeur sera le produit de sa hauteur par sa base, il faudra que le rectangle cherché BFEG, dont la hauteur sera plus grande que BC, ait sa base plus petite que AB : c'est-à-dire, que si BF, par exemple, est double de BC, il faudra que BG ne soit que la moitié de AB.

PLAN. VII. FIG. 1.

Maniere de changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée.

Si BF étoit le triple de BC, BG ne seroit que le tiers de AB.

On verroit de même que si BF, au lieu de contenir BC un nombre exact de fois, le contenoit avec fraction, comme deux fois & un tiers, le rectangle BFEG ne pourroit être égal au rectangle ABCD, que sa base BG ne fût aussi contenue deux fois & un tiers dans labase AB. Et en général, il sera aisé de voir qu'afin que deux rectangles A B C D, B F E G, soient égaux, il faudra que la base B G de l'un soit contenue dans la base A B de l'autre, comme la hauteur B C dans la hauteur B F.

Il ne s'agira donc plus que de diviser la ligne A B, de maniere que A B soit à G B, comme B F à B C; ce qui se fera (I. Part. Art. XLI.) en menant la ligne F A, & du point donné C, la parallele C G.

V I.

Seconde maniere de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.

Fig. 2.

POUR changer le rectangle ABCD en un autre rectangle B F E G, qui ait une hauteur donnée B F, on peut employer une méthode moins naturelle que la précédente, mais plus commode. Ayant prolongé A D, jusqu'à ce qu'elle rencontre en I la droite F E I, menée par le point F, parallelement à AB, on tirera la diagonale B I, & par le point O, où elle rencontrera le côté DC, on menera GOE, parallele à FB,

& le rectangle B F E G sera égal au rectangle A B C D.

Pour le prouver, il suffira de faire voir qu'en ôtant des rectangles A B C D, BFEG, la partie commune OCBG, le rectangle A D O G égalera le rectangle E O C F.

Or si on fait attention à l'égalité des deux triangles I B F, I B A, on verra qu'en retranchant de ces triangles des quantités égales, les restes seront égaux. Mais le triangle IAB deviendra le rectangle ADOG, si on en retranche les deux triangles IDO, OGB; de même le triangle IBF deviendra le rectangle E O C F, par le retranchement des triangles IEO, OBC, égaux aux deux premiers. Donc les deux rectangles A D O G, E O C F, reste des deux triangles, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les rectangles A B C D, B F E G.

VII.

Cette seconde maniere de changer On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second à la hauteur du premier.

un rectangle en un autre, confirme le principe que suppose la premiere, & qui auroit pû sembler n'être appuyé que sur une simple induction.

De l'égalité des deux rectangles A B C D, B F E G, on avoit conclu qu'il falloit que AB fût à B G, comme BF à B C; c'est ce qu'on peut maintenant prouver par l'Article précédent.

Car les triangles I A B & O G B, étant manifestement semblables, la base AB du grand sera à la base GB, du petit, comme la hauteur I A à la hauteur O G, ou comme B F à B C leurs égales. Donc A B sera à G B, comme B F à B C, conformément au principe de l'Article V.

VIII.

De la maniere dont on vient de s'y prendre pour démontrer que de l'égalité des deux rectangles ABCD, BF EG, il suit que la hauteur BF est à la hauteur BC, comme la base A B, à la la base B C, on démontreroit aussi que lorsque quatre lignes BF, BC, AB, BG, seront telles que la premiere sera à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, le rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la premiere & la quatriéme de ces lignes, seroit égal au rectangle qui auroit pour hauteur & pour base la seconde & la troisiéme.

Si quatre lignes sont telles que la premiere soit à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, le rectangle formé par la premiere & par la quatriéme sera égal à celui que forment la seconde & la troisiéme.

I X.

LORSQUE quatre quantités, ainsi que les lignes précédentes BF, BC, AB, BG, sont telles que la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, on dit que ces quatre quantités sont en proportion, ou qu'elles forment une proportion. Ainsi, 6, 9, 18, 27, sont en proportion, parce que 6 est contenu dans 9, de la même maniere que 18 est contenu dans 27. Il en est de même de 15, 25, 75, 125, &c.

Quatre quantités, dont la premiere est à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, sont dites former une proportion.

X.

Des quatre termes d'une propor tion, le premier & le quatriéme, sont nommés extrêmes ; on nomme moyens le second & le troisiéme.

LA premiere & la quatriéme des quatre quantités d'une proportion, s'appellent termes extrêmes, ou simplement, extrêmes ; la seconde & la troisiéme se nomment termes moyens, ou simplement, moyens.

En se servant des définitions précédentes, il est clair que les propositions renfermées dans les Articles VII. & VIII. s'énonceront ainsi.

XI.

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

LORSQUE quatre quantités sont en proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

XII.

Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre termes forment une proportion.

SI quatre quantités sont telles que le produit des extrêmes soit égal au produit des moyens, ces quatre quantités seront en proportion.

XIII.

Il eſt à propos de faire beaucoup d'attention aux deux Articles précédens; ils ſont d'un grand uſage : on en déduit, entr'autres choſes, la démonſtration de la Régle qu'on appelle en Arithmétique, Régle de trois. Pour donner une idée de cette Régle, nous prendrons un exemple; c'eſt la maniere la plus ſimple de ſe faire entendre. De-là on tire la Régle de trois.

Suppoſons que 24 Ouvriers ayent fait 30 toiſes d'ouvrages en un certain temps, on demande combien 64 Ouvriers en feront dans un temps égal.

Il eſt évident que pour réſoudre la queſtion, il faut trouver un nombre qui ſoit à 64, dans la même raiſon que 30 à 24. Or, ſuivant ce que nous avons vû, ce nombre ſera tel que ſon produit par 24 égalera le produit de 30 par 64. Mais le produit de 30 par 64 eſt 1920. Donc le nombre cherché ſera celui qui étant multiplié par 24 donnera 1920.

Or pour peu qu'on ait d'idée des opérations de l'Arithmétique, on doit aisément s'appercevoir qu'il faudra que ce nombre soit le quotient de la division de 1920 par 24, c'est à dire 80.

Ou la maniere de trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés.

En général, pour trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers seront donnés, il faudra prendre le produit du second & du troisiéme, & diviser ce produit par le premier terme de la proportion.

XIV.

Un exemple aussi simple que celui que nous venons de choisir, ne fait peut-être pas assez sentir la nécessité de la Méthode précédente. Le bon sens seul feroit trouver le nombre demandé. On voit que 30 surpasse 24 d'un quart, & qu'ainsi il faut que le nombre cherché surpasse 64 d'un quart; ce qui donne 80. Mais il y a des cas où l'on pourroit chercher plus long-temps le rapport des deux premiers nombres de la proportion.

Par exemple, on veut un quatriéme terme proportionnel aux trois nómbres 259, 407, 483.

Pour le trouver par la Méthode précédente, il faut multiplier 483 par 407, & diviser 196581, qui en est le produit par 259; ce qui donne 759 pour le quatriéme terme cherché.

Si on s'y étoit pris autrement pour trouver ce terme, ce n'auroit pû être qu'en tâtonnant. On auroit bien pû découvrir, par exemple, que 148, excès de 407 sur 259, contient quatre des septiémes parties de 259; qu'ainsi il falloit ajoûter de même à 483, le nombre 276, qui contient quatre de ses septiémes parties. Mais la généralité & la sûreté de la Méthode précédente, nous sauve toujours de l'embarras des tâtonnemens, qui même deviendroient inutiles dans bien des cas.

X V.

LORSQU'ON aura deux quarrés à

ajoûter, leur addition se fera de la même maniere que celle de deux rectangles, puisque les quarrés sont des rectangles dont la hauteur & la base sont égales. On changera donc un des quarrés, le plus petit, par exemple, en un rectangle qui aura le côté du grand pour hauteur, & les deux quarrés ne feront plus qu'un rectangle. On pourroit donner de même la hauteur du petit quarré à tous les deux, ou une autre hauteur à volonté; mais ce qu'on ne pouvoit guéres manquer de se proposer, lorsqu'on a voulu réduire ainsi deux quarrés en une seule figure, c'étoit de faire un quarré égal à deux autres. Problême dont il étoit aisé de trouver la solution suivante.

XVI.

FIG. 3. Faire un quarré double d'un autre.

SUPPOSONS d'abord que les deux quarrés ABCD, CBFE, dont on se propose de faire un seul quarré, soient égaux entr'eux; il est aisé de remarquer que ſi on tire les diagonales AC & CF, les triangles ABC & CBF, feront enſemble la valeur d'un quarré. Donc en tranſportant au-deſſous de AF les deux autres triangles DCA & CEF, on fera le quarré ACFG, dont le côté AC ſera la diagonale du quarré ABCD, & dont la ſuperficie égalera celle des deux quarrés propoſés; ce qui n'a pas beſoin d'être démontré.

XVII.

SUPPOSONS préſentement qu'on veuille faire un quarré égal à la ſomme des deux quarrés inégaux A D C *d*, C F E *f*, ou, ce qui revient au même, qu'on propoſe de changer la figure A D F E *f d* en un quarré.

FIG. 4. Faire un quarré égal à deux autres pris enſemble.

En ſuivant l'eſprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'eſt point poſſible, de trouver dans la ligne D F, quelque point H, tel,

1°. Que tirant les lignes AH & HE, & faiſant tourner les triangles A D H, EFH, autour des points A & E, jusqu'à ce qu'ils ayent les positions A*dh*, E*fh*; ces deux triangles se joignent en *h*.

2°. Que les quatre côtés AH, HE, E*h*, *h*A, soient égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH & CF, il suit premiérement qne si on fait tourner ADH autour de son angle A, ensorte qu'on lui donne la position A*dh*, le point H arrivé en *h* sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH & CF, il suit encore que HF égalera DC, & qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position E*fh*, le point H arrivera au même point *h*, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFE*df* sera changée en une figure à quatre côtés

A H E *h*. Il ne s'agit donc plus que de voir ſi les quatre côtés ſeront égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés eſt évidente, puiſque A *h* & *h* E ſeront les mêmes que A H & H E, & que l'égalité de ces deux derniers ſe tirera de ce que D H étant égale à C F ou à F E, les deux triangles A D H, H E F, ſeront égaux & ſemblables.

Il ne reſte donc plus qu'à voir ſi les côtés de la figure A H E *h* formeront des angles droits; c'eſt de quoi il eſt aiſé de s'aſſurer, en remarquant que pendant que H A D tournera autour de A, pour arriver en *h* A *d*, il faudra que le côté AH faſſe le même mouvement que le côté AD. Or le côté A D fera un angle droit DA*d*, en devenant A*d*. Donc le côté AH fera auſſi un angle droit H A *h* en devenant A *h*.

Quant aux autres angles H, E, *h*, il eſt viſible qu'ils ſeront néceſſairement droits. Car il ne ſeroit pas poſſible qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits.

XVIII.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est son grand côté.

Et le quarré de ce côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres.

SI on remarque que les deux quarrés A D C *d*, C F E *f* sont faits, l'un sur A D, moyen côté du triangle A D H, l'autre sur E F, égal à D H, petit côté du même triangle A D H; & que le quarré A H E *h*, égal aux deux autres, est décrit sur le grand côté A H, qu'on nomme communément l'hypoténuse du triangle rectangle; on découvrira bien-tôt cette fameuse propriété des triangles rectangles, que le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

XIX.

FIG. 5. & 6.

D'où se tire une maniere simple de réduire

DONC lorsque de deux quarrés H D K L, A B C D, on n'en voudra faire qu'un seul, il sera inutile de les mettre à côté l'un de l'autre, & de les décomposer, comme on a fait dans l'Article XVII. Il suffira de placer leurs côtés A D, D H, de façon qu'ils fassent un angle droit, & de tirer ensuite la ligne AH, puisqu'alors cette ligne sera le côté du quarré cherché A H I E.

deux quarrés en un seul.

FIG. 7.

X X.

Si on avoit deux figures semblables DAFGM, DHPON, & qu'on se proposât d'en faire une troisiéme, égale en superficie aux deux autres prises ensemble, il ne faudroit que poser les bases AD, HD de ces figures, sur les deux côtés d'un angle droit A D H, & l'hypoténuse A H du triangle A D H seroit la base de la figure demandée.

FIG. 8. & 9.

FIG. 10.

Si les côtés d'un triangle rectangle servent de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypoténuse égalera les deux autres prises ensemble.

Pour en avoir la raison, qu'on imagine les quarrés A B C D, D H K L, A H I E, faits sur les bases des trois figures semblables, on verra d'abord par l'Article XVIII. que le quarré AHIE vaudra lui seul les deux autres quarrés A B C D, D H K L. Or les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, (I. Part. Art. XLVII.). Donc les trois quarrés A B C D, D H K L, A H I E, ſe trouveront les mêmes parties des figures DAFGM, DHPON, AHQRS.

D'où il ſera aiſé de conclure que la figure A H Q R S vaudra les deux autres. Suppoſons, par exemple, que chacun de ces quarrés fût la moitié de la figure dans laquelle il ſeroit renfermé, perſonne ne douteroit que la figure A H Q R S ne fût égale aux deux autres, puiſque ſa moitié vaudroit ſeule les moitiés des deux figures D H P O N, D A F G M. Il en ſeroit de même ſi les quarrés ABCD, D H K L, A H I E, étoient les deux tiers, les trois quarts, &c. des figures D A F G M, D H P O N, A H Q R S.

XXI.

Réduire

SI on ſe propoſoit d'ajoûter trois,

quatre, &c. figures semblables, ou, ce qui revient au même, trois, quatre, &c. quarrés, la méthode seroit toujours la même. Qu'on voulût, par exemple, en ajoûter trois, on feroit d'abord un quarré égal aux deux premiers; ensuite à ce nouveau quarré on ajoûteroit le troisiéme, & par-là on auroit un quarré égal aux trois quarrés proposés.

plusieurs figures semblables à une seule.

XXII.

De-là il suit que si on se proposoit de faire un quarré, cinq, six, &c. fois plus grand qu'un autre, il suffiroit de suivre la méthode précédente pour résoudre ce problême, & même son inverse; c'est-à-dire, pour faire un quarré qui ne seroit que la cinquiéme, la sixiéme, &c. partie d'un quarré proposé; ce qui demanderoit simplement qu'on se rappellât la maniére de trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données. Mais dans la troisiéme Partie de cet Ouvrage, nous donnerons une méthode plus directe & plus commode pour résoudre ces sortes de problêmes.

XXIII.

L'ADDITION des figures semblables fournit une preuve décisive de la nécessité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une maniere qui puisse se démontrer rigoureusement.

Supposons, par exemple, qu'on eût à faire un quarré double d'un autre; ceux qui ne sçauroient pas la méthode donnée dans l'Article XVI. s'y prendroient vrai-semblablement de la maniere suivante.

Ils diviseroient le côté du quarré donné dans un grand nombre de parties, en 100 parties par exemple; ensuite multipliant 100 par 100, ils trouveroient 10000 pour la valeur du quarré; ce qui donneroit 20000 pour celle du quarré demandé.

Mais de la valeur de celui-ci, ils ne tireroient pas la maniere de le décrire; il faudroit qu'ils eussent son côté exprimé par un nombre, & que ce nombre fût tel qu'en le multipliant par lui-même, c'est-à-dire, en le quarrant, le produit donnât 20000.

Le produit qui résulte de la multiplication d'un nombre par lui-même est le quarré de ce nombre.

Or ce nombre dont ils auroient besoin, ce seroit en vain qu'ils le chercheroient sur une échelle dont les parties seroient des centiémes du côté du premier quarré; car 141, multiplié par lui-même, donneroit 19881, & 142 donneroit 20164; ce qui s'écarteroit de part & d'autre du nombre qu'ils devroient trouver.

Peut-être pourroient-ils croire qu'en partageant le côté du quarré donné en plus de 100 parties, ils trouveroient un nombre déterminé de ces parties pour le côté du quarré double du premier; mais quelques essais qu'ils pûssent faire, ils trouveroient toujours que ce seroit en vain qu'ils chercheroient deux nombres, dont un exprimeroit le côté, ou, suivant le langage ordinaire, la racine d'un quarré, & l'autre, le côté, ou la racine du quarré double.

La racine d'un quarré est le nombre qui, multiplié par lui même, donne le quarré.

XXIV.

En effet, on démontre en Arithmétique, que si deux nombres ne sont pas multiples l'un de l'autre; c'est-à-dire, si l'un ne contient pas l'autre un nombre exact de fois, le quarré du plus grand ne sera pas non plus multiple du quarré du plus petit. Ainsi 5, par exemple, ne pouvant pas se diviser exactement par 4, son quarré 25 ne pourra pas, non plus, se diviser par 16 quarré de 4.

Un nombre est multiple d'un autre, lorsqu'il le contient plusieurs fois exactement.

Donc si on quarre deux nombres, dont l'un soit plus grand que l'autre, & en soit cependant moins que le double, il viendra, par cette opération, deux

deux autres nombres, dont l'un sera moindre que le quadruple de l'autre, mais sans en pouvoir être ni le double, ni le triple. Donc, qu'on divise le côté d'un quarré en tel nombre de parties qu'on voudra, le côté du quarré double, qui, suivant ce qui est démontré dans l'Article XVI. sera la diagonale de ce quarré, ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties; ce qu'on exprimeroit dans le langage des Géometres, en disant, que le côté du quarré & sa diagonale sont incommensurables.

Le côté d'un quarré & sa diagonale, sont incommensurables.

XXV.

Autres lignes incommensurables.

On peut encore remarquer qu'il y a quantité d'autres lignes qui n'ont aucune commune mesure.

Car, qu'on écrive les deux suites;

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.

dont la premiere exprime les nombres naturels, & l'autre leurs quarrés, on verra que comme les nombres qui seront entre 4 & 9, entre 9 & 16, entre 16 & 25, &c. n'auront aucune racine, les côtés de deux quarrés, dont l'un sera ou triple, ou quintuple, ou sextuple, &c. de l'autre, seront incommensurables entr'eux.

XXVI.

Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourroit-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionalité des figures semblables. On a vû qu'en comparant ces figures (I. Part. Articles XXXIV. & s.), nous avons toujours supposé, qu'elles avoient une échelle qui pouvoit également servir à mesurer toutes leurs parties : supposition qui maintenant paroîtroit devoir être limitée, à cause de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions sur nos pas, & que nous examinions si nos propositions, pour être vrayes, n'auroient pas elles-mêmes besoin de quelques modifications.

XXVII.

REPRENONS d'abord ce qui est dit dans l'Article XXXIX. de la premiere Partie, & voyons s'il est exactement vrai que les triangles tels que *a b c*, A B C, dont les angles sont les mêmes, ayent leurs côtés proportionnels. Supposons, par exemple, que la base du premier étant *a b*, celle du second soit une droite A B, égale à la diagonale d'un quarré dont *a b* seroit le côté, & cherchons si, dans cette supposition, le rapport de A C à *a c*, sera le même que celui de A B à *a b*. FIG. 11. & 12.

Quoique, suivant ce que nous avons vû, quelque grand que pût être le nombre des parties qu'on ſuppoſeroit arbitrairement dans *ab*, A B ne pourroit jamais contenir un nombre exact de ces parties, il eſt cependant aiſé de s'appercevoir que plus ce nombre ſera grand, plus A B approchera d'être méſuré exactement avec les parties de *ab*. Suppoſons *ab* diviſé en 100 parties; ce que AB contiendra de ces parties ſe trouvera entre 141 & 142 (Article XXIII.). Contentons-nous de 141, & négligeons le petit reſte. Il eſt clair (I. Part. Art. XXXIX.) que A C contiendra auſſi 141 des parties de *ac*.

Suppoſons enſuite *ab* diviſé en 1000 parties, ce que AB contiendra des parties, de *ab*, ſera entre 1414 & 1415; ne prenons que 1414, & négligeons encore le reſte, on trouvera de même que A C contiendra 1414 des milliémes parties de *ac*, & qu'en général AC contiendra toujours autant de parties de *ac*, avec un reſte, que AB contiendra de parties de *ab*, avec un reste.

De plus, ces restes comme nous venons de l'observer, seront de part & d'autre d'autant plus petits, que le nombre des parties de *ab* sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de *ab* poussée jusqu'à l'infini. Donc on pourra dire alors que le nombre des parties de *ac* que contiendra A C égalera le nombre des parties de *ab* que contiendra A B, & qu'ainsi AC sera à *ac*, comme AB, à *ab*.

Les triangles & les figures semblables, ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés sont incommensurables.

Donc nous avons rigoureusement démontré que lorsque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, soit que leurs côtés ayent une commune mesure, ou qu'ils n'en ayent pas.

La proposition (I. Part. Art. XLV.) d'où se tire la proportionnalité des lignes qui se répondent dans les figures semblables, se justifieroit de la même façon.

XXVIII.

Et ces figures sont toujours entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

ON verra par de pareils raisonnemens que les propositions expliquées dans les Articles XLIV. & XLVII. de la premiere Partie, où l'on a fait voir que les aires des triangles & des figures semblables, ont entr'elles la même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues, sont toujours vraies en général, même lorsque les côtés de ces figures sont incommensurables.

Prenons pour exemple les triangles semblables A B C, *a b c*, dont nous supposerons les hauteurs incommensurables, avec leurs bases; dans ce cas, il n'y aura aucun quarré, quelque petit qu'il soit, qui puisse servir de commune mesure à ces triangles, & aux quarrés faits sur leurs bases; c'est-à-dire, que les aires *a b c* & *a b d e* seront incommensurables entr'elles, ainsi que les aires A B C & A B D E; mais il n'en ſera pas moins vrai que le triangle ABC ſera au quarré ABDE, comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

C'eſt de quoi on s'aſſurera, en obſervant que plus les parties de l'échelle dont on ſe ſervira pour meſurer AB & CK ſeront ſuppoſées petites, plus on approchera d'avoir les nombres qui exprimeront le rapport de ABC à ABDE. Donc diviſant toujours l'échelle du triangle *abc* dans le même nombre de parties, & négligeant les reſtes, on verra que les mêmes nombres ſerviroient toujours à exprimer le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, & celui du triangle *abc* au quarré *abde*. Qu'on pouſſe, par la penſée, la diviſion des échelles juſqu'à l'infini, les reſtes deviendront abſolument nuls; & l'on pourra dire, que les nombres qui exprimeroient le rapport du triangle *abc* au quarré *abde*, exprimeroient auſſi le rapport du triangle ABC au quarré ABDE,

& qu'ainsi le triangle *abc* sera au quarré *abde*, comme le triangle ABC au quarré ABDE.

Il en seroit de même de toutes les figures semblables.

ÉLÉMENS
DE
GÉOMETRIE.

TROISIEME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires, & de leurs propriétés.

APRE'S être parvenu à mesurer toutes sortes de figures rectilignes, on a voulu avoir la maniere de déterminer celles que bornent des lignes courbes. Les terrains, & en général, les espaces dont il s'agit de chercher la mesure, ne sont pas toujours terminés par des lignes droites.

Souvent les figures curvilignes, & les figures mixtes, c'est-à-dire, celles qui sont bornées par des lignes droites, & par des lignes courbes, peuvent se réduire à des figures entiérement rectilignes, comme nous l'avons déja dit; car qu'on eût à mesurer une figure telle que ABCDEFG, on pourroit prendre le côté A D pour un assemblage de deux, de trois, &c. lignes droites; substituant ensuite la droite F D à la courbe F D E, on auroit la figure rectiligne A B C D F G, qui différeroit si peu de la figure mixte, que l'une pourroit être prise pour l'autre, sans erreur sensible.

PLAN. VIII FIG. 1.

On opéreroit donc sur ces figures, en suivant les méthodes précédentes. Mais les Géometres ne s'accommoderoient guéres de ces sortes d'opérations : ils n'en veulent que de rigoureuses; d'ailleurs, il y a tel cas, où la transformation d'une figure curviligne, ou mixte, en une figure entiérement rectiligne, demanderoit qu'on partageât son contour en un si grand nombre de parties, qu'alors la méthode commune deviendroit impraticable; aussi ne seroit-on pas tenté de la suivre, si on avoit à mesurer un espace tel que Z (Fig. 7.), ou le cercle entier X (Fig. 3.); il faudroit prendre une autre voie pour trouver la mesure de ces sortes d'espaces. Ici nous ne nous attacherons qu'à ceux dont les contours renferment des arcs de cercle.

I.

SUPPOSONS d'abord qu'on ait l'aire du cercle X à mesurer. On observera qu'en lui inscrivant un polygone régulier B C D E, &c. plus ce polygone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or on a vû que l'aire de cette figure (I. Part. Fig. 3.

Art. XXII.) eſt égale à autant de fois le produit du côté B C par la moitié de l'apothème A H, que le polygone a de côtés; ou, ce qui revient au même, que cette aire a pour meſure le produit du contour entier B C D E, &c. par la moitié de l'apothème. Donc, puiſqu'en pouſſant juſqu'à l'infini le nombre des côtés du polygone, ſon aire, ſon contour, ſon apothème, égaleront l'aire, le contour & le rayon du cercle, la meſure du cercle ſera le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.

La meſure du cercle, eſt le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.

II.

Il ſuit de-là que la ſuperficie d'un cercle B C D, eſt égale à celle d'un triangle A B L, dont la hauteur ſeroit le rayon A B, & la baſe une droite B L égale à la circonférence.

Fig. 4.

L'aire du cercle eſt égale à un triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe une droite égale à la circonférence.

III.

Il ne s'agit donc que d'avoir le

rayon & la circonférence. A l'égard du rayon, il est aisé de le mesurer; il n'en est pas de même de la circonférence : cependant, pour avoir sa mesure, on peut envelopper le cercle d'un fil; ce qui, dans beaucoup d'occasions, suffit pour la pratique.

Mais, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à mesurer géométriquement la circonférence du cercle, c'est-à-dire, à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent milliémes, à des millioniémes près, & même on en approche tant qu'on veut, sans que pour cela, on puisse le déterminer rigoureusement.

IV.

L'APPROXIMATION la plus simple qu'on ait trouvée, est celle qu'on tient d'Archiméde. Le diamétre ayant 7 parties, ce que la circonférence contient de ces parties est entre

Le diamétre d'un cercle ayant 7

parties, la circonférence en a près de 22.

21 & 22; & l'on sçait qu'elle approche beaucoup plus de 22 que de 21.

V.

Les circonférences des cercles, sont entr'elles, comme leurs rayons.

Au reste, il est clair que si on sçavoit exactement le rapport d'une seule circonférence à son rayon, on sçauroit celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons; ce rapport devant être le même dans tous les cercles. Cette proposition paroît si simple, qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée; puisqu'on sent que quelles que fussent les opérations qu'on auroit faites pour mesurer une circonférence, en se servant des parties de son rayon, il faudroit qu'on fît les mêmes opérations, pour mesurer toute autre circonférence; qu'ainsi on lui trouveroit le même nombre de parties de son rayon.

VI.

Il est évident que les cercles ont encore la propriété générale de toutes les figures semblables (I. Part. Art. XLVII.); je veux dire, que leurs surfaces sont en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues; mais comme, pour appliquer cette proposition aux cercles, on ne pourra prendre leurs côtés, il faudra se servir des rayons, alors on verra que les cercles auront leurs aires proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

Les aires des cercles sont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

S'il ne paroissoit pas d'abord que cette proposition dût suivre de ce qui est dit dans l'Article XLVII. de la premiere Partie, & qu'on voulût en avoir une démonstration particuliere, on feroit attention qu'il reviendroit absolument au même, de comparer les aires de deux cercles BCD, EFG, ou celles des triangles ABL, AEM, qui leur seroient égaux (Article II.) en supposant que leurs bases BL & EM, fussent les développemens des circonférences BCD & EFG, & que leurs hauteurs fussent les rayons

FIG. 4. & 3.

AB & AE. Or par l'Article précédent, ces triangles seroient semblables; donc leurs aires seroient en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues AB, AE, rayons des cercles BCD & EFG. Donc, &c.

VII.

Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypoténuse vaut les deux autres pris ensemble.

LES cercles, à cause de leur similitude, auront aussi, de même que les figures semblables, cette propriété, que si, en prenant les trois côtés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon sera l'hypoténuse, égalera les deux autres pris ensemble.

Ainsi, on pourra toujours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, & cela sans prendre la peine de mesurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un bassin qui contienne autant d'eau que deux autres, la profondeur étant la même; qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau

tuyau de fontaine, par lequel il s'écoule autant d'eau que par des tuyaux donnés ; on y réussira sans peine, en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

VIII.

Fig. 6.

Une couronne est l'espace enfermé entre deux cercles concentriques.

Si on avoit à mesurer la superficie d'une couronne V, figure enfermée entre deux cercles concentriques EFG, BCD, c'est-à-dire, entre deux cercles, qui auroient un centre commun ; ce qui se présenteroit d'abord, ce seroit de mesurer séparement les superficies des deux cercles, & de retrancher la plus petite de la plus grande. Mais il est aisé de s'appercevoir que le problême peut se résoudre d'une maniere plus commode pour la pratique.

Imaginons un triangle ABL, qui ait le rayon AB pour hauteur, & dont la base soit une droite BL, égale à la circonférence BCD. Si on mene par le point E, la droite EM parallele à BL, cette droite ſera égale à la circonférence EFG; car à cauſe de la ſimilitude des triangles AEM, ABL, il y aura même proportion entre AB & BL, qu'entre AE & EM. Or par la ſuppoſition, BL égalera la circonférence dont AB ſera le rayon; donc EM égalera auſſi la circonférence qui aura pour rayon la ligne AE, partie de AB. Il en ſeroit de même de toute autre ligne KI, parallele à BL; elle ſeroit toujours égale à la circonférence dont AK ſeroit le rayon.

De l'égalité ſuppoſée entre la circonférence EFG, & la droite EM, ſuit néceſſairement l'égalité du triangle AEM au cercle EFG; donc il faut que l'eſpace rectiligne EBLM, ſoit égal à la couronne propoſée V. Or cet eſpace EBLM, ſe peut aiſément changer en un rectangle EBPH, en coupant ML en deux parties égales MI & IL, & en menant à BL par le point I la perpendiculaire HIP, qui donnera le triangle ajoûté MHI, égal au triangle retranché PLI.

Donc ſi par le point I on mene à BL la parallele IK, qui coupera EB en deux parties égales, la couronne propoſée, égale à l'eſpace EBLM ou à EBPH, aura pour meſure le produit de EB par KI, circonférence dont AK ſera le rayon.

Pour meſurer une couronne, il faut multiplier ſa largeur par la circonférence moyenne.

Donc pour meſurer une couronne V, il faut multiplier ſa largeur EB par la circonférence KOQ, dite moyenne entre les circonférences BCD & EFG, parce qu'elle ſurpaſſe la petite circonférence EFG, ou la droite EM, d'une quantité MH, égale à PL, quantité dont elle eſt ſurpaſſée par la grande circonférence BCD, ou par la droite BL.

IX.

LORSQU'IL s'agira de meſurer une figure Y, compoſée d'arcs de cercles FIG. 2.

différens, & de lignes droites, ou une figure Z, uniquement composée d'arcs de cercles ; toute la difficulté se réduira à mesurer des segmens de cercle, c'est-à-dire, des espaces tels que ABCE*, terminés par un arc ABC & par la corde AC. Car les figures entierement composées d'arcs de cercles, ou d'arcs & de lignes droites, peuvent toutes être considérées comme des figures rectilignes, augmentées ou diminuées de certains segmens.

FIG. 7.

Le segment du cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde.

* FIG. 8.

La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment.

X.

LA mesure d'un segment quelconque ABCE est facile à trouver, lorsqu'on sçait celle du cercle ; car qu'on tire les lignes AT, CT, au centre T de l'arc, on formera une figure ABCT, appellée secteur, dont l'aire sera au cercle, comme l'arc ABC à la circonférence entiére, & qui, par conséquent, aura pour mesure le produit de la moitié du rayon AT par l'arc ABC:

Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons, & par l'arc qu'ils comprennent.

Sa mesure, & celle du segment.

or le secteur étant déterminé, il ne faudra plus qu'en retrancher le triangle ACT, pour avoir le segment ABCE.

X I.

COMME il arrive assez souvent que lorsqu'on se propose de mesurer une figure telle que Y, on n'a pas le centre de l'arc HIK, & que cependant, sans ce centre, on ne sçauroit mesurer la figure, puisque la méthode précédente exige la connoissance du rayon, il faut que nous cherchions le centre d'un arc de cercle quelconque. FIG. 12.

Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.

Soit ABC * l'arc de cercle proposé, si on prend à volonté deux points A & B sur cet arc, & que de ces points, comme centres, on décrive les quatre arcs *goi*, *foh*; *lpk*, *mpn*, les deux premiers, d'un rayon quelconque, & les deux autres, ou de ce même rayon, ou de tel autre rayon qu'on voudra; il est clair que le centre cherché de l'arc ABC, sera sur la ligne *op*, qui join-

* FIG. 9.

dra les points d'interſections o, p.

Choiſiſſant enſuite un troiſiéme point C, ſur l'arc ABC, & ſe ſervant de B & de C, de la même maniere qu'on s'eſt ſervi de A & de B, on aura une droite qr, ſur laquelle devra encore ſe trouver le centre demandé. Donc ce centre ſera le point de rencontre T, des lignes op, qr.

XII.

Ainsi, quelqu'arrangement qu'on donne à trois points, pourvû qu'on ne les place pas en ligne droite, on pourra toujours les lier par un arc de cercle, ou, ce qui revient au même, quelle que ſoit la proportion des côtés AC, BC, d'un triangle ACB, avec ſa baſe, on pourra toûjours circonſcrire un cercle à ce triangle.

Fig. 10.

XIII.

La méthode que nous venons de donner, pour circonſcrire un cercle à un triangle, étant appliquée successive- ment à différens triangles ACB, AEB, AGB, plus ou moins élevés à l'égard de leur base AB, on s'apperçoit qu'en passant d'un triangle ACB, dont l'angle au sommet est fort aigu, à d'autres triangles AEB, AGB, dont l'angle au sommet est plus ouvert, le centre du cercle circonscrit s'approche continuellement de AB, & que ce centre passe ensuite au dessous de AB, lorsque l'angle au sommet AGB a atteint une certaine ouverture. Or voyant passer ce centre au dessous de AB, après l'avoir vu au dessus, il doit venir dans l'esprit, ce me semble, de chercher de quelle espece est le triangle AFB, lorsque le cercle circonscrit a son centre sur AB même. FIG. 10. & 11. FIG. 12

Pour connoître ce triangle AFB, on commencera par remarquer que dans ce cas particulier, la portion du cercle circonscrite au triangle doit être exactement un demi-cercle : en effet le centre du cercle devant ſe trouver ſur la baſe AB, dont les deux extrémités ſont par la ſuppoſition dans la circonférence, le centre M ne pourra pas manquer d'être ſitué préciſement au milieu de AB, de ſorte que AB ſera néceſſairement un diametre.

Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle, on tire deux droites aux extré[illegible]u diamétre, on aura un angle droit.

On verra enſuite que de quelque point F du demi-cercle, qu'on tire les lignes FA, FB, l'angle AFB ſera droit. Car menant FM, les deux triangles AFM, MFB, ſeront iſocéles; donc les deux angles AFM, MFB, ſeront reſpectivement égaux aux angles FAM, FBM, ou, ce qui revient au même, l'angle total AFB égalera la ſomme des deux angles FAM, FBM; mais les trois angles AFB, FAM, FBM, pris enſemble, valent deux droits. Donc l'angle AFB ſera droit.

Ainſi, ſi on décrit ſur la baſe AB, un triangle rectangle quelconque, ce triangle aura la propriété demandée, d'être inſcrit dans un cercle dont le centre eſt ſur la baſe.

XIV.

CETTE propriété du cercle, que l'angle qui a ſon ſommet dans la demi-circonférence, & qui eſt appuyé ſur le diamétre, eſt toujours droit, porte à chercher ſi les autres parties du cercle n'auroient pas quelque propriété analogue; ſi, par exemple, les angles ACB, AEB, AFB, pris dans un ſegment ACEFB, ne ſeroient pas tous égaux entr'eux, ainſi que le ſont ceux du demi-cercle. PL. IX. FIG. 1.

Pour nous en aſſurer, nous commencerons par chercher la valeur d'un de ces angles, & nous verrons enſuite ſi les autres ont la même valeur. Nous prendrons par exemple, l'angle AEB, dont le ſommet E eſt placé au milieu de l'arc AEB. Comme la ligne EDG, qui paſſe par le centre D, coupe cet angle en deux parties égales, il ſuffira de meſurer l'angle AEG ſa moitié, ou ce qui revient au même, il ſuffira de FIG. 2.

de ſçavoir quelle partie l'angle AEG eſt d'un angle déja meſuré, tel que ADG ; je dis que l'angle ADG eſt déja meſuré, parce que nous ſçavons que l'arc AG eſt ſa meſure (I. Part. Art. LII.)

Si on fait attention que le triangle AED eſt iſocéle, on verra facilement que l'angle AEG eſt la moitié de l'angle ADG ; car les angles AED, EAD (I. Part. Art XXXI.) ſont égaux : mais (I. Part. Art. LXVIII.) ces deux angles, pris enſemble, valent l'angle extérieur ADG. Donc l'angle AED ou AEG, eſt la moitié de l'angle ADG.

Par la même raiſon, l'angle DEB ſera la moitié de l'angle GDB. Donc l'angle total AEB égalera la moitié de l'angle ADB. Donc ſa meſure ſera la moitié de l'arc AGB.

X V.

L'ANGLE AEB, étant meſuré, pour ſçavoir s'il eſt égal à chacun des autres angles qui ont leur ſommet dans le même ſegment, il faut examiner ſi un de ces angles pris à volonté, AFB par exemple, eſt auſſi la moitié de l'angle au centre ADB. On s'en aſſurera facilement, en tirant la droite FDG par le centre. Car alors on verra que l'angle AFB ſera composé de deux autres AFD, DFB, qui ſeront, par l'Article précédent, les moitiés des angles ADG, GDB, d'où l'on conclura que l'angle total AFB ſera la moitié de l'angle ADB; & en appliquant le même raiſonnement à tous les angles ACB, AEB, AFB, qui ont leurs ſommets à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc AGB, on pourra conclure que ces angles ſont égaux entr'eux, ainſi que nous l'avions ſoupçonné dans l'Article précédent.

FIG. 3.

Tous les angles dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc, ſont égaux, & ont pour commune meſure, la moitié de l'arc ſur lequel ils s'appuient.

FIG. 1.

XVI.

PARMI les différens angles qui ont leur ſommet dans l'arc ACEFB, il y

en a qui pourroient d'abord ne pas paroître compris dans la démonſtration
FIG. 4. précédente ; ce ſont des angles AFB, tels, que la droite FDG tirée par le centre paſſe hors de l'angle ADB. Cependant, en remarquant toûjours que l'angle GFA, eſt la moitié de l'angle GDA, & l'angle DFB, la moitié de l'angle GDB, on verra que l'angle AFB, excès de l'angle DFB ſur l'angle DFA, ſera, dans ce cas, la moitié de l'angle ADB, excès de l'angle GDB ſur GDA.

XVII.

PAR les figures dont nous nous ſommes ſervis, il ſembleroit auſſi que la démonſtration précédente ne conviendroit qu'aux ſegmens plus grands qu'un demi-cercle ; mais il eſt aiſé de voir qu'un angle quelconque, tel que
FIG. 5. AFB, qui auroit ſon ſommet dans un ſegment plus petit qu'un demi-cercle, ſeroit toûjours compoſé de deux autres

DFB, DFA, moitiés des angles BDG, ADG, & par conséquent, que cet angle AFB auroit pour mesure la moitié des deux arcs BG, AG, c'est-à-dire, la moitié de l'arc AGB.

XVIII.

APRE'S avoir vû que dans un même segment, les angles AEB, AFB, AHB, supposés à la circonférence, sont tous égaux, on est tenté de chercher ce que devient l'angle AQB, lorsque son sommet se confond avec le point B, extrémité de la base AB. Cet angle s'evanoüiroit-il alors ? Mais il ne paroît pas possible que sans s'être resserré par dégrés, il vienne tout-à-coup à s'anéantir. On ne voit pas quel seroit le point au-delà duquel cet angle cesseroit d'exister ; comment donc parviendra-t-on à en trouver la mesure ? c'est une difficulté qu'on ne peut résoudre, sans recourir à la Géométrie de l'infini, dont tous les hommes ont

FIG. 6.

au moins une idée imparfaite, qu'il ne s'agit que de développer.

Obſervons d'abord, que quand le point E s'approche de B, en devenant F, H, Q, &c., la droite EB s'accourcit continuellement, & que l'angle EBA qu'elle fait avec la droite AB, s'ouvre de plus en plus. Mais quelque courte que devienne la ligne QB, l'angle QBA n'en ſera pas moins un angle, puiſque pour le rendre ſenſible, il ne faudroit que prolonger la ligne accourcie QB vers R. En doit il être de même, lorſque la ligne QB, à force de diminuer, s'eſt réduite enfin à zero? qu'eſt devenue alors ſa poſition? qu'eſt devenu ſon prolongement?

Il eſt évident qu'il n'eſt autre choſe que la droite BS, qui touche le cercle en un ſeul point B, ſans le rencontrer en aucun autre endroit, & que, pour cette raiſon, on appelle tangente.

La tangente au cercle, eſt la ligne

De plus, il eſt clair que pendant que la ligne EB diminue continuellement jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE, qui devient successivement AF, AH, AQ,&c. s'approche toûjours de AB,& qu'elle se confond enfin avec elle. Donc l'angle à la circonférence AEB, après être devenu AFB, AHB, AQB, devient en dernier lieu l'angle ABS, fait par la corde AB, & par la tangente BS, & cet angle, qu'on appelle angle au segment, doit toûjours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc HGB.

qui ne le touche qu'en un point.

L'angle au segment est celui qui est fait par la corde & par la tangente.

Sa mesure est la moitié de l'arc du segment.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les Commençans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très-utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoûtumé de bonne heure à de pareilles considérations.

Si cependant les Commençans trouvoient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à portée d'en découvrir une autre, en leur expliquant la principale propriété des tangentes.

XIX.

FIG. 7.

La tangente est perpendiculaire au diamétre qui passe par le point d'attouchement.

CETTE propriété est qu'une tangente au cercle dans un point quelconque B, doit être perpendiculaire au diamétre IDB, qui passe par ce point. Car comme la courbure du cercle est si uniforme qu'un diamétre quelconde IDB, le partage en deux demi-cercles IAB, IOB, égaux & également situés à l'égard de ce diamétre, il faut que les deux parties BS, BH, de la tangente commune à ces deux demi-cercles, soient aussi également situées à l'égard de ce diamétre : or cela ne sçauroit être sans que IDB ne soit perpendiculaire à la tangente HBS.

XX.

DELA on verra facilement pourquoi l'angle au segment ABS, a pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Car

Car l'angle ADB joint avec les deux angles égaux DAB, DBA, fait (I. Part. Art. LXIV.) deux angles droits. Donc la moitié de l'angle ADB, jointe avec l'angle DBA, fait un droit. Mais l'angle DBA, ajoûté avec l'angle ABS, donne aussi un droit. Donc l'angle ABS est égal à la moitié de l'angle ADB. Donc la mesure de ABS sera la moitié de l'arc AGB.

XXI.

La seconde démonstration que nous venons de donner de cette propriété du cercle, que l'angle ABS a pour mesure la moitié de l'arc AGB, fournit la solution du problême suivant.

Décrire sur AB un segment de cercle capable de l'angle formé L; c'est-à-dire, un segment AFB, dans lequel tous les angles AFB à la circonférence, soient égaux à l'angle L. FIG. 8. & 9. Ce que c'est qu'un segment capable d'un angle donné.

Pour résoudre ce problême, il faudra faire en A & en B les angles BAS, & Maniere de faire un segment capable d'un angle donné.

ABS, chacun égal à l'angle L; & élever ſur AS & ſur BS, les deux perpendiculaires AD & BD, leur rencontre D ſera le centre de l'arc cherché AFB.

Car par l'Article XIX. les droites BS & AS ſeront les tangentes du cercle dont le centre eſt D, & le rayon AD ou BD, puiſque BD ou AD ſont perpendiculaires à BS & à AS. De plus par l'Article précédent, l'angle ABS a pour meſure la moitié de AGB, & par l'Article XV. les angles tels que AFB, ſont auſſi meſurés par la moitié de AGB. Donc ces angles AFB ſeront égaux à ABS; c'eſt-à-dire, à l'angle L, ainſi qu'on le demandoit.

XXII.

La découverte des propriétés des ſegmens de cercle, que nous venons d'expliquer, eſt due vraiſemblablement à la ſimple curioſité des Géometres; mais il en a été de cette découverte, comme il en eſt tous les jours de beaucoup d'autres ; ce qu'on ne croyoit pas d'abord utile, le devient par la ſuite ; on a fait dans la pratique des applications fort heureuſes des propriétés du cercle, que nous venons de démontrer. Je ne donnerai qu'une ſeule de ces applications ; on la trouvera dans la ſolution du problême ſuivant, qui eſt ſouvent néceſſaire dans la Geographie.

A, B, C, ſont trois lieux dont on connoît les diſtances reſpectives AB, BC, AC ; il s'agit de ſçavoir à quelle diſtance de ces lieux, eſt un point D, d'où l'on peut les voir tous les trois, mais d'où l'on ne peut ſortir pour opérer ſur le terrain.

FIG. 10. Trouver la diſtance d'un lieu à trois autres dont les poſitions ſont connues.

On commencera par tracer ſur le papier trois points *a*, *b*, *c*, qui ſoient ſitués entr'eux de la même maniere que les trois points A, B, C, c'eſt-à-dire en langage géométrique, qu'on fera le triangle *abc* ſemblable au triangle ABC.

FIG. 10. & 11.

Ayant obſervé enſuite avec le demi-cercle la grandeur des angles ADB, BDC, on fera ſur *ab*, le ſegment de cercle *bda*, capable de l'angle ADB, & ſur la droite *bc*, le ſegment de cercle *bdc*, capable de l'angle BDC, la rencontre *d* de ces deux ſegmens déſignera ſur le papier la poſition du lieu D, c'eſt-à-dire, que les lignes *da*, *db*, *dc*, ſeront en même proportion à l'égard de *ab*, *bc*, *ac*, que les diſtances cherchées DA, DB, DC, à l'égard des diſtances données AB, BC, AC: ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, après ce qu'on a vû ſur les figures ſemblables.

XXIII.

On pourroit facilement faire voir que la pratique a tiré bien d'autres ſecours des propriétés du cercle, qu'on vient de démontrer; mais il eſt plus à propos de paſſer à d'autres propriétés du cercle, qui ont été tirées des précédentes, & qui ont eu auſſi leur utilité.

Pour procéder par ordre à la découverte de ces propriétés, nous commencerons par remarquer que deux angles quelconques EDC, EBC, qui s'appuient ſur le même arc EC, étant égaux, il s'enſuit que les triangles DAE, BAC, ont les angles égaux; c'eſt-à-dire, (I. Part. Art. XXXIX.) que ces triangles ſont ſemblables. PL. X. FIG. 1.

Car par la même raiſon que l'angle EDC eſt égal à l'angle EBC, l'angle DEB ſera égal à l'angle DCB; & quant aux angles DAE, BAC, il ſeront viſiblement égaux; ſoit parce qu'ils ſont faits de mêmes lignes, ſoit parce que deux triangles, dont l'un a deux angles reſpectivement égaux, à deux angles de l'autre, ont auſſi néceſſairement le 3^{me}.angle égal(I.Part.Art.XXXVIII.)

Pour reconnoître plus facilement enſuite dans les triangles ADE, ABC, les propriétés générales des triangles semblables, nous appliquerons le triangle DAE sur le triangle BAC, en posant AD sur AB, & AE sur AC, afin que DE soit paralléle à BC. Nous nous rappellerons alors,

FIG. 1, & 2.

1°. Que si deux triangles ADE, ABC, sont semblables, les quatre côtés AC, AE, AB, AD, sont en proportion (I. Part. Art. XXXIX.).

2°. Que dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens (II. Part. Art. VIII.) & nous conclurons de-là, que le rectangle ou le produit de AC par AD, est égal au rectangle de AE par AB; propriété du cercle, très-remarquable, & qu'on peut énoncer ainsi: Si dans un cercle on tire à volonté deux droites qui se coupent, le produit des deux parties de la premiere est égal au produit des deux parties de l'autre.

Deux cordes se coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.

XXIV.

FIG. 3.

Si les deux droites BE, DC, se

coupoient perpendiculairement, & que l'une de ces deux droites fût un diamétre DC, il est clair que les deux parties AB, AE, de l'autre droite BE, seroient égales entr'elles; de sorte que la propriété précédente s'enonceroit ainsi dans ce cas particulier. Si sur le diamétre DC d'un cercle, on éleve une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire sera égal au rectangle de AD par AC.

Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamétre d'un cercle, est égal au rectangle des deux parties du diamétre.

XXV.

Il arrive souvent qu'on a besoin de changer un rectangle en un quarré, l'Article précédent en fournit un moyen facile : soit ACFE le rectangle proposé, on prolongera AC en D, de sorte que AD soit égal à AE, & l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diamétre soit DC. Prolongeant ensuite le côté EA jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle, on aura AB pour le côté

Changer un rectangle en un quarré.

Fig. 4.

du quarré cherché ABGH, égal au rectangle donné AFCE.

XXVI.

Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.

On propose souvent un problême qui n'est que celui que nous venons de resoudre, présenté autrement. C'est de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données ; on entend alors par la moyenne proportionelle, la ligne qui est aussi grande, par rapport à la plus petite des deux lignes données, qu'elle est petite par rapport à la plus grande; c'est-à-dire, que si AB, par exemple, est moyenne proportionnelle entre AD & AC, on pourra dire que AD est à AB, comme AB est à AC. Or il est bien aisé de voir que ce problême est le même que le précédent, puisque (II. Part. Art VIII.) le produit de AD par AC, c'est-à-dire, le rectangle de ces deux lignes, sera égal au produit de AB par AB, c'eſt-à-dire, au quarré de AB.

Donc lorſqu'on voudra trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, on changera le rectangle de ces deux lignes en un quarré dont le côté ſera la ligne cherchée. Maniere de la trouver.

XXVII.

On peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes, d'une autre maniere qui ſuit de la propriété du cercle expliquée dans l'Article XIII. Suppoſons que AC ſoit la plus grande des deux lignes données, & AD la plus petite, on élevera DB perpendiculairement ſur AC, & le point B, ou elle rençontrera le demi-cercle ABC, tracé ſur le diametre AC, donnera la ligne AB, moyenne proportionnelle entre AD & AC. Car en tirant BC, il eſt clair que le triangle ABC ſera rectangle en B. Donc (I. Part. Art. XXXVIII.) ce triangle ſera ſemblable

Autre maniere.

Fig. 5.

au triangle ABD, puisque ces deux triangles ont d'ailleurs l'angle A de commun ; mais si les triangles ADB & ABC sont semblables, ils ont leurs côtés proportionnels. Donc AD est à AB, comme AB à AC. Donc AB est moyenne proportionnelle entre AD & AC.

XXVIII.

Changer une figure rectiligne en un quarré.

SI on vouloit changer une figure rectiligne quelconque en un quarré, il ne faudroit, pour ramener ce problême à l'Article XXV. que faire de cette figure un rectangle ; ce qui seroit fort facile, à cause que les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même base & même hauteur, & que tous les rectangles provenus des triangles, ne feront plus qu'un seul rectangle, en leur donnant à tous une hauteur commune (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

Les figures dont les contours renfermeront des arcs de cercle, pourront auſſi être changées en quarrés, lorſqu'on aura meſuré par pratique la longueur des arcs dont elles ſeront compoſées; car on pourra alors changer ces figures, ainſi que les rectilignes, en rectangles ; on aura recours pour cela aux Articles IX. & X. où l'on a appris à meſurer toutes ſortes de figures circulaires.

XXX.

On tire encore de la propriété du cercle, expliquée dans l'Article XXIV. une méthode bien facile pour faire un quarré qui ſoit à un quarré donné, en raiſon donnée ; problême que nous avions promis dans l'Article XXII. de la ſeconde Partie.

Faire un quarré qui ſoit à un autre en raiſon donnée

Suppoſons, par exemple, qu'on ſe propoſe de faire un quarré qui ſoit au

FIG. 6. quarré ABCD, comme la ligne M à la ligne N; on divisera (I. Part. Art. XLI.) le côté CB au point E, de maniere que CB soit à BE comme la ligne N à la ligne M; menant ensuite la parallele EF à AB, le rectangle ABEF, aura la même superficie que le quarré demandé; donc il ne s'agira plus que de changer ce rectangle en un quarré.

XXXI.

FIG. 7. & 8.

Faire un poligone qui soit en raison donnée avec un poligone semblable.

SI on veut faire un poligone HIKLM, qui soit à un poligone semblable ABCDE, dans la raison de la ligne X à la ligne Y, on commencera par faire sur le côté AB du poligone donné ABCDE, le quarré ABGF; ensuite on cherchera un autre quarré HIOQ, qui soit au quarré ABCF, comme la ligne X à la ligne Y. Et alors décrivant sur le côté HI de ce quarré un poligone HIKLM, semblable au premier ABCDE, ce nouveau poligone ſera celui qu'on demande. La raiſon en eſt bien facile à trouver, ſi on ſe rappelle (I. Part Art. XLVIII.) que les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XXXII.

Faire un cercle, qui ſoit à un autre cercle en raiſon donnée.

Si on vouloit faire un cercle dont l'aire fût à celle d'un cercle donné, comme X à Y, il faudroit conſtruire un quarré, qui fût au quarré du rayon de ce premier cercle, comme X à Y, & le côté de ce nouveau quarré ſeroit le rayon du cercle demandé.

XXXIII.

Voici encore une propriété du cercle tirée de celle qui a fourni les problêmes précédens.

Fig. 9.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire deux

Si d'un point A, pris hors d'un cercle, on méne à volonté deux droites ABC, ADE, qui coupent, chacune, la circonférence en deux points, lignes qui le traversent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures seront égaux.

& qu'on méne les droites CD, BE, les triangles ACD, AEB, seront semblables, puisque l'angle A est commun aux deux triangles, & qu'ils ont d'ailleurs les angles à la circonférence C & E, égaux. Or de ce que les triangles CAD, EAB, sont semblables, il s'ensuit que les quatre lignes AB, AD, AE, AC, sont en proportion, & par conséquent, que le rectangle des deux droites AB, AC, est égal au rectangle des deux droites AD, AE, ce qui peut s'exprimer ainsi. Si d'un point quelconque A, pris hors d'un cercle, on tire à volonté deux lignes droites AC, AE, qui traversent ce cercle, le rectangle de la droite AC par sa partie extérieure AB, sera égal au rectangle de la droite AE par sa partie extérieure AD.

XXXIV.

LORSQUE la droite qui part du point A, au lieu de couper le cercle, ne fait simplement que le toucher, ainsi que AF, la propriété précédente se change en celle-ci : le quarré d'une tangente AF, est égal au rectangle produit par la secante quelconque AE, & par sa partie extérieure AD. Ce qui est bien aisé à démontrer. Car regardant la droite AF qui touche le cercle, comme un ligne qui le couperoit en deux points infiniment proches, les lignes AB, AC, ne sont alors qu'une même ligne AF, & au lieu du rectangle de AB, par AC, on a le quarré de AF.

Le quarré de la tangente est égal au rectangle de la secante par sa partie extérieure.

XXXV.

La proposition démontrée dans l'Article précédent, en nous apprenant la valeur du quarré de la tangente AF, ne nous apprend pas à tirer cette tangente du point donné A. Pour la tirer on se ressouviendra, (Art. XIX.) que le rayon FG est perpendiculaire à la tangente FA. Ainsi il ne s'agit que de trouver, sur le cercle donné, le point F, tel que l'angle AFG

FIG. 10.

D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.

ſoit droit. Donc, en décrivant ſur AG un demi cercle, le point où il coupera le cercle FKO ſera (Article XIII.) le point cherché F.

ELEMENS

ÉLÉMENS DE GÉOMETRIE.

QUATRIEME PARTIE.

De la maniere de mesurer les solides, & leurs surfaces.

LEs Principes que nous avons établis dans les trois premieres Parties de cet Ouvrage, pourroient nous suffire pour résoudre des problêmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous proposer; mais il est plus dans l'ordre que nous avons ſuivi précédemment ; de paſſer maintenant à la meſure des ſolides ; c'eſt-à-dire, des étendues terminées, qui ont à la fois trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur.

Cette recherche a été, ſans doute, un des premiers objets qui ait pû fixer l'attention des Géométres. On aura voulu ſçavoir, par exemple, combien il y avoit de pierres de taille dans un mur dont la hauteur AD, la largeur AB, & la profondeur ou épaiſſeur BG étoient connues. On ſe ſera propoſé de déterminer la quantité d'eau que contenoit un foſſé, ou un réſervoir ABCD ; on aura voulu trouver la ſolidité d'une Tour, d'une obéliſque, d'une maiſon, d'un clocher, &c.

PL. XI. FIG. 1.

FIG. 2.

Pour traiter les figures qui ont les trois dimenſions, de la même maniére que nous avons traité celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les ſolides qui ſont terminés par des plans.

Nous n'aurons pas besoin de parler de la maniere de mesurer les surfaces de ces corps, elles ne peuvent être que des assemblages de figures rectilignes ; & par conséquent, leur mesure dépend de ce qui a été dit dans la premiere Partie.

I.

POUR mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter tous au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces, on les a toutes rapportées au quarré. Or le solide le plus simple, c'est le cube, qui est en effet, en solide, ce que le quarré est en superficie ; c'est-à-dire que c'est un espace tel que *abcdefgh*, dont la longueur, la largeur & la profondeur sont égales, ou, ce qui revient au même, c'est une figure terminée par six faces égales qui sont des quarrés.

Le cube est une figure solide terminée par six quarrés. C'est la mesure commune des solides.

FIG. 3.

On appelle côté du cube le côté des quarrés qui lui servent de faces.

Par un pied cube, on entend un cube, dont le côté eſt d'un pied; de même un pouce cube, eſt un cube dont le côté eſt d'un pouce, &c.

I I.

Le parallelipipede, eſt un ſolide terminé par ſix rectangles.

Les plans paralleles, ſont ceux qui conſervent toujours entre eux la même diſtance.

LES ſolides qu'on a le plus communément à meſurer, ſont des figures FIG. 1. ABCDEFGH terminées par ſix faces rectangles ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GEFH, ABGH. On appelle ces ſolides de Parallelipipédes, parce que leurs faces oppoſées conſervant dans tous leurs points la même diſtance l'une de l'autre, ſont dites paralléles, de même que les lignes ont auſſi été nommées paralleles, lorſqu'elles conſervoient par tout la même diſtance.

III.

OR ſi on ſe propoſe de meſurer des ſolides de cette eſpéce, l'analogie de ce problême avec celui où il s'eſt agi de la meſure des ſurfaces rectangles, donnera un moyen facile de le résoudre.

On commencera par mésurer séparement la longueur AD, la largeur AB & la profondeur BG de la figure proposée, soit en pieds, soit en pouces, &c. on multipliera ensuite l'un par l'autre les trois nombres qu'on aura trouvés, & le produit qui viendra de cette multiplication exprimera combien le parallelipipéde contiendra de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. suivant que les dimensions auront été mesurées en pieds, ou en pouces, &c. Pour mieux montrer comment se fait cette opération, nous allons en donner un exemple. Mesure du parallelipipéde.

Supposons que la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 5, & la profondeur BG de 4, le rectangle ABCD (I. Part. Art. XI.) aura 6 fois 5 ou 30 pieds quarrés. Si on imagine ensuite que les lignes BG, CF, DE, AH, qui mesurent toutes également la profondeur du ſolide, ſoient partagées chacune en quatre parties égales, & que par les points de diviſion correſpondans, on faſſe paſſer autant de plans paralléles les uns aux autres; ces plans diviſeront le parallelipipéde propoſé, en quatre autres parallelipipédes, qui auront chacun un pied de profondeur, & qui ſeront tous égaux & ſemblables. Or l'inſpection ſeule de la figure fait voir que le premier de ces parallelipipédes contient 30 pieds cubes, puiſque ſa face extérieure ABCD contient 30 pieds quarrés. Donc le ſolide total ABCDEFGH contiendra 4 fois 30 ou 120 pieds cubes.

IV.

NOUS ne nous arrêterons point à expliquer les differents moyens qu'on peut employer dans la pratique pour conſtruire des parallelipipédes, parce que ces moyens ſont, pour la plûpart, ſi aiſés à trouver, qu'il n'y a perſonne qui ne les puiſſe imaginer. Mais nous donnerons la formation ſuivante du parallelipipéde, qui eſt plus utile à conſidérer que toutes les autres.

Si on conçoit qu'un quarré ou rectangle ABGH ſe meuve parallélement à lui-même, enſorte que ſes quatre angles A, B, G, H, parcourent chacun une des quatre lignes AD, BC, GF, HE, perpendiculaires au plan du rectangle ABGH; ce rectangle par le mouvement que nous venons de décrire formera le parallelipipede ABCDEFGH.

Les parallelipipedes ſont produits par un rectangle qui ſe meut parallelement à lui-même.

V.

Il eſt preſque inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne panche d'aucun côté ſur ce plan, & de même qu'un plan qui ne panche pas plus d'un côté que d'un autre ſur un ſecond plan, eſt dit perpendiculaire à ce ſecond plan; ces deux définitions ſont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

La ligne perpendiculaire à un plan, eſt celle qui ne panche d'aucun côté ſur ce plan.

Il en eſt de même du plan perpendiculaire à un autre plan.

VI.

FIG. 4.

La ligne qui eſt perpendiculaire à un plan, eſt perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

OR il ſuit de-là que la ligne AB, qui eſt perpendiculaire au plan X doit être perpendiculaire à toutes les lignes AC, AD, AE, &c. qui partent du pied A de cette ligne, & qui ſont dans ce plan. Car il eſt évident que ſi elle panchoit ſur une de ces lignes, elle ſeroit inclinée vers quelque côté du plan. Donc elle ne lui ſeroit pas perpendiculaire.

VII.

POUR ſe repréſenter d'une façon bien ſenſible, comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de ſon extrêmité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief de la maniere ſuivante.

On conſtruira de quelque matiere unie & facile à plier comme du carton, un rectangle FGDE, partagé en deux parties égales par la droite AB,

FIG. 5.

perpendiculaire aux côtés ED, FG; on pliera enſuite ce rectangle, en ſorte que le pli ſoit le long de la ligne AB, & on le portera tout plié ſur le plan X. Il eſt évident que quelle que ſoit l'ouverture qu'on donne aux deux parties FBAE, GBAD du rectangle plié EAD GBF, ces deux parties reſteront toûjours appliquées ſur le plan X, ſans que la ligne AB change de poſition par rapport à ce plan; cette droite AB ſera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de ſon pied, & qui ſeront dans le plan X, puiſque les côtés AE, AD du rectangle plié s'appliqueront ſucceſſivement ſur chacune de ces lignes par le mouvement que nous venons de décrire. FIG. 6.

VIII.

ON tire de la conſtruction précédente une pratique bien commode, pour élever d'un point donné ſur un plan, une ligne perpendiculaire à ce plan, ou pour abbaisser d'un point pris hors d'un plan, une ligne qui soit perpendiculaire à ce plan. Car que le point proposé soit dans le plan, en A par exemple, ou qu'il soit hors du plan, comme en H, on pourra toûjours faire avancer le rectangle EFBGDA sur le plan X, jusqu'à ce que le pli AB touche le point donné, & AB deviendra, dans les deux cas, la perpendiculaire demandée.

FIG. 7.

Pratique simple pour élever, ou pour abbaisser des lignes perpendiculares à des plans.

IX.

IL suit aussi de-là qu'une ligne AB sera perpendiculaire à un plan X, toutes les fois qu'elle sera perpendiculaire à deux lignes AE & AD de ce plan. Car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliqueroit sur AE, & l'autre sur AD. Or ce pli ne pourroit manquer d'être perpendiculaire au plan X.

Une ligne sera perpendiculaire à un plan si elle est perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

X.

SI on veut élever sur une ligne

quelconque KL, un plan perpendiculaire au plan X dans lequel eſt cette ligne, on pourra ſe ſervir encore, pour cela, du rectangle plié GBFEAD. Car il ne ſaudra que poſer ſur la ligne KL le côté AD d'une des parties ADGB de ce rectangle plié, & le plan de cette partie ADGB, ſera celui qu'on demande.

Maniere d'élever un plan perpendiculaire à un autre.

X I.

On verra facilement que ſi on poſoit un troiſiéme plan Y ſur les deux côtés EB & BG du même rectangle plié, ce plan Y ſeroit encore perpendiculaire à la ligne AB, & par conſéquent, paralléle au plan X.

Fig. 8.

Donc ſi à un plan X on éleve trois perpendiculaires EF, AB, DG, d'égale longueur, & qui ne ſoient pas poſées en ligne droite, le plan Y, qui paſſera par les trois points F, B, G, ſera paralléle au plan X.

Mener un plan paralléle à un autre.

X I I.

Lorsque deux plans ne ſeront

pas paralleles, il ſera facile de connoître l'angle qu'ils feront entr'eux, en ſe ſervant encore de notre rectangle plié. Pour en venir à bout, nous appliquerons l'une des deux parties ABGD de ce rectangle, ſur le plan X; il eſt évident que l'angle EAD, ou ſon égal FBG, meſurera l'inclinaiſon du plan EABF ſur le plan DABG. Or ſi on remarque que AB eſt la commune ſection de ces plans, & que EA & AD ſont chacune perpendiculaires à AB, on en tirera ſans peine la régle ſuivante.

FIG. 9.

Meſurer l'inclinaiſon d'un plan ſur un autre.

Deux plans qui ne ſont pas parallé-les étant donnés, il faut commencer par trouver la ligne droite, qui eſt leur commune ſection; enſuite d'un point quelconque de cette ligne, on lui menera deux perpendiculaires, qui ſoient chacune dans un de ces plans, & l'angle que feront entr'elles ces deux perpendiculaires, meſurera l'angle que les deux plans donnés font entr'eux.

XIII.

COMME on s'apperçoit, ſans peine, que pendant le mouvement de ABFE, autour du pli AB, la droite AE, dont l'extrêmité E décrit un arc de cercle ED, ne ſort jamais d'un plan EAHD, perpendiculaire au plan X, & que l'inclinaiſon de la droite EA ſur le plan X n'eſt autre choſe que l'angle EAD, on découvre encore très-facilement que l'inclinaiſon d'une droite quelconque EA ſur le plan X, eſt méſurée par l'angle EAH fait entre cette ligne & la ligne AD, qui paſſe par A & par le point H du plan X, où tombe la perpendiculaire EH, abbaiſſée ſur ce plan, d'un point quelconque E de la droite AE.

Meſurer l'inclinaiſon d'une ligne ſur un plan.

XIV.

L'INSPECTION ſeule de la figure dont on vient de ſe ſervir dans l'Article précédent, fournit un nouveau moyen d'abbaisser d'un point E, hors d'un plan X, une ligne EH, perpendiculaire à ce plan.

Nouvelle maniere d'abbaisser une ligne perpendiculaire à un plan donné.

Ayant tiré une ligne quelconque BAS, dans le plan X, on abbaissera du point donné E la perpendiculaire EA à cette ligne. Cela fait, du point A, où cette perpendiculaire tombe, on élevera dans le plan X la perpendiculaire AD à AB; & abbaissant ensuite du point donné E, à la droite AD, la perpendiculaire EH, cette ligne sera la perpendiculaire au plan X.

X V.

Seconde maniere d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné.

On tire de-là une seconde façon d'élever à un plan X, une perpendiculaire MN, d'un point M donné sur ce plan.

Ayant abbaissé d'un point quelconque E pris hors du plan X, la perpendiculaire EH, à ce plan, on menera par le point donné M la droite MN qui ſoit paralléle à HE, & elle ſera la perpendiculaire au plan X.

XVI.

APRE'S le parallélipipéde, le ſolide le plus ſimple eſt le priſme droit, C'eſt une figure ABCDEFGHIKLM dont les deux baſes oppoſées & paralléles ſont deux poligones égaux & tellement placés que les côtés GF, FE, &c. de l'un ſoient paralléles aux côtés BC, CD, &c, de l'autre, & dont les autres faces ſont des rectangles ABGH, BGFC, &c.

FIG. 10. Le priſme droit eſt une figure ſolide, dont les deux baſes oppoſées ſont deux poligones égaux, & les autres faces des rectangles.

XVII.

LES Géométres ſuppoſent ces figures, formées ainſi que les parallélipipédes, par une baſe ABCDLM, qui ſe meut parallélement à elle-même, de façon que ſes angles A, B, &c. ſuivent des lignes perpendiculaires au plan de la baſe.

Formation des priſmes droits.

XVIII.

POUR distinguer les différentes espéces des prismes droits, on ajoûte le nom du poligone qui leur sert de base. Le prisme exagonal, par exemple, est celui dont la base est un exagone.

XIX.

Deux prismes qui ont des bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs.

POUR trouver la maniére de mesurer toutes sortes de prismes droits, on observera d'abord que de deux prismes droits, dont les bases seroient égales, celui qui auroit une plus grande hauteur seroit plus grand en solidité dans la même raison que sa hauteur seroit plus grande.

XX.

Deux prismes, qui ont la même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

ON remarquera ensuite que deux prismes droits, qui auroient la même hauteur, mais dont l'un auroit une base qui contiendroit un certain nombre de fois la base de l'autre, seroient entr'eux dans

dans la même raiſon que leurs baſes. La vérité de cette propoſition s'apperçoit facilement en faiſant attention à la formation des priſmes expliquée dans l'Article XVII.

Que *abcdefghiklm*. & ABCDEFGHIKLM ſoient les deux priſmes qui ont la même hauteur, & que la baſe *abcdlm* du plus petit, ſoit, par exemple, le quart de la baſe ABCDLM. Puiſque les deux priſmes ſont produits par les mouvemens de ces deux baſes, il s'enſuit qu'un plan quelconque, qui ſera parallele au plan où ſont les deux baſes, coupera dans les deux priſmes, deux poligones, dont chacun ſera égal à la baſe du priſme où il ſera coupé; c'eſt-à-dire, que la ſection du grand priſme ſera toûjours quadruple de celle du petit. Donc le priſme ABCDEFGHIKLM pourra être regardé comme composé de tranches toutes quadruples de celle du priſme *abcdefghiklm*, & par conſéquent, la ſolidité du premier FIG. 10. & 11.

prisme sera quadruple de celle du second.

XXI.

APRE'S ces deux remarques, il ne sera pas difficile de former la régle suivante pour mesurer tous les prismes droits.

La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur.

On mesurera d'abord en pieds quarrés, ou en pouces quarrés, &c. l'aire de la base du prisme proposé, ensuite on multipliera le nombre qu'on aura trouvé, par le nombre des pieds, ou des pouces, &c. que contiendra la hauteur du prisme, & le produit donnera le nombre de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. contenus dans le prisme proposé, & sera, par conséquent, sa mesure.

XXII.

Les prismes obliques different des prismes droits en ce que les fades qui sont ces rectan-

LE nom de prisme se donne encore aux solides (Fig. 13.) qui ont deux bases poligones égales, ainsi que les precédens, mais dont les autres faces ſont des parallélogrammes, au lieu d'être des rectangles. Pour diſtinguer ces nouveaux priſmes de ceux dont nous venons de parler, on les appelle des priſmes obliques, par oppoſition aux autres qu'on avoit nommés des priſmes droits.

gles dans ceux-ci, ſont des parallélogrames dans ceux là.

XXIII.

ON conçoit les priſmes obliques formés par une baſe *abcki*, qui ſe meut parallélement à elle-même, & de telle façon que ſes angles ſuivent des lignes paralleles *ag*, *bh*, *cd*, &c. qui s'élevent hors du plan de la baſe, & qui ne lui ſont point perpendiculaires.

Formation des priſmes obliques.

FIG. 13.

XXIV.

L'ANALOGIE qu'il y a entre cette formation & la formation des priſmes droits dont nous avons parlé (Article XVII.) donne facilement la meſure de la ſolidité des priſmes obliques; car ſi on imagine à côté d'un priſme

FIG. 12. & 13. oblique *abcdefghik*, un priſme droit ABCDEFGHIK, qui ait la même baſe, & que ces deux priſmes ſoient renfermés entre deux plans paralleles, on verra que la ſolidité de ces deux corps ſera abſolument la même.

Car, ſi par un point quelconque P de la hauteur, on fait paſſer un plan parallele à la baſe, les ſections NOPQR, *nopqr*, que ce plan formera dans chacun des deux priſmes, pourront être regardées comme les baſes égales AB CKI, *abcki*, arrivées en NOPQR, *nopqr*, par le mouvement qui forme ces deux priſmes; & ainſi ces deux ſections ſeront des poligones égaux.

Or ſi toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux priſmes par de mêmes plans coupans, ſont égales, il faudra que les aſſemblages de ces tranches, c'eſt-à-dire, les priſmes, ſoient égaux auſſi.

Les priſmes obliques ſont égaux aux priſmes

On énonce ordinairement ainſi cette propoſition : Les priſmes obliques ſont égaux aux priſmes droits, lorſqu'il ſont même baſe & même hauteur. On appelle la hauteur du priſme la perpendiculaire abbaiſſée du plan ſupérieur ſur l'inférieur, ou ſur ſon prolongement.

droits lorſqu'ils ont même baſe & même hauteur.

XXV.

Et comme les parallelipipedes doivent être mis au nombre des priſmes, on étendra ce que nous venons de dire des priſmes aux parallelipipedes obliques ; c'eſt-à-dire, aux figures *abcdefgh* *, produites en faiſant mouvoir un quarré, un rectangle, ou même un parallelogramme, de maniere que ſes quatre angles ſuivent des lignes paralleles, qui s'élevent obliquement de la baſe. Ainſi, le parallelipipede oblique *abcdefgh*, ſera égal au parallelipipede droit ABCDEFGH, ſi la baſe *abgh* eſt la même, ou a la même ſuperficie que la baſe ABGH, & ſi la perpendiculaire abbaiſſée du plan *dcfe* ſur le plan *abgh* eſt égale à la perpendiculaire abbaiſſée du

Il en eſt de même des parallelipipedes obliques à l'égard des parallelipipedes droits.

* Pl. XII. Fig. 1. & 2.

plan DCFE ſur le plan ABGH.

XXVI.

AYANT vû ce qui concerne les parallelipipedes & les priſmes, examinons maintenant les pyramides ; c'eſt-
Fig. 3. à dire, les corps tels que ABCDEFG, renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même ſommet A, & qui ſe terminent à une baſe poligone quelconque BCDEFG. Il eſt néceſſaire de conſiderer ces ſortes de ſolides, non-ſeulement parce qu'on en rencontre dans les bâtimens & dans les autres ouvrages à conſtruire, mais parce que tous les ſolides terminés par des plans, ſont des aſſemblages de pyramides, ainſi que les figures rectilignes ſont des aſſemblages de triangles. Il ne faut, pour s'en aſſurer, que tirer d'un point pris où l'on voudra dans l'intérieur du corps propoſé, des lignes à tous les angles de ce corps.

XXVII.

On distingue les pyramides les unes des autres, ainsi que les prismes, par le nom de la figure qui leur sert de base.

XXVIII.

Lorsque la pyramide a pour base une figure réguliere, & que son sommet répond perpendiculairement au centre H de sa base, ainsi que dans la Fig. 3. la pyramide est alors appellée pyramide droite; elle est nommée, au contraire, pyramide oblique, lorsque le sommet n'est pas perpendiculairement au-dessus du centre, ainsi que dans la Fig. 5.

XXIX.

Pour découvrir la maniere de mesurer toutes sortes de pyramides, tant droites qu'obliques, nous commencerons par faire sur ces figures, quelques réfléxions générales, auxquelles on eſt conduit par la connoiſſance des propriétés des priſmes.

Lorſqu'on fait attention à l'égalité des priſmes qui ont même baſe & même hauteur, il eſt naturel qu'on ſe rappelle que les parallélogrammes ſont auſſi égaux entr'eux, lorſqu'ils ont ces mêmes conditions, & qu'il en eſt encore de même des triangles. Ces trois vérités ſe préſentant à la fois à l'eſprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui ſont communes aux parallelogrammes & aux triangles, peuvent l'être auſſi aux priſmes & aux pyramides ; on doit donc ſoupçonner que les pyramides qui ont même baſe & même hauteur, ont la même ſolidité.

XXX.

Les réfléxions ſuivantes confirmeront ce ſoupçon.

FIG. 4. & 5. Soient ABCDE, *abcde*, deux pyramides, dont les hauteurs AH, *ah*,

ſoient les mêmes, & dont les baſes ſoient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux BCDE, *bcde*; ſi on conçoit que ces deux pyramides ſoient coupées par une infinité de plans paralleles à leurs baſes, on imaginera, ſans peine, que ces coupes de pyramide donneront des quarrés égaux IKLM, *iklm*, & par conſéquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des aſſemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides ſeront égales chacune à ſa correſpondante. Donc, conclura-t-on, la ſomme des tranches eſt la même, de part & d'autre : c'eſt à-dire, que les deux pyramides ont la même ſolidité.

Si les baſes des deux pyramides étoient d'autres poligones réguliers ou irréguliers BCDEF, *bcdef*, égaux entr'eux, il n'y a perſonne qui ne penſât encore, que toutes les tranches IKLMN, *iklmn*, de l'une & de l'autre de ces deux pyramides devroient FIG. 6. & 7.

être égales entr'elles; & qui n'en conclut, par conséquent, que les pyramides auroient toûjours la même solidité, lorsqu'elles auroient même base & même hauteur.

XXXI.

TOUT cela est aisé à imaginer après la démonstration que nous avons donnée, de l'égalité des prismes qui ont même hauteur; cependant la similitude entre la tranche quelconque IKLMN d'une pyramide & la base BCDEF, & l'égalité des tranches IKLMN & *iklmn*, sont de ces propositions, qui, quoique sensibles pour tout le monde, ont, à la rigueur, besoin d'une démonstration; or pour trouver cette démonstration, on est obligé d'entrer dans plusieurs considérations sur la similitude des figures solides.

XXXII.

REPRENONS la pyramide ABC DEF, & supposons-la coupée par un plan IKLMN, parallele à la base, nous allons démontrer que la section, ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide, est un poligone parfaitement semblable au poligone BCDEF; & que la pyramide AIKLMN est elle-même entierement semblable à la pyramide ABCDEF, c'est-à-dire, que les angles que forment toutes les lignes de ces deux figures sont respectivement égaux, & que tous les côtés de la petite pyramide auront le même rapport entr'eux que ceux de la grande.

En quoi consiste la similitude de deux pyramides.

XXXIII.

COMMENÇONS par observer que si deux plans X & Y sont paralleles, & que deux lignes quelconques ALD, AME, partant d'un même point A, traversent ces deux plans, les droites LM, DE, qui joindront les points L, M, D, E, seront parallèles. La raison en est, que si ces deux lignes n'étoient pas paralleles, elles se

FIG. 8.

rencontreroient quelque part, étant prolongées; mais si elles se rencontroient, les plans dans lesquels elles sont, & dont elles ne peuvent pas sortir, en les prolongeant autant qu'il seroit nécessaire, se rencontreroient donc aussi. Donc ils ne seroient pas paralleles, ainsi qu'on le suppose.

XXIV.

Si on suppose donc que le plan
FIG. 6. IKLMN soit parallele au plan BCDEF, il s'ensuivra que toutes les lignes ML, LK, KI, IN, NM, seront paralleles aux lignes ED, DC, CB, BF, FE, & par conséquent, que les triangles ALM, AKL, AIK, &c. seront semblables aux triangles ADE, ACD, ABC, &c. Si on prend l'un des côtés de ces triangles, AM par exemple, pour commune mesure, ou pour échelle de tous les côtés de la petite pyramide, pendant que le côté correspondant AE servira d'échelle aux côtés de la grande,

on verra, ſans peine, que les côtés ML, LK, KI, &c. du poligone IKLMN ſeront proportionnels aux côtés ED, DC, CB, &c. du poligone BCDEFG.

On verra auſſi facilement que tous les angles IKL, KLM, &c. ſeront reſpectivement égaux aux angles BCD, CDE, puiſque les premiers ſeront formés par des lignes paralleles aux côtés des ſeconds. Donc les deux poligones IKLMN, BCDEF, ſeront ſemblables.

XXXV.

Or les côtés AM, AL, AK, &c. étant proportionnels aux côtés AE, AD, AC, &c. & les angles ALM, ALK, &c. reſpectivement égaux aux angles ADE, ADC, &c. à cauſe de la reſſemblance des triangles ALM, ADE; ALK, ADC, &c. les deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, ſeront entierement ſemblables.

XXXVI.

ENFIN, si on mene du point A, AH, perpendiculaire au plan sur lequel est construit le poligone BCDEF, & que Q soit le point où cette perpendiculaire rencontre le plan du poligone IKLMN, il est clair que les droites AQ, AH, hauteurs des deux pyramides AIKLMN, ABCDEF, seront entr'elles dans la même raison que les côtés homologues AM, AE; AL, AD, &c. ou, ce qui revient au même, que si on prend les hauteurs AQ, AH, pour les échelles des deux pyramides, les côtés AM, AL, &c. contiendront autant des parties de AQ, que les côtés AE, AD, &c. contiendront des parties de AH.

XXXVII.

QU'ON revienne maintenant à considérer les deux pyramides ABCDEF, *abcdef*, à la fois, on verra que les deux

FIG. 6. & 7.

tranches IKLMN, *iklmn*, étant semblables aux bases BCDEF, *bcdef*, qui sont les mêmes, elles seront semblables entr'elles. On verra, de plus, que ces deux tranches seront égales entr'elles, puisque les échelles de ces deux figures sont les droites égales AQ, *aq*, hauteurs des pyramides AIKLMN, *aiklmn*.

Donc, sans connoître quelle est la solidité des pyramides, on sçait déja, avec certitude, que si elles ont même hauteur & même base, elles sont égales, ainsi que nous l'avions soupçonné (Article XXIX.)

Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.

XXXVIII.

Si les bases des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étoient seulement égales en superficie, les pyramides seroient encore égales en solidité; car soit *abcdef**, & *arst*, deux pyramides qui ont la même hauteur *ah*, si on coupe ces deux pyramides par

Deux pyramides sont encore égales, si ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polygones semblables, sont égales en superficie.

FIG. 7. & 9.

un plan quelconque parallele à la base, il est évident qu'il y aura même rapport de l'aire *iklmn* à l'aire *bcdef*, que de l'aire *uxy* à l'aire *rst*; puisque *iklmn*, *bcdef*, étant (Article XXXIV.) des figures semblables, elles ne different (I. Part. Art. XLVIII.) que par leurs échelles *aq*, *ah*, &c. & que les figures *uxy*, *rst*, étant aussi semblables, elles ne different, non plus, que par leurs échelles, qui sont encore les lignes *aq*, *ah*,

Mais si les bases *rst*, *bcdef*, sont égales en superficie, leurs parties proportionelles *uxy*, *iklmn*, seront donc égales. Donc toutes les tranches des deux pyramides *arst*, *abcdef*, auront la même étenduë. Donc leurs assemblages; c'est-à-dire, les pyramides mêmes, seront égales en solidité.

XXIX.

Les pyramides qui ont même hauteur

SI la base *bcdef* de la premiere pyramide contenoit un certain nombre de fois

fois la base *rst*, la solidité de la premiere pyramide *abcdef*, contiendroit le même nombre de fois la solidité de la seconde *arst*.

teur, sont entr'elles comme leurs bases.

Car, en ce cas, la base *bcdef* étant divisée en plusieurs parties, dont chacune fût égale à la base *rst*, on pourroit concevoir la pyramide *abcdef*, comme composée de plusieurs autres pyramides, qui auroient pour bases les parties de *bcdef*. Or chacune de ces nouvelles pyramides seroit égale à la seconde pyramide *arst*, selon que nous l'avons prouvé dans l'Article précédent. Donc, &c.

Que si la base *rst* n'étoit pas contenue exactement dans la base *bcdef*, mais que ces deux bases eussent une mesure commune X, on diviseroit chacune des deux bases *bcdef*, *rst*, en des parties égales à X, & on verroit que les deux pyramides *abcdef*, *arst*, seroient composées d'autant de pyramides nouvelles, toutes égales entr'elles, que les deux bases contiendroient de parties X. Donc les pyramides *abcdef*, *arst*, seroient entr'elles comme leurs bases.

Et si les bases étoient incommensurables, on feroit toûjours voir, malgré cela, que les pyramides seroient entr'elles en même raison que leurs bases, en se servant d'une induction semblable à celle qu'on a employée dans un pareil cas (II. Part. Art. XXVIII.) lorsqu'il s'agissoit de comparer les figures dont les côtés étoient incommensurables; c'est-à-dire, qu'on diminueroit à l'infini la mesure X, de façon qu'elle pût être censée mesure commune, tant de la base *rst*, que de la base *bcdef*.

X L.

AYANT découvert que les pyramides qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases, on doit sentir que la mesure de leur solidité ne renferme plus que très-peu de difficulté.

Car il ne s'agit plus que de ſçavoir meſurer une ſeule pyramide, pour meſurer toutes les autres. Suppoſons, par exemple, que nous ſçachions meſurer la pyramide ABCDE, & qu'on nous demande la meſure de la pyramide AS TVXY, qui n'a ni la même baſe, ni la même hauteur que la premiere : nous commencerons par faire une pyramide ſemblable à la pyramide ABCDE, & qui ait la hauteur de la pyramide ASTVXY, ce qui ſera bien aiſé ; car il ſuffira (Article XXXV.) de prolonger les côtés AB, AC, AD, AE, & de les couper par le plan LMNO, dont la diſtance AG au ſommet A, ſoit égale à la hauteur AO. FIG. 10, 11.

Cela fait, puiſque par la ſuppoſition nous ſçavons meſurer la pyramide AB CDE, il eſt évident que nous ſçaurons meſurer auſſi la pyramide ALMNO, qui lui eſt ſemblable ; car quelles que ſoient les opérations par leſquelles on meſure la pyramide ABCDE, on pourra toûjours faire les mêmes opérations pour meſurer la pyramide ſemblable ALMNO, à cela près qu'on employera dans celle-ci une échelle différente.

Suppoſons donc que la pyramide ALMNO ſoit meſurée, ſa meſure déterminera auſſi celle de la pyramide propoſée ASTVXY, car par l'Article précédent, ces deux pyramides ſont entr'elles comme leurs baſes LMNO, STVXY, & nous avons d'ailleurs enſeigné dans la ſeconde Partie à trouver le rapport de ces deux baſes.

XLI.

PUISQU'IL ne s'agit donc que de meſurer une ſeule pyramide, pour ſçavoir meſurer toutes les autres pyramides imaginables, propoſons-nous-en une extrêmement ſimple, qu'on peut
FIG. 12. former en tirant des quatre angles A, B, C, H, d'une des faces d'un cube

ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube ; c'eſt-à-dire, le point également diſtant de A, D, B, E, &c.

On voit, ſans peine, que cette pyramide eſt la ſixieme partie du cube, puiſqu'on peut décompoſer le cube en ſix pyramides pareilles, en prenant chaque face pour baſe. Or la valeur du cube eſt le produit de la hauteur AF par la baſe ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en ſix parties égales, ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la ſixieme partie de la hauteur AF par la baſe AB CH, & comme la ſixieme partie de la hauteur AF eſt le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puiſque ſa hauteur OL eſt la moitié du côté du cube, il s'enſuit que la meſure de la pyramide OABCH eſt le produit du tiers de ſa hauteur par ſa baſe.

XLII.

SUPPOSONS préſentement qu'on ait à meſurer une pyramide quelconque OKMNSTV, on imaginera un cube dont le côté AB ou AF ſoit double de la hauteur OL de la pyramide propoſée, & on concevra dans ce cube, une pyramide OABCH, dont la pointe ſoit au centre, & qui ait pour baſe une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la premiere; & par conſéquent, (Article XXXIX.) la ſolidité de OABCH ſera à celle de ORMNSTV, comme la baſe ABCH à la baſe KMNSTV; or par l'Article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la baſe ABCH, eſt la valeur de la pyramide OABCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la baſe KMNSTV, ſera la valeur de la pyramide propoſée OKMNSTV.

FIG. 13.

La ſolidité d'une pyramide quel-

Et par-là, on découvre ce théorême

général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

conque, est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

XLIII.

Comme nous avons vû (Article XXI.) que la solidité d'un prisme, est le produit de sa base par la hauteur, il est clair par l'Article précédent, que les pyramides seront toûjours le tiers des prismes qui auront même base & même hauteur.

La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.

XLIV.

Apre's avoir mesuré tous les solides terminés par des plans, nous allons chercher le chemin qu'on peut avoir suivi pour mesurer les solides dont les surfaces sont courbes. Et comme nous n'avons traité dans la troisieme Partie que des figures, dont les contours ne renferment d'autres courbes que le cercle, nons n'examinerons que les corps dont les courbures sont circulaires.

Dans l'examen de ces corps, nous aurons deux objets, la mesure de leurs surfaces & celle de leurs solidités ; car ces surfaces étant ou entierement courbes, ou en partie planes & en partie courbes, nous ne pourrons renvoyer leur mesure à la premiere Partie ainsi que nous l'avons fait des corps terminés par des plans.

XLV.

PL. XIII. FIG. 1. & 2.

Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & paralleles, qui sont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.

LE plus simple de tous les solides courbes, est le cylindre ; c'est un corps comme ABCDEF, dont les deux bases ABC, DEF, sont deux cercles égaux & paralleles joints par une surface courbe qu'on peut imaginer formée par un plan plié autour de leurs circonférences.

FIG. 1.

On le distingue en cylindre droit, & en cylindre oblique.

Lorsque les deux cercles sont placés de façon que le centre G du premier réponde perpendiculairement au-dessus du centre H du second, le cylindre se nomme droit.

Le cylindre se nomme au contraire

oblique, lorsque la ligne tirée par les deux centres G & H, est oblique à l'égard des plans ABC, DEF. FIG. 2.

XLVI.

Formation du cylindre.

La formation géométrique de ces solides, analogue à celles des prismes & des parallelipipedes, dont il a été parlé (Article XVII.) consiste à faire mouvoir un cercle parallélement à lui-même, en sorte que tous ses points décrivent des lignes droites paralleles qui s'élevent hors du plan de ce cercle.

XLVII.

On parviendra, de la maniere suivante, à mesurer la surface d'un cylindre droit; ce qui est souvent nécessaire dans la pratique.

Les deux circonférences ABC, DEF, étant partagées chacune en un même nombre de parties égales, les points de division répondant les uns au-dessus des FIG. 1.

autres, qu'on tire des lignes droites qui joignent les angles correſpondans des deux poligones réguliers que donne cette opération. Il eſt clair qu'on aura alors un priſme dont la ſuperficie ſera compoſée d'autant de rectangles renfermés dans la ſurface du cylindre, qu'il y a de côtés renfermés dans chacune des circonférences ABC, DEF. Or tous ces rectangles ayant chacun leur hauteur égale à AD, leur meſure totale ſera le produit de la hauteur AD par la ſomme de toutes les baſes, c'eſt-à-dire, par le contour du poligone renfermé ou inſcrit dans le cercle DEF ou ABC.

Mais comme à meſure que le nombre des côtés de ce poligone ſera plus grand, le contour du poligone approchera, de plus en plus, d'être égal à la circonférence, & la ſurface du priſme d'être égale à celle du cylindre; il s'enſuit que ſi on imagine que le nombre des côtés de ce poligone devienne infini, le priſme ne

La ſurface courbe d'un cylindre

différera pas du cylindre. La surface courbe du cylindre droit est donc égale à un rectangle dont la hauteur seroit AD, & la base une ligne droite égale à la circonférence DEF.

droit est égale à un rectangle qui a la même hauteur, & dont la base est égale à sa circonférence.

Cette proposition peut servir à trouver, par exemple, ce qu'il faudroit d'étoffe pour envelopper un pilier cylindrique, ou pour tapisser le dedans d'une Tour ronde.

XLVIII.

QUANT à la surface du cylindre oblique, on ne peut pas la mesurer de la même maniere, parce qu'au lieu de rectangles, on auroit des parallelogrammes de hauteurs différentes. Ce n'est que par des méthodes très-compliquées & très-difficiles, qu'on est parvenu à connoître seulement la valeur approchée de cette surface; & les problêmes de ce genre ne sont pas du ressort des élémens.

XLIX.

A l'égard de la solidité des cylindres, soit droits, soit obliques, rien ne sera plus aisé que de la trouver. Car il est évident que tout ce que nous avons dit des prismes, conviendra aux cylindres, si on regarde les cylindres comme les derniers des prismes qu'on peut leur inscrire.

Les cylindres qui ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité.

Ainsi les cylindres qui auront même base & même hauteur, seront égaux en solidité.

L.

La mesure d'un cylindre quelconque est le produit de sa base par sa hauteur.

Et la mesure d'un cylindre quelconque consistera dans le produit de sa base par sa hauteur.

L I.

Fig. 3.&4.

Le cone est le solide courbe le plus simple après le cylindre ; c'est une figure comme ABCDE, dont la base est un cercle, & dont la surface est compoſée d'une infinité de lignes droites, qui aboutiſſent toutes du ſommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce ſolide comme une pyramide dont la baſe ſeroit un cercle.

Le cone eſt une eſpece de pyramide, dont la baſe eſt un cercle.

LII.

Si, comme dans la figure 3, la pointe ou ſommet A du cone répond perpendiculairement au-deſſus du centre O de la baſe, le cone eſt nommé cone droit; & il eſt nommé oblique, ſi le ſommet répond à un point different du centre de la baſe, ainſi que dans la figure 4.

On les diſtingue en cone droit & en cone oblique.

LIII.

Pour meſurer la ſurface d'un cone droit ABCDE, on le regardera comme la derniere des pyramides qu'on peut lui inſcrire; c'eſt-à-dire, qu'on diviſera la circonférence de ſa baſe BCDE, ainſi qu'on a fait de la circonférence du cylindre, en une infinité de petits côtés, & tirant des lignes de tous

Fig. 5.

les angles au ſommet du cone A; on trouvera que la ſuperficie conique eſt un aſſemblage d'une infinité de petits triangles iſocéles, dont la hauteur eſt égale au côté AB du cone, & dont toutes les baſes ajoûtées enſemble, ſont égales à la circonférence BCDE; d'où il eſt aiſé de voir que la meſure de cette ſurface ſe trouvera en multipliant la moitié de AB par la circonférence BCDE.

La ſurface d'un cone droit ſe meſure en multipliant la moitié de ſon côté par la circonférence de ſa baſe.

LIV.

Si on ſe rappelle maintenant que la ſurface d'un ſecteur de ce cercle eſt (III. Part. Art. X.) égale au produit de l'arc de ce ſecteur par la moitié du rayon, on verra que pour envelopper le cone droit ABCDE d'une ſurface pliante comme du carton, &c. il faudroit prendre un ſecteur de cercle, dont le rayon fût égal à AB; & dont l'arc fût égal à la circonférence BCDE.

Le développement d'un cone eſt un ſecteur de cercle.

L V.

LORSQUE le cone eſt oblique, la meſure de ſa ſurface, ainſi que celle du cylindre oblique, eſt fort difficile à connoître même d'une maniere approchée, & c'eſt encore un problême au-deſſus des Elemens.

L V I.

QUANT à la ſolidité des cones, ſoit droits, ſoit obliques, on les regardera comme les dernieres des pyramides qu'on pourroit leur inſcrire, & on pourra leur appliquer en conſéquence ce qu'on a dit des pyramides en général.

Ainſi les cones qui auront même baſe & même hauteur, ſeront égaux.

Les cones qui ont même baſe & même hauteur ſont égaux.

L V I I.

ET la ſolidité d'un cone quelconque ſera le produit de la baſe par le tiers de ſa hauteur.

Leur meſure eſt le produit de la baſe par le tiers de la hauteur.

LVIII.

FIG. 5. & 6. ON a quelquefois beſoin de meſurer un corps comme BCDEFGH, qu'on appelle cone tronqué; c'eſt la partie qui reſte d'un cone AFGH, lorſqu'on en a retranché un autre cone plus petit AB CDE, par une ſection parallele à la baſe FGH. Il eſt évident que la meſure de ce ſolide ſera la différence entre les ſolidités des deux cones ABCDE, AF GH.

LIX.

QUANT à la ſurface d'un cone tronqué, s'il a été formé par la ſection d'un cone droit, on peut trouver quelque choſe de plus ſimple que de meſurer ſéparement les ſurfaces de deux cones, & de retrancher l'une de l'autre, on employera pour cela la méthode ſuivante, qui eſt aiſée à imaginer, après ce que nous avons dit, (Article LIV.)

FIG. 6. & 7. Suppoſons que ALR ſoit le ſecteur qu'il

faudroit conſtruire pour pouvoir envelopper le cone AFGH ; en décrivant du centre A & de l'intervalle AM égal à AB, un arc MP, il eſt clair que l'eſpace MPRL ſeroit une portion de couronne propre à envelopper la ſurface cherchée du cone tronquée. Or ſi on imagine que les deux circonférences, dont MP & LR ſont les arcs ſemblables, ſoient achevées, on aura une couronne entiére, dont la meſure (III. Part. Art. VIII.) ſera le produit de ML, égal à BF par la circonférence dont AN eſt le rayon, N étant le milieu de ML. Donc la portion de couronne MPRL, ou la ſurface du cone tronqué BCDE FGH qui lui eſt égal, ſe meſurera en multipliant ML par l'arc NQ ; ou, ce qui revient au même, en multipliant BF par la circonférence IKL, que donne la ſection du ſolide propoſé par un plan paralléle à la baſe, & qui paſſe par le milieu I du côté BF.

Maniére de meſurer la ſurface d'un cone tronqué.

LX.

La sphére est le corps dont la surface a tous ses points également éloignés du centre.

LE dernier des corps solides que nous traiterons, se nomme sphére ou globe ; c'est celui dont la surface a tous ses points également éloignés d'un même point qui en est le centre. On a souvent besoin de mesurer cette surface ; on voudra sçavoir, par exemple, ce qu'il faudroit de dorure pour une boule, combien on devroit prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme, &c.

LXI.

FIG. 8.

SOIT X la sphére dont on veut mesurer la superficie, il est évident qu'on peut concevoir ce solide comme produit par la révolution d'un demi-cercle AMB, autour de son diamétre AB.

Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un poligone régulier d'un nombre infini de petits côtés, ou, si on veut, d'un très-grand nombre de côtés; & proposons-nous seulement de mesurer la surface Z, produite par la révolution de ce poligone. Il sera facile de passer ensuite de la mesure de cette surface à la mesure de la surface de la sphére, ainsi que nous avons passé de la mesure des figures rectilignes à celle du cercle. FIG. 9.

LXII.

POUR mesurer la surface du solide Z, examinons la petite partie de cette surface, que produit un seul côté quelconque *Mm* du poligone inscrit, pendant qu'il tourne autour du diamétre AB. Il est évident que ce côté *Mm* décrit dans ce mouvement une surface de cone tronqué V. Car en prolongeant la droite *m*M jusqu'à ce qu'elle rencontre en T le diamétre ou axe de révolution AB, si cette ligne T*Mm* tourne en même-tems que le demi-cercle AMB, elle PL. XIV. FIG. 1

décrira visiblement un cone droit ; dont le sommet sera T, & la base, le cercle décrit par le point *m*, en sorte que la surface V, produite par le mouvement de M*m*, sera une tranche de ce cone, enfermée entre les plans des cercles que les points M & *m* décrivent en tournant. Mais selon que nous l'avons vû (Article LIX.), la surface V. est égale à un rectangle dont M*m* est la hauteur, & la base, une ligne égale à la circonférence KLO, décrite par la point K, milieu de M*m*. Donc la surface produite par la révolution du poligone est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature, qu'il y a de côtés dans ce poligone, tels que M*m*.

Or comme tous les côtés M*m*, hauteurs de ces rectangles, sont supposés égaux, on pourroit regarder la surface cherchée comme un rectangle total qui auroit la hauteur M*m*, avec une base égale à la somme de toutes les circonférences telles que KL, c'eſt à-dire, décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le poligone inſcrit dans le demi cercle AMB, ayant un très-grand nombre de côtés, la petiteſſe de la hauteur *Mm*, & la grandeur exceſſive de la baſe, rendent ce rectangle inconſtructible.

Pour remédier à cet inconvénient, il eſt bien aiſé d'imaginer de charger tous ces petits rectangles en d'autres qui auroient toûjours une même hauteur, non pas imperceptible comme *Mm*, mais aſſez grande pour que chacune des baſes devînt fort petite; moyennant cela, l'addition de toutes ces petites baſes ne fera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

LXIII.

VOYONS donc ſi nous ne pourrons point changer de cette ſorte nos petits rectangles. Suppoſons d'abord, pour ſimplifier le problême, que nos rectangles, au lieu d'avoir pour baſes des lignes égales aux circonférences KL, n'ayent pour baſes, que les rayons KI de ces circonférences. Il ne nous ſera pas difficile enſuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

FIG. 2.

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui ait pour meſure le produit de M*m* par KI, & qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que M*m*, & qui ſoit la même en quelque endroit que ſoit placé ce petit côté M*m*. Choiſiſſons, par exemple, la droite CK, qui eſt l'apothéme du poligone dont M*m* eſt le côté, & qui, par conſéquent, eſt toûjours la même, à quelque côté du poligone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CR ſoit égal au produit de KI par M*m*; c'eſt-à-dire (II. Part. Art. VII.) qu'il faut trouver une quatriéme proportionnelle aux trois lignes KC, KI, M*m*. Or nous sçavons que c'est par le moyen des triangles semblables, qu'on découvre des lignes proportionnelles dans les figures, il faut donc former des triangles semblables, dont les côtés homologues soient les lignes en question; c'est ce qu'on fera en abbaissant MR, perpendiculaire à *mp*. On aura alors les triangles M*m*R, KIC, qui seront semblables; car ils seront chacun rectangle, l'un en R, l'autre en I, & de plus, ils auront les angles *m*MR, IKC égaux entr'eux, à cause que le premier fait un angle droit avec l'angle M*m*R, égal à l'angle MKI, & que l'autre IKC fait aussi un angle droit avec MKI.

De-là on peut conclure facilement que KC est à KI, comme M*m* à MR; c'est-à-dire, que MR est la quatriéme proportionnelle cherchée; ou, ce qui revient au même, que le rectangle de KC par MR ou par P*p*, est égal au rectangle de Mm par KI.

Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposés de changer, n'étoit pas celui de Mm par KI, que c'étoit celui de Mm par la circonférence dont KI est le rayon; nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entr'elles comme les rayons; ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de Mm par KI, & celui de Pp par CK, entraîne nécessairement l'égalité du rectangle de Mm par la circonférence de KI, au rectangle de Pp, par la circonférence de CK. Car on sent facilement que si deux rectangles sont égaux, & que conservant leurs hauteurs, on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

LXIV.

AYANT découvert dans les deux Articles précédens que toutes les petites surfaces coniques tronquées, telle que V (Fig. 1.) ſont égales à autant de rectangles qui auroient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence, dont KC ſeroit le rayon, & dont chacun auroit pour baſe une petite droite P*p*, correſpondant à chaque côté M*m*; on en déduira qu'une ſomme quelconque de ces petites ſurfaces, priſe depuis A juſqu'en *p*, par exemple, ſera égale à un rectangle qui auroit pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK, & pour baſe la ſomme de toutes les lignes telles que P*p*, priſes depuis A juſqu'en *p*, c'eſt-à-dire, la droite A*p*.

Donc pour avoir la ſurface totale produite par la révolution du poligone entier, il faudra faire un rectangle dont la baſe ſoit égale à la circonférence décrite du rayon CK, & qui ait une hauteur égale au diamétre AB.

L X V.

Il eſt bien aiſé maintenant de meſurer la ſurface de la ſphére. Car il eſt clair que plus il y aura de côtés dans le poligone, plus le ſolide produit par ſa révolution approchera d'être égal à la ſphére, & plus auſſi l'apothéme CK approchera d'être égal au rayon, en ſorte que ſi on peut imaginer que le poligone ſoit devenu un cercle, l'apothéme CK ſera le rayon même, & la ſurface de la ſphére aura la même étendue qu'un rectangle dont la hauteur & la baſe ſeroient, l'une le diamétre, & l'autre une ligne égale à la circonférence du cercle qui l'a produite, & qu'on appelle ordinairement le grand cercle de la ſphére.

La ſurface de la ſphére a pour meſure le produit de ſon diamétre par la circonférence de ſon grand cercle.

LXVI.

Ce que c'eſt qu'un ſegment de ſphére.

*Fig. 3.

QUANT à la ſurface courbe d'un ſegment de ſphére AMLNO*; c'eſt-à-dire, de la partie de la ſphére qu'on en retranche, lorſqu'on la coupe par un plan MLNO, perpendiculaire au diamétre; elle a pour meſure le produit de ſon épaiſſeur ou fléche AP par la circonférence du grand cercle AM

Comment on meſure ſa ſurface.

BN. La raiſon en eſt la même que celle par laquelle on a prouvé (Article LXIV.) que la ſomme des ſurfaces de tous les petits cones tronqués, compris depuis A juſqu'en *m*, eſt égale au rectangle dont la hauteur eſt A*p*, & la baſe une ligne égale à la circonférence dont CK eſt le rayon. FIG. 2.

LXVII.

LA meſure précédente de la ſurface de la ſphére, apprend que ſi on fait tourner le rectangle ABDE en même-tems que le demi cercle AMNB autour de AB, la ſurface courbe du cylindre droit EFGIKDH produit par la révolution de ce rectangle, ſera égale à celle de la ſphére décrite par le demi-cercle; ce qu'on exprime, ordinairement ainſi; la ſurface de la ſphére eſt égale à celle du cylindre circonſcrit. FIG. 4.

La ſurface de la ſphére eſt égale à celle du cylindre circonſcrit.

LXVIII.

ET ſi on coupe, tant le cylindre, que la ſphére, par deux plans quelconques

Les tranches du cylindre & de la sphére ont la même superficie.

perpendiculaires au diamétre A B, en P & en Q, les tranches de la sphére & du cylindre qui seront produites par le mouvement de la droite OS, & de l'arc MN, seront égales en superficie.

LXIX.

La surface de la sphére est égale à quatre fois celle de son grand cercle.

On voit encore, par ce qui précéde, que la surface de la sphére est égale à quatre fois l'aire de son grand cercle; car la surface de ce grand cercle a pour mesure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diamétre par la circonférence, & la superficie de la sphére est égale au produit du diamétre entier par la même circonférence.

LXX.

La mesure de la surface de la sphére étant trouvée, il est bien aisé de mesurer sa solidité; car on peut considérer la sphére comme l'assemblage d'une infinité de petites pyramides, dont les sommets sont à son centre, & dont toutes les bases couvrent la surface entiere.

Or chacune de ces pyramides ayant pour meſure le produit du tiers de ſa hauteur, c'eſt-à-dire, du rayon, pour ſa baſe, leur ſomme totale ou la ſolidité de la ſphére ſe meſurera en multipliant le tiers du rayon par ſa ſurface, c'eſt-à-dire, par quatre fois l'aire du grand cercle.

La ſolidité de la ſphére eſt le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.

LXXI.

COMME le produit du tiers du rayon, par quatre fois le grand cercle, eſt la même choſe que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'eſt-à-dire, des deux tiers du diamétre par le grand cercle, & que la ſolidité du cylindre EFGIKDH a pour meſure le produit du diamétre par le même grand cercle qui lui ſert de baſe; il s'enſuit que la ſolidité de la ſphére eſt les deux tiers de celle du cylindre circonſcrit.

La ſolidité de la ſphére eſt les deux tiers de celle du cylindre circonſcrit.

LXXII.

SI on ſe propoſoit de meſurer la

Mesure de la solidité d'un segment de sphére.

FIG. 3.

solidité d'un segment de sphére AML NO*, il est évident qu'il faudroit d'abord mesurer la portion de sphére produite par la révolution du secteur CAM; ce qui se feroit en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphére proposé AMLNO : ensuite on retrancheroit de cette mesure celle du cone produit par la révolution du triangle CPM, c'est-à-dire, le cone dont la base est le cercle MLNO, & CP la hauteur, & le reste seroit la valeur demandée du segment.

LXXIII.

NOUS finirons ces Elémens par quelques Propositions sur la solidité & sur la superficie des corps semblables. Ces Propositions se présentent fort naturellement, lorsqu'on réfléchit sur ce qui constitue la similitude de deux corps. On peut dire même qu'on ne peut guéres manquer de les découvri- par analogie, si on se rappelle ce que nous avons dit (I. Part. Art. XXXIV. & suiv.) de la similitude des figures planes; c'est-à-dire, de celles qui sont décrites sur des plans.

Nous avons déterminé (Art. XXXII.) en quoi consiste la similitude de deux pyramides; la définition que nous avons donnée alors des pyramides semblables, peut s'étendre à tous les corps terminés par des plans: c'est-à-dire, que deux corps de cette nature seront appellés semblables, si tous les angles formés par les côtés du premier sont les mêmes que les angles formés par les côtés du second, & si les côtés d'un de ces corps sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

En quoi consiste la similitude de deux corps terminés par des plans. 11.

LXXIV.

QUANT aux corps qui ne sont pas terminés de tous les côtés par des plans, les cylindres & les cones, par exemple, il est aussi facile de déterminer les conditions néceſſaires pour les rendre ſemblables.

Conditions qui déterminent la ſimilitude de deux cylindres droits.

Deux cylindres droits ſeront ſemblables ſi leurs hauteurs ſont en même raiſon que les rayons de leurs baſes.

LXXV.

Celle de deux cylindres obliques.

SI les cylindres ſont obliques, il faudra, de plus, que les lignes qui joignent les centres des deux cercles, dans chacun de ces cylindres, faſſent les mêmes angles ſur les plans de leurs baſes.

LXXVI.

Celle de deux cones.

LES mêmes définitions peuvent s'appliquer aux cones, en mettant au lieu de la ligne qui paſſe par les centres des deux baſes du cylindre, celle qui va du ſommet du cone au centre du cercle qui lui ſert de baſe.

LXXVII.

POUR que deux cones tronqués ſoient ſemblables, il faut, en premier lieu, que les cones dont ils ſont portions

tions ſoient ſemblables l'un à l'autre; & en ſecond lieu, que leurs hauteurs ſoient entr'elles comme les rayons de leurs baſes.

Celle de deux cones tronqués.

LXXVIII.

Les ſpheres, les cubes, & toutes les figures qui ne dépendent que d'une ſeule ligne, ſont toutes ſemblables

A l'égard des ſpheres, on voit bien qu'elles ſont toutes ſemblables les unes aux autres, ainſi que toutes les figures, ſoit ſolides, ſoit planes, qui n'ont beſoin que d'une ſeule ligne pour être déterminées, comme le cercle, le quarré, le triangle équilateral, le cube, le cylindre circonſcrit à la ſphere, &c.

LXXIX.

En général les ſolides ſemblables ne different que par les échelles ſur leſquelles ils ſont conſtruits.

En général on pourra dire des figures ſolides ſemblables, comme on l'a dit des figures planes, qu'elles ne différent que par les échelles ſur leſquelles elles ont été conſtruites.

Cet expoſé ſeul bien conſidéré, conduit à deux propoſitions fondamentales ſur la ſuperficie & ſur la ſolidité des corps ſemblables.

LXXX.

Les ſurfaces des ſolides ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

LA premiere Propoſition apprend que les ſurfaces de deux ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ; qu'il y a, par exemple, même rapport entre les ſurfaces des deux pyramides ſemblables *z* & Z, qu'entre les quarrés *abcd*, ABCD, faits ſur les côtés *ab*, AB, qui ſe répondent dans ces deux pyramides.

Pour découvrir cette Propoſition, on n'a beſoin que des raiſonnemens qu'on a employés (I. Part. Art. XLIII. & XLIV.), c'eſt-à-dire, qu'il faut ſeulement conſidérer que ſi P eſt l'échelle de la pyramide Z, & *p* l'échelle de la pyramide ſemblable *z*, les lignes qu'il faudra employer pour meſurer la ſurface de Z, & celle du quarré ABCD, auront le même nombre de P, qu'il y aura des parties *p* dans celles qu'il faut employer pour mesurer la surface de *z*, & celle du quarré *abcd*.

Car de-là il suit que le produit des lignes qui entrent dans la mesure de Z & de ABCD, donnera le même nombre de quarrés X faits sur P, que le produit des lignes employées à mesurer *z* & *abcd* donnera de quarrés *x* faits sur *p*. C'est-à-dire, que les nombres qui exprimeront le rapport de la surface de la pyramide Z au quarré ABCD, seront les mêmes que ceux qui exprimeront le rapport de la surface *z* au quarré *abcd*.

On feroit le même raisonnement dans la comparaison de tous les autres corps semblables, soit que ces corps fussent terminés par des plans, soit qu'ils fussent terminés par des surfaces courbes ; car les lignes employées à mesurer les superficies de tous ces corps, auront toûjours le même nombre des parties de leurs échelles, & par conséquent, les produits de ces lignes contiendront un même nombre de fois les quarrés de ces mêmes parties.

Et si les lignes nécessaires pour mesurer la superficie des corps semblables, étoient incommensurables, il est clair que la démonstration subsisteroit toûjours, pourvu qu'on employât ici les principes dont on s'est servi (II. Part. Art. XXVIII.) pour comparer les figures semblables, dont les côtés étoient incommensurables.

LXXXI.

Les surfaces des spheres sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons.

ON prouveroit de la même façon, que les surfaces des spheres sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons. Mais, pour le voir encore plus clairement d'une autre maniere, il suffira de se rappeller que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons (III. Part. Art. VI.), & que les surfaces des spheres sont quadruples de leurs grands cercles (Art. LXIX.)

LXXXII.

La proportionnalité entre les ſurfaces des corps ſemblables & les quarrés de leurs côtés homologues, eſt ſi générale qu'elle s'applique autant aux corps qu'on ne ſçait pas meſurer, qu'à ceux dont on connoît la meſure.

Sans ſçavoir meſurer, par exemple, la ſurface d'un cylindre oblique, on peut affirmer que les ſurfaces de deux cylindres obliques ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des diamétres des baſes de ces cylindres. Car en inſcrivant dans ces deux cylindres deux priſmes ſemblables de tant de faces qu'on voudra, on verra, par ce qui précéde, que les ſurfaces de ces priſmes ſeront entr'elles comme les quarrés des diametres des baſes. Donc les cylindres mêmes, conſidérés comme les derniers des priſmes inſcrits auront leurs ſurfaces dans le même rapport.

LXXXIII.

Les solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

LA Proposition fondamentale pour la comparaison de la solidité des corps semblables est celle-ci.

Les solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Cette Proposition se peut démontrer comme la précédente, en considérant que les figures semblables ne différent que par les échelles sur lesquelles elles sont construites.

Pour le faire voir le plus simplement qu'il nous sera possible, nous nous servirons, par exemple, des deux prismes semblables Z & z, & des deux cubes X & *x*, dont les côtés sont égaux à AB, *ab*, lignes analogues dans ces deux prismes ; & nous prendrons de plus deux échelles AB, *ab*, divisées en un assez grand nombre de parties, pour pouvoir mesurer les dimensions de ces solides : or cela posé, il est clair qu'il se trou-

FIG. 7. & 8.

vera pareillement autant de cubes faits ſur les parties de *ab*, dans le priſme *z*, & dans le cube *x*, que de cubes faits ſur les parties de AB dans le priſme Z & dans le cube X.

On feroit le même raiſonnement pour tous les autres ſolides; & ceux qui pourroient avoir des dimenſions incommenſurables, ſeroient auſſi dans la même raiſon que les cubes de leurs côtés homologues.

LXXXIV.

Les ſphéres ſont entr'elles comme les cubes de leurs raïons.

LES ſolidités des ſpheres, par exemple, ſont évidemment entr'elles, comme les cubes de leurs rayons.

FIN.

TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

TROISIEME PARTIE.

De la meſure des figures circulaires, & de leurs propriétés.

QUATRIEME

QUATRIEME PARTIE.

De la maniere de mesurer les solides & leurs surfaces.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de J. CHARDON.

Planche V.

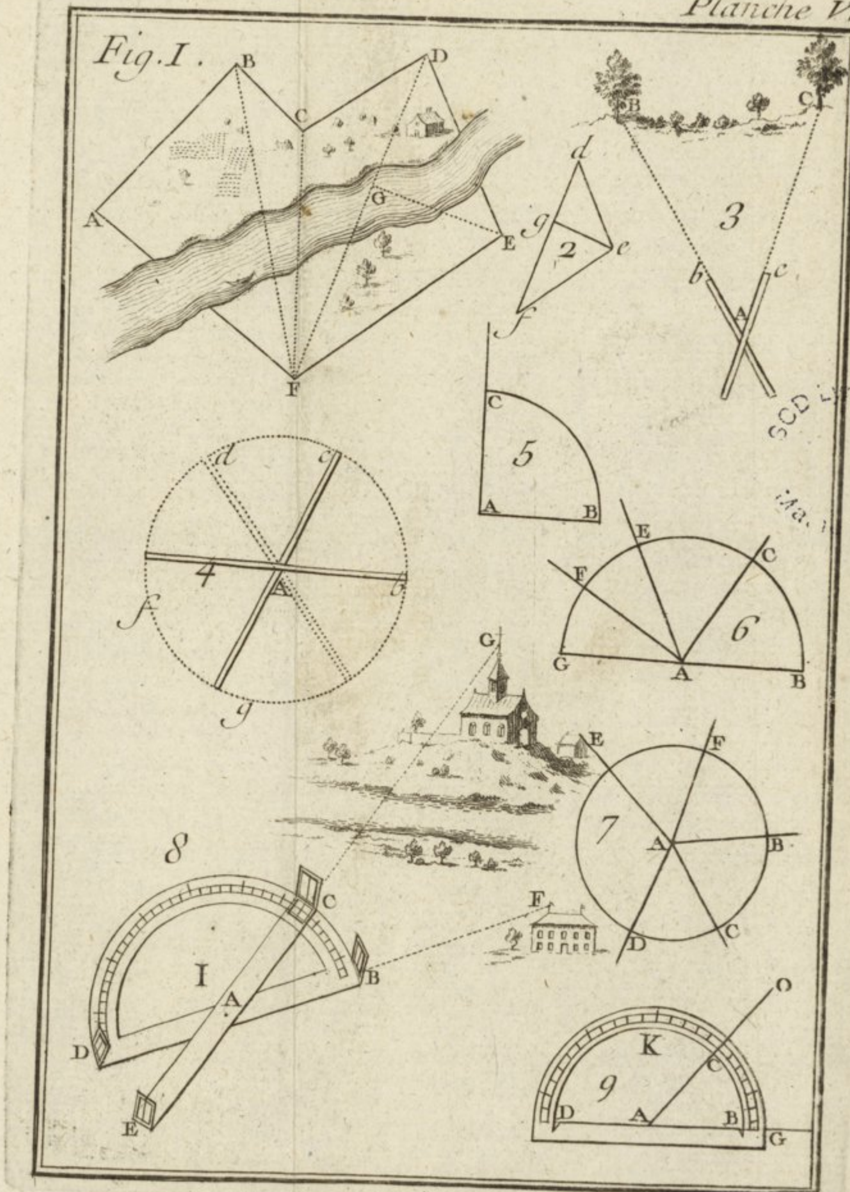
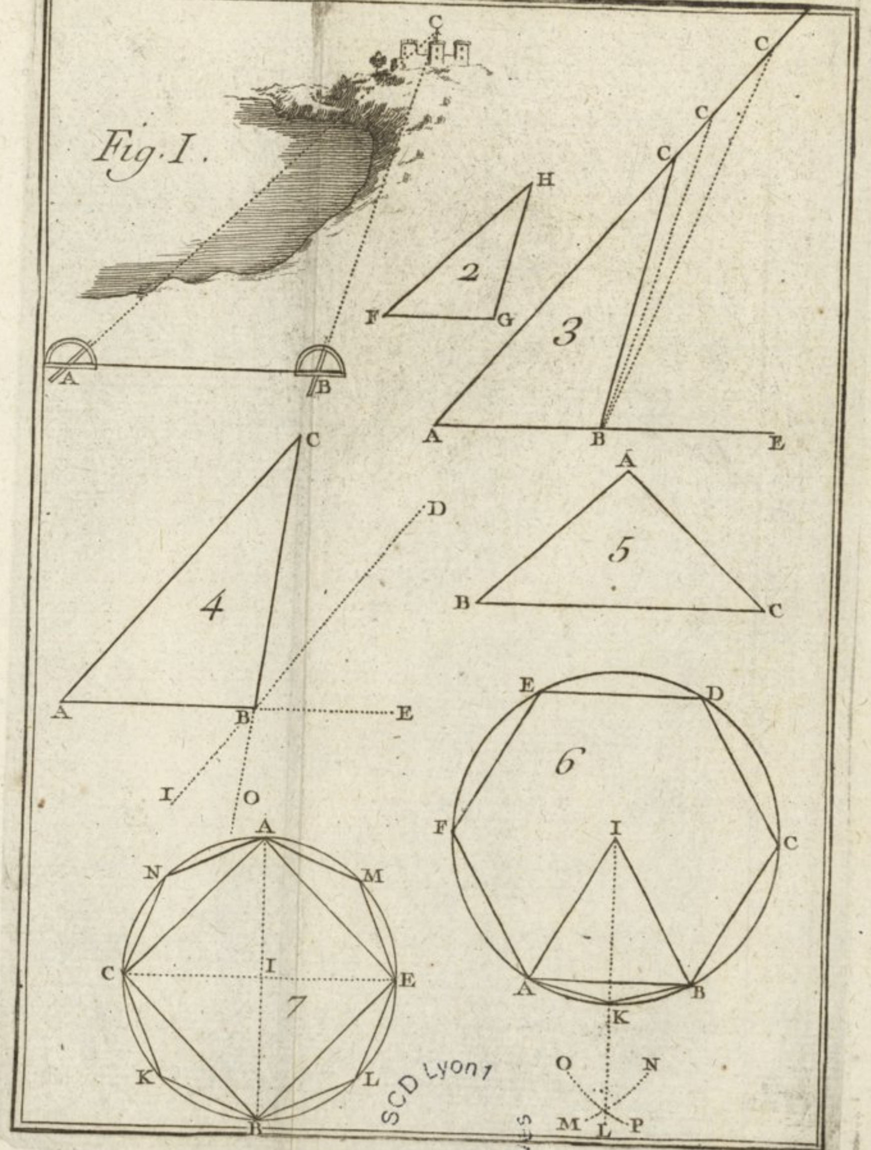


Planche VI



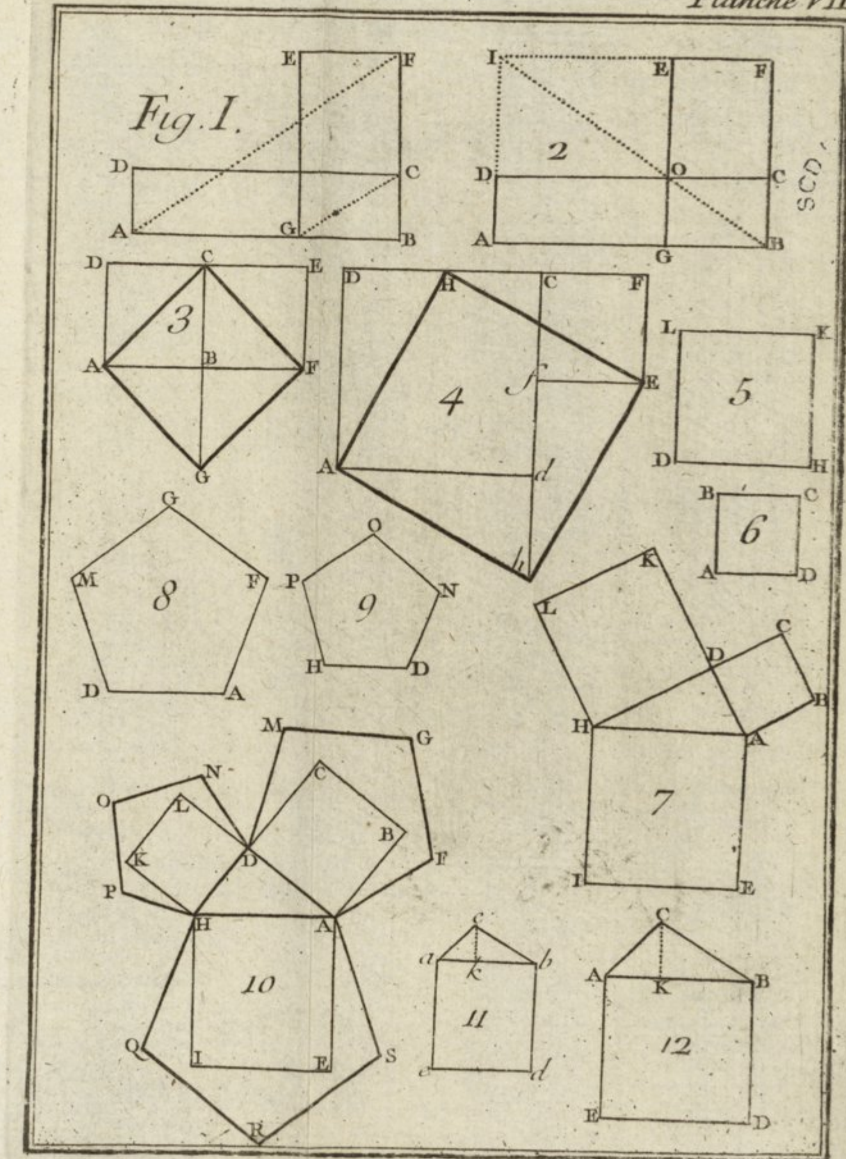


Fig. I.
E
F
D
C
A
G
B
I
E
F
2
D
O
C
A
G
B
D
C
E
3
A
B
F
G
D
H
C
F
f
E
4
A
d
h
L
K
5
D
H
B
C
6
A
D
G
M
8
F
D
A
O
P
9
N
H
D
K
L
D
C
B
H
A
7
I
E
M
G
N
O
L
C
K
D
B
F
P
H
A
10
Q
I
E
S
R
c
a
k
b
11
e
d
C
A
K
B
12
E
D

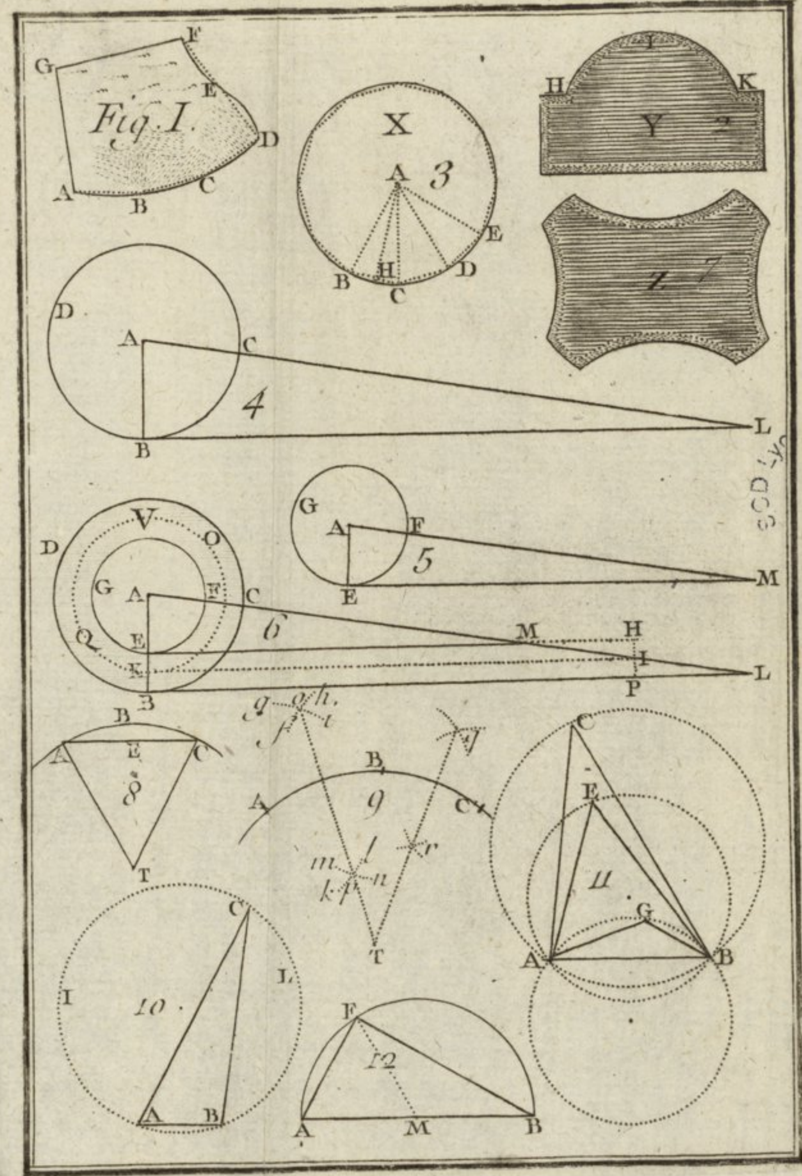
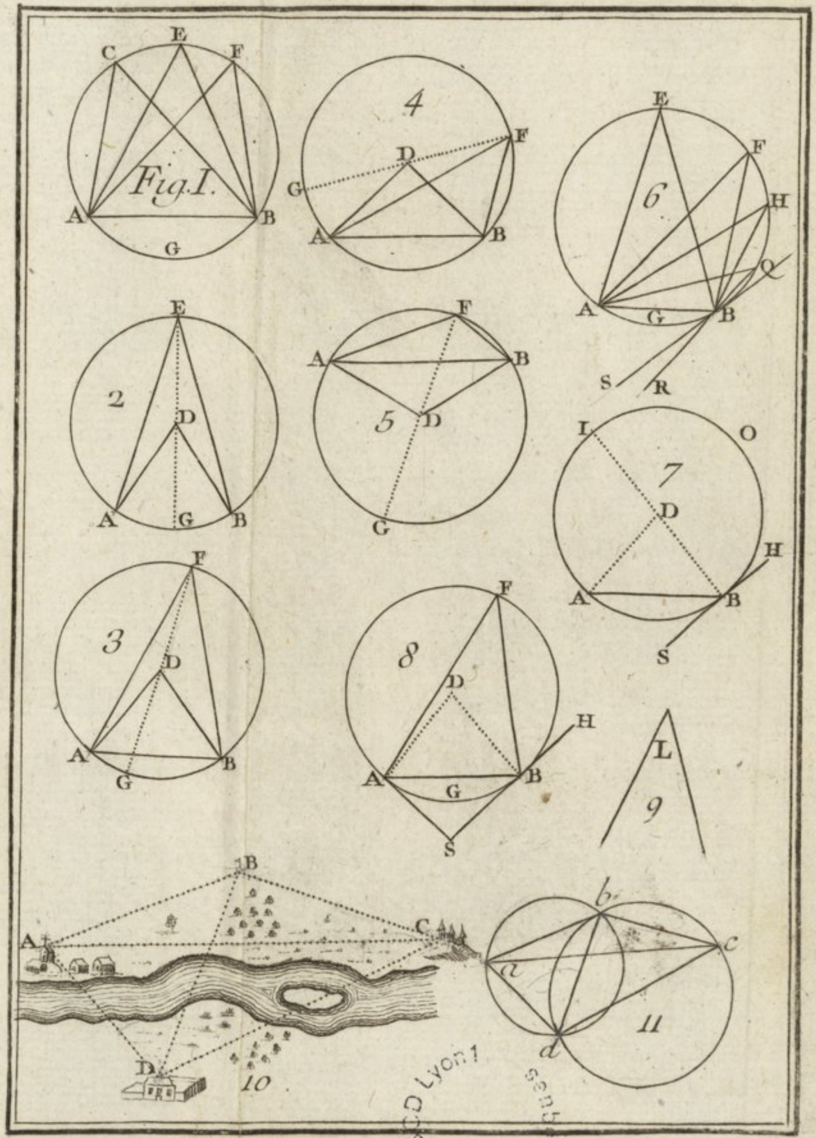


Fig. I.
G F E D C B A
X
A 3
E D C H B
H I K
Y 2
Z 7
D A C
4
B L
G A F
5
E M
V D O
G A F C
6
Q E K B
M H I P L
B A E C
8
T
g o h
f t
B
A 9 C
q
m l n
k r
T
C
E
11
G
A B
C
I L
10 .
A B
F
12
A M B

Planche IX



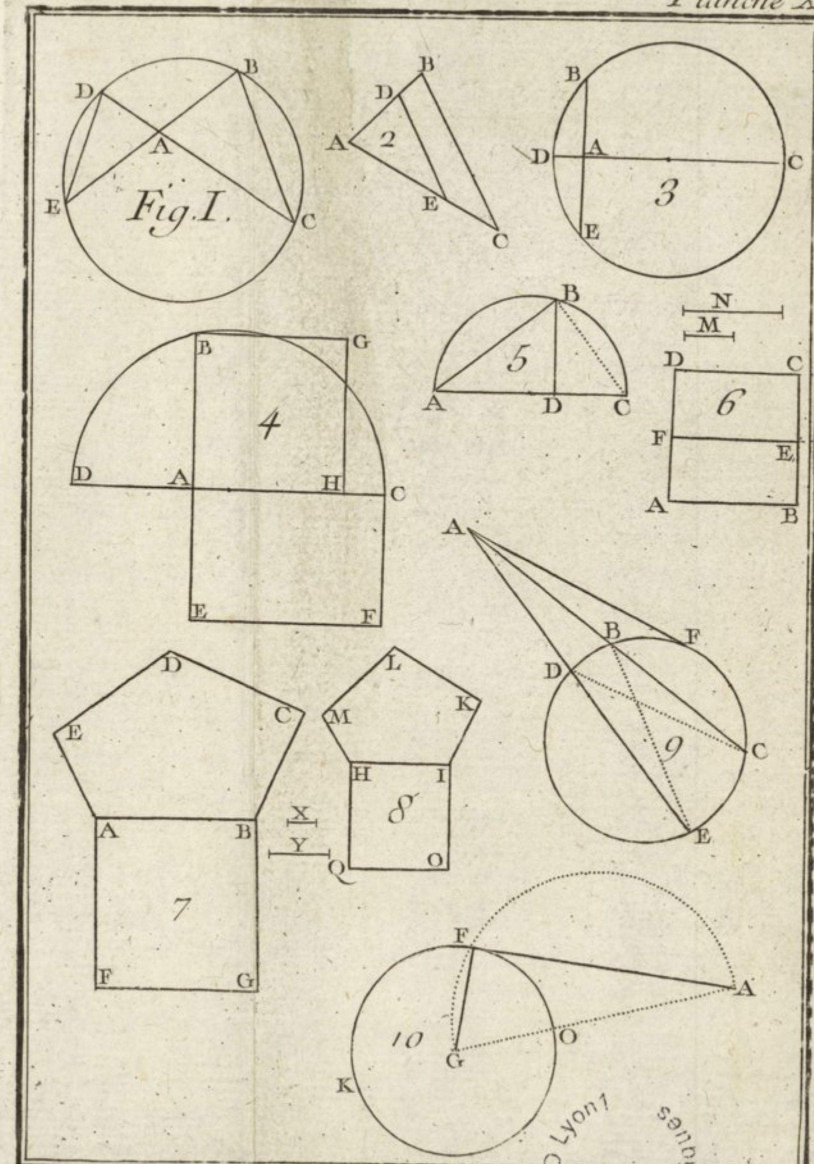


Fig. I.
D B A E C
2
B D A E C
3
B D A C E
4
B G D A H C E F
5
B A D C
N M
6
D C F E A B
7
D E C A B F G
X Y
8
L M K H I Q O
9
A B F D C E
10
F A G O K

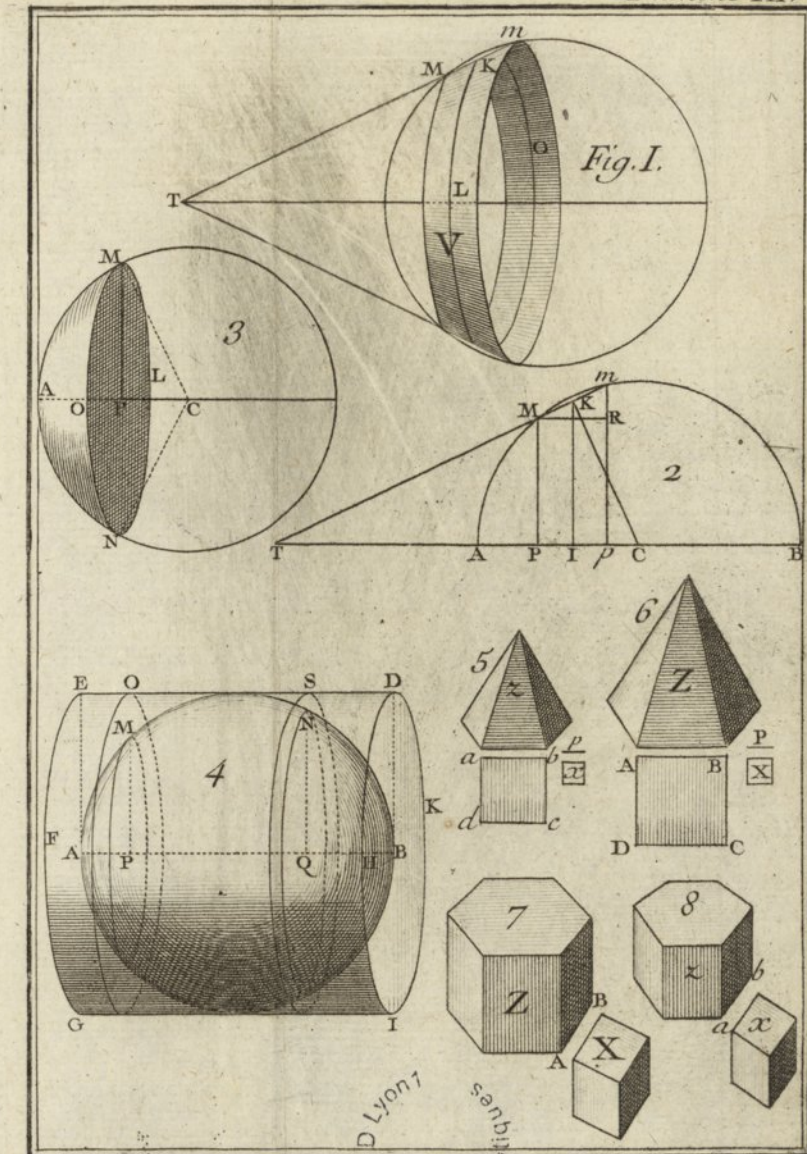


Fig. I.
m
M
K
O
T
L
V
3
M
A
O
F
L
C
N
2
m
M
K
R
T
A
P
I
p
C
B
4
E
O
S
D
M
N
K
F
A
P
Q
H
B
G
I
5
z
a
b
p
x
d
c
6
Z
A
B
P
X
D
C
7
Z
B
A
X
8
z
b
a
x