

51

15

COLLEGE POLYTECHNIQUE

COURS

DE

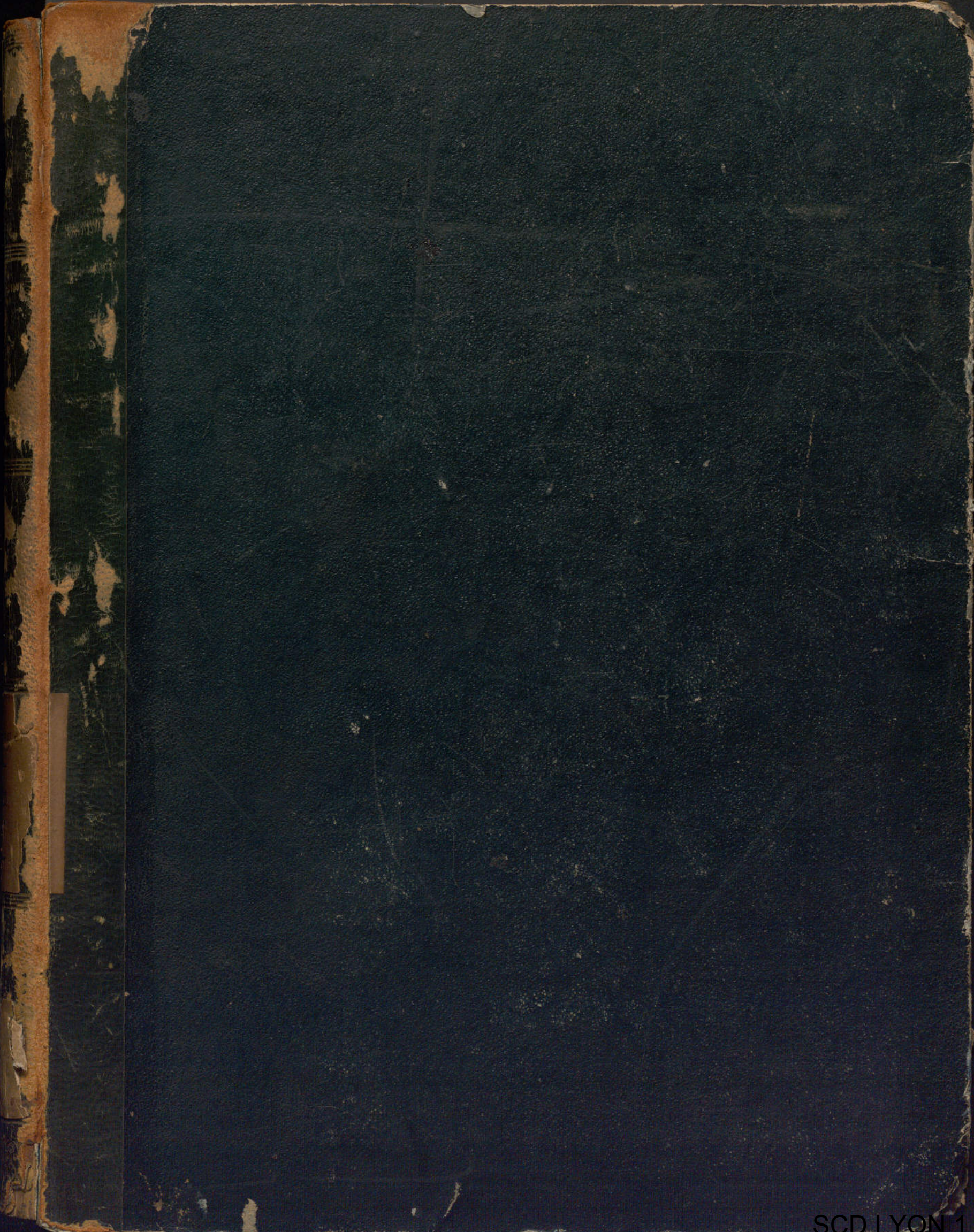
MECANIQUE

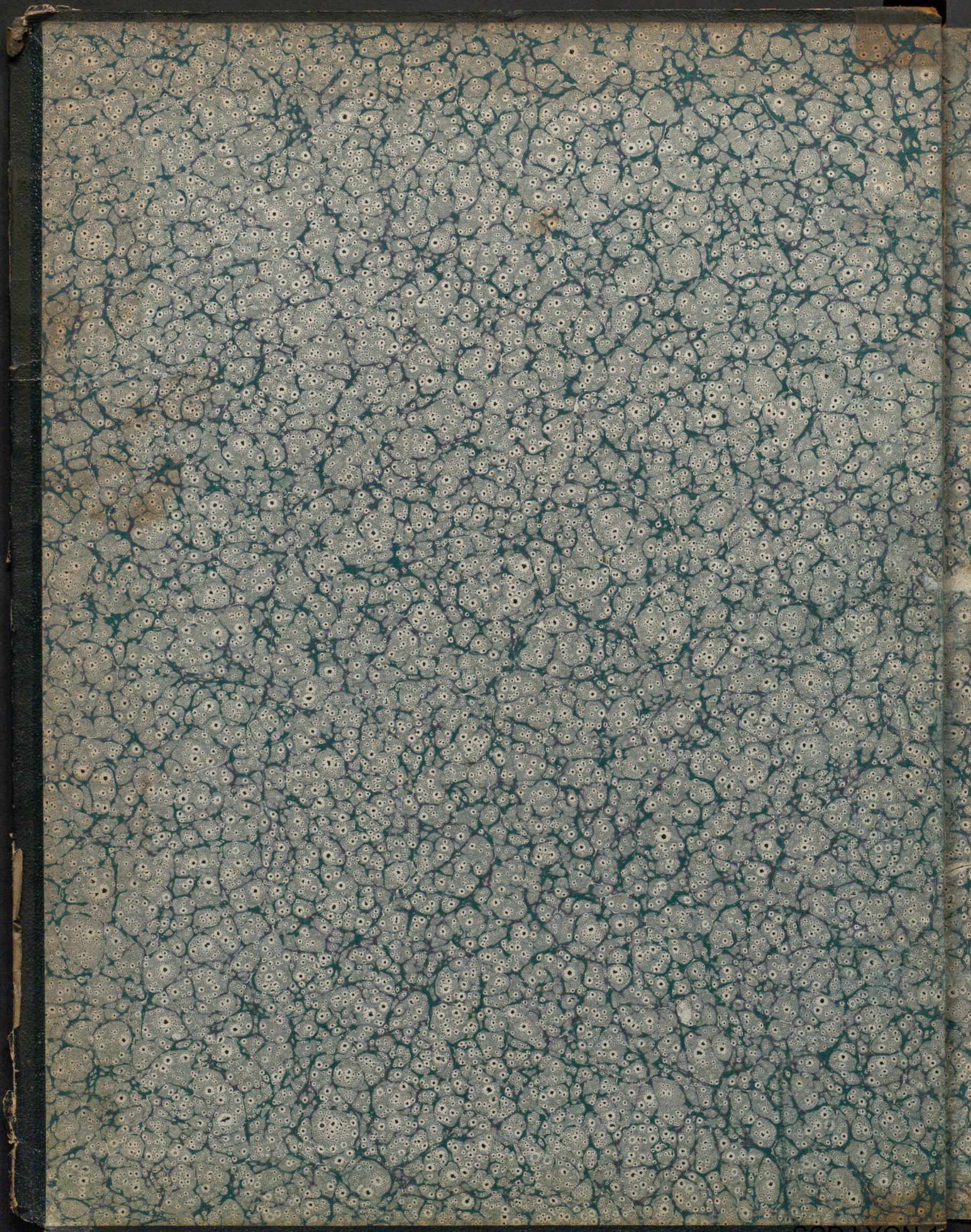
1852

1853

10.522









11.

1.

2.

3.

4.

École Impériale
Polytechnique.

Résumé

§ 113

M. Dumais

2^{ème} Division.

du

Cours de Mécanique et de Machines.

1852-1853.

Professeurs. M. Bellanger (ingénieur en chef des ponts et chaussées).
Répétiteurs. M. M. Brue et Lalou (ingénieurs des mines). (Ingénieur d'Exécution des machines. M. L'Arquoy)
(Inspecteur à l'École centrale.)

1. La Mécanique dont le nom vient du grec μηχανή machine, n'est pas seulement la science des machines; elle a en général pour objet les lois et les causes du mouvement des corps, et comprend en particulier l'étude des conditions de leur équilibre; c'est-à-dire de leur repos en présence de plusieurs causes de mouvement qui se combattent.

2. Le mouvement peut d'abord être étudié indépendamment de ses causes: cette étude constitue une branche de la Mécanique que M. Ampère (Essai sur la philosophie des sciences, 1838) a nommée Cinématique, de κίνημα mouvement.

La cinématique fait le sujet de la première partie de ce cours, dans laquelle, suivant les prescriptions du programme, nous joindrons à des considérations géométriques et absolues, quelques détails pratiques applicables à l'établissement des machines.

Les titres des chapitres et des paragraphes de ce résumé feront suffisamment connaître l'ordre des matières dont nous allons nous occuper.



1^{re} Section du Cours. - Cinématique.



Chapitre 1^{er}. - Mouvement absolu et vitesse des points et des systèmes invariables.

§ 1. - Expression du mouvement d'un point. De la vitesse.



3. A la notion géométrique des positions successives d'un point mobile; la cinématique ajoute l'idée de la mesure du temps. La notion simple du temps ou de la durée ne peut se définir; elle est acquise par l'expérience. Nous avons l'idée nette de la continuité du temps, d'une durée égale à une autre, du rapport de deux durées ou temps quelconques; dès lors le temps peut entrer comme quantité dans le calcul.

4. Une portion quelconque du temps a un commencement qui s'appelle instant initial et une fin qui s'appelle instant final. Un instant n'a pas de durée; de même qu'un point n'a pas de longueur.

2^{ème} Division.

Cours de Méc. et mach. - 1^{re} Feuille.

5. Un point en mouvement décrit une ligne continue qu'on nomme sa trajectoire. Lorsque celle-ci est une courbe, la direction du mouvement à chaque instant se définit par celle de la tangente à cette courbe, dans le sens du déplacement du mobile.

6. Mouvement uniforme. Sur une droite ou sur une courbe, le mouvement le plus simple d'un point est le mouvement uniforme: le point dans ce cas parcourt des espaces égaux, en des temps égaux, quelque petite qu'ils soient. Les portions quelconques de l'espace parcouru sont donc proportionnelles aux temps employés à les parcourir.

Formules $\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'}$, $\frac{e}{t} = \frac{e'}{t'}$, $e = at$. Dans cette dernière, t est un rapport ou nombre abstrait; a est l'espace parcouru dans l'unité de temps. C'est une longueur qui mesure l'intensité de la vitesse.

7. Pour un mouvement uniforme déterminé la quantité concrète a dépend de l'unité de temps; elle est d'autant plus grande que cette unité est elle-même plus grande. L'expression numérique de cette même quantité a dépend du choix de l'unité de longueur.

Unités ordinaires: 1° la seconde de temps = $\frac{1}{86400}$ du jour moyen solaire (le jour sidéral constant = 86164", 1...); 2° le mètre. On dit alors que la vitesse est exprimée en mètres par seconde.

Diverses expressions de la vitesse. 1 lieue (de 4 km) par heure = $\frac{10^3}{9}$ par 1". 100 pieds anglais par minute = $\frac{1}{60} \cdot 100 \cdot 0^m,3048 = 0^m,508$ par 1".

1 nœud dans la navigation maritime = 1 mille marin ou $\frac{1}{3}$ lieue marine ou $\frac{1}{60}$ degré terrestre par heure = 1851,85 par h. = 0^m,514 par 1". Idée du loch et de sa corde dont les nœuds sont espacés de $\frac{1}{120}$ de mille marin ou de 15^m,42 et filent entre les doigts du timonier pendant 30" mesurées par un sablier.

8. On définit ordinairement le mouvement uniforme d'un point sur une ligne donnée en exprimant: 1° sa position à un instant déterminé, 2° sa vitesse, 3° le sens de cette vitesse.

Formule ou équation du mouvement uniforme $s = s_0 + vt$.

s_0 est la distance de l'origine des s au point mobile, à l'instant initial des temps t . Les quatre quantités s_0 , v , t , s peuvent être positives ou négatives. Discussion des divers cas.

Formule déduite de deux positions connues à deux instants donnés, et de l'hypothèse que le mouvement est uniforme

$$s = s_1 + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} (t - t_1).$$

9. Mouvement varié. Le mouvement non uniforme est dit varié. Δs étant l'espace parcouru pendant le temps Δt succédant au temps t , le quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne durant ce temps Δt . La limite $\frac{ds}{dt}$ de $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ pour les valeurs décroissantes de Δt est la vitesse à l'instant qui termine le temps t . Formule $v = \frac{ds}{dt}$. Dans l'analyse appliquée à la mécanique, cette quantité est positive ou négative, suivant que le mouvement a lieu dans le sens positif ou négatif des distances s .

La formule $v = \frac{ds}{dt}$ et la définition qu'elle représente comprennent le cas particulier du mouve-

ment uniforme la vitesse est alors constante. Si la vitesse est variable, le mouvement est dit accéléré ou retardé, suivant que l'immensité de la vitesse, abstraction faite du sens du mouvement, croît ou décroît avec le temps.

10. — Un cas particulier du mouvement varié est le mouvement périodiquement uniforme dans lequel, pendant certaines années successives et égales, toutes les circonstances du mouvement redeviennent les mêmes.

Ex. Aiguilles d'une horloge, rone hydraulique, volant d'une machine à vapeur, marche des animaux, mouvement du soleil relativement à la terre.

11. — Moyens usuels pour observer un mouvement. 1° Des repères étant posés d'avance, on observe le temps employé à parcourir les intervalles. 2° Ou bien on marque sur le chemin parcouru les positions occupées à des instants choisis et notés pendant le mouvement, puis on mesure ultérieurement les distances. De ces deux espèces de quantités on conclut la vitesse moyenne dans chaque intervalle.

Mouvement d'un bateau relativement au cours d'eau: 1° moyen du lock; 2° flotteur perdu parcourant, relativement au bateau, une longueur mesurée sur celui-ci pendant un temps qu'on observe.

12. — Expression ou représentation de la loi du mouvement d'un point sur sa trajectoire. Trois moyens principaux:

1° Un tableau à deux colonnes dont l'une désigne les temps, comptés à partir d'un instant initial, et l'autre, les distances, mesurées à partir d'une origine de sa trajectoire.

2° Une formule ou équation. Si, par exemple, les espaces parcourus sont proportionnels aux temps, on a $s = s_0 + vt$.

Si, autre exemple, pendant des temps égaux les espaces successivement parcourus sont en progression arithmétique: ces espaces étant les différences premières des distances s comptées à partir d'une origine, on a

$$s = a + bt + ct^2 \quad \text{d'où } v = b + 2ct \text{ ou, en posant } a = s_0, \quad b = v_0, \quad 2c = j$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 \quad \text{et } v = v_0 + jt.$$

s_0 est la distance initiale, v_0 la vitesse initiale, j l'accélération constante. Dans ce cas, le mouvement est dit uniformément varié.

Si, en général, l'espace peut être exprimé en fonction du temps, de l'équation $s = F(t)$ on conclut non-seulement la position du mobile à un instant quelconque, mais encore sa vitesse par la formule

$$v = F'(t).$$

3° Une courbe dont les coordonnées sont proportionnelles les unes aux temps à partir d'un instant initial, les autres aux distances du mobile à une origine sur sa trajectoire.

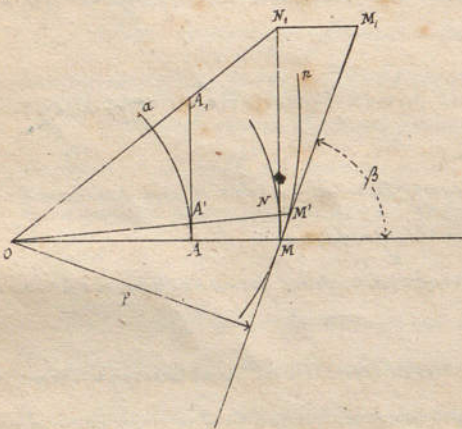
13. — Indiquons ici divers modes de représentation graphique du mouvement d'un point; on en verra bientôt l'utilité pratique.

1^{er} mode. Coordonnées parallèles à deux axes concourants. La courbe est une image

traç-expresive du mouvement progressif, rétrograde ou alternatif. Si le mouvement est uniforme la ligne représentative est droite; la vitesse est l'accroissement positif ou négatif de l'ordonnée pour une abscisse représentant à l'échelle l'unité de temps. Diverses positions de la ligne représentative suivant les signes de S_0 et de V . Pour un mouvement varié quelconque, la vitesse, à un instant déterminé, est donnée par la tangente à la courbe représentative, en son point correspondant à cet instant. Si l'inclinaison est positive, selon que la courbe est convexe ou concave vers les ordonnées négatives, le mouvement est accéléré ou retardé. Si l'inclinaison est négative c'est le contraire. Signification des points d'inflexion et de ceux où l'inclinaison est nulle. Distinction entre la vitesse instantanément nulle et le repos. Exemple: discussion du mouvement représenté par la courbe dont l'équation est $S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$; diverses positions de cette courbe suivant les signes des constantes S_0, v_0 et j .

2^e mode. Coordonnées polaires. Les accroissements de rayons vecteurs de la courbe représentative sont proportionnels à ceux des distances s , et leurs angles sont proportionnels aux accroissements du temps. Le mouvement uniforme est alors représenté par une spirale d'Archimède, et la vitesse est l'accroissement du rayon vecteur pour un accroissement d'angle représentant l'unité de temps. Dans le cas d'un mouvement varié, la vitesse qui correspond au point M^* Sob.

* Fig. 1.



tient par le tracé de la tangente MM' . On a

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{NM'}{dt}$$

Le nombre infiniment petit dt dépend du déplacement angulaire MOM' du rayon vecteur, et de l'angle choisi pour représenter l'unité de temps. Soit pour le rayon OA , l'arc $A\alpha$ qui représente cette unité: on a donc

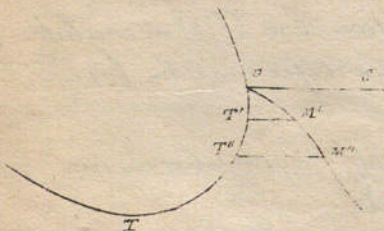
$$\text{(voir la fig.) } AA' = A\alpha \cdot dt, \text{ et par suite } v = \frac{NM'}{AA'} \cdot A\alpha$$

$$\text{or } NM' = MN \cdot \text{tang } NMM', \text{ et } AA' = MN \cdot \frac{OA}{OM}$$

$$\text{Donc } v = \frac{OM}{OA} A\alpha \cdot \text{tang } NMM' = N, M, \text{ en faisant } AA_1 = A\alpha.$$

Généralisation des deux premiers modes. Autant de moyens de déterminer un point par deux longueurs déterminées, autant de modes de représentation du mouvement d'un point sur sa trajectoire. Par exemple les temps peuvent être proportionnels aux distances $OT', OT'' \dots$ comptées

** Fig. 2.



sur la courbe OT et les espaces parcourus sur la trajectoire proportionnels aux longueurs $T'M', T''M''$ portées parallèlement à l'axe OS . Ou bien les temps étant encore représentés par les arcs $OT', OT'' \dots$ On peut prendre proportionnels au temps le nombre de degrés, ou grandeurs angulaires des arcs $T'M', T''M''$ ayant leur centre commun au point C .

*** Fig. 3. (Page 5).

§ 2. - Vitesse &c

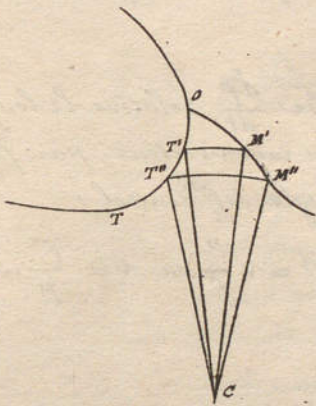
§ 2. - Vitesses simultanées d'un point et des extrémités de ses coordonnées.

14. Le mouvement d'un point est complètement défini par des relations avec le temps des coordonnées de ce point en nombre suffisant pour déterminer à chaque instant sa position.

Coordonnées sur 3 axes. Les coordonnées x, y, z d'un point mobile à la fin du temps t donnent les projections conjuguées du point à cet instant. Si pendant le temps dt , le mobile subit le déplacement élémentaire ds , les accroissements positifs ou négatifs dx, dy, dz sont tout à la fois les déplacements élémentaires des projections du mobile sur les axes, et les projections sur ces mêmes axes du déplacement ds . Par les deux extrémités de ds deux parallèles à un axe (par exemple celui des z) déterminent sur le plan coordonné (des x, y) le déplacement élémentaire dZ de la projection du mobile sur ce plan, lequel déplacement est la projection sur le plan (des x, y) du déplacement ds .

En divisant par dt les cinq déplacements élémentaires, on voit :

*** Fig. 3. (Page 14)



1°. Que la vitesse de la projection, sur un axe, d'un point en mouvement dans l'espace, est égale, pour l'intensité et le sens, à la projection, sur le même axe, de la vitesse de ce mobile;

2°. Que la vitesse du mobile dans l'espace est, en grandeur et en direction, la diagonale d'un parallélépipède dont les arêtes contiguës sont égales et parallèles, en même sens, aux vitesses des projections du mobile sur trois axes coordonnées;

3°. Que la vitesse de la projection, sur un plan, d'un point dans l'espace, est égale à la projection sur ce plan de la vitesse propre du point;

4°. Que cette dernière vitesse est la diagonale du parallélogramme dont les côtés contigus à l'origine de cette diagonale sont la vitesse de la projection du mobile sur un axe (des z) et la vitesse de sa projection sur le plan coordonné avec l'axe (plan des x, y)

Les axes, non parallèles à un même plan, sont d'ailleurs quelconques, et par conséquent, les projections sont à volonté orthogonales ou obliques.

Notation. Nous exprimerons souvent les vitesses $\frac{ds}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par v, v_x, v_y, v_z . Ces trois dernières sont négatives ou positives suivant leur sens.

Cas particulier où la trajectoire est dans un plan prise pour celui des x, y .

Les déplacements élémentaires ds, dx, dy simultanés, forment le triangle infinitésimal ou différentiel considéré, à ce qu'il paraît, pour la première fois par Barrow (géomètre anglais, professeur de Newton, à Cambridge, en 1660) à l'occasion du problème des tangentes aux courbes.

15. Coordonnées polaires. La trajectoire étant supposée une courbe plane $MM'n$, pendant

* Fig. 1. (Page 14)

2^{ème} Division.

Coma de Mév. et Mach. - 2^{ème} Feuille.

que le point mobile principal décrit l'arc élémentaire MM' ou ds , le rayon vecteur décrit l'angle $d\alpha$ représenté par AA' ; en même temps le point géométrique M , étant considéré comme fixé sur le rayon vecteur en mouvement décrit l'arc $p d\alpha$ représenté par MN ; enfin, et encore dans le même temps dt , le mobile considéré comme glissant le long du rayon vecteur y parcourt le chemin relatif NM' ou dp . Ici comme dans le cas des coordonnées ordinaires orthogonales, le triangle différentiel MNM' est rectangle; ses côtés sont proportionnels à trois vitesses simultanées, savoir: MM' ou ds à la vitesse $\frac{ds}{dt}$ ou v sur la trajectoire, MN ou $p d\alpha$ à la vitesse dite de circulation autour du pôle O , vitesse dont l'expression est $\rho \frac{d\alpha}{dt}$, enfin NM' à la vitesse relative $\frac{NM'}{dt}$ sur le rayon vecteur.

Le quotient $\frac{d\alpha}{dt}$ s'appelle la vitesse angulaire du rayon vecteur OM , à l'instant considéré. Quand il est constant c'est l'angle exprimé en nombre abstrait, que parcourt le rayon vecteur dans l'unité de temps. On peut dire aussi en général que la vitesse angulaire est la vitesse du point situé sur le rayon vecteur à l'unité de distance du centre de rotation; du reste pour un mouvement déterminé du rayon vecteur, l'expression numérique de sa vitesse angulaire est indépendante de l'unité de longueur, et ne varie qu'avec l'unité de temps. Un rayon faisant uniformément n révolutions dans le temps T a pour vitesse angulaire $\frac{2\pi n}{T}$.

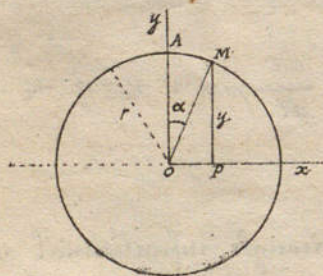
En désignant par ω la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$, par v_p la vitesse $\frac{dp}{dt}$ relative le long du rayon vecteur, par β l'angle de la trajectoire avec le prolongement du rayon vecteur; par ρ la perpendiculaire du pôle O sur la tangente MM_1 , on a, d'après le triangle différentiel:

$$v^2 = v_p^2 + \omega^2 \rho^2, \quad v_p = v \cos \beta, \quad \omega \rho = v \sin \beta = v \frac{\rho}{p} \text{ ou } v = \frac{\rho^2}{p} \omega.$$

§. 3. - Applications spéciales des notions précédentes.

16. - Mouvement oscillatoire de la projection orthogonale P sur un axe fixe ox d'un point M qui se meut uniformément sur la circonférence d'un cercle*

* Fig. 4.



$$AM = vt = \alpha r; \quad OP = x = r \sin \alpha \text{ ou } x = r \sin \frac{vt}{r}.$$

$$v = \frac{dx}{dt} = V \cos \frac{vt}{r} = V \cos \alpha = V \frac{y}{r}.$$

La vitesse v est donc proportionnelle à l'ordonnée y et de même signe.

Le théorème 1^o du n^o 14 donne le même résultat.

La courbe représentative du mouvement de P , en coordonnées ordinaires, serait une sinusoïde.

17. - Mouvement planétaire. Kepler en combinant les résultats d'un très grand nombre d'observations a trouvé les lois suivantes:

- 1^o. Chaque planète décrit une ellipse dont le soleil occupe un des foyers;
- 2^o. Les aires décrites par le rayon vecteur d'une planète sont proportionnelles aux temps employés à la décrire;
- 3^o. Les quarrés des temps des révolutions des planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.

La deuxième loi permet d'exprimer celle suivant laquelle varie la vitesse angulaire du rayon vecteur. Cette loi donne (15 et Fig. 1):

$$\frac{1}{2} p ds = C dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} p v = C.$$

On a, d'ailleurs, en général (15) $v = \frac{p^2}{p} = \omega.$

donc
$$\omega = \frac{2C}{p^2}.$$

L'observation de deux valeurs simultanées de ω et p fait connaître $2C$ produit constant des deux variables ω et p^2 .

§ 4. — Des mouvements simples des systèmes invariables.

18. — Tout mouvement d'un système de points est nécessairement fini. Mais si à un instant quelconque on n'étudie ce mouvement que sous le rapport des directions et des intensités des vitesses des différents points, en faisant abstraction de la courbure des trajectoires et de la variation des vitesses, on substitue à la considération des limites (par lesquelles on définit rigoureusement les directions et les vitesses) un énoncé plus simple, mais qui au fond a la même signification, en attribuant aux points des déplacements qualifiés infiniment petits ou élémentaires se confondant avec les tangentes, et proportionnels aux vitesses pour l'instant dont il s'agit.
19. — On distingue les mouvements, finis ou élémentaires, en mouvements simples et mouvements composés.
20. — Les mouvements simples d'un corps solide ou système invariable sont de deux espèces:
 - 1^o. Mouvement de translation. Toutes les droites qu'on peut imaginer dans le corps se déplacent en restant parallèles à leurs situations initiales. Tous les déplacements simultanés ont leurs cordes parallèles et égales. Tous les points ont des vitesses à chaque instant égales, parallèles et de même sens, pouvant d'ailleurs varier ensemble, d'un instant à un autre, d'intensité et de direction.
 - 2^o. Mouvement de rotation autour d'un axe. Tous les points du système solide conservent invariablement leurs distances aux points d'une droite ou axe fixe. Plans de rotation perpendiculaires à l'axe. Vitesse proportionnelle aux distances à l'axe. Déplacement angulaire. Vitesse angulaire constante ou variable; relation de la vitesse v d'un point

d'un point dont la distance à l'axe est r avec la vitesse angulaire ω du système au même instant :
 $v = \omega r$, (X° 15).

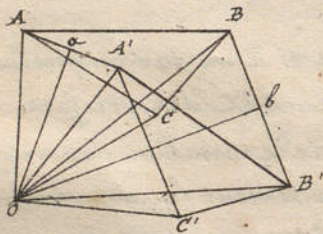
La translation et la rotation d'un système solide peuvent n'être qu'élémentaires, instantanées, c'est-à-dire qu'à un certain instant, les vitesses peuvent être toutes égales et parallèles ou toutes perpendiculaires à un même axe et proportionnelles aux distances des points à cet axe, ces conditions n'étant plus réalisées à un instant suivant.

Tout autre mouvement d'un système invariable est un mouvement composé dont la théorie géométrique sera étudiée au Chap. suivant.

21. — Théorème. Tout mouvement élémentaire d'un système qui, dans l'espace, se déplace parallèlement à un plan fixe, est un mouvement simple, c'est-à-dire que si ce n'est pas une translation élémentaire parallèle au plan fixe, c'est une rotation élémentaire autour d'un axe perpendiculaire à ce plan.

Démonstration. Quel que soit le système dans l'espace, il suffit de considérer le mouvement de sa projection orthogonale sur le plan fixe. Or, on voit aisément d'abord que si une figure plane subit un déplacement fini dans son plan, on peut toujours la faire passer de la première position à la deuxième, sinon par une translation, au moins par une rotation autour d'un point fixe. Soient en effet $AB, A'B'$ *

* Fig. 5.



les deux positions d'une droite, O l'intersection des perpendiculaires $ao, b'o$ sur AA', BB' , en leurs milieux. Les deux triangles $AOB, A'OB'$ sont égaux. Pour tout autre point C lié invariablement à AB et venant en C' on aurait $OC = OC'$ et l'angle $COC' = \text{angle } BOB' = AOA'$. Donc le point O est un centre de rotation possible pour toute figure plane entraînée en AB .

Si les droites $AB, A'B'$ sont parallèles, O est à l'infini, la rotation devient translation.

De là on conclut le 1^{er} théorème en considérant que lorsque le mouvement de la figure liée à AB n'est pas effectivement une rotation autour du point O , on peut en décomposant les trajectoires de A à A' et de B à B' en éléments, substituer à ceux-ci d'autres éléments circulaires en ne faisant à leurs longueurs et à leurs directions que des changements infiniment petits du 2^o ordre, et par conséquent sans changer les vitesses ni en intensité ni en direction. Pour les déplacements élémentaires partant de A et de B , le centre de la rotation est à l'intersection des deux normales en A et B . Ce centre O , a sa vitesse nulle quand celles des points A et A' sont finies; celles-ci sont proportionnelles aux distances $AO, A'O$, au point O , comme si la figure tournait effectivement autour de ce point qui d'ailleurs, en général change à chaque instant à mesure que la figure se déplace; c'est pourquoi ce point O , s'appelle centre instantané de rotation, point inné à chaque instant puisqu'il est impossible que deux points d'une figure plane soit sans vitesse quand elle se meut dans son plan.

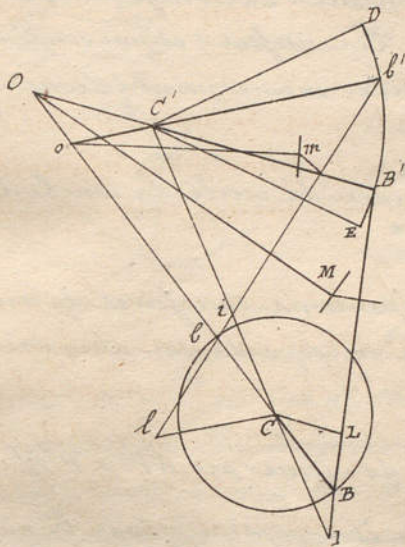
Si l'on agit d'un système invariable qui dans l'espace se meut parallèlement à un plan, la ligne $AB, A'B'$ étant les projections orthogonales sur ce plan de deux positions d'une droite du système, le point O , est la projection et la trace sur le même plan de l'axe instantané de rotation

du système.

Suivant la définition déjà donnée, le rapport commun, à un instant déterminé, des vitesses de tous les points de la figure plane ou du système aux distances de ces points à l'axe instantané de rotation est, à l'instant considéré, la vitesse angulaire du système, (15 et 20)

22. - Exemples de rotation instantanée: 1^o Liaison géométrique* d'un balancier tournant autour de C' et d'une manivelle tournant autour de C par une bielle B'B.

* Fig. 6.



L'articulation supérieure oscille de D en E; l'articulation inférieure décrit un cercle entier. A l'instant où la position du système est celle de la figure, on demande quels sont les rapports des vitesses des points B' et B, et d'un point quelconque M invariablement lié à la bielle.

O intersection des normales B'C', BC, est le centre instantané de rotation de la bielle. Si v, v' et u sont les vitesses de B, B' et M, on a

$$\frac{v}{BO} = \frac{v'}{B'O} = \frac{u}{MO}$$

Ce sont trois expressions de la vitesse angulaire instantanée de la bielle autour de O. Le point M décrit une courbe dont la tangente est perpendiculaire à MO.

De $\frac{v}{BO} = \frac{v'}{B'O}$ on conclut $v \sin OBB' = v' \sin OB'B$, pro-

jections égales des deux vitesses v, v' sur BB', ce qu'on peut démontrer a priori.

Si l'on appelle ω la vitesse angulaire de la manivelle autour de C', et ω' celle du balancier autour de C' à l'instant considéré, on a, en menant CL parallèle à C'B' :

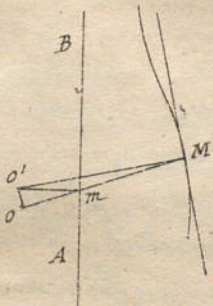
$$\frac{\omega \cdot BC}{\omega' \cdot B'C'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{BC}{CL} \text{ d'où } \omega \cdot CL = \omega' \cdot C'B' \text{ et } \omega \cdot CI = \omega' \cdot C'I.$$

Mêmes propriétés quand la bielle passe comme bb' entre C et C'. $\omega Ci = \omega' C'i$.

Cet exemple montre bien: 1^o Que la rotation instantanée de BB' autour de O n'est pas une rotation effective, puisque B' et B tournent réellement autour de C' et de C; 2^o Que le centre O est par le centre de courbure des courbes décrites par B, B', M... &c.

23. - 2^o Conchoïde* - AB directrice, OM rayon vecteur, m.M. longueur constante. Le point O' intersection de mO' perpendiculaire à AB et de OO' perpendiculaire à OM, est le centre instantané de rotation de la droite mobile m.M qui peut être considérée comme entraînant avec elle le point, actuellement situé en O, dont la vitesse est par conséquent suivant Om.

* Fig. 7



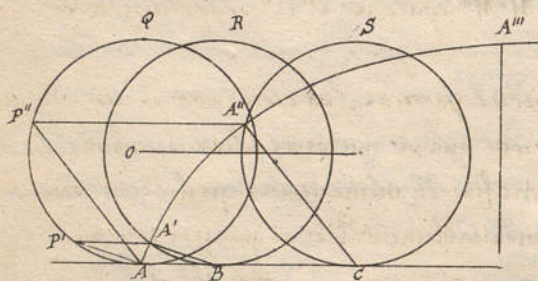
2^o Division.

3^o Les sommets A et B d'un triangle ABC se meuvent sur les droites fixes OM, ON. Construire la courbe décrite par le sommet, tracer les tangentes en quelques points de cette courbe.

25. 4°. Mouvement d'une courbe plane roulant, sans glissement, sur une autre courbe, dans le même plan (mouvement épicycloïdal. A étant le point de contact actuellement commun aux deux courbes, B et B' deux points qui coïncideront à un autre instant, il faut que les arcs AB , AB' soient égaux pour qu'il n'y ait pas glissement. - Si AB est infiniment petit, BB' est infiniment petit d'un ordre supérieur, puisque l'angle BAB' a pour limite zéro. - Le point A considéré comme appartenant à la courbe mobile est en mouvement, mais sa vitesse est nulle. Il est donc le centre instantané de rotation du système des points liés invariablement à la courbe mobile. Les vitesses de tous ces points sont proportionnelles à leurs distances à ce point. Ces vitesses, et par conséquent les courbes décrites, ont actuellement leurs normales passant par ce même point de contact A , propriété remarquable par Descartes.

26. - Lorsque la ligne fixe est droite et la courbe mobile une circonférence de cercle, la courbe décrite par un point quelconque de cette circonférence est une cycloïde*.

* Fig. 8.



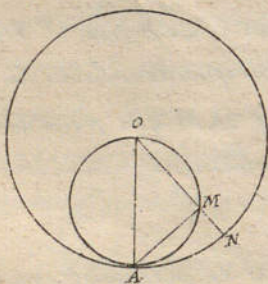
$AP'Q$, $BA'R$, $CA''S$ positions successives du cercle mobile; A , A' , A'' , positions correspondantes d'un même point. On a

$$AB = \text{arc } BA' = A'P'; \text{ de même arc } AP'' = P''A''.$$

La cycloïde peut donc être exprimée par l'équation $x = y$ en comptant la x sur la première circonférence $AP'Q$, et la y parallèle à ABC . Les normales en A' , A'' , sont $A'B$, $A''C$ parallèles à AP' , AP'' , puisque B et C sont les centres respectifs de rotation instantanée correspondants aux positions $BA'R$, $CA''S$ du cercle mobile (on pourrait, par un triangle infinitésimal, démontrer a priori cette propriété de la normale). On sait que le rayon de courbure en A' est double de $A'B$; le centre O décrit une droite. Ceci confirme que les centres instantanés de rotation ne sont pas des centres de courbure.

27. - Lorsque la courbe mobile est un cercle roulant sur un cercle, la courbe décrite par un point de la première circonférence est une épicycloïde extérieure ou intérieure, qui, dans un cas particulier, est une droite; (l'arc AM^* a deux fois autant de degrés que AN ; son rayon est moitié de AO ; donc les longueurs des arcs AM , AN sont égales.)

* Fig. 9.



* Fig. 7. - (Pages suivantes)

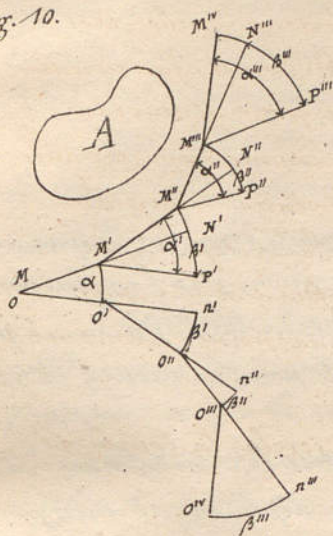
28. - Théorème: Tout mouvement d'une figure plane dans son plan se réduit à un mouvement épicycloïdal, dans lequel la courbe fixe est le lieu des centres instantanés de rotation.

Pour démontrer cette proposition réciproque de la remarque faite au N° 26, on substitue à la courbe des centres instantanés de rotation un polygone dont les sommets (qui pourraient ensuite être rapprochés indéfiniment) sont des centres de rotation effective.

Soit A^* une figure quelconque et soit O son centre de rotation actuel. Supposons qu'autour de O elle tourne effectivement

d'un angle α ; qu'ensuite elle tourne autour de O' et se déplace d'un angle α' ; que la figure A tourne alors autour de O'' avec un déplacement angulaire α'' ;

Fig. 10.



qu'ensuite la rotation se fasse autour de O''' avec un déplacement angulaire α''' , et ainsi de suite. Avec ces données, qui résultent du mouvement défini de la figure A , c'est-à-dire avec le polygone de centres de rotation O, O', O'', \dots et les déplacements angulaires $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \dots$ qui leur correspondent, il est facile de construire un polygone $M, M', M'', M''' \dots$ qui, lié invariablement à la figure A , soit tel qu'en le faisant rouler sur le polygone O, O', O'', \dots , la figure A subisse les mouvements qui viennent d'être exprimés.

Désignons par $\beta', \beta'', \beta''' \dots$ les angles $\pi' O' O''$, $\pi'' O'' O'''$, $\pi''' O''' O'''' \dots$, il suffira de tracer $MM' = OO'$ et faisant l'angle $M'O O' = \alpha$; puis $M'M'' = O'O''$ et faisant avec le prolongement $M'N'$ l'angle $M''M'N' = \alpha' - \beta'$; puis $M''M'''$ égale à $O''O'''$ et faisant avec $M''N''$ l'angle $\alpha'' - \beta''$, et ainsi de suite.

En considérant les longueurs $OO', O'O'' \dots$ comme infiniment petites, et étendant à un corps solide ce qui vient d'être dit d'une figure plane, on voit que quand un corps solide se meut parallèlement à un plan, l'axe instantané décrit dans l'espace absolu un cylindre fixe en même temps qu'il décrit par rapport au corps lui-même un second cylindre mobile auquel il peut être censé invariablement lié, et qui par son roulement sans glissement sur le premier reproduit exactement le même mouvement du corps quel qu'il soit.

29. — Théorème. Tout mouvement élémentaire d'un système solide dont un point est sans vitesse est une rotation simple autour d'un axe passant par ce point. Pour le démontrer il suffit d'appliquer à une figure sphérique le raisonnement du N° 21.

30. — Remarque. — Si une surface conique roule sans glisser sur une autre fixe ayant même sommet, tous les points liés invariablement à la première ont, dans chaque position, pour axe instantané de rotation, la droite de contact des deux cônes.

Lorsque les deux cônes sont de révolution, la courbe décrite par un point quelconque d'une section circulaire du cône mobile s'appelle une épicycloïde sphérique.

31. — Théorème. Réciproque de la remarque précédente. Le mouvement d'un corps solide qui pivote autour d'un point fixe se réduit à un mouvement épicycloïdal sphérique. L'axe instantané décrit alors dans l'espace un cône fixe et décrit en même temps par rapport au corps lui-même un second cône mobile avec ce corps auquel on peut le concevoir lié invariablement, et qui, par son roulement sans glissement sur le premier, reproduit le mouvement réel du corps quel qu'il soit.

La démonstration est analogue à celle du N° 29, en prenant les points $O, O', O'' \dots$ à une distance constante du centre fixe de rotation et en considérant les angles $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \dots, \beta', \beta'' \dots$ comme des angles dièdres.

Chap. 2. - Composition des Mouvements.

§. - Composition des vitesses d'un point.

32. - Un point nous paraît en mouvement lorsqu'il change de position par rapport à un corps que nous jugeons être en repos: on donne une précision mathématique à cette définition, par l'ingénieuse conception des coordonnées parallèles à trois axes fixes, concourants et non situés dans un même plan: si l'une au moins des trois coordonnées varie d'un instant à un autre, le point se meut, et réciproquement.

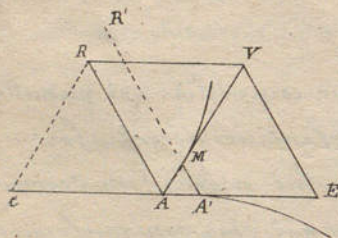
Mais si le système rigide pris pour base, ou, ce qui revient au même, si les trois axes de comparaison sont eux-mêmes en mouvement dans l'espace immobile, le déplacement d'un point M , constaté par les variations de ses coordonnées, n'est plus, comme dans le premier cas, un mouvement absolu dans l'espace immobile, mais un mouvement relatif dans l'espace mobile entraîné avec les axes de comparaison.

Ce mouvement relatif s'appelle aussi mouvement apparent, parce que si l'on imagine qu'un observateur entraîné à son insu dans le mouvement des axes de comparaison considère ceux-ci comme fixes (ce qui nous arrive continuellement dans les questions de mécanique où nous faisons abstraction du mouvement de la terre), on voit que cet observateur attribuera au point M un mouvement qui sera précisément son mouvement relatif dans le système des axes.

33. - Le mouvement relatif d'un corps dans un système rigide de figure définie est lié à son mouvement absolu et au mouvement des axes, de telle manière que l'un de ces mouvements est la conséquence nécessaire des deux autres. De là la question suivante:

Problème. Trouver les relations entre la vitesse relative v_r d'un point, sa vitesse absolue v et le mouvement du système rigide de comparaison.

* Fig. 11.



A^* position d'un point à un instant déterminé.

$AV = v$ une droite représentant, en direction et en intensité, sa vitesse absolue.

$AE = v_e$ une droite représentant de même la vitesse avec laquelle le point A considéré comme point géométrique lié au système de comparaison est entraîné dans le mouvement de ce dernier. Cette vitesse est appelée vitesse d'entraînement et diffère en général de celle d'un point pris à volonté sur le système de comparaison, sauf le cas où le mouvement de ce système est une translation.

Dans un temps infiniment petit dt , le mobile principal sera transporté en M sur AV à une distance $AM = v dt$, tandis que le point géométrique A lié au système de comparaison sera entraîné en A' à une distance $AA' = v_e dt$; donc l'observateur qui, emporté avec ce

systeme, considererait le point A comme fixe pendant son transport en A' attribuerait au mobile un mouvement en vertu duquel celui-ci parcourrait un espace infiniment petit egal à $AM' = v_p dt$. Les cotés du triangle AMA' sont donc proportionnels aux vitesses v, v_e, v_r ; ce qui determine l'intensité de $v_r = EV$.

Quant à sa direction, c'est la limite des positions de la droite AM à mesure qu'on fait décroître le temps dt ; c'est une parallèle à EV menée par A.

34. — En achevant le parallelogramme $AEVR$, on conclut:

Théorème: La vitesse absolue est représentée en grandeur et en direction par la diagonale d'un parallelogramme dont deux cotés représentent de même l'une la vitesse d'entraînement, l'autre la vitesse relative. — La première est dite la résultante des deux autres.

On peut dire encore que la vitesse relative AR est la résultante de la vitesse absolue AV et d'une vitesse Ae égale et opposée à la vitesse d'entraînement AE .

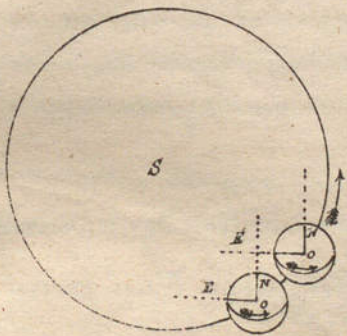
35. — Il est à remarquer que la vitesse absolue est la même quelle que soit celle de ses deux composantes que l'on prenne pour vitesse d'entraînement, l'autre étant alors la vitesse relative. Cette propriété justifie jusqu'à un certain point l'usage reçu de dire qu'un point peut être animé simultanément de deux vitesses ou de deux mouvements.

36. — Dans le cas particulier où la vitesse absolue est nulle, la vitesse d'entraînement et la vitesse relative sont égales et opposées, et si le mouvement du systeme de comparaison est une translation, chacun de ses points décrit une trajectoire symétrique de la trajectoire apparente du point principal.

37. — Composition d'un nombre quelconque de vitesses. Un point ayant une certaine vitesse relative à des axes mobiles, ceux-ci peuvent avoir eux-mêmes un certain mouvement relativement à d'autres axes aussi mobiles.

Exemple: Un boulet est lancé d'un point de la terre avec une vitesse apparente V' ; le point de départ considéré relativement à l'axe des pôles ON^* et à une autre droite OE dirigée du centre dans l'équateur parallèlement à une droite fixe de l'espace; à un mouvement de rotation uniforme autour de cet axe des pôles, il a donc, à ce point de vue, une vitesse relative V'' ; enfin l'axe des pôles ON et la droite OE ont un mouvement commun de translation curviligne autour du soleil, mouvement dont la vitesse V''' peut être considérée comme absolue. Ainsi la vitesse du point de départ est la résultante de V''' (vitesse d'entraînement) et de V'' vitesse relative. Ensuite la vitesse du boulet est la résultante de la vitesse du point de départ qui devient vitesse d'entraînement) et de la vitesse V' .

* Fig. 12.



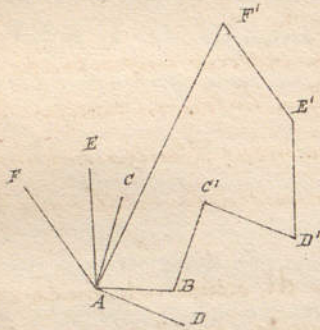
En composant V''' et V'' puis la résultante avec V' et en généralisant les conséquences de cette composition successive, on voit comment on est conduit à considérer une vitesse comme la résultante d'autant de composantes qu'on veut. On voit aussi que cette résultante est représentée en grandeur et en direction par la droite partant du point mobile et fermant un contour polygonal qui,

2^{ème} Division.

Cours de Méc. N. Mach. - 4^{ème} Feuille.

* Fig. 12
page 14.)

* Fig. 13.



à partir de ce même point à ses côtés égaux et parallèles en même sens aux droites qui représentent de même les vitesses composantes.

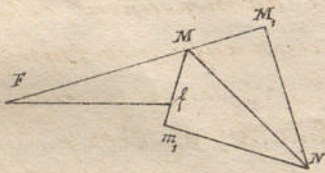
38. — On déduit de là diverses conséquences géométriques ou trigonométriques, entre autres celles-ci : La projection de la vitesse résultante sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des vitesses composantes sur le même axe, et la projection de la même vitesse résultante sur un plan est la résultante des projections des vitesses composantes sur le même plan.

39. — Application : Méthode de Roberval pour la recherche des tangentes aux courbes. Si une courbe est considérée comme décrite par un

point dont la vitesse soit la résultante de plusieurs autres, il suffit de connaître les directions et les rapports des vitesses composantes pour en conclure la direction de la tangente. C'est le principe de la méthode de Roberval, géomètre français du 17^e siècle.

Ex. l'ellipse dont on a un point M^* et son foyer F, f . étant supposée décrite par une pointe qui glisse le long du rayon vecteur FM tournant autour de F , soit MM_1 la vitesse relative suivant le rayon ; la vitesse absolue est l'hypoténuse inconnue MN du triangle MM_1N dont le côté serait la vitesse d'entraînement du point M en vertu de la rotation de FM . Mais on peut considérer aussi la courbe comme décrite par une pointe glissant sur Mf avec la vitesse Mm_1 égale à MM_1 , puisque le 2^e rayon vecteur diminue autant que l'autre augmente. Donc l'extrémité de la droite représentant la vitesse est en N , rencontre des deux perpendiculaires M_1N, m_1N , &c.

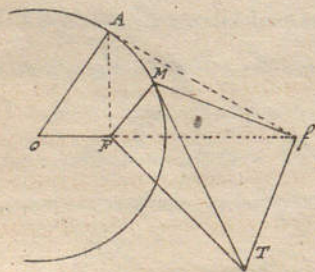
* Fig. 14.



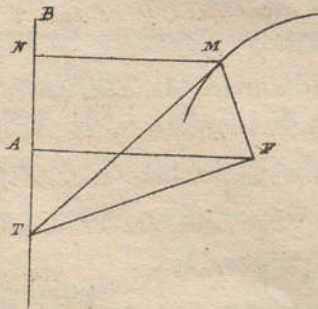
La même méthode s'applique au cercle défini par la condition que les deux rayons vecteurs FM, fM sont dans un rapport constant** et à une section conique dont on a un foyer F' et la directrice correspondante AB **.

M. Duhamel a signalé depuis longtemps l'erreur que d'autres savants avaient commise en considérant la vitesse sur la trajectoire comme étant la résultante des vitesses du point décrivant sur deux rayons vecteurs.

** Fig. 15.



*** Fig. 16.



§ 2. — Composition des mouvements élémentaires d'un point.

140. — Le déplacement élémentaire absolu AM ou ds ou $v dt$ d'un point principal ayant lieu en même temps que le mobile, subit le déplacement relatif $ds_r = v_r dt$ dans un système de comparaison qui emportant le point géométrique A l'oblige à un dépla.

cement d'entraînement $de = v_e dt$, il est clair qu'on a entre les trois déplacements élémentaires $v dt$, $v_r dt$, $v_e dt$, les mêmes relations qu'entre les trois vitesses v , v_r , v_e .

Il en résulte, qu'abstraction faite de la courbure des trois trajectoires (réserve importante sur laquelle nous reviendrons plus tard N° 59 et suiv.) la position M du mobile à la fin du temps dt s'obtient en faisant partir de A une brisée $AA'M$ dont les côtés sont le déplacement d'entraînement AA' et le déplacement relatif $A'M$, l'un des deux étant transporté parallèlement à la vitesse qui lui correspond.

On en conclut que le mobile principal parti de A au commencement du temps dt occupe à la fin de ce temps le même lieu que s'il avait parcouru successivement les deux déplacements composants $AA' = v_e dt$ et $A'M = v_r dt$ en commençant indifféremment par l'un ou par l'autre.

On emploie fréquemment cette considération de mouvements successifs qu'on peut même prendre pour notion fondamentale de la composition des mouvements. Mais lorsque, pour se conformer à la réalité des phénomènes que la nature nous présente, on considère les mouvements composants et le mouvement résultant comme simultanés, on admet plus ou moins explicitement la notion nécessaire des mouvements relatifs.

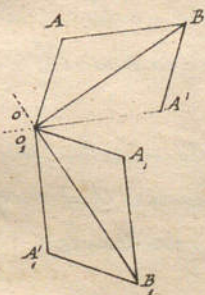
§ 3. — Composition des mouvements simples d'un corps solide.

41. — 1° Composition des mouvements de translation. — Si le mouvement d'entraînement, c'est-à-dire celui du système de comparaison est une translation, et qu'il en soit de même du mouvement, relativement à ce système, d'un autre système rigide, le mouvement absolu de celui-ci est aussi une translation. Car pour deux points M' , M'' , quelconques les vitesses v'_e , v'_r et v''_e , v''_r sont respectivement égales, parallèles et de même sens; donc il en est de même des vitesses absolues v' , v'' . Cette proposition s'étend évidemment à un nombre quelconque de mouvements de translation composants. Si ces derniers sont rectilignes et uniformes il en est de même du mouvement absolu.

Décomposition d'une translation quelconque en trois translations rectilignes parallèles à trois axes non parallèles à un même plan. La vitesse du mouvement composant parallèle à l'axe des x , à un instant quelconque est la vitesse de la projection d'un point du système sur cet axe, projection faite par des plans parallèles aux deux axes des y et des z .

42. — Composition des mouvements de rotation autour d'axes concourants. — Soient deux axes OA , OA' *

* Fig. 17.



qui avec une troisième droite, par exemple, avec la perpendiculaire projetée en O forment le système solide de comparaison. Supposons que son mouvement absolu (qui est un mouvement d'entraînement) soit une rotation effective ou seulement instantanée autour de la droite OA avec une vitesse angulaire ω . En même temps un système solide M (qu'on peut imaginer comme formant un corps réel, matériel) dans son mouvement relativement au système OAA' tourne autour de OA' avec une vitesse angulaire ω' .

Le point O étant actuellement sans vitesse dans le corps M , il s'ensuit (30) que ce corps a un axe instantané de rotation passant par O , c'est-à-dire qu'il y a actuellement une droite, liée au solide M , dont tous les points ont leur vitesse nulle. Il s'agit de trouver sa situation actuelle et la vitesse angulaire du corps M autour de cette droite.

Pour fixer les idées, supposons que les longueurs OA , OA' soient proportionnelles aux vitesses angulaires ω , ω' ; supposons en outre que le sens de chaque rotation soit tel que si un observateur, placé en O , dirigeait sa vue tantôt vers A , tantôt vers A' , il verrait la rotation d'entraînement et la rotation relative se faire dans le même sens que le mouvement d'une aiguille d'horloge; (c'est le sens que les astronomes appellent sens direct des rotations autour d'axes qui partant d'un point du système solaire se dirigent vers la région céleste où se trouve le pôle boréal; c'est le sens de la rotation diurne de la terre et de son mouvement annuel, autour de tels axes; c'est le sens de la rotation d'une vis ordinaire qu'on enfonce, &c.)

D'après ces conventions, les droites OA et OA' pourront à juste titre être nommées les axes représentatifs des deux rotations dont il s'agit.

De plus pour abréger le langage, supposons que le plan AOA' soit horizontal.

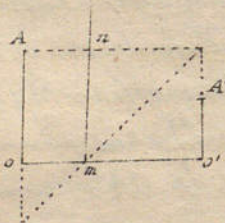
Il est aisé de voir que pour aucun des points du corps M situé hors de ce plan AOA' , la vitesse absolue résultante des deux vitesses d'entraînement et relative ne peut être nulle; c'est donc dans ce plan qu'est l'axe instantané cherché.

Pour trouver sa direction et en même temps l'intensité de la vitesse angulaire absolue du corps M , élevons en O une verticale, qui sera par conséquent perpendiculaire à l'axe cherché; supposons cette verticale égale à l'unité de longueur, et cherchons la vitesse absolue de son extrémité supérieure O_1 . Or ce dernier point aura sa vitesse d'entraînement égale à ω et représentée par l'horizontale O_1A , égale et rectangulaire à OA , sa vitesse relative égale à ω' et représentée par O_1A' , égale et rectangulaire à OA' . Sa vitesse absolue, qui est en même temps la vitesse angulaire du corps M , est donc représentée par la diagonale O_1B . L'axe instantané est donc, suivant une droite menée dans le plan AOA' à angle droit sur O_1B . D'où l'on conclut que la droite OB , diagonale du parallélogramme $AOA'B$ représente, pour la direction, le sens (d'après la convention ci-dessus énoncée) et l'intensité, la rotation résultante.

43. — On retrouve ici toutes les propositions analogues à celles de la composition des vitesses: polygone, projections, relations géométriques et trigonométriques.

44. — 3°. Composition de rotations autour de deux axes parallèles. Si les rotations sont de même sens et représentées* par OA , $O'A'$, toutes les vitesses absolues des points du corps M qui sont actuellement

* Fig. 10.



dans le plan AOA' sont perpendiculaires à ce plan, comme leurs deux composantes; elles sont nulles pour tous les points de la parallèle mn satisfaisant à la condition $\omega \cdot Om = \omega' \cdot O'm$.

La vitesse angulaire résultante est égale à la vitesse absolue d'un point divisé par sa distance à l'axe mn . Vitesse absolue de $O =$ vitesse d'entraînement $= \omega \cdot OO'$. Vitesse angulaire absolue ou résultante

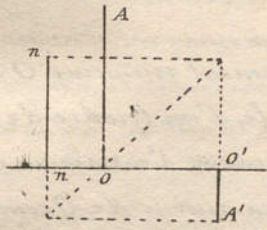
$$\Omega = \frac{\omega \cdot OO'}{O'm} = \frac{\omega \cdot O'm + \omega' \cdot Om}{O'm} = \omega + \omega'$$

Si les rotations sont de sens contraires *, dans l'intervalle de OA à O'A, les vitesses composantes sont descendantes; en dehors et du côté de la plus petite des deux rotations, la vitesse d'entraînement descendante l'emporte sur la vitesse relative ascendante; en dehors du même intervalle du côté de la plus grande vitesse angulaire, la vitesse est nulle en mn si l'on a $\omega \cdot Om = \omega' \cdot O'm$.

$$\Omega = \frac{\omega \cdot OO'}{O'm} = \frac{\omega \cdot O'm - \omega' \cdot Om}{O'm} = \omega - \omega'.$$

45. — 4^e. Composition de deux rotations parallèles, égales et de sens contraires (couple de rotations). Pour un point m quelconque ** on a $v_e = \omega \cdot mp$; $v_r = \omega' \cdot mp'$; $v = v_e + v_r = \omega \cdot \overline{OO'}$ = constante pour l'instant

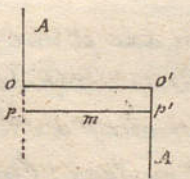
* Fig. 20



considéré. Le mouvement absolu ou résultant est une translation perpendiculaire au plan des axes des rotations composantes.

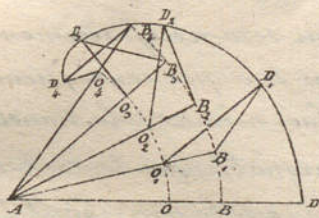
46. — Remarque. Lorsque le mouvement absolu d'un corps résulte de la composition de deux translations finies, c'est-à-dire continues pendant un temps fini, ce mouvement absolu est lui-même une translation. Mais la composition de deux rotations finies ne donne lieu qu'à une suite de rotations instantanées autour d'un axe mobile. Cela résulte de ce que l'axe instantané de la rotation absolue est à chaque instant dans le plan de l'axe de la rotation du système de comparaison et de l'axe de la rotation relative.

** Fig. 21.

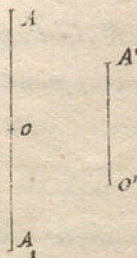


Exemple. Une droite AB *** tourne dans le plan fixe de la figure avec une vitesse constante ω autour du point A, pendant qu'une autre droite BD a autour du point mobile B une rotation uniforme ω' relativement à AB, de sorte que lorsque celle-ci a pris la position AB, la droite BD a la position B'D', faisant avec le prolongement de AB, un angle qui est à l'angle BAB dans le rapport constant $\frac{\omega'}{\omega}$. Le point D décrit une courbe DD₁D₂D₃D₄... dont les normales passent par les centres instantanés O, O₁, O₂, O₃, O₄... La vitesse angulaire absolue de BD dans ses positions successives est constamment $\omega + \omega'$ autour du centre instantané variable. La vitesse du point D varie proportionnellement aux distances OD, O₁D₁, O₂D₂...

*** Fig. 22.



**** Fig. 23.



9^{ème} Division.

47. — Réduction à deux mouvements simples, d'un nombre quelconque de mouvements simples composantes. On remarque d'abord qu'une rotation quelconque peut être remplacée par une autre égale autour d'un axe parallèle, et par une translation. En effet **** soit une rotation OA = ω . Introduisons deux rotations OA₁ et O'A' de même grandeur que OA mais formant un couple équivalent à la translation ascendante $\omega \cdot OO'$; et déduisons-en l'effet par une translation égale descendante. Il reste en définitive la rotation O'A' égale à OA et de même

sens, et une translation descendante dont la vitesse sera précisément celle du point O' considéré comme tournant avec la vitesse angulaire ω autour de OA .

D'après cela on peut toujours remplacer un nombre quelconque de rotations autour d'axes non concourants par autant de rotations autour d'axes concourants en un point choisi à volonté; lesquelles (42) se composeront en une seule; et par autant de translations qui réunies aux autres primitivement supposées se réduiront en une seule translation.

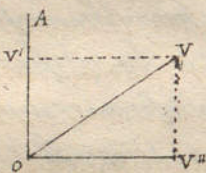
§ 4. - Décomposition d'un mouvement quelconque d'un solide en mouvements simples.

48. - 1^o Décomposition en une translation et une rotation. Si l'on prend arbitrairement un point O d'un corps solide en mouvement, et qu'on le considère comme étant le sommet mobile d'un trièdre de comparaison qui se transporte parallèlement à lui-même, on aura ainsi un mouvement d'entraînement de translation; et le mouvement relatif du corps solide, par rapport au trièdre se fera autour de O considéré comme fixe au sommet, et par conséquent (30) sera une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point. Il s'en suit (32) que tout mouvement continu d'un corps solide équivaut au roulement d'un cône lié au corps sur un cône qui aurait un mouvement de translation dans l'espace.

Cette décomposition peut se faire, en général, d'une infinité de manières en faisant varier le point O .

49. - 2^o Décomposition instantanée particulière en une translation parallèle à un axe et une rotation autour du même axe. Soit $* OV$ représentant la vitesse du point O , et la translation composante dont il vient d'être question; et soit OA l'axe représentatif de la rotation correspondante. Décomposons la translation OV en deux: l'une OV' suivant OA et l'autre OV'' perpendiculaire. Considérons OV' comme translation d'entraînement d'un système de comparaison, il restera pour mouvement relatif du solide principal un mouvement résultant de la translation OV'' et de la rotation OA , mouvement qui sera nécessairement pa-

* Fig. 24.



rallele au plan perpendiculaire à OA et qui sera par conséquent (42) une rotation instantanée autour d'un axe O, A , parallèle à OA , parallèle lui-même à la translation d'entraînement. La droite O, A , jouit donc de cette propriété très-remarquable que toutes les vitesses du solide en mouvement sont, à l'instant considéré les mêmes que si le corps était lié à une vis se mouvant dans son écrou fixe, et ayant pour axe cette droite qu'on appelle axe central de rotation.

Suivant la remarque du général Poincelet, si l'on mène par un point K de l'espace trois droites égales et parallèles, en même sens, aux vitesses de trois points du corps; puis encore par K une droite perpendiculaire au plan déterminé par les extrémités de ces trois droites, cette perpendiculaire est parallèle à l'axe O, A , &c.

3^o Décomposition d'un mouvement quelconque en trois translations parallèles à trois axes concou-

raux, et en trois rotations autour du même axe. Cela résulte évidemment des n^{os} 47, 48 et 41.

50. - L'observation faite au n^o 40 s'applique à la composition des mouvements d'un système de points : celui-ci à la fin d'un temps Δt occupe la même position que s'il avait subi successivement les déplacements dus aux vitesses composantes.

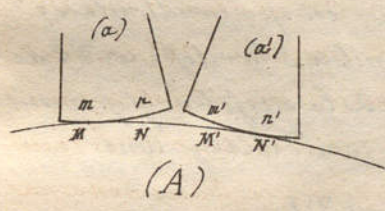
§ 5. - Du mouvement relatif de deux corps quelconques.
Glissement simple ou mixte.

51. - Les mouvements absolus de deux systèmes (A, B) dont l'un au moins (A) est solide étant donnés, la recherche du mouvement relatif de l'autre (B) par rapport au 1^{er} (A) se réduit à une question de décomposition de mouvement; car, d'après la définition même de la composition des mouvements, le mouvement absolu du corps B peut être considéré comme composé du mouvement du corps A et du mouvement relatif cherché; ou bien encore ce mouvement relatif est composé du mouvement absolu de B et du mouvement d'entraînement de A, pris en sens contraire.

52. - Glissement simple ou mixte de deux corps en contact. Deux corps étant en contact et en mouvement relatif, il y a glissement simple si les mêmes points de l'un des corps coïncident successivement avec différents points de l'autre. Il y a roulement simple si les points géométriques de contact se déplaçant sur les deux corps y parcourent relativement des arcs égaux. Dans tout autre cas, il y a roulement mixte, que l'on peut concevoir décomposé en roulement simple et glissement simple.

Exemple: Deux cylindres, dont il suffit de considérer deux sections droites* dans un même

* Fig. 25.



plan. M et m deux points appartenant respectivement aux deux cylindres (A) (a) coïncident à un certain instant; à un instant suivant et très-rapproché, le point m de (a) étant transporté en m', le contact a lieu entre deux points n', N', dont le premier était précédemment en n. Si les arcs mn, MN' étaient égaux, ce serait le cas du simple roulement; sinon la différence NN' entre MN' et mn est l'arc de glissement. Comme il s'agit de déplacement infiniment petits, les points n et m' peuvent

être considérés comme se confondant avec la courbe MN' ou avec sa tangente; l'axe élémentaire de glissement, pendant un temps infiniment petit, est donc égal à la distance Mm' qui sépare à l'instant final deux points Mm qui coïncident à l'instant initial. Le quotient $\frac{Mm'}{\theta}$ de l'arc de glissement divisé par le temps correspondant est la vitesse de glissement.

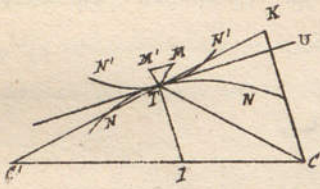
La figure suppose le corps A immobile; mais s'il était en mouvement, ce qui précède s'appliquerait au mouvement relatif des deux corps. D'ailleurs, pendant un temps infiniment petit, la tangente en M ne pourrait tourner que d'un angle infiniment petit. On va voir une application de ces considérations.

53. - Mouvement de deux corps en contact par des cammes cylindriques. Deux corps solides** tournant autour de deux axes fixes parallèles C, C', sont en contact par deux surfaces cylindriques

Fig. 26. (survante)

(cames ou dents) dont les génératrices sont parallèles aux axes. Il s'agit de trouver le rapport des vitesses angulaires ω, ω' des deux corps et leur relation avec la vitesse de glissement v_g .

Fig. 26.



Axe C lié à la surface NTN ; axe C' lié à $N'TN'$.
Le point T considéré comme appartenant à NTN se transporte en M perpendiculairement à TC ; le point T comme appartenant à $N'TN'$ se transporte en M' perpendiculairement à TC' . MM' est donc l'arc de glissement et par conséquent parallèle à la tangente TU , sauf un angle infiniment petit, qui disparaît à la limite. Ainsi les trois côtés du triangle différentiel (proportionnels aux vitesses de circulation $\omega \cdot TC$, $\omega' \cdot TC'$ et à la vitesse de glissement) sont respectivement perpendiculaires à TC , TC' et TI . Donc si l'on mène CK parallèle à TI , on a deux triangles semblables

$$MTM', CKT; \frac{MT}{TC} = \frac{M'T}{TK} = \frac{MM'}{CK} \text{ ou } \frac{\omega \cdot TC}{TC} = \frac{\omega' \cdot TC'}{TK} = \frac{v_g}{CK}$$

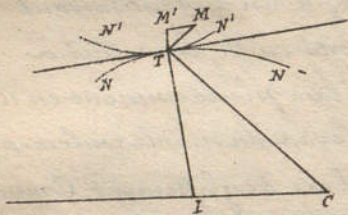
donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{TC'}{TK} = \frac{C'I}{CI} \text{ ou } \omega \cdot CI = \omega' \cdot C'I; \text{ et } v_g = CK \cdot \omega = \omega \cdot \frac{TI \cdot CC'}{C'I} = TI (\omega + \omega') \frac{\omega}{\omega'}$$

Pour que $\frac{\omega}{\omega'}$ soit constant, il faut que I soit fixe. v_g est alors proportionnelle à TI .

Explication de l'analogie de l'équation $\omega \cdot CI = \omega' \cdot C'I$ avec celle qui a donnée (22) le système de deux balanciers unis par une bielle.

54. — Cas particulier: cames et pilons. C^* axe de rotation de la came dont le profil est NTN .
* Fig. 27.



Le piston lié à la courbe $N'TN'$ a un mouvement de translation rectiligne perpendiculaire à CI . Dans le triangle différentiel TMM' , les côtés TM', TM, MM' dont le premier est perpendiculaire à CI , sont proportionnels à la vitesse V du piston, à la vitesse $\omega \cdot TC$ de circulation du point de contact de la came, et à la vitesse de glissement v_g . Les deux triangles TMM', TCI sont semblables; donc

$$\frac{\omega \cdot TC}{TC} = \frac{V}{IC} = \frac{v_g}{TI}; V = \omega \cdot CI; v_g = \omega \cdot TI.$$

Chapitre 3. - De l'accélération.

§ 1. - De l'accélération tangentielle.

55. — Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés de la vitesse que sous le rapport de sa direction et de son intensité à un instant déterminé. Il nous reste ici à considérer, au point de vue de la cinématique, les variations qu'elle subit; et d'abord nous ne parlerons que de la grandeur variable

A. Bonafant

de la vitesse en faisant abstraction de la courbure de la trajectoire.

Soit v la vitesse d'un point à l'instant où finit le temps t , et soit $v + \Delta v$ ce qu'elle devient à l'instant où finit le temps $t + \Delta t$. Le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est l'accroissement moyen de la vitesse par unité de temps, pendant le temps Δt . Si cette quantité est constante quel que soit Δt , le mouvement est dit uniformément varié. Si elle varie, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ approche, à mesure que Δt décroît, d'une limite $\frac{dv}{dt}$, formule qui convient d'ailleurs aux deux cas.

Constante ou variable la quantité $\frac{dv}{dt}$, quand elle est positive, indique ce qu'on pourrait appeler proprement la vitesse de l'accélération, c'est-à-dire la rapidité de l'augmentation de la vitesse. Pour simplifier et généraliser le langage, cette quantité $\frac{dv}{dt}$, quelle que soient son signe et sa valeur à l'instant où finit le temps t , se nomme l'accélération pour cet instant, si le mouvement est rectiligne, et l'accélération tangentielle lorsque le mouvement est curviligne.

On reconnaît, par la discussion des quatre cas possibles, que lorsque la vitesse et l'accélération sont de même signe le mouvement est accéléré dans le sens vulgaire de ce mot; et que, si elles sont de signes contraires, le mouvement est retardé.

56. — D'après sa définition, l'accélération tangentielle à un instant quelconque résulte de la relation entre la vitesse et le temps.

Si cette relation est donnée par une équation $v = F(t)$, on en tire $\frac{dv}{dt} = F'(t)$.

Si elle donnée par des valeurs simultanées, en nombre suffisant, de la vitesse et du temps, cette relation pourra être représentée par une courbe dont les coordonnées seront proportionnelles les unes aux temps comptés à partir d'un instant initial, les autres aux vitesses. Dans le cas du mouvement uniformément varié, la ligne représentative est droite; l'accroissement positif ou négatif de l'ordonnée pour un accroissement de l'abscisse positif et représentant l'unité de temps, est l'accélération positive ou négative. L'espace parcouru dans un certain temps est représenté par une aire. Cette considération a guidé Galilée dans la recherche de la loi qui lie l'espace au temps dans le mouvement uniformément varié.

Pour un mouvement quelconque, l'accélération s'obtient par le tracé de la tangente à la courbe représentative des vitesses. L'espace parcouru est encore représenté par une aire dont la détermination revient au calcul exact ou approché d'une intégrale.

57. — Généralement, entre les quatre quantités s , t , v , j , (cette dernière lettre désignant l'accélération, même lorsqu'elle est variable), on a les deux équations $v = \frac{ds}{dt}$, $j = \frac{dv}{dt}$; une troisième équation suffit pour déterminer, sauf les constantes initiales, la loi du mouvement et ses conséquences, dont l'expression s'obtient dans la plupart des cas par des quadratures exactes ou approchées.

1^o Si l'on a $s = F(t)$, on conclut $v = F'(t)$ et $j = F''(t)$.

2^o Division.

Cours de Méc. et Mach. - 6^e Feuille.

2° Si l'on a $v = F(t)$, on conclut $j = F'(t)$ et $s = s_0 + \int F(t) dt$.

3° Si $j = F(t)$ $v = \int F(t) dt$ et $s = s_0 + \int v dt$.

4° Si $v = F(s)$ $t = \int \frac{ds}{F(s)}$ et $j = F'(s) \cdot F'(t)$.

5° Si $j = F(s)$ $v^2 - v_0^2 = 2 \int F(s) ds$ c'est-à-dire $v = \varphi(s)$

et par suite $t = \int \frac{ds}{\varphi(s)}$
 6° Si $j = F(v)$ $t = \int \frac{dv}{F(v)}$ et $s = \int v dv$

58. — Méthodes d'approximation pour calculer $\int_{x_0}^x y dx$:

1° La formule de Thomas Simpson suppose que les ordonnées équidistantes $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ obtenues en divisant l'intervalle $x - x_0$ en un nombre pair n de parties égales ont leurs différences secondes à peu près constantes, que par conséquent la courbe dont il s'agit d'avoir la quadrature diffère peu de celle qu'on obtiendrait en joignant 3 à 3 les extrémités des ordonnées par des arcs de parabole du 2° degré

$$\text{Formule } \int_x^x y dx = \frac{x - x_0}{3n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Comme conséquence de la même hypothèse on a pour l'aire comprise entre deux ordonnées consécutives y_1 et y_2 , dont la distance est δ .

$$\frac{\delta}{12} (5y_1 + 8y_2 - y_0) \text{ ou } \frac{\delta}{12} (5y_2 + 8y_1 - y_0).$$

Si la courbe passant par quatre points répondant aux ordonnées équidistantes y_0, y_1, y_2, y_3 ne diffère pas sensiblement d'une parabole du 3° degré l'aire comprise entre y_0 et y_3 serait $\frac{x_3 - x_0}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$

2° Formule du général Poncelet. Ordonnées extrêmes y_0 et Y ; ordonnées intermédiaires $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, en nombre quelconque, équidistantes entre elles; l'intervalle de y_0 à y_1 et de y_n à Y n'est que la moitié de la valeur constante $\frac{1}{n} (X - x_0)$ des autres intervalles. Intégration approximative

$$\int_{x_0}^x y dx = \frac{X - x_0}{n} (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \frac{y_0 + Y - y_1 - y_n}{8})$$

§ 2. — De l'accélération totale dans le mouvement curviligne.

59. — L'étude du mouvement curviligne d'un point se ramène à celle du mouvement de ses projections sur des axes coordonnés.

Soit v la vitesse du mobile à l'instant où il passe en M ; soit à la suite MM_1 une

portion de la trajectoire curviligne; soient MN' , MN'' , ses deux projections coordonnées sur deux axes Mx' , Mx'' , menés par M dans le plan osculateur et d'ailleurs suivant des directions que nous supposons d'abord quelconques. Si pour les positions successives du mobile entre M et M_1 , on fait ses projections sur les mêmes axes, le mouvement de chaque projection sera en général un mouvement varié; mais on pourra prendre MM_1 assez petit pour que pendant la durée très-courte de son parcours les mouvements rectilignes suivant M_1N' et M_1N'' soient, sauf une erreur négligeable, des mouvements uniformément variés exprimés par les équations

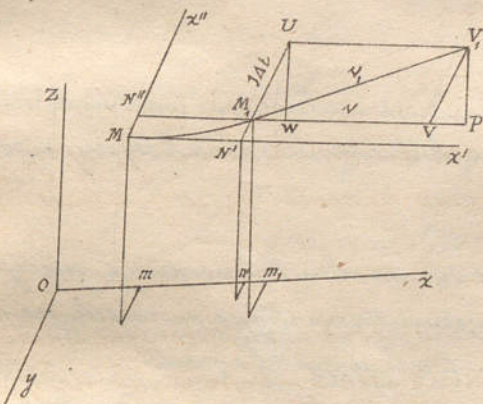
$$x' = v_x' \theta + \frac{1}{2} j' \theta^2 \quad \text{et} \quad x'' = v_x'' \theta + \frac{1}{2} j'' \theta^2;$$

ce qui revient à dire qu'on peut négliger les puissances supérieures à θ^2 du petit temps θ , et l'on voit aisément que cette approximation étant admise pour deux axes déterminés s'applique également à un axe quelconque.

Les facteurs v_x' et v_x'' sont et doivent être (14) les projections sur les axes coordonnés Mx' , Mx'' de la vitesse.

Cela posé, parmi les systèmes d'axes Mx' , Mx'' , qu'on peut choisir il en est un qui simplifie le plus possible ces équations. L'un* est dirigé suivant la tangente en M d'où il résulte $v_x' = v$ et $v_x'' = 0$. L'autre Mx'' est dirigé de manière que la projection MN' de la courbe MM_1 faite par la parallèle M_1N' soit égale au seul produit de la vitesse v par le temps du parcours de MM_1 . Cette dernière propriété

* Fig. 28



à déceler son lieu pour tous les points de MM_1 , et les deux équations se réduisent à

$$x' = vt \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1}{2} Jt^2$$

Définition. L'accélération J qui existe suivant l'axe Mx'' ainsi défini est ce qu'on appelle l'accélération totale à l'instant du passage du mobile au point M ; ce qui revient à dire que si l'on considère le mouvement du point dont il s'agit relativement à un système de comparaison ou milieu géométrique, ayant un mouvement de translation rectiligne avec la vitesse v du mobile à cet instant, l'accélération totale est l'accélération du mouvement rectiligne relatif de ce même mobile.

60. — L'accélération totale peut être considérée sous un autre point de vue qui suppose d'ailleurs la propriété qui vient d'être établie pour les axes Mx' , Mx'' de la fig. 28. Le mobile arrivé de M en M_1 dans le temps θ ou Δt possède une vitesse v_1 qui est la résultante (18 et 35) de la vitesse v conservée parallèlement à MN' et de la vitesse $J\Delta t$ acquise parallèlement à MN . Si donc, adoptant un langage proposé par quelques géomètres, on dit que la vitesse v_1 est la somme géométrique des deux vitesses v et $J\Delta t$ ou que $J\Delta t$ est l'accroissement géométrique^(a) de la vitesse v , on pourra

(a) Quelques personnes, déterminées sans doute par la signification vulgaire du mot accélération, ont proposé d'appeler accélération élémentaire la quantité $J\Delta t$ ou Jdt . Cela paraît contraire à la loi

définir l'accélération totale une quantité qui se constitue d'une direction et d'une grandeur; savoir: la direction donnée par celle de l'accroissement géométrique infiniment petit de la vitesse pendant un temps infiniment petit, et la grandeur, égale au quotient fini de ces deux infiniment petits.

Cette définition qui comprend comme cas particulier celle qui a été donnée pour le mouvement rectiligne (55) pourrait être exprimée ou rappelée par la notation

$$J = \frac{d_a v}{dt}$$

la lettre G remplaçant le mot géométrique.

61. — L'accélération totale a encore une autre propriété importante et caractéristique. Prenons un axe Ox quelconque, même hors du plan osculateur de la courbe, puis un plan directeur ou coordonné quelconque xy Ox , et projetons sur Ox la brisée $MN'M_1$. Nous avons, à cause de $MN' = v \Delta t$ et $N'M_1 = \frac{1}{2} J \Delta t^2$, $m m_1 = m n' + n' m_1 = v_x \Delta t + \frac{1}{2} J_x \Delta t^2$, relation qui s'applique à fortiori à tous les instants du parcours de MM_1 ; J_x est donc l'accélération de la projection mobile m_1 .

Théorème. Si l'on projette sur un axe, par un plan parallèle à un plan directeur quelconque, les positions successives d'un point mobile dans l'espace, l'accélération du mouvement de la projection est la projection d'une quantité de même nature qui est l'accélération totale du point dans l'espace, et dont la direction et l'intensité ne dépendent que du mouvement de ce point et nullement du système de projection.

Formule:
$$J_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

62. — **Corollaires:** I. — L'accélération totale est la résultante des trois accélérations correspondantes au mouvement rectiligne des projections coordonnées, sur trois axes, du mobile considéré dans l'espace; c'est-à-dire qu'elle est la diagonale d'un parallélépipède, &c.

II. — Si l'on projette rectangulairement ou obliquement sur un plan les positions successives d'un point mobile dans l'espace, l'accélération totale du mouvement curviligne ou rectiligne de la projection est égale à la projection sur le plan de l'accélération totale dans l'espace.

63. — Projections ou composantes rectangulaires, l'une tangentielle, l'autre normale, de l'accélération totale.

1^o Soit $M_1 V = v$; $M_1 U = J \Delta t$; $M_1 V_1 = v_1$. Soit α l'angle $N'' M N'$ ou $U M V$ de l'accélération J avec la tangente ou avec la vitesse v . Abaisant de U et de V_1 les perpendiculaires $U W$, $V_1 P$ sur la parallèle $M_1 V$ à la tangente en M_1 , on a $J \Delta t \cos \alpha = M_1 W = V P = v_1 - v$ sauf une erreur négligeable à la limite, car l'angle $V_1 M_1 P$ devenant infiniment petit, la différence entre $M_1 V_1$ et sa projection $M P$ devient infiniment petite par rapport à l'infiniment petit $V V_1$, on

d'analogie qui veut qu'une quantité élémentaire soit de même nom que la quantité finie produite par son intégration: $J dt$ est une vitesse élémentaire et non une accélération dans le sens admis en mécanique pour ce dernier mot, de même que $v dt$ est un espace élémentaire et non une vitesse.

$J \Delta t$. Donc $J \cos \alpha = \frac{v_1 - v}{\Delta t}$ ou exactement $J \cos \alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$; donc.

Théorème. La projection rectangulaire de l'accélération totale sur la tangente à la trajectoire est égale à ce qui a été précédemment (55) appelé l'accélération tangentielle.

Remarque. Si l'on voulait définir l'accélération tangentielle en disant que c'est la projection rectangulaire sur la tangente, de l'accélération totale, ou ce qui revient au même (61) l'accélération du mouvement de la projection rectangulaire du mobile sur la tangente, il résulterait de la démonstration précédente que l'accélération tangentielle a pour expression $\frac{dv}{dt}$ limite &c.

64. — 2^o On a, même fig. 28, $J \Delta t \sin \alpha = UW = V_1 P = v \sin \beta$, en appelant β l'angle $V_1 M V$ qui devenant un infiniment petit $d\beta$ finit par se confondre avec son sinus. On a donc

$$J \sin \alpha = \lim. \frac{v \sin \beta}{\Delta t} = v \frac{d\beta}{dt} \text{ ou } J \sin \alpha = v^2 \frac{d\beta}{ds}$$

à cause de la relation $v = \frac{ds}{dt}$ dans laquelle ds est l'arc tel que $M M_1$, décrit à partir de M dans le temps dt .

On sait que le quotient fini $\frac{d\beta}{ds}$ est ce qu'on appelle la courbure en M de la courbe MM_1 , et qu'il est égal à l'inverse $\frac{1}{\rho}$ du rayon de courbure. Ainsi

$$J \sin \alpha = J \cos (J, \rho) = \frac{v^2}{\rho}$$

Cette composante de l'accélération totale est appelée accélération centripète parce qu'elle est dirigée vers le centre de courbure. Donc

Théorème. L'accélération centripète est égale au carré de la vitesse multiplié par la courbure ou divisé par le rayon de courbure.

Il résulte de la formule $J \sin \alpha = \frac{v^2}{\rho}$ que lorsqu'on connaît pour un point M de la trajectoire la vitesse v , l'accélération totale J et son angle α avec la tangente, on peut conclure le rayon de courbure

65. — Dans le mouvement curviligne uniforme, l'accélération totale se réduit à l'accélération centripète puisque sa composante rectangulaire tangentielle est nulle.

66. — Mouvement parabolique. Si l'accélération totale était constante, toujours parallèle à une même droite et de même sens, la courbe décrite serait une parabole. C'est une conséquence du N^o 61.

67. - Mouvement circulaire. Le quotient $\frac{v}{\rho}$ est la vitesse angulaire, et si on désigne celle-ci par ω , l'accélération centripète est exprimée soit par $\frac{v^2}{\rho}$, soit par $\omega^2 \rho$, ou par $v\omega$.

68. - Projection orthogonale sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme dans l'espace. Rayon du cercle = r , vitesse angulaire du mobile = ω , angle des deux plans = i . Les diamètres principaux de l'ellipse décrite par la projection du mobile sont $2r$ et $2r \cos i$. La vitesse aréolaire autour du centre du cercle étant constante et égale à $\frac{1}{2} \omega r^2$, celle de la projection, autour du centre de l'ellipse est constamment $\frac{1}{2} \omega r^2 \cos i$. L'accélération totale du mouvement varié et périodique de cette projection est constamment dirigée vers le centre de l'ellipse (62) et égale à $\omega^2 r \cdot \frac{\rho}{r} = \omega^2 \rho$ si l'on désigne par ρ la distance variable du point mobile au centre de l'ellipse.

Si l'on fait $i = \frac{\pi}{2}$, en appelant x la distance de la projection du mobile au milieu de la projection du diamètre, on trouve $\omega^2 x$ pour l'accélération vers ce milieu du mouvement rectiligne oscillatoire dont il s'agit, comme on le conclurait immédiatement des n^{os} 16 et 55.

§ 3. - Composition des accélérations.

69. - Si un point dans son mouvement est considéré relativement à un système de figure invariable ayant un mouvement varié, quelle sera l'accélération du mouvement relatif? La solution de cette question repose sur la remarque suivante:

Supposons qu'à partir d'un certain instant un point possède une vitesse V et une accélération totale J constante au moins pendant un temps θ . Il en résulte que la corde MN de la courbe parcourue pendant ce temps est (59) la résultante de la longueur $V\theta$ qui serait parcourue si la vitesse existait seule, et de la longueur $\frac{1}{2} J\theta^2$ qui le serait si l'accélération existait sans vitesse initiale.

Maintenant substituons à la vitesse V deux vitesses $V' V''$ qui soient ses composantes et à l'accélération J deux accélérations $j' j''$ qui soient de même ses composantes, c'est-à-dire que j' et j'' sont deux droites qui, mises bout à bout, formeraient deux côtés d'un triangle dont le troisième, partant de la même origine, serait J en intensité et en direction. On voit d'après cela que MN est la résultante des quatre chemins $V'\theta$, $V''\theta$, $\frac{1}{2} j'\theta^2$, $\frac{1}{2} j''\theta^2$ pris dans un ordre quelconque.

Cela posé, nous distinguons trois cas dans la question posée ci-dessus.

70. - Premier cas. - Les axes de comparaison ont un mouvement de translation.

Si l'on suppose que ce système ait une vitesse initiale V' et une accélération j' , on voit aisément (69) que, le mobile, dans son mouvement relatif, décrira pendant le temps θ une courbe dont la corde est la résultante du chemin $V''\theta$ dû à la vitesse relative V'' et du chemin $\frac{1}{2} j''\theta^2$ dû à l'accélération j'' qui est par conséquent l'accélération relative ou apparente. Donc

Théorème. Quand le mouvement d'entraînement (ou l'un des mouvements composants) est une translation, l'accélération totale du mouvement relatif (ou du second mouvement composant) est la résultante de l'accélération totale absolue et de l'accélération totale du premier mouvement prise en sens contraire; c'est-à-dire que la règle sur la composition et la décomposition des vitesses (35) s'applique dans ce cas aux accélérations.

$$\text{Formule} \quad J_r = \text{Rés}(J_a - J_c).$$

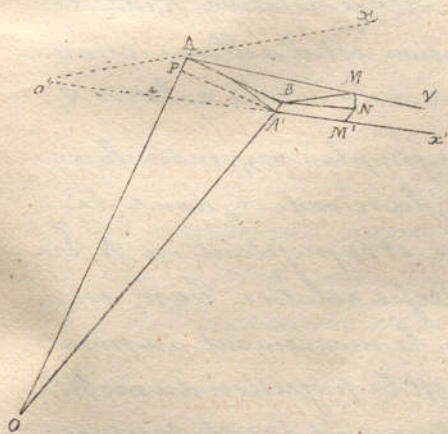
Remarque. Si le mouvement du système de comparaison était rectiligne et uniforme, le mouvement relatif aurait l'accélération J et ne différerait du mouvement absolu qu'à cause de la vitesse initiale. Si l'accélération totale absolue était nulle, c'est-à-dire le point en repos ou en mouvement rectiligne uniforme, le mouvement du système de comparaison étant varié, l'accélération relative j'' se réduirait à $-j'$.

71. — Deuxième cas. Le système de comparaison a un mouvement de rotation.

Soit ω la vitesse angulaire de cette rotation autour de la droite projetée en O . Soit A la position du point mobile au commencement d'un temps très-petit θ , et soit r sa distance à la droite O .

Examinons d'abord le cas particulier où le mobile a un mouvement absolu rectiligne uniforme, dans un plan perpendiculaire à la droite O , plan qui est celui de la figure*.

* Fig. 30.



Soit v sa vitesse et décomposons-la en deux dont l'une v_e soit la vitesse d'entraînement dirigée suivant la tangente AB , et égale à ωr ; l'autre composante sera la vitesse relative v_r suivant une droite Ax .

Après le temps θ le point mobile ayant parcouru la droite $AM = v\theta$, occupera l'extrémité de la ligne brisée ABM dont les côtés sont $AB = \omega r\theta$ suivant v_e et $BM = v_r\theta$ parallèle à v_r .

Pour un observateur entraîné dans le mouvement de rotation du système de comparaison le mobile paraît en A à l'instant initial avec une vitesse v_r dans la direction Ax . Mais à l'instant final du temps θ , le point A considéré comme lié aux axes de comparaison est transporté en A' , l'arc AA' étant égal à $\omega r\theta$ comme AB ; et la droite Ax est venue en $A'x'$ faisant avec Ax le même angle $\omega\theta$ que OA' avec OA . Ainsi pour l'observateur arrivé à la fin du temps θ , le point A' est la position qu'avait le mobile à l'instant initial; M est sa position actuelle, de sorte qu'il a décrit une trajectoire de A' en M avec une vitesse initiale dont la direction est $A'x'$ et l'intensité v_r . Si donc on porte sur cette direction la distance $A'M' = v_r\theta = BM$ qui devrait être parcourue par le mobile en vertu de sa seule vitesse initiale, le déplacement de M' en M , reste dû à une accélération apparente ou relative qu'il s'agit de calculer.

On pourrait dire que puisqu'elle correspond au parcours $M'M$ dans le temps θ , en la désignant par J on aurait $M'M = \frac{1}{2} J \theta^2$, que de plus cette accélération aurait sa direction suivant $M'M$. Mais on obtient une détermination bien plus nette et facile à exprimer en décomposant le chemin $M'M$ en deux. Pour cela on fait $M'N$ égale et parallèle à $A'B$ (d'où résulte BN égale et parallèle à $A'M$), et l'on substitue à la droite $M'M$ ses deux composantes $M'N, NM$, auxquelles correspondent deux accélérations relatives composantes j', j'' satisfaisant aux équations

$$M'N = \frac{1}{2} j' \theta^2 \quad \text{et} \quad NM = \frac{1}{2} j'' \theta^2.$$

Où, $M'N = A'B$ peut être, sauf une erreur relative qui diminue indéfiniment avec θ , égale à la projection AP de BA' sur le rayon AO . Ainsi $M'N = \frac{AA'^2}{2r} = \frac{1}{2} \omega^2 r \theta^2$.

D'autre part la droite NM se confondant avec l'arc dont elle est la corde, et l'angle MBN étant comme AOA' égal à $\omega\theta$, on a $NM = \omega\theta \cdot BM = \omega v_r \theta^2$

Donc $j' = \omega^2 r = \omega v_r$ et $j'' = 2\omega v_r$.

La résultante de j' et de j'' est l'accélération totale relative ou apparente.

La 1^{re} des deux composantes, j' est égale en intensité à l'accélération normale (67) d'un point qui aurait le mouvement circulaire du point A lié aux axes de comparaison. Mais elle est dirigée en prolongement du rayon; elle est dite centrifuge. La 2^e composante j'' est comme la corde NM perpendiculaire à la direction $A'x'$ de la vitesse relative, dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Le sens de cette accélération est d'ailleurs comme NM opposé au sens de la rotation de la droite Ax dirigée suivant la vitesse relative v_r .

Considérons maintenant le cas où la vitesse v n'est pas dans un plan perpendiculaire à l'axe O . Elle peut se décomposer en trois, l'une v_r suivant AB , la seconde v_r dans le plan perpendiculaire à l'axe fixe O , la 3^e w_r parallèle à cet axe et se projetant en A . Les vitesses v_r et w_r sont ainsi composantes rectangulaires de la vitesse relative. Si v_r est dirigée suivant Ax et a l'intensité ci-dessus représentée par v_r , le mouvement du point considéré ne diffère du cas précédent qu'en ce que le point M est la projection du mobile, après le temps θ , sur le plan OAx , dont le mobile lui-même s'est écarté sans accélération de la quantité $w_r \theta$. Donc les accélérations apparentes sont encore les mêmes, c'est-à-dire parallèles à ce plan et exprimées par

$$j' = \omega^2 r = \omega v_r \quad \text{et} \quad j'' = 2\omega w_r.$$

Enfin si le mouvement absolu du mobile considéré est varié ou curviligne, son déplacement absolu pendant θ est composé de $v\theta$ dû à sa vitesse en A et de $\frac{1}{2} J \theta^2$ dû à l'accélération totale. Son déplacement relatif ne diffère du cas précédent que par le petit chemin $\frac{1}{2} J \theta^2$ porté dans la direction de J et combiné avec les déplacements dus à la vitesse relative et avec les mêmes accélérations j' et j'' .

Formule $J_r = \text{Rés.}(J, \omega^2 r, 2\omega w_r)$

dans laquelle la notation Rés. signifie résultante ou somme géométrique.

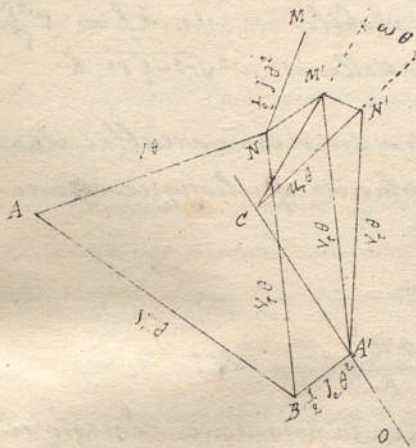
72 - Vérification de cette théorie pour deux cas particuliers. - Le point principal est en repos relatif. Vitesse absolue $V = \omega r$; accélération totale absolue centripète $J = \omega^2 r$; $j' = \omega^2 r$ centrifuge; $j'' = 0$; accélération totale relative $J_r = J - j' = 0$.

2° Le point est en repos absolu. $J = 0$; $u_r = \omega r$; $j'' = 2\omega^2 r$ centripète; $J_r = j'' - j' = \omega^2 r$ centrifuge

7 Troisième cas (comprenant les deux premiers): Le système de comparaison à un moment quelconque qui peut être regardé comme résultant d'une translation et d'une rotation instantanée.

Le mobile* se transporte dans le temps θ de A en M en vertu d'une vitesse absolue v

* Fig 31.



et d'une accélération totale J absolue. M est donc, à la fin de θ , à l'extrémité de la bissectrice ANM formée de $AN = v\theta$ et de $NM = \frac{1}{2} J \theta^2$. Le point géométrique A entraîné avec le système de comparaison se transporte en A' extrémité de la bissectrice ABA' formée de $AB = v_r \theta$ chemin dû à la vitesse d'entraînement et de $BA' = \frac{1}{2} J_e \theta^2$ dû à l'accélération d'entraînement pendant le temps θ . A l'instant initial le mobile en A, la vitesse relative v_r était parallèle à $BN = v_r \theta$; et si le système de comparaison n'avait qu'un mouvement de translation, la direction de la vitesse initiale serait, pour l'observateur opérant à la fin de θ , suivant $A'M'$ parallèle à BN ; et en faisant $A'M' = v_r \theta = BN$ il resterait la bissectrice $M'NM$ formée de deux chemins dûs à deux accélération,

savoir $M'N_e = A'B = \frac{1}{2} J_e \theta^2$ allant de M' vers N , dû à une accélération égale à J_e et de sens directement opposé, et NM dû à l'accélération totale absolue. La formule de l'accélération totale apparente ou relative, dans le cas particulier de la translation du système de comparaison est donc, comme nous l'avons vu (70).

$$J_r = \text{Rés.}(J - J_e)$$

Mais si l'on suppose que le système de comparaison tourne d'un angle $\omega \theta$ pendant le temps θ , la direction de la vitesse initiale pour l'observateur, à la fin de θ , au lieu d'être $A'M'$ sera suivant la droite $A'N'$ obtenue en faisant tourner $A'M'$ autour de l'axe instantané de rotation OA' , d'une quantité angulaire $\omega \theta$ mesurant le déplacement $M'CN'$ de la perpendiculaire abaissée de M' sur OA' . La longueur de cette perpendiculaire est le produit par le temps θ de la projection u_r de la vitesse v_r sur le plan $M'CN'$ perpendiculaire à l'axe OA' . On a donc $N'M' = u_r \theta \cdot \omega \theta$ chemin dû à une accélération $2\omega u_r$. Ainsi dans ce cas le déplacement total apparent du mobile étant formé de $A'N'$ dû à la vitesse v_r et de la bissectrice $N'M'NM$, celle-ci manifeste à l'observateur entraîné trois accélérations: l'une $2\omega u_r$ perpendiculaire à la vitesse relative et dirigée en sens inverse de la rotation de cette vitesse; l'autre égale et directement opposée à l'accélération d'entraînement du

point A, la troisième l'accélération absolue J.

$$\text{Formule } J_r = R \dot{\omega} (J_1 - J_2, 2\omega u_r).$$

La découverte des relations établies nos 71 et 73 est due à Coriolis qui l'a obtenue par la transformation des coordonnées (Journal de l'École Polytechnique, cahier XXI et XXIV).

74. - Exemples ou Exercices divers. Ex. 1^{re}. Accélération du mouvement d'un point d'une circonférence roulant uniformément sur une droite. Le mouvement de la circonférence et du point peut être considéré comme composé du mouvement rectiligne uniforme du centre et d'une rotation uniforme autour de ce centre. L'accélération d'entraînement est nulle et par conséquent (71) l'accélération totale est égale à l'accélération relative $\omega^2 r$ constamment dirigée vers le centre du cercle générateur. Soit ρ la distance du point principal au point de contact actuel, centre de rotation instantané. L'accélération normale absolue du mobile est $\omega^2 r \frac{\rho}{r} = \frac{\omega^2 \rho^2}{\rho}$ (63); donc rayon de courbure de la cycloïde $\rho = 2r$. L'accélération tangentielle est $\omega^2 \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} \rho^2}$, &c.

75. - Ex. 2^e. Accélération mutuelle des corps célestes. En substituant aux distances variables des planètes au soleil leurs valeurs moyennes, on trouve pour une planète quelconque son accélération vers le soleil.

$$j = \frac{V^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = 4\pi^2 \frac{r}{T^2}.$$

Or, d'après la 3^{ème} loi de Kepler $T^2 = Kr^3$. Donc $j = \frac{4\pi^2}{K} \frac{1}{r^2}$ &c.

76. - Ex. 3^e. Influence du mouvement de la terre sur l'accélération due à la pesanteur. Lorsqu'il s'agit des phénomènes mécaniques ordinaires sur la terre on peut faire abstraction de l'accélération commune vers le soleil, et de la vitesse du centre du globe qui est d'environ 30.000 m par seconde, sans rien changer aux mouvements relatifs que nous observons. Or l'axe de la terre qui en réalité se meut à très-peu près parallèlement à lui-même est considéré comme fixe et la partie solide du globe forme un système de comparaison tournant uniformément autour de cet axe, avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0,00073 \dots$; d'où il suit que pour les vitesses v_r que nous avons l'occasion d'observer, l'accélération $j'' (= 2\omega v_r)$ est ordinairement une fraction très-petite de l'accélération des corps tombant librement dans le vide, laquelle est 9^m 8088 pour notre latitude.

Si l'on néglige j'' il ne reste plus pour composantes de l'accélération relative ou apparente g , que l'accélération totale absolue des corps vers le centre de la terre et l'accélération j' ($= \omega^2 r$) centrifuge, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe de rotation.

à l'équateur, par exemple, on a $\omega = \frac{2\pi}{86164}$ et $2\pi r = 4007000$ à moins de 1 km.

près d'où l'accélération centrifuge $j' = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{(86164)^2} = \frac{2\pi \cdot 4007000}{(86164)^2} = 0,034$ approximativement. L'expérience a d'ailleurs constaté qu'à l'équateur l'accélération relative ou apparente des corps tombant librement est 9^m 780...; désignons-la par g_E . L'accé-

l'rotation totale ou absolue G qui deviendrait la seule apparente si la terre ne tournait pas est la somme de ces deux quantités. On a donc à peu près $\frac{I'}{J} = \frac{0,034}{9,78} = \frac{1}{288}$ et $\frac{I'}{G} = \frac{1}{289} = \frac{1}{(17)^2}$.

ainsi la rotation de la terre diminue à l'équateur l'accélération apparente de $\frac{1}{289}$, et celle-ci serait nulle si la rotation du globe était 17 fois plus rapide.

77. — Ex. 4^e. Accélération lunaire. On peut faire abstraction du mouvement commun de la terre et de la lune autour du soleil. La distance de la lune à la terre est variable et s'écarte jusqu'à environ $\frac{1}{15}$ en plus ou en moins de sa valeur moyenne qui est à peu près de 60 rayons terrestres. Prenant cette distance pour constante R et supposant le mouvement uniforme on trouve l'accélération totale, centripète $\frac{4\pi^2 R}{T^2} = J$. La durée de la révolution est 27,322 jours ou 39344 min.; $T = 39344 \times 60$; $R = 60r$; $2\pi r = 40000000$; donc $J = \frac{4\pi^2 \cdot 60r}{(39344)^2 (60)^2} = \frac{1}{369}$. à la surface de la terre on a l'accélération $g = 9,81$ donc $\frac{J}{g} = 9,81 \cdot 369 = 3619,89$ à peu près $(60)^2$ rapport inverse des carrés des distances.

Ce dernier calcul essayé par Newton dès 1665, mais sans succès parce qu'il n'existait pas alors de mesure exacte de la terre, fut repris par lui en 1682, en se servant de la mesure d'un degré terrestre exécutée en France vers cette époque par Picard.

78. — Ex 5^e. — Mouvement vertical ou parabolique des corps dans le vide. En admettant comme un fait expérimental que l'accélération des corps libres dans le vide est verticale, constante quelle que soit l'intensité et la direction de la vitesse, on trouve aisément toutes les circonstances du mouvement de ces corps. L'accélération considérée dont il s'agit est ordinairement désignée par g , et sa valeur à la latitude de Paris est 9,8088 l'unité de temps étant la seconde. (Si l'unité de temps était une minute l'expression de g sera 3600 fois plus grande).

1^o Mouvement vertical. $\frac{dv}{dt} = g$; $v = v_0 + gt$; $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$.

Élimination de t : $v^2 = v_0^2 + 2g v_0 t + g^2 t^2 = v_0^2 + 2g(x - x_0)$, ou $v^2 - v_0^2 = 2g(x - x_0)$.

Ces formules conviennent à tous les cas pourvu qu'on ait égard aux signes.

Quand il s'agit d'un mouvement d'abord ascensionnel, il est plus commode de prendre le sens positif des espaces et des vitesses du côté ascendant ce qui change le signe de g dans les équations.

Cas particuliers. Descente sans vitesse initiale: $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, $v = gt$, $x = \frac{1}{2} gt^2$,

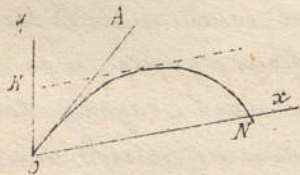
$$x = \frac{v^2}{2g}, \quad v = \sqrt{2gx}.$$

Ascension à la hauteur h où la vitesse finale devient nulle

$$T = \frac{v_0}{g}, \quad h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad h = \frac{g T^2}{2}, \quad v_0^2 - v^2 = 2gy.$$

2° Mouvement parabolique. axe des x suivant la direction OA de la vitesse initiale V ; axe des y vertical descendant. on a immédiatement (59) $x = Vt$ et $y = \frac{1}{2} gt^2$ d'où $y = \frac{g}{2V^2} x^2$.

Si par le point initial O^* ou même l'axe des y vertical ascendant et l'axe des x quelconque, en désignant par V_y et V_x les projections coordonnées de V sur ces axes, on a immédiatement (61)



$$x = V_x t \text{ et } y = V_y t - \frac{1}{2} gt^2 \text{ d'où } y = \frac{V_y}{V_x} x - \frac{g}{2V_x^2} x^2$$

Pour $y=0$; portée du jet $AN = x = \frac{2}{g} V_x V_y$.

$$\text{Soit } \widehat{AOx} = \beta \text{ et } \widehat{AOy} = \beta'; \text{ on a } x = \frac{2}{g} V^2 \frac{\sin \beta \sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')}$$

doit le maximum pour des valeurs constantes de V et de $\beta + \beta'$, répond à $\beta = \beta'$. Donc OA est alors bissectrice de yOx .

Le maximum OH de y répond à $\frac{dy}{dx} = 0$ ou $\frac{dy}{dt} = 0$, $t = \frac{V_y}{g}$, $y = \frac{V_y^2}{2g}$ (comme on pouvait le prévoir). C'est la hauteur du jet quand Ox est horizontal et par conséquent $V_y = V \sin \beta$.

Chap. 4. - Étude géométrique des mécanismes ou Appareils de transformation de mouvement.

Les notes succinctes relatives à cette partie du cours pouvant être annexées à la collection de croquis distribuée aux élèves, porteront une pagination distincte : 1^a, 2^a, ... 8^a.

Notes annexées aux croquis
relative
aux transformations de mouvement.
(Suite de la Cinématique)

Chap. 4. - Étude Géométrique des mécanismes
ou
appareils de transformation de mouvement.

§ 1. - Notions sur la classification des organes de transmission
de mouvement dans les machines.

[1] Une machine est un corps ou ensemble de corps destiné à recevoir en quelque lieu de son point l'action d'un moteur tandis que d'autres points, dont la vitesse diffère généralement de celle du premier subissent certaines résistances. La Dynamique ou science des forces étudie à son point de vue les machines; mais la Cinématique les considère simplement comme des appareils propres à transformer le mouvement, en ce sens que, étant donnée la loi du mouvement que doit prendre un certain point d'une machine, elle nous indique dans l'art de disposer cette machine de manière qu'un autre de ses points suive dans son mouvement une loi également donnée et qui être différente de la première.

[2] D'après les vues émises d'abord par Monge, M. Machette et plus tard M. M. Lenz et Bétancourt (Essai sur la composition des Machines, Paris 1808) ont distingué les mouvements en rectiligne, circulaire et enroulé suivant une courbe déterminée, chacun pouvant être continu (progressif) ou alternatif. Toute machine devant lier l'un à l'autre deux de ces mouvements sans exclure le cas où ils seraient de même espèce, ils ont formé les 21 groupes indiqués dans le tableau suivant:

Fig. du n° 15

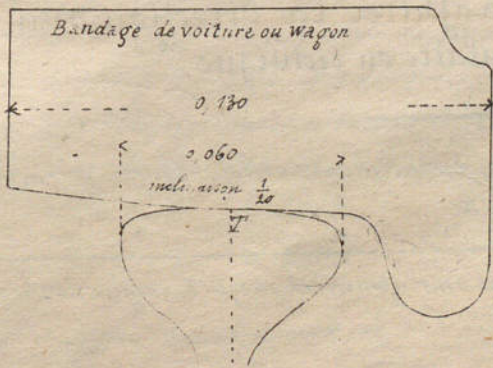


Fig. du n° 22



L'un des mouvements.	L'autre mouvement.	L'un des mouvements.	L'autre mouvement.	
Rectiligne progressif	rectiligne	Cuviligne progressif	rectiligne alternatif 12	
			circulaire alternatif 13	
	circulaire		cuviligne	progressif 14
				alternatif 15
	cuviligne		Rectiligne alternatif	rectiligne alternatif 16
				circulaire alternatif 17
Circulaire progressif	rectiligne	Circulaire alternatif	cuviligne alternatif 18	
			circulaire	circulaire alternatif 19
	circulaire		Cuviligne alternatif	cuviligne alternatif 20
				cuviligne
	cuviligne			progressif 10
				alternatif 11

Mais cette classification est loin d'avoir pour l'enseignement les avantages qu'elle semble promettre: plusieurs groupes manquent dans la pratique et plusieurs combinaisons sont réalisées par des appareils identiques ou tellement analogues qu'il convient de les réunir pour étudier leurs propriétés.

[3] Afin d'utiliser le plus qu'il est possible le temps relativement très-court que nous avons à consacrer à cette étude, nous adopterons une classification beaucoup plus simple. après avoir indiqué le moyen employé pour guider une pièce de machine dans le mouvement de rotation ou de translation qu'elle doit avoir relativement à sa appuie, nous considérerons les cas où deux pièces mises en communication de mouvement agissent immédiatement l'une sur l'autre soit par roulement soit par glissement simple ou mixte. Ensuite nous examinerons les cas où les deux corps sont mis en communication à l'aide de pièces intermédiaires, soit solides, soit flexibles. Nous remarquerons le genre de transformation auquel est propre chacun des mécanismes ainsi passés en revue. Nous indiquerons à l'occasion les réunions qu'on peut faire, dans une même machine, de plusieurs combinaisons simples. Enfin nous dirons l'emploi des divers organes dans certaines circonstances dignes d'être signalées.

§ 2. Organes propres à assurer la direction d'un mouvement circulaire ou rectiligne.*

[4] Arbre tournant horizontal, touillon, épanlement, collet; divers assemblages de touillon avec l'arbre. Croquis feuille 1, n° 1 à 4.

* Quelques observations relatives au frottement sont ajournées jusqu'à ce que la théorie qui s'y rapporte ait été donnée dans le cours.

- [5] Supports d'arbres horizontaux. Paliers divers. Nomenclature et utilité de leurs pièces. f. 1, n^{os} 5 et 6; f. 2, n^{os} 1 et 2. Couillon tournant sur une galette ou sur un segment de galette, n^{os} 3 et 4.
- [6] Arbres verticaux; pivots. n^{os} 5 et 7. Crapandines simples ou avec soulèvement, f. 3, n^{os} 1 et 2. Colliers avec boîte à étouper ou avec galette n^{os} 3 et 4.
- [7] Accessoires d'arbres horizontaux ou verticaux, f. 4 n^{os} 1 à 5.
- [8] Plaque tournante de chemin de fer n^o 6. Les galettes sont des troncs de cônes ayant leur sommet dans l'axe vertical central, et roulant sans glisser sur d'autres surfaces coniques ayant leur sommet au même point. L'une de ces surfaces est fixe; l'autre appartient à la plaque tournante qui a une vitesse angulaire double de celle du cadre NN lié aux axes des galettes. Pont tournant, f. 5, n^o 1, même disposition.
- [9] Râtures et languettes.
- [10] Aillet glissant le long de tiges qu'ils embrassent, f. 5, n^o 4. Chaque aillet est formé de deux pièces maintenues par des boulons à la distance convenable.
- [11] Châssis de roue n^o 5: exemple de l'emploi de la disposition qui précède. Quatre aillots guident mieux que deux à cause du frottement.
- [12] Aillet fixe dans lequel glisse une tige mobile, f. 6, n^o 1: emploi dans les pompes.
- [13] Glissière et son guide fixe, n^o 2: emploi dans les locomotives.
- [14] Galet mobile dans une rainure n^o 3. Galette à gorge n^{os} 5 et 6: ils cessent quelquefois de tourner; d'ailleurs sous le rapport de la précision on leur préfère généralement les glissières pour guider une tige.
- [15] Rails de chemin de fer et roues de wagon n^o 4. La figure (page 1a) donne le profil d'un bandage de roue. A l'endroit du contact avec le rail la surface de la roue est conique, la génératrice du cône faisant avec l'axe, qui est celui de l'espieu de la roue un angle dont la tangente est $\frac{1}{20}$. Le rail est légèrement bombé. Entre le point de contact T et son symétrique sur l'autre rail la distance est de 1^m.500. Entre le rail et le rebord ou boudin de la roue est un intervalle ou jeu suffisant pour que les deux roues invariablement calées sur l'espieu puissent s'écartier à droite ou à gauche de 0^m.010 de leur position normale, avant qu'il y ait frottement du rebord contre le rail. Ce déplacement simultané des deux roues leur permet de rouler sans glisser sur le rail dans les parties courbes du chemin. Le rayon de la roue à l'endroit du contact étant supposé d'abord de 0^m.50, devient, par le déplacement, 0.5005 pour une roue et 0.4995 pour l'autre; les deux cercles roulants se trouvent donc alors sur une surface conique dont la distance R à l'axe de la voie satisfait à la proportion

$$\frac{R + 0.75}{R - 0.75} = \frac{0.5005}{0.4995}, \text{ d'où } R = 750^m.$$

l'angle est un angle de 2° 51' 44" à quelques dixièmes de seconde près.

C'est le rayon de courbure de la voie que suit sans glisser, le système des deux roues par suite du déplacement latéral de 0,01.

§ 3. - Organes communiquant immédiatement le mouvement par simple roulement.

- [16] - Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne. Marteau pilon, f. 6, n° 7. Science, f. 7, n° 1.
- [17] - Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire intermittent. n° 2. L'arbre dont le support est mobile tourne continuellement; on le rapproche avec pression de l'autre arbre auquel il communique alors son mouvement.
- [18] - Transformation analogue par des cônes n° 3 et 4. Rapport des vitesses angulaires.
- [19] Autre exemple avec moyen de faire varier le rapport des vitesses. n° 5.
- [20] Autre exemple où l'un des cônes est remplacé par une surface plane. n° 6.

§ 4. - Organes communiquant immédiatement le mouvement par glissement simple.

- [21] Exemple du plan incliné dans la presse à coin, f. 8, n° 1. Rapport de la vitesse du coin à la somme des vitesses des calés. Clef pour dépresser. Question du frottement résolvée.
- [22] Tige et rainure hélicoïde, f. 8, n° 2. La tige est menée parallèlement à l'axe de rotation d'un cylindre dans lequel est creusée une rainure qui doit être hélicoïde si l'on veut que le rapport des vitesses de la tige et du cylindre soit constant. En terminant la tige par une languette articulée et creusant dans le cylindre deux rainures de sens contraires qui se croisent et se raccordent aux deux extrémités AB de la course de la tige, on obtient pour celle-ci un mouvement rectiligne alternatif. (Fig. page 1 a).
- [23] - Vis et écrou. On distingue dans une vis: 1° Le noyau; 2° Le profil carré ou triangulaire du filet; 3° Le pas, la quantité dont un point mobile sur le filet s'avance parallèlement à l'axe après un tour entier en restant à une distance constante de cet axe; 4° Le nombre de filets distincts (le pas divisé par ce nombre donne l'espace de milieu en milieu de deux filets voisins, parallèlement à l'axe de la vis); 5° Le sens à droite ou à gauche de la vis, suivant que la rotation autour de l'axe fixe, d'un point mobile qui suit le filet, est directe ou rétrograde, positive ou négative (42).

L'érou est en creux pour ainsi dire le moule de la vis. Il a ordinairement moins de hauteur parallèlement à l'axe que la vis.

[24] - Exemples divers de l'emploi de la vis, fig. 8, n° 5. Presse à vis: filet quarré, unique, à droite; pas égal au double de la saillie du filet. Érou fixe: à chaque tour de la vis, le plateau, sans tourner, monte ou descend avec elle d'un pas.

N° 6. Vis en bois servant à soulever une vanne: filet triangulaire, unique, à droite; pas égal au double de la saillie du filet; érou tournant qui ne doit toucher le chapeau fixe que sur une zone étroite voisine du filet.

N° 7. Presse à timbre. Érou fixe. Vis à filet quarré, à droite; deux filets distincts et pas quadruple de la saillie afin d'obtenir une translation rapide.

fig. N° 1. Vis tournant sans translation, érou glissant le long d'une languette.

N° 2. Deux vis de sens contraires sur un même noyan; deux érous qui, ne pouvant pas tourner, se rapprochent ou s'éloignent suivant qu'on donne à la vis, à droite la rotation directe ou rétrograde.

N° 3. Vis différentielle de Prony dite micrométrique. Le même noyan porte deux vis de pas différents qui tournent dans deux érous l'un immobile l'autre ne pouvant avoir qu'un mouvement de translation. Si les deux vis sont de même sens, à chaque tour de la manivelle dans ce sens l'érou mobile se rapproche de l'autre d'une quantité égale à l'excès de son pas sur celui de l'autre érou.

Exemple: la différence des pas étant de $\frac{1}{10}$ de millimètre, la vis tournant de 2° , angle facile à mesurer sur un limbe gradué, fera marcher l'érou mobile de $\frac{1}{1800}$ de millimètre.

Remarque. Les cames et pignons à mentonnet rectiligne et quelques excentriques qui à la rigueur appartiendraient au présent paragraphe, sont renvoyés à un autre parce qu'ils dépendent, comme cas particuliers, de dispositions plus générales.

§ 5. - Organes communiquant le mouvement par glissement mixte.

1° Engrenages cylindriques dont les vitesses angulaires sont en rapport constant.

[25] - La communication de mouvement par cylindres ou cônes de friction [17 et 18] n'est propre qu'à transmettre de légers efforts ou à un emploi accidentel à cause des frottements que de grandes pressions occasionnent sur les axes. Dans la plupart des cas les roues d'engrenage remplacent avantageusement les cylindres et cônes simplement roulants; les dents dont elles sont armées rendent invariable le rapport des nombres de révolutions simultanées des deux arbres sur lesquels elles sont fixées.

2° Division.

Notes sur la transf. des Mouvem. - 2^e Feuille a.

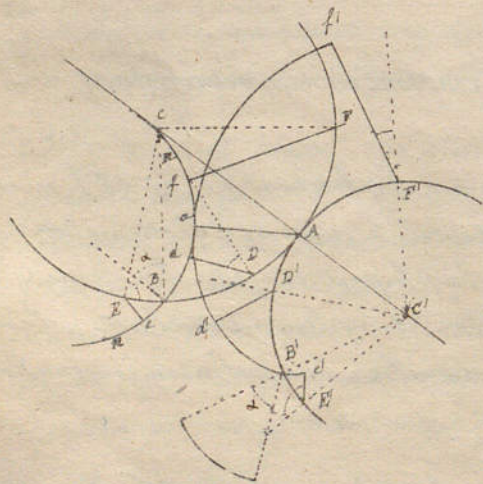
[26] - Le problème à résoudre est de donner aux dents de deux roues qui engrenent la figure qui convient pour que leurs vitesses angulaires soient dans un rapport constant. Dans le cas simple (que nous étudierons d'abord) où les axes sont parallèles, les vitesses angulaires sont les mêmes que si la communication de mouvement avait lieu par deux cylindres de friction roulant l'un sur l'autre sans glisser, et ayant pour axe de figure les axes de rotation des roues. Les cercles tangents l'un à l'autre, qui sont les bases de ces cylindres, s'appellent cercles primitifs. Leurs rayons sont proportionnels aux nombres de dents des deux roues sont réciproquement proportionnels aux vitesses angulaires ou aux nombres de tours accomplis dans un même temps.

[27] - Les dents des engrenages à axes parallèles sont ordinairement terminées par des surfaces cylindriques dont les génératrices rectilignes sont parallèles aux axes de rotation des roues. Il suffit donc d'étudier la figure des dents dans une section perpendiculaire à ces axes.

[28] - Le mouvement relatif des deux roues est le même que si l'un des cercles primitifs était fixe, l'autre roulant, sans glisser, en sens contraire du mouvement qui a réellement lieu à l'endroit du contact de ces deux cercles. On voit d'après cela que le problème ci-dessus énoncé a théoriquement une infinité de solutions. Si on ne les considérait qu'au point de vue géométrique, on pourrait prendre pour la dent d'une des roues un profil quelconque. Qu'on fasse en effet rouler le cercle primitif de la roue armée de cette dent sur le cercle primitif de l'autre roue; la dent donnée prendra diverses positions auxquelles sera tangente la surface cherchée de la dent de la seconde roue.

[29] - L'exécution graphique de cette solution est rendue facile par cette propriété (53) que pour que les vitesses angulaires soient dans un rapport constant, il faut et il suffit que la normale commune aux deux courbes en contact dans une position quelconque passe par le point de contact des deux cercles primitifs.

[30] - Problème. - Étant donnée la courbe mn adoptée pour une dent fixée à la roue C , trouver celle qui convient à la dent correspondante de l'autre roue C' .



Solution. - Plaçons la courbe donnée dans une position quelconque relativement au point A commun aux deux cercles primitifs. Soit Aa la plus courte distance de A à la courbe mn . Si l'on fait arc $AB' = arc AB$, les deux points B et B' doivent coïncider quand on fait tourner à droite de A les deux roues; ou rouler à gauche l'une sur l'autre restée fixe, on amène B au contact des deux cercles. On a ainsi deux points a et B' de la courbe cherchée. On a même pour cette courbe la normale en a , et pour avoir celle en B' , il suffit de tracer par B'

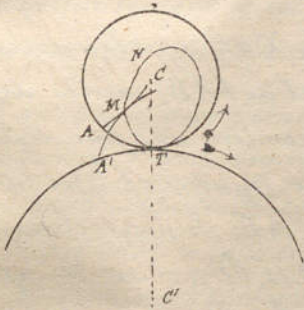
une droite faisant avec le prolongement du rayon $C'B'$ un angle égal à celui que la normale en B à $m n$ fait avec le rayon BC .

Pour avoir un point intermédiaire, prenons entre A et B sur $m n$ un point d et menons la normale dD ; lorsque dD sera la normale commune aux deux courbes, D coïncidera avec D' déterminé en faisant $AD' = \text{arc } AD$. Donc si prenant D' pour centre on décrit un arc de cercle avec le rayon $D'd' = Dd$ cet arc sera tangent à la courbe cherchée. Si même on trace $D'd'$ faisant avec le prolongement du rayon un angle égal à CDd , on aura en d' le point cherché de la 2^e courbe.

On voit aisément comment on obtiendrait des points tels que e , e' devant coïncider en même temps que les deux points F, F' des cercles primitifs, et les deux points f, f' en même temps que F et F' .

Un petit nombre de points ainsi déterminés avec la direction de la tangente pour chacun d'eux fourniraient un bon moyen de solution graphique; mais si l'on prenait au hasard la première courbe, on risquerait de rencontrer des impossibilités pratiques dont on verra tout à l'heure un exemple.

[31] — Autre procédé général pour déterminer les profils des engrenages. Courbes épicycloïdales.



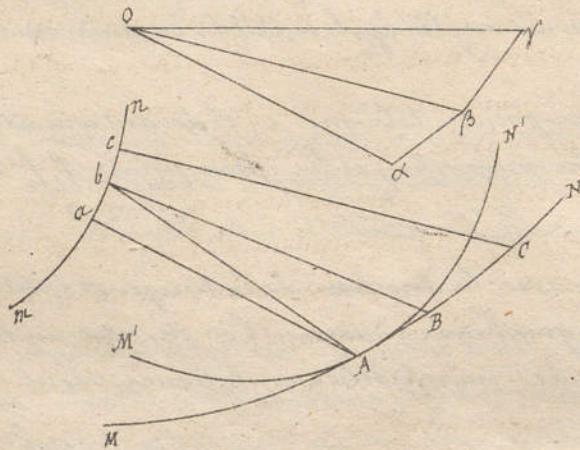
Soient C et C' les deux cercles primitifs. Soit en outre une courbe quelconque TMN qui les touche en T . Imaginons que C' étant fixe, C roule sur ce cercle, et qu'en même temps la courbe TMN roule également sans glisser, de manière que les trois courbes aient continuellement le même point de contact. Pendant ce roulement, un point quelconque M de la courbe TMN , dans son mouvement relatif à chaque cercle et sur le plan fixe ou mobile de ce cercle, décrit une courbe dont la normale à chaque position passe au contact commun des deux cercles.

Si à partir d'une position déterminée, telle que celle de la figure ci-contre, le roulement se fait à gauche, les points des courbes MA, MA' obtenus seront les points successifs de contact pendant le mouvement des dents à droite autour des centres fixes C, C' . La disposition relative des deux courbes montre qu'elle est celle des deux roues qui dans ce mouvement doit nécessairement pousser l'autre, par exemple dans le cas de la figure, si le mouvement autour de C et C' a lieu dans le sens des flèches, la dent terminée par M ne peut que pousser celle que termine la courbe MA' : la roue C est mouvante ou conductrice; la roue C' est résistante ou conduite. Ce serait tout le contraire si à partir de l'instant où les points A et A' des deux dents coïncident en T on faisait tourner les roues en sens contraire des flèches. Dans le premier cas les surfaces des deux dents MA, MA' se touchent avant d'arriver à la ligne des centres, dans le second cas c'est après y être passée.

[32] Les deux solutions [30] et [31] se ramènent à un même principe que voici:

Théorème. Étant donnée une courbe MAN et une 2^e courbe man dont les normales rencontrent la première, il est toujours possible de trouver une 3^e courbe $M'AN'$ touchant la première en un point donné A , et qui soit telle que pendant que cette 3^e courbe roule sur la première, le point α , pied de la normale menée de A sur man , décrive cette courbe man .

En effet, soient aA, bB, cC, \dots des normales à man infiniment voisines. Imaginons



qu'une figure quelconque liée au point α (par exemple une droite ayant ce point pour extrémité), tourne autour de A comme centre instantané jusqu'à ce que son point α ait décrit le petit arc ab perpendiculaire à aA ; que le point α étant ainsi parvenu en b , la même figure tourne autour de B et que son point α décrive le petit arc bc ; ainsi de suite. On voit que la figure invariable mais mobile dont il s'agit décrit par l'un de ses points la courbe man , et à dans son mouvement, tous ses centres instantanés de rotation sur MAN ; ce qui, d'après un théorème précédemment démontré (28) permet de conclure la proposition actuelle.

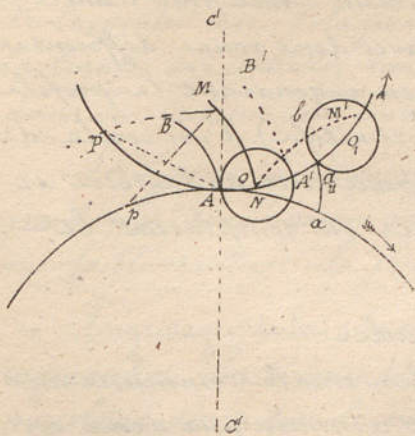
déjà démontré (28) permet de conclure la proposition actuelle.

Au reste, on peut le démontrer a priori: construisons le triangle $O\alpha\beta$ dont les côtés soient $O\alpha = aA, \alpha\beta = AB, \beta O = bB$. Il en résulte que ce triangle est égal à bAB , car les droites aA, bA , dont l'une est la projection de l'autre sur la direction de la première, ont leur différence infiniment petite par rapport à l'infiniment petit ab . Donc après avoir transporté $O\alpha$ sur aA , si l'on fait tourner le triangle $O\alpha\beta$ de manière que α s'applique sur AB , le point O passera de a en b . En faisant pour bB et cC ce qu'on vient de faire pour aA , et bB , c'est-à-dire $\beta\gamma = BC$, et $O\gamma = cC$, on obtient un second élément $\beta\gamma$ de la courbe cherchée.

[33] - Le problème des engrenages cylindriques a reçu dans la pratique trois genres de solution distincts.

Première solution en usage. - Engrenage à lanterne ou à fuseaux cylindriques. - La courbe ou profil des dents d'une roue est un cercle dont le centre est sur la circonférence primitive. La courbe convenable pour celles de l'autre roue se détermine par la considération du mouvement relatif ci-dessus indiquée. Si l'on veut que les deux roues tournent comme l'indiquent les flèches de la figure, les points des cercles primitifs, dans le voisinage du contact, allant à droite, il faut considérer que le cercle C qui porte le fuseau, roulant à gauche du cercle C' , le centre O du fuseau décrit une épicycloïde OM ; d'où il est facile de conclure la courbe enveloppe AB qui convient à la dent de C' , pour que celle-ci, dans son mouvement effectif à droite, pousse ou conduise la roue C . On voit qu'à partir de l'instant, où, comme dans la figure (page 9a), la circonférence du fuseau passe au point de contact A des cercles primitifs le centre O étant au delà, la courbe convexe AB , dont la normale en A

est AO , satisfait à cette condition.



Si après que le fuseau a été poussé de AO en a, o_1 par la courbe AB transportée en ab , on le fait rétrograder et pousser à son tour la même courbe de ab en AB , il est évident que la condition du passage constant de la normale commune au point de contact primitif A est remplie.

Donc, le profil circulaire du fuseau et la courbe AB déduite de l'épicycloïde NM conviennent dans deux cas: 1^o quand le fuseau est au-delà de la ligne des centres et mené par l'autre dent; 2^o quand le fuseau est avant la ligne des centres et mène l'autre dent.

Si l'on voulait que la roue C' fût menée au-delà de la ligne des centres, la courbe de sa dent $A'B'$ devrait être concave; or sous la condition d'égalité des vitesses des roues primitives, il y aurait une impossibilité matérielle à l'emploi de cette courbe $A'B'$; car pour que le fuseau pût arriver dans la position de la figure, il faudrait qu'il eût d'abord été à gauche de la ligne des centres; il faudrait donc que les deux roues pussent revenir à cette position précédente en se détournant à gauche; que par conséquent la roue C pût rouler à droite sur la roue C' , le centre du fuseau décrivant une branche d'épicycloïde NM' . C'est à quoi s'opposerait la dent terminée par la courbe $A'B$.

Ordinairement c'est la lanterne qui est menée par l'autre roue; et le contact a nécessairement lieu au-delà de la ligne des centres seulement.

L'exécution graphique de l'épicycloïde que suppose l'explication précédente se fait ainsi: O étant pris pour point décrivant sur le cercle C actuellement tangent en A au cercle C' , on détermine l'origine N en faisant $AN = AO$; puis on prend deux arcs égaux AP, Np ; on trace l'arc pM ayant le centre C' du cercle fixe; on détermine M par la condition $pM = AP$. Le point M appartient à l'épicycloïde, et de plus pM est sa normale.

34. — Deuxième solution en usage. — Engrenage à dents épicycloïdales.

Pour appliquer à la pratique la théorie du n^o [31], on prend le plus souvent pour la courbe TMN le cercle dont le diamètre est le rayon TC de l'un des cercles primitifs. La courbe MA devient un rayon du cercle C ; la surface plane MA s'appelle flanc; la courbe MA' devient un arc d'épicycloïde. Des considérations qui précèdent on conclut: 1^o que dans leur mouvement vers la ligne des centres le flanc MA de la dent de C intérieur à son cercle primitif pousse ou conduit la face épicycloïdale MA' de la dent de C' extérieur à son cercle primitif; 2^o que le contraire a lieu dans le mouvement des dents au-delà de la ligne des centres; 3^o que pour que le contact de deux mêmes dents commence avant la ligne des centres et finisse au-delà de cette ligne, il suffit que la surface de chaque dent soit formée d'un flanc intérieur au cercle primitif et d'une partie épicycloïdale extérieure engendrée par un cercle dont le diamètre est égal au rayon du cercle primitif de l'autre roue.

2^o Division. (Méc. et Mach.)

Notes sur la transformat. de Mouvem^t. — 3^o Feuille A.

cercle primitif formant rebroussement, ce qui est matériellement impossible. Ainsi les dents de la grande roue n'agissent que par leur partie combe; elle n'agissent que sur la partie plane des dents de la petite roue; si la grande roue est motrice ou conductrice, le contact a lieu seulement après la ligne des centres; dans le cas contraire, il aurait lieu seulement avant le passage des dents sur la ligne des centres.

Le système à développante de cercles conduit à des surfaces concaves pour les dents de la grande roue, ce qui paraît peu praticable, à moins que les dents suffisamment multipliées, n'aient une faible saillie. Le contact peut alors commencer avant la ligne des centres et finir après.

37 - Engrenage de la crémaillère. - C'est le cas particulier où l'un des cercles primitifs a son rayon infini. La théorie de l'engrenage à lanterne s'applique avec cette seule différence que l'épicycloïde décrite par le centre du fuseau devient une cycloïde. Celle de l'engrenage à flange normale s'applique également, l'épicycloïde adhérente à la petite roue devient une développante de cercle, et l'épicycloïde adhérente à la grande roue, c'est-à-dire à la crémaillère, devient une simple cycloïde. Enfin le système d'engrenage à normale constante et à développante s'applique aussi au cas de la crémaillère avec cette modification que pour la crémaillère la développante est remplacée par une droite perpendiculaire à la direction choisie pour celle de la normale constante.

38. - Détails sur les dents d'engrenage. On appelle par le quotient de la circonférence primitive divisée par le nombre des dents. Il est clair que le pas doit être le même pour deux roues qui doivent engrener ensemble. La partie du pas occupée par la dent se nomme l'épaisseur ou le plein de la dent; le reste s'appelle le creux ou le vide. Les dents sont ordinairement d'égale épaisseur sur les deux roues, surtout si elles sont de la même matière, métal ou bois. Le creux excède le plein de la dent qui doit y entrer d'environ $\frac{1}{15}$. Cette différence est le jeu. La saillie des dents en dehors des cercles primitifs se détermine par la condition qu'il y ait toujours au moins un contact de deux dents pendant le roulement fictif de ces deux cercles; sans quoi, il y aurait choc et irrégularité dans le mouvement des deux roues. Dans les engrenages à épicycloïde et à développante de cercle, on fait ordinairement en sorte qu'il y ait toujours contact de deux paires de dents, l'une avant, l'autre après la ligne des centres. Construction géométrique pour réaliser cette condition, qui exige un certain nombre de dents sur la plus petite des deux roues. La partie saillante du profil des dents est terminée par un arc de cercle. Le creux se termine par un autre arc de cercle qui laisse entre la jante d'une roue et la circonférence extérieure de l'autre un jeu de 2 ou 3 millimètres.

La théorie du frottement dans les engrenages montrera de quelle importance il est de multiplier les dents afin de diminuer l'influence du frottement. Elle démontrera que sous ce rapport les contacts avant la ligne des centres sont plus nuisibles que les contacts après cette ligne. Elle expliquera en quoi consiste l'arc-boutement possible de deux dents avant la ligne des centres.

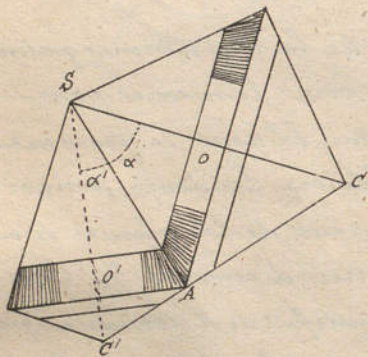
Afin de conserver aux dents une résistance suffisante malgré leur petite épaisseur, on leur donne, parallèlement à l'axe de rotation, une assez grande dimension que les praticiens appellent largeur, et qui est de 4 à 5 fois l'épaisseur.

2° Engrenages coniques.

39. — Si les deux axes de rotation se rencontrent en S , les vitesses angulaires devant être dans un rapport constant, cette condition revient à fixer sur les axes deux cercles de rayon OA , $O'A$, dont les plans soient perpendiculaires à ces axes, qui se meuvent par frottement, et dont les rayons soient en raison inverse des vitesses angulaires. On a :

$$OA \cdot \omega = O'A \cdot \omega' \text{ et } \frac{O'A}{OA} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \text{ d'où } \omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha'$$

$$\text{ou, en faisant } \alpha + \alpha' = \beta, \quad \cot. \alpha = \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{\omega}{\omega'} + \cos \beta \right)$$



Si l'on considère les cercles OA , $O'A$ comme bases de troncs de cônes ayant le sommet commun S , on voit que leurs surfaces se meuvent en roulant l'une sur l'autre sans glissement. Il s'agit de substituer à ces cônes de friction primitifs des surfaces saillantes et rentrantes qui se pressent mutuellement pendant le mouvement qui vient d'être défini. On voit par analogie avec ce qui a été dit précédemment qu'on pourrait prendre arbitrairement la surface adhérente à l'un des cônes et en conclure celle qui conviendrait pour l'autre. Les solutions ordinaires terminent les dents par des surfaces coniques ayant pour sommet la rencontre S des deux

axes. Dans ce cas, si l'on imagine la sphère dont le centre est S et le rayon SA et sur laquelle sont par conséquent les circonférences OA , $O'A$, on voit qu'on peut déterminer sur cette sphère les profils des dents coniques par des considérations et des constructions analogues à celles qui ont été employées pour les engrenages cylindriques. Les droites sont remplacées par des arcs de grands cercles, les épicycloïdes planes par des épicycloïdes sphériques. On est ainsi conduit à distinguer trois systèmes analogues à ceux qui sont usités pour les engrenages à axes parallèles. On peut exécuter rigoureusement les constructions par les méthodes de la Géométrie descriptive; mais dans la pratique on se contente d'une approximation qui suffit. Par le point A de la génératrice de contact des cônes primitifs on mène, perpendiculairement à cette génératrice, la droite CC' rencontrant les axes en C et C' . Puis on considère ces points C et C' comme les sommets de cônes droits ayant pour bases les cercles primitifs dont les rayons

sont OA, O'A; et c'est sur les surfaces développées de ces cônes que l'on trace les directrices ou profils des surfaces coniques des dents. A cet effet, on remarque que pendant la rotation des deux roues ces directrices doivent se toucher, et que dans le voisinage de A elles s'écartent très peu du plan tangent projeté en OC' et commun aux deux cônes CAO, C'A O'. De plus les divers points de ce profil se déplacent en restant respectivement à des distances constantes des centres C, C'. En conséquence, on développe les deux surfaces coniques COA, C'A O', en deux secteurs ayant pour distance des centres la longueur CC'; pour rayons les distances CA, C'A; pour bases des arcs de mêmes longueurs que les circonférences primitives dont les rayons sont OA, O'A, et l'on prend ces arcs comme cercles primitifs d'engrenage dont on fait le tracé d'après le système à fuseaux, à épicycloïdes ou à développantes qu'on a adopté. Ce tracé fournit les pignons qui servent à transporter sur les surfaces coniques CA, C'A les profils des dents.

[40] - Communication de mouvement par roues dentées entre deux arbres dont les axes ne sont pas dans un même plan. Arbre intermédiaire dont l'axe est dans un plan avec chacun des deux axes extrêmes. On peut distinguer : 1° le cas où l'axe intermédiaire rencontre les deux autres, perpendiculairement ou obliquement, feuille 11, N° 1; 2° le cas où l'axe intermédiaire est parallèle à l'un des deux autres, N° 2.

[41]. - Equipage de roues dentées.

Exemple	{	Arbres	O	O'	O''	O'''	} A engiène avec a', qui a par conséquent même par. A' engiène avec a'', A'' avec a'''.
		Roues	A : a'	A' : a''	A'' : a'''		
		Diamètres	D	d'	d''	d'''	
		Nombre de dents	N	n'	n''	n'''	
		Vitesses angulaires ω	ω	ω'	ω''	ω'''	

On a $\frac{D}{d'} = \frac{N}{n'}$, $\frac{D'}{d''} = \frac{N'}{n''}$, $\frac{D''}{d'''} = \frac{N''}{n'''}$ et $N \omega = n' \omega'$, $N' \omega' = n'' \omega''$, $N'' \omega'' = n''' \omega'''$,

d'où $\frac{\omega'''}{\omega} = \frac{N \cdot N' \cdot N''}{n' \cdot n'' \cdot n'''} = \frac{D \cdot D' \cdot D''}{d' \cdot d'' \cdot d'''}$

relation qui s'exprime facilement en langage ordinaire. Dans la pratique, les vitesses angulaires se remplacent par les nombres de tours en une minute.

Si l'on désigne par V et V''' les vitesses des circonférences primitives des roues extrêmes A et a''', on a

$$\frac{V'''}{V} = \frac{\omega''' \cdot d'''}{\omega \cdot D} = \frac{\omega''' \cdot n'''}{\omega \cdot N}$$

et par suite $\frac{V'''}{V} = \frac{N' \cdot N''}{n' \cdot n''} = \frac{D' \cdot D''}{d' \cdot d''}$

Dans un équipage de roues dentées, les petites roues s'appellent communément pignons, quoique ce mot signifie proprement une petite roue sans bras.

V. Division.

Notes sur la transformation des mouvements. - 4° Feuille a.

[42]. - Exemple du cric. N° 3. Bras de la manivelle = b , rayon du pignon de la manivelle = r , rayon de la roue intermédiaire = R' , rayon du pignon menant la crémaillère = r' . Vitesse angulaire de la manivelle = ω , id. de l'arbre intermédiaire = ω' . Vitesse de la manivelle = v , id. de la crémaillère N' . On a

$$N = \omega b, \text{ cor} = \omega' R', \omega' r' = v' \quad \text{d'où } N = N' \frac{b R'}{r r'}$$

Le rapport $\frac{R'}{r}$ est celui des nombres de dents des roues qui engrenent ensemble. Le rayon r' est égal au quotient obtenu en divisant par 2π l'espace occupé sur la crémaillère par un nombre de dents et de creux égal à celui des dents du 2^e pignon.

[43]. - Mouvement alternatif rectiligne d'une tige menée par une roue partiellement dentée, tournant toujours dans le même sens, N° 4. Le mouvement doit être lent pour atténuer les chocs.

[44]. - Mouvement alternatif circulaire d'une roue partiellement dentée, menée par un pignon toujours dans le même sens, N° 6. L'arbre du pignon repose sur deux supports qui lui permettent d'osciller autour d'un point fixe dans un plan passant par le centre de la roue. Le pignon peut ainsi passer de l'intérieur à l'extérieur des dents de la roue, sans cesser d'engrener, son écartement étant empêché soit par la courbure du support voisin, et par un butoir fixe sur la roue, soit par une rainure continue creusée dans la roue et où circule l'extrémité arrondie de l'arbre du pignon.

3^e. Camer et excentriques.

[45]. - Pilon mu par des camers. Feuille 9, N° 4. C'est un cas particulier de la crémaillère qui n'a ici qu'une dent appelée mentonnet. Son profil est rectiligne et perpendiculaire à la direction du pilon; c'est le flanc mené par la came en développante de cercle. Les camers sont suffisamment espacés pour laisser au pilon le temps de retomber.

[46]. - Marteau frontal mu par des camers, N° 5. Cas particulier des engrenages à flancs et épicycloïdes.

[47]. - Cisaille mue par un excentrique circulaire, N° 6. Le rapport des vitesses angulaires est variable et déterminé par l'intersection de la normale au point de contact avec la ligne des deux centres de rotation. Le diamètre de l'excentrique est égal à la somme des distances des deux positions extrêmes du manche de la cisaille au centre de rotation de l'excentrique.

[48]. - Manivelle conduisant une tige guidée dans son mouvement rectiligne alternatif. Feuille 10, N° 1. Le bouton cylindrique de la manivelle fait fonction de came agissant alternative-

ment sur les deux côtés de la coulisse liée solidement et perpendiculairement à la tige. La ligne milieu de la coulisse passe continuellement par le centre du bouton. Donc, si l'on appelle V la vitesse du bouton sur la circonférence qu'il parcourt, R le rayon de cette circonférence ou bras de la manivelle, α l'angle variable de ce rayon avec la ~~coulisse~~ tige, y la distance variable du bouton au plan contenant l'axe de la tige et l'axe de rotation, on a, quel que soit le rayon du bouton de la manivelle

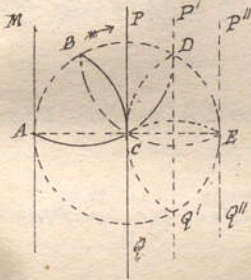
$$\frac{V}{V} = \sin \alpha = \frac{y}{R}; \text{ et si } V \text{ est constante } \frac{dy}{dt} = V \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = \frac{V^2}{R^2} x$$

α représente le bras variable comparé à l'axe de rotation de la manivelle. $\frac{d\alpha}{dt}$ est le vitesse angulaire ou angulaire à $\frac{V}{R}$. L'horizontal passant par le centre du bouton qui incline dans le cadre. on a $\frac{dy}{dt} = \frac{V}{R} \frac{dx}{dt}$ car le rayon angulaire est égal à $\frac{V}{R}$.

La vitesse de la tige varie donc graduellement. L'accélération obtient son maximum aux points morts où la vitesse est nulle.

[49] - Excentrique circulaire et tige à mouvement rectiligne, n° 2. La théorie précédente s'applique immédiatement. Toute la différence est que le rayon de l'excentrique est plus grand que le bras de la manivelle. Avantage de cette disposition sous le rapport de la facilité de l'établissement; inconvénient sous le rapport du frottement, la vitesse de glissement étant $\pi \cdot T \cdot \omega$ (54)..

[50.] - Excentrique triangulaire. Feuille 10, n° 4. - Il est formé de trois arcs de cercles égaux ayant pour centres les trois sommets d'un triangle équilatéral et le côté pour rayon. Chacun de ces arcs est donc de $\frac{1}{6}$ de circonférence. Deux droites parallèles quelconques qui touchent cette figure sont toujours entre elles à une même distance égale au rayon des trois arcs. Cette distance est celle de deux côtés du cadre qui embrasse l'excentrique. Celui-ci tourne autour d'un de ses sommets et fait ainsi mouvoir le cadre et sa tige.

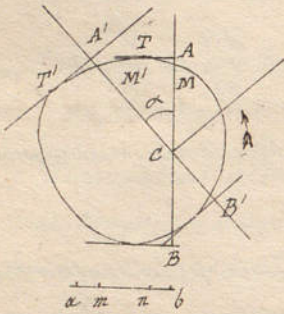


Soient MN et PQ les deux côtés du cadre. C le centre de rotation. Pendant que le sommet mobile le plus avancé se transporte de B en D , l'arc CB pousse la ligne PQ qui lui reste tangente et par conséquent toujours à la même distance en avant du sommet A centre de cet arc.

Le mouvement du cadre est donc celui de la projection sur AE du sommet A par lequel d'ailleurs passe continuellement, pendant ce temps, le côté MN ; le cadre s'avance ainsi de la moitié du rayon CB vers la droite. Dans le second tiers de la demi-révolution, le sommet le plus avancé allant de D en E pousse le côté PQ de $P'Q'$ en $P''Q''$ en lui faisant décrire des espaces égaux à ceux que parcourt en même temps sa projection sur AE , pendant que le second côté du cadre reste tangent à l'arc de l'excentrique opposé à ce sommet. Enfin dans le 3^e tiers de la demi-révolution, les deux sommets mobiles comprenant entre eux le point de tangence du côté du cadre parvenu en $P''Q''$, celui-ci reste immobile. Dans l'autre demi-révolution, les mêmes faits se reproduisent dans le même ordre mais en sens inverse. Dans les deux premiers tiers de chaque période, la vitesse du cadre est à celle d'un sommet mobile

de l'excentrique comme l'ordonnée par rapport au diamètre AE du sommet qui parcourt soit l'arc AB soit DE est un rayon AC . De croissante qu'elle était, elle devient brusquement décroissante. La course entière du cadre est égale au rayon AC de l'excentrique.

[51.] - Généralité sur les excentriques menant un cadre à bords parallèles dans leur plan. C'étant l'axe de rotation et TA le côté tangent supérieur du cadre, si l'on suppose la rotation dans le sens de la flèche, pour savoir quel chemin aura fait le cadre quand l'excentrique aura tourné de l'angle $\alpha = M'CM$, il faut mener la tangente $T'A'$ perpendiculaire à CM' , et comparer les distances CA' et CA dont la différence est le chemin cherché. Si les tangentes opposées parallèles sont toujours à la même distance, le mouvement alternatif du cadre est formé de deux périodes égales et opposées. En effet, de $CA + CB = CA' + CB'$ il résulte $CB - CB' = CA' - CA$; donc à



partir de l'instant où l'excentrique ayant fait une $\frac{1}{2}$ révolution CB aura pris la direction primitive de CA , si un angle α est alors décrit, le cadre baissera autant qu'il a monté pour le 1^{er} angle α . Lorsque, outre cette condition de l'égalité de distance des tangentes parallèles, l'excentrique est formé de deux moitiés symétriques, chaque période d'aller et de retour est aussi composée de deux parties symétriques, c'est-à-dire que la course entière du cadre étant ab , il met le même temps à parcourir les espaces égaux am , nb ; car au retour, la première condition lui fait mettre le même temps à aller de b en n que de a en m ; et, d'après la symétrie, il met le même temps à aller de n en b qu'à revenir de b en n .

L'excentrique circulaire et le triangulaire sont dans ce cas; les deux périodes commençant et finissant au milieu du temps d'arrêt.

Si les deux demi-oscillations ne sont pas égales en vitesse, le cadre ne peut pas toucher l'excentrique par ses deux bords.....

[52.] - Excentrique ou came à onde et tige à galets. Feuille 10, n^{os} 3 et 5. Les considérations du n^o précédent s'appliquent en substituant aux distances entre l'axe de rotation et les tangentes, les rayons vecteurs partant de cet axe et aboutissant à une courbe qui serait décrite par le centre d'un galet circulant sur celle de l'excentrique. Ainsi, lorsque deux galets touchent constamment, la somme des deux rayons vecteurs opposés étant constante, les deux demi-oscillations, l'une allant, l'autre revenant suivant la même loi pour les espaces et le temps. Lorsque, en outre, l'excentrique est formé de deux parties symétriques, une symétrie analogue a lieu dans chaque demi-oscillation.

Ce qui distingue ce mode de communication, c'est que la courbe de l'excentrique peut avoir des parties concaves.

Cas particulier de la came en œuf. La courbe est une spirale d'Archimède. Moyen d'adoucir les changements trop brusques de la vitesse.

En général, les temps d'arrêt plus ou moins longs répondent aux parties

circulaires de l'excentrique ayant leur centre dans l'axe de rotation.

17a

4^e Vis sans fin. Engrenage deux vis.

[53.] On sait que la vis dont le noyau n'a qu'un mouvement de rotation sans translation imprime à l'écrou, que ses guides empêchent de tourner, un mouvement tel qu'il se transporte d'une longueur égale au pas de la vis pendant que celle-ci fait un tour. r étant la distance d'un point quelconque de la vis à son axe, un tour fait parcourir à ce point la circonférence $2\pi r$ tandis que l'écrou s'avance d'un pas p . Le même rapport subsistant pour une fraction quelconque de révolution, si l'on appelle ω la vitesse angulaire de la vis et v la vitesse de l'écrou, on a, quel que soit r ,

$$\frac{\omega r}{v} = \frac{2\pi r}{p} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{p}$$

La vis peut être courte et l'écrou beaucoup plus long; cela ne change rien au mouvement. Il en sera de même si l'on substitue à l'écrou une sorte de crémaillère qui n'en soit qu'un segment, pourvu qu'elle soit guidée dans son mouvement rectiligne. La crémaillère pourra parcourir parallèlement à l'axe de la vis une étendue égale à celle qu'occupent les dents moins une. Enfin rien ne sera encore changé au rapport des vitesses de la vis et d'une ligne moyenne ou primitive de la crémaillère si l'on courbe celle-ci en la transformant en une roue dentée d'un assez grand diamètre dont le plan moyen passe par l'axe de la vis. R étant le rayon de cette roue et Ω sa vitesse angulaire, v peut être remplacée par ΩR et la dernière équation devient

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{2\pi R}{p}$$

Soient maintenant n le nombre de filets de la vis, N le nombre de dents de la roue. L'intervalle de milieu en milieu de ces dents devant être égal à l'intervalle de deux filets voisins de la vis, afin que chaque filet soit à son tour en contact avec une dent, si l'on appelle a cet intervalle, on a

$p = na$ et $2\pi R = Na$; l'équation précédente devient donc

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{N}{n}$$

relation analogue à celle des engrenages cylindriques

La vis ainsi employée s'appelle vis sans fin parce qu'elle tourne indéfiniment dans le même sens, ce qui n'a pas lieu dans le cas d'un écrou ordinaire.

[54.] Formes des dents. La roue est une vis. - Dans le plan mené par l'axe de

la vis perpendiculairement à l'axe de la roue, — les filets se succèdent en contact avec la roue comme les dents d'une crémaillère; par conséquent les profils doivent être ceux qui conviennent à une crémaillère et à sa roue cylindrique. Quant à la forme des dents de la roue hors du plan moyen, la faible largeur qu'on leur donne permet de considérer le contact comme s'accomplissant dans le plan tangent à l'hélice moyenne de la vis. En conséquence, on incline les dents de la roue sur son plan moyen, comme les filets de la vis sont inclinés sur l'axe de celle-ci. Il en résulte que les dents de la roue forment réellement une vis ayant autant de filets distincts qu'elle a de dents, et dont l'hélice moyenne a sur son axe une inclinaison I qui est le complément de l'inclinaison i analogue dans l'autre vis. D'ailleurs les deux vis doivent être de même sens, toutes deux à droite ou toutes deux à gauche; (à cet égard, le croquis feuille 11, N°5 est fautive: la petite vis étant à droite et les dents de la grande roue inclinées à gauche).

[55] — La théorie du frottement montre sous quelle condition l'engrenage dit de la vis sans fin est réciproque, c'est-à-dire qu'on peut à volonté faire mener une roue par l'autre. Cette condition est amplement remplie lorsque les deux inclinaisons i et I diffèrent peu entre elles et par conséquent de 45° . D'ailleurs l'emploi de ce moyen de communication ne doit, à cause des frottements, être admis que pour de faibles efforts ou au moins pour de petites vitesses.

[56.] — Engrenage sans glissement de Hooke et de White. Cet engrenage est celui de deux troncs de vis dont les axes sont parallèles. La considération du glissement au contact des roues dentées ordinaires montre l'utilité de multiplier les dents. Le moyen de le faire sans diminuer leur épaisseur c'est d'en établir plusieurs rangs sur une même jante. Comme il suffit qu'il y ait toujours deux dents en prise, trois rangs de dents réduits sont au tiers le par effectif sans diminuer l'épaisseur. Hooke en 1666 et White en 1808, ont proposé de multiplier pour ainsi dire à l'infini les rangs de dents liés entre eux, en les disposant en hélice sur la jante. Cette ingénieuse disposition supprime le glissement des engrenages dont le contact a lieu continuellement dans le plan des deux axes. Elle est cependant peu employée, parce que, à ce qu'il paraît, les praticiens redoutent l'effet d'une pression dans la direction longitudinale des arbres, et la difficulté de maintenir leur exact parallélisme.

5° Rouages différentiels.

[57] La feuille 12, N°1, donne un exemple de ce genre de communication de mouvement. La roue B montée à coulisse sur l'arbre C détermine la rotation de cet arbre qui a en outre une translation à laquelle la roue B ne participe pas parce qu'elle est retenue par le collier G. La roue B et l'arbre C tournent dans le sens positif pour l'observa-

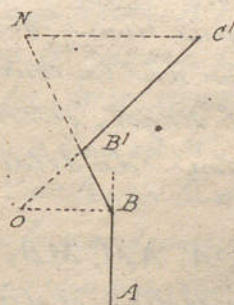
tenue placée à l'extrémité gauche de la machine.

Quand la roue K calée sur l'arbre C fait 37 révolutions à droite, elle fait passer au contact de la roue L 37 x 36 dents; la roue L tournant à gauche en fait passer autant; elle a 37 dents; elle fait donc 36 révolutions. Pendant ce temps, les roues N et P qui ont un même nombre de dents font la 1^{ère} à gauche la 2^{ème} à droite le même nombre de tours. L'écrin Q invariablement lié à P et ne pouvant que tourner fait donc 36 révolutions à droite pendant que la vis H fixée dans l'arbre C en fait 37 dans le même sens. La vis qui est filetée à droite pénètre donc d'un pas dans l'écrin, et entraîne d'autant l'arbre C et l'outil D pendant que l'arbre et la roue B font 37 révolutions. L'outil trace dans l'intérieur du cylindre à aléser une hélice dont le pas $\frac{1}{37}$ de celui de la vis H.

§ 6. — Communication de mouvement par l'intermédiaire de bielles.

1^o Entre un corps tournant et un autre en mouvement rectiligne alternatif.

[58.] — Bielle simple articulée d'une part avec une tige guidée et d'autre part avec un balancier, Feuille 13, N^{os} 1 et 2, ou avec une manivelle, Feuille 14, N^{os} 1 et 3, ou un excentrique circulaire, N^o 4. AB étant la direction que l'articulation B est assujettie à suivre, C' le centre de rotation du balancier ou de la manivelle, B' la 2^{ème} articulation de la bielle, O est le centre instantané de rotation de la bielle BB'. Si v est la vitesse du point B, et ω' la vitesse angulaire du rayon C'B', on a (21) en menant C'N perpendiculaire à AB:



$$\frac{v}{OB} = \frac{\omega' \cdot C'B'}{OB'} \quad \text{d'où } v = \omega' \cdot C'N.$$

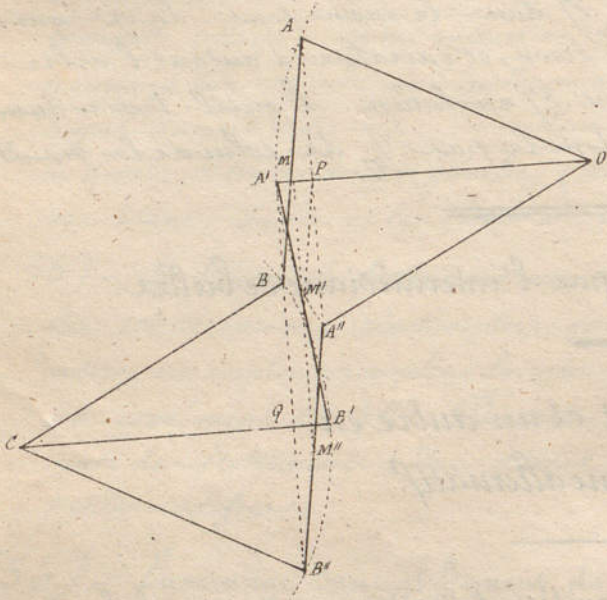
Donc que C'N varie peu, dans les exemples Feuille 12, N^o 5 et Feuille 13, N^{os} 1 et 2, on fait en sorte que AB parallèle à la corde du plus grand arc décrit par C'B' en coupe la flèche par le milieu. Dans les exemples, Feuille 14, N^{os} 1, 3 et 4, on fait rencontrer l'axe C' par la droite AB. Dans ces derniers cas, si la manivelle est assez longue, la vitesse du point B est à peu près la projection de celle du point B' sur AB.

2^o Entre deux corps tournants.

[59.] — Ce mode de liaison (Exemples Feuilles 14, N^{os} 2 et 5) a déjà été étudié précédemment ().

Le rapport des vitesses angulaires est continuellement variable à moins que les deux bras de balancier et de manivelle ne soient égaux que la biellette ne soit égale à la distance des centres, et que les deux rotations ne soient de même sens. Exemple les roues couplées de certaines locomotives. Autres exemples: tiges et varlets, renvoi de sommets; Feuilles 12, N° 2, 3, 4.

[60]. - Contrebalancier de Watt. - Soient AO un balancier oscillant sur le centre fixe O entre les positions extrêmes OA, OA'' ; C un second centre fixe, sur lequel oscille, en sens contraire du premier balancier une autre barre rigide CB ; AB un lien articulé en A et B avec le balancier OA et avec la barre CB qui est appelée contrebalancier. Lorsque le point A décrit l'arc $AA'A''$, le point B décrira un autre arc $BB'B''$; et un point M pris sur AB , décrit une courbe, que l'on pourrait construire par points. On reconnaîtrait de cette manière que dans une certaine étendue elle se confond à très-peu près avec une ligne droite, de sorte qu'une tige articulée en M et maintenue entre des guides à son autre extrémité dans la direction de cette droite aurait un mouvement très-sensiblement rectiligne pendant une oscillation convenablement limitée du balancier OA .



Comme on le voit, le lien des points M est la courbe engendrée par un point d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux cercles fixes. Cette courbe lorsqu'on la construit complètement, présente la forme d'un 8, dont le point multiple est sur la ligne des centres. Ce point est en même temps (ce que nous nous bornons à enoncer ici) un point d'inflexion. Or, c'est précisément une portion de la courbe située aux environs de ce point qui se produit dans l'appareil dont il s'agit, et son rayon de courbure reste très-grand, quand on adopte les dispositions de détail décrites plus loin.

Le centre O étant connu, ainsi que les longueurs OA, AM, MB , on pourrait se donner trois positions M, M', M'' du point M , en ligne droite, et déterminer le centre C et le rayon CB de manière à faire effectivement passer le point M par ces trois positions; car ces données suffiraient pour trouver très-facilement les trois points A, A', A'' correspondants de l'arc AA'' , puis les points B, B', B'' , et par suite le centre C de l'arc BB'' .

Dans la pratique, on prend la direction de la droite $MM'M''$ parallèle à la corde AA'' , d'où il résulte $MM' = AA'' = BB''$. De plus, on fait ordinairement

passer cette droite $MM'M''$ par le milieu de la flèche AB de l'arc AA'' . De là quatre conséquences: 1° Le point M' répondant à la position moyenne OA' du balancier, on a $PM' = A'M'$; or $A'M' = AM$, donc $PM' = AM$; donc $MM' = AP = \frac{1}{2} AA'' = \frac{1}{2} MM''$. Ainsi M' milieu de la course du point M répond au milieu de l'oscillation du balancier, ce qui donne de la régularité au mouvement. 2° Les angles du lieu AMB avec la tige qui se ment dans la direction MM'' sont alternativement à droite et à gauche et peuvent être toujours petite, ce qui diminue les frottements dans la transmission de mouvement du balancier à la tige ou réciproquement. 3° Le point B' répondant à A' est au dessous de celui-ci autant que B et B'' sont respectivement au dessous de A et de A'' . Donc les positions moyennes du balancier et du contrebalancier sont simultanées et parallèles; d'où l'on conclut; par la considération du centre instantané de rotation du lieu, que la courbe $MM'M''$ a sa tangente en M' suivant la droite MM'' . 4° La droite MM'' passe par le milieu de la flèche $B'Q$ de l'arc BB'' ; car ses distances à la corde BB'' et au milieu B' sont les projections sur CB' de MB et de $M'B'$.

[61.] - Ces dispositions étant adoptées, si l'on se donnait l'angle AOA'' en grandeur et en position, ainsi que les longueurs OA , AB et CB , on pourrait trouver le point C et la longueur AM . En effet, en menant la corde AA'' et, par le milieu de la flèche $A'P$, une parallèle à cette corde, on aurait la direction indéfinie de la droite $MM'M''$; puis traçant séparément un cercle avec le rayon CB , et prenant dans ce cercle une corde égale à AA'' on aurait la flèche $B'Q$. On pourrait donc, en portant à droite et à gauche de MM'' la distance $\frac{1}{2} QB'$ tracer en direction indéfinie deux parallèles à MM'' , devant contenir l'une le point B' l'autre les points B et B'' ; puis, décrivant autour des centres A' , A et A'' , trois arcs de rayon AB , on aurait B', B et B'' .

[62.] - Les règles suivantes adoptées par Watt ne sont pas imposées rigoureusement; mais il convient de ne pas s'en écarter beaucoup.

1°. Il faisait $AM = MB$. Cette condition jointe à celle de tracer MM'' perpendiculairement au milieu de la flèche $A'P$ fait que les trois points A , A'' , B' sont en ligne droite, ainsi que A' , B et B'' ; et que $CB = OA$. Il en résulte que la courbe $MM'M''$ se compose de deux moitiés égales $M'M$, $M'M''$, l'une à droite, l'autre à gauche, présentant chacune une inflexion, outre celle qui a lieu en M' .

2°. Watt faisait la distance du centre O du balancier à l'axe $MM'M''$ de la tige guidée, égale à une fois et demie la course AA'' , par conséquent la distance de 2 parallèles à la tige menées par les centres O et C , égale à 3 fois la course. Ainsi D étant le milieu de la flèche $A'P$, on a $DO = 3AP = \frac{3}{2} AA''$. Donc, si θ est l'angle AOA' , on a $\frac{1}{2} OA(1 - \cos \theta) = 3OA \sin \theta$; d'où $\frac{1}{\sin \theta} = 3 + \frac{1}{12}$ ou $OA = (3 + \frac{1}{12}) AP$; c'est-à-dire le rayon égal à la course multipliée par $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24})$. De là et de $DO = 3AP$, on conclut la demi-flèche $A'D = \frac{1}{12} AP$ ou la flèche $A'P$ égale à $\frac{1}{12}$ de la course.

De $\frac{1}{\sin \theta} = 3 + \frac{1}{12}$ on tire $\theta = 18^\circ 55' 28''$. Il convient de ne pas dépasser 20° .

3°. Watt faisait la longueur AM au plus égale à $\frac{1}{2}$ et au moins à $\frac{2}{7}$ de la course AA'' .

2°. Division.

Cours de Mécanique et Mach. - 6^e Feuille a.

[63.] - Parallélogramme articulé de Watt. Les propriétés de cet appareil sont fondées sur celle du précédent et sur la proposition de géométrie que voici:

Si l'on fait mouvoir un parallélogramme $ABba$ (dont les angles peuvent varier) autour d'un point fixe O pris sur un de ses côtés Aa prolongé au besoin, deux points M, m , pris invariablement sur les côtés mobiles AB, ab de manière qu'on ait l'égalité de rapport $\frac{AM}{am} = \frac{OA}{Oa}$, décrivent deux courbes

semblables. Car les trois points O, M, m sont constamment en ligne droite et le rapport $\frac{MO}{mO} = \frac{OA}{Oa}$ constant.

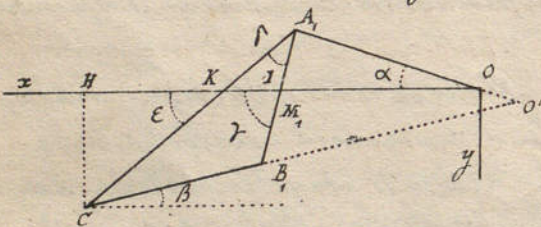
Il s'ensuit que si OAa est un balancier et CB un contrebalancier assujettissant le point M à décrire une courbe presque droite, il en sera de même du point m .

Pour connaître les règles pratiques par Watt, il suffit d'ajouter à celles du n° précédent qu'on fait ordinairement $OA = Aa$, en même temps que $AM = MB$; il en résulte: 1° que le point m est au sommet; 2° que la courbe $m m' m''$ à longue inflexion qu'il décrit est double de celle de $M M' M''$ que parcourt le point M , et à une distance double de l'axe de rotation O ; que par conséquent la droite $m m''$ passe par l'axe de rotation C du contrebalancier CB ; 4° que la course $m m'$ double de $M M'$ ou de AA' est égale aux $\frac{2}{3}$ de la distance du centre O à la droite $m m''$; 5° que le rayon Oa du balancier est égal à cette course multipliée par $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{24})$; 6° que la flèche de l'arc $a a' a''$ est $\frac{1}{12}$ de cette même course $a a''$ ou $m m''$.

La propriété du point M de décrire une ligne sensiblement droite est utilisée dans les machines à vapeur.

[64.] - Calculs relatifs à la courbe de Watt.* On peut se proposer de calculer les coordonnées par rapport à deux axes d'un point M_1 de la courbe décrite par un point M du lien AB , ce point M_1 répondant à une position donnée OA , du balancier.

Soient OA_1 et CB_1 les positions simultanées du balancier et du contrebalancier, M_1 le point décrivant; Ox, Oy deux axes rectangulaires quelconques par rapport auxquels les coordonnées de M_1 sont x et y , l'angle variable $A_1 O x = \alpha$. Soient $OA_1 = R$; $CB_1 = r$; $A_1 B_1 = l$; $AM = nl$; $OH = c$ et $CH = h$ coordonnées du point C : toutes quantités constantes.



Angle $M_1 I x = \gamma$; angle $CA_1 B_1 = \delta$; angle $CK x = \epsilon$; distance $CA_1 = z$ on trouve successivement:

$$\begin{cases} x = R \cos \alpha + nl \cos \gamma & \dots \{1\} \\ y = -R \sin \alpha + nl \sin \gamma & \dots \{2\} \end{cases} \quad \left\| \begin{cases} \gamma = \delta + \epsilon & \dots \{3\} \\ \cos \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\frac{(z+l+r)(z+l-r)}{4zl}} & \dots \{4\} \end{cases} \right. \quad \left\| \begin{cases} z = \frac{h+R \sin \alpha}{\sin \epsilon} & \dots \{5\} \\ \tan \epsilon = \frac{h+R \sin \alpha}{a-R \cos \alpha} & \dots \{6\} \end{cases}$$

équations qui permettent de calculer x et y quand on se donne α .

[65.] * Exemple conforme aux règles de Watt. $OA_1 = CB_1 = 1$; $l = \text{course } AA'' = \frac{24}{37} = 0,648648$;

* Les questions des nos 64 et 65 n'ont pas été traitées dans le cours oral faute de temps.

flèche $f = \frac{1}{12} l = 0,054054$; en prenant Ox suivant OA' , on a $h = B'P = \sqrt{l^2 - f^2} = 0,646320$,
 $\alpha = 2 - f = 1,945945$.

En supposant $\alpha = 14^\circ$ on trouve $\epsilon = 42^\circ 18' 55''$; $z = 1,31941$; $\beta = 47^\circ 15' 45''$; $\gamma = 89^\circ 34' 41''$,
 $x = 0,97268$; $y = 0,08240$.

J'ai conséquemment dans cette position la déviation du point M , ou sa distance à la droite MM'' est $OA - \frac{1}{2} f - x = 1 - 0,027027 - x = 0,0029$.

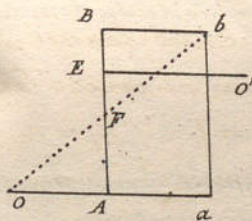
Pour reconnaître si dans cette position le point M est à son maximum d'écartement, on peut chercher le centre instantané de rotation du lien à la rencontre O' des deux rayons A, O et C, B , et voir si son ordonnée diffère notablement du point M relativement à l'axe des abscisses OA . A cet effet on calcule l'angle β de CB , avec Ox , par la formule $\cos \beta = \alpha - \cos \alpha - l \cos \gamma$. On trouve aisément l'ordonnée de O' $\frac{\text{tang } \alpha (h - a \text{ tang } \beta)}{\text{tang } \alpha + \text{tang } \beta}$ et l'on vérifie qu'elle diffère très peu de l'ordonnée y du point M . La tangente en ce point est donc très-sensiblement parallèle à MM'' et l'écartement calculé peut être considéré comme un maximum.

[66.] Pour éviter l'indétermination de l'angle α on peut se donner la condition que l'angle γ soit droit. Les équations à résoudre dans ce cas sont

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= a \\ l + \sin \beta &= h + \sin \alpha, \\ x &= \cos \alpha. \end{aligned}$$

On trouve une déviation un peu plus petite : $0,0027$, au lieu de $0,0029$. L'angle α est alors de $13^\circ 25' 10''$.

[67.] Parallélogramme de bateaux. Feuille 13, n° 5. Le balancier Oa porte un parallélogramme $ABba$ dont le sommet b doit se mouvoir à très-peu près en ligne droite; mais au lieu de faire décrire un arc de cercle au point B à l'aide d'un contrebalancier dont l'axe serait à la hauteur de b et manquerait d'appui commode dans le bateau, on en fait décrire un au point E près plus bas en le reliant à un point O' par un contrebalancier $O'E$. Quelle que soit la figure variable du parallélogramme $AabB$ les points b et F décrivent



des courbes semblables. Le point F appartenant à une droite dont deux points A, E se meuvent chacun sur un cercle peut décrire une courbe à longue inflexion si le centre O' est convenablement choisi. Pour le trouver, on prend les positions extrêmes et la position moyenne du point b , du balancier Oa , et par suite du point E ; par les trois positions de E on fait passer un cercle dont le centre est O' .

[68.] Machine à vapeur oscillante. Feuille 15, n° 2. Distance des deux axes de rotation = a ; bras de la manivelle = b ; distance variable de l'articulation de la tige et de la manivelle à l'axe de rotation du cylindre à vapeur = x ; l'angle variable de la manivelle

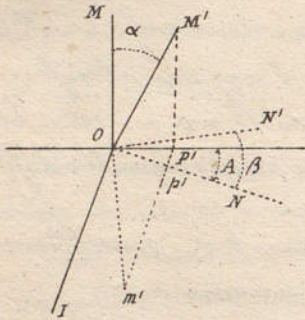
et de la verticale = α ; ou a

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \quad \text{d'où} \quad x \frac{dx}{dt} = ab \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

relation entre la vitesse du piston $\frac{dx}{dt}$ dans le cylindre, et la vitesse angulaire de la manivelle.

[69.] - Joint hollandais ou universel.

- Chacun des bras du croisillon se meut dans un plan perpendiculaire à l'axe auquel il est lié, et passant par le point de rencontre des deux axes. Il s'agit de trouver la relation des déplacements angulaires des deux arbres.



Soit A le supplément de l'angle obtus formé par les deux axes, et, pour fixer les idées, supposons ces axes dans un plan horizontal. Soit O la projection verticale du premier, et soit OI le deuxième axe dans le plan horizontal de projection.

Prenons la verticale OM pour position initiale du bras de croisillon lié au premier axe; l'horizontale ON sera la position simultanée de l'autre bras.

Soit OM' une autre position quelconque du premier; $MOM' = \alpha$, son déplacement angulaire. Pour trouver la position correspondante du deuxième bras du croisillon, il s'agit de mener par le point O dans le plan où se meut ce deuxième bras, c'est-à-dire dans le plan vertical dont ON est la trace et la projection horizontale, une droite faisant un angle droit avec OM' située hors de ce plan. Pour cela, suivant une règle commune, il faut projeter OM' sur le plan ON , et mener la perpendiculaire à la projection obtenue. On fait tourner le plan vertical ON autour de sa trace; la projection de M' se rabat en m' déterminée par $m'p' = M'P'$. La droite cherchée rabattue est Om' perpendiculaire à OM' et en faisant $N'ON = \beta$, déplacement angulaire du deuxième axe, on a

$$\tan \beta = \frac{OP'}{m'p'} = \frac{OP' \cos A}{M'P'} = \tan \alpha \cos A.$$

Les angles β et α sont donc en même temps nuls et droits, mais inégaux dans l'intervalle. La transmission de mouvement serait impossible si l'angle A était droit. Cette disposition est employée en Hollande pour communiquer le mouvement d'un arbre horizontal à l'arbre incliné d'une vis d'Archimède. Elle sert aussi comme moyen de suspension des bouffoles à bord des navires.

[70.] - Relation des vitesses angulaires. - La différentiation de l'équation précédente donne, en appelant ω la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ du premier arbre, $\frac{d\beta}{dt} = \omega \cos A \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}$, on a, cause de

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta &= \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} = \frac{1}{1 + \cos^2 A \tan^2 \alpha}, & \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\omega \cos A (1 + \tan^2 \alpha)}{1 + \cos^2 A \tan^2 \alpha} = \frac{\omega \cos A}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 A} \\ &= \frac{\omega \cos A}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 A} \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque ω est constant, $\frac{d\beta}{dt}$ est variable, et croît avec α , depuis la valeur $\omega \cos A$ correspondante à $\alpha = 0$ jusqu'à $\frac{\omega}{\cos A}$ qui répond à $\alpha = 90^\circ$. Les deux vitesses angulaires seront égales quand on aura

$$1 + \cos^2 A \tan^2 \alpha = \cos A (1 + \tan^2 \alpha) \text{ d'où } \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos A}$$

Pour avoir l'accélération angulaire il faut faire une seconde différentiation; ω étant supposé constant, on trouve:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = 2\omega^2 \cos A \sin^2 A \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{(1 - \sin^2 \alpha \sin^2 A)^2}$$

quantité nulle pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 90^\circ$; positive dans l'intervalle. Pour la position particulière où les vitesses sont égales, on a

$$1 - \sin^2 \alpha \sin^2 A = \cos A, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\sqrt{\cos A}}{1 + \cos A}$$

et par suite

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = 4\omega^2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} A}{\sqrt{\cos A}}$$

[71] Exemple de l'emploi des bielles dans la communication de mouvement au tiroir de la machine à vapeur de Watt. Feuille 15, n° 3. Usage des poignées de manœuvre et de l'accrochage facultatif de la bielle au levier H.

[72.] Levier de Saugarouffe. Les cliquets fonctionnent comme des bielles dont une articulation se déplace par intermittence. N° 4 et 5.

§ 6. — Communication de mouvement par l'intermédiaire d'un corps flexible, corde, courroie, chaîne.

[73.] Exemples divers. Feuille 16. Crémil, cabestan, tambour conduisant une tige, balance à secteur circulaire, pompe de précision.

[74.] Chaînes diverses de Vancouver, de Galle, Poulies et cordes. Feuille 17. Poulie fixe, n° 8 et 9. Poulie mobile, n° 10. Moufles diverses n° 11, 12 et 13. Les cordons étant sensiblement parallèles le rapport des vitesses de l'extrémité de la corde et de la moufle mobile est égal au nombre des cordons allant d'une moufle à l'autre, et ce nombre est aussi celui des poulies; selon qu'il est pair ou impair la première extrémité de la corde est attachée à la moufle fixe, n° 12 et 13, ou à la moufle mobile n° 11.

[75.] Crémil différentiel. R et r étant les deux rayons, pour un déplacement angulaire α , la corde s'enroule d'un côté de αR , et se déroule de l'autre de αr . La partie pendante diminue de $\alpha (R - r)$ et la poulie mobile s'élève de $\frac{1}{2} \alpha (R - r)$, tandis que l'extrémité de la

2^{ème} Division.

Notes sur la transformation du mouvement. — 7. Feuille 2.

manuelle décrit l'espace αb . Le rapport $\frac{R-r}{2b}$ de vitesse peut être rendu aussi petit qu'on veut. L'inconvénient est la grande longueur de corde nécessaire. En négligeant le diamètre de la poulie et l'obliquité de la corde, on voit que pour faire monter la poulie de la hauteur $h = \frac{1}{2} \alpha (R-r)$ il faut dérouler une longueur de corde $\alpha r = \frac{2hr}{R-r}$ et que la longueur de corde nécessaire est au moins $\frac{2hr}{R-r} + 2h$.

[76.] - Cordes, courroies et chaînes sans fin. Feuille 18. Les poulies pour courroies plates se font bombées; l'expérience constatant qu'une courroie sur une poulie conique monte naturellement vers la plus grande base, fait curieux dont l'explication rigoureuse ne paraît pas connue et qui tient sans doute à ce qu'un bord de la courroie est plus tendu et a plus de vitesse que l'autre.

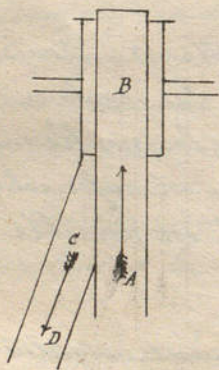
[77.] - Courroies, cordes ou chaînes sans fin, directes ou non croisées. Les vitesses des arbres parallèles sont de même sens.

[78.] - Cordes et courroies croisées. Vitesses de sens contraire. Les courroies ayant un enroulement et un envers, c'est par ce dernier côté plus incurvé que l'autre, qu'elles doivent porter sur les poulies. Lorsqu'elles sont croisées on satisfait encore à cette condition, il en résulte cet avantage qu'au lieu où se fait le croisement les deux bords de courroie glissent à plat l'un sur l'autre, et de plus on les dispose de manière que ce glissement mutuel s'opère par les faces lisses du cuir afin de diminuer le frottement et l'usure. Il faut pour cela qu'avant de réunir les bouts de la courroie on fasse faire deux tours à l'un des deux.

[79.] - Corde sans fin sur deux poulies qui ne sont pas dans un même plan. Emploi de deux poulies de renvoi dont chacune est dans le plan de deux tangentes menées aux deux poulies par un point pris à volonté sur l'intersection de leurs plans. Feuille 18, N° 6.

[80.] - Courroie sans fin sans renvoi sur deux poulies dont les axes ne sont pas parallèles. N° 5. Cette disposition, applicable lorsque les axes sont suffisamment éloignés et que leur angle aigu est assez petit, est fondée sur un fait remarquable: lorsqu'une courroie passe sur une poulie, il faut pour qu'elle s'y maintienne que la partie AB qui se transporte vers cette poulie soit dirigée de manière que la ligne milieu de la courroie soit dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la poulie; mais il est sans inconvénient que la partie CD qui quitte la poulie, ait une certaine obliquité. Cela vient de ce que la courroie une fois appliquée en B sur la poulie tourne avec elle et y est retenue par le frottement. La force oblique qui agit suivant CD, tend la courroie et lui donne cette direction à mesure qu'elle quitte la poulie, mais ne la fait pas glisser. Aussi est-ce sur la partie AB qu'on agit à droite ou à gauche, quand on veut désemparer la courroie.

Cela posé, le mécanisme représenté en projections horizontale et verticale dans le croquis N° 5 est facile à comprendre: le bini montant oblique sur le plan de la poulie inférieure qu'il quitte est dans le plan de la poulie supérieure vers laquelle il se transporte; le bini descendant oblique sur la poulie supérieure d'où



il vient est dans le plan de la poulie inférieure où il va.

- [81.] Combinaison de poulies. N° 7. - Rapports des vitesses angulaires, question analogue à celles des combinaisons d'engrenages.
 [82.] Poulies alternes. Feuille 19, N° 6. Emploi facultatif d'une même courroie sur diverses paires de poulies fixées sur les deux mêmes arbres. Si la courroie est croisée pour qu'elle couronne à diverses paires de poulies en conservant la même longueur, il faut et il suffit que la somme des diamètres des poulies accomplée soit constante. α étant la distance des deux axes, r et r' les rayons des deux poulies, l la longueur de la courroie sans fin croisée, en posant

$$\cos \alpha = \frac{r+r'}{a}, \text{ on a } \frac{1}{2} l = a \sin \alpha + (r+r') (\pi - \alpha).$$

- [83.] Cônes alternes. - N° 3. - Si la courroie n'est pas croisée, la distance des axes est supposée assez grande pour que les deux brins de la courroie soient sensiblement parallèles.

§ 7. - Mécanismes d'embrayage et de désembrayage.

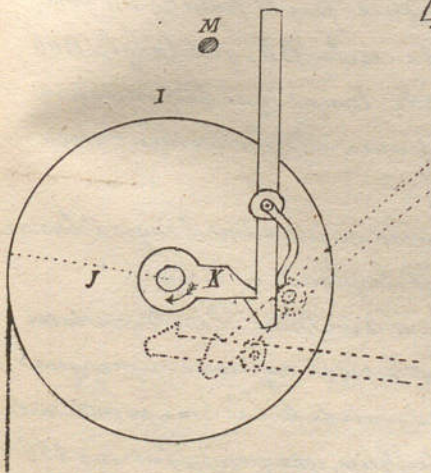
- [84.] Divers embrayages de poulies. Feuille 19, N° 1, 2, 4
 [85.] Désembrayage de roues dentées. N° 5
 [86.] Embrayage alternatif au moyen d'un manchon mobile à saillies. Feuille 20. - 1^{er} Système, Fig. N° 1. - L'arbre A et le manchon B tournant continuellement dans un même sens, les deux roues tournent toujours en deux sens différents, celle dans laquelle les saillies du manchon sont engagées tourne dans le sens de l'arbre A, et détermine le mouvement de la roue E, et de son arbre. - 2^e Système, Fig. N° 2. - La poulie F et son arbre creux tournent continuellement dans un même sens; l'arbre central K tourne tantôt dans le sens de F, tantôt en sens inverse, selon que le manchon est embrayé avec la roue C ou avec la roue J.
 [87.] Embrayage alternatif au moyen de deux poulies calées et d'une poulie folle. Feuille 20, N° 3.
 [88.] Changement de vitesse par poulies et engrenages. N° 4
 [89.] Vitesse alternativement fixe et mobile à volonté, au moyen de deux roues hélicoïdales qui tantôt tournent librement et tantôt sont rendues immobiles. N° 5.
 [90.] Divers modes d'embrayage de deux arbres en prolongement l'un de l'autre. Feuille 21, N° 1, 2, 3, 5.
 [91.] Embrayage à cône de friction. N° 4. - Son utilité dans le cas d'une résistance accidentelle.
 [92.] Désembrayage instantané des laminoirs à fer. Lorsque les cylindres éprouvent une trop grande résistance, le mécanisme N° 5, permet d'interrompre rapidement leur communication de mouvement avec le moteur.

[93.] Freins de voiture ordinaire et de Wagon. Feuille 22, N° 1 et 2. Le moteur agit sur une vis

[94.] Freins de moulin à vent et de quai. N° 3 et 4. La disposition la plus avantageuse est celle dans laquelle le levier agit sur le bout le moins tendu de la lame flexible. Ainsi la poulie doit tourner à gauche dans l'exemple N° 3 et à droite dans le N° 4.

[95.] Roue à détente. N° 5. La poulie J folle sur son arbre porte fixée sur une de ses faces planes une cheville sur laquelle peut tourner le levier L; un ressort dont une extrémité est également fixée soit à la cheville soit à la poulie tend à rapprocher du centre de celle-ci le crochet qui termine ce levier L. L'arbre tournant entraîne la pièce K, laquelle appuyant sur le crochet oblige la poulie de tourner dans le même sens et de soulever un corps suspendu à une corde qui s'y enroule. Mais avant d'achever une révolution entière le levier L par sa partie saillante rencontre l'arrêt M qui oblige son crochet de s'écarter de la pièce K; dès lors la poulie est désembrayée et tourne rapidement en sens contraire par l'effet du poids agissant sur la corde. En même temps le crochet est forcé par le ressort de se rapprocher du centre; il est bientôt repris par la pièce K qui continue de tourner toujours dans le même sens pendant le mouvement alternatif de la poulie.

[96.] Roue à rochet. N° 6. Cette roue O fixée sur un arbre peut tourner dans un sens sans entraîner la roue N, tandis que dans l'autre sens elle l'entraîne. Le croc offre un autre exemple dans lequel le cliquet est sur un corps fixe.



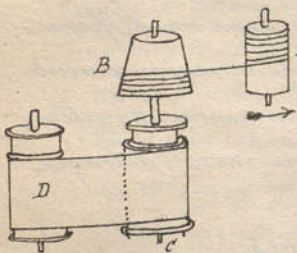
- [97.] - Déclat d'une sonnette à pilotin. La légende de la feuille 23, N°1 suffit pour expliquer ce mécanisme.
 [98.] - Banc à brocher. N°2. Le temps a manqué pour expliquer cette machine.

§ 8. - Moyens d'observation et appareils propres à découvrir expérimentalement la loi du mouvement.

[99.] - Mesure du temps. Les cours de Physique et de Géométrie ont fait connaître la propriété du pendule et l'usage des chronomètres à repos ou à pointage.

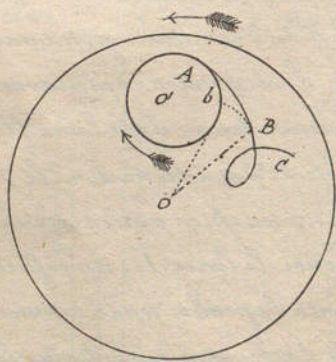
[100.] - Mesure de la vitesse. On a déjà indiqué (N°11) les moyens usuels employés à cet effet. Pour constater la vitesse moyenne pendant une longue durée d'un mouvement de rotation ou oscillatoire on emploie les compteurs à chiffres dont le principe est de fixer sur un arbre une pièce saillante ou dent qui à chaque révolution fait avancer d'une seule dent une roue dentée fixée sur un autre arbre, lequel porte aussi au dessus ou au dessous de la roue dentée une dent qui à chaque révolution du 2^e arbre fait avancer d'une dent une roue fixée sur un 3^e arbre et ainsi de suite.

[101.] - Appareil faisant tracer par le point mobile une courbe représentative de son mouvement. Cylindre à bande de papier employé par Cytelwein à l'imitation de l'indicateur de Watt. Emploi d'un mécanisme d'horlogerie et d'une fusée pour obtenir un mouvement uniforme dans la bande de papier. Le fil qui charge d'abord la fusée B y fait autant de tours que devra en faire le papier enroulé sur le cylindre C; les diamètres extrêmes de la fusée sont ceux du même cylindre d'abord vide puis chargé de papier.



[102.] - Appareil à cylindre tournant de M. Morin pour étudier les lois de la chute des corps. Au moyen d'un mécanisme à engrenage mu par un poids et modéré par un volant à ailettes on obtient un mouvement de rotation uniforme du cylindre sur lequel une pointe traçante décrit la courbe représentative du mouvement.

[103.] - Appareil à disque tournant de M. Poncelet employé par M. Morin dans ses recherches relatives aux lois du frottement. Un plateau circulaire fixé par son centre à l'extrémité et perpendiculairement à l'axe de rotation d'un arbre dont il s'agit d'observer le mouvement. Un mécanisme d'horlogerie placé en avant de ce plateau imprime un mouvement circulaire et uniforme à un pinceau dont la pointe s'appuie constamment sur la surface du plateau. Lorsque celui-ci est immobile le pinceau imbibe d'encre de Chine y trace une circonférence O'A; mais dès que le plateau est en mouvement, le pinceau y décrit une courbe



ABC qui permet de constater l'étendue des déplacements angulaires du plateau pendant des temps connus. Par exemple si l'on ramène le plateau dans la position indiquée par la figure, on voit, en décrivant autour du centre O, l'arc de cercle Bb, que l'angle Bob a été parcouru par le plateau pendant le temps que le pinceau a mis à aller de A en b, temps connu d'après le mouvement circulaire uniforme du pinceau.

On pourrait aussi bien fixer le pinceau au corps dont il s'agit d'observer le mouvement et faire tourner uniformément le plateau ou disque.

[104.] - Emploi du diapason. Le plateau tournant peut n'avoir pas un mouvement parfaitement uniforme. Pour le constater et corriger les erreurs qu'entraînerait l'irrégularité de sa rotation, M. Wertheim appliquant une idée déjà mise en pratique par M. Duhamel, a fait mouvoir contre le plateau préalablement recouvert d'une couche de noir de fumée une pointe métallique fixée à l'une des branches d'un diapason. Dans l'expérience faite par M. Wertheim, cette pointe, faisant 256 vibrations par seconde, traçait une courbe dont les ondulations pouvaient se diviser en 10 parties égales, de sorte qu'on pouvait apprécier les déplacements angulaires du plateau pendant chaque $\frac{1}{2560}$ de seconde.

2^e Section. — Étude théorique et expérimentale de l'équilibre des forces.

Chap. 1. — Notions fondamentales relatives aux forces et à leurs effets sur les points matériels.^(*)

§ 1. — Principe de l'inertie et Notion de la force.

79. — Les points matériels ne diffèrent des corps ordinaires qu'en ce qu'ils sont très-petits et de forme invariable.

80. — C'est un fait d'expérience qu'un point matériel en repos ne peut se mettre en mouvement sans l'existence d'une cause externe. Cette propriété s'appelle l'inertie de la matière. La cause externe s'appelle force. Dire qu'une force existe ou qu'elle agit, c'est exprimer la même idée.

Le mot inertie ne signifie pas inactivité, impuissance de produire un effet; car toutes les parties de la matière agissent les unes sur les autres, suivant la loi générale formulée par Newton. Bien plus, aucune force n'existe qui ne soit exercée par un corps sur un autre corps. Le mot inertie ne signifie pas non plus une résistance absolue à certaines causes de mouvement; car la moindre force qui agirait seule sur un corps quelconque le mettrait en mouvement comme on le verra bientôt.

81. — L'idée de la force, dans le sens que la Mécanique attribue à ce mot, est correlative de celle de l'inertie. Elle naît en nous de la sensation que nous éprouvons lorsque nous imprimons un mouvement à un corps. D'autres causes que l'action de nos muscles produisant des effets semblables à ceux qui résultent de nos propres efforts, nous sommes conduits à attacher à ces causes l'idée que l'expérience nous a donnée de la force.

Les forces reçoivent, suivant certaines circonstances, diverses dénominations telles que pression, traction, répulsion, attraction, action, réaction, effort, tension, poids; dans tous les cas la nature essentielle des forces est la même.

82. — Toutes les forces physiques s'exercent entre les éléments matériels dont se composent les

(*) La plus grande partie de ce chapitre résume des connaissances exigées pour l'admission à l'École. Le cours oral ne peut les rappeler que très-succinctement.

corps, la science considère d'autres forces, sous les noms de sommes ou de résultantes, qui sont des conceptions de notre esprit.

83. — Une force élémentaire actuellement existante s'exerce donc nécessairement sur un point d'un corps. Ce point s'appelle le point d'application de la force.
84. — Toute force tend à faire mouvoir suivant une certaine droite son point d'application s'il était isolé et d'abord en repos. La direction de cette droite s'appelle la direction de la force.
85. — Deux forces exercées successivement par deux agents qui peuvent être différents sur un corps placé chaque fois dans des circonstances d'ailleurs identiques, peuvent produire le même effet, le même mouvement: ces deux forces sont alors égales. Plusieurs forces peuvent être conçues simultanément appliquées à un même point suivant la même droite et dans le même sens: la force unique à laquelle elles équivalent s'appelle leur somme. On conçoit ainsi le rapport de deux forces quelconques au moyen d'une commune mesure exacte ou approchée.
86. — L'expression numérique d'une force dépend du choix d'une unité de force. — L'unité que nous adoptons dans les applications industrielles est le Kilogramme.
- Définition. Si l'on verse dans un vase un décimètre cube d'eau à la température de 4° , l'accroissement de la force qui en résulte sur l'appui ou sur le point de suspension du vase est un Kilogramme lorsque l'expérience est faite dans le vide à la latitude de Paris. En d'autres termes cette force est le poids d'un décimètre cube d'eau, à la température et au lieu indiqués.
- Dans le langage usuel et légal, le mot Kilogramme nix par tout-à-fait le même sens, puisqu'il convient à un même corps quelle que soient sa température et le lieu où on le pèse. On verra d'ailleurs (124) que le poids d'un corps n'est pas exactement égal à la force attractive que la terre exerce sur ce corps.
87. — Une droite représente la direction de l'intensité d'une force. La première extrémité désigne le point d'application. On considère souvent la projection tantôt oblique, tantôt orthogonale d'une force sur un plan ou sur un axe.

Notations: F_x, F_y, F_z . Cas de la projection orthogonale $F_x = F \cos (F, x)$

§ 2. — Principe de l'indépendance des effets des forces. Mouvement rectiligne ou parabolique des corps dans le vide. Composition des forces.

88. — On désigne sous la dénomination du principe de l'indépendance des effets des forces une loi générale de la nature dont voici l'énoncé plus complet et plus clair.

Un point matériel possédant à un instant pris arbitrairement une certaine vitesse V , et étant sollicité par une ou plusieurs forces F' (double condition d'où résulterait un certain mouvement) sera même point reçoit en outre l'action d'une ou plusieurs autres forces F , le mouvement qui a lieu effectivement, à partir de l'instant considéré, est le mouvement résultant de la composition de celui qui serait dû à la vitesse initiale V et aux forces F' , et de celui que produiraient les seules forces F sans vitesse initiale; c'est-à-dire que si l'on considère le mouvement du corps relativement à un système géométrique en translation ayant en chaque point le mouvement qu'aurait le point matériel en vertu de la vitesse initiale V et des forces F' , le mouvement relatif sera précisément le même que le mouvement absolu qu'imprimerait au même point les forces F agissant seules sans vitesse initiale.

Cette loi générale dont la première notion est due à Galilée (1564-1642) a été découverte comme induction de plusieurs cas particuliers, et vérifiée par l'accord constant des conséquences qu'on en tire avec les faits observés.

89. — Dans l'ordre de simplicité, le premier cas est celui où toutes les forces sont nulles. Le mouvement relatif est nul. La vitesse V reste constante en intensité et en direction. Cette loi est si simple qu'on la comprend ordinairement dans celle de l'inertie. Exemples de la tendance des corps à persévérer dans le mouvement acquis: voyageurs en voiture et en bateau; liquide transporté dans un vase à large ouverture; certains procédés des ouvriers; pierre lancée par la fronde.

90. — Le second cas est celui où les forces F' n'existent pas et où une force F agit dans la direction de la vitesse V en même sens ou en sens contraire. Si la force F est constante, elle imprime, à partir de deux instants quelconques et pendant des temps égaux, des accroissements égaux (positifs ou négatifs) de la vitesse variable. Le mouvement est rectiligne et uniformément varié; l'accélération est constante et a la direction de la force.

$$\text{Formules} \quad v = V + jt; \quad x = x_0 + Vt + \frac{1}{2}jt^2.$$

Exemple. Mouvement vertical de graves, $j = g = 9^m,81(78)$

91. — Le troisième cas est celui où les forces F' n'existent pas, la force F reste constante et parallèle à une même direction différente de celle de la vitesse. L'accélération totale est constante, suivant la direction et le sens de la force. La trajectoire est alors une parabole comme on l'a vu (78, 2^o) pour le cas particulier des corps lancés dans le vide.

$$\text{Formules:} \quad x = Vt, \quad y = \frac{1}{2}jt^2, \text{ \&c.}$$

92. — Le quatrième cas qui, par sa généralité, comprend les précédents, est celui où le point matériel ayant, à un certain instant, une vitesse V acquise par des causes antérieures quelconques, est sollicité, à partir de cet instant, par deux forces simultanées F'' , F' , qui seules lui imprimeraient les accélérations respectives j'' , j' . D'après la théorie au no 70, l'accélération totale J est la résultante ou somme géométrique (60) des deux accélérations j'' et j' .

93. — Corollaire du 4^e Cas. I. D'après le principe général énoncé au commencement de

ce paragraphe, la règle (70) de la composition des accélérations s'applique aux accélérations dues à un nombre quelconque de forces.

94. - II. - En supposant que plusieurs forces coïncident, on voit qu'à une force double répond une accélération double et qu'en général deux forces impriment à un même corps des accélérations proportionnelles à ces forces.

95. - III. - Par conséquent au lieu de composer les accélérations dues à plusieurs forces agissant séparément sur un même point matériel, on peut composer les forces elles-mêmes par des règles analogues à celles du parallélogramme, du parallélogramme, du polygone des vitesses ou des accélérations. La force résultante a pour caractère distinctif que sa projection sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des composantes. Cette force unique étant obtenue, on en conclura son accélération par une proportion où entrent une force donnée ou choisie et l'accélération correspondante pour le corps dont il s'agit.

96. - Remarque. - En traitant dans le reste de ce chapitre du mouvement d'un point matériel sous l'action de diverses forces, nous ne distinguerons pas les cas où les forces sont connues, de ceux où elles sont inconnues; ni les cas où le mobile est considéré comme libre de ceux où il est gêné par d'autres corps, l'influence de ces derniers se réduisant toujours aux forces qu'ils exercent sur le mobile dont il s'agit. Plus tard nous dirons que l'expérience a appris sur ces forces, et comment on en tient compte dans les applications.

§ 3. - Relation entre l'accélération, la force et la masse.

97. - Dans le § précédent, on a considéré diverses forces appliquées à un même corps; comparons maintenant les effets des forces agissant sur des corps différents.

Si F est une force et J l'accélération totale qu'elle produit suivant sa propre direction sur un corps déterminé, le rapport $\frac{F}{J}$ est constant (94). F_1 étant une force quelconque et J_1 l'accélération totale qu'elle fait prendre à un second corps également déterminé, le rapport $\frac{F_1}{J_1}$ reste constant pour ce second corps, mais différent en général de $\frac{F}{J}$. Le rapport $\frac{F}{J} : \frac{F_1}{J_1}$ est donc aussi constant; c'est celui de deux forces qui imprimeraient aux deux corps une même accélération.

Cela posé, quand deux corps, pour prendre une même accélération, exigent une même force, on dit qu'ils ont la même masse; s'ils exigent des forces différentes on dit que leurs masses sont proportionnelles à ces forces. ainsi:

Définition. Les masses de divers points matériels sont des grandeurs proportionnelles aux forces nécessaires pour imprimer à ces corps une même accélération, un même mouvement dans le même temps. Formule $m : m_1 :: \frac{F}{J} : \frac{F_1}{J_1}$.

Remarque. Les mots inertie et masse n'expriment pas la même idée. L'inertie fait qu'une force est nécessaire pour produire ou modifier le mouvement d'un point matériel; c'est une propriété générale. La masse plus ou moins grande d'un point matériel fait qu'une certaine force est nécessaire pour produire sur ce corps une certaine modification de mouvement; c'est une qualité, une grandeur propre à chaque corps.

98. - Unité de masse et conséquence qui en résulte. - On est convenu pour simplifier les formules de la mécanique et leurs énoncés de choisir l'unité de masse de manière que l'on ait simultanément $m_1 = 1$, $F_1 = 1$ et $J_1 = 1$. Il en résulte

$$m = \frac{F}{J}; \quad J = \frac{F}{m}; \quad F = mJ;$$

c'est à dire que l'accélération imprimée à un corps par un corps est numériquement égale à cette force divisée par la masse du corps; ou bien que pour imprimer à un corps une certaine accélération il faut une force numériquement égale à la masse multipliée par l'accélération.

99. - Relation de la masse et du poids. - L'expérience qui constate que tous les corps sous l'action de leur poids prennent en un même lieu la même accélération g , prouve que les poids des corps sont proportionnels à leurs masses: $m = \frac{P}{g}$.

100. - L'unité de masse n'a pas de nom spécial. - Dans notre système d'unité de force, (1^{kg}), d'espace (1^m) et de temps (1^s), l'unité de masse est celle du corps qui pèse g^{kg} .

§ 4. - Accélération de la projection du mobile sur un axe, accélération tangentielle, concavité de la trajectoire; leurs relations avec les forces.

101. - Tout ce qui a été dit au § 3 de la force unique F qui était supposée agir sur un point matériel convient à la résultante R de toutes les forces réellement agissantes. L'accélération totale a donc la direction de cette résultante; son intensité satisfait à l'équation $J = \frac{R}{m}$, et en appliquant ce qui a été démontré (61, 63 et 64) on a

$$1^\circ \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R_x}{m} \text{ pour un axe des } x \text{ quelconque et des projections rectangulaire ou} \\ \text{ou oblique; } 2^\circ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{R \cos(R, ds)}{m} \text{ et } 3^\circ \frac{v^2}{\rho} = \frac{R \cos(R, \rho)}{m}, \text{ équations dans les}$$

quelles on peut (95), aux projections de la résultante R , substituer celles des forces F réellement agissantes. Ainsi.

$$1^\circ \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\sum F_x}{m}; \quad 2^\circ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\sum F \cos(F, ds)}{m} \text{ et } 3^\circ \frac{v^2}{\rho} = \frac{\sum F \cos(F, \rho)}{m}$$

2^e Division.

Cours de Méc. et Mach. - 10^e Feuille.

C'est ce qu'on exprime par les énoncés suivants :

102. - Théorème. - L'accélération de la projection rectangulaire ou oblique, sur un axe quelconque, d'un point en mouvement dans l'espace est égale à la projection sur cet axe de la résultante des forces, (somme des projections de ces forces elles-mêmes) divisée par la masse.

103. - Théorème. - L'accélération tangentielle est égale à la somme des projections rectangulaires des forces sur la tangente à la trajectoire (force tangentielle totale) divisée par la masse.

104. - Théorème. - Le carré de la vitesse divisé par le rayon de courbure est égal à la somme des projections rectangulaires des forces sur la normale, (force totale centripète) divisée par la masse.

105. - Emploi de ces relations : 1° Connaissant la masse m et la résultante R en intensité et en direction, on en conclura par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R_x}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{R_y}{m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{R_z}{m}$$

les accélérations des mouvements rectilignes des projections conjuguées du mobile sur 3 axes. Si l'on connaît en outre la vitesse actuelle v en intensité et en direction, on obtiendra par les formules

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{R \cos(R, ds)}{m} \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{\rho} = \frac{R \cos(R, \rho)}{m}$$

l'accélération tangentielle et la courbure actuelle de la trajectoire.

2° Réciproquement, si l'on connaît, outre la masse m , les accélérations des projections sur 3 axes, on en conclura par les équations

$$R_x = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad R_y = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad R_z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

les 3 projections de la résultante sur les axes, et par suite la résultante en intensité et en direction. On parviendrait également à cette détermination si l'on connaissait la masse, la vitesse avec sa direction, l'accélération tangentielle, le plan osculateur et la courbure de la trajectoire; on se servirait dans ce cas des formules de la force tangentielle et de la force centripète :

$$R \cos(R, ds) = m \frac{dv}{dt}, \quad R \cos(R, \rho) = m \frac{v^2}{\rho}.$$

106. - Cas particuliers. - 1° Mouvement rectiligne: La force centripète est nulle, la résultante a la direction de la vitesse initiale, et réciproquement. 2° Mouvement curviligne uniforme: la force tangentielle est nulle, la résultante est normale à la trajectoire et centripète.

§ 5. - Impulsion et travail des forces agissant sur un point matériel;
leurs relations avec la masse et la vitesse.

107. - Nous ne devons nous occuper ici que des conséquences les plus simples de relations précédemment établies, le complément de la Dynamique des points matériels étant réservé au commencement du cours de 2^e année.

L'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{R \cos(R, ds)}{m}$ mise sous la forme $m dv = R \cos(R, ds) dt$, donne

par l'intégration $mv - mv_0 = \int_0^t R \cos(R, ds) dt$.

Le produit mv s'appelle la quantité de mouvement du corps dont la masse est m et la vitesse v . L'intégrale est l'impulsion de la force tangentielle pendant le temps t . Donc

Théorème. - L'accroissement fini ou élémentaire de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion finie ou élémentaire de la force tangentielle pendant le même temps, quel que soit le chemin ds parcouru.

108. - L'équation $m dv = R \cos(R, ds) dt$ combinée avec $v = \frac{ds}{dt}$ donne

$$d \cdot \frac{mv^2}{2} = R \cos(R, ds) ds \quad \text{et} \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s R \cos(R, ds) ds.$$

Suivant l'expression proposée par M. Coriolis et Poisson, le produit $R \cos(R, ds) ds$ et son intégrale de s_0 à s s'appellent, l'un, le travail élémentaire; l'autre le travail total (entre les deux positions extrêmes du mobile) de la force R .

Notations: $d\mathcal{T} = F ds \cos(F, ds)$; $\mathcal{T} = \int F ds \cos(F, ds)$.

Il suit de la relation $R \cos(R, ds) = \sum F \cos(F, ds)$ que le travail d'une résultante est égal à la somme des travaux de ses composantes.

La quantité mv^2 s'appelle le plus communément la force vive du corps dont la masse est m et la vitesse v . Cet usage d'une dénomination employée par Leibnitz dans un tout autre sens^(a) est vicieux aujourd'hui que le mot force a une signification précise et simple qui ne peut pas s'appliquer à la quantité complexe mv^2 , laquelle, mise sous la forme $\frac{p v^2}{g}$ serait le produit d'une force par une longueur.

En attendant qu'une expression meilleure ait été proposée et adoptée, je continuerai,

(a) Voir dans la Biographie Universelle publiée en 1819 par Michaud, l'article Leibnitz, page 609. On y lit la phrase suivante traduite d'un traité écrit par ce célèbre philosophe en 1694 « L'énergie, la force vive, se manifeste par l'exemple du poids suspendu qui tire ou tend la corde »

comme je le fais depuis quinze ans, d'appeler puissance vive la quantité $\frac{1}{2} mV^2$ et je dirai, dans la suite de ce cours, le motif qui me paraît justifier cette dénomination.

Les deux équations précédentes peuvent donc s'énoncer ainsi :

Théorème. - L'accroissement élémentaire ou fin de la puissance vive (ou de la demi-force vive) d'un point matériel est numériquement égal au travail de forces agissantes pendant le même temps, quel qu'il soit.

§. 6. - Divers cas du travail d'une force. Unité. Moment autour d'un axe.

109. - Double aspect de la quantité $F ds \cos(F, ds)$: soit $F \times (ds \cos(F, ds))$, soit $ds \times (F \cos(F, ds))$. Énoncés correspondants.

110. - Si le travail est positif, c'est-à-dire l'angle (F, ds) aigu, le travail est dit travail moteur et la force est dite force mouvante.

Si l'angle est obtus le travail négatif est dit travail résistant et la force est résistante.

111. - Si une force est normale à la courbe décrite son travail est nul; elle est sans influence sur l'accélération tangentielle, mais elle contribue avec les autres composantes normales des forces agissantes à déterminer la courbure de la trajectoire, en égard à la masse du corps et à sa vitesse acquise.

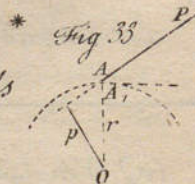
112. - Si une force est constante et parallèle en même sens à une même direction son travail est égal au produit de la force par la projection orthogonale, positive ou négative sur cette direction de la corde qui sépare les deux positions extrêmes.

113. - Unités. 1^o L'unité de travail répond au cas où $F = 1^{kg}$, $s = 1^m$, $\cos(F, ds) = 1$. Elle s'appelle suivant l'expression proposée par M. Poncelet un Kilogrammètre = $1^{kg.m}$.

2^o Un travail prolongé indéfiniment à raison de 75 $kg.m$ par seconde, constitue l'unité appelée un cheval vapeur, ou mieux un cheval dynamique, quantité qu'il est peu correct de désigner sous le nom de force de cheval.

114. - Moment d'une force autour d'un axe. Cette quantité dérive naturellement de la considération du travail élémentaire d'une force F dont le point d'application A décrit un arc de cercle autour d'un axe fixe O^* .

P projection de F sur le plan de la figure, perpendiculaire à l'axe O ; $AA_1 = ds$
 $d \mathcal{E}F = ds \cdot F \cos(F, ds) = ds P \cos(P, ds) = P p \frac{ds}{r}$.



Pp prise avec le même signe que le travail de F est le moment de la force F autour de l'axe O . Nous le désignerons par la notation $M_O F$.

$\frac{ds}{r}$ est le déplacement angulaire élémentaire du point A. Donc

Théorème. Le travail élémentaire d'une force pendant la rotation de son point d'application autour d'un axe fixe, est égal au moment de la force autour de cet axe multiplié par le déplacement angulaire élémentaire du point d'application.

115. - De là et du N° 95 on conclut :

Théorème. Le moment de la résultante de forces quelconques appliquées à un même point, autour d'un axe quelconque, est égal à la somme algébrique des moments de ses composantes autour du même axe.

C'est avec plus de généralité le théorème que Varignon a fait connaître en 1687. La démonstration précédente peut très-aisément être dégagée de la considération du travail des forces.

§ 7. - Équilibre des forces appliquées à un point matériel en repos ou en mouvement.

116. - Si un point matériel est en repos ou en mouvement rectiligne uniforme, la résultante de toutes les forces qui le sollicitent est nulle, et réciproquement : c'est une conséquence nécessaire du théorème exprimé par la formule $J = \frac{R}{m}$.

Pour qu'on ait $R = 0$, il faut (95) que pour un axe Ox quelconque on ait $\sum F_x = 0$; et il suffit que cette équation soit vérifiée pour les projections coordonnées des forces sur 3 axes formant angle trièdre. Celle est la triple condition de l'équilibre d'un point matériel sous l'action de forces quelconques.

Si elle n'a lieu que pour un certain nombre de forces F prises parmi celles qui sollicitent un point matériel, la résultante de ces forces est nulle et l'accélération totale du mouvement n'est due qu'aux autres forces.

117. - **Théorème du travail virtuel.** - Rien n'est plus simple que la formule $\sum F_x = 0$ étendue à 3 axes pour exprimer l'équilibre ou la nullité de la résultante de forces F quelconques appliquées à un même point. Cependant on donne à cette condition générale une autre forme également générale, qui a, comme nous le verrons, son utilité lorsqu'il s'agit de l'équilibre dans les systèmes de points matériels formant des corps d'étendue quelconque. C'est comme une introduction à cette théorie que nous présentons la remarque suivante.

À étant la position actuelle du point matériel en repos ou en mouvement, transportons par la pensée le mobile de la position α à une position infiniment voisine β quelconque, en lui faisant décrire une trajectoire élémentaire $\alpha\beta = ds$ qui peut être différente de celle que décrit effectivement le mobile, et supposons que les forces F continuent d'agir

sur celui-ci pendant ce déplacement purement géométrique et idéal appelé déplacement virtuel. Il en résultera pour chaque force F un travail élémentaire que nous appellerons travail virtuel, et la somme de ces travaux sera égale au travail virtuel de la résultante, ce qui, comme on l'a vu (108), est la conséquence de la définition du travail d'une force et de la propriété générale (95) de la résultante de forces appliquées à un même point. Concluons les deux propositions suivantes :

Théorème. Pour un déplacement virtuel quelconque, le travail de la résultante de plusieurs forces appliquées à un même point est égale à la somme algébrique des travaux virtuels des composantes.

118. ~ **Corollaire.** Pour que la résultante de forces quelconques appliquées à un même point soit nulle, il faut que la somme algébrique de leurs travaux virtuels pour un déplacement quelconque de ce point soit nulle, et il suffit que cette condition soit vérifiée pour trois déplacements qui ne soient pas dans un même plan.

119. Extension de ces propositions à l'équilibre des forces qui sollicitent un point matériel en mouvement et de la force d'inertie correspondante à sa masse et à son accélération totale.

Définition. Un point matériel étant supposé posséder une masse m et avoir actuellement l'accélération totale J (intensité et direction) on appelle force d'inertie actuelle de ce corps la force dont l'intensité est mJ et dont la direction coïncide, mais en sens contraire, avec celle de l'accélération J .

120. ~ D'après ce qui précède (101) la force d'inertie est égale et directement opposée à la résultante R des forces agissantes F ; donc, jointe fictivement à ces forces comme si elle agissait aussi sur le mobile elle satisfait aux conditions de l'équilibre, et par conséquent l'équation qui exprime le corollaire 118, savoir :

$$[A] \quad \sum F \delta s \cos(F, \delta s) - m J \delta s \cos(J, \delta s) = 0,$$

dans laquelle on peut à volonté faire

$$J \cos(J, \delta s) = \frac{dv}{dt} \cos(v, \delta s) + \frac{v^2}{\rho} \cos(\rho, \delta s),$$

ou

$$J \cos(J, \delta s) = \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\delta z}{\delta s}$$

en supposant trois axes rectangulaires sur lesquels le déplacement virtuel a pour projections δx , δy , δz .

Cette dernière substitution donne pour l'équation de l'équilibre fictif dont il s'agit.

$$[B] \quad \sum F \delta s \cos(F, \delta s) - m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = 0$$

121. ~ **Remarques.** 1°. On arrive au même résultat, avec Lagrange (Méc. analyt. 2^e p. Sect. II, n° 3)

et d'autres géométries, par un raisonnement qui revient à dire que les forces F ont pour résultante la force mJ qu'on appelle assez ordinairement force totale, de même que J s'appelle accélération totale; on peut donc aux forces agissantes F et à la force idéale mJ dite force totale, appliquer le théorème 117, ce qui donne l'équation ou formule [A].

2^o. Cette formule ou son équivalente [B] n'aurait, nous le répétons, rien de nouveau ni même d'utile si elle ne devait par nous servir plus tard quand il s'agira de l'équilibre ou du mouvement d'un système de points matériels. En divisant tous les termes par δs on retrouve évidemment la formule $m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_x$ appliquée à un axe quelconque.

§ 8 Extension des lois précédentes aux mouvements relatifs.

122. — On a vu (73) que si la position d'un point mobile est rapportée à un système géométrique solide possédant lui-même un mouvement qui ne soit pas rectiligne et uniforme, l'accélération apparente du mobile est la résultante de l'accélération réelle dans l'espace absolu et d'accélération fictives qu'on sait exprimer. Il s'en suit qu'un point matériel se meut relativement au milieu en mouvement comme il le ferait dans l'espace absolu si, outre les forces réelles qui le sollicitent, il subissait les forces qui correspondent aux accélérations fictives, forces qu'on obtient en multipliant (98) ces accélérations par la masse et qui sont $-mJ_x$ et $2m\omega u_r$ normale à la vitesse relative en sens contraire de sa rotation.

123. — Application aux phénomènes mécaniques ordinaires sur la terre. — Le mouvement du centre de la terre autour du soleil peut être considéré très approximativement comme rectiligne et uniforme. On a vu (76) que l'accélération $2\omega u_r$ normale à la vitesse relative peut être négligée. Une expérience connue, où son influence se manifeste et qui a été proposée par Newton, en 1719, consiste à faire tomber d'une grande hauteur, sans vitesse initiale, un corps très-dense et d'une figure effilée pour diminuer l'effet de la résistance de l'air. Ce corps tombe à une petite distance vers l'est de la verticale du point de départ. Et en effet, l'accélération $2\omega u_r$, nulle au départ, croît avec la vitesse relative, mais reste très-sensiblement horizontale et dirigée de l'ouest à l'est. N'étant la vitesse relative apparente et presque verticale, u_r devient $v \cos \lambda$, la latitude du lieu étant λ . Désignant par x la distance du mobile à la verticale et par y sa distance verticale au point de départ, on a pour l'accélération dans le sens horizontal

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega v \cos \lambda = 2\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dt} = 2\omega y \cos \lambda.$$

Si maintenant on néglige la très faible influence de la résistance de l'air sur la valeur de y en fonction de t , on peut poser $y = \frac{1}{2}gt^2$, et conclure par l'intégration

$$x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos \lambda = \frac{2}{3}\omega \cos \lambda y \sqrt{\frac{2y}{g}}.$$

Cette déviation a été observée à Freyberg dans les circonstances suivantes : hauteur de chute $y = 158,5$, $\lambda = 51'$. En faisant $g = 9,81$, et $\omega = 0,000729$, on trouve $x = 0,0276$: l'expérience a donné $0,0283$.

124. ~ Si l'on néglige l'accélération $2\omega u$, comme on doit le faire dans l'étude des phénomènes mécaniques ordinaires, il ne reste donc plus, pour obtenir la force totale apparente qui convient au mouvement relatif d'un point matériel, qu'à composer les forces réelles avec la force $-mJ_c$, qui est dans ce cas la force centrifuge $m\omega^2 r$. Or, c'est précisément ce que nous faisons lorsque, au lieu de la force que la gravitation terrestre exerce dans un corps, nous substituons la force que nous appelons le poids de ce corps, qui n'est réellement que la résultante de la force attractive et de la force centrifuge.

Lorsque nous disons qu'un corps, abandonné dans le vide à l'action de son poids, descend de la hauteur $\frac{1}{2}gt^2$ dans le temps t , ce n'est qu'une double fiction qui répond à l'apparence du phénomène. En réalité, même en admettant la fixité de l'axe de la terre, quand un corps est privé d'appui dans le vide, la force qui s'exerce sur lui est plus grande que le poids de ce corps; mais aussi il parcourt, en tombant, un espace plus grand dans le sens vertical que celui que nous observons, puisque, pendant la durée de la chute, le point de départ considéré comme point géométrique entraîné dans la rotation de la terre, descend lui-même d'une certaine quantité au-dessous du plan horizontal primitif. Les deux erreurs ou fictions se compensent.

125. ~ Du travail des forces dans le mouvement relatif. ~ Parmi les forces fictives à joindre aux forces réelles comme on vient de le dire (122) pour traiter un mouvement relatif comme s'il était absolu, il en est une, $2m\omega u$, qui est normale à la vitesse relative et dont le travail est par conséquent nul.

126. ~ Première application. ~ Un tuyau étroit d'une figure quelconque tourne uniformément autour d'un axe vertical. Un petit corps est introduit dans l'orifice supérieur A avec une vitesse relative initiale V_r . Soumis de loin à l'action de la pesanteur et à la pression du tuyau, il descend en B. On demande, en ce dernier point, sa vitesse relative V_r et sa vitesse absolue dans l'espace, en supposant que le tuyau n'ait exercé aucun frottement, c'est-à-dire que son action sur le mobile soit toujours normale à la trajectoire relative, et ne produise, par conséquent, aucun travail à introduire dans l'équation du mouvement relatif. En appelant r_0 et r_1 les rayons de rotation des points d'entrée et de sortie, et h leur différence de niveau, on a (108)

$$\frac{1}{2} m v_r^2 - \frac{1}{2} m V_r^2 = mgh + \frac{1}{2} m \omega^2 (r_1^2 - r_0^2) \text{ ou } v_r^2 = V_r^2 + 2gh + v_c^2 - V_c^2,$$

en désignant par v_r et V_r les vitesses cor_0 et cor_1 des points B et A du tuyau.

La vitesse v est la résultante de v_r et de la vitesse v_c du point B, la direction de v_r étant celle de la tangente en B à la trajectoire suivant le tuyau, et la direction de v_c étant horizontale et dans le sens de la rotation en B.

127. - Deuxième application. Une petite boule glisse le long d'une tige horizontale très mince qui la traverse, et à laquelle on imprime un mouvement de rotation uniforme autour d'un de ses points. On demande quel est le mouvement de la boule en la considérant comme un point matériel et en négligeant son frottement sur la tige.

ω vitesse angulaire de la baguette; x_0 et x distances, à deux instants, de la boule à l'axe de rotation; V_0 et V vitesses relatives correspondantes. Les forces réelles, le poids de la boule et la pression de la tige ne font point de travail relatif. Reste $F = m\omega^2 x$. On a donc, à cause du facteur commun $\frac{1}{2} m$, l'équation $V^2 - V_0^2 = \omega^2(x^2 - x_0^2)$, qui donne la vitesse variable V en fonction de la distance x et des données ω, V_0, x_0 .

Pour trouver la relation entre x et le temps t , on posera $V = \frac{dx}{dt}$; par suite

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\omega^2 x^2 + V_0^2 - \omega^2 x_0^2}} \text{ et en intégrant } t = \frac{2,3026}{\omega} \log \frac{\omega x + \sqrt{\omega^2 x^2 + V_0^2 - \omega^2 x_0^2}}{\omega x_0 + V_0}$$

Pour obtenir l'équation en coordonnées polaires de la trajectoire du centre de la boule dans son mouvement absolu, il suffit de remplacer t par $\frac{\alpha}{\omega}$, en appelant α l'angle variable de la tige avec sa direction initiale.

Chapitre 2. - Théorèmes généraux sur l'équilibre des forces appliquées aux systèmes de points matériels.

§ 1. - Principe de la réaction égale et contraire à l'action.

128. - L'extension de la théorie précédente aux corps quelconques et aux forces qui y sont ou qu'on y conçoit appliquées repose sur un principe ou loi générale de la nature qu'on énonce en disant, avec Newton, que toute action est accompagnée d'une réaction égale et contraire. Pour bien le comprendre, il faut remarquer que toutes les forces réellement, physiquement existantes dans la nature agissent sur les éléments matériels dont se composent les corps (leurs résultantes n'étant que des conceptions de notre esprit), et que toute force subie par un élément matériel est nécessairement exercée sur lui par un autre élément matériel plus ou moins éloigné.

Or, le principe dont il s'agit consiste en ce que: 1^o Si un point matériel, que nous nommerons α , reçoit une force élémentaire quelconque d'un autre point matériel, que nous

2^o Division.

Cours de Mec. et Mach. - 12^e Feuille.

nommeron α' , force appelée l'action de α' sur α , le point α reçoit en même temps, et nécessairement de α' une force appelée la réaction de α' sur α ; 2^o ces deux forces sont dans la direction qui joint les deux points; 3^o Elles ont la même intensité; 4^o Elles sont de sens opposés, toutes deux attractives ou toutes deux répulsives.

L'accord de l'expérience avec la conséquence de ce principe en est la confirmation.

129. — Comme l'a expliqué M. Poncelet (Méc. indust. p. 256 à 264) on se fait une idée assez plausible de la manière dont les éléments des corps agissent les uns sur les autres, au moyen d'une double hypothèse qui consiste à étendre aux moindres parties de la matière la loi de la gravitation universelle; de sorte qu'elles s'attirent d'avantage à mesure qu'elles sont plus rapprochées, et à admettre, en même temps, qu'il existe entre deux molécules voisines une répulsion mutuelle qui dépend de la chaleur ou d'autres causes analogues, et qui varie avec la distance, mais suivant une autre loi que la gravitation. Ainsi la force totale que l'élément α reçoit de α' , et celle que l'élément α' reçoit de α seraient, chacune, la résultante de deux forces, la gravitation mutuelle de ces éléments et leur répulsion mutuelle due à la chaleur. Cette résultante serait attractive, répulsive ou nulle, suivant que la première force serait supérieure, inférieure ou égale à la seconde.

Supposons par exemple que les deux petits corps α' , α'' soient en repos sans l'action d'aucune force extérieure, c'est-à-dire venant d'un troisième corps: les forces mutuelles entre α' et α'' sont nulles dans ce cas, ce qui n'empêche pas que la gravitation mutuelle de ces deux points et leur répulsion due à la chaleur ou à d'autres causes ne puissent être très-considérables par rapport à leurs masses, s'ils sont suffisamment rapprochés. Supposons en second lieu que le repos des deux mêmes corps existe sous l'action de deux forces extérieures F' , F'' , qui tendent soit à les rapprocher soit à les écarter. Le point α' considéré seul ne peut se maintenir en repos que parce que, outre la force F' venant d'un agent autre que α'' , il reçoit de ce point α'' une force f' égale et contraire à F' . De même l'équilibre du point α'' exige que la force F'' soit égale et contraire à l'action f'' que α'' reçoit de α' . Cela posé, si l'on admet le principe de l'égalité de l'action et de la réaction contraire, c'est-à-dire l'égalité d'intensité et l'opposition de direction des forces f' et f'' , on en conclura que F' et F'' sont nécessairement deux forces égales et opposées. Si l'on préférerait regarder comme évident, que l'équilibre de l'ensemble des deux éléments α' et α'' exige l'égalité des forces opposées F' et F'' , on en conclurait l'égalité des forces mutuelles f' et f'' . Lorsque les forces F' et F'' tendent à rapprocher α' et α'' , les forces mutuelles f' et f'' qui leur sont égales sont répulsives, ce qui signifie que la gravitation est alors inférieure à la répulsion due aux causes analogues à la chaleur. Or, si l'on compare la situation relative des deux points à ce qu'elle était en l'absence des forces F' et F'' , le second état d'équilibre s'explique en disant que, par le rapprochement des deux points α' et α'' , leur gravitation mutuelle s'est à la vérité augmentée, mais que leur répulsion s'est augmentée davantage encore. Le contraire aurait lieu si les

deux forces extérieures F' et F'' tendraient à écarter les deux points l'un de l'autre.

Il peut arriver qu'un très-petit changement dans la distance de deux points en produise un très-grand dans l'intensité de leur action mutuelle. On conçoit ainsi la constitution des corps solides dans lesquels les actions mutuelles varient fortement par suite de très-petits changements de forme, font que ces corps résistent dans certaines limites, sans déformation sensible, aux efforts qui tendent à les comprimer ou à les dilater.

S'il était possible qu'un assemblage de points matériels formant un corps solide en repos fût parfaitement isolé, ne recevant l'action d'aucun corps étranger, il ne faudrait pas en conclure que, comme dans le premier cas de deux points, les actions mutuelles entre tous ces éléments seraient actuellement nulles. Le repos de chacun de ces points pourrait avoir lieu parce que les forces qu'il recevrait de toutes parts du système seraient, les unes attractives, les autres répulsives, leur résultante étant nulle. Pour rendre cette observation sensible par un exemple très-simple, imaginons un système de quatre points matériels a' , a'' , a''' , a'''' de même masse, de même nature, et situés aux quatre sommets d'un carré. Pour que l'équilibre existe sans l'action d'aucune force étrangère, il suffit que la résultante des forces que chaque point reçoit des trois autres soit nulle; qu'ainsi la force f'' et f''' que le point a' reçoit des deux points a'' et a''' dont il est le plus voisin soient répulsives par suite de la supériorité de l'action de la chaleur sur celle de la gravitation; que, au contraire, la force f'''' que a' reçoit de a'''' et dirigée suivant la diagonale soit attractive; la gravitation entre ces deux points l'emportant sur la répulsion due à la chaleur. Supposons maintenant qu'aux deux points a' et a'''' , diagonalement opposés, soient appliquées deux forces extérieures F' et F'''' égales et contraires qui tendent à rapprocher ces deux points. Pour que le repos ait encore lieu dans cette hypothèse, il faut non-seulement que la diagonale $a'a''''$ soit plus petite que dans le premier cas, mais aussi que l'autre diagonale $a''a''''$ soit augmentée; car le point a'' , qui n'est soumis à aucune force extérieure, doit être encore en équilibre sous l'action des forces qu'il reçoit des trois points a' , a''' , a'''' . Si la distance $a''a''''$ restait la même, les forces répulsives totales entre a'' et a' d'une part, et entre a'' et a''' d'autre part, se trouveraient augmentées parce que les distances $a''a'$ et $a''a'''$ seraient moindres; l'angle $a'a''a''''$ serait d'ailleurs diminué; donc par une double raison, la résultante de ces deux forces serait augmentée, tandis que la force attractive entre a'' et a'''' serait restée la même; l'équilibre n'aurait par conséquent pas lieu; donc il faut par compensation que la diagonale $a'a''''$ soit augmentée, ce qui diminue la plus grande et augmente la plus petite des forces inégales dont nous venons de parler. La déformation contraire aurait lieu si les deux forces extérieures tendaient à écarter leurs points d'application a' et a'''' ; les deux points m' , m'' devraient se rapprocher pour que

le repos peut encore subsister. C'est ce que l'expérience confirme: un fil cylindrique que l'on allonge diminue en même temps de diamètre.

Les doutes qui s'élevaient sur ces explications ne pourraient porter atteinte aux vérités qui vont être établies dans ce chapitre, et qui sont des conséquences nécessaires du seul principe de l'égalité entre toute action et la réaction contraire, joint aux théorèmes également incontestables de la Dynamique d'un point matériel.

§ 2. - Distinction des forces agissant sur un système matériel en forces extérieures et forces intérieures mutuelles.

130. - Les corps sont des assemblages ou systèmes de points matériels. Un tel système, en repos ou en mouvement, est sollicité par des forces qui, relativement à un corps spécial et défini, se distinguent, comme dans les exemples précédents, en deux espèces: les unes sont des forces extérieures, c'est-à-dire dues à l'action de corps autres que les éléments dont se compose le système considéré (telle est la pesanteur, qui, bien qu'elle agisse sur toutes les parties d'un corps soumis à nos observations, n'en est pas moins, relativement à ce corps, une force extérieure); les autres sont des forces intérieures et mutuelles constituant les actions réciproques des points ou éléments matériels du système dont il s'agit, et réalisant ce qui se nomme les liaisons de ce système.
131. - Ce corps quelconque est plus ou moins déformable, solide, liquide ou gazeux, inorganique ou vivant. Si quelques uns des éléments dont il se compose sont liés par des fils ou des bandes rigides, cette condition ne fait pas d'exception à la distinction des forces en deux espèces. Il suffit de comprendre les liens dans le système matériel en les considérant comme composés de points entre lesquels agissent des forces mutuelles, sauf à négliger, s'il y a lieu, la masse de ces liens pour simplifier les calculs. Lorsque certains points du système se meuvent sur la surface d'un corps qui lui est étranger, les réactions de cette surface ou plutôt du corps qu'elle termine sont des forces extérieures par rapport au système dont ce corps ne fait pas partie. Ces réactions seraient normales si la surface n'exerçait pas un frottement; mais cette hypothèse ne se réalise jamais lorsqu'un corps glisse sur un autre qui modifie son mouvement.
132. - Carnot a dit (Principe de l'Équilibre et du Mouvement, page 237): « Les points fixes » et obstacles quelconques sont des forces purement passives qui peuvent absorber un mouvement » si grand qu'il soit, mais ne peuvent jamais en faire naître un, si petit qu'on veuille le » imaginer dans un corps en repos. » Non seulement il est incorrect de dire qu'un point fixe est une force, mais l'expression de force passive, semble une alliance de mots contradictoires, car une force qui empêche ou détruit un mouvement agit ou est active aussi réelle

ment que celle qui tend à produire ou qui a produit ce mouvement.

§ 3. - Équation du travail virtuel des forces appliquées à un système matériel quelconque, y compris les forces d'inertie.

133. - Un système matériel plus ou moins susceptible de déformation ayant un mouvement quelconque; un de ses points pris à volonté et dont nous désignerons la masse par m' , obéit nécessairement aux forces les unes extérieures F' et les autres intérieures f' qu'il reçoit, et de ces forces résulte pour le point considéré une accélération J' dont l'intensité et la direction dépendent suivant les règles précédemment reconnues de la masse du point et des forces F' et f' ; et si l'on joint à ces forces réellement agissantes la force d'inertie $m'J'$ qui n'agit point sur ce corps mais qui est égale et opposée à la résultante dite force totale pour le point considéré, la relation entre les forces F' et f' et l'accélération J' se trouve exprimée par l'équation d'équilibre (116)

[C] $\sum F'_x + \sum f'_x - m' J'_x = 0$

l'axe de projection étant quelconque. Mais on peut aussi l'exprimer (et nous allons en voir l'utilité), en employant la considération du travail virtuel, et poser, comme au n. 120 l'équation

$\sum F' \delta s' \cos(F' \delta s') + \sum f' \delta s' \cos(f' \delta s') - m' J' \delta s' \cos(J' \delta s') = 0.$

Supposant maintenant qu'on ajoute toutes les équations pareilles à celle-là, obtenues en considérant successivement les divers points du système à chacun desquels on peut attribuer un déplacement virtuel quelconque, on obtient l'équation dite du travail virtuel

[D] $\sum F \delta s \cos(F, \delta s) + \sum f \delta s \cos(f, \delta s) - \sum m J \delta s \cos(J, \delta s) = 0.$

dans laquelle la première somme a autant de termes qu'il y a de forces extérieures F , la seconde en a un nombre pair égal au nombre des forces mutuelles intérieures, la troisième en a un nombre égal à celui des points du système qui à l'instant considéré ne sont ni en repos ni en mouvement rectiligne uniforme. D'ailleurs pour les divers points du système les déplacements δs sont absolument arbitraires, indépendants du temps et généralement différents des chemins ds que parcourent effectivement les points du système pendant un même temps dt .

134. - Nous allons profiter de cette indétermination et choisir les déplacements virtuels, dernière à tirer de l'équation du travail virtuel des conséquences indépendantes des actions intérieures.

À cet effet, supposons d'abord que tous les déplacements δs soient égaux entre eux et parallèles à un axe Ox , c'est-à-dire que le système ait un mouvement virtuel de translation, compatible avec l'hypothèse de la parfaite solidité du système. Dans ce cas,

2. Division.

Cours de Méc. et mach. - 13. leçon.

L'équation précédente devient

$$[E] \dots \dots \int_x (\sum F_x + \sum f - \sum m \frac{d^2x}{dt^2}) = 0, \text{ ou, attendu que } \sum f = 0 \text{ (128),}$$

$$\sum F_x - \sum m \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

c'est-à-dire que la somme des projections sur un axe quelconque des forces extérieures et des forces d'inertie est nulle; relation qu'on aurait d'ailleurs obtenue immédiatement en faisant la somme de toutes les équations pareilles à [C] du n° 133.

Secondement choisissons les déplacements δs tels qu'ils auraient lieu si le système devenu solide tournait autour d'un axe O . Dans cette hypothèse purement idéale et géométrique, soit $d\alpha$ le déplacement angulaire du système. Le travail virtuel $F \delta \cos(F, \delta s)$ d'une force quelconque F , d'après le n° 114 est dans ce cas $d\alpha M_0 F$; la somme des moments des forces f est nulle; le facteur $d\alpha$ est commun à tous les termes de l'équation [C] qui se réduit à

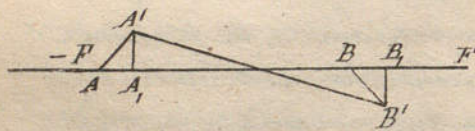
$$[F] \dots \dots \sum M_0 F - \sum M_0 m J = 0$$

c'est-à-dire que la somme des moments des forces extérieures et des forces d'inertie autour d'un axe quelconque est nulle, proposition dont la démonstration doit sa simplicité à la considération du travail virtuel.

Le développement des conséquences de cette dernière formule appartient au cours de 2^e année.

135. — On vient de voir que dans les deux mouvements virtuels simples, de translation et de rotation, la somme des travaux des forces intérieures est nulle. C'est un cas particulier d'un théorème général. Soient AB deux points situés à une distance finie l'un de l'autre et sollicités par deux forces égales et opposées F et $-F$ que nous supposons ici répulsives. Ces deux points par un déplacement effectif ou seulement virtuel sont transportés en A' et B' à des distances AA' et BB' infiniment petites par rapport à AB ; et la somme des travaux des deux forces F est $F(BB' - AA')$ ou $F(A_1B_1 - AB)$. Or, l'angle de $A'B'$ avec AB est infiniment petit, et par conséquent la différence entre $A'B'$ et la projection A_1B_1 est infiniment petite par rapport à la plus grande des distances AA' , BB' . On peut la négliger. Ainsi en faisant $AB = l$ et $A'B' = l + dl$, ou $A_1B_1 = AB + dl$, d'où $A_1B_1 - AB = dl$.

Donc la somme des travaux élémentaires des deux forces F égales et opposées est exprimée par $F dl$, ne dépendant que de la variation de distance mutuelle des deux points (en d'autres termes, de leur mouvement relatif) et de l'intensité des forces, travail positif quand les forces sont répulsives et que les deux points s'éloignent, ou quand les deux forces étant attractives ils se rapprochent, travail négatif dans les deux cas contraires, nul quand la distance ne varie pas.



§ 4. - Équilibre des systèmes de points matériels.

136. - Équation générale du travail virtuel pour un système en équilibre. - L'équation [D] (133) et les équations [E] et [F] qui s'en déduisent (134) se rapportent à l'équilibre idéal des forces effectives extérieures et intérieures et des forces d'inertie. Considérons maintenant le cas de l'équilibre effectif d'un système matériel; par là nous entendons l'état d'un corps qui, dans toute sa partie sous l'action de forces intérieures et extérieures, reste en repos ou en mouvement rectiligne uniforme de translation, et nous ne ferons d'abord aucune hypothèse sur la constitution physique de ce corps ou système matériel qui peut être plus ou moins solide, liquide ou gazeux.

Il est clair que pour appliquer à ce cas la formule générale [D], il suffit d'y faire nulles les accélérations J , ou les forces d'inertie mJ . L'équilibre du système se trouve ainsi exprimé par l'équation du travail virtuel applicable à ce cas, savoir

$$[G] \dots \dots \dots \sum F \delta s \cos (F, \delta s) + \sum f \delta s \cos (f, \delta s) = 0,$$

de laquelle, en disposant à volonté des directions et rapports des déplacements virtuels arbitraires δs , on peut tirer un nombre infini de relations entre les forces F et f .

137. - Équations d'équilibre entre les forces extérieures. - On déduit de [G] comme conséquence nécessaire (équations [E] et [F] du n° 134)

$$[H] \dots \dots \dots \sum F_x = 0 \quad \text{et} \quad [I] \dots \dots \dots \sum M_o F = 0.$$

c'est-à-dire que dans un système matériel quelconque en équilibre, la somme algébrique des projections des forces extérieures sur un axe quelconque est nulle, et qu'il en est de même de la somme algébrique des moments des mêmes forces par rapport à un axe aussi quelconque. On voit ici l'utilité de la considération du travail virtuel pour obtenir très-simplement des relations entre les forces.

138. - Si par une origine O quelconque on imagine trois axes non situés dans un même plan, on pourra les prendre successivement pour axes de projection et pour axes de moments; on aura ainsi six équations auxquelles satisfont les forces extérieures F agissant sur un système matériel en équilibre; savoir:

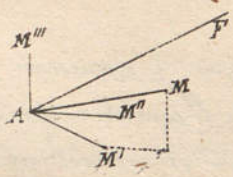
$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x F = 0, \quad \sum M_y F = 0, \quad \sum M_z F = 0;$$

équations distinctes; car les projections d'une force et ses moments relatifs à trois axes sont six quantités qui peuvent varier indépendamment les unes des autres.

139. - Maintenant nous allons faire voir que toute équation analogue obtenue relativement à un axe quelconque dans l'espace, ou plus généralement toute équation déduite d'un mouvement virtuel comparable avec la solidification du système (afin de n'introduire dans cette équation aucune des forces intérieures mutuelles) est implicitement renfermée dans les six

équations distinctes du N° précédent.

Cela résulte de la théorie de la composition des mouvements. Dire qu'un mouvement se décompose en plusieurs autres, c'est dire (40. et 50) que la corde AM du chemin infiniment petit décrit réellement est la résultante ou somme géométrique des chemins simultanés AM' , AM'' , AM''' dûs aux mouvements composants. A cette décomposition du mouvement, répond une décomposition analogue du travail.



$$F \cdot \overline{AM} \cos(\overline{AM}, F) = F \cdot \overline{AM'} \cos(\overline{AM'}, F) + F \cdot \overline{AM''} \cos(\overline{AM''}, F) + F \cdot \overline{AM'''} \cos(\overline{AM'''}, F) \dots$$

c'est-à-dire que le travail absolu d'une force est égal à la somme de ses travaux dus aux mouvements composants du point d'application.

Cela posé, attendu que (49) tout déplacement infiniment petit d'un système solide peut se décomposer en trois translations parallèles à trois axes et en trois rotations autour des mêmes axes, à cette décomposition du mouvement en répond une semblable pour le travail. Or, si les six équations du N° 138 se vérifient, elles indiquent que les travaux dus à des translations suivant les trois axes x , y et z et à des rotations autour des mêmes axes ont leurs sommes séparément nulles, il en est donc de même de la somme du travail des mêmes forces pour un travail virtuel quelconque du système, pourvu que ce mouvement purement idéal soit compatible avec l'hypothèse de la solidification de ce système.

§ 5. - Statique ou équilibre des systèmes solides. Forces équivalentes.

140. - Si l'on admet l'existence de corps parfaitement invariables de forme, les six équations du N° 138 toujours nécessaires pour l'équilibre, sont alors suffisantes pour assurer cet équilibre, sous l'action des forces extérieures F qui satisfont à ces équations. Pour le démontrer remarquons que si des points quelconques du système matériel considéré, d'abord en repos, se mettaient en mouvement, chacun d'eux acquerrait une puissance vive $\frac{1}{2} m v^2$ qui ne pourrait être (108) qu'égal à la somme du travail des forces tant intérieures qu'extérieures agissant sur ce point. La somme essentiellement positive des puissances vives acquises serait donc égale à la somme des travaux de toutes les forces extérieures F et intérieures f , ce qui est impossible puisque les équations du N° 138 expriment que le travail total de toutes les forces agissantes est nul pour quelque mouvement qu'on puisse imaginer du système solide. On voit ici l'utilité de faire précéder la Statique de notions générales sur la Dynamique.

141. - Remarque. Le théorème précédent démontre que les six équations de projections et des moments sont les seules auxquelles soient assujetties les forces extérieures agissant sur un système quelconque en équilibre quand on ne fait aucune hypothèse sur les forces intérieures, puisque toute autre condition devient superflue dans le cas de la solidité.

142. - Les applications des six équations d'équilibre aux cas particuliers de forces dans un plan et de forces parallèles dans l'espace sont communes et ne présentent aucune difficulté.

143. - Les projections et les moments d'un nombre quelconque de forces déterminées ont des propriétés que nous devons indiquer succinctement.

Résultante de translation. Les sommes $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$ ne changent pas si l'on conçoit que toutes les forces F soient transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées en un même point quelconque. La résultante qu'elles auraient alors peut s'appeler résultante de translation, soit parce qu'elle est obtenue par le transport idéal des forces, soit parce que lorsqu'elle est nulle, la translation du système est impossible, soit enfin parce que, comme on le verra plus tard, cette force détermine le mouvement du centre de gravité du système matériel soumis aux forces extérieures F , quelle que soient les forces intérieures. $\sum F_x$ est sa projection sur l'axe des x ; l'équation $\sum F_x = 0$ exprime que la résultante de translation des forces F est nulle ou perpendiculaire à l'axe des x . Les trois équations $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 0$ signifient que la résultante de translation est nulle.

144. - Equivalence de deux groupes de forces. Définitions: 1° Deux groupes de forces sont dits équivalents lorsque la somme de leurs projections sur trois axes coordonnés et la somme de leurs moments par rapport à ces axes sont respectivement égales pour chaque axe dans l'un et l'autre groupe;

2° Lorsque plusieurs forces peuvent se réduire à une seule équivalente, celle-ci s'appelle leur résultante.

145. - Il résulte de la première définition et des n° 142, 134, et 139: 1° Que deux groupes équivalents de forces ont la même résultante de translation; 2° Qu'ils ont la même somme de travail dans tout mouvement virtuel compatible avec la solidité du système des points d'application; (cette dernière propriété pourrait servir à définir l'équivalence des deux groupes, attendu que sa réciproque est vraie). 3° Qu'aux six équations d'équilibre des forces extérieures répondent six équations d'équivalence de deux groupes de forces.

146. - On ne change rien ni à la somme des projections ni à celle des moments d'un groupe de forces si l'on y joint ou si l'on en retranche d'autres forces satisfaisant aux six équations d'équilibre. C'est ce qui arrive dans les cas particuliers suivants:

1° Lorsqu'on substitue une force à ses composantes, ou réciproquement;

2° Lorsqu'on introduit ou qu'on supprime deux forces égales, directement opposées, appliquées à deux points quelconques;

3° Lorsqu'on transporte une force d'un point à un autre de la droite suivant laquelle elle agit en conservant son intensité et le sens de son action.

147. - Réduction de forces quelconques à deux équivalentes. On démontre aisément d'après cette remarque qu'un groupe quelconque de forces F peut se réduire à deux équivalentes S et T dont l'une au moins passe par un point donné O .

Ces deux équivalentes donnent lieu aux remarques suivantes:

1° Non-seulement l'une d'elles S peut toujours passer par un point O pris arbitrairement, mais la seconde T est susceptible d'une infinité de positions et de valeurs cor-

2° Division.

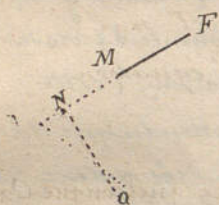
Cours de Mec. et Mach. - 14^e Feuille.

respondantes au même point O . En effet, on peut remplacer une force T d'abord trouvée par deux autres dont l'une passant par O se compose avec S et l'autre passe par un point pris arbitrairement dans le plan de T et de O . On peut même se donner arbitrairement dans ce plan la direction de la force remplaçant la force T d'abord trouvée. Si la nouvelle direction rencontre la première, le remplacement se fait par une simple décomposition de T . Dans le cas du parallélisme, on emploie une équivalence intermédiaire.

2°. Le plan contenant la seconde équivalence T et le point O , est déterminé par le choix d'ailleurs arbitraire du point O . En effet soient deux forces S' et T' qui forment un groupe équivalent à celui de S et T , les deux forces S et S' passant par O . Dans le plan qui contient O et T menons deux axes Ox et Oy . Les sommes de moments des deux groupes équivalents par rapport à ces axes doivent être égales; or, les moments de S , T et S' sont séparément nuls; donc il en est de même des deux moments de T' qui est par conséquent dans le plan xOy de T et de O .

3°. Le moment de la deuxième équivalence, quelle qu'elle soit, par rapport à une droite menée par le point O perpendiculairement au plan TO est constant d'intensité et de sens pour le même point O , puisque les moments de T et de T' autour de cette droite sont égaux et de même sens.

148. — Définitions. — I. Le moment d'une force par rapport à un axe perpendiculaire à un plan dans lequel elle se trouve s'appelle aussi le moment de la force par rapport au point où cet axe perce le plan. En d'autres termes, le moment d'une force F par rapport à un point O est le produit $F \cdot ON$ de la force par sa distance ON à ce point; produit auquel il faut attribuer le sens suivant lequel la force tend à faire tourner le rayon vecteur OM de son point d'application.

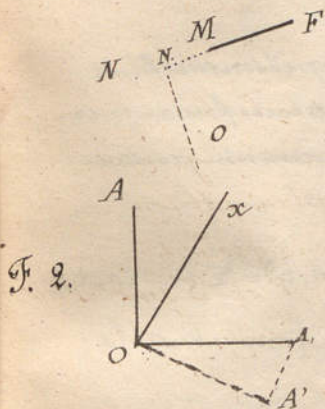


II. D'après cela, le moment de la force T dont il vient d'être parlé (144, 3°) est le moment de la 2° équivalence des forces F , par rapport au point O où passe la 1° équivalence S . Ce moment, dont le plan, l'intensité et le sens sont déterminés pour les forces F par le choix du point O s'appelle le moment résultant des forces F par rapport au point O , ou autour de ce point.

149. — Composition des moments. Le moment résultant de forces F autour d'un point O , que nous désignerons par $M_o T$, a une relation remarquable avec la somme des moments de ces forces autour d'une droite Ox , laquelle somme désignée par $\sum M_{Ox} F$ est égale au moment de T autour de Ox .

Pour l'établir, nous emploierons, à l'égard du moment d'une force par rapport à un point, ou ce qui revient au même, par rapport à une droite qui, sans la rencontrer, est rectangulaire à la direction de cette force, un mode de représentation analogue à celui qui sert à exprimer une rotation (42). L'axe représentatif du moment d'une

force F autour du point O , qui est à une distance ON , est une droite menée de O perpendiculairement au plan de F et de O , d'une longueur égale, moyennant une échelle, au produit $F \cdot ON$, et tellement dirigée que pour un observateur placé en arrière de O , le rayon vecteur allant de OM vers OF tourne comme l'aiguille d'une horloge.



Soient, dans le plan de la figure 2 la droite Ox et l'axe représentatif du moment résultant $M_o T$. Profitant de la 1^{re} remarque du n° 147, supposons que la force T soit parallèle au plan Aox et située à une distance du point O égale à l'unité de longueur; cette force projetée en vraie grandeur dans la figure sera donc représentée par OA , égale à OA . Maintenant pour avoir son moment autour de Ox , il faut: 1^o projeter la force T sur un plan perpendiculaire à Ox ; cette projection est $OA' = OA \cos AOA'$; 2^o La multiplier par la distance de OA , ou de OA' à la droite Ox , distance égale à l'unité. Le moment de T autour de Ox est donc $OA \cos AOA'$ égal à $OA \cos AOx$. Cette égalité n'a par lien seulement pour les valeurs

absolues des moments. Si, comme dans le cas de la figure, l'angle AOx est aigu, le moment de la force T par rapport à Ox est positif, parce que cette force ferait un travail positif dans le cas d'une rotation positive autour de Ox , ou, suivant le langage reçu, cette force tend à faire tourner son point d'application autour de Ox dans le sens positif. Il est facile de voir qu'au contraire si l'angle AOx était obtus, le moment de T par rapport à Ox serait négatif. Donc on a (attendu que $M_{Ox} T = \sum M_{Ox} F$), l'équation $\sum M_{Ox} F = OA \cos (AOx)$, c'est-à-dire:

Théorème. La somme algébrique des moments de forces F autour d'une droite quelconque Ox a même grandeur et même signe que la projection orthogonale sur cette droite de l'axe représentatif du moment résultant des mêmes forces autour d'un point O quelconque de Ox .

150. — **Corollaires.** 1^{er}. Si l'on mène par un point O trois droites Ox , Oy , Oz non situées dans un même plan, et si l'on porte sur ces droites à partir de l'origine O trois longueurs représentant à l'aide des conventions précédentes les intensités et les sens des sommes de moments autour des mêmes droites d'un groupe quelconque de forces F , l'extrémité A de l'axe OA représentatif du moment résultant autour de O des forces F est à l'intersection de trois plans menés perpendiculairement aux droites Ox , Oy , Oz par les extrémités des dites longueurs; et si les trois droites sont rectangulaires, le moment résultant a pour axe représentatif la droite résultante ou somme géométrique des trois longueurs $\sum M_{Ox} F$, $\sum M_{Oy} F$ et $\sum M_{Oz} F$.

2^e. Pour que le moment résultant soit nul et que par conséquent toute somme des moments des forces F autour d'une droite passant par O soit aussi nulle, il faut et il suffit que les sommes analogues pour trois droites menées par O et non situées dans un même plan soient séparément nulles.

3^e. Autour de toutes les droites passant par le même point O , les sommes de moments d'un même groupe de forces F sont représentées par les cordes d'une sphère ayant pour diamètre, en grandeur et en direction, l'axe représentatif du moment résultant. Celui-ci est égal à la plus grande somme des moments des forces F par rapport à une droite passant par O .

4^e. Soient F', F'', F''', \dots diverses forces dans l'espace, et A l'axe représentatif de leur moment résultant autour d'un point O . Si l'on considère successivement ces forces une à une, et qu'on appelle $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ les axes représentatifs de leurs moments autour de O , on a pour une droite Ox quelconque menée par O

$$M_{Ox} F' = \alpha' \cos(\alpha', x), \quad M_{Ox} F'' = \alpha'' \cos(\alpha'', x) \dots \dots \dots \text{d'où } \Sigma M_{Ox} F = A \cos(A, x) = \Sigma \alpha \cos(\alpha, x);$$

donc pour un point O pris à volonté, l'axe du moment résultant d'un groupe de forces F est la droite résultante des axes des moments de ces forces autour du même point.

151. - Théorie des couples. Les énoncés des propriétés des moments autour d'un point prennent une forme très-élégante par l'ingénieuse considération des couples, due à M. Poinsot. Rappelons ou établissons d'abord sur ce sujet quelques propositions et définitions.

1^o. La somme algébrique des moments de deux forces d'un couple, autour d'une droite perpendiculaire à son plan est constante quel que soit cet axe, et égale au produit de l'une des forces multipliée par la distance qui les sépare. Son sens reste le même. Cette somme s'appelle, pour abrégé, le moment du couple.

2^o. Un couple $(P, -P)$ ne peut avoir une résultante unique (145, 1^o); mais deux couples $(Q, -Q)$ et $(P, -P)$ peuvent être équivalents: il faut et il suffit pour cela que leurs plans soient parallèles et que leurs moments soient égaux et de même sens. En effet, soient les axes Ox et Oy dans le plan du couple $(P, -P)$, l'un suivant la projection de la force Q sur ce plan, l'autre perpendiculaire; et soit un 3^e axe Oz perpendiculaire au plan xOy . On reconnaît aisément que la double condition énoncée est suffisante pour que les six conditions d'équivalence soient réalisées. De plus elle est nécessaire: d'abord la force $-Q$ doit être hors du plan xOz et à la même distance de Oy que la force Q , sans quoi la somme des moments de Q et de $-Q$ autour de Oy ne serait pas nulle comme le sont les moments de P et de $-P$; et en second lieu la force $-Q$ ne rencontrant pas l'axe Ox doit lui être parallèle pour que son moment par rapport à cet axe soit nul comme le sont les moments de $P, -P$ et Q . Le plan de Q et $-Q$ est donc à la fois parallèle à Oy et à Ox . Le reste de la proposition est évident.

3^o. Il s'en suit que quel que soit un couple on peut toujours lui donner pour équivalent un autre couple dont l'une des forces ait une position et un sens quelconques dans un plan parallèle à celui du premier couple, et une intensité prise à volonté.

4^o. Il résulte encore du théorème 2^o, que pour que l'ensemble de deux couples satis-

faute aux conditions d'équilibre, il suffit et il faut que leurs plans soient parallèles et que leurs mouvements soient égaux et de sens contraires.

5° L'axe représentatif du moment résultant d'un couple (149) peut être mené par son point quelconque de l'espace.

6° Autant de couples qu'on voudra peuvent, s'ils ne sont pas en équilibre, se réduire à un seul; car leur résultante de translation étant nulle, il en est de même de celle des deux équivalentes. Tous les couples résultants, c'est-à-dire équivalents à un système de couples, ont un même axe représentatif.

7° Un couple et une troisième force F parallèle au plan du couple équivalent à une force unique égale, parallèle à F et de même sens, mais ayant une autre situation dans le plan mené par F parallèlement au plan primitif du couple. Il suffit pour le voir de remplacer ce couple par un autre (F et $-F$) dont l'une des forces soit égale et directement opposée à F .

8° Un groupe de forces est équivalent à l'ensemble formé de la résultante de translation appliquée en un point quelconque O , et du couple résultant de tous les couples obtenus en combinant chaque force avec son égale, parallèle en sens contraire appliquée au même point O .

152. Cela posé, le théorème du n° 149 et son 4^e corollaire peuvent s'énoncer ainsi:

Théorème: Si l'on remplace un groupe de forces F par sa résultante de translation appliquée en un point O pris à volonté et par des couples formés de toutes les forces F et de leurs égales $-F$, parallèles en sens contraire appliquées en O , la projection orthogonale sur une droite Ox , menée par ce point, de l'axe représentatif du couple résultant est égale à la somme algébrique des moments des forces F autour de cette droite Ox , et cette somme a par conséquent pour maximum, (relativement aux diverses positions de Ox) le moment du couple résultant.

153. **Corollaire.** L'axe représentatif du couple résultant d'autant de couples qu'on voudra, est une droite résultante ou somme géométrique des axes qui, partant d'un même point, représentent leurs couples composants.

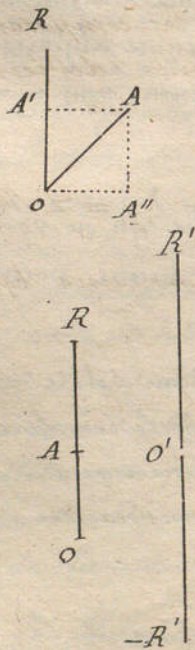
154. — Analogie entre la composition des forces et celle des mouvements d'un système solide. 1° Les couples se composent comme les translations (41). L'axe représentatif du couple résultant et la droite représentant la translation absolue sont la somme géométrique des droites qui représentent les couples composants et les translations composants. Leur situation dans l'espace sont d'ailleurs quelconques.

2° Les forces se composent comme les rotations (42 à 45). Quand les forces et les axes de rotation concourent, la force et l'axe représentatif de la rotation résultante sont la somme géométrique des forces et des rotations composants. Une force F

est équivalente au système formé d'une force égale, parallèle à F , et de même sens, ayant d'ailleurs une situation quelconque dans l'espace, et d'un couple dont la grandeur dépend de la distance des deux forces, mais dont l'axe est toujours perpendiculaire au plan de ces forces; de même une rotation (47) est équivalente à une rotation égale, parallèle et de même sens combinée avec une translation variable avec la distance des axes de rotation, mais toujours perpendiculaire au plan de ces deux axes.

3° Un groupe de forces se réduit à une force toujours la même, résultante de translation passant par un point O choisi à volonté, et à un couple dont le moment et la direction dépendent du choix du point O ; de même un mouvement déterminé d'un solide se réduit de différentes manières à une rotation et à une translation; savoir: une rotation toujours la même et une translation qui dépend, en intensité et en direction, du choix du point du solide dont la vitesse est celle de cette translation.

4° A l'axe central du mouvement d'un corps solide (49) correspond par analogie un axe central des forces passant par les points pour lesquels la force égale à la résultante de translation, et l'axe du couple résultant sont dirigés suivant une même droite. La démonstration de l'existence de cet axe est analogue à celle du N° 49. Soit pour un point O la droite OR représentant la résultante de translation des forces F , et soit OA l'axe représentatif du couple résultant qui correspond à ce point O . Décomposons le couple OA en deux: l'un OA' suivant OR et l'autre OA'' perpendiculaire. Les deux forces du couple représentées par OA'' se composent avec OR en une force unique située dans le plan, parallèle et égale à OR mais ayant une autre situation dans ce plan (151, 7°); cette situation parallèle à l'axe OA' du couple restant est donc celle de l'axe central.



5° L'axe central des forces est celui pour chaque point O duquel le moment résultant ou le couple résultant OA est un minimum; car si l'on choisit un autre point O' pour y transporter deux forces R' et $-R'$ égales et parallèles à la résultante de translation R appliquée en O , les deux forces R et $-R'$ forment un couple dont l'axe est rectangulaire sur OA ; le couple résultant final est donc plus grand que OA . De même l'axe central du mouvement est celui pour chaque point duquel la translation ou la vitesse est un minimum; car tout point hors de cet axe a une vitesse résultante de la translation et de la vitesse de circulation autour de l'axe central, seconde composante rectangulaire sur la première.

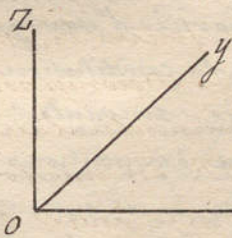
155. - De la théorie des axes. Les moments des forces d'un groupe quel-

conque soit par rapport à un point O soit par rapport à une droite Ox étant proportionnels, les premiers aux aires des triangles qui ont pour bases les droites représentant les forces et pour sommet le point O , les seconds aux projections de ces mêmes triangles sur un plan perpendiculaire à la droite Ox , on comprend qu'on a pu faire une théorie des aires et de leurs projections analogue à celles des moments et des couples. Ce sont trois formes différentes pour un même fond. Nous n'insistons pas sur ce rapprochement qui ne nous est pas actuellement utile.

§ 6. - Expression analytique des six équations d'équilibre ou d'équivalence d'un système de forces rapportées à trois axes.

156 Les quantités $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_{Ox} F, \Sigma M_{Oy} F, \Sigma M_{Oz} F$

sont exprimées par $\Sigma X, \Sigma Y, \Sigma Z, \Sigma (Zy - Yz), \Sigma (Xz - Zx), \Sigma (Yx - Xy)$



x, y, z étant les coordonnées d'un point quelconque d'une force F dont les composantes parallèles aux trois axes sont X, Y, Z et le sens positif des moments répondant aux rotations allant de Ox vers Oy , de Oy vers Oz et de Oz vers Ox .

157. - Dans le cas d'une résultante unique dont X_1, Y_1, Z_1 sont les composantes et dont un point a pour coordonnées x_1, y_1 et z_1 , les équations d'équivalence deviennent

$$X_1 = \Sigma F_x, \quad Y_1 = \Sigma F_y, \quad Z_1 = \Sigma F_z$$

$$Z_1 y_1 - Y_1 z_1 = \Sigma M_{Ox} F, \quad X_1 z_1 - Z_1 x_1 = \Sigma M_{Oy} F, \quad Y_1 x_1 - X_1 y_1 = \Sigma M_{Oz} F$$

ces trois dernières équations expriment une droite et donnent lieu à une équation de condition facile à énoncer en langage ordinaire.

$$(\Sigma M_{Ox} F) \Sigma F_x + (\Sigma M_{Oy} F) \Sigma F_y + (\Sigma M_{Oz} F) \Sigma F_z = 0.$$

Chapitre 3. - application de la Statique générale à quelques cas particuliers.

§1. - De l'équilibre des systèmes pesants.

158. - Du centre de gravité. - On a vu (124) que dans les questions de mécanique ordinaire on a égard à la pesanteur en considérant chaque élément matériel comme sollicité par la force verticale appelée son poids, proportionnelle à sa masse et exprimée par mg . Toutes les forces de ce genre appliquées à un système quelconque ont une résultante égale à leur somme et passant nécessairement par un point appelé par cette raison centre de gravité qui ne dépend que des rapports des masses élémentaires et de leurs distances respectives, et nullement de la direction des forces parallèles dont il s'agit. C'est une conséquence de la théorie de la composition et du centre des forces parallèles qu'il n'est pas nécessaire de reproduire ici.

• Nous remarquons seulement que l'existence du centre de gravité d'un système matériel, quelle que soient son état de repos ou de mouvement, sa constitution physique et les forces qui le sollicitent résulte de la proposition de géométrie suivante :

Un système de points géométriques occupant à un instant quelconque des positions déterminées, si l'on affecte à chacun de ces points un nombre quelconque, il existe à cet instant un point géométrique tellement situé que le produit de sa distance à un plan quelconque par la somme des nombres assignés à tous les points est égal à la somme de produits partiels de la distance (positive ou négative) de chaque point au même plan multipliée par le nombre propre à ce point.

Si les points sont les éléments d'un système matériel, et si les nombres qui leur sont assignés sont proportionnels à leurs masses, le point qui vient d'être défini est le centre de gravité (il vaudrait mieux dire le centre de masse) du système. Si X est la distance de ce point à un plan de comparaison, tandis que l'élément de masse m est à la distance x , on a les formules

$$X \sum m = \sum mx, \quad \frac{dX}{dt} \sum m = \sum m \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2X}{dt^2} \sum m = \sum m \frac{d^2x}{dt^2};$$

donc, d'après le n° $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\sum Px}{\sum m}$; d'où l'on conclut:

Théorème. Le centre de gravité d'un système matériel quelconque se meut comme un point qui résisterait à lui seul la masse $\sum m$ du système et qui serait sollicité par les forces extérieures transportées parallèlement à elles mêmes.

Cette proposition très-remarquable étend au centre de gravité d'un système matériel quelconque le principe de l'inertie d'abord spécial à un point matériel.

159. - Les équations d'équilibre $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$, ont donc pour conséquence l'immobilité ou le mouvement rectiligne uniforme du centre de gravité du système.

160. - La recherche des centres de gravité des corps, des surfaces ou des lignes se réduit à des questions de géométrie ou d'analyse qui n'appartiennent pas à ce cours. On les détermine aussi expérimentalement par des procédés fondés sur ce que dans un corps en équilibre sous l'action de la pesanteur, la résultante des forces étrangères à cette cause passe par le centre de gravité.

161. - Propriétés générales de l'équilibre des corps ou systèmes pesants supposés sans frottement.

Elles sont la conséquence d'un théorème général: Le travail des forces dues à la pesanteur dans un système quelconque, solide ou déformable, subissant un déplacement aussi quelconque, est égal au poids total du système multiplié par la hauteur dont le centre de gravité du système s'est abaissé, hauteur prise négativement si ce centre s'est effectivement élevé. Cela résulte de la définition du travail (108) et de la propriété fondamentale du centre de gravité. p poids d'un élément du système, z sa distance variable au-dessous d'un plan horizontal fixe; on a

$$d\mathcal{E}p = p dz; \mathcal{E}p = \int_{z_0}^z p dz = pz - pz_0; \sum \mathcal{E}p = \sum pz - \sum pz_0 = P(Z_1 - Z_0)$$

Cela posé, imaginons une machine ou un système de corps liés par des articulations ou autrement et appuyés à des corps fixes de manière que certains mouvements soient possibles. Dans la réalité, de pareils mouvements sont toujours accompagnés d'un travail de frottements ou plus généralement du travail des actions mutuelles des éléments du système et de celui des réactions des appuis. Le travail des actions mutuelles peut être positif, dans le cas, par exemple, où des ressorts faisant partie du système ont été préalablement écartés de leur position naturelle au repos. Mais si l'on suppose que cette circonstance exceptionnelle n'ait pas lieu, et si l'on considère un système de corps soumis aux seules forces extérieures résultant de la pesanteur et des réactions des appuis, on peut étudier les conditions de son équilibre d'abord sous un point de vue purement théorique en supposant que dans tous les mouvements possibles du système les actions intérieures mutuelles aux articulations ou ailleurs fassent une somme de travail nulle, et que les réactions des appuis étant normales aux surfaces de contact, ne fassent aucun travail. Or, pour qu'un tel système soit en équilibre dans une position déterminée, il faut et il suffit que dans tous les mouvements effectifs que permet à partir de cette position la liaison des corps qui le composent le centre de gravité ne puisse pas commencer à se mouvoir en descendant. Cette condition est nécessaire car le système étant en équilibre, les forces qui le sollicitent, savoir: les poids de ces éléments et les réactions qu'il reçoit des appuis satisfont au théorème du travail virtuel pour tout mouvement possible (136.) sans égard aux forces intérieures dont le travail est toujours nul par hypothèse. Si dans ce mouvement le système reste partout en contact avec

des appuis, le travail des réactions est nul; celui de la pesanteur l'est donc aussi, le centre de gravité se meut alors horizontalement. Si au contraire dans le mouvement virtuel on suppose que le système puisse quitter un ou plusieurs de ses appuis, la somme de travail virtuel doit encore rester nulle mais en supposant que les réactions des appuis accompagnent leurs points d'application dans ce déplacement idéal. Mais les réactions des appuis étant répulsives font dans ce cas un travail positif; donc le travail de la pesanteur est négatif, et par conséquent le centre de gravité s'élève. Donc en aucun cas possible de mouvement effectif il ne commence à descendre. Cette condition est suffisante, car si le système d'abord en repos se mettait en mouvement, il acquerrait une certaine puissance vive, ce qui est impossible puisque le travail effectif total serait nul pour les forces intérieures et pour les réactions des appuis; et ne pourrait être que nul ou négatif pour la force due à la pesanteur (108).

162. - Équilibre stable. La condition que le centre de gravité ne puisse descendre est remplie lorsque ce point occupe une position plus basse que toutes les positions voisines qu'il peut prendre. Si par une cause quelconque le système se trouve tant soit peu déplacé et abandonné ensuite sans vitesse à l'action de la pesanteur, le centre de gravité ne pouvant s'élever tend à revenir à sa position primitive. L'équilibre existant avant le déplacement est un équilibre stable dont on peut distinguer deux espèces: la première a lieu lorsque, pour des déplacements infiniment petits des points du système, le centre de gravité ne s'élève que d'un infiniment petit du second ordre. Exemples: un pendule; un cylindre circulaire non homogène pouvant rouler sur un plan horizontal; la moindre force suffit pour écarter le corps de sa position précédente d'équilibre; mais si cette force cesse il y revient par de petites oscillations; l'équilibre peut dans ce cas être dit oscillant. La seconde espèce d'équilibre stable a lieu lorsque le déplacement du centre de gravité qui s'élève est du même ordre que celui des points qui se déplacent le plus dans le système; exemple: un prisme qui repose sur un plan horizontal par une base dans l'intérieur de laquelle passe la verticale du centre de gravité. Dans l'exemple qui vient d'être cité, on peut demander quelle serait la force autre que le poids du prisme qui détruirait l'équilibre en faisant tourner le solide autour d'un des côtés du polygone de base; et c'est évidemment (en supposant le corps et son appui parfaitement rigides) une force dont le moment par rapport à ce côté serait supérieur à celui du poids du prisme appliqué au centre de gravité; c'est pourquoi le plus petit des moments de ce poids relativement aux divers côtés de la base s'appelle le moment de stabilité du corps dont il s'agit.

163. - Équilibre instable. La condition d'équilibre est encore remplie lorsque le centre de gravité ne peut se mouvoir qu'en décrivant au-dessous d'un plan horizontal une combe tangente à ce plan. Dans ce cas, l'équilibre mathématique existe encore; mais si le système subit le moindre déplacement par des forces additionnelles et qu'il soit ensuite abandonné, même sans vitesse, à la pesanteur, le centre de gravité ne pouvant s'élever ne peut revenir à sa position primitive et s'en écarte au contraire davantage. Cet équi-

libre est dit instable ou instaurané.

164. — Équilibre indifférent. — Enfin il peut arriver, que dans tous les mouvements du système, à partir d'une certaine position, le centre de gravité reste dans un même plan horizontal: l'équilibre est dit alors indifférent parce qu'il subsiste malgré un déplacement du système.

165. — Une machine composée de pièces tournantes exactement centrées est dans ce dernier cas. Sous l'action de forces autres que le poids de la machine, celle-ci reste en repos ou continue un mouvement uniforme si le travail total de ces forces est constamment nul. Au contraire si ce travail est tantôt moteur tantôt résistant, l'excentricité de certaines pièces de la machine peut être utile pour maintenir l'uniformité au moins approximative du mouvement.

§ 2. — Statique des systèmes funiculaires et articulés.

166. — Nous venons de considérer des corps solides liés entre eux sans frottement, hypothèse qui se réalise avec une exactitude presque complète quand cette liaison est opérée par des articulations à couteaux, si les parties en contact sont très-peu compressibles sous les efforts qu'elles subissent. Nous reviendrons bientôt sur les conditions de la stabilité des corps solides en égard au frottement et à la résistance limitée qu'ils opposent aux forces qui tendent à les rompre. Mais auparavant nous allons encore étudier des cas d'équilibre où le frottement peut ou doit être négligé, c'est celui des systèmes composés de fils ou de cordes, et appelé systèmes funiculaires et celui des systèmes polygonaux de corps solides articulés.

167. — Systèmes funiculaires. On suppose ici les cordes parfaitement flexibles, ce qui revient à les considérer comme formées d'une suite de points matériels dont chacun peut se mouvoir sans frottement autour des deux voisins auxquels il adhère d'ailleurs de manière à ne pouvoir être séparé. On fait souvent abstraction du poids des cordes lorsqu'il est très-petit par rapport aux autres forces qui les sollicitent. Si CD est une telle corde ou simplement une portion de corde dont les points extrêmes C, D , soient seuls sollicités par des forces F, F' extérieures, il faut pour l'équilibre que ces deux forces soient égales et opposées comme s'il s'agissait d'un corps solide. Mais en outre elles doivent tendre à écarter et non à rapprocher les deux points extrêmes; et la corde, en vertu de sa parfaite flexibilité, se met en ligne droite dans le prolongement des deux forces.

Le fil CD se trouvant dans cet état, si on le partage par la pensée au point E , l'action mutuelle qui a lieu entre les molécules extrêmes de CE d'une part et de ED de l'autre est attractive et égale à chacune des forces F, F' ; car la condition

d'équilibre sont les mêmes pour chacune des subdivisions CE , ED du fil CD que pour ce fil entier. L'intensité de cette action mutuelle s'appelle la tension de la corde ou fil au point E .

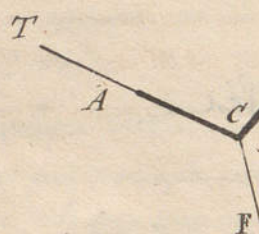
Si le poids de la corde devait être pris en considération, la tension serait variable. Exemple: un fil pesant vertical supportant un corps pesant à son extrémité inférieure.

168. — Une corde ou portion de corde ACB étant sollicitée par trois forces extérieures dont deux T, T' agissent aux extrémités A, B et une autre F en un point intermédiaire C , il faut, pour l'équilibre:

1.° — Que les forces T, T' agissent suivant les prolongements des cordons rectilignes CA, CB , dont elles expriment les tensions;

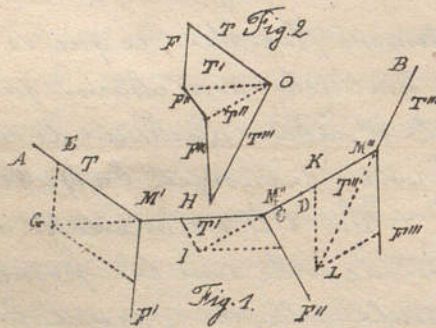
2.° — Que les forces F, T, T' satisfaisant aux conditions d'équilibre soient dans un même plan, et aient les relations

$$\frac{T}{\sin(F, T')} = \frac{T'}{\sin(F, T)} = \frac{F}{\sin(T, T')}$$



Si l'angle (T, T') approche beaucoup de deux droits, et que les sinus des deux autres ne soient pas très-petits, la tension T est très-grande par rapport à F . En pratique elle ne peut excéder la résistance de la corde à la rupture.

169. — Equilibre du polygone funiculaire. — Soient T, F', F'', F''', T'''' les forces extérieures appliquées aux points A, M', M'', M''', B d'une corde formant un contour polygonal quelconque. Les six conditions d'équilibre nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système solide sont ici insuffisantes, mais restent nécessaires, comme elles le sont pour un système quelconque.



Ces six conditions signifient que la résultante de translation est nulle, et cette propriété peut ici aisément se démontrer à priori.

En général la tension d'une portion rectiligne CD du fil est la même que si en C on transportait parallèlement à elle mêmes les forces T, F', F'' qui agissent depuis l'extrémité A jusqu'en C , ou si l'on transportait en D les autres forces.

170. — La figure d'un polygone funiculaire et les directions des forces appliquées à ses divers sommets déterminent nécessairement les rapports de ces forces entre elles et avec les tensions intérieures ou intermédiaires T', T'' .

C'est ce que rend évident la fig. 1 ci-contre dans laquelle les forces $T, F', T', F'', T'', F''', T''''$ sont représentées par les droites $M'E, E'G, M'G = M''H, HI, M''I = M''K, KL, M''L$.

171. — Remarque. Si l'on transporte parallèlement à eux-mêmes les triangles $M'E'G,$

$M''HI$, $M''KL$ pour en former le polygone de la figure 2, on voit que les côtés extérieurs de ce polygone sont parallèles et proportionnels aux forces extérieures F' , F'' , F''' , T' , T'' , T''' du polygone funiculaire, et que ses diagonales sont parallèles et proportionnelles aux tensions intérieures. Ce théorème dû à Varignon est d'ailleurs la conséquence de ce que si des forces T , F' , F'' ont leur résultante de translation nulle, et que d'un point O quelconque on fasse partir un contour polygonal dont les côtés soient proportionnels et parallèles en même sens à ces forces, ce polygone est fermé et ses diagonales partant du même point O , représentent les résultantes de T et F' , de T , F' et F'' , &c.

On voit que le polygone funiculaire $AM''M''M'''B$ restant le même, les forces F' , F'' , F''' peuvent changer d'une infinité de manières en intensité et en direction et par suite faire varier les intensités des tensions.

172. - Problème. - Si l'on se donne: 1° L'extrémité A , 2° L'intensité et la direction de la tension T du premier cordon AM' , 3° celles des forces F' , F'' , F''' , 4° les longueurs $AM' = l$, $M'M'' = l'$, $M''M''' = l''$, $M'''B = l'''$, on en conclura la figure du polygone, sa position dans l'espace et par conséquent les tensions T' , T'' , T''' .

Solution graphique: On construira la fig. 2, puis la fig. 1.

Solution analytique: Prenant trois axes rectangulaires partant de A , et comptant les tensions T , T' , T'' comme allant dans le sens $AM'M''M'''B$, proposons nous de déterminer les coordonnées d'un point, M''' par exemple du polygone.

La figure 2 ou la nullité de la résultante de translation pour une portion quelconque du système donnent les six premières équations ci-après; le reste se voit aisément:

$$T'_x - T_x + F'_x = 0, \quad T''_x - T_x + F'_x + F''_x = 0, \quad l \frac{T_x}{T} + l' \frac{T'_x}{T'} + l'' \frac{T''_x}{T''} = x'''$$

$$T'_y - T_y + F'_y = 0, \quad T''_y - T_y + F'_y + F''_y = 0, \quad l \frac{T_y}{T} + l' \frac{T'_y}{T'} + l'' \frac{T''_y}{T''} = y'''$$

$$T'_z - T_z + F'_z = 0, \quad T''_z - T_z + F'_z + F''_z = 0, \quad l \frac{T_z}{T} + l' \frac{T'_z}{T'} + l'' \frac{T''_z}{T''} = z'''$$

$$T' = \sqrt{(T'_x - F'_x)^2 + (T'_y - F'_y)^2 + (T'_z - F'_z)^2}, \quad T'' = \sqrt{(T''_x - F'_x - F''_x)^2 + (T''_y - F'_y - F''_y)^2 + (T''_z - F'_z - F''_z)^2}$$

On a ainsi autant d'équations que d'inconnues T'_x, T'_y, T'_z, T' ; T''_x, T''_y, T''_z, T'' ; x''', y''', z''' .

La résolution en est très-facile.

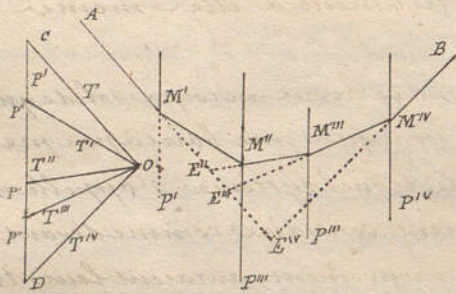
173. - Si l'on se donne: 1° Deux points A , M''' du polygone; 2° les longueurs l , l' , l'' des côtés intermédiaires; 3° les intensités et directions des forces F' , F'' ; on peut se proposer de trouver les tensions et par conséquent la figure du polygone.

Une équation précédente on joindrait $T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$; on aurait ainsi autant d'équations que d'inconnues T, T_x, T_y, T_z ; T', T'_x, T'_y, T'_z ; T'', T''_x, T''_y, T''_z . On obtiendrait les expressions des trois coordonnées connues x''', y''', z''' en fonction des inconnues T_x, T_y, T_z . Le problème serait donc ramené à la résolution de trois équations.

174. - Cas particulier du polygone funiculaire. Lorsque les forces $F', F'' \dots$, appliquées aux divers sommets du polygone (ce qui ne comprend pas les deux forces T, T_n appliquées aux points extrêmes A, B) sont toutes parallèles, il en résulte, comme on le voit aisément:

- 1° Que le polygone est dans un plan contenant les directions des forces;
- 2° Que les projections orthogonales de toutes les tensions, sur une axe perpendiculaire aux forces F sont égales entre elles;
- 3° Que la somme algébrique des projections orthogonales sur un axe parallèle aux forces F , de deux tensions quelconques prise dans le sens qui tend à allonger le fil intermédiaire, est égale et de sens opposé à la somme des forces F parallèles intermédiaires.
- 4° Que si les forces parallèles sont les poids de corps suspendus aux sommets du polygone, deux côtés quelconques se coupent sur la verticale passant par le centre de gravité de l'ensemble des poids intermédiaires.

175. - De là un procédé graphique pour résoudre cette question: Étant données les verticales, qui, dans un même plan, passent par les centres de gravité de poids connus, P', P'', P''', P'''' , trouver les verticales des centres de gravité de l'ensemble de deux, de trois \dots de ces corps pris consécutivement. D'après la remarque (N° 171) sur une verticale CD on porte à la suite les uns des autres des longueurs proportionnelles aux poids P', P'', P''', P'''' . On joint les deux points extrêmes et les points de division à un point O pris arbitrairement, par des droites qui sont parallèles aux tensions et par conséquent



aux côtés d'un polygone que l'on construit en en mettant les sommets M', M'', M''', M'''' sur la verticale donnée. Le point E'' , intersection des côtés $AM', M''M'''$, est sur la verticale du centre de gravité commun de P' et P'' ; les points E''', E'''' , intersections de AM' et de $M''M''', M''''M''''$ sont sur les verticales des centres des systèmes (P', P'', P''') , (P', P'', P''', P'''') . On comprend que ce procédé déterminant des points par les intersections de droites prolongées est peu susceptible de précision, et qu'un calcul même approximatif doit être souvent préférable.

176. - Statique des corps solides articulés sans frottement. Imaginons que plusieurs corps solides se touchent par des points qui ne peuvent se séparer, aucun frottement, aucun obstacle ne s'opposant d'ailleurs aux mouvements de rotation compatibles avec cette condition. On peut se figurer chaque articulation comme produite par l'assemblage dit genou consistant en une petite sphère adhérente à l'un des corps et enveloppée d'une portion de sphère creuse tenant à l'autre corps. L'assemblage dit charnière ne permet la rotation que perpendiculairement à l'axe, et ne laisserait pas toute la liberté de mouve-

ment supposée ici.

Il s'agit d'étudier les conditions d'équilibre d'un tel système. Cette étude trouvera son application dans les systèmes tels que ceux des pièces de charpente dont il convient que la stabilité soit indépendante de la solidité des assemblages.

177. - Corps assujéti par une seule articulation. Levier. Considérons le cas simple d'un corps solide assemblé avec un autre par une seule articulation, au point A qui s'appelle point d'appui. Ce corps est sollicité par des forces extérieures F_1, F_2, \dots qui agissent en dehors de l'articulation. Ce même corps reçoit en outre, de celui avec lequel il est articulé, une force N que nous appellerons la réaction du point d'appui, et qui est encore, relativement au premier corps considéré, une force extérieure.

Les forces F et la force N, constituant toutes les forces extérieures, doivent, dans le cas de l'équilibre, satisfaire aux six équations générales de la statique. Crois de ces équations, celles des moments, peuvent être indépendantes de la réaction N; il suffit pour cela de choisir les axes des moments passant par le point d'appui A. Ces trois équations reviennent à dire que les forces F ont une résultante qui passe par le point d'appui. La réaction N est égale et opposée à cette résultante dont on obtient d'ailleurs l'intensité et la direction en transportant les forces F parallèlement à elles mêmes au point A.

Dans les traités de statique, on donne en général le nom de levier au corps solide que nous venons de considérer. Les praticiens n'appliquent ce nom qu'à une barre peu près droite, ou à un système solide de deux barres formant un angle, lequel système s'appelle un levier courbé. Dans les applications, un levier est ordinairement considéré comme devant se mouvoir dans un certain sens. Les forces qui, dans ce mouvement, auraient leur travail positif sont, à ce point de vue, les forces mouvantes; celles dont le travail serait négatif sont les forces résistantes ou les résistances. Lorsqu'il n'y a qu'une force de chaque espèce, la force mouvante s'appelle communément la puissance, et l'on dit que la puissance est à la résistance ou raison inverse de leurs bras de levier. Il paraît préférable de réserver le mot puissance pour désigner une capacité de travail qui s'exprime en kilogrammètres et non une simple force qui s'exprime en kilogrammes.

178. - Corps assujéti par deux articulations. Ce corps sollicité par des forces extérieures F_1, F_2, F_3, \dots reçoit en outre des corps voisins des réactions N, N' passant par les centres A A' de deux articulations. Les six conditions d'équilibre sont remplies par l'ensemble de ces forces, et sont suffisantes s'il s'agit d'un corps solide. L'une de ces conditions peut être rendue indépendante des réactions N, N': c'est l'équation des moments des forces F par rapport à l'axe AA'. Elle revient à dire que ces forces F_1, F_2, F_3, \dots peuvent se réduire à deux équivalents passant l'un par A, l'autre par A'. Quatre des cinq autres équations déterminent les composantes rectangulaires normales à AA', des forces N et N', l'autre fait connaître seulement la somme algébrique des autres composantes ou projections de ces

deux forces sur le même axe. Exemple: Un corps soutenu par les deux pointes d'un tonne.

179. - Deux corps AM et MM' liés entre eux par l'articulation mobile M et pouvant tourner autour des deux points fixes A et M' sont sollicités respectivement (indépendamment de leurs pressions mutuelles en M et des réactions des appuis A et M') par des forces dont les résultantes F et F' passent aux points N et N' . On demande la condition de l'équilibre du système et les intensités et directions des pressions en M , A et M' qu'il importe de connaître pour s'assurer ensuite si les deux pièces du système peuvent résister aux efforts qu'elles reçoivent.

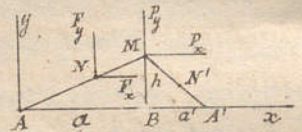
Soient dans le plan AMA' deux axes rectangulaires $AA'x$ et Ay et imaginons une troisième axe Az projeté en A . Soient $F_x, F_y, F_z; F'_x, F'_y, F'_z$ les composantes des forces F et F' parallèles à ces axes. Exprimons par P la pression que le corps MA' exerce en M sur l'autre corps AM ; soient P_x, P_y, P_z les composantes qu'il faut trouver. Soient les distances $MB = h, AB = a, BA' = a'$, et soient les

$$\text{rapports } \frac{AN}{AM} = n, \frac{AN'}{AM'} = n'.$$

Nous poserons successivement les équations d'équilibre de AM et de MA' , et d'abord pour AM afin de ne pas introduire la pression inconnue en A , nous prendrons les moments par rapport aux axes passant par ce point A . Par rapport à Ax et à Ay on obtient une seule et même équation (parce que N est sur la droite AM) savoir

$$n F_z + P_z = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{et par rapport à } Az \dots n a F_y - n b F_x + a P_y - b P_x = 0 \dots \dots \dots (2)$$



De même l'équilibre de MA' en prenant les moments par rapport à trois axes passant par A' et en remarquant que MA' reçoit en M du corps AM une force égale et opposée à P (128) on a

$$n' F'_z - P_z = 0 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{et } n'a' F'_y + n'b F'_x - a' P_y - b P_x = 0 \dots \dots \dots (4)$$

Les équations (1) et (3) donnent la condition facile à prévoir $n F_z + n' F'_z = 0$ et la valeur de P_z . Les équations (2) et (3) donnent les deux inconnues P_x, P_y .

Quant aux pressions en A et A' , elles sont données en fonction de P , de F et de F' par l'équilibre de translation de AM et de MA' considérées séparément.

180. - Équilibre des systèmes polygonaux de corps solides à articulations simples.

Ces corps, dont chacun entouche deux autres, sont liés par des articulations $M', M'', M''', \dots, M^{(n)}$; les deux corps extrêmes sont articulés à deux points fixes A, B . Les $n + 1$ corps sont sollicités par des forces extérieures dont les résultantes $F', F'', \dots, F^{(n)}$ Spécialement pour chaque corps rencontre chacune la droite passant par les deux articulations du corps auquel elle appartient. On demande de vérifier si l'é

l'équilibre existe, et, dans le cas de l'affirmative, de trouver les pressions mutuelles en $M', M'' \dots$ et celles des appuis.

On vérifiera, comme au Numéro précédent, l'équilibre du système de deux corps contigus $AM', M'M''$, et l'on déterminera la pression P'' que $M'M''$ exerce en M'' sur son voisin $M'M''$. On vérifiera l'équilibre de celui-ci en s'assurant, soit par la composition, soit par les moments, que la résultante de P'' et de F''' passe au point M''' . S'il en est ainsi, la résultante de P'' et de F''' sera la pression en M'' du corps $M''M'''$ sur le suivant. Ainsi de suite.

181. — Le même équilibre ramené à celui d'un polygone funiculaire. Chaque corps solide étant en équilibre, on peut, sans changer cet état, substituer aux forces F qui le sollicitent hors des articulations deux équivalentes passant par ces deux points. Cette modification des forces extérieures faite pour tous les corps solides du système le transforme en un assemblage de corps rigides qui ne seraient soumis à aucune force, excepté en leurs points d'articulation. Dès lors la figure et la masse de chaque corps deviennent indifférentes dans les conditions d'équilibre du système qu'on peut considérer comme une sorte de polygone funiculaire, dont les côtés articulés aux sommets et aux appuis, sont rigides et peuvent être pressés longitudinalement. Cette transformation, qui peut se faire d'une infinité de manières (147) peut être employée pour vérifier ou obtenir les conditions de l'équilibre du système; mais il importe de remarquer que les tensions ou pressions longitudinales qu'on obtient alors ne sont pas les forces qui s'exercent réellement dans ce sens sur les corps composant le système.

Si par exemple le corps AM articulé en A et en M avec les deux corps voisins étant sollicité hors des articulations par diverses forces dont la résultante est F , on a remplacé cette dernière force par deux composantes F_1 et F_2 passant en A et en M , et s'il en est résulté entre A et M une tension T , il faut en conclure que les deux forces F_2 et T appliquées au dernier point M du corps AM sont équilibrées à la force P que le corps suivant, $M'M'$, exerce réellement sur AM au point de leur articulation commune M . C'est ainsi qu'au moyen des forces fictives F_2 et T on peut trouver la force effective P .

182. — Changement de sens des forces. Il est clair que si l'on vient à changer le sens des forces appliquées à un système de corps articulés, l'équilibre subsistera: les pressions mutuelles seront changées en tensions et réciproquement.

183. — Cas particulier remarquable. Si les corps solides formant un système articulé polygonal sont soumis à des forces verticales dont la résultante, pour chaque corps, passe à égale distance de ses deux centres d'articulation, et si, de plus, ces résultantes sont proportionnelles aux projections horizontales des droites joignant les articulations consécutives, la condition d'équilibre du système s'exprime alors d'une manière fort simple.

Par la première articulation A , soient dans le plan du polygone deux axes: Ax

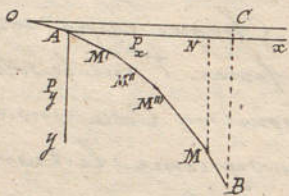
2^e Division.

Cours de Méc. et Mach. - 18^e Feuille.

horizontal et Ay vertical. Soient x et y les coordonnées AN , NM de l'articulation quelconque M ; soit p le poids par mètre de projection horizontale du polygone; soient P_x et P_y les composantes verticale et horizontale de la réaction de l'appui A . L'équilibre de la partie AM du système dont les côtés ont des longueurs quelconques, exige que l'on ait, en prenant les moments par rapport à M ,

$$P_x y - P_y x - \frac{1}{2} p x^2 = 0.$$

Cette équation ayant lieu quel que soit le point d'articulation M , les quantités P_x , P_y et p restant constantes, tous les points A , M , M' , M'' , ... sont donc sur une parabole du second degré dont l'axe principal est vertical. Si l'on se donne p et trois points de la courbe en prenant un des points pour origine on en conclura la poussée horizontale P_x et la charge verticale P_y . Si l'on transporte l'origine en une autre articulation, l'équation conserve sa forme, le coefficient de l'ordonnée y reste le même, la poussée horizontale reste donc constante comme il était aisé de le voir (). La charge verticale P_y varie, ce qui doit être puisque la somme des charges verticales en deux articulations est égale au poids P multiplié par la distance horizontale des deux points considérés.



Trois points suffisent pour déterminer la parabole sur laquelle sont les sommets du polygone. Il suffit aussi d'en connaître le sommet O et les coordonnées $l = OC$, $h = CB$ d'un autre point B relativement à l'horizontale et à la verticale de O . On a alors pour l'équation de la courbe (équation de moments), dans laquelle nous désignerons par T_x la poussée horizontale constante,

$$T_x y = \frac{1}{2} p x^2 \quad \text{d'où} \quad T_x = \frac{p l^2}{2 h}.$$

De plus, d'après la remarque précédente, la composante verticale T_y de l'action mutuelle au point du polygone dont l'abscisse est x a pour valeur

$$T_y = p x$$

donc

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \frac{p l^2}{2 h} \sqrt{1 + \frac{4 h^2 x^2}{l^2}}$$

quantité qui par $x = l$ devient

$$T_B = \frac{p l^2}{2 h} \sqrt{1 + 4 \frac{h^2}{l^2}}$$

L'angle de la force T avec l'axe des x a pour tangente $\frac{T_y}{T_x} = \frac{y}{\frac{1}{2} x}$; sa direction est donc celle de la tangente à la parabole des sommets du polygone.

184. - Application aux ponts suspendus. D'après les numéros 181 et 182, la condition qui assujettit les sommets à être sur une parabole a lieu

Soit pour un polygone funiculaire sans pesanteur portant en ses divers sommets des charges verticales représentées proportionnellement chacune par la distance horizontale des milieux des deux côtés adjacents, ceux-ci ayant d'ailleurs des longueurs quelconques;

Soit pour un système polygonal pesant dont les sommets porteraient ces charges verticales et dont les côtés solides auraient en outre des poids proportionnels à leurs projections horizontales.

Ce dernier cas est à peu près celui des ponts suspendus. La théorie et les formules du N° 183 s'y appliquent.

§ 3 Résistance d'un prisme sous l'action d'une charge longitudinale.

185. - Extension d'une tige prismatique par une charge uniformément répartie. Cette tige soumise suivant son axe de figure à une traction longitudinale qu'on fait croître lentement, afin que ni la tige ni la charge ne prennent une vitesse sensible, s'allonge d'une quantité qui croît avec l'intensité de l'effort. Si la charge diminue ensuite, la tige reprend une moindre longueur. En certains cas, la tige qui a été allongée, conserve, quand la charge est supprimée, un allongement, fraction ordinairement petite de l'allongement total; de sorte celui-ci se compose de deux parties, l'une dite l'allongement permanent et l'autre appelée l'allongement élastique.

Depuis après longtemps des expériences ont été faites sur ce sujet, en ce qui concerne le fer forgé. Les plus récentes et les plus complètes paraissent être celles de M. E. Hodgkinson, savant physicien anglais, citée par M. le général Morin dans ses leçons de Mécanique pratique sur la résistance des matériaux. Nous empruntons à cet ouvrage les faits consignés ci-contre, en en concluant les nombres écrits dans les colonnes 5 et 7.

187. - Conséquences de ces expériences. 1° Jusqu'à la charge de 13^{kg} par mm. q. l'allongement total est à très-peu près proportionnel à la charge. Si l'on désigne par

F l'effort qu'exerce la charge et par conséquent la réaction de la tige en Kg,

Ω l'aire de la section transversale de la tige, en m. q.,

L la longueur de la tige sans charge, en mètres,

l l'allongement total produit par la charge F , en fraction de mètre,

i le rapport $\frac{l}{L}$, allongement par mètre de longueur primitive.

E un nombre de Kg. appelé coefficient d'élasticité.

Expérience de M. Hodgkinson sur une tige de fer forgé de la meilleure qualité, de 15^m
de longueur totale et de 0^m 01313 de diamètre moyen.

1	2	3 4 5			6 7	
		Allongement en millimètres par mètre.			Quotient de la charge par l'allong.	
Charges par mm. q. en kg.	Nombre proportionnelle aux charges.	Total.	Permanent.	Elastique.	Total.	Elastique.
1,874	1	0,0821	"	"	22,82	"
3,749	2	0,1853	"	"	20,23	"
5,624	3	0,2837	0,0025	0,2812	19,82	20,00
7,495	4	0,3795	0,0034	0,3761	19,75	19,93
9,374	5	0,4751	0,0042	0,4709	19,73	19,91
11,248	6	0,5708	0,0051	0,5657	19,71	19,88
13,123	7	0,6656	0,0068	0,6588	19,71	19,92
14,997	8	0,7603	0,0107	0,7502	19,32	19,99
16,872	9	0,8733	0,0330	0,8403	19,32	20,08
18,746	10	1,0129	0,0830	0,9299	18,40	20,15
20,636	11	1,2834	0,2617	1,0217	16,08	20,20
22,496	12	2,3598	1,1298	1,2300	9,53	18,14
24,037	12,8	4,2872	3,0710	1,2162	5,61	19,76
26,246	14	9,9510	8,4691	1,4819	2,87	17,70
28,120	15	10,4928	8,5749	1,9179	2,68	15,34
après 1 heure.	"	11,7503	"	"	"	"
2	"	11,8589	"	"	"	"
3	"	11,9338	"	"	"	"
4	"	11,9422	"	"	"	"
5	"	11,9588	"	"	"	"
6	"	11,9671	"	"	"	"
7	"	12,0271	"	"	"	"
8	"	12,0270	"	"	"	"
9	"	12,0271	"	"	"	"
10	"	12,0271	"	"	"	"
29,995	16	17,8883	16,5145	1,3738	1,68	21,83
31,870	17	21,4859	19,7954	1,6905	1,48	18,85
33,744	18	24,7744	22,7087	2,0657	1,36	16,34
35,619	19	34,9354	32,8201	2,1153	1,02	16,96
37,454	20	"	"	"	"	"

On a très approximativement, jusqu'à la limite indiquée

$$F = E \Omega \frac{l}{L} = E \Omega i$$

en prenant

$$E = 19,80 \times 10^9$$

2° Bien au-delà de la limite de 13 kg. par mm. q. et presque jusqu'à la tension qui précède immédiatement la rupture, l'allongement élastique est à fort peu près proportionnel à la charge de sorte que la formule précédente $F = E \Omega i$ reste vraie en désignant par i l'allongement élastique et en conservant à E une valeur d'environ 20×10^9 , quelque peu supérieure à celle qui convient quand i désigne l'allongement total sous une charge moindre que 14 kg. par mm. q.

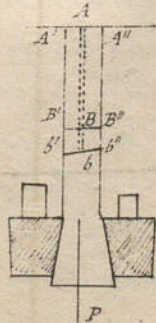
Si, comme cela est probable, une tige après avoir subi, par l'effet d'une certaine charge, un allongement permanent constaté par la suppression momentanée de cette charge, reprend la même longueur totale par la nouvelle application de la même charge, celle-ci ou toute charge moindre ne produit donc plus qu'un allongement élastique, et la tige à partir de l'état d'allongement permanent qu'elle a reçu paraît devoir être considérée comme parfaitement élastique jusqu'à la limite de la plus grande charge subie auparavant.

188. — Limite pratique de la tension du fer. L'administration des travaux publics exige que les dimensions transversales des chaînes ou des câbles de suspension des ponts suspendus soient calculées de manière qu'au moment de l'épreuve qui ajoute au poids du pont une charge de 200 kg. par m. q. de plancher, la tension n'exécède par pour le fer en barre le tiers et pour les fils de fer le quart de celle qui provoquerait la rupture, ce qui revient à environ 12 kg. par mm. q. pour les barres et 18 kg. par mm. q. pour les fils. La tension des fers lorsque le pont n'est pas chargé est à peu près moitié de ce qu'elle est pendant l'épreuve.

189. — Fonte de fer. D'après les expériences de M. E. Hodgkinson sur la fonte de fer dont sont des résultats analogues, mais moins réguliers; le coefficient d'élasticité E pour les charges inférieures à 6 kg. par mm. q. est environ 9×10^9 . La rupture a lieu sous une charge de $9^{kg} \text{ à } 13^{kg}$ par mm. q.

Dans la pratique la règle suivie est de ne faire subir à la fonte qu'une traction permanente qui n'exécède pas le sixième de la charge produisant la rupture.

190. — Extension d'un prisme par une charge inégalement répartie. Lorsque la résultante P de la charge ne passe pas par le centre de gravité de la section transversale du prisme, on ne



L' Division.

peut admettre que les divers éléments verticaux dont celui-ci se compose soient également allongés car leurs tensions alors égales auraient leur résultante passant au centre de gravité et l'équilibre n'existerait pas. Pour soumettre au calcul l'inégale répartition des tensions, l'hypothèse qu'on admet, comme la plus simple qu'on puisse faire, est que l'extrémité supérieure du prisme restant fixe, les molé-

culas qui, avant l'application de la charge, étaient dans un plan horizontal $B'B''$ sont descendues dans un autre plan $b'b''$ incliné; et l'on applique alors à chaque fibre AB verticale dont se compose le prisme la loi de l'élasticité précédemment expliquée.

Ainsi en faisant $AB = H$ et $Bb = h$, et désignant par w l'aire de la section de cette fibre, on exprime sa résistance ou tension par $\frac{E.w h}{H}$. Elle est par conséquent proportionnelle au volume wh de l'élément Bb . On en conclut que la résistance totale ou résultante est représentée par le volume $B'B''b'b''$ et passe par le centre de gravité de ce volume. Donc le plan $b'b''$ dont l'inclinaison comme ferait connaître la loi de l'inégale répartition des pressions doit être tellement situé par rapport au plan horizontal $B'B''$ que le centre de gravité du prisme tronqué $B'B''b'b''$ soit sur la direction de la force P .



Pour donner un exemple, nous supposons que la section transversale du prisme soit un rectangle, que la direction de la force P soit à égale distance de deux côtés du rectangle, et que ses distances $C'C'$, $C'C''$ aux deux autres soient dans le rapport de 1 à 2. Dans ce cas le centre de gravité du prisme $B'B''b'b''$ devant être à une distance de la verticale $B'b'$ égale au tiers de $B'B''$ il faudra que $B''b''$ soit nulle. Ainsi la fibre extrême $A''B''$ n'aura ni allongement ni tension, et la fibre $A'B'$ la plus rapprochée de P aura un allongement et une tension double de l'allongement et de la tension qui auraient lieu, sous la même charge P également répartie.

Une théorie que nous ne devons pas exposer ici généralise ces aperçus. — Si la charge était encore plus rapprochée de l'une des faces du prisme, la tension de ce côté serait encore plus grande, et il y aurait compression dans le voisinage de la face opposée. Exemple: en soumettant à l'expérience des barreaux de fonte de manière que la traction résultante fût dans un cas dirigée suivant l'axe de figure de la pièce, et dans l'autre suivant une des faces, M. Hodgkinson a trouvé que pour la fonte épaissée, la charge de rupture était dans le 1^{er} cas de 12,7043 par mm. q. et dans le second de 4,124 seulement.

191. — Compression d'un prisme chargé longitudinalement. La résistance des corps solides à la compression est plus compliquée que leur résistance à l'extension. Elle dépend de la constitution graine ou fibreuse de ces corps, et de leurs dimensions longitudinales. On admet assez généralement, d'après l'observation des constructions dont l'expérience a constaté la solidité, qu'on ne doit charger les maçonneries en pierres de taille que du dixième et les maçonneries en moellons que du vingtième du poids qui suffirait pour écraser les matériaux dont elles sont composées. En dedans de ce limite, la théorie de l'inégale répartition de la charge indiquée au n^o précédent est applicable au cas de la compression. Ainsi il s'en faut beaucoup qu'un prisme vertical puisse être considéré comme stable, lorsque la résultante de la charge passe en dedans mais trop près du contour de la base. Si par exemple la base est un rectangle comme dans le cas de la figure précédente, on est conduit par la même théorie à admettre que, si la distance $C'C'$ de la résultante P au côté DE est plus petite que $\frac{1}{3}$ de $C'C''$, la pression par unité de

Surface tout près du côté DE est double de celle qui aurait lieu si la charge était uniformément répartie sur un rectangle ayant pour dimensions DE et seulement $3 C' C$.

Chapitre 4. - Du frottement, de la résistance au roulement et de la raideur des cordes.

§1. - Soit expérimentales du frottement des surfaces planes ou arrondies.

192. - Lorsque le contact de deux corps empêche ou modifie le mouvement qui aurait lieu en vertu des forces appliquées à ces corps, s'ils étaient séparés, ils se compriment mutuellement. C'est une suite de la constitution physique des corps composés de molécules qui, dans l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sont tenues en équilibre par les forces attractives et répulsives qui les sollicitent, ces molécules sont par conséquent prêtes à céder à toute force nouvelle qui s'introduit dans ce système. Mais si un corps est dur, l'étendue de sa déformation peut être fort restreinte parce qu'un très-petit changement de figure met en action des forces moléculaires très-grandes.

S'il était possible d'admettre l'existence de corps parfaitement durs, lorsque deux de ces corps se toucheraient, leurs actions mutuelles en leur point de contact seraient nécessairement normales aux surfaces en ces points, et l'on en conclurait qu'un corps reposant sur un autre, fixe, par une surface plane ne pourrait être en équilibre sous l'action de certaines forces dues à d'autres corps, à moins que ces forces n'eussent leur résultante perpendiculaire au plan de contact.

193. - L'expérience prouve que cette condition n'est pas toujours nécessaire. Le premier corps n'étant, par exemple, soumis hors du contact qu'à la seule pesanteur, le plan par lequel il s'appuie sur un autre corps fixe peut toujours être sensiblement incliné à l'horizon, sans que l'équilibre soit rompu, pourvu que l'inclinaison ne soit pas trop grande; d'où il suit que le corps inférieur exerce alors sur le supérieur des forces dont la résultante est oblique à la surface apparente de contact, car elle est verticale et fait par conséquent avec la normale à cette surface un angle égal à celui que cette même surface fait avec l'horizon.

On arrive à la même conséquence en observant qu'un corps pesant posé sur un

autre dont la surface est plane et horizontale n'y glisse pas, quoique sollicité par une force parallèle au plan, pourvu que le rapport de celle-ci au poids du corps n'excède pas une certaine limite. La résultante des réactions du corps inférieur est alors oblique comme celle des forces qui agissent hors du contact; tandis que si la force qui tend à entraîner le corps horizontalement n'existant pas, la résultante des réactions du corps inférieur serait verticale comme le poids du corps supérieur. Cette différence s'explique évidemment par une déformation de chacun des deux corps aux environs du contact, déformation souvent imperceptible mais très-réelle et variable, suivant l'intensité de la force horizontale appliquée au corps supérieur.

194. - Des faits analogues ont lieu pendant le mouvement d'un corps qui glisse sur un autre. Le corps abandonné à la pesanteur sur un plan suffisamment incliné prend toujours une vitesse moindre que celle due à la hauteur de sa descente; posé sur un plan horizontal et sollicité en outre de son poids par une force horizontale suffisante, il prend, dans la direction de cette dernière, une accélération moindre que celle qui, en égard à sa masse, devrait lui être imprimée par cette force. En appliquant dans les deux cas au corps mobile le théorème du mouvement du centre de gravité (158), on voit que le corps fixe exerce sur le corps mobile des réactions obliques dont les composantes parallèles au plan fixe sont opposées au sens du mouvement.

195. - Définition. En général lorsque deux corps se touchent, un des éléments de la surface de contact étant considéré, si la réaction que l'un des corps en contact exerce sur l'autre, dans cette étendue est oblique à la surface de contact (ce qui n'est pas toujours), on peut la concevoir décomposée en deux forces, l'une parallèle et l'autre normale à cette surface. Cela posé, la composante parallèle s'appelle le frottement de glissement, et l'autre la pression normale du premier corps sur le second, dans l'étendue considérée.

196. - Les lois du frottement de glissement sont entièrement expérimentales. De nombreuses observations dues à Coulomb et à M. A. Moiré, ont fait connaître

1^o Que lorsque deux corps glissent l'un sur l'autre, c'est-à-dire lorsqu'un même élément superficiel de l'un agit deux fois successivement, et d'une manière continue, au contact avec différents éléments de l'autre corps, chaque corps reçoit de l'autre un frottement, c'est-à-dire une réaction tangentielle dont le sens est opposé au mouvement relatif du premier corps sur le second;

2^o Que le frottement est proportionnel à la pression normale, et indépendant de l'étendue des surfaces en contact, quand la nature des corps ne change pas et que rien n'altère ni leur poli ni leur endurance; ce qui exige que la pression par unité de surface ne soit pas assez grande pour produire l'écrasement de l'un des corps, ni même pour expulser les enduits.

3^o Que le frottement est indépendant de l'intensité de la vitesse relative des corps en contact au moins dans les cas ordinaires de la pratique.

14°. Que néanmoins entre deux corps qui ont été longtemps en contact et en repos, lorsque le mouvement n'est que sur le point de naître, c'est-à-dire lorsqu'une très-petite force additionnelle suffirait pour produire le mouvement, le frottement est quelquefois plus considérable que lorsque le mouvement est acquis, soit par translation, soit par simple ébranlement. Cette différence du frottement au départ et du frottement pendant le mouvement a lieu pour les corps compressibles comme les bois, et pour les corps durs dont les enduits ont été expulsés par une pression suffisamment prolongée en repos.

197. — Ces lois étant admises, il en résulte qu'on appelle :

R la réaction oblique totale qu'un élément de la surface de contact prie sur l'un des corps reçoit de l'autre corps, à l'instant où le glissement existe ou est sur le point d'avoir lieu;

N la pression normale dans l'étendue de cet élément, c'est-à-dire la composante ou projection orthogonale de *R* sur la normale;

F le frottement correspondant au même élément, c'est-à-dire la composante ou projection tangentielle de *R*;

f un nombre appelé coefficient de frottement, qui dépend de la nature et de l'état de poli ou d'onctuosité des corps en contact et qui ne prend d'ailleurs que deux valeurs suivant que le mouvement est acquis ou seulement sur le point de naître.

α l'angle de *R* avec *N*, appelé angle de frottement,

on a les relations

$$\frac{F}{N} = f = \tan \alpha, \quad F = fN = N \tan \alpha, \quad F = R \sin \alpha = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R$$

Ainsi dire que le coefficient *f* est constant revient à dire que la réaction totale *R* pendant le glissement effectif ou sur le point de naître fait avec la normale un angle constant α dont la tangente trigonométrique est *f*.

198. — Des tableaux publiés par M. A. Morin, et dont des copies seront annexées à ces feuilles, donnent les valeurs de *f* dans les diverses circonstances de la pratique.

199. — Remarque. Il est bien entendu que si les deux corps en contact ne glissent pas, et ne sont pas sur le point de glisser l'un sur l'autre, leur frottement peut avoir tous les degrés d'intensité depuis zéro jusqu'à la valeur correspondante au mouvement naissant. En d'autres termes, l'action mutuelle des deux corps fait alors avec la normale un angle plus petit que l'angle de frottement; elle a la direction et l'intensité nécessaire pour satisfaire aux conditions de l'équilibre de chacun des corps en contact.

§ 2. — Travail du frottement.

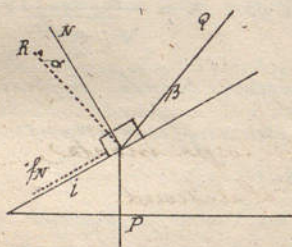
200. — Si l'un des corps est immobile, le travail élémentaire du frottement *F* ou *fN* que ce

soit un élément superficiel du corps mobile pendant un déplacement tangentiel ds , est négatif ou résistant, et a pour valeur absolue $F ds$. Les choses se passent à cet égard comme si les éléments qui se séparent après avoir été en contact étaient reliés l'un à l'autre par un ressort qui résiste à leur écartement.

201. — Si deux corps sont mobiles, deux éléments superficiels entre lesquels s'exerce une pression mutuelle dont la composante normale est N subissent chacun un frottement F égal à fN en sens contraire de son mouvement relativement à l'autre. Si ces deux éléments d'abord en contact sont ensuite à la distance ds l'un de l'autre, la somme des deux travaux élémentaires subies respectivement par les deux corps est encore $F ds$, résistante ou négative; mais l'un des travaux dont cette somme se compose est positif si les deux corps marchent dans le même sens. Le frottement n'est donc pas toujours une résistance.

§3. — Exemples divers relatifs au frottement.

202. — Application au plan incliné. Un corps glisse sur un plan incliné parallèlement à la ligne de plus grande pente. Il est sollicité, en outre de son poids P , par une force Q , située dans un plan perpendiculaire aux horizontales du plan incliné. On demande la loi du mouvement.



Soient i l'angle aigu du plan incliné vers l'horizon,
 β l'angle quelconque de la force Q au dessus de la ligne de plus grande pente, prise dans le sens ascendant,
 v la vitesse supposée dans le sens ascendant, à la fin du temps t .

Le mouvement de translation dont il s'agit est aussi celui du centre de gravité du corps glissant. En y transportant toutes les forces P, Q, N, fN , ces deux dernières représentant les réactions du plan incliné, on aura une résultante unique Q qui, étant parallèle à la direction du mouvement rectiligne, se projettera en vraie grandeur sur la ligne de plus grande pente, tandis que sa projection sur la normale au plan sera nulle. Ainsi, attendu que fN agit de haut en bas

$$\left. \begin{aligned} Q &= -P \sin i + Q \cos \beta - fN \\ N + Q \sin \beta - P \cos i &= 0 \end{aligned} \right\} \text{d'où } Q = Q \cos \beta - P \sin i - f(P \cos i - Q \sin \beta) \dots [1]$$

équation qu'on obtient immédiatement en écrivant que la résultante Q est égale à la somme algébrique des composantes parallèles au plan des forces Q et P diminuée du frottement égal au produit par f de la pression qui est elle-même égale à la somme algébrique des compo-

l'axe normale de P et de Q.

De [1] on conclut l'accélération

$$\frac{F}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{P} (Q \cos \beta - P \sin i - f(P \cos i - Q \sin \beta))$$

Ces formules s'appliquent à toutes les valeurs possibles des forces et des angles, sous la réserve que N est positive ou $P \cos i > Q \sin \beta$.

Si l'intensité Q et l'angle β restent les mêmes pendant le mouvement, l'accélération est constante, et le mouvement est uniformément varié. Suivant que la force Q est positive, négative ou nulle, le mouvement suppose ascendant en vertu de la vitesse déjà acquise à l'instant considéré, est accéléré, retardé ou uniforme. Si le corps est en repos, mais sur le point de prendre un mouvement ascendant, la même expression de Q est nulle, comme dans le cas du mouvement uniforme, mais en prenant pour f la valeur qui convient à ce cas.

203. — Si au lieu d'être ascendante, la vitesse acquise à l'instant considéré était descendante, il suffirait, en conservant la direction ascendante pour le sens positif de Q, de changer le signe de fN dans la première des équations précédentes, ce qui revient à changer celui de f dans la formule [1]; mais si l'on veut compter Q comme positive dans le sens du mouvement descendant, il faut aussi changer son signe. En l'appelant alors Q' on a

$$Q' = P \sin i - Q \cos \beta - f(P \cos i - Q \sin \beta) \dots \dots \dots [1^{bis}]$$

et alors, suivant que la force est positive, négative ou nulle, le mouvement descendant est accéléré, retardé ou uniforme, ou bien sur le point de naître.

204. — Pour que le corps, d'abord en repos, se mette en mouvement, il faut:

ou que la formule [1] donne une valeur de Q positive, et alors le corps monte,
ou que la formule [1^{bis}] donne une valeur de Q' positive et alors il descend.

205. — Pour que le corps en repos soit sur le point de monter, il faut qu'on ait

$$Q = 0, \dots \dots Q = P \frac{\sin i + f \cos i}{\cos \beta + f \sin \beta} = P \frac{\sin(i + \alpha)}{\cos(\beta - \alpha)}, \dots \dots [2]$$

l'équation qui s'obtient immédiatement en remarquant que l'équilibre des forces P, Q, R, donne

$$\frac{Q}{P} = \frac{\sin(P, R)}{\sin(Q, R)} = \frac{\sin(i + \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta + \alpha)}$$

De cette équation [2] il résulte que le minimum de Q, quand on fait varier β , répond à $\beta = \alpha$.

Dans la même hypothèse du mouvement ascendant sur le point de naître; si la force Q est dirigée au-dessous de la parallèle au plan incliné, en appelant β' son angle de ce côté, il faut qu'on ait $\beta' + \alpha < 90^\circ$, ce qui signifie que la force Q et la réaction totale R

du plan incliné; doivent former vers le haut un angle plus petit que 180° , chose évidente, puisque P est opposée à leur résultante.

206. — Si le corps en repos est sur le point de descendre, on a

$$\varphi' = 0, \dots \dots \dots Q = P \frac{\sin i - f \cos i}{\cos \beta - f \sin \beta} = \frac{P \sin (i - \alpha)}{\cos (\beta + \alpha)} \dots \dots \dots [3]$$

207. — Si aucun des quatre cas qui viennent d'être indiqués [204, 205, 206] ne se réalise, c'est que pour l'angle β qui a lieu, la valeur de Q est comprise entre celles que donnent les formules [2] et [3], ou, ce qui revient au même, la résultante de P et de Q fait avec la normale un angle plus petit que α . Dans ce cas, le corps une fois en repos y persiste, même malgré un certain accroissement ou une diminution de la force Q . C'est un état de stabilité proprement dite, qui ne subsiste que parce que, à chaque variation de Q , correspond une déformation imperceptible des corps en contact, d'où résulte la réaction nécessaire pour l'équilibre.

208. — Si la force Q est nulle et le corps sur le point de descendre, on a

$$\sin i - f \cos i = 0, \text{ d'où } \tan i = f, \text{ et } i = \alpha.$$

Pour une valeur plus grande de i , la formule [1^{bis}] donne la force totale descendante

$$\varphi' = P \sin i - f P \cos i.$$

209. — Considérons maintenant les deux cas possibles du mouvement du corps. S'il possède une vitesse initiale ascendante v_0 , on a, en conservant à φ son expression [1], en appelant v sa vitesse à la fin du temps t et x sa distance au point de départ, au même instant

$$v = v_0 + \frac{g\varphi}{P} t, \quad x = v_0 t + \frac{g\varphi}{P} \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad v^2 - v_0^2 = 2 \frac{g\varphi}{P} x.$$

formules dans lesquelles t ne doit pas être assez grand pour que v devienne négative lorsque φ l'est, car ces formules supposent essentiellement le mouvement ascendant.

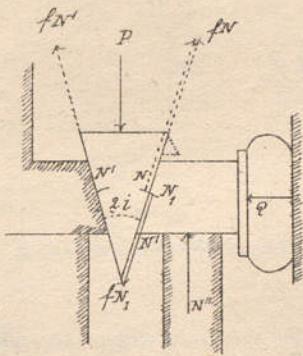
Si au contraire le corps possède une vitesse initiale descendante en comptant les vitesses et les x dans ce même sens descendant, les deux équations dernières subsistent, en y mettant φ' pour φ , sous la même condition que v ne devienne pas négative.

Enfin si φ et φ' sont toutes deux négatives, le corps, après avoir perdu toute sa vitesse initiale, soit en montant soit en descendant, reste en repos.

210. — Presse à coin. Dans l'appareil représenté par la figure, on demande la relation entre la force P exercée sur la tête du coin et la pression Q que reçoit la matière à presser, l'angle au sommet du coin étant α .

Le coin, à l'instant où il est sur le point de descendre, est soumis aux cinq forces

P, N, N', fN, fN' ; et si on le suppose isocèle, on a, en projetant ces forces horizontalement et verticalement



$$N = N', \text{ et } \dots P - 2N(\sin i + f \cos i) = 0.$$

Le bloc interposé entre le coin et la matière à presser est soumis, en négligeant son poids, à cinq forces N, fN, N', fN', Q , dont les deux premières sont égales et opposées à N et à fN , en vertu du principe de l'égalité entre l'action et la réaction. f' est le coefficient du frottement du bloc sur son appui. L'équilibre de ce bloc donne deux équations dont les termes ne dépendent que des intensités et de la direction des forces, quelle que soient leurs points d'application inconnus.

$$N \cos i - fN \sin i - f'N' - Q = 0,$$

$$N \sin i + fN \cos i - N' = 0.$$

L'élimination de inconnues N et N' donne

$$\frac{P}{Q} = \frac{2(\sin i + f \cos i)}{\cos i - (f + f') \sin i - ff' \cos i} = \frac{2(\tan i + f)}{1 - ff' - (f + f') \tan i}$$

Pour que cette formule soit applicable, c'est-à-dire que le coin puisse descendre, il faut que $\frac{P}{Q}$ soit positif; ainsi $\tan i < \frac{1 - ff'}{f + f'}$. Dans la pratique $ff' + (f + f') \tan i$ peut être négligé auprès de 1, et la formule se réduit très approximativement à

$$\frac{P}{Q} = 2(\tan i + f) \dots \dots \dots [1]$$

Exemple $\tan i = \frac{1}{20}$; $f = 10$; $\frac{P}{Q} = 0,306$; approximativement 0,3; tandis que si le frottement était nul, on avait $\frac{P}{Q} = 0,1$. La limite de petitesse du rapport $\frac{P}{Q}$ répond à $\tan i = 0$; elle est donc $\frac{2f}{1 - ff'}$; tandis que si l'on négligeait le frottement $\frac{P}{Q}$ approcherait indéfiniment de zéro.

211. - L'équilibre étant établi comme précédemment, entre les forces P, Q et les frottements, supposons qu'une force additionnelle ait imprimé un mouvement au système et cesse ensuite en l'abandonnant aux forces P et Q ; dans le cas où ces forces resteraient alors constantes, le mouvement serait uniforme, et l'on peut se proposer de comparer, dans cette hypothèse, le travail de P à celui de Q .

Si l'on désigne par p le chemin vertical que décrit la tête du coin, et par q le chemin horizontal que parcourt en même temps le bloc mobile de la presse, Pp est le travail de P , et Qq celui de la pression appliquée à la matière comprimée.

Or on a, d'après la figure

$$\frac{1}{2}q = p \operatorname{tang} i, \quad \text{d'où } \frac{P}{Q} = \frac{1}{2 \operatorname{tang} i}, \quad \text{et d'après la formule approchée [1]}$$

$$\frac{Pp}{Qq} = \frac{\epsilon P}{\epsilon Q} = 1 + \frac{f}{\operatorname{tang} i} \dots \dots \dots [2]$$

Avec les données de l'exemple ci-dessus, on aurait $\frac{\epsilon P}{\epsilon Q} = 3$.

212. — Remarque générale. On aurait pu conclure immédiatement cette relation [2] de l'équation [1].

En général quand une machine ou un système quelconque est en mouvement uniforme, sous l'action de deux forces, l'une mouvante P , l'autre résistante Q , outre les réactions des appuis et les actions mutuelles des parties du système entre elles, si les points d'application des forces P et Q ne sont susceptibles que d'un seul mouvement (condition ordinaire dans la pratique) la relation entre ces deux forces en regard aux frottements peut toujours

se ramener à la forme $\frac{P}{Q} = a(1 + bf)$, dans laquelle a indépendant du frottement est le rapport inverse des chemins p et q que parcourent les points d'application de P et de Q projetés sur les directions de ces forces pendant un très petit déplacement à partir de la position considérée de la machine, car si f devenait nul, il faudrait qu'on eût en vertu du théorème du travail virtuel $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$ en même temps que $\frac{P}{Q} = a$. Ainsi $\frac{P}{Q} = \frac{1}{a}$ et par suite

$$\frac{Pp}{Qq} = \frac{\epsilon P}{\epsilon Q} = 1 + bf.$$

213. — Quelle serait la condition nécessaire pour que, malgré la force P , la force Q fit remonter le coin? On la trouve en changeant dans les équations du n° 210 les signes de f et f' .

Ainsi on aurait approximativement

$$\frac{P}{Q} = 2(\operatorname{tang} i - f)$$

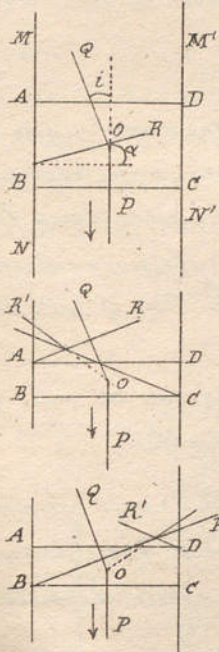
Solution impossible dans le sens physique de la question, à moins que l'on n'ait $\operatorname{tang} i > f$.

214. — Quelle serait la condition nécessaire pour que la force P agissant de bas en haut fit remonter le coin malgré les frottements sous l'action de la force Q ? On la trouve très approximativement en changeant dans la dernière équation le signe de P :

$$\frac{P}{Q} = 2(f - \operatorname{tang} i)$$

Si $\operatorname{tang} i$ est un peu inférieure à f , une petite force P suffira pour dispenser le coin, qui ne pourra cependant pas remonter de lui-même. Voir feuille 8, fig. 1 des croquis lithographiques 1^{re} série, une application de cette théorie.

215. *Glissement sur les guides ou coulisses.* Un corps solide $ABCD$ appelé coquille s'appuyant par les parties AB, CD sur les glissières $MN, M'N'$, se meut uniformément dans le sens AB sous l'action de deux forces, l'une mouvante P , l'autre résistante Q . On demande, en regard au frottement, la relation entre ces forces dans le cas simple où elles sont dans le plan de la figure. Un très-petit jeu fait que le contact ne peut avoir lieu que d'un côté AB par exemple ou en deux extrémités diagonalement opposées, telles que A et C , un peu arrondies.



1^{er} Cas. - Contact en A et B . La réaction totale R passant entre ces deux points et faisant avec la normale l'angle α dont la tang. est f , la résultante des forces P et Q doit satisfaire aux mêmes conditions. Si, comme cela a lieu dans les locomotives, les forces concourent au centre O du rectangle $ABCD$ (*) en posant $AD = a, AB = b$, il faut qu'on ait $\frac{1}{2} a \tan \alpha < \frac{1}{2} b$, ou $b > a f$. Cette condition remplie, supposant, pour compléter l'exemple, que la force P exercée par le piston d'une machine à vapeur soit parallèle à AB et que la résistance Q exercée par une bielle fasse avec le prolongement de P l'angle i , on trouve aisément

$$P = Q (\cos i + f \sin i)$$

2^e Cas. - Prenant toujours le point de rencontre de P et de Q au centre de figure du rectangle, supposons $b < a f$. Le mouvement ne pouvant pas avoir lieu avec le contact entièrement du côté de AB . Cherchons si le contact est en A et C ou en B et D .

1^o En A et C : la résultante des réactions R et R' devant concourir en O avec P et Q , serait du même côté gauche que Q , donc point d'équilibre possible avec P .

2^o En B et D : la même objection n'existe plus.

$$\begin{array}{l} \text{proj.} \\ \text{-mom.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P - Q \cos i - f(N + N') = 0 \\ Q \sin i + N' - N = 0 \\ (N + N')b + f(N' - N)a = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} N - N' = Q \sin i, \quad N + N' = Q \sin i \cdot \frac{fa}{b} \\ P = Q \left(\cos i + \frac{f^2 a}{b} \sin i \right) \end{array} \right.$$

valeur plus grande que dans le premier cas. - Au reste on trouve pour N et N' des valeurs positives. - vérification importante.

(*) Dans le croquis n^o 2, Feuille 6, 1^{ère} série, l'articulation de la bielle est trop loin du centre de la coquille.

216. - La même théorie s'applique au cas où la force P serait résistante et Q mouvante comme dans les pompes : le mouvement ayant lieu dans le sens BA on trouve, soit directement, soit en changeant le signe de f ,

$$Q = \frac{P}{\cos i - f \sin i}$$

(* Fig. 1)
217. - Elle s'applique aussi à une tige prismatique $MNN'M'$ guidée par des appuis que nous supposons, pour le raisonnement, réduite à quatre points A, B, C, D , formant un rectangle. Soit O (O_1, O_2 ou O_3) un point lié invariablement à la tige, et auquel sont appliquées deux forces, l'une mouvante P , l'autre résistante Q , le mouvement étant uniforme ou sur le point de naître dans le sens AB . Nous supposons pour fixer les idées que la résultante de P et Q soit dirigée vers la gauche de la figure.

Soient les obliques AA', DD', BB', CC' faisant l'angle du frottement α avec les normales BC, AD , aux surfaces de contact $MN, M'N'$. Trois cas sont possibles.

1^{er} Cas. - Contact en A et B . Il faut alors pour le glissement que O soit comme O_1 , entre les droites indéfinies AA' et BB' . La décomposition de l'égalité et opposée à Q , en deux forces, l'une parallèle à AA' , l'autre dans la direction donnée de P , détermine cette dernière force.

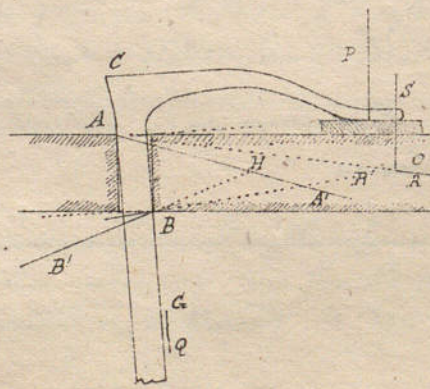
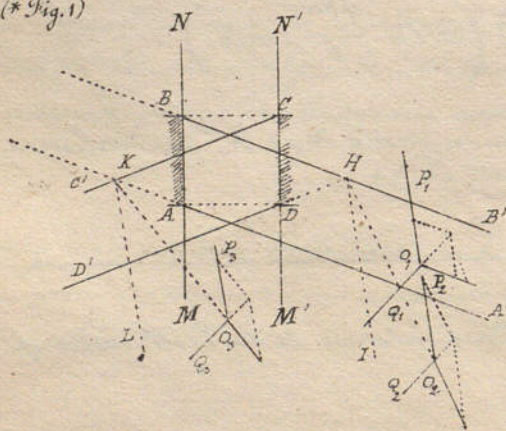
2^{er} Cas. - Contact en B et D . Le point O doit, pour que le glissement ait lieu, être comme O_2 , non seulement dans l'angle $D'HB$ mais dans l'angle IHB' , ou son opposé au sommet, la droite HI étant parallèle à P . La résultante des réactions des appuis est suivant le prolongement de HO_2 . La décomposition de l'opposé à Q en deux forces, l'une dans ce prolongement, l'autre suivant P , détermine cette force.

3^{er} Cas. - Contact en C et A . Le point O doit, pour que le glissement se réalise, être comme O_3 , non seulement dans l'angle $C'KA$, mais dans l'angle LKA' ou l'opposé au sommet, la droite KL étant parallèle à P . La résultante des réactions des appuis est suivant le prolongement de KO_3 et la décomposition de Q donne cette résultante et P .

Si le point O satisfait à plusieurs de ces conditions, la force P qui détermine le glissement est la moindre de celles qu'indiquent les diverses solutions.

Si au contraire le point O ne satisfait à aucune des trois conditions ci-dessus le glissement n'a pas lieu et l'équilibre en regard au frottement est stable.

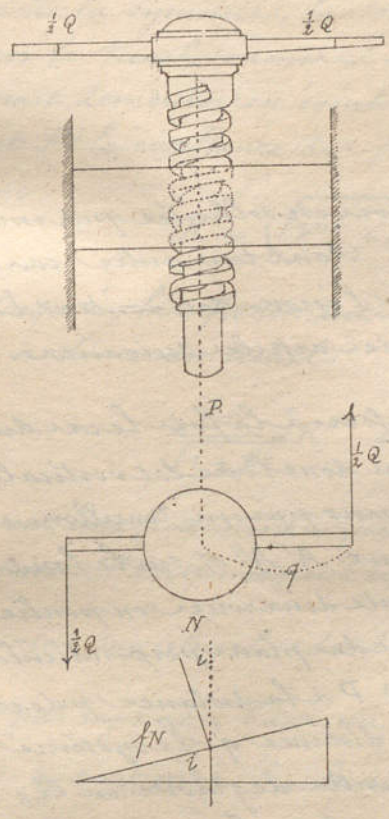
(* Fig. 1)



Exemple: Valet de menuisier. Description succincte de cet instrument en fer qui sert au menuisier pour fixer sur son établi le bois qu'il travaille. Une fois enfoncé, la réaction P de la matière comprimée, quelque grande

qu'elle soit ne peut mettre en mouvement le valet soumis à son poids Q et aux réactions obliques qu'exercent les points d'appui A et B diagonalement opposés dans le tron de l'établi traversé par la queue du valet. Si le mouvement avait lieu, les réactions A et B auraient les directions AA' , BB' faisant avec les normales en A et en B l'angle du frottement; et pour l'équilibre sur le point d'être rompu, l'intersection H devrait être sur la résultante de P et de Q , c'est-à-dire au-delà de P , ce qui n'est pas possible avec les dimensions ordinaires. L'équilibre qui s'établit réellement est stable et a lieu entre la résultante S de P et de Q et deux réactions R , R' , dont les directions AO , OB font avec les normales en A et B des angles moindres que l'angle de frottement.

218. - Vis à filet quarré. - On suppose que l'écrin soit immobile, et que la vis, outre les réactions de l'écrin, reçoive l'action de trois forces:



l'une P dirigée suivant l'axe supposé vertical, et les deux autres $\frac{1}{2} Q$ à la distance q de l'axe et formant un couple dont le plan est perpendiculaire à cet axe. On cherche la relation entre Q , P , q et les dimensions de la vis, lorsque l'équilibre est sur le point d'être rompu par la force mouvante Q , tendant à faire monter la vis.

Les surfaces hélicoïdales en contact étant réduites à une très-petite largeur, soit r leur distance moyenne à l'axe de la vis.

Soit ΣN la somme des composantes normales des réactions exercées sur la vis par la surface hélicoïdale de l'écrin, $f \Sigma N$ sera la somme de leurs composantes tangentielles, dans le sens opposé au mouvement qui est sur le point de naître.

Soit i l'angle de l'hélice avec l'horizon;

$$\text{tang } i = \frac{b}{2\pi r}, \text{ le pas de la vis étant } b.$$

$$\text{Projection sur l'axe: } \Sigma N \cos i - f \Sigma N \sin i - P = 0;$$

$$\text{Moments autour du même axe: } Qq - r \Sigma N \sin i - r f \Sigma N \cos i = 0.$$

d'où
$$\frac{Q}{P} = \frac{r}{q} \cdot \frac{\text{tang } i + f}{1 - f \text{ tang } i} = \frac{r}{q} \text{ tang } i \left(1 + \frac{f(1 + \text{tang}^2 i)}{\text{tang } i - f \text{ tang}^2 i} \right) \dots \dots \dots [1]$$

Ex. $f = 0,12$; $\text{tang } i = 0,04$; $Qq = 0,1608 Pr$ au lieu de 0,04 Pr sans frottement.

219. - Cas d'impossibilité. Le mouvement supposé devient impossible par $\text{tang } i > \frac{1}{f}$.

220. - Suivant la remarque générale du n° 212, on trouve immédiatement pour le cas du mouvement uniforme
$$\frac{EQ}{EP} = 1 + \frac{f(1 + \text{tang}^2 i)}{\text{tang } i - f \text{ tang}^2 i}$$

221. - Quelle est la force P capable de faire descendre la vis malgré la résistance des forces $\frac{1}{2}Q$?
Il suffit, dans la formule [1], de changer le signe de f , ainsi

$$\frac{P}{Q} = \frac{q(1+f \operatorname{tang} i)}{r(\operatorname{tang} f - i)} = \frac{q}{r \operatorname{tang} i} \left(1 + \frac{f(1+\operatorname{tang}^2 i)}{\operatorname{tang} i - f} \right) \text{ d'où } \frac{GP}{GQ} = 1 + \frac{f(1+\operatorname{tang}^2 i)}{\operatorname{tang} i - f}$$

La vis n'obéira à la force P que sous la condition $\operatorname{tang} i > f$. C'est sur cette propriété qu'est fondé l'usage des vis de pression.

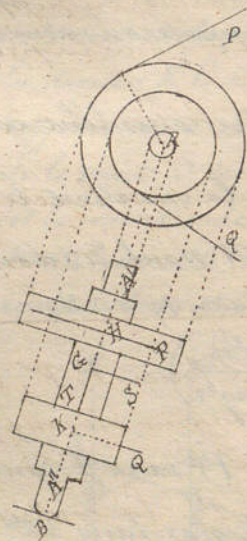
C'est aussi de l'existence du frottement que résulte l'efficacité du contre-écrou, qui assure l'invariabilité de l'assemblage d'une vis et de son écrou principal, et qui joue un rôle analogue à celui du coin dans certains assemblages à tenon et mortaise.

222. - Dans le cas de $\operatorname{tang} i < f$, quelle doit être la valeur de chaque force $\frac{1}{2}Q$ agissant dans le sens de la descente, pour que la vis soit sur le point de descendre? Il suffit de changer à la fois le signe de Q et celui de f .

$$\frac{Q}{P} = \frac{r}{q} \frac{f - \operatorname{tang} i}{1 + f \operatorname{tang} i}$$

223. - Dans ce qui précède, on n'a considéré que le cas où la vis est sollicitée par une force suivant l'axe et par un couple perpendiculaire à cet axe. Dans tout autre cas, il y aurait à considérer des frottements latéraux, soit contre l'écrou, soit contre d'autres guides de la vis; et l'on appliquerait les considérations de l'article suivant.

224. - Frottement des rouillons et pivots. - Pour embrasser à la fois le cas du treuil proprement dit, dont l'axe est horizontal et celui du cabestan dont l'axe est vertical, soit un arbre solide incliné reposant par un rouillon et un pivot sur deux colliers latéraux $A'A''$ et sur le fond d'une crapandine B . Cet arbre porte deux roues ou poulies auxquelles sont appliquées; dans des plans perpendiculaires à l'axe, la force mouvante P à la distance p de cet axe, et la force résistante Q à la distance q . Le système de l'arbre et des roues a son centre de gravité en G ; son poids se décompose en une force S perpendiculaire à l'axe et une force T suivant l'axe.



Soit $A'A'' = a$; $A'H = h'a$; $A''H = h''a$; $A'K = K'a$,
 $A''K = K''a$; $A'G = g'a$, $A''G = g''a$; r' et r'' les rayons
des deux rouillons.

Pour établir la relation qui existe entre les forces ci-dessus désignées dans le cas du mouvement uniforme, il faut considérer qu'elles sont en équilibre avec les réactions de l'appui. La composante normale de la réaction totale du fond B de la crapandine est égale à T et on

on peut admettre, à cause de la figure circulaire de ce fond, que les deux forces dont il s'agit sont directement opposées. On peut, sans changer les conditions de l'équilibre des autres forces, remplacer P, Q, S chacune par deux autres forces parallèles agissant dans deux plans menés par les milieux $A' A''$ des coussinets, perpendiculairement à l'axe. A cet effet on décompose P en deux forces $P' = P b''$ et $P'' = P b'$ dirigées suivant les intersections de ces deux plans par un plan mené parallèlement à l'axe par la direction de P . On en fait autant pour Q décomposée ainsi en $Q' = Q k''$ et $Q'' = Q k'$, et pour S remplacée par $S' = S g''$ et $S'' = S g'$. Dans les mêmes plans agissent les réactions totales R' et R'' des coussinets.

Cela posé, deux systèmes de forces P', Q', S', R' , dans le plan A' et P'', Q'', S'', R'' dans le plan A'' ont séparément leurs résultantes de translation nulle (comme l'est, à cause de la symétrie, la résultante des frottements élémentaires dans le plan B), sans quoi le treuil soumis à deux ou trois forces agissant dans deux plans parallèles ne pourrait demeurer en équilibre (*).

Soit F' la résultante des forces connues Q', S' ; et soit F'' celle des forces Q'' et S'' . On a donc

$$R' = \sqrt{F'^2 + P^2 b''^2 + 2 F' P b'' \cos(F', P)} \text{ et } R'' = \sqrt{F''^2 + P^2 b'^2 + 2 F'' P b' \cos(F'', P)}$$

Cela posé, les frottements tangentiels aux touillons ont pour moments, par rapport à l'axe du treuil

$$\frac{f r'}{\sqrt{1+f^2}} R' \text{ et } \frac{f r''}{\sqrt{1+f^2}} R''$$

Quant aux frottements que le pivot reçoit du fond de la crapandine, en supposant la pression T uniformément répartie sur la surface $\Omega = \pi \rho^2$, on voit que la pression sur l'élément superficiel $r d\alpha dr$ est $\frac{T}{\Omega} r d\alpha dr$ et que le moment du frottement correspondant par rapport à l'axe du treuil est $f \frac{T}{\Omega} r^2 d\alpha dr$ dont l'intégrale pour le cercle entier, c'est-à-dire entre les limites 0 et 2π pour α , et entre 0 et ρ pour r donne

(*) Nous rappelons ici un théorème important de la statique. Trois forces F, F', F'' en équilibre sont nécessairement dans un même plan et concourent en un point ou sont parallèles. En effet: 1° Si par un point A pris sur F et n'appartenant ni à F' ni à F'' on mène deux droites AA', AB' non parallèles à F'' et rencontrant F' en A' et B' . La condition de moments exige que F'' rencontre ces deux droites, en deux points $A'' B''$, et soit par conséquent dans le plan $A' A'' B'' B$. En prenant les moments par rapport à $A' B''$ on voit que la même condition exige que F soit dans le plan $AA' B''$. 2° Si F et F' concourent, l'équation des moments par rapport au point d'intersection veut que F'' y passe aussi. Si F et F' sont parallèles, l'équation des projections sur un axe auquel ces forces sont perpendiculaires exige que F'' le soit également.

$\frac{2}{3} f \rho T$. L'équation des moments par rapport à l'axe du treuil de toutes les forces agissantes est donc, en posant, pour abréger $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = \sin \alpha = f_1$,

$$Pp = Qq + f_1 R' r' + f_1 R'' r'' + \frac{2}{3} f \rho T$$

équation dans laquelle il faut mettre pour R' et R'' les fonctions de P ci-dessus écrites. On peut aisément la résoudre par approximations successives.

225. - Les travaux des forces P , Q et des frottements sont proportionnels à leurs moments par rapport à l'axe du treuil (114). La formule précédente établit donc immédiatement leur relation

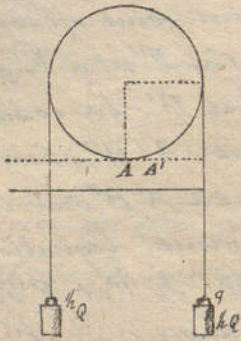
$$6P = 6Q \left[1 + \frac{1}{Qq} (f_1 R' r' + f_1 R'' r'' + \frac{2}{3} f \rho T) \right]$$

ce qui est d'ailleurs conforme à la remarque générale du n° 212

226. - Frottement des excentriques et boutons de manivelle. Un bouton de manivelle est un tambour qui se meut dans une bague mobile. Si la pression exercée par la bielle est constante, le travail du frottement à chaque tour de manivelle est égal au produit de cette pression par le coefficient de frottement et par la circonférence du bouton ou de l'excentrique.

§ 4. - Résistance au roulement.

227. - Un corps terminé par une surface courbe et appuyé sur un autre avec lequel il est supposé n'avoir qu'un point ou une arête de contact, étant sollicité par des forces ayant une résultante unique, ne pourrait être en équilibre, s'il n'y avait point de déformation de ces corps, à moins que la résultante ne passât par le point ou l'arête de contact. L'expérience apprend qu'il n'en est point ainsi. Soit, par exemple, un cylindre ou rouleau homogène posé sur deux madriers horizontaux laissant un intervalle dans lequel passe une ficelle qui embrassant un demi-tour du rouleau supporte à ses extrémités deux poids égaux $\frac{1}{2} Q$: il faut d'un côté ou de l'autre un poids additionnel q non-seulement pour que l'équilibre soit rompu, mais même pour que le rouleau se maintienne



en mouvement, lorsqu'on a commencé à l'ébranler. Coulomb a trouvé que, pour un cylindre de bois de gaïac de 0^m 162 de diamètre, roulant sur des règles de chêne, quand les poids $\frac{1}{2} Q$, y compris le poids du rouleau, formaient ensemble 500 Kilogr., le poids additionnel q devait être de 3 Kilogr., pour qu'un mouvement très-lent persistât après avoir été imprimé. Alors le cylindre est en équilibre sous l'action des forces verticales $\frac{1}{2} Q$, $\frac{1}{2} Q + q$, et de la résultante des réactions du corps

inférieure, laquelle est par conséquent aussi verticale, égale à $Q+q$, et passant en un point A' , dont la distance AA' au diamètre vertical du cylindre, étant désignée par δ , satisfait à l'équation des moments par rapport à A ,

$$(Q+q) \delta = qr \dots \dots [1] \quad \text{d'où } \delta = \frac{3}{503} r = 0^{\text{m}},0001 \text{ r.}$$

Ces considérations fort simples donnent, ainsi que l'a remarqué M. Dupuit (Essai sur le tirage des voitures, 1837), une notion claire du fait que l'on désigne communément sous le nom de frottement de seconde espèce, ou de frottement de roulement, et qui consiste généralement en ce que, lorsqu'un corps roule ou est sur le point de rouler sur un autre, les composantes normales des réactions de ce dernier ont une résultante qui passe à une petite distance en avant de la normale au point de contact, supposé géométrique, du côté du mouvement existant ou sur le point de naître.

228. - Coulomb a constaté que le rapport $\frac{q}{Q+q}$ du poids additionnel à la réaction normale ou pression, est constant pour un même rayon r , pour les mêmes substances en contact: fait analogue à l'une des lois du frottement de glissement.

Coulomb a cru reconnaître en outre que lorsque le rayon r varie, le rapport $\frac{q}{Q+q}$ varie en raison inverse, de sorte qu'on aurait:

$$\frac{q}{Q+q} = \frac{\alpha}{r},$$

α étant une constante. Mais comme on a en même temps, d'après l'équation [1] ci-dessus

$$\frac{q}{Q+q} = \frac{\delta}{r}$$

il s'en suivrait qu'on aurait $\delta = \alpha$, c'est-à-dire que, quel que fût le rayon r , le point A' , centre de la réaction normale, serait à une distance constante de la normale CA , abaissée de l'axe du cylindre sur le plan fixe. Or, on voit bien que cette loi ne peut être admise en général; puisque δ doit toujours être beaucoup plus petite que r . Cependant M. Morin, par de nouvelles expériences, a constaté qu'elle est suffisamment approchée de la vérité dans les cas ordinaires de la pratique. Mais en outre il a trouvé que le rapport $\frac{q}{Q+q}$,

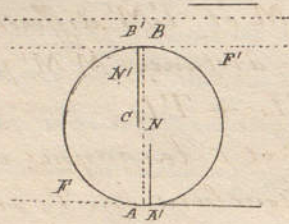
conséquent la distance δ augmente quand, toutes choses égales d'ailleurs, la longueur de l'arête du contact géométrique diminue.

229. - La propriété qui vient d'être caractérisée subsiste toutes les fois qu'un corps roule sur un autre: la réaction normale totale passe en avant du point ou de l'arête de contact, à une distance δ qui dépend de la nature des corps en contact, et nullement des forces normales ou obliques.

230. - Application. - Un madrier dont le poids, y compris sa charge, est P , est posé sur deux rouleaux d'égal diamètre $2r$, qui s'appuient sur un plan horizontal; on demande quelle est la force horizontale Q qui, appliquée au madrier, sera sur le point de faire naître

le mouvement du système; on l'entretiendra une fois acquis. Il y a équilibre entre les forces extérieures qui agissent sur tout le système. Ces forces sont P, Q , les réactions normales du sol, N, N_1 sur les deux rouleaux, les réactions horizontales F, F_1 . On a donc

$$P = N + N_1 \quad \text{et} \quad Q = F + F_1.$$



Le cylindre C considéré à part et en négligeant son poids, supposé très petit par rapport à P , est en équilibre sous l'effort des réactions qu'il reçoit du plan inférieur et du madrier, et qui peuvent se réduire comme il suit: 1° réaction normale N passant à une distance AA' ou δ du diamètre vertical AB ; 2° réaction tangentielle F , qu'on peut considérer à volonté comme passant par A ou A' ; 3° réaction normale N' passant à une distance BB' ou δ' en arrière de B , attendu que tel est le sens du roulement relatif sur le plan inférieur du madrier; 4° réaction tangentielle F' passant par B ou B' . L'équilibre de ces forces exige qu'on ait $N = N'$, $F = F'$ et en prenant les moments par rapport à B

$$N' (\delta + \delta') = F' \cdot 2r$$

ou aurait un résultat analogue pour le second rouleau

$$N_1 (\delta + \delta') = F_1 \cdot 2r;$$

donc $P (\delta + \delta') = 2r \cdot Q.$

Exemple $\delta = 0,01, \quad \delta' = 0,001 \quad Q = \frac{0,011}{2r} P;$

si $r = 0,10, \quad Q = 0,055 P.$

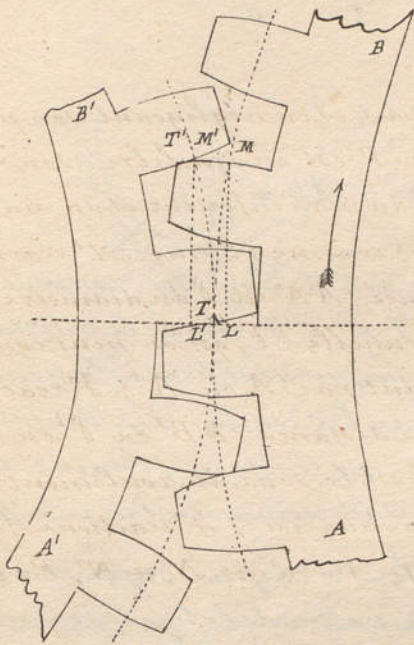
Remarque: La vitesse du madrier est évidemment double de l'axe C du rouleau.

§5. - Frottement mixte des engrenages.

231. - Le mouvement relatif de deux dents d'engrenage n'est ni un simple roulement ni un simple glissement. Mais comme ces corps sont ordinairement très durs, l'influence de la résistance au roulement peut être négligée. La résistance due aux actions mutuelles des deux corps se réduit à la force tangentielle dont le travail élémentaire s'obtient en multipliant cette force par l'arc de glissement.

232. - La roue AB conduit la roue $A'B'$; le contact a lieu en T sur la ligne des centres et passe en T_1 pendant que les roues s'avancent d'un pas. Si N est l'intensité

moyenne de la composante normale de l'action mutuelle des surfaces en contact, le travail négatif du frottement, dépendant du mouvement relatif, est égal à $fN (MT' - T''M')$ ou $fN \times MM'$, le point M' pouvant être considéré comme situé sur la corde MT' . Or, les arcs $T'M$ et $T''M'$ étant égaux et d'ailleurs supposés petits par rapport à leurs rayons, les ordonnées LM et $L'M'$ diffèrent très-peu l'un de l'autre, et la distance MM' peut être remplacée par LL' ou $TL + TL'$.



Mais si l'on appelle r et r' les rayons des deux cercles primitifs, qui se touchent en T ; si l'on désigne par a la longueur du pas $T'M$ ou $T''M'$ et que l'on considère les cordes $T'M$, $T''M'$ comme se confondant avec les arcs qu'elles sous-tendent, c'est-à-dire comme égales au pas a , on obtient

$$TL = \frac{a^2}{2r} \quad T'L' = \frac{a^2}{2r'}$$

et le travail du frottement, pendant que la roue tourne d'un pas a , devient

$$\frac{1}{2} fNa^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

Donc, si l'on appelle \mathcal{E} le travail moteur exercé sur la roue AB , pour entretenir son mouvement périodiquement uniforme pendant le parcours d'un nombre quelconque K de pas, et qu'on désigne par \mathcal{E}' le travail résistant subi par la roue $A'B'$ dans le même temps, on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \frac{K}{2} fNa^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

Maintenant, pour éliminer N , il suffit de remarquer que le pas a étant petit, \mathcal{E}' qui serait égal à $KN\alpha$ si l'action mutuelle des roues était continuellement tangente aux cercles primitifs n'en diffère que très-peu. Il en résulte que, dans le terme affecté du coefficient f ordinairement petit, on peut, sans erreur notable, remplacer $KN\alpha$ par \mathcal{E}' , ce qui donne

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' \left(1 + \frac{1}{2} fa \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \right) \dots \dots \dots [1]$$

Par cette formule, due à M. Poncelet, et dont seulement la démonstration est ici simplifiée par l'hypothèse immédiate d'un pas très-petit, on voit que le travail consommé par le frottement, varie, pour des rayons donnés, proportionnellement au pas qu'il est par conséquent utile de réduire autant que cela est possible.

233. — Si l'engrenage est cylindrique, on transforme cette formule en y introduisant les

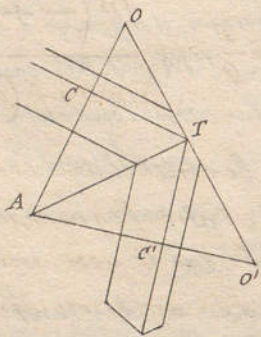
nombre n et n' des dents des deux roues.

On a
$$a = \frac{2\pi r}{n}, \quad a = \frac{2\pi r'}{n'}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{2r} = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{a}{2r'} = \frac{\pi}{n'};$$

de là
$$E = E' \left(1 + f\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \right)$$

Exemple: $f = 0,10; n = 20; n' = 40; f\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) = 0,024 = \frac{1}{42}$.

234. — Si l'engrenage est conique, il faut, suivant la remarque de M. Poncelet, conserver la formule [1], en prenant pour r et r' non les rayons CT et $C'T'$, mais les distances $OT, O'T'$, comptées sur une perpendiculaire à la génératrice de contact AT , parce que les courbes des dents se touchent en effet pendant une courte durée, comme si elles restaient dans le plan OO' perpendiculaire à AT .



235. — Les formules ci-dessus supposent que les dents ne se touchent qu'à partir de la ligne des centres, et qu'il n'y a jamais qu'une dent en prise sur chaque roue. Si en conservant cette dernière hypothèse, on admettait que le contact commençât à un demi-par avant la ligne des centres et se terminât un demi-par après, on réduirait à moitié le travail dû au frottement, comme on peut s'en convaincre en remplaçant a par $\frac{1}{2}a$ et doublant ensuite le résultat de la formule

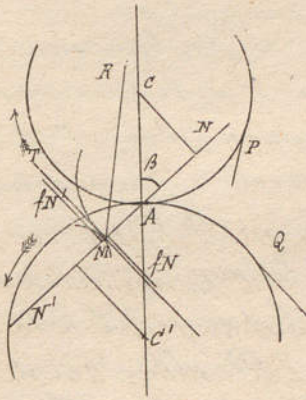
$$\frac{1}{2} f N a^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right).$$

Mais il vaut mieux, dans la pratique, ne pas compter sur cette réduction. L'usage est de faire commencer le contact un par avant la ligne des centres et finir un par après, dans ce cas, il y a toujours deux dents de chaque roue en prise, et les formules établies ci-dessus subsistent.

D'ailleurs la théorie précédente n'a pas égard à l'inexactitude de division des roues, et à la déformation inévitable des dents, d'où résultent de petits chocs et des pertes de travail qu'il faut ajouter à celles du frottement. Des expériences directes sur cette matière seraient d'un grand intérêt.

236. — Nous venons de considérer le frottement d'un engrenage dans le cas ordinaire où le par est très-petit relativement aux rayons, et la formule obtenue s'applique alors également soit que le contact des dents commence à la ligne des centres et finisse à la distance d'un par, soit que l'inverse ait lieu, soit enfin que le contact commence à un par en avant de la ligne des centres et finisse à la même distance de l'autre côté. Il n'en serait pas de même si les dents devaient se prendre et se quitter à une grande distance de la ligne des centres.

Soient C et C' les centres de deux roues dont les cercles primitifs ayant r et r' pour rayons se touchent en A . Leurs dents se touchent actuellement en M . Supposons d'abord que la roue C mène la roue C' ; le contact en M est donc au delà de la ligne des centres.



La force mouvante P est, pour le moment autour de C , équivalente à toutes les forces qui sollicitent la roue C en dehors du contact des dents. La force résistante Q est analogue pour la roue C' . La roue C est en équilibre sous l'action de la force P , de la pression normale et du frottement fN ; de même la roue C' est en équilibre sous les forces Q , N' et fN' , ces deux dernières égales et directement opposées à N et fN . De là deux équations de moments, en faisant $AM = p$,

$$\left. \begin{aligned} Pr - Nr \sin \beta - fN(r \cos \beta + p) &= 0 \\ Qr' - N'r' \sin \beta - fN(r' \cos \beta - p) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{d'où } \frac{P}{Q} = 1 + \frac{fp \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)}{\sin \beta + f \left(\cos \beta - \frac{p}{r'} \right)} \dots [1]$$

Considérons en second lieu le contact des dents après leur passage par la ligne des centres, et pour nous servir de la même figure, supposons que le mouvement ayant lieu en sens contraire des flèches, la force Q soit mouvante et la force P résistante. Les forces fN , fN' changent de sens, les équations précédentes subsistent, sauf le changement de signe de f et deviennent

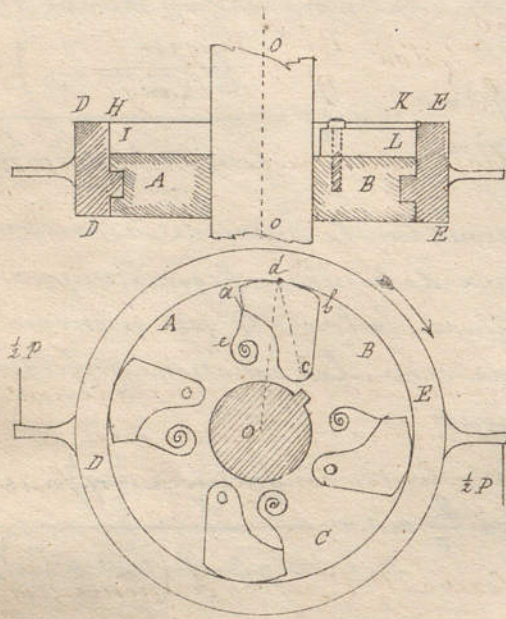
$$\left. \begin{aligned} Pr - Nr \sin \beta + fN(r \cos \beta + p) &= 0 \\ Qr' - N'r' \sin \beta + fN(r' \cos \beta - p) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{d'où } \frac{Q}{P} = 1 + \frac{fp \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)}{\sin \beta - f \left(\cos \beta + \frac{p}{r'} \right)} \dots [2]$$

Dans les cas ordinaires de la pratique, l'angle β diffère peu de 90° et le coefficient f est assez petit pour que les deux dénominateurs des formules [1] et [2] soient regardés comme approximativement égaux à 1. Le rapport des forces, qui est aussi celui de leurs travaux élémentaires à partir de la position indiquée par les valeurs de β et de p (puisque P et Q sont appliquées tangentiellement à des circonférences ayant une même vitesse) varie donc approximativement de $1 + fa \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$, le pas a étant sensiblement égal à la plus grande valeur de p . Le rapport moyen des forces mouvante et résistante ou de leurs travaux est donc environ $1 + \frac{1}{2} fa \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$ comme on l'a trouvé autrement (232). Mais la compa-

raison des formules [1] et [2] fait voir que l'influence du frottement est réellement plus grande avant qu'après la ligne des centres. On pourrait même déterminer des valeurs de β , de p et de f qui rendraient négatif le dénominateur de la formule [2]. Le mouvement supposé serait donc impossible. Il y aurait alors ce qu'on appelle un au-boutement, ce qui s'explique en remarquant que l'inégalité $r \sin \beta < f(r \cos \beta + p)$ signifierait que la réaction totale R reçue par la roue C au point M et dirigée dans l'angle TMA (at-

tendu que les roues tournant en sens contraire des flèches, fN est aussi en sens opposé de celui qu'indique la figure) passerait au-dessus du centre C , de sorte que les deux forces R et P tendraient à faire tourner en sens contraire du mouvement effectif; ce qui est absurde.

237. — Encliquetage Dobo. Cet appareil présente un fait analogue à l'arc bouterment dont il vient d'être question. Un arbre dont l'axe est O , ne peut, à cause d'un frottement ou d'une résistance analogue, tourner autour de cet axe si ce n'est moyennant une force P d'un moment suffisant par rapport à ce même axe. Sur cet arbre est calé un disque circulaire ABC entouré d'un anneau DE analogue à une bague d'excentrique. C'est sur cet anneau



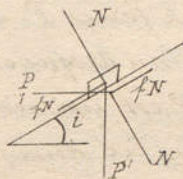
qu'agissent, au moyen de leviers, les deux forces $\frac{1}{2}P$ qui doivent faire tourner le disque ABC et l'arbre dans le sens de la flèche. De plus souvent que lorsque les forces $\frac{1}{2}P$ changent de sens, l'anneau tourne en sens contraire de la flèche sans entraîner l'arbre. On satisferait à cette condition par une roue à rochet et un cliquet, mais les oscillations de la vière devraient correspondre à un nombre entier de dents du rochet. L'encliquetage Dobo n'est pas soumise à cette restriction. Dans le creux cylindrique $HIKL$ compris entre la face intérieure d'une partie de l'anneau et la face plane IL du disque sont établies quatre pièces, dont chacune, telle que abc , pouvant tourner sur le plan IK autour d'une goupille C solidement fixée dans le disque AB , est en contact avec l'intérieur de l'anneau par

une surface cylindrique adb dont le rayon est tant soit peu moindre que celui de l'anneau; un petit ressort e presse faiblement cette espèce de secteur dans le sens adb , et la goupille c est située hors de la normale dO de manière que l'angle Odc soit plus petit que l'angle de frottement des matières en contact. Il en résulte, comme il est facile de le voir, que le mouvement de l'anneau dans le sens de la flèche est impossible sans entraîner celui du disque et de l'arbre, tandis que dans le sens contraire un faible effort suffit pour faire tourner l'anneau autour du disque resté fixe.

238. — Frottement de l'engrenage de la vis sans fin. — Si les dents sont suffisamment multipliées, chacun des deux corps tournants peut être considéré comme une vis comprise entre deux plans très-rapprochés qui, prolongés, interceptent sur l'autre corps une portion faisant fonction d'écrin. L'analogie serait complète si l'une des deux pièces devenait une crémaillère, et la théorie du frottement de la vis s'appliquerait immédiatement. Dans tout autre cas, le frottement participe de celui de la vis contre son écrin, et du frottement des engrenages. Or, ce dernier étant très-petit par rap-

port à l'autre peut, sans grande erreur, être négligé.

Soient r et r' les rayons primitifs $Pp = P_1 r$ et $P'p' = P'_1 r'$ les moments des forces par rapport aux deux axes de rotation, i l'angle de l'hélice de la première vis avec le plan perpendiculaire à son axe; N la pression mutuelle des dents au point où la perpendiculaire commune aux deux axes rencontre les deux cylindres primitifs.



Si la première vis est conductrice, c'est-à-dire si la force P_1 est mouvante et la force P'_1 résistante, on a des équations analogues à celles de l'équilibre de la vis et de son écrou

$$\begin{cases} P'_1 - N \cos i + f N \sin i = 0 \\ P_1 - N \sin i - f N \cos i = 0 \end{cases} \text{ d'où } \frac{P_1}{P'_1} = \frac{\tan i + f}{1 - f \tan i}$$

Si la force P'_1 était mouvante et P_1 résistante, il faudrait changer le signe de $f \tan i$

$$\frac{P'_1}{P_1} = \frac{1 + f \tan i}{\tan i - f} = \frac{1 + f}{1 - f \frac{1}{\tan i}}$$

ce qui devait être, puisque l'hélice faisant avec le plan perpendiculaire au premier axe un angle i , fait l'angle complémentaire avec le plan perpendiculaire à l'autre axe.

Pour que les deux roues ou vis puissent devenir à volonté conductrices, il faut qu'on ait à la fois $\tan i > f$ et $f \tan i < 1$.

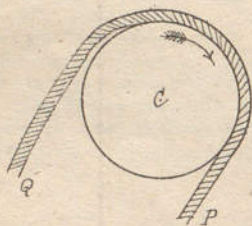
Si l'on veut que dans les deux cas le rapport des forces P_1, P'_1 reste le même, il faut faire $\tan i = 1$ et le rapport de la force mouvante à la force résistante est alors $\frac{1+f}{1-f}$; tandis qu'il serait égal à 1 si le frottement était nul. Ce rapport est aussi celui des travaux des forces dans le mouvement uniforme.

Exemple: $f = 0,10; \frac{1+f}{1-f} = \frac{11}{9}$.

On voit que dans ce mode d'engrenage, le travail proportionnel du frottement est bien plus grand que dans les engrenages à axes parallèles ou concomitants; aussi ne s'en sert-on que pour transmettre de faibles quantités de travail, ou bien lorsque dans une opération accidentelle il importe peu de perdre du travail pourvu qu'à l'aide d'une petite force on puisse exercer un grand effort sur un corps qui se meut très-lentement.

§ 6. - De la raideur des cordes.

239. - Lorsque soit sur une poulie mobile autour de son axe C , soit sur un cylindre roulant, passe une corde sollicitée à ses extrémités par les forces P et Q , l'expérience prouve que soit pendant le mouvement uniforme, soit à l'instant où le mouvement est sur le point de naître si la corde n'est pas très-mince et flexible, la force mouvante P est plus grande que la résistance Q d'une quantité qui excède l'augmentation due au frottement de l'éprouve de la poulie sur ses appuis, ou à la résistance au roulement du cylindre.



Cet excès est un effet de la raideur de la corde et s'explique, soit par la figure que la corde affecte, et de laquelle il résulte que le bras de levier de la résistance Q est plus grand que celui de la force mouvante P , soit par le travail résistant à vaincre pour plier la corde.

240. - Coulomb a conclu de plusieurs expériences (Mémoires des Savants étrangers t. 10), que, abstraction faite du frottement de l'éprouve, l'excès $P - Q$ peut être approximativement représenté par la formule :

$$P - Q = \frac{A + BQ}{D},$$

D étant le diamètre de la poulie augmenté de celui de la corde A et B étant deux quantités indépendantes de P et de D ; mais variables avec le diamètre, la nature de la corde blanche ou goudronnée, sa sécheresse ou son humidité, son état de vétusté.

241. - Le tableau suivant, calculé par Navier, donne pour certaines cordes expérimentées par Coulomb, les valeurs de A et de B qui conviennent quand on prend le Kilogramme pour unité de force et le mètre pour unité linéaire. Ces cordes étaient formées de trois torons ou cordes moins grosses, et les torons composés d'un certain nombre de brins nommés fils de caret.

Tableau, 8^e

Tableau pour calculer la raideur de différents cordes
autour d'une poulie d'un mètre de diamètre.

Indication des cordes.	Diamètre des cordes.	Poids des cordes par mètre de longueur.	Raideur constante A.	Raideur par Kilg de résistance B
Cordes blanches de 30 fils	0 ^m , 020	0 ^{kg} , 283	0, 222	0, 0097
" " 15 fils	0, 014	0, 145	0, 064	0, 0055
" " 6 fils	0, 009	0, 052	0, 011	0, 0024
Cordes gondronnées de 30 fils	0, 024	0, 333	0, 350	0, 0126
" " 15 fils	0, 017	0, 163	0, 106	0, 0061
" " 6 fils	0, 010	0, 069	0, 021	0, 0026

On voit par ce tableau que les quantités A et B ne varient pas avec la grosseur de la corde, suivant une même loi; (A est à peu près proportionnel à la 4^e puissance et B à la 2^e du diamètre) c'est ce qui prouve l'inexactitude de la formule donnée à cet égard par plusieurs auteurs, qui, d'après une indication de Coulomb, ont admis que les deux coefficients A et B étaient proportionnels à une même puissance du diamètre de la corde. Les expériences rapportées par ce grand physicien ne sont pas suffisantes pour permettre d'introduire dans la formule l'influence de l'état de la corde plus ou moins usée. Ce qui est certain, c'est que, avec des diamètres égaux, une corde à demi-usée a toujours moins de raideur qu'une corde en bon état.

La formule précédente montre qu'il importe de réduire autant que possible le diamètre des cordes, en égard aux tensions qu'elle doivent subir.

242. — La résistance moyenne des cordes à la rupture est de 5 à 6 Kg. par mm. q. de la section; mais on ne doit pas leur faire supporter plus de la moitié de cet effort.

243. — Pour introduire aisément la raideur dans le calcul, on remarque que de la formule de Coulomb il résulte que si r et r' désignent les distances de l'axe de la poulie aux axes des deux parties rectilignes de la corde, on a

$$Qr' = Pr \quad \text{ou} \quad Qr' = Qr + \frac{1}{2} (A + BQ). \quad [1]$$

attendu que r diffère très peu de $\frac{1}{2} D$. Ainsi l'effet de la raideur est d'augmenter de $\frac{1}{2} (A + BQ)$ le moment de la résistance Q, moment qui serait Qr si la raideur était nulle.

244. — Application. — Condition de l'équilibre ou du mouvement uniforme de la poulie, en égard au frottement de l'éprouve.

Appelons P la force mouvante ;

r le rayon de la gorge de la poulie augmenté de celui de la corde ;

r' la distance de l'axe de figure de la poulie, à l'axe de la portion de la corde à laquelle est appliquée la résistance Q ;

ρ le rayon de l'espieu, si celui-ci est fixé à la poulie, ou le rayon de l'œil de la poulie, si l'espieu tient à la chape ;

R la réaction oblique, totale, que la poulie reçoit de ses appuis.

En négligeant le poids de la poulie, on a

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)}, \\ Pr &= Qr' \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R \rho, \end{aligned} \right\} \text{d'où, d'après [1], } P = Q + \frac{1}{2r} (A + BQ) + f_1 \frac{\rho}{r} \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)}$$

Dans le cas particulier où les forces P et Q sont parallèles, cette formule devient

$$P = \frac{1}{r + f_1 \rho} \left(\frac{A}{2} + \left(r + \frac{B}{2} + f_1 \rho \right) Q \right),$$

équation de la forme $P = \alpha + \beta Q$ dont on fait usage dans le calcul des moufles.

§ 7. - Frottement d'une corde ou d'une courroie sur un cylindre fixe.

245. - Faisant abstraction de la raideur, considérons la corde comme composée d'éléments solides glissant sur le cylindre et unis entre eux par des portions infiniment petites d'un fil parfaitement flexible. Soit A un de ses éléments ; soient M et M' les milieux des deux cordons adjacents, T la tension en M , $T + dT$ la tension en T' le mouvement ayant lieu dans le sens MM' . Soit $d\beta$ l'angle des deux normales au cylindre en M et M' . Désignant par N et fN les réactions du cylindre sur l'élément A , on a pour l'équilibre

$$\left. \begin{aligned} fN &= dT \cos \frac{d\beta}{2} = dT \\ N &= (2T + dT) \sin \frac{d\beta}{2} = T d\beta \end{aligned} \right\} \text{d'où } \frac{dT}{T} = f d\beta$$

et en intégrant depuis le point où la tension est égale à la résistance Q jusqu'à celui où elle est égale à la force mouvante P , β exprimant l'angle compris entre les normales extrêmes de l'arc embrassé par la corde, quel que soit le rayon constant ou variable du cylindre

$$\log \frac{P}{Q} = f\beta \log e, \quad \text{ou } P = Q e^{f\beta}.$$

On sait que si l'angle des normales est donné par un nombre de degrés n , on a $\beta = \frac{n\pi}{180}$.

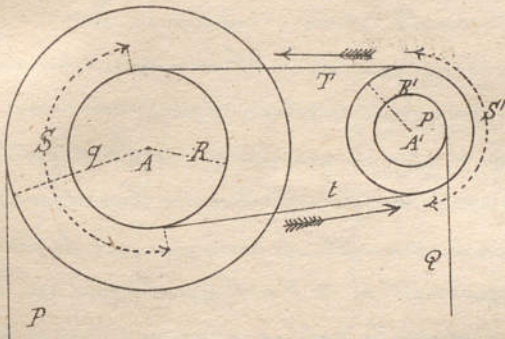
246. - D'après les expériences de M. Morin, le coefficient f indépendant de la largeur des courroies a les valeurs suivantes :

0,47: courroies ordinaires	} sur tambours		0,28: courroies ordinaires	} sur poulies
0,50: " neuves			en bois	

Suivant le même auteur, on peut faire supporter sans risque à une courroie une tension de $0^k,25$ par mm. q. de section.

Exemple: $\beta = \pi, f = 0,50; \log \frac{P}{Q} = 1,57 \times 0,434 = 0,68138; P = 4,80 Q.$

247. - Transmission de mouvement au moyen de cordes ou courroies sans fin. Deux arbres tournant autour des axes A et A' portent des poulies sur lesquelles s'enroule une corde ou courroie sans fin convenablement tendue. Les forces P et Q étant appliquées respectivement à deux autres poulies ou roues montées sur les mêmes arbres, on demande les conditions d'équilibre à l'instant où le mouvement est sur le point de naître dans le sens de la force mouvante P , en ayant égard au frottement des tambours A et A' , et en faisant abstraction de la raideur de la courroie, laquelle est ordinairement peu sensible. Pour plus de simplicité, on suppose les forces P et Q verticales, et la courroie sensiblement horizontale entre les deux poulies.



Si la courroie est suffisamment tendue pour ne glisser sur aucune des deux poulies, en nommant T et t les tensions des deux portions de la courroie, R et R' les rayons des poulies, p et p' les rayons des tambours, p et q les bras de levier des forces P et Q , on aura

Pour la poulie A , $Pp - (T-t)R - f_1 p \sqrt{P^2 + (T+t)^2} = 0 \dots \dots \dots [1]$

Pour la poulie A' , $(T-t)R' - Qq - f_1' p' \sqrt{Q^2 + (T+t)^2} = 0 \dots \dots \dots [2]$

Pour que la courroie ne glisse sur aucune des deux poulies, il faut que le rapport $\frac{T}{t}$ soit plus petit que la valeur calculée pour le cas où le glissement est sur le point de naître. Ainsi on devra avoir en même temps

$$\frac{T}{t} < e^{\frac{f_1}{R}} \quad \text{et} \quad \frac{T}{t} < e^{\frac{f_1'}{R'}}$$



Set s' étant les arcs embrasés par la courroie, sur les poulies A et A' . Dans l'hypothèse

de l'énoncé, on a $\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'} = \pi,$

mais le coefficient f peut n'être pas le même pour les deux poulies.

Soit m le plus petit des seconds membres des inégalités précédentes, on devra

poser $\frac{T}{t} < m$ ou bien $T = km t \dots \dots \dots [3]$

k étant moindre que l'unité et d'autant plus petite que l'appareil sera exposé à se consumer. Si cette circonstance n'existe pas, on fera $k = 0,9$ environ.

Les équations [1], [2], [3] fournissent la solution du problème.

Les équations [1] et [2] suffiraient, si la somme $T + t$ des tensions était donnée a priori.

248. — En général on doit éviter de tendre la courroie beaucoup plus qu'il ne faut, parce que la résultante des deux tensions produit une pression sur chacun des axes, et donne par conséquent lieu à un accroissement de frottement.

Indépendamment des variations de tensions qui sont dues au mouvement, la courroie en subit encore d'autres qui dépendent de l'état hygrométrique de l'atmosphère. Pour y remédier, on emploie une poudre de tennon appelée aussi tendeur.

§ 8. — Du Frein de Briony.

249. — Cet appareil a été décrit dans le cours oral. On se borne ici à quelques observations succinctes.

Le collier étant en contact avec les mâchoires du frein par une surface de révolution exactement centrée sur l'axe de rotation, si l'on appelle ω la vitesse angulaire de l'arbre, F l'une quelconque des forces élémentaires qui constituent le frottement du frein sur le collier, et r la distance de cette force à l'axe, le travail résistant par unité de temps que le frein en repos exerce sur le collier, et qu'il s'agit de mesurer, est $T = \sum F \omega r$ quelque soit le rayon r et même quelle que soient les divers rayons r si le collier n'est pas simplement cylindrique, comme, par exemple, lorsqu'il a la forme d'une poulie à gorge. D'une autre part, lorsque le frein est maintenu en repos sous l'action de ces frottements et des forces dont le moment Pl est connu, on a

$$\sum F r = Pl.$$

De là $T = Pl \omega = P v,$

en appelant v la vitesse qu'aurait un point lié à l'arbre tournant et situé à la distance l , ce résultat très simple est indépendant des lois du frottement.

Lorsque l'arbre tournant est vertical, le poids du frein n'entre pas dans la formule précédente, lorsque l'arbre est horizontal, ce poids n'y entre que pour son moment. Cependant si ce poids était très-grand il est certain qu'il affecterait le résultat de l'expérience, sans que la formule cessât d'être vraie. C'est qu'alors ce poids augmentant sensiblement le frottement des tournillons de l'arbre tournant sur ses appuis, le travail T constaté par le frein serait diminué de celui de ce frottement qu'il faudrait évaluer approximativement.

Il serait bon que les mâchoires du frein eussent une certaine élasticité, ce qu'on obtiendrait en plaçant au moins un des deux boulons de serrage à une assez grande distance de l'axe de rotation.

Coup d'œil sur l'ensemble du Cours de 1^{re} année et indication de l'application
des Notions générales de la Dynamique au calcul de l'effet
des Machines.

La Mécanique ou science du mouvement et de ses causes se divise en deux branches.

Dans la première, appelée Cinématique ou science du mouvement, on étudie le mouvement au point de vue géométrique sans considérer les forces qui le produisent;

Dans la seconde appelée Dynamique ou science des forces, on étudie les forces et leurs effets en distinguant deux cas: l'un est celui où les corps sous l'action des forces sont en repos ou en mouvement de translation rectiligne et uniforme; l'ensemble des connaissances acquises sur ce sujet est la Statique. L'autre cas, dans lequel la dynamique considère les effets des forces est celui où les corps soumis à ces forces ont un mouvement autre que rectiligne et uniforme; les connaissances qui s'y rapportent constituent la Dynamique proprement dite dans le sens qu'on attribue généralement à ce mot.

La première partie du cours a eu pour objet la Cinématique complète ainsi divisée:

Mouvement considéré sous le rapport de la vitesse.	simple ou absolu	{	Mouvement rectiligne d'un point,
			" curviligne. Sa projection, &c.
Mouvement considéré sous le rapport de l'accélération.	composé	{	d'un point
			d'un système solide
Application aux machines.	absolu	{	Mouvement rectiligne; son accélération.
			" curviligne; son accélération totale.
			Mouvement d'entraînement de translation,
Application aux machines.	composé	{	" " de rotation uniforme.
			" " quelconque.
			Transformations de mouvement sous la réserve de l'examen des frottements qui rendent quelquefois inapplicables certaines combinaisons qui satisfont aux conditions géométriques.

La deuxième partie du cours a eu pour objet principal la statique qui a néanmoins été précédée de notions fondamentales appartenant à la dynamique proprement dite.

On peut résumer comme il suit les principales questions auxquelles cette étude préliminaire permet de répondre.

1. Qu'est-ce qu'une force? La cause externe nécessaire pour modifier en intensité ou en direction la vitesse d'un point matériel. La notion de la force est liée en principe fondamental de l'inertie de la matière.

2. En quoi consiste l'effet actuel d'une force ou la modification de mouvement qu'elle produit sur un point matériel? Dans l'accélération totale qu'elle lui imprime. Si l'on

considère le mouvement du point comme décomposé en deux dont l'un soit la translation due à la vitesse acquise; l'autre est un mouvement partant de la vitesse nulle et ayant une accélération qui, en direction et en intensité, est l'accélération totale exclusivement due à la force. Il serait incorrect de dire qu'une force produit une certaine vitesse (au lieu de dire une certaine accélération) sans mentionner la durée de l'action de cette force, et sans tenir compte de sa variation (V. Questions 10 et 11 ci-après).

3. Quelle relation a-t-elle avec la force qui la produit? La réponse est fondée sur le principe de l'indépendance ou de la composition des effets des forces: l'accélération a la même direction que la force, et elle lui est proportionnelle, tant qu'il s'agit d'un même corps.

4. Quelle relation a-t-elle avec les forces s'il y en a plusieurs simultanées? Conséquence du même principe: propriété géométrique de la résultante.

5. Quelle relation a-t-elle avec le corps sur lequel la force agit? Elle est, pour une même force, en raison inverse de la masse; mais ceci n'est proprement un nouveau théorème: ce n'est qu'une conséquence de l'article 3 ci-dessus, et de la définition de la masse. Formule $J = \frac{F}{m} = \frac{R}{m}$.

6. Comment se détermine la masse d'un corps? Par l'expérience: $m = \frac{F}{J} = \frac{P}{g}$.

7. Quelle relation l'accélération totale $\frac{R}{m}$ a-t-elle avec le mouvement projeté sur un axe? Elle est exprimée par la formule $\frac{R_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, les projections étant orthogonales ou obliques. On a d'ailleurs (4. ci-dessus) $R_x = \sum F_x$.

8. Quelle relation l'accélération totale $\frac{R}{m}$ a-t-elle avec le mouvement suivant la courbe décrite? Sa projection orthogonale sur la tangente $\frac{R \cos(R, ds)}{m}$ ou $\frac{\sum F \cos(F, ds)}{m}$ est égale à l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$. On appelle $R \cos(R, ds)$ la force tangentielle totale.

9. Quelle relation l'accélération totale $\frac{R}{m}$ a-t-elle avec la courbure de la trajectoire? Elle est exprimée par la formule $\frac{R}{m} \cos(R, \rho) = \frac{v^2}{\rho}$, le rayon de courbure étant ρ . On appelle $R \cos(R, \rho)$ ou $\sum F \cos(F, ds)$ la force totale centripète.

10. Quelles conséquences remarquables tire-t-on de l'équation $\frac{\sum F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt}$ de l'accélération projetée? Les deux théorèmes des projections de la quantité de mouvement et de l'impulsion, élémentaire et totale. Formules: $m dv_x = \sum F_x dt$ et $mv_x - mv_{x_0} = \sum \int F_x dt$, projections quelconques.

11. Quelles conséquences résultent de l'équation $\frac{\sum F \cos(F, ds)}{m} = \frac{dv}{dt}$ de l'accélération tangentielle? 1°. Deux théorèmes analogues aux précédents pour la quantité de mouvement suivant la courbe. Formules $m dv = \sum F \cos(F, ds) dt$ et $mv - mv_0 = \sum \int F \cos(F, ds) dt$. 2°. En éliminant le temps par la relation $v = \frac{ds}{dt}$ et en intégrant, on obtient l'équation du travail $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \sum \int F \cos(F, ds) ds$ qui se simplifie dans le cas de la pesanteur et en général d'une force constante.

12. Comment étend-on aux systèmes matériels les théorèmes précédents de la dynamique des points matériels? Les deux considérations: 1° Sur un point matériel toute force est externe, c'est à dire due à un autre corps. Mais s'il s'agit d'un système de points matériels, les forces que l'un d'eux reçoit peuvent venir de corps étrangers au système: exemple la pesanteur due à la terre, les pressions dues aux corps environnant animés ou inanimés; elles sont alors dites extérieures; ou bien elles peuvent venir des autres points du système, et sont dans ce cas appelées forces intérieures. 2° Principe de la réaction égale et contraire à l'action. Cette loi s'étend à toutes les forces de la nature, mais on l'applique surtout dans la mécanique aux forces intérieures.

13. Quelle extension donne-t-on, dans le cas d'un système matériel, aux théorèmes relatifs à la projection du mouvement d'un point sur un axe (7 et 10 ci-dessus)? Les sommes des projections des forces intérieures disparaissant, on obtient, en désignant par F les forces extérieures seulement, les équations $\sum m \frac{dv_x}{dt}$, ou $\sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_x$, $\sum m dv_x = \sum F_x dt$, $\sum mv_x - \sum mv_{0x} = \sum \int F_x dt$.

14. Quelle conséquence déduit-on du rapprochement de ces formules et de la propriété géométrique du centre de gravité d'un système? Le théorème général du mouvement du centre de gravité d'un système matériel quelconque.

15. Quelle extension donne-t-on dans le cas d'un système matériel au théorème du travail (11 ci-dessus)? Les forces intérieures ne disparaissent que dans ce cas particulier, mais leur travail a une expression remarquable. Formule $\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2 = \sum C.F. + \sum \int f dl$.

Les lois et notions qui viennent d'être rappelés ont servi de fondement à l'étude de la statique qui peut se diviser ainsi qu'il suit:

1° Statique générale ou conditions nécessaires pour l'équilibre des corps de quelque nature qu'ils soient. Ces conditions s'appliquent à une portion quelconque d'un système matériel, pourvu qu'on tienne compte des forces que les autres portions exercent sur celle-là et qui sont alors des forces extérieures.

2° Statique spéciale qui admet dans les corps certaines qualités qui n'y existent jamais qu'à l'approximation, savoir: la solidité parfaite, la flexibilité parfaite sans pesanteur (systèmes funiculaires), la nullité du frottement dans les corps solides articulés. L'hydrostatique qui appartient à la même classe de faits très-approximativement conformes à l'expérience est ajoutée à la 2^e année d'étude.

3° Statique expérimentale qui considère l'extensibilité et la compressibilité des corps, le frottement, la raideur des cordes.

Application de l'équation du travail aux machines.

Les mêmes notions de dynamique générale trouvent des applications très-importantes dans la théorie des machines considérées notamment au point de vue du travail des forces, sorte de grandeur qui est la véritable mesure de l'activité productive de ces forces dans l'industrie.

Divers modes du travail moteur. Les forces qui agissent sur une machine pour produire ou entretenir son mouvement pendant qu'elle est soumise à diverses résistances consistent quelquefois dans l'action de la pesanteur sur la machine elle-même, quelquefois dans l'action de ressorts intérieurs qui se détendent, mais le plus souvent dans les pressions exercées par des corps qui ne font pas partie de la machine et qui constituent son moteur distinct. Ils remplissent cette fonction de deux manières, tantôt en perdant partiellement la vitesse qu'ils possédaient, tantôt en transmettant en totalité ou en partie les forces qu'ils reçoivent eux-mêmes soit de la pesanteur, soit de l'élasticité des fluides, soit de l'action musculaire des animaux.

Théorème général de la transmission du travail. Les propriétés générales du mouvement d'un système sous l'action de forces extérieures et intérieures étant applicables à une machine quelconque, appelons :

E_m le travail moteur résultant, pendant un certain temps, soit de l'action de ressorts qui font partie de la machine et se détendent, soit de forces exercées par les corps extérieurs constituant son moteur distinct;

— E le travail, dans le même temps, des forces qui constituent la résistance principale qu'on a eue pour but de vaincre en établissant la machine, travail qui est la mesure du service de cet appareil comme il est facile de le voir par quelques exemples (élévation des fardeaux, sciage, limage, buinage, &c.);

— E_r le travail des résistances secondaires, sans utilité pendant le même temps par la machine, travail qui ne peut jamais être nul et qui est dû aux frottements et ébranlements des corps voisins, aux frottements et déformations des parties de la machine elle-même;

P le poids total de la machine;

H_0 et H les ordonnées initiale et finale de son centre de gravité au-dessous d'un plan horizontal fixe quelconque;

p ou mg le poids d'un point matériel de la machine;

v_0 et v les vitesses initiale et finale de ce point pour le temps considéré;

L'équation générale du travail (15 ci-dessus) peut s'écrire ainsi:

$$\sum \frac{1}{2} m v^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2 = E_m - E - E_r + P(H - H_0)$$

d'où
$$E = E_m + P(H - H_0) - E_r - (\sum m v^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2)$$

ce qu'on exprime en disant que l'effet dynamique d'une machine est égal au travail moteur indépendant du poids de la machine, plus au travail de la pesanteur mesuré par le produit de ce poids par la hauteur dont le centre de gravité de la machine s'est abaissé; moins la valeur absolue du travail des résistances secondaires, moins encore l'accroissement de la puissance vive de la machine.

Les termes E , E_m , E_r essentiellement positifs croissent avec le temps. Au contraire le terme variable $\sum \frac{1}{2} m v^2$ atteint promptement une valeur qu'il ne dépasse pas; souvent même il varie peu à partir de l'instant où il a atteint cette limite, et si c'est après cet instant que l'on prend l'état initial de la machine, la différence $\sum \frac{1}{2} m v^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2$ oscille entre des valeurs peu considérables et finit dans tous les cas par pouvoir être négligée auprès de la somme des quantités croissantes E , E_m , E_r . Il en est de même du produit $P(H - H_0)$, à moins que la machine ne soit locomotive, auquel cas la valeur absolue de ce produit s'ajoute au travail moteur E_m si le centre de gravité est descendu, et au travail des résistances invisibles $-E_r$ dans l'hypothèse contraire.

On peut donc, en calculant les termes de l'équation précédente, entre deux instants suffisamment éloignés, la réduire très approximativement à la formule $E = E_m - E_r$, très simple et très remarquable en ce que les forces qui agissent sur la machine n'y paraissent pas distinctement mais y sont combinées avec la cheminée décrite par leurs points d'application projetés sur leurs directions.

On voit que les machines ne rendent jamais inutilement autant de travail qu'on leur en donne, mais elles ne sont pas moins de la plus évidente utilité: prenant le travail tel que la nature le présente disponible, elles le transportent, le dissipent ou le concentrent de mille manières, suivant nos besoins, en faisant varier l'un ou l'autre des facteurs du travail transmis. Par exemple, mûrie en exerçant un effort de 8^{1/2} sur une manivelle dont le parcours est de 0^m 75 par seconde, peut élever lentement un fardeau de 1000 K³ ou faire tourner rapidement un grand nombre de broches à filer dont chacune n'offre qu'une faible résistance.

§ 1. - Résumé des notions précédentes sur ce sujet.

250. - Un point dont la masse est m , soumis à une ou plusieurs forces F dont la résultante est R , prend actuellement, quelle que soit la vitesse v préalablement acquise, une accélération J dont la direction est celle de la résultante R et dont l'intensité est $\frac{R}{m}$, c'est-à-dire que si l'on considère le mouvement du point comme décomposé en deux dont l'un soit la translation due à la vitesse acquise v , l'autre est un mouvement partant de la vitesse nulle et acquérant dans le temps dt une vitesse $J dt$ égale à $\frac{R}{m} dt$ et ayant la direction de R .

On en conclut: 1^o Pour la projection rectangulaire ou oblique des forces et du mouvement sur un axe quelconque:

$$\frac{R_x}{m} \text{ ou } \frac{\sum F_x}{m} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ accélération de la projection.}$$

2^o Pour la projection rectangulaire des forces sur la tangente:

$$\frac{R \cos(R, ds)}{m} \text{ ou } \frac{\sum F \cos(F, ds)}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ accélération tangentielle.}$$

3^o Pour leur projection rectangulaire sur la direction du rayon de courbure ρ

$$\frac{R \cos(R, \rho)}{m} = \frac{v^2}{\rho} \text{ accélération centripète.}$$

251. - De $\frac{R_x}{m} = \frac{dv_x}{dt}$ on tire:

$$m dv_x = R_x dt = \sum F_x dt \text{ et } mv_x - mv_{0x} = \sum \int F_x dt = \int R_x dt,$$

équation de la quantité de mouvement et de l'impulsion projetées sur un axe.

252. — De $\frac{R \cos(R, ds)}{m} = \frac{dv}{dt}$ on tire

1° $m \cdot dv = R \cos(R, ds) dt = \sum F \cos(F, ds) dt$, et $mv - mv_0 = \int R \cos(R, ds) dt = \sum \int F \cos(F, ds)$,
 équation de la quantité de mouvement et de l'impulsion tangentielle.

2° $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int R ds \cos(R, ds) = \sum \int F ds \cos(F, ds), \dots \dots \dots [1]$
 équation du travail des forces appliquées à un point.

253. — Cette dernière équation prend une autre forme quelquefois plus commode pour le calcul. On substitue aux forces F les sommes X, Y, Z de leurs composantes parallèles à trois axes rectangulaires: on a $ds \cos(X, ds) = dx$, etc.; d'où, en égard aux signes, on conclut dans tous les cas

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int (X dx + Y dy + Z dz) \dots \dots \dots [2]$$

§ 2. — Cas particulier de l'équation du travail, dit
Principe des Forces vives.

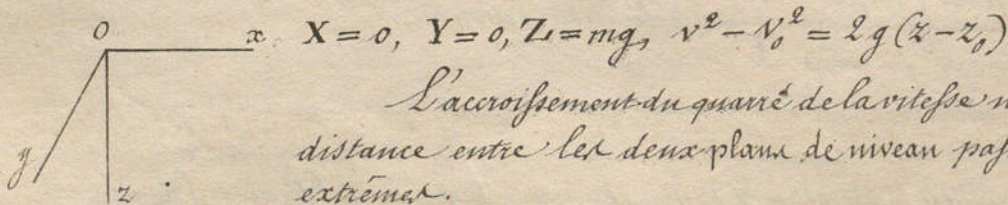
254. — Parmi les divers cas de l'équation générale du travail, les géomètres ont distingué ceux où le second membre est intégrable en une fonction des coordonnées variables du mobile:

de $X dx + Y dy + Z dz = d.f(x, y, z)$ on conclut $\frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \dots \dots [3]$

Ainsi: Lorsque $X dx + Y dy + Z dz$ est la différentielle d'une certaine fonction de x, y et z considérées comme variables indépendantes, l'accroissement du carré de la vitesse du point mobile ne dépend que des coordonnées des deux positions extrêmes, quelles que soient la direction et la grandeur de la vitesse initiale, quelque temps qu'il mette à parvenir d'une position à l'autre; et quelque ligne qu'il décrive entre les deux.

Cette propriété exprimée par l'équation [3] constitue ce que les géomètres ont appelé Principe des forces vives moins général que le théorème du travail, indépendant de toute hypothèse, exprimé par l'équation [1] ou [2].

255. — Cas très-particulier. L'équation [3] a lieu lorsque le point mobile est soumis à une force unique, constante, et constamment perpendiculaire à un même plan, comme le poids d'un corps pour une trajectoire restreinte.



L'accroissement du carré de la vitesse ne dépend donc que de la distance entre les deux plans de niveau passant par les positions extrêmes.

256. — Par analogie, lorsqu'on a $X dx + Y dy + Z dz = d.f(x, y, z)$, on appelle surfaces de niveau celles dont l'équation générale est $f(x, y, z) = \text{Constante}$, et l'équation [3] montre que si le

mobile soumis aux forces X, Y, Z , part d'un point de la surface $f(x, y, z) = C_0$ avec une vitesse v_0 , dans une direction arbitraire; la vitesse v qu'il aura, lorsqu'il arrivera en un point de la surface $f(x, y, z) = C$, est déterminée en grandeur par ces seules données, indépendamment du temps, de la trajectoire et du nombre de fois que le mobile traverse les surfaces de niveau extrêmes et leurs intermédiaires.

257. — Dans le cas (255) de la pesanteur, les plans de niveau sont partout perpendiculaires à la force totale mg . Les surfaces de niveau d'un même système ont une propriété analogue: elles ont une même équation différentielle

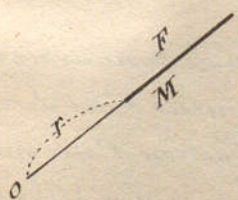
$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

qui exprime que les deux directions dont les angles avec les axes ont des cosinus proportionnels à X, Y, Z pour l'une, et à dx, dy, dz pour l'autre sont perpendiculaires respectivement. Donc la force dont les composantes sont X, Y, Z à un instant quelconque est normale à la surface de niveau sur laquelle se trouve à cet instant le mobile.

258. — Si parmi les forces qui sollicitent le mobile il en est qui soient nécessairement perpendiculaires à la trajectoire, celles-ci disparaissent de l'équation générale [1] ou [2], et les considérations précédentes s'appliquent lorsque les autres forces satisfont à la condition $X dx + Y dy + Z dz = d f(x, y, z)$, c'est-à-dire que les composantes totales X, Y, Z de ces autres forces sont exprimées par les dérivées partielles d'une fonction des variables x, y, z considérées comme indépendantes.

On fait une application purement théorique de cette observation lorsque considérant le mouvement d'un point matériel assujéti à rester sur une courbe ou sur une surface, on suppose que le corps qui l'oblige ainsi n'exerce sur le mobile que des forces normales à la trajectoire, et que les autres forces satisfont à la condition d'intégrabilité ci-dessus indiquée. Cette application n'a pas lieu quand on a égard au frottement ou à la résistance d'un milieu, car alors les forces X, Y, Z ne sont pas même des fonctions de x, y, z .

259. — Théorème. L'expression $X dx + Y dy + Z dz$ est une différentielle exacte toutes les fois que les forces passent par des centres fixes et que leurs intensités sont fonctions des distances du mobile à ces divers centres.



Soit F l'une quelconque des forces agissant dans le sens OM si elle est positive, &c. — Son travail élémentaire est, en égard aux signes, $F dr$. Donc

$$X dx + Y dy + Z dz = \sum F dr = d. \sum (F(r) - F(r_0)).$$

Or pour chacun des centres fixes tels que O dont les coordonnées sont a, b, c , on a

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2};$$

donc $F(r)$ est ramenée à la forme $f(x, y, z)$. Mais il pourra être préférable de déter-

terminer l'accroissement du carré de la vitesse sans considérer les surfaces de niveau et par la formule

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \sum \int_{r_0}^r F dr.$$

260. — Si le point était sollicité par une force constamment perpendiculaire à un plan fixe et dépendante uniquement de la distance à ce plan, les mêmes conséquences auraient évidemment lieu pour cette force. On le voit directement en prenant le plan dont il s'agit pour l'un des plans coordonnés, des x, y par exemple. $X = 0, Y = 0, Z = F(z)$; si cette force est unique, on a

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \int F(z) dz = f(z) - f(z_0)$$

Les surfaces de niveau sont alors des plans parallèles aux x, y

§ 3. — Mouvement d'un point sur une courbe donnée.

261. — Les relations rappelées au § 1 sont sans exception, et par conséquent applicables au cas présent, pourvu que parmi les forces qui agissent on comprenne celles qui exercent les corps qui assujettissent le point considéré à se mouvoir sur une certaine courbe ou sur une certaine surface.

Les géomètres ont admis l'existence de surfaces parfaitement invariables de formes et parfaitement polies n'opposant aux corps qui les pressent que des résistances ou réactions normales. Mais on sait (196) que les choses ne se passent pas ainsi dans la nature et que pour se représenter l'action d'une surface sur laquelle glisse un corps, il faut, en outre de la réaction normale, tenir compte en chaque point glissant d'une force appelée frottement dirigée en sens contraire du mouvement tangentiellement à la surface.

L'hypothèse se réalise approximativement lorsqu'un petit corps est assujéti à se mouvoir, soit sur une sphère au moyen d'un fil attaché à un point fixe, soit sur un cercle au moyen de deux fils, soit sur une courbe plane au moyen d'un fil très flexible qui s'enroule sur la développée de la première courbe; dans ces divers cas, la masse du fil est supposée pouvoir être négligée.

Sous la réserve de ces observations, les questions relatives au mouvement d'un point sur une courbe ou sur une surface sans frottement, offrent de l'intérêt. Nous ne devons ici nous occuper que du premier de ces deux cas.

262. — Mouvement sur une courbe. A partir de l'instant initial, où le mobile peut avoir une certaine vitesse tangentielle à la courbe, toutes les circonstances du mouvement sont dues à des forces F indépendantes de la courbe (telles que le poids du mobile, l'action d'un moteur, &c.), et à une force N normale à la courbe, qui s'appelle pour abréger, la réaction de la courbe, au lieu de dire que cette force N est la résultante des réactions des corps qui obligent le corps à rester sur la courbe, quelles que soient les forces F . Cela posé, la variation de la vitesse du mobile suivant sa trajectoire ne dépend (250, 2°) que de la force tangentielle; on a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sum F \cos(F, ds)}{m}, \quad mv - mv_0 = \int_{t_0}^t \sum F \cos(F, ds) \cdot dt, \quad \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \sum \int_{s_0}^s F \cos(F, ds) \cdot ds$$

de sorte que si les forces F ne dépendent à chaque instant que de la position du mobile sur la trajectoire, la vitesse du mobile en chaque position, et par suite la durée du parcours d'un point à un autre seront calculables sans qu'on ait à s'occuper de la force N . Celle-ci sera ensuite calculée par la formule (250, 3^e) de la force centripète. Cette dernière force étant la somme des projections rectangulaires de toutes les forces sur le rayon de courbure, dont la direction est comme en chaque point, on a

$$\sum F \cos(F, \rho) + N \cos(N, \rho) = \frac{mv^2}{\rho};$$

et il faut de plus considérer que la résultante de toutes les forces F et de N est dans le plan osculateur au point actuellement considéré de la courbe, de sorte que si l'on mène à partir de ce point une perpendiculaire indéfinie ζ au plan osculateur, on a

$$\sum F \cos(F, \zeta) + N \cos(N, \zeta) = 0;$$

la force N sera ainsi déterminée par ses deux composantes rectangulaires $N \cos(N, \rho)$ et $N \cos(N, \zeta)$. La force égale et opposée à N s'appelle la pression du mobile sur la courbe, et la force égale et opposée à $\frac{mv^2}{\rho}$ se nomme la force centrifuge du mobile.

En conséquence, si l'on décompose les forces F en trois forces rectangulaires l'une $\sum F \cos(F, ds)$ suivant la tangente, l'autre $\sum F \cos(F, \rho)$ suivant le rayon de courbure, la 3^e $\sum F \cos(F, \zeta)$ perpendiculaire au plan osculateur, la première divisée par la masse est égale à l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$, la troisième est l'une des composantes rectangulaires de la pression du mobile sur la courbe, la deuxième composée avec la force centrifuge exprimée par $\frac{mv^2}{\rho}$ donne la seconde composante de la même pression.

263. Le problème précédent peut se mettre en équation sans faire intervenir à priori le plan osculateur et le rayon de courbure. Soient X, Y, Z , les sommes des projections des forces F sur trois axes coordonnés rectangulaires. Ces trois forces et la force N représentent la totalité des forces qui agissent sur ce mobile; les équations générales de son mouvement sont donc (250, 1^o)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + N \cos(N, x), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + N \cos(N, y), \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + N \cos(N, z).$$

La direction de N étant perpendiculaire à la tangente à la courbe, on a

$$dx \cos(N, x) + dy \cos(N, y) + dz \cos(N, z) = 0,$$

$$\text{et} \quad \cos^2(N, x) + \cos^2(N, y) + \cos^2(N, z) = 1.$$

Enfin les coordonnées du mobile à chaque instant satisfont aux équations de la courbe sur laquelle il se meut:

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0.$$

On a donc sept équations entre les huit quantités $x, y, z, \cos(N, x), \cos(N, y), \cos(N, z), N$ et t .

§ 4. - Applications du § précédent.

264. - Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné sans frottement. Le corps est sollicité par deux forces, l'une verticale qui est son poids p , l'autre N réaction normale du plan. Leur résultante est dans le plan incliné où se meut le corps; elle est aussi dans le plan des deux composantes; elle est donc suivant la ligne de plus grande pente. Son intensité (g) est $p \sin i$ ou $p \frac{h}{l}$.



grande pente sont

Si le corps est parti du repos, les équations suivant la ligne de plus grande pente sont

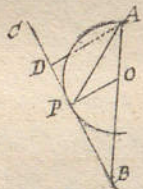
$$\frac{dv}{dt} = \frac{p \sin i}{m} = g \sin i, \quad v = g \sin i t, \quad x = \frac{1}{2} g \sin i \cdot t^2, \quad v^2 = 2 g \sin i \cdot x.$$

En supposant que le corps ait parcouru la longueur l et soit descendu de la hauteur h , on a: 1° pour la vitesse finale, $v = \sqrt{2gl \sin i} = \sqrt{2gh}$, ce qui est conforme au théorème du travail; 2° pour le temps de la descente $t = \sqrt{\frac{2l^2}{g \sin i}} = l \sqrt{\frac{2}{g \sin i}}$.

Ainsi, deux mobiles partant sans vitesse initiale d'un même point et suivant deux plans inclinés quelconques arrivent au même plan horizontal avec des vitesses égales mais dans des temps inégaux, proportionnels aux longueurs parcourues.

Si pour divers plans inclinés on a $\frac{l^2}{h} = \text{constante}$, c'est-à-dire si les plans ont les mêmes longueurs et les mêmes inclinaisons que les cordes aboutissant à l'une des extrémités du diamètre vertical d'un même cercle, le temps de la descente est constant.

265. - Problème. Étant donné un point A et un plan BC déterminer le plan incliné AP suivant lequel un corps pesant, parti de A sans vitesse initiale, arrivera au plan BC dans le temps le plus court. La droite cherchée AP divise en deux parties égales l'angle BAD de la verticale AB et de la normale AD au plan.

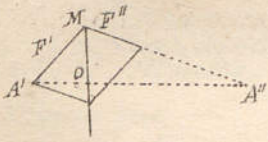


266. - Mouvement circulaire, sans pesanteur. 1^{er} Cas. Un fil inextensible a une de ses extrémités fixe, et l'autre est attachée à un point matériel auprès duquel la masse du fil peut être négligée. Si ce point matériel est mis en mouvement et ensuite abandonné à la seule force qu'exerce sur lui le fil tendu, la pesanteur étant supposée ne pas exister, le mouvement du corps est circulaire et uniforme. $\frac{mv^2}{r}$ est l'intensité de la force centripète, exercée sur lui par le fil. En vertu du principe de la réaction égale et contraire à l'action, le corps exerce réciproquement sur le fil une force de même intensité $\frac{mv^2}{r}$ mais centrifuge.

De même si l'on conçoit qu'un point matériel décrive un cercle en vertu d'une vitesse acquise et sans autre force actuelle que celle qu'il obtiendrait en s'appuyant sur la concavité.

d'une courbe sans frottement, c'est alors la courbe qui exerce sur le corps la force centripète nécessaire à son mouvement circulaire, et le corps exerce réciproquement sur la courbe la force centrifuge.

267. 2^e Cas. Si le point matériel M est retenu par deux fils tendus MA' , MA'' dont les extrémités A' , A'' sont fixes, et si l'on fait encore ici abstraction de la pesanteur, la distance MO étant r , la force centripète $\frac{mv^2}{r}$ est la résultante des deux forces F' , F'' exercées suivant MA' et MA'' par les fils sur le mobile M . Ces forces satisfont aux équations

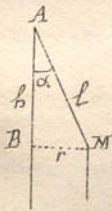


$$\frac{F'}{\sin(A''MO)} = \frac{mv^2}{r} = \frac{F''}{\sin(A'MO)}$$

Les tensions des fils et les forces exercées par eux sur les points fixes A' , A'' sont les mêmes que si les fils et le point M étant en repos, ce point était sollicité par la force centrifuge égale et contraire à la force centripète $\frac{mv^2}{r}$.

Ici la force centripète nécessaire au mouvement circulaire du point M , n'est plus exercée réellement sur ce point; elle est remplacée par ses deux composantes F' , F'' exercées sur lui par les fils.

268. Pendule conique. Un fil AM supposé rigide et inextensible; considéré néanmoins comme non pesant est lié par une articulation à charnière au point A d'une tige verticale qui tourne sur son axe AB . Ce fil porte en M un point matériel soumis à la pesanteur. A un instant où le fil forme avec la verticale AB un angle α , la tige et le fil ont une vitesse angulaire ω . On demande quelle doit être l'intensité de cette vitesse en fonction des côtés du triangle AMB , pour que le point M , sous la double action de la pesanteur et de la tension du fil, conserve sa vitesse horizontale, et, par conséquent décrive indéfiniment le cercle horizontal dont le rayon est BM .

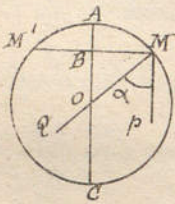


Soient $BM = r$, $AB = h$, $AM = l$. Le point M est sollicité par deux forces, l'une verticale qui est son poids p ou mg , l'autre inconnue mais qui, exercée par le fil, ne peut avoir que la direction MA à cause de la liberté de l'articulation en A . Leur résultante est suivant MB et égale à $m\omega^2 r$. Ces trois forces sont proportionnelles aux côtés du triangle AMB qui leur sont parallèles: donc $m\omega^2 r = \frac{mgr}{h}$, $\omega^2 = \frac{g}{h} = \frac{g}{l \cos \alpha} > \frac{g}{l}$.

$$\text{Durée d'une révolution } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2,006 \sqrt{h} < 2,006 \sqrt{l}$$

269. Application des mêmes considérations à la surface d'un liquide pesant ayant un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. $h = \frac{g}{\omega^2}$ sous normale constante, parabole.

270. - Point pesant sur un cercle vertical. Ce point M est assujéti à rester à une distance r du point fixe O au moyen d'un fil MO ; quand il passe à la position culminante A , il possède une vitesse α ; il est d'ailleurs sollicité par la pesanteur. On demande sa vitesse et la tension Q du fil dans une position quelconque M .



L'équation du travail (252, 2°), AB étant désigné par x , est (le travail de Q est nul)

$$\frac{1}{2} m(v^2 - \alpha^2) = px \quad \text{ou} \quad v^2 = \alpha^2 + 2gx.$$

La somme algébrique des composantes orthogonales suivant MO des forces Q et P est

$$Q + p \cos \alpha = \frac{mv^2}{r} \quad \text{ou} \quad Q + p \frac{r-x}{r} = \frac{pv^2}{gr}, \quad \text{d'où} \quad Q = p \left(\frac{\alpha^2}{gr} + \frac{3x}{r} - 1 \right).$$

Q peut être négative, c'est-à-dire agir dans le sens OM ; le fil doit alors être rigide.

Si au lieu d'être attaché à un fil, le mobile glisse sans frottement sur la surface convexe d'un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal, sa vitesse α au point culminant A étant dirigée tangentielllement au cercle AMC , le mobile ne peut rester sur la surface qu'autant que Q est négative dans la formule précédente. Ainsi $\frac{\alpha^2}{gr} < 1$. L'abscisse x du point où le mobile quitte la surface du cylindre pour décrire une parabole est déterminée par la condition $Q = 0$ ou $x = \frac{r}{3} - \frac{\alpha^2}{3g}$.

271. - Mouvement pendulaire. Cas particulier de l'exemple précédent. Le point pesant part de A sans vitesse initiale. Si l'on appelle z la projection variable BP de l'arc AM sur la verticale OC , on a la vitesse du mobile parvenu en M par l'équation du travail d'où l'on tire

$$v = \sqrt{2gz}$$

Pour en conclure la relation de z avec le temps, on remarque que $\frac{dz}{dt}$ est la projection de v sur BC . Par conséquent

$$\frac{dz}{dt} = v \cos OMP = \frac{v \cdot PM}{r} = \frac{PM \sqrt{2gz}}{r}, \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{r}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{PM \sqrt{z}}$$

PM s'exprime en fonction de z ; en faisant $BC = h$, on a $PM = \sqrt{(h-z)(2r-h+z)}$. Ainsi le calcul de t en fonction de z est ramené à une quadrature. Ce calcul, qui appartient au cours d'Analyse, se simplifie quand on considère les petites oscillations pour lesquelles l'arc AC étant très-petit comparativement au rayon, on peut remplacer PM

par la corde CM et poser $PM = \sqrt{2r(h-z)}$. On a alors $dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z(h-z)}}$; d'où

$$\text{en intégrant} \quad t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos \left(\frac{\frac{1}{2}h - z}{\frac{1}{2}h} \right) + C$$

La durée de la demi-oscillation, de A en C, est donc $\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, et celle d'une oscillation entière

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

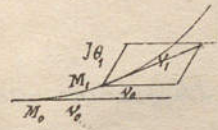
272. - Remarques. 1° La durée de l'oscillation est indépendante de son amplitude, pourvu que celle-ci soit petite. Ce fait, observé par Galilée, fut le point de départ de ses découvertes en Mécanique.

2° La durée de la descente de A en C suivant l'arc de cercle est $\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$; suivant la corde sans frottement (264), elle serait $\sqrt{\frac{4r}{g}}$; le rapport de ces deux durées est $\frac{1}{4} \pi = 0,785$.

3° Le pendule simple, auquel se rapporte la formule précédente, est une abstraction, le corps pesant étant réduit à un point et le fil étant supposé sans pesanteur. On verra bientôt comment la formule est applicable à un corps quelconque.

§ 5. - Moments des quantités de mouvement et des impulsions pour un point matériel.

273. - Un point, pendant le temps infiniment petit θ , parcourt l'élément curviligne $M_0 M_1$ et passe de la vitesse v_0 à la vitesse v_1 sous l'influence d'une force totale R_1 . On sait (60 et 98) que la vitesse v_1 suivant la tangente en M_1 est la résultante de la vitesse v_0 suivant la parallèle à la tangente en M_0 , et de la vitesse $\frac{R_1 \theta}{m}$ acquise pendant le temps θ .



D'après cela, en appliquant à une droite résultante de plusieurs droites la propriété démontrée (115) pour une force résultante de plusieurs forces, et en prenant les moments par rapport à un axe quelconque, on a

$$M_0 v_1 = M_0 v_0 + M_0 \frac{R_1 \theta}{m}, \quad \text{ou} \quad M_0 m v_1 - M_0 m v_0 = M_0 R_1 \theta = \sum M_0 F_i \theta,$$

ou
$$d. M_0 m v = \sum M_0 F dt \dots \dots \dots [1]$$

c'est-à-dire que l'accroissement élémentaire du moment de la quantité de mouvement est égal à la somme des moments des impulsions élémentaires des forces.

En intégrant on a

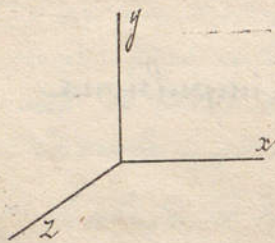
$$M_0 m v - M_0 m v_0 = \sum \int M_0 F dt \dots \dots \dots [2]$$

Ainsi Théorème l'accroissement du moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments des impulsions des forces pendant le même temps.

274. - Autre énoncé du même théorème. Les géomètres donnent à l'équation d. $M_0 m v = \sum M_0 F dt$ 1^{re} Division. Cours de Méc. et Mach. - 3^e Feuille.

d'autres formes. 1^o En remplaçant v par $\frac{ds}{dt}$ on a $Mmv = \frac{mMds}{dt}$. Or Mds est le double de l'aire du triangle infiniment petit décrit dans le temps dt par la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe des moments, d'un rayon vecteur joignant cet axe au point mobile. Le quotient de cet aire par dt a reçu récemment la dénomination de vitesse aréolaire du point considéré autour de l'axe des moments. L'équation [2] peut donc s'énoncer en disant que le produit de la masse m par l'accroissement de la vitesse aréolaire autour d'un axe quelconque est égal à la moitié de la somme des moments des impulsions des forces, pendant le même temps. Et par extension de cette locution, l'équation [1] divisée par dt pourrait être énoncée en ces termes: Le produit de la masse par l'accélération aréolaire autour d'un axe quelconque et à un instant quelconque, est égal à la moitié de la somme des moments des forces autour du même axe et à ce même instant.

2^o Le point mobile étant rapporté à trois axes rectangulaires des x, y, z , si l'on remplace les forces F par les sommes X, Y, Z , parallèles à ces axes, et si l'on prend l'axe des z pour celui des moments, l'équation [1] peut s'écrire ainsi en décomposant v en $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$:



$$m d \left(\frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = (xY - yX) dt$$

ou bien
$$m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = xY - yX$$

équation qui résulte immédiatement des formules $m \frac{d^2y}{dt^2} = Y, m \frac{d^2x}{dt^2} = X$.

On peut donc tirer de ces dernières les équations [1] et [2] et les théorèmes qu'elles expriment; mais ces déductions analytiques sont moins naturellement amenées que les considérations géométriques du n^o 273 dues à M. le général Poncelet.

275. — Cas particulier dit principe des aires pour un point matériel. Ceci est celui où la résultante des forces est continuellement dans un plan contenant l'axe des moments.

On a $\sum MF = 0, Mv = \text{const.}$ Ainsi le moment de la vitesse autour de l'axe qui jouit de cette propriété est constante, ce qu'on peut ainsi exprimer en disant que la vitesse aréolaire autour du même axe est constante, ou bien que les aires décrites par la projection, sur un plan perpendiculaire à cet axe, du rayon vecteur joignant l'axe au point mobile sont proportionnelles aux temps correspondants.

§ 6. - Extension de tous les théorèmes précédents aux mouvements relatifs.

276. - Il suffit de joindre aux forces réelles qui sollicitent le mobile, les forces fictives $-mJ_z$ et $2m\omega u$, comme il est dit et expliqué par des exemples aux N^{os} 122 et suivants.

Dans le mouvement d'un corps observé à la surface de la terre sous la seule action de la pesanteur il y a deux forces fictives dont l'une disparaît de l'équation du travail. Il ne reste à y faire entrer que l'attraction réelle exercée par la terre et la force centrifuge due à son mouvement de rotation. Admettons que la première est dirigée vers le centre de la terre et réciproque au carré de la distance. Si A est l'attraction que reçoit l'unité de masse α , cette force, à la distance r , est $\frac{mA\alpha^2}{r^2}$, son travail élémentaire est $-\frac{mA\alpha^2}{r^2} dr$ dont l'intégrale est $mA\alpha^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$. La 2^e force est $m\omega u^2$, la longueur u étant la distance à l'axe de rotation, et son travail $\int m\omega^2 u du$ est $\frac{m\omega^2}{2} (u^2 - u_0^2)$. L'équation du travail devient donc

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = mA\alpha^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 (u^2 - u_0^2).$$

Elle se ramène à la forme [3] du N^o 254 si l'on fait $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $u^2 = x^2 + y^2$. La surface d'équilibre des mers est une des surfaces de niveau exprimées par l'équation

$$A\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \text{constante}.$$

Chap. 2. - Théorèmes généraux de la Dynamique des systèmes matériels.

§ 1. - Résumé des notions précédentes sur ce sujet.

277. - Les corps sont considérés comme des assemblages de points matériels. L'extension des théorèmes de la Dynamique d'un point matériel à la Dynamique des systèmes repose sur deux considérations : 1^o la distinction des forces qui sollicitent les éléments d'un système en forces extérieures et forces intérieures ; 2^o Le principe de la réaction égale et contraire à toute action.

278. - Théorème de la quantité de mouvement et de l'impulsion projetées sur une droite. Si l'on imagine écrite pour chaque point du système l'équation (250, 1^o) $m dv_x = \sum F_x dt$ et qu'on

faite la somme de toutes les équations ainsi posées, on aura

$$\sum m dv_x = \sum F_x dt.$$

Cette dernière somme s'étend à toutes les forces; mais il est inutile d'y comprendre les forces intérieures puisque, celles-ci étant égales et opposées deux à deux, leurs projections sur un même axe se détruisent algébriquement.

En intégrant, on a $\sum m v_x - \sum m v_{0x} = \sum \int_{t=0}^t F_x dt.$

Donc Théorème. L'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est égal à la somme des impulsions des forces extérieures projetées sur le même axe, pendant le même temps, soit élémentaire soit fini.

279. — Théorème du mouvement du centre de gravité. La quantité de mouvement projetée du système étant celle d'un point qui aurait la même masse que le système entier et les mêmes positions dans l'espace que le centre de gravité du système (158), on a, en appelant u la vitesse de ce point

$$du_x \cdot \sum m = \sum F_x dt \quad \text{et} \quad u_x \sum m - u_{0x} \sum m = \int F_x dt$$

d'où l'on conclut: Théorème. Le centre de gravité d'un système matériel quelconque se meut comme un point qui réunirait à lui seul la masse du système et qui serait sollicité par les forces extérieures transportées parallèlement à elles-mêmes.

Dans le cas particulier où les forces extérieures sont nulles, le centre de gravité se meut uniformément en ligne droite. Ce théorème a reçu le nom de principe de la conservation du mouvement du centre de gravité.

280. — Théorème du travail. En appliquant à chaque point du système et aux forces tant extérieures F qu'intérieures f qui le sollicitent, le théorème du travail (252, 2^e), ajoutant toutes les équations ainsi posées et remarquant l'expression spéciale que prend le travail des forces intérieures mutuelles (135) on obtient la formule générale de l'effet du travail applicable à un système quelconque

$$\sum \frac{1}{2} m v^2 - \sum m v_0^2 = \sum \mathcal{E}F + \sum \int f' dl.$$

281. — Lorsque parmi les forces extérieures F on considère séparément celles qui sont dues à la pesanteur dans les cas ordinaires, on trouve aisément (161) que le travail de la pesanteur sur un système quelconque, plus ou moins déformable, subissant un déplacement quelconque, est égal au poids total du système multiplié par la hauteur dont le centre de gravité du système s'est abaissé.

§ 2. — Cas particulier de l'équation du travail, dit principe des forces vives d'un système matériel.

282. — Si X, Y, Z sont les composantes de l'une quelconque des forces extérieures F , le travail

de celle-ci est exprimé par $\int (X dx + Y dy + Z dz)$, et il peut arriver que cette intégrale soit une fonction des seules coordonnées du point soumis à la force F . Si cette condition dont on a vu (258, 259, 260) des exemples, a lieu pour toutes les forces extérieures qui agissent sur le système, ΣCF est une fonction des coordonnées des divers points de ce système. Il en sera de même du travail $\Sigma \int f dl$ des forces intérieures si l'on admet que l'action réciproque entre deux points est une fonction de leur distance mutuelle, car celle-ci est elle-même une fonction des coordonnées des deux points dont il s'agit.

Sous cette double condition, l'équation du travail (280) prend la forme

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = F(x, y, z, x', \dots) - F(x_0, y_0, z_0, x'_0, \dots)$$

et l'énoncé qui l'exprime s'appelle principe des forces vives.

Si le travail total des forces tant intérieures qu'extérieures est nul, la quantité $\Sigma m v^2$ est constante. C'est le principe de la conservation des forces vives.

§ 3. - Moments des quantités de mouvement et des impulsions pour un système matériel.

283. - Soient m' la masse d'un des éléments du système, F' une quelconque des forces extérieures qui le sollicitent, f' une quelconque des forces intérieures qu'il reçoit des autres points matériels du système. Le moment autour d'un axe quelconque de la force totale pour le point considéré est égal à la somme des moments des forces F' et f' ; ainsi (273) $dM m' v' = \Sigma M_0 F' dt + \Sigma M_0 f' dt$;
de même pour un second point $dM m'' v'' = \Sigma M_0 F'' dt + \Sigma M_0 f'' dt$,
et ainsi de suite. La somme de toutes les équations pareilles est $d \Sigma M m v = \Sigma M_0 F dt$ [1]
car les forces f, f'', \dots étant égales et opposées deux à deux, leurs moments se détruisent.

En intégrant on a $\Sigma M m v - \Sigma M m v_0 = \Sigma \int M_0 F dt$ [2]

Donc Théorème: L'accroissement de la somme des quantités de mouvement d'un système autour d'un axe quelconque est égal à la somme des moments des impulsions des forces extérieures pendant le même intervalle de temps, soit élémentaire soit fini.

284. - Autres formes du même théorème. 1^o La dernière équation n'étant qu'une somme d'équations pareilles à celle [1] du n^o 273, peut s'énoncer ainsi:

La somme des produits des masses des éléments du système multipliées par les accroissements de leurs vitesses aréolaires autour d'un axe quelconque est égale à la moitié de la somme des moments des impulsions des forces extérieures pendant le même temps.

2^o En désignant par X, Y, Z les composantes des forces extérieures qui agissent sur le point

1^{re} Division.

dont les coordonnées sont x, y, z et la masse m on a (274, 2°)

$$\sum m d. \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \sum (xY - yX) dt, \text{ ou bien } \sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX).$$

285. - Cas particulier dit principe des aires pour un système matériel quelconque. Ce cas est celui dans lequel la somme des moments des forces extérieures P autour de l'axe de moments considéré est nulle, ce qui a lieu 1° lorsque ces forces sont nulles; 2° lorsqu'elles satisfont aux conditions d'équilibre; 3° plus généralement lorsqu'elles sont réducibles à deux équivalentes (144 et 147) rencontrant l'axe considéré.

Dans cette hypothèse, l'accroissement de $\sum Mmv$ ou de $\sum m Mv$ est nul. Par conséquent, autour de l'axe dont il s'agit,

La somme des moments des quantités de mouvement ou des produits des masses par les moments des vitesses est constante.

Autrement, la somme des produits des masses par les vitesses angulaires est constante.

En d'autres termes encore, la somme des produits des masses par les aires décrites par les projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe, des rayons vecteurs joignant l'axe aux points du système, est proportionnelle au temps.

Cette proposition est connue sous la dénomination de principe de la conservation des aires.

286. - Composition des quantités de mouvement d'un système. Les quantités de mouvement ont, comme les forces, chacune un point auquel elles appartiennent, une direction qui est celle de la vitesse et une intensité mv . Par conséquent les moments des quantités de mouvement déterminées pour un système sont assimilables aux moments de forces qui auraient mêmes points d'application, mêmes directions et mêmes intensités. Donc à un instant déterminé ces moments ont (149) un moment résultant qui peut être exprimé par un axe représentatif dont la projection rectangulaire sur un axe quelconque est numériquement égale à la somme des moments de toutes les quantités de mouvement autour de cet axe. De cette propriété il résulte que l'axe du moment résultant est celui par rapport auquel la somme des moments des quantités de mouvement autour d'un axe passant par l'origine est un maximum, et comme le moment d'une quantité de mouvement est (274, 1°) proportionnel à une aire décrite, en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, rapportée à l'unité de masse et à l'unité de temps, le plan perpendiculaire à l'axe du moment résultant s'appelle plan du maximum des aires à l'instant considéré, pour l'origine commune des axes.

287. - Dans l'hypothèse du N° 285 où les sommes des moments des forces extérieures P sont constamment nulles par rapport à 3 axes ayant une même origine, les sommes des moments des quantités de mouvement autour de ces axes sont constantes quoique les vitesses puissent varier; le moment résultant est aussi constant et le plan du maximum des aires correspondant à l'origine est invariable.

§ 4. Des six équations du mouvement d'un système matériel indépendantes des forces intérieures. - Principe de d'Alembert.

288. - La considération des quantités de mouvement et des impulsions des forces a ci-dessus donné lieu à deux espèces d'équations :

1° Celle des projections sur un axe (278) $\sum m v_x - \sum m v_{0x} = \sum \int F_x dt$, [P]

2° Celle des moments autour d'un axe (283) $\sum M m v - \sum m v_0 = \sum \int M F dt$ [M]

Ces équations sont indépendantes des forces intérieures comme les équations générales d'équilibre d'un système, et elles ont avec celles-ci une analogie remarquable. Si par le point dont la masse est m et la vitesse v on mène une droite dirigée suivant la vitesse et d'une longueur égale, moyennant une échelle, à mv , la projection de cette droite sur un axe Ox sera $m v_x$ et son moment par rapport à un axe sera $M m v$. Que l'on considère la même construction faite et les mêmes quantités calculées pour tous les points du système à deux instants l'un final, l'autre initial; on aura une idée nette de ce que signifient les sommes $\sum m v_x$, $\sum m v_{0x}$, $\sum M m v$, $\sum M m v_0$. Qu'on divise l'intervalle de temps de ces deux instants extrêmes en éléments dt pendant chacun desquels on peut considérer les forces F comme constantes en intensité et en direction; que pour chaque élément du temps on considère l'impulsion $F dt$ de chaque force suivant sa direction, sa projection $F_x dt$ sur l'axe Ox , son moment $M F dt$ autour de ce même axe, on conçoit dès lors ce que signifient pour chaque force les intégrales $\int F_x dt$, $\int M F dt$ et pour tout le système les sommes $\sum \int F_x dt$, $\sum \int M F dt$. Cela posé, en assimilant les quantités de mouvement mv , mv_0 et les impulsions élémentaires $F dt$ à des forces de mêmes intensités et directions, on voit que les deux équations ci-dessus [P] et [M] étant supposées vérifiées pour tout axe Ox expriment l'équilibre qui aurait lieu entre les quantités de mouvement finales mv prises dans leur direction, les quantités de mouvement initiales mv_0 prises en sens opposé des leurs, et toutes les impulsions $F dt$ prises également en sens opposé de leurs directions.

De là et de la propriété démontrée (139) pour les équations générales de l'équilibre d'un système de forces, il résulte que si l'on pose pour trois axes coordonnés les six équations à [P] et [M], ces six équations renfermeront implicitement toute équation du même genre prise par rapport à un axe quelconque.

289. - Les équations analogues à [P] et [M] prises par rapport à trois axes sont, en égard à ce qui a été dit N° 274, 2°, les intégrales des équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \sum m d. \frac{dx}{dt} &= \sum X dt, \\ \sum m d. \frac{dy}{dt} &= \sum Y dt \\ \sum m d. \frac{dz}{dt} &= \sum Z dt \end{aligned} \right\} \text{ou bien} \left. \begin{aligned} \sum m \frac{d^2x}{dt^2} &= \sum X, \\ \sum m \frac{d^2y}{dt^2} &= \sum Y, \\ \sum m \frac{d^2z}{dt^2} &= \sum Z, \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \sum m d \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \sum (xY - yX) dt, \\ \sum m d \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) &= \sum (yZ - zY) dt, \\ \sum m d \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= \sum (zX - xZ) dt. \end{aligned} \quad \left(\text{ou bien} \right) \begin{cases} \sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX), \\ \sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - zY) \\ \sum m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \sum (zX - xZ) \end{cases}$$

290. — Ces équations sont les conséquences immédiates d'une remarque très-simple connue sous la dénomination de Principe de d'Alembert et qui s'énonce en ces termes :

Dans le mouvement d'un système matériel quelconque il y a constamment équilibre entre les forces extérieures agissant sur le système, les forces intérieures et les forces d'inertie qui correspondent au mouvement varié et curviligne des divers éléments du système.

Cela résulte immédiatement de la définition de la force d'inertie (119 et 120) qui, pour le point de masse m a ses composantes parallèles à trois axes exprimées par $-m \frac{d^2x}{dt^2}$, $-m \frac{d^2y}{dt^2}$, $-m \frac{d^2z}{dt^2}$. Les forces intérieures disparaissent dans les sommes de projections et de moments; c'est pourquoi elles n'entrent pas dans les équations ci-dessus.

§ 5. — Extension des théorèmes précédents aux cas de mouvement d'un système matériel relativement à un milieu géométrique invariable en mouvement.

291. — L'observation générale du n° 276 s'applique encore ici. Nous allons en tirer quelques conséquences spéciales.

292. — Plan invariable de Laplace. On sait que le centre de gravité d'un système se meut comme un point matériel dont la masse serait égale à la somme de celles du système, et qui serait sollicité immédiatement par les forces extérieures transportées en ce point parallèlement à elles-mêmes. Supposons que nous considérons le mouvement du système relativement à ce centre de gravité, c'est-à-dire relativement à des axes ayant ce point pour origine et transportés avec lui parallèlement à eux-mêmes. Le milieu géométrique ayant ainsi un mouvement simple de translation dont l'accélération commune à tous les points peut être représentée par J , pour appliquer au mouvement relatif du système, il sera nécessaire et suffisant (276) d'ajouter aux forces réelles les forces fictives $-mJ$ toutes parallèles entre elles à chaque instant et proportionnelles aux masses m . Contre ces forces fictives ont à chaque instant leur résultante passant par le centre de gravité. Supposons qu'il en soit de même des forces extérieures réelles F : nous serons dans le cas particulier du n° 287 et le plan perpendiculaire à l'axe du moment résultant des quantités de mouvement autour du centre de gravité sera invariable quelle que soient les forces intérieures mutuelles.

Cette théorie s'applique au système du monde.

293. — Décomposition de la puissance vive d'un système matériel quelconque. Soit pour un élément de masse m , la vitesse V décomposée en V_1 vitesse d'entraînement égale et parallèle à la vitesse du centre de gravité et V' vitesse relative. On a (34), $V^2 = V_1^2 + V'^2 + 2V_1V'\cos(V', V_1)$ et par conséquent, pour tout le système,

$$\sum \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} V_1^2 \sum m + \sum m V'^2$$

attendu que $\sum m V'\cos(V', V_1)$ est nulle puisque (conformément à la formule $\frac{dX}{dt} \sum m = \sum m \frac{dx}{dt}$ du N° 158) elle est égale à la masse totale $\sum m$ multipliée par la projection, sur la direction de V_1 , de la vitesse relative du centre de gravité, qui est nulle. Donc

Théorème. La puissance vive d'un système matériel quelconque peut toujours être décomposée en deux autres, dont l'une est celle qu'aurait le système si toute la masse était condensée au centre de gravité, et l'autre est la somme des puissances vives dues au mouvement des divers éléments du système relativement à des axes mobiles menés par le centre de gravité et se transportant avec lui parallèlement à eux-mêmes.

§ 6. — Applications de la théorie de ce chapitre.

294. — Il résulte de la propriété absolue énoncée au N° 279 que la théorie générale du mouvement d'un point matériel sous l'action de forces quelconques (théorie qui fait l'objet du chapitre 1^{er}) s'applique sans aucune exception au mouvement du centre de gravité de tout système matériel, pourvu que par la pensée on y concentre toute la masse et qu'on y transporte toutes les forces.

Ainsi la propriété de l'inertie (80) appartient à un système matériel quelconque, en ce sens que son centre de gravité ne peut ni se mettre en mouvement, s'il est actuellement en repos, ni changer actuellement, soit en grandeur, soit en direction, sa vitesse, s'il en a une, à moins qu'une ou plusieurs forces extérieures n'agissent sur un ou plusieurs points du système. En l'absence de telles forces le centre de gravité persiste soit dans le repos, soit dans le mouvement rectiligne uniforme préalablement acquis et les forces intérieures n'ont d'autre effet que de concourir avec les vitesses acquises pour changer la figure du système s'il n'est pas solide, ou pour produire des mouvements de rotation.

La faculté locomotive chez les animaux ne fait pas exception à cette règle générale. La contraction des muscles résulte de forces mutuelles qui seules ne pourraient mettre en mouvement le centre de gravité d'abord en repos; la pesanteur ne pourrait que le faire descendre verticalement; mais la réaction des corps sur lesquels les animaux s'appuient produit des forces extérieures et par suite le déplacement du centre de gravité dans tous les sens possibles.

Sur un plan horizontal parfaitement poli et sans frottement, c'est-à-dire dont la réaction serait verticale, un animal ferait de vains efforts pour changer l'état de repos ou de mouvement de son centre de gravité dans le sens horizontal.

295. — Si un projectile est lancé et fait explosion dans l'espace, tant que les éclats ne rencontrent

par d'autre corps le centre de gravité pourait sa course comme si ces éclats ne se fussent pas séparés, sans l'effet de modifications que subit la résistance de l'air.

Si le projectile reste entier possède une rotation dans l'espace, à l'instant où il touche le sol, il en reçoit une action tangentielle qui peut accroître la vitesse du centre du centre de gravité et changer sa direction.

296. — Lorsqu'un bateau à vapeur se meut uniformément, c'est que les diverses pressions exercées tant sur sa coque que sur les aubes ou autres appareils propulseurs, se détruiraient si elles étaient transportées en un point parallèlement à elles-mêmes.

297. — Un homme en repos sur un plan horizontal exerce une pression verticale égale à son poids, car la réaction du plan et ce poids se détruiraient si ces deux forces étaient transportées au centre de gravité. Si cet homme saute, ou si d'abord après il se lève, sa pression sur le plan augmente pendant tout le temps que le centre de gravité prend un mouvement accéléré ascendant. Le contraire a lieu si l'homme d'abord debout, se baisse. Lorsque sortant du repos, il se met en marche, la résultante de translation des pressions qu'il exerce sur le sol est oblique, en arrière tant que son mouvement s'accélère, en avant lorsqu'il se retarde. Lorsque sans déplacer son centre de gravité, il tourne autour d'un axe vertical de manière que la somme des moments des quantités de mouvement autour de cet axe acquiert une certaine valeur, c'est qu'il emprunte au sol des forces réductibles à un couple horizontal dont l'impulsion est égale à cette somme (283).

298. — Supposons qu'un vase posé sur l'un des plateaux d'une balance en équilibre contienne un liquide dans lequel soit plongé un corps solide d'une densité différente et maintenu à l'aide d'un fil attaché au vase. Si l'on coupe le fil le corps descend ou monte d'un mouvement accéléré, dans l'un et l'autre cas, le centre de gravité de l'ensemble du liquide et du solide descend, et en même temps la pression sur le plateau diminue par conséquent. Si par suite de la résistance du liquide le corps plongé finissait par avoir un mouvement uniforme, alors la pression du vase sur le plateau serait la même que dans l'état de repos. Et l'instant où le corps descendant atteint le fond du vase et s'arrête ou rebondit, la pression supportée par le plateau augmente.

P poids du solide, z ordonnée variable de son centre de gravité au-dessous d'un plan fixe horizontal; P' poids du liquide déplacé; Q poids du liquide réel dans le vase; h ordonnée constante du centre de gravité du volume occupé par le liquide et le solide; Z ordonnée variable du centre de gravité de l'ensemble de ces deux corps. On a

$$(P+Q)Z = (Q+P')h + (P-P')z, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{P-P'}{P+Q} \frac{d^2z}{dt^2}, \quad \frac{P+Q}{g} \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{P-P'}{g} \frac{d^2z}{dt^2}$$

Au premier instant où le corps solide se met en mouvement, la force totale qui le sollicite est $P-P'$; donc $\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{P-P'}{P} g$. Ainsi la force totale $\frac{P+Q}{g} \frac{d^2Z}{dt^2}$ qui agit sur l'ensemble des deux corps est $\frac{(P-P')^2}{P}$. On a donc en appelant R la réaction du plateau à ce même instant,

et Q' le poids du vase $\frac{(P-P')^2}{P} = Q' + Q + P - R$ d'où $R = Q' + Q + P - \frac{(P-P')^2}{P}$

(Voir dans l'Architecture hydraulique de Bélidor, liv. I, N^{os} 629 à 633, les anciennes erreurs de plusieurs savants sur cette question.)

299. — Des effets de la poudre sur les projectiles et les bouches à feu. Soient p le poids d'un boulet, P celui du canon et de son affût, p' le poids de la poudre et par conséquent des gaz qu'elle produit. Les pressions exercées par ces gaz sont tellement grandes comparativement aux poids qu'on peut, pendant le mouvement sensiblement horizontal du projectile dans le canon, négliger ces poids ainsi que les réactions verticales et horizontales du sol sur l'affût. Dès lors si nous faisons également abstraction de la résistance de l'air ambiant, en appelant v la vitesse du boulet au sortir du canon, V la vitesse que l'affût possède au même instant en sens contraire, v' la vitesse moyenne ou du centre de gravité du gaz à cet instant, nous avons

$pv + p'v' = PV$ car la quantité de mouvement produite est égale à la quantité de mouvement initiale, car on peut négliger les forces extérieures du système.

Comme les molécules du gaz n'ont pas à l'instant considéré une même vitesse. Si elles étaient toutes restées dans l'intérieur du canon on pourrait admettre avec une exactitude suffisante que v' est la moitié de v. Mais le jeu appelé vent du boulet laisse échapper une partie du gaz qui prend ainsi une vitesse plus grande. Il est donc certain que par cette cause le produit PV est un peu plus grand que $(p + \frac{1}{2}p')v$. Il s'augmente encore en réalité mais dans un faible rapport par la résistance de l'air au mouvement très rapide du boulet.

Exemple applicable à un boulet de 12^{kg}: $p' = \frac{1}{3}p$, $P = 320p$, $v =$ environ 500. La vitesse du recul V est donc un peu plus grande que $\frac{7}{6} \frac{500^m}{320}$ ou 1,82

Le travail reçu par le boulet est $\frac{pv^2}{2g} = \frac{12 \cdot (500)^2}{2g} = 153930^{kg.m}$; et le parcours dans le canon étant à peu près de 2,75, il en résulte un effort moyen de 55970 Kg. La surface d'un grand cercle d'un boulet en fonte de 12 Kg. étant à peu près de 170 c.m.q. l'effort moyen par c.m.q. est donc 329^{kg} ou 318 atmosphères, quantité à laquelle l'effort moyen des gaz de la poudre est un peu supérieur puisqu'il est en partie combattu par le frottement et par la résistance de l'air extérieur.

Les considérations qui précèdent s'appliquent à l'ascension des fusées.

300. — Généralités sur le choc des corps. Les corps solides, tels que la nature nous les présente, ne possèdent ni la continuité ni l'invariabilité de figure que suppose la géométrie dans le corps qu'elle considère. Un corps solide est réellement composé d'éléments matériels distincts, liés entre eux par des forces naturelles, qui varient considérablement d'intensité par suite de très faibles variations dans leurs distances relatives; s'opposent jusqu'à certaines limites à la rupture du système, et ne permettent même que des déformations souvent insensibles sous l'action de forces extérieures qui tendent à imprimer à ses parties des mouvements divers.

301. — Imaginons que deux corps solides se meuvent séparément en vertu de leurs vitesses ac-

quises et sous l'action de forces telles que la pesanteur, la pression des fluides ou l'effort d'un moteur animé. Tant que ces corps ne soient pas très-rapprochés l'un de l'autre, leur attraction ou leur répulsion mutuelle sera très-faible; supposons qu'on la néglige. Dans cette hypothèse, il peut arriver qu'en vertu des causes de mouvement, propres à chaque corps, deux points matériels différents, pris sur l'un et sur l'autre, tendent à passer en même temps en un même lieu avec des vitesses différentes, en intensité ou en direction, ou tout à la fois en intensité et en direction. Or, cela est impossible; on dit ordinairement que l'impenétrabilité de la matière s'y oppose, et que par conséquent les vitesses des deux points considérés sont brusquement modifiées dès que les deux points arrivent au contact. Mais on a une idée plus complète de ce fait lorsque l'on considère que les deux points en question, dès qu'ils sont très-voisins, exercent entre eux une action mutuelle qui, par suite de leur rapprochement, finit toujours par devenir répulsive, et par acquiescer l'intensité nécessaire pour satisfaire à la loi de l'impenétrabilité.

302. — Le phénomène dont nous venons de parler constitue ce qu'on appelle le choc ou la collision de deux corps solides.

303. — La notion des forces qui se manifestent dans le choc des corps nous est très-familière: elle nous est acquise par l'expérience de tous les instants, ces forces étant analogues aux pressions qui naissent de notre contact avec les corps qui nous environnent. Au contraire, il a fallu des observations délicates et un génie sublime pour arriver à généraliser le principe de l'attraction mutuelle des corps, et lorsque la gravitation universelle a été incontestablement établie comme un fait, il a dû s'élever parmi les philosophes la question de savoir comment cette force pouvait se produire. Les uns ont dit que la nature de cette attraction nous était entièrement inconnue; d'autres, pensant qu'il ne peut y avoir de forces que celles qui s'exercent entre des corps qui se touchent, ont imaginé que l'attraction était produite par la pression de l'éther, matière subtile qui remplissait tout l'espace. La discussion de ces diverses opinions n'a mené à aucun résultat utile. Pour nous, l'attraction et la répulsion de la matière pondérable sont des forces qui toutes deux s'exercent à distance, attendu que lorsque nous disons que deux corps se touchent, nous n'entendons par là qu'il y ait entre eux un contact géométrique rendant impossible tout rapprochement ultérieur, mais nous voulons dire qu'ils sont assez près l'un de l'autre pour que leur répulsion mutuelle devienne sensible et modifie le mouvement de ces corps.

Quant au principe en vertu duquel ces forces s'exercent, il n'est guère mieux connu pour la répulsion que pour l'attraction, et il est d'ailleurs indifférent dans l'étude de la Mécanique et dans ses applications. Ce qui importe, c'est la connaissance des lois de ces forces; et la première de ces lois, celle de l'égalité de l'action et de la réaction opposée, permet déjà de tirer des conséquences utiles, notamment dans la question du choc des corps.

304. — L'égalité de l'action et de la réaction a conduit au théorème général du mouvement du centre de gravité (279). Il en résulte que pendant le choc, ou en général pendant l'action mutuelle de deux corps, le mouvement du centre de gravité du système de ces deux corps

ne dépend que des forces extérieures agissant sur ce système. Si, par exemple, ces forces sont nulles, ce qui revient à supposer les deux corps libres dans l'espace et à négliger, au moins pendant la très-courte durée du choc, l'effet de la pesanteur, le mouvement du centre de gravité du système sera rectiligne et uniforme pendant tout cet intervalle de temps.

305. — Soient M, M' , les masses des deux corps distincts; v, v' , les vitesses de leurs centres de gravité à un même instant, avant, pendant ou après le choc; u la vitesse constante du centre de gravité du système des deux corps.

En vertu du théorème du N° 278, on aura, en projetant les vitesses sur trois axes, les trois équations :

$$(M + M') u_x = M v_x + M' v'_x$$

$$(M + M') u_y = M v_y + M' v'_y$$

$$(M + M') u_z = M v_z + M' v'_z$$

d'où l'on tire u_x, u_y, u_z , et, par conséquent, u et ses angles avec les axes, dès que l'on connaîtra les intensités et les directions des vitesses v et v' à un même instant, vitesses qui varieront avec le temps en vertu des actions mutuelles pendant le choc, tandis que u restera constante.

306. — Les trois équations ci-dessus expriment que si par un point de l'espace on imagine deux droites représentant, pour l'intensité et la direction, les quantités Mv et $M'v'$; la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux droites représentera de la même manière $(M + M')u$ constante depuis le commencement jusqu'à la fin du choc.

On voit ainsi que le centre de gravité de l'ensemble $M + M'$ se meut dans un plan parallèle à la fois aux deux vitesses des centres de gravité des masses M et M' avant le choc. C'est ce que prouverait également l'équation $\frac{dX}{dt} \sum m = \sum m \frac{dx}{dt}$ du N° 158; en prenant l'axe des x perpendiculaire à la fois aux vitesses v et v' , on aurait $v_x = 0, v'_x = 0$, d'où $u_x = 0$.

307. — Il peut arriver que les deux corps restent unis après le choc; l'action mutuelle des deux corps est alors dite non élastique, et c'est à ce cas que s'appliquent le plus ordinairement les formules précédentes et la construction géométrique correspondante. Mais si, après le choc, les corps se séparent, les mêmes équations et la même construction appartiennent encore au mouvement uniforme du centre de gravité du système des deux corps, point qui, à chaque instant, divise en parties réciproquement proportionnelles aux deux masses M, M' , la droite joignant les deux centres de gravité individuels des deux corps. Seulement dans ce second cas, le mouvement propre à chaque corps, qu'il peut être important de déterminer, reste inconnu tant qu'on ignore les lois des actions mutuelles exercées pendant le choc.

308. — Choc direct de deux corps. Faisons une application des généralités précédentes au cas le plus simple, celui où les centres de gravité des deux corps avant le choc se meuvent sur la même ligne droite. Le centre de gravité de l'ensemble restera alors sur cette ligne en y conservant le même mouvement malgré le choc. Si les deux corps sont symétriques par rapport à l'axe qui contient leurs centres de gravité, et n'ont chacun qu'un

mouvement de translation, alors si l'on désigne par v_0 et v'_0 les vitesses de ces deux centres avant le choc, v_0 sera à cet instant la vitesse de tous les points du premier corps, v'_0 celle de tous les points du second. Dès que le choc, c'est-à-dire l'action mutuelle des deux corps animés de vitesses différentes, commencera, le corps M sera sollicité par les deux forces dues au corps M' , et dont la résultante F sera, à cause de la symétrie, dirigée suivant la droite qui passe par les deux centres de gravité; réciproquement, le corps M' recevra du premier des forces ayant leur résultante F' égale et contraire à la première. De là le changement de forme et les vibrations que devra éprouver chaque corps, suivant sa nature et la distribution de sa masse.

Quoiqu'il en soit, si l'on conserve à v et v' leurs significations précédentes, ces vitesses qui pendant le choc ne seront plus respectivement communes à tous les points des corps M et M' satisferont néanmoins (attendu que l'impulsion des forces extérieures pendant la durée du choc est supposée pouvoir être négligée) à la relation

$$Mv + M'v' = Mv_0 + M'v'_0,$$

Il arrivera toujours un instant où les deux centres de gravité auront la même vitesse u donnée par l'équation

$$(M + M')u = Mv_0 + M'v'_0,$$

et dans l'hypothèse de vibrations très-petites, cette vitesse u paraîtra commune à toutes les parties des deux corps. Cela posé, si l'action mutuelle des deux corps est non élastique, son intensité devient nulle dès cet instant. Le choc est alors terminé, et les deux corps unis conservent la vitesse u tant qu'elle n'est pas modifiée par des forces extérieures.

309. — La dernière équation convient à tous les cas particuliers, soit que les deux corps aillent dans le même sens (les vitesses sont alors de même signe), soit qu'ils aillent à la rencontre l'un de l'autre (les vitesses v_0, v'_0 sont alors de signes contraires, et le sens de la vitesse commune u est déterminé par son signe, qui est celui de la plus grande des deux quantités de mouvement); soit encore que l'un des masses soit en repos avant le choc (il suffit alors de faire nulle la vitesse correspondante); soit enfin que la vitesse commune u doive être nulle (ce qui a lieu quand les quantités de mouvement $Mv_0, M'v'_0$ sont égales et de signes contraires).

310. — Durée du choc et intensité des forces au contact. La durée du choc de deux corps doit dépendre de leur vitesse relative et de leur dureté; pour la déterminer par le calcul, il faudrait connaître la loi suivant laquelle varient les forces égales qui agissent au contact (305). On aura une approximation de cette durée en supposant les forces F et F' constantes. Soit x le chemin que décrit le centre de gravité du corps M depuis le commencement du choc jusqu'à l'instant où les centres de gravité de deux corps sont supposés avoir la vitesse commune u ; soit x' la quantité analogue pour le second corps; soit t le temps écoulé entre les deux instants désignés. En appliquant le théorème du mouvement du centre de gravité (279) on aura

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} \frac{F}{M} t^2 \quad \text{et} \quad x' = v'_0 t + \frac{1}{2} \frac{F'}{M'} t^2 \dots \dots \dots [1]$$

Dans ces deux équations, les quantités x, x' sont, comme v_0 et v'_0 , des quantités algébriques; c'est-à-dire positives ou négatives, selon leur sens sur la droite des centres de gravité. $x - x'$ sera la quantité dont les deux centres de gravité se seront rapprochés, et en la désignant par δ on aura

$$\delta = (v_0 - v'_0)t - \frac{1}{2} F t^2 \frac{M + M'}{MM'} \dots \dots \dots [2]$$

Maintenant il faut écrire que le temps t correspond à l'instant où les deux centres de gravité ont la même vitesse. A cet effet, par le même théorème (279), on aura (252) deux équations qui ne sont d'ailleurs que les dérivées des équations [1]:

$$M u - M v_0 = - F t, \quad M' u - M' v'_0 = F t$$

d'où éliminant u on tire $F t (M + M') = M M' (v_0 - v'_0) \dots \dots \dots [3]$

*At. Y. Université de Lyon
Beynon 23 février 1871*

De [2] et [3], en appelant P et P' les poids des deux corps dont les masses sont M et M' , on conclut

$$t = \frac{2 \delta}{v_0 - v'_0}, \quad F = \frac{P P'}{P + P'} \frac{(v_0 - v'_0)^2}{2g} \frac{1}{\delta}$$

Exemple. Supposons 1° que la vitesse relative $v_0 - v'_0$ des deux corps soit due à un mètre de hauteur; 2° que le rapport $\frac{P}{P'}$ soit égal à g ; 3° que la distance δ dont les centres de gravité sont rapprochés, soit de 0,001.

On trouve d'après ces données $v - v' = \sqrt{2g} = 4,43$, $t = 0,00045$, $\frac{F}{P} = 100$.

Bien que la théorie précédente qui suppose la force F constante, ne soit pas exacte, elle fait comprendre l'influence de la durée (de laquelle dépend la quantité δ) sur l'intensité de l'action mutuelle et sur la rapidité du choc.

311. — Perte de puissance vive dans le choc de deux corps non élastiques. Il est d'un grand intérêt, dans la mécanique industrielle, de comparer la puissance vive de deux corps immédiatement avant et après leur choc. Si les corps restent unis après s'être mutuellement comprimés, et si, négligeant les vibrations qui peuvent subsister dans les deux corps, on les considère comme ayant, à la fin du choc, une vitesse commune dans tous leurs éléments, on voit facilement: 1° qu'il y a diminution au moins apparente de leur somme de puissance vive; car pendant la compression qu'ont subie les deux corps jusqu'au moment où leurs vitesses sont devenues égales, le rapprochement des molécules voisines du contact a eu lieu malgré la répulsion que ce rapprochement même fait naître, d'où est résulté un travail négatif; 2° On voit, également sans calcul, que le travail dû aux forces moléculaires, et

par conséquent la variation de puissance vive qui lui est numériquement égale, ne dépendant que du mouvement relatif des deux corps, ne change pas si par la pensée on imprime aux deux corps, avant le choc, une vitesse commune, que l'on compose avec les vitesses préexistantes.

312. — Il suit de la dernière observation que le calcul de la diminution de puissance vive de deux corps qui se choquent peut toujours se ramener au cas où l'un des corps était en repos avant le choc. Nous ferons donc $v'_0 = 0$ dans les hypothèses du n° 308. La puissance vive du système deux corps avant le choc sera $\frac{1}{2} M v_0^2$

Si l'on suppose qu'à la fin du choc tous les éléments des deux corps aient une vitesse commune qui sera par conséquent la vitesse u du centre de gravité, la puissance vive sera alors $\frac{1}{2} (M+M') u^2$
 qui, à cause de $u = \frac{M v_0}{M+M'}$ (308) deviendra $\frac{1}{2} \frac{(M+M') u^2}{M+M'}$

Donc la différence ou perte de puissance vive sera

$$\frac{1}{2} M v_0^2 \left(1 - \frac{M}{M+M'}\right) \text{ ou } \frac{1}{2} \frac{M M' v_0^2}{M+M'}$$

313. — Application au battage des pilotes. Un mouton dont la masse est M et le poids P ou Mg tombe d'une hauteur h sur la tête d'un pilote; sa puissance vive avant le choc est donc $P h = \frac{1}{2} M v^2$. Après un choc de très-courte durée, le pilote, dont la masse est M' et le poids P' , prend, ainsi que le mouton, une vitesse qui diffère peu de la vitesse u ci-dessus calculée, si la résistance du terrain est petite comparativement à la force qui se développe au contact du mouton et du pilote pendant le choc.

La puissance vive de l'ensemble est donc, à la fin du choc, dans ce cas,

$$\frac{1}{2} \frac{M^2 v^2}{M+M'} \text{ ou } P h \frac{1}{1 + \frac{P'}{P}}$$

Cette expression fait abstraction des vibrations du pilote; mais ces vibrations ne contribuent pas à l'enfoncement qu'on veut produire, et qui est sensiblement proportionnel à la puissance vive du pilote et du mouton fictivement condensés en leur centre de gravité commun. Et ainsi le travail dépensé $P h$ restant le même, ainsi que le poids P' du pilote, on obtiendra un plus grand effet à mesure que P croîtra, ce qui suppose que h décroît dans le même rapport. La diminution de puissance vive due au choc n'est pas seulement un inconvénient, comme perte d'une partie de l'effet utile du mouton; elle représente le travail moléculaire qui accompagne la déformation des pièces qui se choquent, et cette déformation peut aller jusqu'à la rupture. Cette quantité décroît quand P augmente, le produit $P h$ restant constant. Il est donc avantageux, par un double motif, de faire usage de moutons d'un grand poids en modérant la hauteur de leur chute. On peut vérifier qu'il est plus facile d'enfoncer un clou sans le courber en le frappant à petits coups d'un assez gros marteau qu'à grands coups d'un marteau trop petit.

314. — Si aucune des vitesses v_0 , v'_0 n'est nulle, on peut, sans changer le mouvement relatif des corps. — Quand deux corps se choquent, la puissance vive perdue est égale à l' somme des puissances vives que possédaient ^{les deux corps} chacun d'eux, avant le choc, et qui n'est ni perdue ni gagnée dans le choc.

latif des deux corps, réduire par la pensée, l'un d'eux en repos en retranchant de deux vitesses une même quantité v_0' ; le corps de masse M n'a plus alors que la vitesse $v_0 - v_0'$, le corps de masse M' est réduit au repos initial, et l'on rentre dans le cas précédent. La perte de puissance vive, numériquement égale au travail négatif dû aux actions moléculaires pendant le choc jusqu'au moment où la vitesse est devenue commune aux deux corps, s'obtient donc en substituant $v_0 - v_0'$ dans la dernière expression du N° 312. Elle est

$$\frac{1}{2} M M' \frac{(v_0 - v_0')^2}{M + M'}$$

Il serait aisé de vérifier ce résultat en comparant la puissance vive avant le choc $\frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} M v_0'^2$ avec ce qu'elle est au moment de la plus grande compression, savoir: $\frac{1}{2} (M + M') u^2$; en mettant pour u sa valeur $\frac{M v_0 + M' v_0'}{M + M'}$, on trouve pour différence $\frac{1}{2} M M' \frac{(v_0 - v_0')^2}{M + M'}$.

On remarquera que cette quantité, d'après la dernière formule du N° 310, est égale au produit $P \delta$ qui doit, en effet exprimer le travail des forces mutuelles F, F' .

315. — La même considération du mouvement relatif conduit, comme on va le voir, à une autre conséquence. Quelle que soit la vitesse u supposée commune à l'instant de la plus grande compression, on peut, sans changer la diminution de puissance vive subie par les deux corps depuis le commencement du choc, substituer aux vitesses v_0 et v_0' les vitesses $v_0 - u, v_0' - u$, dont l'une sera positive et l'autre négative. Or, dans cette supposition des vitesses initiales, la vitesse commune, au moment de la plus grande compression, sera nulle, puisqu'elle sera $u - u$; donc la perte de puissance vive sera égale à la puissance vive totale avant le choc, savoir:

$$\frac{1}{2} M (v_0 - u)^2 + \frac{1}{2} M' (u - v_0')^2,$$

c'est-à-dire, que la perte dont il s'agit est égale à la somme des puissances vives que posséderaient les deux corps, si chacun d'eux était animé de la vitesse qu'il a perdue ou gagnée dans le choc.

C'est le théorème de Carnot, qui se démontre ordinairement par des combinaisons algébriques, et qui peut se vérifier par ce moyen, en substituant pour u sa valeur en v_0 et v_0' .

316. — Choc des corps élastiques. Il arrive souvent que deux corps, après s'être choqués directement, se séparent, en vertu des forces mutuelles répulsives qui subsistent à l'endroit du contact, à l'instant où la vitesse des deux centres de gravité est devenue commune.

Dans la théorie du choc des corps, on admet l'existence d'une élasticité parfaite, qui consiste en ce que deux molécules quelconques, qui ont été rapprochées ou éloignées, tendent à reprendre leur première distance, et en ce que leur action mutuelle, pendant le retour à cette distance primitive, repasse par les mêmes degrés d'intensité qu'elle a eus dans la période de déformation. Cette propriété paraît en effet appartenir à tous les corps solides auxquels on ne fait subir qu'un dérangement assez petit, et dont la limite varie suivant la nature des corps. Mais on admet en outre que le choc de deux corps élastiques peut quelquefois s'accomplir de manière qu'à l'instant même où ils se séparent, ils aient repris leur figure

primitive et le repos relatif de leurs molécules entre elles. Dans cette hypothèse, toujours plus ou moins éloignée de la réalité, le travail moléculaire total, depuis le commencement jusqu'à la fin du choc, est nul.

Reprenant, dans cette même hypothèse, la question du choc direct du N° 308, si l'on désigne par V la vitesse du corps de masse M après la séparation qui termine le choc; par V' la vitesse du corps de masse M' au même instant, on aura, les sommes $\int f \, dl$ de travail des forces étant nulles,

$$\frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} M' V'^2 = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} M' v_0'^2$$

et cette équation, combinée avec la suivante, conséquence du théorème de la quantité de mouvement,

$$M V + M' V' = M v_0 + M' v_0'$$

permet de déterminer V et V' .

Les équations ci-dessus donnent

$$M'(V'^2 - v_0'^2) = M(v_0^2 - V^2) \quad \text{et} \quad M'(V' - v_0') = M(v_0 - V), \dots [1]$$

$$\text{d'où} \quad V' + v_0' = v_0 + V \quad \text{ou bien} \quad V' - V = v_0 - v_0' \dots [2]$$

c'est-à-dire que la vitesse relative n'a changé que de signe, de sorte que deux corps qui s'approchaient l'un de l'autre avec la vitesse relative $v_0 - v_0'$ s'éloignent, après le choc, avec la vitesse relative égale $V' - V$.

Cela posé, les équations [1] et [2] étant du premier degré, donneront aisément les vitesses V et V' . En éliminant V on a

$$(M + M') V' = 2 M v_0 + M' v_0' - M v_0'$$

qu'on peut écrire comme il suit

$$(M + M') V' = 2(M v_0 + M' v_0') - (M + M') v_0' = 2(M + M') u - (M + M') v_0',$$

ou simplement $V' = 2u - v_0'$;

ce qui, combiné avec $V' - V = v_0 - v_0'$, donne $V = 2u - v_0$.

Les vitesses V, V' après le choc, excèdent donc la vitesse u du centre de gravité, ou sont excédées par elle, autant que cette vitesse u est supérieure ou inférieure aux vitesses v_0, v_0' avant le choc.

Dans le cas particulier où les masses M, M' des deux corps élastiques sont égales, on a $2u = v + v'$, $V = v'$, $V' = v$, c'est-à-dire qu'il y a échange de vitesses. Si l'un des corps est en repos avant le choc, l'autre demeurera en repos avec le choc, et le premier prendra la vitesse primitive du second.

317. — Deux billes d'ivoire ou de caoutchouc réalisent jusqu'à un certain point les hypothèses du N° 316, et les résultats de l'expérience de leur choc mutuel sont assez d'accord avec les formules déduites de ces hypothèses. Mais il importe de remarquer que la figure des corps qui se choquent a une influence considérable sur le phénomène. Si l'on fait tomber une boule de caoutchouc sur une table de marbre, elle rejaillit à peu près aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur de la chute; mais si l'on fait la même expérience avec un disque de la même matière, que

l'on fait tomber à plat, le rejaillement est presque nul. Ce n'est cependant pas que le corps tombant ait cessé d'être parfaitement élastique; mais l'explication de ce fait est dans les vibrations qui, dans le dernier cas, se propagent à l'intérieur, tandis que lorsque les corps qui se choquent sont sphériques, ou au moins quand l'un, et le moins dur des deux, a cette figure, les vibrations n'ont une grande intensité qu'aux environs du point de contact.

318. — Oscillations d'un prisme élastique vertical. Une tige prismatique verticale est fixée à son extrémité supérieure. Un corps A dont le poids P est attaché à l'autre bout M . Et un certain instant la tige étant en repos ainsi que le corps A soumis à un effort extérieur Q' vertical mais qu'on peut, pour plus de généralité, supposer positif ou négatif, c'est-à-dire descendant ou ascendant, et différent de P . Cette force Q' altère la longueur naturelle L de la tige d'une quantité l' liée à Q' par l'équation $Q' = \frac{E\Omega}{L} l'$ (187). Tout à coup un autre corps A' dont le poids est P' , animé d'une vitesse v' parallèle à la longueur du prisme vient choquer le corps A auquel on suppose qu'il reste uni, de manière qu'après le temps très-court du choc les deux corps ont la vitesse commune $v_0 = \frac{P'v'}{P+P'}$. Et partir de la fin du choc les deux corps réunis sont sollicités indépendamment de l'action de la tige par une force constante Q qui peut différer de leur poids $P+P'$. On demande à compter de cet instant la loi du mouvement de l'extrémité de la tige, en y considérant les deux corps A et A' comme concentrés, en négligeant la masse de la tige, et en supposant que cette tige, allongée ou raccourcie, exerce continuellement un effort exprimé par $\frac{E\Omega x}{L}$ les x étant comptés à partir du point O qu'occupe l'extrémité mobile M de la tige lorsque sa tension est nulle, c'est-à-dire quand la tige a repris sa longueur naturelle.

Soit v la vitesse du point M quand il a parcouru la distance $OM - OM_0$ ou $x - l'$. La puissance vive acquise par l'ensemble des deux corps A et A' est alors $(P+P') \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$, et égale au travail de la force Q constante et de la force variable exercée par la tige, savoir

$$\int_{l'}^x \left(Q dx - \frac{E\Omega}{L} x dx \right).$$

On a donc, en remplaçant $\frac{E\Omega}{L}$ par $\frac{Q'}{l'}$,

$$(P+P') \frac{(v^2 - v_0^2)}{2g} = Q(x - l') - \frac{Q'}{l'} \frac{x^2 - l'^2}{2}$$

En faisant $v=0$, on trouverait la plus grande valeur de x , c'est-à-dire le plus grand allongement X de la tige, auquel répond la plus grande tension $\frac{E\Omega}{L} X$ ou $\frac{Q'}{l'} X$ de la tige.

La dernière équation est de la forme $v^2 = ax - b \frac{g}{l'} x^2 + c$ et par le déplacement de l'o-

rigine peut être mise sous celle-ci $v^2 = \frac{bg}{r^2}(z^2 - r^2)$ la vitesse est donc proportionnelle à l'ordonnée d'un cercle dont le rayon serait r . Le point M est donc (16) à chaque instant la projection d'un point qui se mouvrait uniformément sur un cercle de rayon r . En appelant V la vitesse de ce point; y l'ordonnée variable du cercle, T la durée d'une demi-révolution ou d'une oscillation, on a (16)

$$v = V \frac{y}{r} \quad \text{donc} \quad v = \frac{vr}{y} = r \sqrt{\frac{bg}{r^2}} = \frac{\pi r}{T} \quad \text{donc} \quad T = \pi \sqrt{\frac{l}{bg}}$$

On remarquera l'analogie de cette formule avec celles du pendule simple et du pendule conique.

Cas particulier. $Q' = 0$, $Q = P + P'$, le corps dont le poids est Q est d'abord soutenu de manière à laisser la tige dans son état naturel. On lui imprime la vitesse v_0 et on l'abandonne à l'action de la pesanteur. L'équation du travail est alors

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{g} (v^2 - v_0^2) = Qx - \int_0^x \frac{E\Omega}{L} x = Qx - \frac{E\Omega x^2}{2L}$$

ou, si l'on fait $Q = \frac{E\Omega}{L} l$ en appelant l l'allongement correspondant à la tension Q ,

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l} (2l - x)x$$

Le maximum d'allongement correspondant à $v = 0$ est donc $l + \sqrt{l^2 + \frac{lv_0^2}{g}}$, et la durée des oscillations est $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ indépendante de v_0 .

Les notions établies aux Nos 187 et 188 trouvent ici leur application. On voit qu'un corps suspendu à une tige peut donner à celle-ci une tension momentanée supérieure au poids de ce corps et lui faire ainsi dépasser sa limite d'élasticité ou même causer sa rupture, quoique la tige puisse supporter cette charge en repos.

319. — M. Poncelet appelle résistance vive d'un prisme à la rupture le travail $\int F dx$ exercée par la résistance F due à l'élasticité de la tige, depuis l'instant où elle sort de son état naturel jusqu'à celui où son allongement X est celui qui répond à la rupture. Si la loi exprimée par l'équation $F = \frac{E\Omega x}{L}$ existait jusqu'à l'instant de la rupture, on aurait la résistance vive égale à

$$\frac{E\Omega}{L} \frac{X^2}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{E\Omega}{2L} \left(\frac{X}{L}\right)^2$$

En se servant d'expériences du genre de celles qui sont mentionnées au N° 187, on pourrait calculer plus exactement l'intégrale dont il s'agit.

Chap. 3. - Dynamique spéciale des solides.

§1. - Solide tournant autour d'un axe fixe.

Moments d'inertie.

320 - Le corps est soumis à des forces extérieures dont les unes sont exercées par les appuis, les autres par des agents quelconques. Il importe de chercher les relations de ces forces avec les qualités matérielles du corps et avec les circonstances du mouvement. On les trouve par l'application de la remarque du n° 290.

Soit ω la vitesse angulaire du corps, $\frac{d\omega}{dt}$ son accélération angulaire, m la masse d'un élément, r sa distance à l'axe de rotation. La force totale ou résultante de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures qui agissent sur ce point matériel se décompose en une force tangentielle $m r \frac{d\omega}{dt}$ dont le sens positif est celui qu'on veut adopter pour la rotation directe, et une force centripète $m \omega^2 r$; la force d'inertie correspondante à ce même point a donc pour composantes $-m r \frac{d\omega}{dt}$ tangentielle, et $-m \omega^2 r$ centrifuge.

Les forces extérieures de toute espèce et les forces d'inertie satisfont (290) aux six conditions d'équilibre.

321. - Celle de ces équations qui donne le résultat le plus simple est l'équation des moments par rapport à l'axe fixe de rotation.

$$\sum M F = \sum m r \frac{d\omega}{dt} \cdot r = \frac{d\omega}{dt} \sum m r^2.$$

Cette quantité $\sum m r^2$ s'appelle le moment d'inertie du corps solide autour de l'axe considéré.

C'est en valeur absolue la somme des moments des forces d'inertie quand $\frac{d\omega}{dt} = 1$, de même que dans le mouvement rectiligne la force d'inertie $-m \frac{dv}{dt}$ devient égale à la masse m quand l'accélération $\frac{dv}{dt}$ est égale à l'unité.

322. - On a $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum M F}{\sum m r^2}$; ainsi :

Théorème. L'accélération angulaire d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe est égale à la somme des moments par rapport à cet axe de toutes les forces extérieures, divisée par le moment d'inertie du corps autour du même axe.

323 Remarque. On obtient le même résultat par la formule [1] du n° 283;

1^{re} Division.

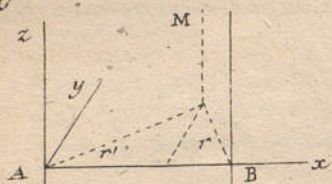
Cours de Méc. et Mach. - 8^e Feuille.

car $d\Sigma Mmv = d \cdot \Sigma mr^2 \omega = d\omega \Sigma mr^2 = Mv \cdot dt$.

324. — La notion du moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est encore déduite très-naturellement de la considération de la puissance vive de ce corps dans sa rotation autour de l'axe dont il s'agit, car on a $\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \Sigma mr^2$. Ainsi Théorème 8^e.

325. — Si pour un solide déterminé et pour un axe quelconque on pose $\Sigma mr^2 = \rho^2 \Sigma m$, la distance ρ qui satisfait à cette relation s'appelle le rayon de ^{gyration} du corps relativement à l'axe dont il s'agit. Ce rayon est donc la distance de l'axe à laquelle on peut transporter toute la masse du corps sans changer le moment d'inertie par rapport à cet axe, ni par conséquent la puissance vive du corps tournant autour de cet axe, pourvu que la vitesse angulaire reste la même.

326. — Propriétés géométriques des moments d'inertie. Le moment d'inertie d'un même corps solide varie avec l'axe: 1^o Soient deux axes parallèles dont l'un AG passe par le centre de gravité, et l'autre BC en est à une distance $AB = K$. On a pour un point M dont la masse est m

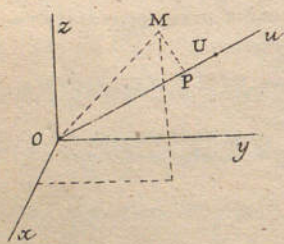


$$mr^2 = m(r_1^2 + K^2 - 2Kx);$$

Or pour l'ensemble du système dont le centre de gravité est G , on a $\Sigma mx = 0$; donc Théorème: $\Sigma mr^2 = \Sigma m r_1^2 + K^2 \Sigma m$.

327. — Si l'on multiplie cette équation par $\frac{1}{2} \omega^2$, on voit que la puissance vive d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe peut se décomposer en deux autres dont l'une est celle que posséderait le système s'il tournait avec la même vitesse angulaire autour d'un axe parallèle au premier et passant par le centre de gravité, et l'autre est la puissance vive qu'aurait le corps si toute sa masse était condensée au centre de gravité. C'est un cas particulier du N^o 293.

328. — Si par un même point O ou même divers axes par rapport auxquels on prend le moment d'inertie d'un même solide, cette quantité varie suivant une loi que nous allons étudier.



Soient Ox, Oy, Oz , trois axes rectangulaires, et soit Ou un quatrième axe par rapport auquel il s'agit de calculer le moment d'inertie d'un système. Soit en M un élément de masse m ; x, y, z ses coordonnées, $MP = r$ sa distance à Ou . OP étant la projection orthogonale sur Ou du contour polygonal dont

les côtés sont x, y, z , on a

$$r^2 = \overline{OM}^2 - OP^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos(u, x) + y \cos(u, y) + z \cos(u, z))^2$$

d'où en remplaçant $x^2 + y^2 + z^2$ par $(x^2 + y^2 + z^2) (\cos^2(u, x) + \cos^2(u, y) + \cos^2(u, z))$

multipliant ensuite par m et faisant la somme de toutes les équations analogues

$$\Sigma mr^2 = \begin{cases} \cos^2(u, x) \Sigma m(y^2 + z^2) + \cos^2(u, y) \Sigma m(z^2 + x^2) + \cos^2(u, z) \Sigma m(x^2 + y^2) \\ - 2 \cos(u, y) \cos(u, z) \Sigma m yz - 2 \cos(u, z) \cos(u, x) \Sigma m zx - 2 \cos(u, x) \cos(u, y) \Sigma m xy. \end{cases}$$

Pour simplifier, posons les notations :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma mr^2 &= I_u \\ \Sigma m(y^2+z^2) &= I_x \\ \Sigma m(z^2+x^2) &= I_y \\ \Sigma m(x^2+y^2) &= I_z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ce sont les mo-} \\ \text{ments d'inertie} \\ \text{autour de } Ou, \\ \text{de } Ox, \&^x \end{array} \left. \begin{array}{l} \Sigma myz = S_x \\ \Sigma mzx = S_y \\ \Sigma mxy = S_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_x \text{ est la somme des produits} \\ \text{des masses } m \text{ multipliées chacune} \\ \text{par le rectangle } yz \text{ des coordon-} \\ \text{nées perpendiculaires à l'axe } Ox, \&^x \end{array}$$

Nous avons

$$I_u = I_x \cos^2(u,x) + I_y \cos^2(u,y) + I_z \cos^2(u,z) - 2S_x \cos(u,y) \cos(u,z) - 2S_y \cos(u,z) \cos(u,x) - 2S_z \cos(u,x) \cos(u,y)$$

Celle est la valeur d'inertie autour de Ou , en fonction : 1° des intégrales $I_x, I_y, I_z, S_x, S_y, S_z$ déterminées par la position des axes Ox, Oy, Oz relativement au solide; 2° Des angles de Ou avec ces axes :

329. - Ellipsoïde représentatif des moments d'inertie. Pour rendre plus sensible la loi exprimée par cette formule, M. Poinsot a eu l'idée ingénieuse de porter sur Ou une longueur OU qui fût une fonction simple de I_u et de chercher l'équation de la surface à laquelle appartiendraient les divers points U quand on ferait varier la direction Ou . Soit $OU = u$ et soient x, y, z les coordonnées de U . La dernière équation devient, en faisant $I_u u^2 = 1$,

$$1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2S_x yz - 2S_y zx - 2S_z xy$$

Le lieu géométrique des points U est donc du second ordre; aucune des distances OU ne peut être infinie puisque I_u ne peut pas être nul; donc c'est un ellipsoïde. Ainsi :

Théorème : Si sur diverses droites passant par un même point et considérées successivement comme axes des moments d'inertie d'un même corps, on porte, à partir de l'intersection commune, des longueurs réciproques aux racines carrées de ces moments d'inertie, le lieu des extrémités de ces longueurs est un ellipsoïde.

330. - Axes principaux et moments principaux d'inertie. Si, pour un point O déterminé, on prend les axes coordonnées suivant les axes principaux de l'ellipsoïde représentatif des moments d'inertie, son équation se réduit à

$$1 = I_a x^2 + I_b y^2 + I_c z^2$$

Ces axes de l'ellipsoïde sont nommés les axes principaux d'inertie du solide pour le point O . Ils sont caractérisés par les trois équations

$$S_x = 0, S_y = 0, S_z = 0, \text{ c'est-à-dire } \Sigma myz = 0, \Sigma mzx = 0, \Sigma mxy = 0.$$

Les moments d'inertie I_a, I_b, I_c , pris autour des axes principaux correspondants au point O sont appelés moments d'inertie principaux pour ce point. D'après la propriété des axes de l'ellipsoïde, le plus petit et le plus grand des moments d'inertie principaux sont aussi le plus petit et le plus grand des moments d'inertie autour de toutes les droites passant par le même point.

331. — Relation du moment d'inertie I_u autour d'un axe quelconque passant par O avec les moments d'inertie principaux correspondants à ce point. par $S_x = 0$, $S_y = 0$, $S_z = 0$, l'équation finale du $\mathcal{N}^{\circ} 8$ devient

$$I_u = I_a \cos^2(u, a) + I_b \cos^2(u, b) + I_c \cos^2(u, c).$$

332. — Pour qu'un axe, par exemple celui des x , soit principal, il suffit des deux conditions $S_y = 0$ et $S_z = 0$, car l'équation du $\mathcal{N}^{\circ} 9$ devenant

$$1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2S_x yz$$

est celle d'un ellipsoïde symétrique par rapport au plan des yz .

333. — M. Poinsot désigne sous le nom d'ellipsoïde central celui qui répond au centre de gravité du système. Non seulement un axe principal correspondant au centre de gravité d'un solide est en même temps axe principal pour un quelconque de ses points mais les parallèles aux deux autres axes principaux correspondants au centre de gravité, menées par un point quelconque du premier sont pour ce point des axes principaux du solide. En effet, l'origine étant au centre de gravité, on a par hypothèse

$$\sum myz = 0, \sum mzx = 0, \sum mxy = 0.$$

Si l'on transporte l'origine sur l'axe des x en laissant les nouveaux axes parallèles aux premiers, on a

$$y = y', \quad z = z', \quad x = k + x',$$

$$\sum myz = \sum y'z' = 0, \quad \sum mzx = k \sum mz' + \sum mz'x' = \sum mz'x' = 0, \quad \sum mxy = k \sum my' + \sum mx'y' = \sum mx'y' = 0.$$

334. — Il peut arriver que l'ellipsoïde correspondant à un point soit de révolution; les moments d'inertie autour de ces droites menées par ce point perpendiculairement à l'axe de révolution sont égaux; toutes ces droites sont axes principaux. Si l'ellipsoïde est une sphère toutes les moments d'inertie autour des droites passant par son centre sont égaux. Une quelconque de ces droites est axe principal.

335. — Méthode pour déterminer le moment d'inertie d'un corps homogène. Oz axe du moment d'inertie, Ox, et Oy perpendiculaires entre eux et sur Oz.

$$I_z = \sum m(x^2 + y^2) = \frac{\Pi}{g} (\sum ux^2 + \sum uy^2)$$

Π étant le poids de l'unité de volume et u le volume élémentaire dont la position a les coordonnées x et y . Les deux sommes $\sum ux^2$ et $\sum uy^2$ se calculent séparément. Soit le solide divisé en tranches comprises entre les plans infiniment voisins perpendiculaires à Oz. L'aire variable ou constante de la section faite par un de ces plans étant désignée par A , le volume de la tranche est exprimé par $A dx$, et la partie de $\sum ux^2$ qui comprend toute la tranche est $A dx \cdot x^2$. On a donc pour le corps entier

$$\sum ux^2 = \int A x^2 dx$$

De même B représentant l'aire d'une section faite par le plan perpendiculaire à Oy, à la distance y de l'origine, on a $\sum uy^2 = \int B y^2 dx$.

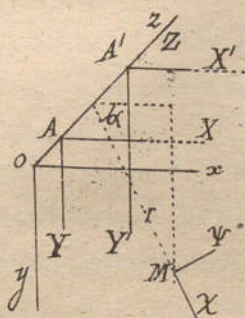
Donc $I_z = \frac{\pi}{g} (\int A x^2 dx + \int B y^2 dy)$ et $\rho^2 = \frac{1}{\Sigma U} (\int A x^2 dx + \int B y^2 dy)$
 A cause de l'homogénéité du solide, le rayon de gyration ρ est indépendant de la densité.

336. En admettant que des points matériels soient distribués uniformément tantôt sur une ligne tantôt sur une surface on est conduit à considérer les moments d'inertie des lignes et des surfaces comme ceux des corps proprement dits.

337. Voici quelques résultats faciles à vérifier. ρ désignant dans chaque cas le rayon de gyration, P le poids du corps, on a toujours le moment d'inertie $I = \frac{P}{g} \rho^2$

- 1° Ligne droite, de longueur l , tournant autour d'un axe qui passe par une extrémité et fait avec cette droite l'angle α $\rho^2 = \frac{1}{3} l^2 \sin^2 \alpha$.
- 2° Disque circulaire de rayon R , autour d'un diamètre $\rho^2 = \frac{1}{4} R^2$
- 3° Secteur circulaire de rayon R , autour du centre $\rho^2 = \frac{1}{2} R^2$
- 4° Cylindre droit circulaire de rayon R , autour de l'axe de figure $\rho^2 = \frac{1}{2} R^2$
- 5° Cylindre creux d'épaisseur uniforme, de rayons R et R' $\rho^2 = \frac{1}{2} (R^2 + R'^2)$
- 6° Jante à section rectangulaire tournant autour de l'axe de figure.
 Même formule. On peut introduire le rayon moyen $\frac{R+R'}{2} = R_1$
 et l'épaisseur $R - R' = b$. On a $\rho^2 = R_1^2 + \frac{1}{4} b^2$
- 7° Sphère pleine de rayon R , autour d'un diamètre $\rho^2 = \frac{8}{5} R^2$
- 8° Parallélépipède rectangle dont les trois arêtes contiguës sont a, b, c ,
 tournant autour d'une droite menée par son centre de gravité
 parallèlement aux arêtes a $\rho^2 = \frac{1}{12} (b^2 + c^2)$

338. Pressions d'un solide tournant, sur ses appuis. Oz est l'axe fixe de rotation d'un solide sous l'action de forces F extérieures qui s'exercent hors de l'axe; Ox, Oy deux droites perpendiculaires entre elles et à Oz . Les forces que le corps reçoit des appuis et qu'il rencontre Oz peuvent se réduire à trois: l'une Z suivant Oz , les deux autres normales à Oz et passant en deux points A et A' pris à volonté. Soient X, Y, X', Y' les composantes parallèles à Ox et à Oy de ces deux dernières forces. Soient $OA = \zeta$ et $OA' = \zeta'$. Les cinq forces Z, X, Y, X', Y' sont à déterminer en fonction de la force F , de la vitesse angulaire actuelle ω du corps, et des quantités qui dépendent de la constitution matérielle de ce corps, ainsi que de sa situation à l'instant où il est considéré.



En désignant par x, y, z les coordonnées d'un élément M , par m la masse; par r sa distance à Oz , par α l'angle de r avec la parallèle à Ox , par Y et X les composantes tangentielle et centrifuge, de la force d'inertie correspondante à cet élément, on a, en vertu du principe de d'Alembert (290) six équations, savoir:

1ère Division.

Cours de Méc. et Mach. - 9^e Feuille.

$$\begin{aligned}\sum F_x + X + X' + \sum \Psi \sin \alpha + \sum \chi \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_y + Y + Y' - \sum \Psi \cos \alpha + \sum \chi \sin \alpha &= 0, \\ \sum F_z + Z &= 0,\end{aligned}$$

ou d'après les relations $\Psi = mr \frac{d\omega}{dt}$, $\chi = m\omega^2 r$, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\sin \alpha = \frac{y}{r}$,

$$\sum F_x + X + X' + \frac{d\omega}{dt} \sum my + \omega^2 \sum mx = 0,$$

$$\sum F_y + Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} \sum mx + \omega^2 \sum my = 0,$$

$$\sum F_z + Z = 0,$$

$$\begin{aligned}\sum M_x F - Yz - Y'z' + \sum z \Psi \cos \alpha - \sum z \chi \sin \alpha &= 0, \\ \sum M_y F + Xz + X'z' + \sum z \Psi \sin \alpha + \sum z \chi \cos \alpha &= 0, \\ \sum M_z F - \sum \Psi r &= 0.\end{aligned}$$

$$\sum M_x F - Yz - Y'z' + \frac{d\omega}{dt} \sum mxz - \omega^2 \sum myz = 0,$$

$$\sum M_y F + Xz + X'z' + \frac{d\omega}{dt} \sum myz + \omega^2 \sum mxz = 0,$$

$$\sum M_z F - \frac{d\omega}{dt} \sum mr^2 = 0.$$

La dernière équation détermine (321) l'accélération angulaire. Les cinq autres déterminent les cinq inconnues Z, X, Y, X', Z' réactions longitudinale et normale des appuis, égales et opposées à cinq forces qui représentent les pressions du corps sur ses appuis suivant l'axe et perpendiculairement à l'axe de rotation.

339. — A un instant déterminé on peut choisir le plan zOx passant par le centre de gravité. On a alors $\sum my = 0$, et en appelant a la distance de ce centre à Oz , et M la masse totale du corps $\sum mx = Ma$. Les trois équations de projection deviennent

$$\sum F_x + X + X' + \omega^2 Ma = 0, \quad \sum F_y + Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} Ma = 0, \quad \text{et} \quad \sum F_z + Z = 0$$

C'est-à-dire Théorème. La résultante de translation des pressions exercées sur les appuis est égale à la résultante de translation des forces extérieures et de la force d'inertie due à la masse totale supposée réunie au centre de gravité.

340. — Pour apprécier séparément l'influence de la force centrifuge, supposons nulles les forces F et par suite $\frac{d\omega}{dt}$. Les six équations deviennent (le plan zOx passant par le centre de gravité).

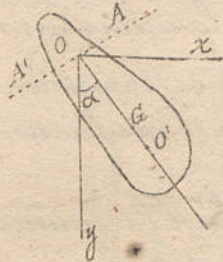
$$\begin{aligned}X + X' + \omega^2 Ma &= 0 & Yz + Y'z' + \omega^2 \sum myz &= 0, \\ Y + Y' &= 0, & Xz + X'z' + \omega^2 \sum mxz &= 0, \\ Z &= 0. & \frac{d\omega}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Dans le cas où Oz est axe principal d'inertie pour le point O , on a $Y = 0, Y' = 0$, et les forces X, X' ont une résultante unique, égale et opposée à la force centrifuge $\omega^2 Ma$, et passant en O puisque son moment $Xz + X'z'$ est nul.

Remarque. — Si le corps est composé de tranches perpendiculaires à Oz ou plus généralement de parties symétriques chacune relativement à un plan perpendiculaire à Oz , et ayant toutes leurs centres de gravité dans un même plan passant par cet axe de rotation Oz , chaque partie donne lieu à une force centrifuge résultante passant par son centre de gravité, et toutes les forces centrifuges résultantes partielles étant parallèles entre elles ont une résultante totale $\omega^2 \sum M'a' = \omega^2 Ma$, dont la situation se trouve par la règle de la composition des forces parallèles dans un plan.

§2. - Application du § précédent.

341. I. Pendule composé; corps solide libre de se mouvoir autour d'un axe fixe horizontal et soumis hors de cet axe à la seule action de la pesanteur, et par conséquent sans frottement, hypothèse qu'on réalise au moyen de couteaux, &c. O axe de suspension. G centre de gravité à un instant quelconque. ω et $\frac{d\omega}{dt}$ vitesse et accélération angulaires à cet instant. m et mg la masse et le poids d'un élément du corps, x sa distance au plan vertical Oy. $\Sigma m = M$, $OG = a$, angle variable $\angle Oy = \alpha$.



$$\text{On a (322)} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma mgx}{\Sigma mr^2} = \frac{Mga \sin \alpha}{\Sigma mr^2}$$

Si l'on s'agit d'un pendule simple (271) dont la longueur fut l , et l'écartement le même α , la même formule donnerait, réduction faite, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{g \sin \alpha}{l}$

Donc pour que la droite OG du pendule composé oscille comme un pendule simple, il faut et suffit que la longueur l de celui-ci satisfasse à l'équation

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{Ma} = \frac{\text{moment d'inertie par rapport à O}}{\text{moment de la masse par rapp. au plan OA perpend. à OG}}$$

342. - La durée T des petites oscillations du pendule composé est donc (271)

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{Mga}}, \text{ d'où } \Sigma mr^2 = \frac{MgaT^2}{\pi^2}$$

De là un moyen de déterminer expérimentalement le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe autour duquel on peut le faire osciller sans frottement sensible.

343. - Centre d'oscillation. Si dans le plan OG on conçoit une horizontale O' dont la distance à l'axe de suspension O soit égale à l , le mouvement des points situés sur cette droite n'est ni accéléré ni retardé par leur liaison avec les autres points matériels du corps. On appelle centre d'oscillation le point de la droite O' situé sur la même perpendiculaire à l'axe O que le centre de gravité; ce point oscille comme si toute la masse y était concentrée.

344. - Propriétés réciproques des deux centres de suspension et d'oscillation. ρ et ρ_1 désignant les rayons de gyration du pendule par rapport aux axes projetés en O et en G, on a (326)

$$\Sigma mr^2 = M\rho^2 = Ma^2 + M\rho_1^2 \quad \text{et} \quad l = a + \frac{\rho^2}{a}$$

Ainsi la distance $\overline{GO'} = \frac{\rho^2}{a}$, et le produit $\overline{GO} \cdot \overline{GO'} = \rho_1^2$ ne dépend que du rayon de gyration ρ_1 par rapport à l'axe G.

Conséquences. 1° Le centre d'oscillation est toujours au dessous du centre de gravité.

2° Si l'on remplace l'axe de suspension par un autre qui lui soit parallèle et à la même distance α du centre de gravité, la longueur GO et l restent les mêmes.

3° Si l'on transporte l'axe de suspension en O' parallèlement à sa première direction, de sorte que α doit être remplacé par $\frac{\rho_1^2}{\alpha}$, la nouvelle distance du centre d'oscillation au centre de gravité devient égale à α , la longueur l reste $\frac{\rho_1^2}{\alpha} + \alpha$ la même qu'auparavant. C'est ce qu'on exprime en disant que les centres d'oscillation et de suspension sont échangeables ou réciproques. Cette propriété a été employée pour déterminer l'accélération g sans calculer le moment d'inertie du pendule composé.

4° Puisque pour toutes les suspensions parallèles, la longueur l est la somme de deux longueurs dont le produit est constamment ρ_1^2 , le minimum de l et par conséquent la plus courte durée des oscillations répond à $l = 2\rho_1$ ou $\alpha = \rho_1$. D'ailleurs l et T croissent à mesure que α approche de zéro ou de l'infini.



345. — La théorie précédente ne tient pas compte de l'influence de l'air, laquelle s'exerce de deux manières: 1° Un corps plongé dans un fluide pesant en reçoit une sous-pression appelée perte de poids égale, si le corps et le fluide sont en repos, au poids du fluide déplacé; 2° Un corps en mouvement dans un fluide, comme l'air, éprouve une résistance qui croît avec la vitesse. L'expérience prouve que cette dernière résistance, pour un pendule dans l'air, n'altère pas sensiblement la durée des petites oscillations, puis-que celles-ci restent isochrones pendant que la vitesse et par conséquent l'amplitude décroissent. Pour avoir égard à la première cause, en supposant le pendule composé homogène ainsi que le fluide ambiant, en désignant par M' g le poids du fluide déplacé, il faudrait dans la formule $\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mg \sin \alpha}{\sum mr^2}$ remplacer la force Mg par $(M - M')g$ et en conclure la durée des oscillations

$$T = \pi \sqrt{\frac{\sum mr^2}{(M - M')g}}$$

346. — Pression du pendule sur son appui. On le suppose symétrique par rapp. à un plan mené par G perpendiculairement à l'axe O . La pression (339) est la résultante à l'instant considéré du poids Mg , de la force centrifuge $M \cdot \alpha \cdot \omega^2$ et de la force d'inertie tangentielle $M \alpha \frac{d\omega}{dt}$. Si l'on appelle h la hauteur dont est descendu le centre de gravité depuis sa position extrême, on a (280, 281, 324)

$$\frac{1}{2} \omega^2 \sum mr^2 = Mgh$$

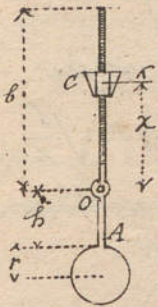
ou en désignant par l la longueur du pendule simple correspondant.

$$\frac{1}{2} \omega^2 l M a = M g b. \quad \text{Ainsi } M a \omega^2 = 2 M g \frac{b}{l}.$$

On a ensuite $M a \frac{d\omega}{dt} = M g \frac{a \sin \alpha}{l}$, à cause de $\frac{d\omega}{dt} = \frac{g \sin \alpha}{l}$.

Enfin le poids vertical Mg se décompose en $Mg \cos \alpha$ suivant OG et $Mg \sin \alpha$ suivant OA' . La pression cherchée est donc la résultante de deux forces rectangulaires, l'une suivant OG égale à $Mg \left(\frac{2b}{l} + \cos \alpha \right)$, l'autre suivant OA' égale à $Mg \sin \alpha \left(1 - \frac{a}{l} \right)$.

347. - II. - Exemple du pendule, métronome de Maelzel. Une tige prismatique mince AB oscille autour d'un axe horizontal O . À l'extrémité inférieure A est fixée une lentille. Un autre corps C moins lourd prend à volonté diverses positions sur la partie supérieure de la tige et s'y fixe par un ressort. À mesure que le curseur C s'élève, le centre de gravité s'élève aussi, le produit $a \Sigma m$ diminue, le moment d'inertie augmente, la longueur l ou $\frac{\Sigma m r^2}{a \Sigma m}$ croît à fortiori.



Soit M la masse de la tige seule; le carré de son rayon de gyration autour de O est (337 1°), $\left(\frac{1}{3} b^2 b + \frac{1}{3} b^2 b \right) \frac{1}{b+h} = \frac{1}{3} (b^2 - b h + h^2)$ soit K^2 .

Appelons nM la masse de la lentille, $nM \rho^2$ son moment d'inertie par rapport à O , $n'M$ la masse du curseur, x la distance variable de son centre de gravité; son moment d'inertie autour de O diffère peu de $n'M x^2$. On a donc très-approximativement

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{a \Sigma m} = \frac{nM \rho^2 + M K^2 + n'M x^2}{nM(h+r) - \frac{1}{2} M(b-h) - Mx} = \frac{n \rho^2 + K^2 + n' x^2}{n(h+r) - \frac{1}{2}(b-h) - x}$$

Pour chaque valeur de l le nombre d'oscillations par minute est donnée par la formule

$$N = \frac{60}{T} = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{59.84}{\sqrt{l}}$$

348. III. Balance de torsion. - Un fil métallique vertical est encastré à son extrémité supérieure et porte à l'autre bout une barre horizontale, dont le centre de gravité est sur la direction du fil. Si l'on veut tordre le fil d'une certaine quantité et maintenir l'équilibre en laissant le fil vertical, il faut appliquer à la barre deux forces horizontales faisant un couple, et l'expérience, d'accord avec la théorie, apprend que le moment de ce couple est proportionnel, pour divers fils cylindriques de même métal, à la 4^e puissance du diamètre, et à l'angle de torsion par unité de longueur. Le fil exerce évidemment sur la barre des forces équivalentes à un couple égal et contraire au premier.

Cela posé, on suppose que la barre ayant été dérangée de sa position d'équilibre naturel soit ensuite abandonnée sans vitesse initiale à la pesanteur et à l'action du fil, et l'on admet que dans le mouvement qu'elle prend le fil agit sur elle à chaque instant suivant la loi ci-dessus exprimée. On demande quel sera le mouvement oscillatoire de la barre.

La barre étant symétrique par rapport à un plan passant par l'axe vertical du fil

1^{re} Division.

Cours de Méc. et Mach. - 10^e Feuille.

Soit α l'angle variable de ce plan avec sa position d'équilibre naturel. $\frac{d\alpha}{dt}$ est la vitesse angulaire de la barre, désignée par ω . Pour appliquer la formule de l'accélération angulaire il suffit d'introduire le moment du couple qui représente l'action du fil. On a $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{K\alpha}{I}$, la constante K dépendant du métal, du diamètre et de la longueur du fil, et I étant le moment d'inertie de la barre autour de l'axe de ce fil. En éliminant dt au moyen de la relation $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ on obtient $\omega d\omega = -\frac{K\alpha d\alpha}{I}$ d'où $\omega^2 = \frac{K}{I} (\alpha_0^2 - \alpha^2)$ et par conséquent

$$dt = \sqrt{\frac{I}{K}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}} \quad \text{d'où} \quad t = \sqrt{\frac{I}{K}} \arccos \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right) + C$$

On met le signe $-$ parce que dans la première oscillation qu'on a en vue, la vitesse $\frac{d\alpha}{dt}$ est négative. En intégrant de α_0 à $-\alpha_0$, on trouve pour l'oscillation entière $T = \pi \sqrt{\frac{I}{K}}$, formule analogue à celle du pendule. L'expérience qui constate que les oscillations sont isochrones, quelles que soient leurs amplitudes, confirme la théorie précédente.

349 ~ IV. Corps tournant autour d'un axe vertical sous l'action de la pesanteur et d'un ou plusieurs couples horizontaux. Dans ce cas, en conservant les notations du N° 338 et 339, en supposant l'axe Oz dirigé de haut en bas, le plan zOx passant par le centre de gravité et l'origine O étant en A , point d'application des forces X, Y , on a

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = Mg, \quad \sum M_x F = 0, \quad \sum M_y F = -Pa, \quad \zeta = 0,$$

et les cinq premières équations du N° 338 deviennent

$$X + X' + \omega^2 Ma = 0, \quad Y + Y' - \frac{d\omega}{dt} Ma = 0, \quad Mg + Z = 0$$

$$Y' \zeta' - \frac{d\omega}{dt} \sum m x z + \omega^2 \sum m y z = 0, \quad -Pa + X' \zeta' + \frac{d\omega}{dt} \sum m y z + \omega^2 \sum m x z = 0.$$

Si l'on voulait que les pressions horizontales en A fussent nulles, quelle que fût l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$ résultant des couples, et la vitesse angulaire, il faudrait non seulement qu'on eût $\alpha = 0$ et qu'ainsi le centre de gravité fût sur l'axe de rotation, mais qu'on eût encore $\sum m y z = 0$ et $\sum m x z = 0$, qu'ainsi l'axe Oz fût axe principal d'inertie pour chacun de ses points, moyennant quoi X et Y seraient nulles comme X' et Y' .

Cette considération explique comment une meule de moulin à farine peut être horizontale dans l'état de repos et perdre cette situation quand elle tourne. Les deux formules $\sum m x z = 0$, $\sum m y z = 0$ indiquent le moyen de corriger ce défaut en introduisant dans quatre trous verticaux des masses métalliques dont on règle expérimentalement la position.

350 ~ V. Centre de percussion. On suppose qu'un corps libre de tourner autour d'un axe Oz commence sans vitesse initiale à être sollicité par des forces ayant une résul-

l'axe unique F ; on demande sous quelles conditions les pressions sur les appuis sont actuellement nulles.

Faisons $\omega = 0$, $X = X' = Y = Y' = Z = 0$, en choisissant pour z Ox le plan passant par le centre de gravité. La première et la troisième des équations générales du n° 338 deviennent $F_x = 0$, $F_z = 0$. Ainsi

1° F est perpendiculaire au plan z Ox dont la position vient d'être définie. Le point où elle rencontre ce plan s'appelle centre de percussion pour l'axe Oz .

La deuxième et la sixième équations deviennent $F - \frac{d\omega}{dt} Ma = 0$ et $Fx - \frac{d\omega}{dt} \sum mr^2 = 0$, la distance de la force F à l'axe Oz étant désignée par x ; ainsi:

2° Cette distance est $x = \frac{\sum mr^2}{Ma}$, la même que serait celle du centre d'oscillation du corps à Oz considérée comme axe de suspension.

Les équations quatrième et cinquième deviennent, si l'on appelle z la distance de F à Ox

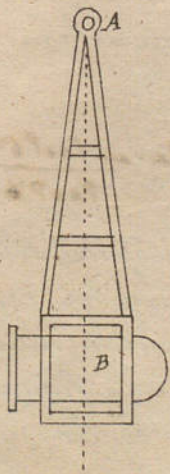
$$-Fz + \frac{d\omega}{dt} \sum m x z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = \sum m y z = 0.$$

Or on peut, sans faire aucune hypothèse sur le corps tournant, choisir l'axe Ox rencontrant la force F . On a alors $z = 0$, $\sum m x z = 0$, $\sum m y z = 0$; ainsi:

3° L'axe de rotation Oz doit être un axe principal d'inertie pour le point O où le rencontre le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient la force F .

Exemple. Si le corps est une barre droite très mince d'une longueur L et que l'axe de rotation soit à l'une de ses extrémités on a $x = \frac{2}{3}L$. Réciproquement si la distance de l'axe à l'une des extrémités de la barre est $\frac{1}{2}$ de la longueur L , le centre de percussion est situé à l'autre extrémité.

351. - VI. Pendule balistique. - Il est formé d'un récepteur en fonte fixé à un cadre de suspension en fer pouvant osciller librement autour d'un axe horizontal A . Le récepteur contient une matière compressible destinée à recevoir le choc et à amortir la vitesse d'un projectile sans que la rupture du récepteur puisse avoir lieu.



On connaît la masse μ du projectile assez petit pour être considéré comme un point matériel; il s'agit, d'après l'effet qu'il produit sur le pendule, d'évaluer sa vitesse V dirigée suivant l'horizontale passant par le point connu B .

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement (283) au système formé de l'ensemble du pendule et du projectile considéré à l'instant initial de leur rencontre où le pendule est en repos et le projectile animé de la vitesse V , et à l'instant final du choc, où les deux corps se meuvent ensemble comme ne faisant qu'un sys.

time solide avec une vitesse angulaire ω autour de A. Si nous faisons $AB = b$, et si nous appelons I le moment d'inertie du pendule avant sa réunion au projectile, l'accroissement de la somme des moments des quantités de mouvement est

$$\Sigma m\omega r + \mu\omega b \cdot b - \mu Vb \quad \text{ou} \quad \omega(I + \mu b^2) - \mu Vb;$$

et, attendu que, pendant la très courte durée du phénomène, on peut négliger les impulsions des forces extérieures, forces dont les moments donnent d'ailleurs une somme presque nulle, on peut poser très approximativement

$$\omega(I + \mu b^2) - \mu Vb = 0$$

Si ω était connu, on en conclurait V . Or cette vitesse angulaire ω peut se déduire de l'amplitude de la première oscillation que fait le pendule immédiatement après le choc. En effet à l'instant final du choc, la puissance vive des deux corps réunis est $\frac{1}{2} \omega^2 (I + \mu b^2)$, et à cet instant le centre de gravité du système se trouve encore très peu écarté de la verticale passant par A. Mais dans la première oscillation ce centre de gravité s'élève d'une hauteur H qu'on peut observer, et si l'on désigne par P le poids des deux corps réunis, on a

$$\frac{1}{2} \omega^2 (I + \mu b^2) = PH \quad \text{d'où} \quad V = \frac{1}{b\mu} \sqrt{2PH(I + \mu b^2)}$$

Si l'on appelle P' le poids du pendule sans le projectile; a la distance de son centre de gravité à A; $P'' = \mu g$ le poids du projectile; x la distance à l'axe du centre de gravité des corps réunis; α l'angle avec la verticale de la droite joignant A à ce centre lors du plus grand écartement du pendule, on a

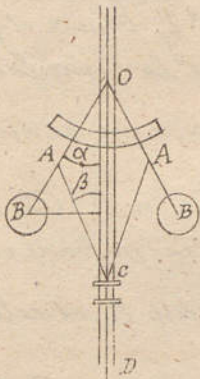
$$P = P' + P'', \quad x = \frac{P'a + P''b}{P}, \quad H = x(1 - \cos \alpha) = 2x \sin^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Les quantités a et I peuvent être déterminées expérimentalement. Enfin il importe que la direction de la vitesse V du projectile passe par le centre de percussion du pendule, que par conséquent l'on ait $b = \frac{Iq}{P'a}$ et si cette condition est remplie le centre d'oscillation du pendule après sa réunion au projectile sera à la même distance de l'axe qu'auparavant, car on aura cette distance

$$l = \frac{I + \mu b^2}{P'a + P''b} \quad g = \frac{Iq + P''b^2}{P'a + P''b} = b. \quad \text{car} \quad Iq = b^2 a \cdot \frac{Iq + P''b^2}{P'a + P''b} = \frac{b^2 P'a + P''b^2}{P'a + P''b} = b \frac{P'a + P''b}{P'a + P''b}$$

352 - VII. - Régulateur à force centrifuge. Quatre verges rigides égales deux à deux sont disposées dans un plan et articulées à charnières, savoir: en O sur un arbre tournant vertical OD, en A et A' où elles forment un angle variable, en C sur un manchon qui entoure l'arbre OD le long duquel il peut glisser en faisant varier la figure du quadrilatère symétrique OACA. Les points B sont les centres de deux boules métalliques. Tout le système α , à chaque instant, une même vitesse angulaire autour de

l'axe de l'arbre OD. La position du manchon C variant avec cette vitesse, on se sert de cet appareil soit pour indiquer à l'aide d'une aiguille la vitesse angulaire actuelle, soit à faire mouvoir un levier de manœuvre qui ouvre plus ou moins une soupape d'où dépend le mouvement de la machine principale, soit à faire fonctionner un manchon d'embrayage alternatif qui fait que le moteur principal modifie son action pour rétablir la vitesse normale.



L'application raisonnée de cet appareil exige la solution des questions suivantes :

- 1° La vitesse angulaire ω étant considérée comme normale lorsque l'appareil tourne sans changer de figure et sans recevoir d'autres forces extérieures que les poids propres des pièces, quelle relation la figure a-t-elle avec ω ?
- 2° Le manchon étant supposé ne pouvoir glisser dans un sens ou dans l'autre sans subir une résistance parallèle à OC et égale à F, quelles seront les vitesses angulaires du système aux instants où le manchon sera sur le point de monter et de descendre ?
- 3° La vitesse angulaire s'écartant davantage encore de la valeur normale ω , en plus ou en moins, et le manchon se déplaçant alors malgré la résistance F, quelle sera l'étendue de son déplacement en fonction des quantités qui la déterminent, dans les deux cas de l'ascension et de la descente ?

Soient $OA = a$, $OB = b$, $AC = c$, poids de chaque boule = P, poids de OB = p, poids de AC = q, poids du manchon = Q.

ω la vitesse normale ci-dessus définie.

α l'angle AOC correspondant à cette vitesse.

ω_1 la vitesse angulaire à l'instant où AOC restant α le manchon est sur le point de monter malgré la résistance F ajoutée à son poids ;

ω_2 la vitesse angulaire à l'instant où l'angle α subsistant, le manchon est sur le point de descendre malgré la résistance ascendante F ;

ω' la vitesse angulaire à l'instant où l'angle AOC a pris la valeur α' plus grande que α , malgré la résistance descendante F ;

ω'' la vitesse angulaire à l'instant où l'angle AOC est devenu $\alpha'' < \alpha$ malgré la résistance ascendante F.

Or traitons d'abord le premier cas de la 2^e question, qui comprend la première en faisant $F=0$ et les autres cas par les changements convenables de notations et de signes. Le manchon étant sur le point de monter, la force F est descendante.

Le système tournant uniformément autour de OC est en repos relatif dans un système de comparaison ayant la même rotation; donc on peut lui appliquer les conditions d'équilibre absolu pourvu qu'on joigne aux forces réelles les forces centrifuges qui correspondent pour les divers éléments matériels à la vitesse angulaire commune et à leurs diverses distances de l'axe. Pour chaque boule qu'on peut (340) considérer comme centrée en B la force

centrifuge résultante horizontale est $\frac{P}{g} \omega^2 b \sin \alpha$.

1^{ère} Division.

Cours de Méc. et Mach. - 11^e Feuille.

Pour la verge OB (qu'on suppose prolongée jusqu'au centre B de la boule en supposant le double employé compensé par un renflement de la verge près de l'assemblage) les forces centrifuges correspondantes aux diverses longueurs dx , sont exprimées par $\mu \omega^2 \sin \alpha \cdot x dx$ (la masse de l'unité de longueur étant μ) d'où il suit que leur résultante est $\frac{1}{2} \mu \omega^2 b^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{P}{g} b \sin \alpha$ et quelle passe entre O et B à une distance de O égale à $\frac{2}{3} b$; que par conséquent on peut la remplacer par deux forces, l'une agissant en O , l'autre passant par B et égale à $\frac{1}{3} \omega^2 \frac{P}{g} b \sin \alpha$, c'est-à-dire à la force centrifuge qui correspond au tiers de la masse de la verge concentrée en B . De même les forces centrifuges relatives à la verge AC sont équivalentes à une force passant en C et à une autre égale à $\frac{1}{3} \omega^2 \frac{q}{g} a \sin \alpha$ appliquée horizontalement au point A , et celle-ci peut sans changer les conditions d'équilibre être remplacée par une composante en O et une autre en B égale à $\frac{1}{3} \omega^2 \frac{q}{g} \frac{a^2}{b} \sin \alpha$.

Faisons une transformation analogue pour les poids. Celui de OB peut être remplacé par deux composantes $\frac{1}{2} p$ appliquées l'une à O l'autre à B , et le poids de chaque verge AC peut être remplacé d'abord par $\frac{1}{2} q$ en C et $\frac{1}{2} q$ en A , puis ce dernier par $\frac{1}{2} q \frac{a}{b}$ en B et une composante en O .

En définitive et attendu que les composantes centrifuges qui agissent sur le manchon sont égales et opposées, le système articulé peut être considéré comme en équilibre sous l'action:

- 1° des deux forces verticales $P_1 = P + \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} q \frac{a}{b}$ agissant aux centres B des boules;
- 2° de la force verticale $Q_1 = Q + q + F$ appliquée au manchon;
- 3° des deux forces centrifuges $X = \frac{\omega^2 b \sin \alpha}{g} (P + \frac{1}{3} p + \frac{1}{3} q \frac{a^2}{b^2})$ appliquées aux deux centres B et des forces qui s'exercent au point fixe O .

Cela posé, la relation qui existe entre ces forces dans le cas de l'équilibre se trouve très simplement par le théorème général du travail virtuel (136) connu sous la dénomination de principe des vitesses virtuelles. Supposons que le système subisse un déplacement virtuel, l'angle α recevant un accroissement $d\alpha$, et la hauteur un accroissement algébrique dh , les cinq forces X , P_1 et Q_1 feront des travaux dont la somme nulle fournit l'équation:

$$2 X b d\alpha \cdot \cos \alpha - 2 P_1 b d\alpha \cdot \sin \alpha + Q_1 dh = 0.$$

Pour faire disparaître les infiniment petits $d\alpha$ et dh , on a

$$b = a \cos \alpha + \sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha} \quad \text{d'où } dh = a \sin \alpha \left(1 + \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} \right) d\alpha$$

de sorte que l'équation d'équilibre devient, après substitution et réduction

$$[E] \dots \dots \frac{\omega^2 b^2 \cos \alpha}{g} \left(2P + \frac{1}{3} p + q \frac{a^2}{b^2} \right) - (2Pb + pb + qa) - a(Q + q + F) \left(1 + \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{c^2 - a^2 \sin^2 \alpha}} \right) = 0$$

Dans le cas normal (1° ci-dessus) il faut faire $F=0$ et $\omega_1=\omega$. On peut ainsi obtenir l'écartement normal α en fonction des quantités a, b, c, P, p, q, Q , et ω .

Cet angle α étant ainsi déterminé l'équation [E] donne ω_1 en fonction des mêmes données.

Pour résoudre le second cas de la deuxième question (2°) il faut faire la résistance F ascendante, c'est-à-dire négative dans l'équation [E], laisser la valeur précédente α et remplacer ω_1 par ω_2 qu'on obtient ainsi.

Pour le premier cas de la troisième question (3°) on met dans l'équation [E] pour ω_1 la vitesse angulaire $\omega' > \omega_1$, on laisse F positive, et l'on remplace α par α' seule inconnue qui est ainsi déterminée.

De même pour le second cas de la troisième question, on met $\omega'' < \omega_2$ au lieu de ω_1 , $-F$ au lieu de F , et l'on remplace α par α'' qu'on peut ainsi calculer.

353. - Remarques. 1^{re}. Si l'on néglige les poids p, q et Q très-petits comparativement à P , on trouve, pour le cas normal où F est nulle, $\omega^2 b \cos \alpha = g$, comme au n° 268.

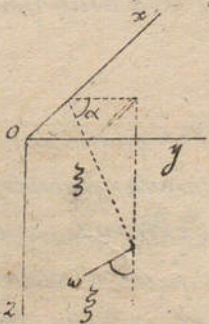
2^e. Et chaque valeur de α répond une valeur de h , qui dans le cas où $OACA$ est un parallélogramme devient $2a \cos \alpha$.

3^e. Le degré de sensibilité de l'appareil peut être considéré sous deux points de vue: soit en comparant ensemble les deux vitesses angulaires ω_1 et ω_2 entre lesquelles l'angle α et la hauteur h restent invariables; soit en comparant la différence plus ou moins grande des angles α' et α à la différence des vitesses angulaires ω' et ω_1 correspondantes.

(M. Poncelet dans son cours à l'école de Metz, lithographié en 1836, section 2, pages 13 à 34, a traité le premier avec exactitude et avec d'utiles développements; les questions qui viennent d'être résumées).

§ 3. - Mouvement d'un solide autour d'un point fixe où passe la résultante des forces extérieures.

354. - Moment résultant des quantités de mouvement. - Ce moment autour du point fixe est constant en grandeur et en direction (287). On est ainsi conduit à chercher quel est ce moment résultant pour un solide ayant une vitesse angulaire ω autour d'un axe passant par un point donné O , et l'on se sert pour cela de la propriété rappelée n° 286.



$$\text{Si le solide tourne } \left\{ \begin{array}{l} \sum M_x mv = \omega \sum m \xi^2 \\ \sum M_y mv = -\sum m \omega \xi \cos \alpha \cdot x = -\omega \sum m \eta x \\ \sum M_z mv = -\sum m \omega \xi \sin \alpha \cdot y = -\omega \sum m z x \end{array} \right.$$

Dans le cas particulier où l'axe de rotation instantané Oz

$$\omega \sum m \xi^2$$

est un axe principal d'inertie, les sommes $\sum myx$, $\sum mzx$ sont nulles. Les trois moments composants se réduisent à un seul qui est par conséquent le moment résultant, ωI_x de quantité de mouvement autour de Ox .

Si le solide tourne autour de Ou , la rotation ω est décomposable (50) en trois rotations $\omega \cos(u, x)$, $\omega \cos(u, y)$, $\omega \cos(u, z)$ autour de trois axes Ox , Oy , Oz , c'est-à-dire que chaque vitesse est décomposable en trois vitesses $\xi \omega \cos(u, x)$ autour de Ox , $\eta \omega \cos(u, y)$ autour de Oy , $\zeta \omega \cos(u, z)$ autour de Oz (les distances du point considéré aux axes Ox , Oy , Oz étant ξ , η , ζ); toutes les vitesses et les quantités de mouvement sont ainsi décomposées en trois groupes correspondants aux trois rotations; et l'on remarquera qu'en général (149) le moment résultant de plusieurs groupes de forces, de vitesses ou de quantités de mouvement est égal au moment résultant des moments résultants des groupes partiels.

Cela posé, supposons que Ox , Oy , Oz soient les axes principaux d'inertie du solide pour le point O . Les moments résultants des trois groupes seront, d'après ce qui précède, $\omega \cos(u, x) I_x$, $\omega \cos(u, y) I_y$, $\omega \cos(u, z) I_z$, ou (x', y', z' désignant les coordonnées du point où l'axe Ou perce l'ellipsoïde représentatif des moments d'inertie, et u la distance de ce point à l'origine),

$$\omega \frac{x'}{u} I_x, \quad \omega \frac{y'}{u} I_y, \quad \omega \frac{z'}{u} I_z$$

Le moment résultant a donc pour valeur $\dots \dots \dots \frac{\omega}{u} \sqrt{x'^2 I_x^2 + y'^2 I_y^2 + z'^2 I_z^2}$,

et son axe fait avec Ox , Oy , Oz des angles dont les cosinus sont

$$\frac{I_x x'}{\sqrt{I_x^2 x'^2 + I_y^2 y'^2 + I_z^2 z'^2}} \quad \frac{I_y y'}{\sqrt{\dots}} \quad \frac{I_z z'}{\sqrt{\dots}}$$

Observons maintenant que l'équation de l'ellipsoïde (330) étant $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$, son plan tangent au point x', y', z' a pour équation $I_x x'x + I_y y'y + I_z z'z = 1$ et que les cosinus ci-dessus sont ceux de la normale en ce point. Donc l'axe du moment résultant des quantités de mouvement est perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde; en d'autres termes le plan du moment résultant, des quantités de mouvement, appelé aussi plan du maximum des aires est parallèle au plan diamétral de l'ellipsoïde qui est conjugué avec l'axe de rotation.

La distance de l'origine au plan tangent est $p = \frac{1}{\sqrt{I_x^2 x'^2 + I_y^2 y'^2 + I_z^2 z'^2}}$

Le moment résultant ou maximum des quantités de mouvement autour de O a donc pour valeur $\frac{\omega}{up}$.

355. — Mouvement du solide dans l'hypothèse indiquée. Le moment résultant des quantités de mouvement est constant en grandeur et en direction, et puisque son axe reste constamment perpendiculaire au plan tangent mené par le point où l'axe de rotation perce l'ellipsoïde central ce plan tangent reste parallèle à sa situation initiale. Si l'axe de rotation à un instant n'est pas un axe principal de l'ellipsoïde, le plan tangent considéré à cet instant comme lié à

l'ellipsoïde change de direction; donc la rotation n'est pas continue autour du même axe: elle n'est qu'instantanée. Soit OM l'axe instantané autour duquel le corps tourne à la fin du temps t , M étant le point où cet axe perce l'ellipsoïde; soient OM' et M' l'axe et le point analogues au bout du temps $t + dt$. Non seulement les deux plans tangents en M et en M' à l'ellipsoïde en mouvement sont parallèles, mais on démontre qu'ils se confondent. En effet le point M pendant le temps dt ne peut avoir parcouru qu'un espace infiniment petit du second ordre, puisque sa vitesse est nulle; et à la fin de ce temps il est à une distance infiniment petite du second ordre du plan tangent en M' ; donc les deux plans tangents en M et M' sont à une distance, l'un de l'autre, infiniment petite du second ordre; et cela à partir d'un instant quelconque. Donc tous les plans tangents successifs coïncident.

En second lieu la grandeur $\frac{\omega}{u\rho}$ du moment résultant est constante; et puisque p l'est aussi, il en est de même du rapport $\frac{\omega}{u}$; donc

La vitesse angulaire ω est proportionnelle à la longueur u du demi-diamètre de l'ellipsoïde, autour duquel se fait la rotation instantanée.

Le mouvement du corps est complètement défini par le roulement de son ellipsoïde représentatif sur un plan tangent fixe, son point O étant immobile; et sa vitesse angulaire variant suivant la loi qui vient d'être indiquée.

356 ~ Remarque. $\frac{\omega}{u}$ est constant. Or $u = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$; donc $\omega \sqrt{I_u}$ et par suite $\frac{1}{2} \omega^2 I_u$ est invariable. C'est en effet la puissance vive qui doit être constante. En partant, comme on le pourrait, de ce fait, et de ce que la quantité $\frac{\omega}{u\rho}$ est aussi constante, on peut conclure, sans employer le raisonnement ci-dessus, que p est invariable.

357 ~ Si à un instant le corps tournait autour d'un axe principal de son ellipsoïde, il continuerait indéfiniment de tourner autour du même axe. C'est pourquoi les trois axes principaux d'inertie pour un point O s'appellent axes permanents de rotation.

358 ~ Tout ce paragraphe s'applique à un corps solide dont le centre de gravité est fixe et dont tous les éléments matériels sont sollicités par des forces, telles que leur poids, parallèles et proportionnelles à leurs masses.

§ 4. - Du mouvement d'un solide soumis à des forces quelconques.

359 ~ Supposons d'abord qu'un corps solide étant en repos, des forces F agissent sur lui, simultanément ou non, mais pendant un temps très-court θ , comme dans le cas d'un choc. Le solide se déplace extrêmement peu, durant cette action, quoique celle-ci puisse lui imprimer un mouvement très-rapide. On peut donc regarder les forces F comme conservant,

pendant qu'elles agissent, chacune une direction constante dans l'espace et relativement au corps très-peu déplacé.

Le centre de gravité prend le même mouvement que si la masse y était concentrée et les forces directement appliquées. R désignant la résultante de translation des forces F , la vitesse du centre de gravité à la fin de leurs impulsions est $V = \frac{1}{\Sigma m} \int R dt$ et se conserve invariablement jusqu'à ce que des forces agissent de nouveau. Si les forces F se réduisaient à un couple, R et V seraient nulles.

Quant au mouvement que le corps partant du repos prend autour de son centre de gravité, c'est à dire relativement à des axes en translation menés par ce centre, il est dû aux forces F et à des forces fictives $-mJ_c$ à chaque instant parallèles entre elles et proportionnelles aux masses. La somme des moments des quantités de mouvement relatif acquises à la fin du choc par rapport à un axe quelconque passant par le centre de gravité est égale (283) à la somme des moments par rapport à cet axe des impulsions totales des forces F , attendu que la somme des moments des forces fictives et de leurs impulsions est nulle; donc le moment résultant des quantités de mouvement est égal en intensité et en direction au moment résultant des impulsions des forces F . Or ces impulsions peuvent se réduire à deux équivalentes dont l'une passe par le centre de gravité et l'autre détermine avec ce centre la grandeur et le plan du moment résultant des impulsions; ce dernier est donc aussi le plan du moment résultant des quantités de mouvement à la fin de l'action des forces F . A partir de cet instant, les forces cessant, ce plan et l'axe qui lui est perpendiculaire seront constants. Donc (353) ce corps tournera dès lors autour du centre de gravité de manière que son ellipsoïde central touche constamment un plan parallèle à celui qui passe par son centre et par la seconde équivalente des forces F , et il commencera à tourner autour du diamètre GM de l'ellipsoïde central qui, dans la position initiale, est conjugué de ce plan. Sa vitesse angulaire à chaque instant sera d'ailleurs déterminée (353) par la valeur constante de $\frac{\omega}{\omega_p}$ qui est celle du moment résultant.

X 360. — Supposons en second lieu qu'après un temps quelconque t ce même corps reçoive encore pendant une très-courte durée θ de nouvelles impulsions de forces F' . Rien ne s'oppose à ce que le corps soit considéré à la fin du temps t comme devant son mouvement actuel à des impulsions de forces F' dont la durée très-courte θ aurait précédé immédiatement cet instant, ces forces F' agissant sur le corps placé sans vitesse acquise dans la position qu'il occupe réellement. Puisque le centre de gravité a conservé la vitesse V ci-dessus formulée, l'impulsion $\int R' dt$ de la résultante de translation des forces F' serait égale à $V \Sigma m$, c'est à dire précisément égale à $\int R dt$. Puisque pendant tout le temps t le moment résultant des quantités de mouvement du corps autour du centre de gravité est resté constant et égal en intensité et en direction au moment résultant des impulsions primitives des forces F pendant le temps θ , ce serait à ce même

moment résultant que devrait être égal celui des impulsions des forces F . Ainsi à la fin du temps $t + \theta$, le corps possède la même vitesse de son centre de gravité, et le même moment résultant de ses quantités de mouvement autour de ce centre que s'il avait reçu pendant le temps toujours très-court θ , $+$ θ' les impulsions des forces F' et des forces F conservant relativement au centre de gravité et au système de comparaison en translation les positions qu'elles avaient primitivement. Donc à partir de ce même instant final du temps $t + \theta$ le corps tourne autour de son centre de gravité de manière que son ellipsoïde central touche constamment un plan parallèle à celui qui passe par son centre et par la seconde équivalente de l'ensemble des forces F' et F .

On se fait ainsi une idée complète du mouvement du corps : en effet on a vu ce que devient celui-ci quand il sort du repos en vertu des forces F , et quand ensuite il est abandonné à la seule action des forces intérieures ; la situation réelle du corps, sa vitesse de translation et sa rotation à la fin du temps t lorsque les forces F' sont sur le point d'agir, sont donc complètement déterminées et comprises ; à cet instant la vitesse de son centre de gravité changeant dans un temps très-court d'intensité et de direction devient la résultante des vitesses dues séparément aux impulsions des forces F et F' et se conserve ensuite jusqu'à ce que de nouvelles forces agissent ; enfin le corps à partir de cet instant terminant le temps $t + \theta'$ tourne de manière que son ellipsoïde central reste tangent à un nouveau plan fixe qui vient d'être défini, et l'axe instantané initial de cette nouvelle période de rotation est le diamètre GM' de l'ellipsoïde central qui, dans sa position à la fin du temps t , est conjugué du nouveau plan tangent. Il y a donc changement très-rapide et pour ainsi dire brusque dans la rotation comme dans la translation.

361. — Ces considérations s'étendent à la continuité des forces, qui n'est que la limite de la discontinuité dont nous venons de nous occuper.

362. — Remarques. 1^o. Non seulement le centre de gravité d'un corps se meut conformément à la propriété démontrée pour un système matériel quelconque, mais en outre sous la condition de sa solidité le mouvement de rotation sphérique d'un corps, autour de son centre de gravité, relativement à des axes qui, passant par ce point, restent constamment parallèles à leurs directions initiales, est celui qui aurait lieu si le centre de gravité était fixe, les forces extérieures bornées de ce point restant les mêmes qu'elles sont.

363. — 2^o. Puisque la translation et la rotation d'un corps solide ne dépendent que de la résultante de translation des forces extérieures et du moment résultant de ces mêmes forces, il s'ensuit qu'on ne change rien au mouvement d'un corps solide si l'on ajoute aux forces qui le sollicitent d'autres forces en équilibre, ou, en d'autres termes, si l'on substitue aux forces extérieures d'autres forces équivalentes, (suivant la définition du n^o 144) comme par exemple si l'on transporte une force d'un point à un autre de sa direction.

Nous plaçons ainsi comme un théorème, à la fin de la dynamique des corps solides, une proposition que l'on énonce ordinairement comme un axiome et par

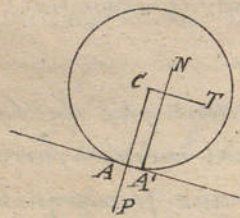
conséquent comme un principe fondamental au commencement de la statique.

364. — Cas particulier du mouvement d'un solide libre sous la seule action de la pesanteur. Le centre de gravité décrit une parabole due à sa vitesse initiale et à l'accélération verticale g . Le corps tourne autour du centre de gravité relativement à des axes en translation menés par ce centre comme si la pesanteur n'existait pas. C'est donc un cas du § précédent.

365. — Exemple divers du mouvement d'un corps solide. I. Mouvement de deux boules sphériques pesantes liées entre eux par une verge cylindrique dont l'axe passe par les deux centres. Si les boules sont assez petites relativement à la distance des centres pour qu'on les considère comme deux points matériels, ils tournent ensemble et uniformément dans un plan qui se meut parallèlement à lui-même, car à l'instant initial, relativement au centre de gravité, ils se meuvent dans un plan perpendiculaire à un axe principal d'inertie. Si l'on a égard aux dimensions des boules, l'ellipsoïde central du système est un ellipsoïde de révolution; la ligne des centres décrit relativement au milieu géométrique transporté avec le centre de gravité, une surface conique de révolution, ses divers points décrivent des cercles situés dans des plans parallèles, les autres points décrivent des épicycloïdes sphériques.

366. — II. Un corps sphérique formé de couches homogènes concentriques est lancé dans l'espace avec une rotation initiale, sous l'action de forces parallèles et proportionnelles aux masses élémentaires. Dans ce corps considéré relativement au centre de gravité la rotation reste constante en direction; elle l'est également en intensité tant que le corps ne change pas de dimensions. Mais s'il se contracte par l'effet des forces intérieures, c'est le moment résultant des quantités de mouvement, $\omega \mathcal{I}$ qui reste de grandeur constante: la vitesse angulaire ω augmente.

367. — III. Mouvement d'une sphère ou d'un cylindre homogène roulant sur un plan incliné en égard au frottement. S'il s'agit d'un cylindre, on suppose ses arêtes horizontales. Le corps est sollicité par des forces dont la résultante passe par le centre C , est dirigée dans le plan de plus grande pente, et peut être remplacée par deux forces, l'une P normale, l'autre T parallèle au plan. On demande la loi du mouvement rectiligne de l'axe C et les intensités des réactions du plan.



Ces réactions peuvent se décomposer en forces normales et forces parallèles au plan. La résultante N des premières passe (227) en un point A' , à une distance d en avant du contact géométrique A , et son intensité est égale à P , attendu que le centre de gravité C se meut parallèlement au plan. Les réactions parallèles ont une résultante inconnue F .

Appliquons directement le principe de d'Alembert. À l'instant quelconque où le corps a la situation indiquée par la figure, les vitesses de ses divers points sont perpendiculaires aux droites qui les joignent au centre instantané de rotation A . Si l'on désigne

par v la vitesse de l'axe C , par R le rayon CA , un point quelconque de masse m à la distance r de A a pour force d'inertie tangentielle $\frac{m}{R} \frac{r dv + v dr}{dt}$, et pour force d'inertie centrifuge une force passant par A qui du reste n'est pas le centre de courbure de la trajectoire. L'équilibre des forces d'inertie et des autres forces donne pour équation des moments autour de A (en égard à $N = P$ et à la symétrie de la figure)

$$\frac{dv}{dt} \frac{\sum mr^2}{R} = TR - P \rho \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{R(TR - P \rho)}{M(R^2 + \rho^2)} \dots \dots \dots [1]$$

M étant la masse totale du corps, ρ son rayon de gyration autour de C . Le mouvement du centre de gravité est donc uniformément varié. (voir le N. 367^{bu} page 55).

Le théorème relatif au mouvement de ce point donne

$$\frac{dv}{dt} = \frac{T - F}{M} \quad \text{et par suite} \quad F = \frac{P \rho R + P \rho^2}{R^2 + \rho^2} \dots \dots \dots [2]$$

1^{er} Exemple. Cylindre homogène abandonné en descendant à l'action de la pesanteur sur un plan faisant avec l'horizon l'angle i . On a $T = Mg \sin i$; $P = Mg \cos i$; $\rho^2 = \frac{1}{2} R^2$;
 $\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g (\sin i - \frac{\rho}{R} \cos i)$; $F = \frac{1}{3} Mg (\sin i + \frac{2 \rho}{R} \cos i)$

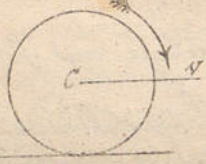
Remarque. La force F ne peut pas dépasser une certaine limite; car puisque le corps ne glisse pas on a $F < fN$ ou $F < fMg \cos i$ ou $\frac{1}{3} (\sin i + \frac{2 \rho}{R} \cos i) < f \cos i$ ou enfin $\tan g i < 3f - \frac{2 \rho}{R}$. Donc avant que l'inclinaison i devienne triple de l'angle de frottement il y a glissement et l'équation [1] n'est plus applicable.

368. - 2^o Exemple. Cylindre homogène qui roule en remontant sous l'action de la pesanteur et des réactions d'un plan incliné. Les formules [1] et [2] subsistent en changeant le signe de ρ . Si l'on suppose pour simplifier que $\frac{\rho}{R} \cos i$ puisse être négligé auprès de $\sin i$ on a $\frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin i$, d'où l'on conclut que depuis l'instant où le cylindre roulant α , en son centre une vitesse v_0 jusqu'à l'instant où il cesse de monter, l'espace que parcourt ce centre est $\frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2g \sin i}$, de sorte que la hauteur de son ascension est $\frac{3}{2} \frac{v_0^2}{2g}$, ce qui tient à ce que la puissance vive du cylindre à l'instant initial est $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} M v_0^2$.

On remarquera que dans ce cas de l'ascension, la force F composante tangentielle de la réaction du plan, et cause nécessaire du ralentissement du mouvement de rotation, agit dans le sens ascendant parce que le cylindre tend à glisser dans le sens de la descente pendant que son axe monte.

369. - Mouvement d'une sphère homogène sur un plan horizontal. Soient v la vitesse du centre, ω la vitesse angulaire dans le sens positif indiqué par la flèche, R le rayon de la sphère. Si la sphère roule sans glisser, on a $\omega R = v$.

La théorie précédente s'applique: $i=0$; $\frac{d\omega}{dt} = \frac{-g\rho}{R^2 + \rho^2}$; $\frac{dv}{dt} = \frac{-g\rho R}{R^2 + \rho^2}$; $F = \frac{-P\rho R}{R^2 + \rho^2}$



ou, en faisant $\rho^2 = \frac{5}{2} R^2$ pour une sphère pleine et homogène (338)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{5}{7} \frac{g\rho}{R^2}; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{5}{7} \frac{\rho}{R} g; \quad F = -\frac{5}{7} \frac{\rho}{R} P.$$

Si l'on suppose $\frac{\rho}{R}$ très-petit, le mouvement est sensiblement uniforme.

Considérons maintenant le cas de glissement en faisant, pour simplifier, $\rho = 0$.

1^{er} Cas. $\omega R > v$, il y a glissement en arrière, un frottement fP dans le sens de v .
On a pour la rotation autour du centre de gravité et pour sa translation les équations

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-fP}{M\rho^2} = \frac{-fgR}{\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{fP}{M} = fg$$

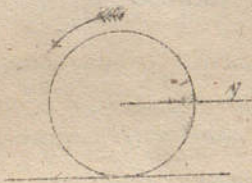
ω diminue et v augmente, il arrive un instant où ωR égale v , le frottement cesse, le mouvement devient uniforme dans le sens positif.

2^{er} Cas. $\omega R < v$; glissement en avant; frottement fP négatif.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{fgR}{\rho^2} \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = -fg$$

ωR augmente, v diminue jusqu'à ce que le mouvement devienne uniforme en sens positif.

3^{er} Cas. $\omega < 0$ fig. ci. contre. Mêmes formules. ω augmente, v diminue. Il faut distinguer deux cas, selon que la quantité négative ω arrive à zéro avant ou après v . Si c'est avant, ω et v deviennent tous deux positifs, mais ωR étant $< v$ on rentre alors dans le deuxième cas, le mouvement devient indéfiniment uniforme du côté positif.



4^{er} Cas. $\omega < 0$, si v devient nulle et ensuite négative quand ω l'est encore, on rentre dans le premier cas. Le mouvement du centre d'abord accéléré en arrière devient uniforme de ce côté.

Dans le troisième et le quatrième cas, Ω_0 et V_0 étant les valeurs absolues des vitesses initiales, ω la valeur encore négative de la vitesse angulaire après le temps t , et v la vitesse positive du centre au même instant, on a en intégrant les équations précédentes,

$$\omega = \Omega_0 - \frac{fgR}{\rho^2} t, \quad \text{et} \quad v = V_0 - fgt$$

Pour le troisième cas, on a en même temps

$$\Omega_0 = \frac{fgR}{\rho^2} t, \quad V_0 > fgt; \quad \text{donc} \quad \frac{\Omega_0}{V_0} < \frac{R}{\rho^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega_0 R}{V_0} < \frac{5}{2}$$

Pour le quatrième cas

$$\Omega_0 > \frac{fgRt}{\rho^2}, \quad V_0 = fgt, \quad \text{donc} \quad \frac{\Omega_0 R}{V_0} > \frac{R^2}{\rho^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega_0 R}{V_0} > \frac{5}{2}$$

Lorsque l'axe de la rotation initiale n'est pas perpendiculaire à la direction de la vitesse du centre, le frottement change continuellement cette direction: le centre décrit une courbe

§ 4. - Considérations sur l'application, aux solides naturels,
de la théorie du mouvement des systèmes matériels
invariables.

370. - Les corps auxquels on applique, comme dans les divers exemples de ce chapitre la dynamique spéciale des solides ne sont cependant pas tout à fait invariables. Leurs molécules ont fréquemment les unes par rapport aux autres des mouvements vibratoires qui se manifestent soit par des sons soit autrement. La théorie précédente du mouvement des solides ne convient donc pas en toute rigueur aux corps existants. Mais on va voir que les corps que nous désignons sous la dénomination de solides naturels étant supposés ne subir que de très faibles déformations, les résultats obtenus quand on les traite comme s'ils étaient invariables, sont exactement vrais pour des corps invariables dont les molécules s'écartent très peu des positions qu'ont réellement celles des corps naturels. Les considérations que nous allons exposer très succinctement sont dues, pour le fond à Coriolis (Mécanique des corps solides, 8^e, 1844).

371. - Mouvement moyen d'un solide naturel. Quel que soit le mouvement de ce corps vibrant que nous désignerons par V , on peut d'une infinité de manières imaginer un système invariable S composé d'éléments matériels égaux chacun à chacun à ceux de V , et se mouvant de manière à satisfaire aux deux conditions suivantes: 1^o Que les deux centres de gravité des deux corps V et S coïncident continuellement; 2^o Que les moments résultants des quantités de mouvement autour du centre de gravité commun soient égaux pour les deux systèmes l'un variable, l'autre invariable.

La première condition n'offre aucune difficulté: il en résulte que les sommes respectives des projections des quantités de mouvement des deux systèmes sur un même axe quelconque, sont égales. Pour satisfaire à la seconde condition, puisqu'il ne s'agit que des moments des quantités de mouvement autour du centre de gravité, considérons ce point G comme fixe. Le corps V , à un instant quelconque, a autour de G un certain moment résultant Mg de ses quantités de mouvement, et quel que soit le corps S qu'on ait choisi, il est facile de concevoir la possibilité d'assigner sa rotation instantanée actuelle de manière que ce corps ait le même moment résultant de ses propres quantités de mouvement: il suffirait (353) de mener à l'ellipsoïde central de S , situé comme il l'est actuellement, un plan tangent perpendiculaire à l'axe du moment résultant de V , de mesurer la distance p du centre G à ce plan et la longueur u de la droite joignant G

au point de contact, puis de faire tourner S autour de cette droite avec une vitesse angulaire ω déterminée par l'équation $Mq = \frac{\omega}{u\rho}$.

Cela posé, choisissons pour le corps invariable S celui qui à un instant coïnciderait complètement avec le système V , de manière qu'il n'y aurait de différence que dans les vitesses, celles des molécules de S convenant à une rotation instantanée, celles des molécules de V étant quelconques à partir des mêmes points; et cherchons dans cette hypothèse à quelle condition seraient soumises les vitesses relatives des éléments de V comparativement au système solide S en mouvement.

Soient v' la vitesse absolue (les axes passant par G étant fixes) de la molécule m de V , v'' la vitesse de la molécule égale appartenant à S et coïncidant actuellement avec la première, v''' la vitesse relative de la première molécule comparativement au système S . On a (34), en prenant les moments (115) par rapport à un axe quelconque

$$v' = \text{Rés.}(v'', v'''); \quad mv' = \text{Rés.}(mv'', mv'''); \quad \sum Mmv' = \sum Mmv'' + \sum Mmv'''$$

Or, si l'axe des moments est mené par G , on a, d'après la définition du mouvement de S $\sum Mmv' = \sum Mmv''$; donc pour un axe Gx quelconque, passant par G , on a

$$\sum M_x mv''' = 0 \quad \text{en même temps que} \quad \sum mv_x''' = 0.$$

Il paraît clairement résulter de là que si les molécules de V sous l'action des forces extérieures s'écartent peu entre elles (condition qui caractérise la solidité dans un corps naturel) elles s'écartent peu, aussi, de celles du solide S , car si certaines de ces molécules de V se déplacent en s'éloignant de G dans le sens Gx , d'autres s'en rapprochent à cause de $\sum mv''' = 0$ et leurs excursions sont nécessairement très-petites relativement à S puisque leurs distances respectives varient très-peu. De même si certaines molécules de V tournent autour d'un axe Gx lié à S d'autres, à cause de $\sum M_x mv''' = 0$ tournent en sens contraire, mais de très-petites quantités, sans quoi les distances mutuelles de ces molécules varieraient sensiblement, ce qui est contre l'hypothèse.

Enfin si au lieu de choisir le solide S exactement coïncidant avec V on l'eût pris très-peu différent il est clair que les molécules de V s'écartant très-peu de celles de S se seraient aussi écartées très-peu des molécules de cet autre solide fictif. Concluons :

Quel que soit le mouvement d'un solide naturel V qui se déforme très-peu, si on l'imagine remplacé par un système invariable S composé d'éléments matériels égaux, chacun à chacun, aux éléments de V , et occupant à un instant les mêmes situations dans l'espace; si de plus on assujettit le système S à avoir continuellement le même centre de gravité et le même moment résultant de ses quantités de mouvement qu'aurait le système variable V , le système solide S aura le même mouvement apparent qu'aurait V , c'est-à-dire que les molécules de S occuperont dans l'espace des positions successives très-peu différentes de celles qu'occuperaient les molécules de V .

Le mouvement du solide fictif S ainsi caractérisé a été nommé, par Coriolis, le mouvement moyen du corps naturel V .

372. — *Théorème.* Un corps solide naturel étant soumis à des forces extérieures quelconques, non seulement son centre de gravité se meut comme si ce corps était rigoureusement solide et sous l'action des mêmes forces, mais le mouvement moyen de rotation de ce corps naturel est le mouvement que, dans la même hypothèse, il prendrait en vertu de ces forces. Cela résulte de ce que les impulsions des forces et par conséquent les moments résultants des quantités de mouvement (283) sont continuellement les mêmes, soit pour le corps réel V , soit pour le solide fictif S qu'on lui substitue.

373. — Relation entre la puissance vive d'un système vibrant et celle d'un solide invariable coïncidant avec le premier mais possédant le mouvement moyen de celui-ci. La relation ci-dessus (371)

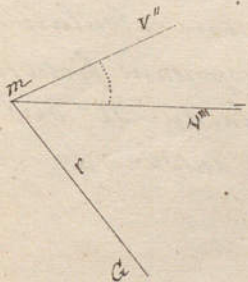
$$v' = \text{Rés}(v'', v''') \text{ donne } \frac{1}{2} \sum m v'^2 = \frac{1}{2} \sum m v''^2 + \sum m v'' v''' \cos(v'', v''').$$

On peut démontrer que ce dernier terme est nul : soit ω la vitesse angulaire instantanée du mouvement moyen, et soit r la distance de l'élément m à l'axe de rotation ; on a, attendu que v'' est perpendiculaire à r et à l'axe,

$$v'' = \omega r \quad \text{et} \quad \sum m v'' v''' \cos(v'', v''') = \omega \sum m r v''' \cos(v''', v'') = \omega \sum M m v'''.$$

Or $\sum M m v''' = 0$ comme on l'a vu (371); donc

$$\frac{1}{2} \sum m v'^2 = \frac{1}{2} \sum m v''^2 + \frac{1}{2} \sum m v'''^2.$$



On sait d'ailleurs que v étant la vitesse absolue d'un élément m du système et v_1 la vitesse de son centre de gravité, de la relation

$$v = \text{Rés}(v_1, v') \text{ on conclut } \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} v_1^2 \sum m + \frac{1}{2} \sum m v'^2; \text{ Ainsi}$$

$$\frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} v_1^2 \sum m + \frac{1}{2} \sum m v''^2 + \frac{1}{2} \sum m v'''^2;$$

c'est-à-dire que la puissance vive d'un système de molécules, quelle que soient leurs ébranlements, peut se décomposer en trois parties : 1° celle qu'aurait le système condensé au centre de gravité; 2° celle qu'il aurait si on le rendait invariable à l'instant considéré en lui imprimant autour du centre de gravité fixe le mouvement moyen de rotation du système; 3° la somme des puissances vives qu'auraient les molécules en vertu de leurs seules vitesses relatives comparativement au même système invariable possédant le mouvement moyen.

374. — *Remarque.* Lorsque, traitant un solide naturel comme s'il était parfaitement invariable on applique la théorie de la rotation dans ses divers cas, exposée dans les trois premiers paragraphes de ce chapitre, si l'on emploie les équations qui contiennent les moments des quantités de mouvement, on néglige celles qui sont dues aux déformations, mais on obtient des résultats vrais à l'égard du mouvement moyen pour lequel les déformations seraient nulles. Si l'on applique le théorème du travail on néglige les travaux dus aux forces combinées avec les déformations, et si la somme algébrique de ces travaux n'est pas

nelle on néglige en même temps la puissance vive due aux vibrations, il y a compensation, et le résultat convient encore au mouvement moyen du corps naturel puisque ce mouvement moyen est celui que prendrait le corps solide frotif que l'on considère s'il était soumis aux forces extérieures conservant leurs mêmes intensités et leurs mêmes directions.

Par exemple dans la théorie du choc direct de deux corps (308 et suiv.). On a vu que la vitesse v du centre de gravité commun des deux corps, calculée rigoureusement en l'absence de forces extérieures, paraîtrait commune à toutes les parties des deux corps dans le cas où ils resteraient unis et ne feraient que de très petites vibrations. On a calculé dans cette hypothèse la diminution ou perte de puissance vive $\frac{PP'}{P+P'} \frac{(v_0 - v_0')^2}{2g}$, mais on doit bien comprendre maintenant que cette diminution est composée de deux parties, la première représentant la véritable disparition d'une fraction de la quantité primitive $\frac{1}{2} \sum mv^2$, disparition due au travail négatif ou résistant des forces mutuelles, soit dans chaque corps soit d'un corps à l'autre; la seconde représentant la somme des puissances vives dues aux vibrations qui ne changent rien au mouvement moyen. Cette seconde partie de la diminution de puissance vive calculée d'après le mouvement apparent n'est aussi à la rigueur qu'une perte apparente, et peut, suivant l'expression du programme, se nommer puissance vive dissimulée dans les corps en mouvement. Mais en pratique, les vibrations dont il s'agit ici n'étant d'aucune utilité dans les corps considérés comme moyen de transmission de mouvement, c'est à juste titre que la puissance vive qui leur correspond est considérée comme perte: Il n'en serait pas de même si un corps ayant un mouvement de rotation on ne calculait sa puissance vive que d'après le mouvement du centre de gravité en y transportant frotivement toute la masse. On a vu dans le 2^e exemple du n^o 295 et dans celui du n^o 368 les effets de la puissance vive résultant de la rotation d'un corps solide autour de son centre de gravité.

Additions à quelques articles de ce chapitre.

333^{bis} Caractère auquel on reconnaît qu'un axe est principal en un point de son cours. Par cet axe Oz et par le centre de gravité qui en est à une distance α on peut toujours mener le plan zOx . O étant l'origine de x, y, z , et O' sur Oz , l'origine des x', y', z' , si $OO' = \xi$ on a

$$\sum myz = \xi \sum my + \sum my'z' = \sum my'z',$$

$$\sum mxz = \xi \alpha \sum m + \sum mx'z'$$

Pour que Oz soit principal en O' , il faut et il suffit qu'on ait $\sum myz = 0$ relativement au point quelconque O . On trouve $\xi = \frac{\sum mxz}{\alpha \sum m} = \frac{\pm MK^2}{Ma} = \pm \frac{K^2}{\alpha}$.

340^{bis} Condition sous laquelle les forces d'inertie φ (résultantes de $-mr \frac{d\omega}{dt}$ et de $-m\omega^2 r$) ont une résultante unique. D'après 338 on a :

$$\begin{aligned} \sum \varphi_x &= \omega^2 Ma, & \sum \varphi_y &= -Ma \frac{d\omega}{dt}, & \sum \varphi_z &= 0, \\ \sum M_x \varphi &= \frac{d\omega}{dt} S_y - \omega^2 S_x, & \sum M_y \varphi &= \frac{d\omega}{dt} S_x + \omega^2 S_y, & \sum M_z \varphi &= -\frac{d\omega}{dt} I_z. \end{aligned}$$

La condition pour que ces forces aient une résultante unique est (157).

$-\omega^4 Ma S_x - \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 Ma S_x = 0$ satisfaite seulement, si a n'est pas nul, par $S_x = 0$ ou $\sum myz = 0$, c'est-à-dire (333^{bis}) que Oz doit être principal en un point de son cours.

Si l'on transporte l'origine des x, y, z en ce point les équations précédentes deviennent, en remplaçant les forces φ par leur résultante Φ

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \omega^2 Ma, & \Phi_y &= -Ma \frac{d\omega}{dt}, & \Phi_z &= 0 \\ M_x \Phi &= 0, & M_y \Phi &= 0, & M_z \Phi &= -\frac{d\omega}{dt} I_z. \end{aligned}$$

La résultante est donc dans le nouveau plan des xy passant par le point pour lequel l'axe Oz est principal; et si dans ce plan on décompose Φ en deux forces l'une Φ_x suivant l'axe Ox , l'autre Φ_y perpendiculaire à Ox et à une distance l de l'axe de rotation Oy , on aura $\Phi_x = \omega^2 Ma$, $\Phi_y = -Ma \frac{d\omega}{dt}$, $\Phi_y l = -\frac{d\omega}{dt} I_z$; d'où $l = \frac{I_z}{Ma}$

350^{bis} L'application de la théorie précédente à celle du centre de percussion est immédiate.

353^{bis} Le théorème admirable de simplicité et de lucidité qui termine le n° 353 est dû à M. Poinsot, l'illustre auteur de la théorie nouvelle de la rotation des corps solides.

367^{bis} En appliquant à la question du n° 367 le théorème du n° 362, et en appelant ω la vitesse angulaire relative autour du centre de gravité on a, plus simplement qu'au n° 367.

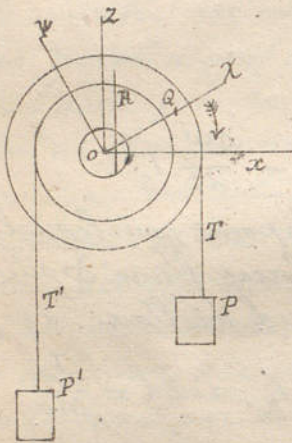
$$\dot{v} = R\omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{FR - N\rho}{M\rho^2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{T - F}{M}, \quad N = P;$$

$$\text{d'où} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{R(TR - P\rho)}{M(R^2 + \rho^2)} \quad \text{et} \quad F = \frac{P\rho R + T\rho^2}{R^2 + \rho^2}.$$

Chap. 4. - Mouvement varié de certaines pièces solides de machines et pertes de travail qui en résultent.

§ 1. - Treuil horizontal auquel sont suspendus des corps pesants.

375. - Un treuil formé d'un arbre tournant autour d'une droite horizontale O porte deux tambours ou cylindres ayant la même droite pour axe. Sur chaque tambour est enroulée une corde qui y est fixée par un bout et qui tient suspendu à l'autre bout un corps d'un poids connu. On demande la loi du mouvement qui a lieu et les tensions des deux cordes, en supposant : 1° Que le centre de gravité du treuil soit dans l'axe O ; 2° Que les cordes soient très flexibles et qu'on néglige leur poids très-petit comparativement aux poids P et P' des corps suspendus.



Soient : Q poids du treuil, p et p' rayons des tambours, T et T' tensions inconnues des cordes, ω vitesse angulaire du treuil à la fin du temps t .

On a pour les corps suspendus considérés séparément (98 et 279) :

$$p \frac{d\omega}{dt} = \frac{P-T}{P} g \dots [1] \text{ et } p' \frac{d\omega}{dt} = \frac{T'-P'}{P'} g \dots [2]$$

Le treuil considéré aussi séparément se meut sous l'action des forces T, T', Q et des réactions des courroies sur les tambours. Le centre de gravité du treuil est immobile ; donc (279) la résultante R des réactions des appuis est égale, parallèle et de sens opposé à la résultante de T, T' et Q . Ainsi $R = T + T' + Q$ et le frottement tangent aux tambours $f_1 R = f_1 (T + T' + Q)$ en appelant f_1 le sinus $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ de l'angle du frottement.

Cela posé, l'accélération angulaire du treuil est, si l'on désigne par ρ son rayon de gyration et par r le rayon des tambours

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{T p - T' p' - f_1 r (T + T' + Q)}{Q \rho^2} g \dots [3]$$

De [1], [2] et [3] on tire $T = P - \frac{P p}{g} \frac{d\omega}{dt}$, $T' = P' + \frac{P' p'}{g} \frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{g(P p - P' p' - f_1 r (P + P' + Q))}{Q \rho^2 + P p^2 + P' p'^2 - f_1 r (P p - P' p')}$

On voit : 1° Que le mouvement est uniformément varié ; 2° que les tensions T, T' ne sont égales aux poids P, P' que lorsque $\frac{d\omega}{dt}$ est nulle, c'est-à-dire le mouvement uniforme ou nul.

Cette théorie s'applique à la machine d'Atwood, quand on fait $p = p'$.

380. — Supposons maintenant que le centre de gravité G du treuil ne soit pas dans l'axe de rotation O . Les équations [1] et [2] subsistent; mais la résultante de translation R des réactions de l'appui n'est plus constante. Soit $OG = a$. La résultante de translation des forces d'inertie se compose de la force centrifuge $\frac{Q}{g} \omega^2 a = X$ parallèle à OG , et de la force tangentielle $\frac{Q}{g} a \frac{d\omega}{dt} = Y$ perpendiculaire à OG . L'équilibre de translation des forces Q, T, T', R, X, Y donne, pour les projections sur Ox et Oz :

$$\frac{Q}{g} a \omega^2 \sin \alpha - \frac{Q}{g} a \frac{d\omega}{dt} \cos \alpha + R_x = 0, \dots \dots \dots [4]$$

$$\frac{Q}{g} a \omega^2 \cos \alpha + \frac{Q}{g} a \frac{d\omega}{dt} \sin \alpha - Q - T - T' + R_z = 0, \dots \dots \dots [5]$$

L'équilibre de rotation des forces d'inertie et des forces extérieures qui agissent sur le treuil donne de plus

$$\frac{1}{g} Q \rho^2 \frac{d\omega}{dt} = T p - T' p' + Q a \sin \alpha - f_1 \sqrt{R_x^2 + R_z^2} \dots \dots \dots [3^{bis}]$$

Si à ces relations on joint $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, la solution du problème se trouve implicitement dans les six équations obtenues entre les variables $\alpha, \omega, T, T', R_x, R_z$ et le temps t .

Pour tenir compte de la raideur de la corde ascendante il faudrait (243) dans l'équation [3^{bis}] substituer au moment $T'p'$ la somme $T'p' + \frac{1}{2}(CA + BT')$.

Pour avoir égard au poids des cordes, il faudrait introduire dans les équations la variation continue de Q , de α , de P et de P' . Dans la pratique il suffirait de diviser le phénomène en plusieurs parties dans chacune desquelles on attribuerait à ces variables leurs valeurs moyennes.

§ 2. — Actions mutuelles des corps tournants dans le mouvement varié.

381. — Deux corps solides tournent l'un autour de l'axe A , l'autre autour de l'axe parallèle A' ; ils sont liés soit par une courroie, soit par un engrenage dont les actions mutuelles sont aux distances R et R' des axes A et A' . En outre de ces tensions ou pressions, et des réactions normales de l'appui les deux corps sont sollicités par des forces dont la résultante est P , force mouvante pour le premier, et P' force résistante pour le second. On demande l'intensité de la pression mutuelle des dents de l'engrenage, abstraction faite de leur frottement, ou la différence des tensions des deux brins de la courroie, abstraction faite de sa raideur. Soit T cette force; soient I et I' , ω et ω' les moments d'inertie et les vitesses angulaires des deux corps autour de leurs axes de rotation respectifs.

On a pour déterminer les inconnues $T, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\omega'}{dt}$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pp - TR}{I}, \quad \frac{d\omega'}{dt} = \frac{TR' - P'p'}{I'}, \quad R \frac{d\omega}{dt} = R' \frac{d\omega'}{dt}.$$

Ces équations se simplifient en posant $I = MR^2$, $I' = M'R'^2$, $Pp = FR$ et $P'p' = F'R'$, c'est-à-dire que M et M' sont les masses qui, distribuées sur les circonférences de rayons R et R' , auraient les moments d'inertie I et I' et F et F' sont les forces tangentielles à ces circonférences qui auraient les mêmes moments et feraient les mêmes travaux que P et P' . On a, d'après cela,

$$R \frac{d\omega}{dt} = \frac{F - T}{M} = R' \frac{d\omega'}{dt} = \frac{T - F'}{M'} = \frac{F - F'}{M + M'};$$

$$\text{d'où } T = \frac{M'F + MF'}{M + M'}.$$

formule facile à exprimer en langage ordinaire. Ces équations sont les mêmes que s'il s'agissait de deux corps en mouvement rectiligne soumis aux forces F, F' et se pressant mutuellement.

Dans le cas particulier où $F = F'$, l'action mutuelle T est égale à chacune de ces forces. Le mouvement est uniforme.

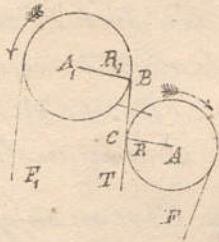
Si l'une des forces P et P' , supposées d'abord en équilibre comme elles doivent l'être pour l'uniformité, vient à prendre un accroissement considérable, soit par exemple $F = F' + F_1$, il en résulte

$$T = F' + F_1 \frac{1}{1 + \frac{M}{M'}}.$$

On en conclut cette règle pratique importante, que lorsque l'un des deux corps est assujéti à subir des efforts qui prennent momentanément des accroissements considérables, on doit faire en sorte que la masse fictive M de ce corps soit aussi grande qu'il est possible par rapport à celle M' de l'autre corps, afin que l'action mutuelle T reçoive peu de variation. On atteint ce but en montant sur l'arbre A , ce qu'on appelle un volant. Par ce moyen on peut donner aux dents de l'engrenage moins d'épaisseur qu'il ne leur en faudrait pour résister aux variations de pression, ce qui diminue le travail nuisible du frottement. Si la communication du mouvement a lieu par courroie, le maximum T de la différence de tension des deux brins étant aussi petit que possible, on évite soit la rupture, soit le glissement de la courroie, et l'on réduit l'effet nuisible du frottement des touillons, et de la raideur de la courroie. On sait (245) que si l'on désigne par T' et t' les tensions des deux brins d'une courroie, il faut pour l'empêcher de glisser qu'on ait $T' < mt'$, le nombre m étant assez grand et égal à 4,80 dans le cas de l'exemple du n° 246.

Si à cette condition on joint $T' - t' = T$ on trouve $T' > \frac{m}{m-1} T$ et $t' > \frac{1}{m-1} T$. Ainsi avec T augmentent les deux tensions et par suite la pression sur les appuis du treuil.

382. — La théorie qui précède peut s'étendre à un nombre quelconque de corps tournants ou treuils en communication par courroies ou par engrenages. Soient A et A₁ les axes de deux treuils consécutifs dont l'action mutuelle cherchée s'exerce suivant la droite BC.



Le treuil A fait partie d'un ensemble de corps tournants, situés du côté opposé à A₁, et dont nous désignerons les axes par A, A', A'' les vitesses angulaires à un même instant par ω, Kω, K'ω les moments d'inertie autour de leurs axes respectifs par I, I', I'' les puissances vives par conséquent par $\frac{1}{2}\omega^2 I, \frac{1}{2}\omega^2 K^2 I', \frac{1}{2}\omega^2 K'^2 I''$ dont la somme est $\frac{1}{2}\omega^2 (I + K^2 I' + K'^2 I'' \dots)$ et peut, pour simplifier, être remplacée par $\frac{1}{2}\omega^2 MR^2$, la masse M pouvant être calculée dans chaque cas.

De même le treuil A₁, et tous ceux qui le précèdent ont une somme de puissances vives qui peut être exprimée par $\frac{1}{2}\omega_1^2 M_1 R_1^2$, ou par $\frac{1}{2}\omega^2 M_1 R^2$ à cause de la relation $\omega R = \omega_1 R_1$.

Maintenant supposons que les forces qui sollicitent les treuils A A' A'' aient pour moments autour des axes les produits Pp P'p' P''p'' que par conséquent leur travaux élémentaires pour un déplacement angulaire dα du treuil A soient exprimés par dαPp, dαK'P'p', dαK''P''p''

Faisons leur somme $d\alpha (Pp + K'P'p' + K''P''p'') = d\alpha \cdot FR$

Pendant le même déplacement toutes les forces P, P', P'', qui agissent sur le treuil A, et sur ceux qui le précèdent ont une somme de travail $d\alpha \cdot F_1 R_1$ ou $d\alpha \cdot F_1 R$.

Cela posé, le théorème de l'effet du travail appliqué au système des treuils A, A', A'' sous l'action des forces T et F pendant le déplacement dα donne

$$FRd\alpha - TRd\alpha = d(\frac{1}{2}\omega^2 MR^2) = \omega MR^2 d\omega \quad \text{d'où} \quad R \frac{d\omega}{dt} = \frac{F - T}{M}$$

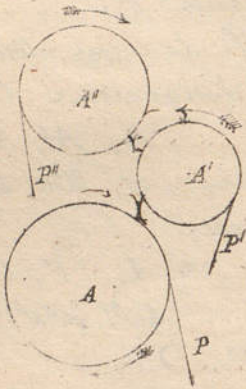
Le même théorème appliqué aux autres treuils donne $R \frac{d\omega}{dt} = \frac{F + T}{M_1}$, les forces F et F₁ étant supposées mouvantes, sauf à faire négative celle qui serait résistante. On en conclut la formule cherchée: $T = \frac{M_1 F - M F_1}{M + M_1}$

383. — Lorsqu'il y a plus de deux treuils en communication, une des actions mutuelles que nous avons désignée par T peut changer de sens ou de signe sans que les forces P, P', cessent d'être les unes toujours mouvantes les autres toujours résistantes. En voici un exemple très simple: trois roues A, A', A'' tournent dans le sens indiqué par les flèches. Les deux extrêmes engrenent avec l'intermédiaire, les forces P mouvante, P' et P'' résistantes sont tangentes aux mêmes cercles que les pressions mutuelles. M, M', M'' sont la masses fictives transportées sur ces cer-

des sans changer les moments d'inertie. N'étant la vitesse commune des trois cercles, on a :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{P-T'}{M} = \frac{T'-T''-P'}{M'} = \frac{T''-P''}{M''} = \frac{P-P'-P''}{M+M'+M''} ;$$

$$\text{d'où } T' = \frac{M(P'+P'')+(M'+M'')P}{M+M'+M''} \text{ et } T'' = \frac{M''(P-P')+(M+M')P''}{M+M'+M''} .$$



Étant que P reste force mouvante, tandis que P' et P'' restent résistantes, la pression T' conserve son signe (la roue A mène ou pousse la roue A'); mais T'' peut en changer (la roue A' cesse de mener A'' et est au contraire menée par elle). Cela arrive lorsqu'on a $(M+M')P'' < M''(P'-P)$ ou $\frac{P'-P}{M+M'} > \frac{P''}{M''}$. C'est qu'en effet P est alors inférieur à P' , et qu'en outre le ralentissement par seconde $\frac{P'-P}{M+M'}$ que l'ensemble des deux premiers tremble tend

à prendre en vertu des forces P' et P est plus grand que $\frac{P''}{M''}$ celui que prendrait le troisième en vertu de la seule résistance P'' .

Les changements de sens des pressions mutuelles donnent lieu à des chocs et par conséquent à des pertes de travail qu'il importe d'éviter, comme on le peut en réglant convenablement les moments d'inertie.

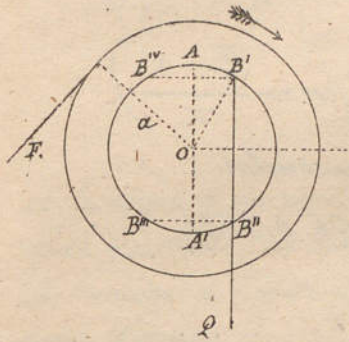
§ 3. Des Volants.

385. On vient de voir de quelle utilité sont les volants convenablement placés pour restreindre les limites entre lesquelles varient les actions mutuelles des diverses pièces tournantes d'une machine. Les volants rendent un genre de service plus étendu, en empêchant les trop grandes variations de vitesse dans les machines, variations qui nuisent en général à la transmission du travail à cause des flexions et déformations alternatives des pièces, et nuisent en particulier tantôt à l'opération mécanique qu'il s'agit d'effectuer comme dans les filatures mues par le travail variable de la vapeur, tantôt au mode d'action du moteur comme lorsqu'une roue hydraulique ou des chevaux attelés à un manège mènent des machines à résistance variable, des laminoirs, des pilons, &c. En général, si un système matériel dont les éléments ont des vitesses qui croissent ou décroissent ensemble, possède une grande puissance vive, il peut recevoir dans un temps déterminé un travail moteur sensiblement différent du travail résistant, et ne subir qu'une variation peu sensible de vitesse, parce que cette petite variation suffit pour altérer la puissance vive d'une quantité égale à l'excès d'un travail sur l'autre. Par exemple, supposé que $\frac{1}{2} \sum mv^2$ ait une valeur P , et que la machine reçoive un excès de travail E . Si l'on veut que les vitesses ne croissent que de $\frac{1}{100}$, la seconde valeur P' de la puissance vive sera $\left(\frac{101}{100}\right)^2 P$, et la différence $P'-P = 0,0201 P$ devra être égale à E ,

condition à laquelle il sera toujours possible de satisfaire en ajoutant aux pièces indispensables de la machine un volant qui donnera à P la valeur suffisante.

Nous allons donner quelques exemples simples de l'emploi et du calcul des volants.

386. — Manivelle simple à simple effet. Le treuil principal dont l'axe de rotation O est supposé horizontal pour fixer les idées, reçoit une force mouvante Q appliquée au bouton B d'une manivelle dont le rayon $OB = b$. Cette force agit dans une direction constamment verticale, mais seulement en descendant, avec une intensité constante pendant toute la descente, tandis que des résistances constantes P, P', \dots agissent sans interruption sur le treuil principal et sur ceux auxquels il est lié, et peuvent par conséquent être remplacées, sans que le mouvement soit altéré, par une force F tangente à un cercle de rayon a pris à volonté. De l'intermittence et de la variation du moment de la force Q résulte la variation du mouvement de rotation; il s'agit de résoudre les questions suivantes :



1^o Quelle est la relation des forces F et Q pour que le mouvement du système une fois acquis reste périodiquement uniforme pour chaque tour de manivelle ?

2^o Quelles sont les situations de la manivelle auxquelles correspondent la plus petite et la plus grande vitesse angulaire de la machine ?

3^o Sous quelles conditions la différence de ces vitesses extrêmes ne dépassera-t-elle pas une certaine fraction $\frac{1}{n}$ de leur valeur moyenne ?

Il est bien entendu qu'au commencement du mouvement du système la périodicité n'avait pas lieu, soit que la force Q fût plus grande, soit que les résistances P fussent plus petites que dans l'état supposé par l'énoncé, soit enfin que les divers treuils résistants n'aient été embrayés que successivement avec le treuil moteur.

1^o La périodicité exige que pour chaque tour de la manivelle, on ait en valeurs absolues $\mathcal{E}Q = \mathcal{E}F$ ou $\dots \dots \dots 2bQ = 2\pi aF \dots \dots \dots [1]$;

2^o Tandis que le bouton de la manivelle remonte de A' en A , le système n'étant soumis qu'à des forces résistantes, les vitesses diminuent. Quand le bouton dépasse le point culminant A la diminution continue d'abord parce que le rapport des moments et par conséquent des travaux élémentaires de Q et de F est très-petit. La diminution cesse, et la vitesse angulaire atteint son minimum à l'instant où ce rapport devient égal à l'unité: les forces Q et F satisfont alors à la condition d'équilibre. Soit x l'angle AOB' à cet instant; on a

$$Fa = Qb \sin x \dots \dots \dots [2]$$

de [1] et [2] on tire $\sin x = \frac{1}{n}$; d'où $\log \sin x = 1,5028501$ et $x = 18^{\circ}33',4$.

Le point B'' où le moment de Q , après avoir dépassé celui de F , lui redevient égal, est sur la même verticale que B' . Quand le bouton passe en ce point B'' , la vitesse angulaire est à son maximum.

1^{ère} Division.

Cours de Méc. et Mach. - 16^e Feuille.

3^o Soient ω' et ω'' les vitesses angulaires extrêmes. Soit w leur valeur moyenne; ainsi $\frac{1}{2}(\omega' + \omega'') = w$.
Il s'agit de satisfaire à la condition

$$\omega' - \omega'' = \frac{1}{\pi} w \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) = \frac{1}{\pi} w^2$$

Or, si nous remplaçons par MR^2 tous les moments d'inertie des tremble du système, comme nous l'avons expliqué précédemment (382), nous aurons, en appliquant le théorème de l'effet du travail

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) MR^2 = 2Qb \cos x - 2Fa \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 2Qb \left(\cos x - \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\pi} \right)$$

d'où, à l'aide des tables de sin. et de l'expression ci-dessus de x en degrés, on conclut:

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) MR^2 = 2Qb \left(0,94799 - \frac{71^\circ 26',6}{180^\circ} \right) = 2Qb \cdot 0,5521.$$

ou

$$\frac{w^2}{\pi} MR^2 = 0,5521 \cdot 2bQ \dots \dots \dots [3]$$

On peut, comme la fait M. Poncelet, transformer ainsi cette formule. Soit Π le poids Mg de l'anneau dont le rayon est R ; soit W sa vitesse moyenne; soit N' le nombre de tours de la manivelle par minute; et soit N le nombre de chevaux exprimant le travail indéfiniment prolongé de la force Q . On a $Mw^2R^2 = \frac{1}{g} \Pi W^2$, et le travail par minute de Q est exprimé à la fois par $2bQN'$ et par $60 \times 75N$ d'où $2bQ = 4500 \frac{N}{N'}$ et la formule [3] devient

$$\Pi W^2 = 24300 \frac{\pi N}{N'} \dots \dots \dots [4]$$

387. - 2^o Exemple. - Manivelle simple à double effet. La force Q d'intensité constante et toujours verticale agit de haut en bas dans la demi-circonférence $AB'B''A'$ et de bas en haut dans l'autre. Les deux points A et A' s'appellent points morts.

1^o La périodicité par tour entraîne l'équation $\dots \dots \dots 2\pi aF = 4bQ$,
d'où il résulte qu'elle a lieu aussi par demi-révolution.

2^o Les points B' et B'' ou B''' et B'''' positions du bouton aux instants où la vitesse angulaire est au minimum et au maximum se déterminent encore par l'équation

$$Fa = Qb \sin x, \text{ d'où } \sin x = \frac{2}{\pi} \text{ et } x = 39^\circ 32',4.$$

3^o En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on trouve:

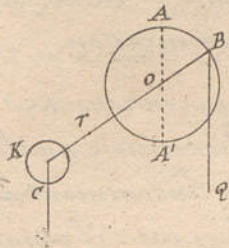
$$MR^2 \frac{w^2}{\pi} = 4Qb \left(\frac{\cos x}{2} - \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\pi} \right) = 0,1052 \cdot 4Qb,$$

de sorte que le coefficient du travail par révolution est ici moindre que $\frac{1}{5}$ de ce qu'il était dans le cas précédent.

La transformation analogue à celle qui a donné la formule [4] donne

$$\Pi W^2 = 4645 \frac{\pi N}{N'} \dots \dots \dots [5].$$

388. - 3^e Exemple. - Manivelle simple à contrepoids. - La force Q n'agit qu'à simple effet, c'est-à-dire pendant le parcours de la demi-circonférence ABA' , mais on obtient la même loi de mouvement que pour la manivelle à double effet au moyen d'un corps K dit contrepoids dont le centre de gravité est hors de l'axe O à une distance r , et dont le poids C satisfait à la relation $Cr = \frac{1}{2} Qb$.



Si la force Q est verticale, le rayon r est dans le prolongement de b . Il en résulte que pendant la descente du bouton, la moitié du travail de Q est neutralisée par celui de C ; mais, dans la demi-révolution suivante, la force Q n'agissant plus et le corps K descendant, son poids C restitue la moitié du travail de Q . Si la force Q n'est pas verticale, on dispose toujours le rayon OK de manière qu'il soit vertical et commençant à monter à l'instant où le bouton B est à l'origine de la demi-circonférence qu'il parcourt sous l'action de Q .

Dans tous les cas le moment d'inertie $\frac{Cr^2}{g}$ du contrepoids est une partie intégrante du moment d'inertie total MR^2 , de sorte que le corps excentrique K joue un double rôle comme poids faisant alternativement travail résistant et travail moteur, et comme masse diminuant les variations de vitesse.

389. - Remarques: 1^o Si l'on se donne la vitesse angulaire moyenne w et le coefficient de régularisation $\frac{1}{n}$, on peut calculer la vitesse angulaire ω qui correspond à une position donnée de la manivelle. D'abord des équations

$$\frac{1}{2}(\omega'' + \omega') = w, \text{ et } \frac{1}{2}(\omega'' - \omega') = \frac{w}{2n} \text{ on tire } \omega'' = w\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \text{ et } \omega' = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)w$$

Puis pour avoir la vitesse angulaire correspondante à une position de la manivelle faisant l'angle α avec la verticale OA , on pose, dans le cas de la manivelle à double effet

$$\frac{1}{2}(\omega^2 - \omega'^2)MR^2 = Qb(\cos \alpha' - \cos \alpha) - \pi Fa \frac{\alpha - \alpha'}{\pi} = Qb\left(\cos \alpha' - \cos \alpha - \frac{\alpha - \alpha'}{\frac{1}{2}K}\right)$$

2^o Suivant la pratique des bons constructeurs le coefficient $\frac{1}{n}$ pour les machines qui, comme les filatures, ont besoin d'une grande régularité, varie de $\frac{1}{32}$ à $\frac{1}{36}$. Quand cette régularité n'est pas nécessaire on peut prendre $\frac{1}{n}$ plus grand, sans l'inconvénient général (385) des déformations alternatives qui résultent des variations de vitesse. Dans tous les cas ω' devant être positive, il faut qu'on ait $1 - \frac{1}{2n} > 0$, $\frac{1}{n} < 2$. À la limite $\frac{1}{n} = 2$ correspondraient $\omega' = 0$ et $\omega'' = 2w$.

3^o Les formules [4] et [5] sont théoriquement applicables au cas où il y aurait plusieurs volants sur les deux treuils du système et même au cas où il n'y en aurait

par sur l'arbre de la manivelle, pourvu que par ΠW^2 on entende la somme des poids des éléments de la machine multipliés respectivement par les carrés de leurs vitesses. Mais les considérations exposées précédemment font comprendre qu'en pratique le principal volant doit faire corps avec l'arbre de la manivelle, sans quoi cet arbre tantôt mènerait le volant et tantôt serait mené par lui, ce qui donnerait lieu à des chocs dans l'engrenage de communication.

390. — 4^e Exemple. — Manivelle à double effet avec contrepoids. L'utilité du contrepoids pour la manivelle à simple effet fait naître la question de savoir si une disposition analogue ne serait pas avantageusement appliquée à une manivelle à double effet. Evidemment dans ce dernier cas le contrepoids ne pourrait être fixé à l'arbre de la manivelle; car s'il venait en aide à la force mouvante lorsque le bouton de la manivelle serait à l'un des points morts A, A' , il deviendrait résistant quand le bouton serait à l'autre de ces points. Mais la question reçoit une solution affirmative si l'on place le contrepoids sur un arbre horizontal lié à celui de la manivelle par un engrenage qui l'oblige à faire deux tours pendant que la manivelle en fait un, en fixant le contrepoids de manière que son rayon ou bras soit horizontal et entraîné de descendre aux instants où le bouton de la manivelle passe aux points morts.

L'étude de cette disposition qu'on se borne à indiquer ici, montre: 1^o que pendant un tour du contrepoids, ou un demi-tour de la manivelle, il y a pour la vitesse angulaire deux maximums et deux minimums; 2^o que les deux maximums deviennent égaux ainsi que les deux minimums quand on fait le moment Cr du contrepoids égal à $0,219 Qb$; 3^o et que dans ce cas, le plus avantageux pour satisfaire à la condition de régularisation $\omega'' - \omega' = \frac{\omega'' + \omega'}{2n}$, la formule [5] du 3^e exemple est remplacée par celle-ci

$$\Sigma \Pi W^2 = 512 \frac{nN}{N'};$$

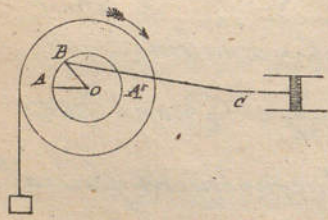
le coefficient numérique est donc environ neuf fois plus petit.

391. — 5^e Exemple. Manivelle à double effet avec masse en mouvement alternatif. Supposons que la résistance soit exercée par un corps de poids P suspendu à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur un tambour de rayon r , et que la force mouvante constante Q soit la résultante des forces horizontales qui s'exercent sur les deux faces d'un piston lié à l'axe O par une manivelle. Nous négligeons le poids de la corde et celui de la bielle BC , mais nous tiendrons compte de la masse $\frac{P'}{g}$ du piston. Enfin

nous supposons la bielle assez grande relativement au rayon OB de la manivelle pour qu'on puisse considérer sans erreur notable BC comme parallèle à OC .

La condition du mouvement périodiquement uniforme donne $2\pi r P = 4bQ$.

La puissance vive du système n'est plus ici proportionnelle au carré de la vitesse



angulaire. Le maximum et le minimum de l'une ne répondent plus à ceux de l'autre : soit $AOB = x$ et ω la vitesse angulaire correspondante. En appelant \mathcal{L}_0 la puissance vive à l'instant où $x = 0$, on a pour l'équation du travail

$$\frac{1}{2} \omega^2 R^2 M + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \frac{P}{g} + \frac{1}{2} \omega^2 b^2 \sin^2 x \frac{P'}{g} - \mathcal{L}_0 = Qb(1 - \cos x) - Prx = Qb \left(1 - \cos x - \frac{2x}{\pi}\right) \dots [1]$$

d'où
$$\frac{d\omega}{dt} \omega \left(R^2 M + r^2 \frac{P}{g} + b^2 \sin^2 x \frac{P'}{g} \right) + \omega^2 b^2 \sin x \cos x \frac{P'}{g} = Qb \left(\sin x - \frac{2}{\pi} \right) \omega.$$

Le maximum et le minimum de ω exigent donc la relation.

$$Qb \left(\sin x - \frac{2}{\pi} \right) - \frac{P'}{g} \omega^2 b^2 \sin x \cos x = 0 \dots \dots \dots [2]$$

Si l'on se donne la vitesse angulaire moyenne $\omega = \frac{\omega'' + \omega'}{2}$ et la condition $\omega'' - \omega' = \frac{\omega}{n}$, on en conclut $\omega' = \omega \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ et $\omega'' = \omega \left(1 + \frac{1}{2n}\right)$. En substituant successivement ces valeurs de ω dans l'équation [2], on obtiendra les valeurs correspondantes de x' et x'' , l'une plus petite, l'autre plus grande que $\frac{\pi}{2}$. En substituant alors ω' et x' puis ω'' et x'' dans l'équation [1], et en retranchant l'une de l'autre (afin d'éliminer \mathcal{L}_0) les deux équations ainsi obtenues, on aura pour déterminer $R^2 M$ l'équation

$$\frac{\omega^2}{n} \left(R^2 M + r^2 \frac{P}{g} \right) + \frac{1}{2} \frac{b^2 P'}{g} (\omega''^2 \sin^2 x'' - \omega'^2 \sin^2 x') = Qb (\cos x' - \cos x'' - \frac{2(x'' - x')}{\pi}).$$

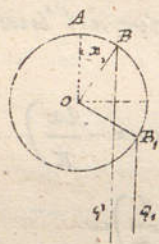
392. - Remarques. - Si le piston se mouvait verticalement, il conviendrait que son poids fut contrebalancé par celui d'un corps fixé à la manivelle sur le prolongement de BO . La tension de la corde n'est égale à P que lorsque la vitesse angulaire est à son maximum ou à son minimum. L'action de la bielle sur la tige du piston au point C est beaucoup plus variable : la vitesse angulaire ω pouvant être considérée comme à peu près constante quand le nombre n , et par conséquent le moment d'inertie sont assez grands, le maximum de l'accélération du point C a lieu à l'instant du passage aux points morts et sa valeur est $b\omega^2$; la force totale agissant alors sur le piston est donc $\frac{b\omega^2 P'}{g}$.

Considérons en particulier le passage du bouton au point A : l'accélération du point C et la force $\frac{b\omega^2 P'}{g}$ sont dans le sens AC . Immédiatement avant le passage au point mort la force Q agit dans le sens contraire. La force T avec laquelle la bielle presse le piston est donc dans le sens AC et satisfait à l'équation

$$T - Q = \frac{b\omega^2 P'}{g} \text{ ou } T = Q + \frac{b\omega^2 P'}{g}.$$

Immédiatement après le passage au point mort, la force Q change brusquement de direction et la force T devenant $T = \frac{b\omega^2 P'}{g} - Q$ peut être changée de sens.

393. -



6^e Exemple. Manivelle double à double effet. Deux forces égales Q, Q_1 sont appliquées à deux manivelles fixées sur le même arbre et dont les rayons égaux OB_1, OB_2 sont à angle droit entre eux. Chacune de ces forces, toujours verticale et d'intensité constante, agit de haut en bas quand le bouton descend et de bas en haut quand il remonte.

1^o $\mathcal{E}F'$ désignant le travail résistant par tour de manivelle, l'équation

$$\mathcal{E}F' = 8Qb$$

exprime que le mouvement est périodiquement uniforme, non seulement pour chaque tour, mais pour chaque quart de tour.

2^o Soit x l'angle d'une manivelle avec la verticale OA . A partir de cet instant, le travail élémentaire des deux forces Q, Q_1 pendant que les manivelles se déplacent d'un angle dx est

$$Qb \sin x \, dx + Qb \cos x \, dx$$

tandis que le travail est $\mathcal{E}F' \cdot \frac{dx}{2\pi}$ ou $\frac{4Qb}{\pi} \cdot dx$. Si l'angle x répond à un minimum ou à un maximum de vitesse, ces deux quantités de travail élémentaire sont égales. On a donc

$$\sin x + \cos x = \frac{4}{\pi}$$

La forme de cette équation conduit à faire $x = 45^\circ - y$ d'où

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos y - \sin y) \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos y + \sin y) \end{array} \right\} \text{par conséquent } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos y = \frac{4}{\pi}$$

On en conclut à l'aide des tables de logarithmes $\left\{ \begin{array}{l} y' = +25^\circ 48' \\ y'' = -25^\circ 48' \end{array} \right.$ d'où $\left\{ \begin{array}{l} x' = 19^\circ 12' \\ x'' = 70^\circ 48' \end{array} \right.$

3^o Pendant que l'angle x varie de x' à x'' la vitesse passe du minimum au maximum, le travail des forces Q est

$$Qb (\cos x' - \cos x'' + \sin x'' - \sin x');$$

ce qui, au moyen des équations ci-dessus, se réduit successivement à

$$\frac{1}{2} \sqrt{2} Qb (2 \sin y' - 2 \sin y'') = 2 \sqrt{2} Qb \sin y' = \frac{\sqrt{2}}{4} \mathcal{E}F' \sin 25^\circ 48'$$

et enfin

$$0,1539 \mathcal{E}F'$$

Pendant ce même temps, le travail des résistances est

$$\mathcal{E}F' \frac{(x'' - x')}{360^\circ} = \frac{51^\circ 36'}{360^\circ} \mathcal{E}F' = 0,1433 \mathcal{E}F'$$

L'équation de l'effet du travail est donc pour cet intervalle

$$\frac{1}{2} (\omega''^2 - \omega'^2) MR^2 = (0,1539 - 0,1433) \mathcal{E}F' = 0,0106 \mathcal{E}F'$$

d'où en substituant $M = \frac{\Pi}{g}$; $\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) R^2 = \frac{W^2}{n}$; et $CF = \frac{4500N}{N'}$

on conclut $\Pi W^2 = 468 \frac{nN}{N'}$.

Remarque. Les coefficients 0,0106 et 408 qui remplacent ici les nombres analogues 0,1052 et 4645 relatifs à la manivelle simple à double effet montrent l'avantage de la manivelle double sous le rapport de la régularisation du mouvement. Toutefois il est à observer que ces résultats fondés sur l'hypothèse du parallélisme constant de la bielle sont modifiés quand on tient compte de l'obliquité variable de celle-ci. Nous nous bornons à dire ici que lorsque la longueur de la bielle (dont l'extrémité opposée au bouton se meut sur une droite passant par le centre O) est cinq fois celle du rayon b de la manivelle. Les coefficients ci-dessus, savoir:

	Manivelle simple à double effet.		Manivelle double à double effet.	
	0,1052	4645	0,0106	468
doivent être remplacés par.....	0,1081	4773	0,0358	1580

Dans le même cas de la bielle oblique, les coefficients relatifs à l'emploi du contre-poids (390) sont aussi notablement altérés.

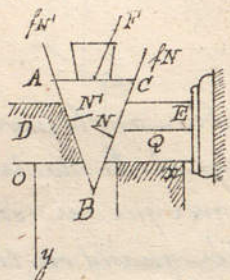
394. - Effets des forces d'inertie sur les bras des volants. Lorsqu'un volant tourne uniformément chacun des segments dont sa jante est composée exerce sur les bras et sur les autres segments auxquels il est lié des efforts dont la résultante est la force centrifuge due à la masse et au mouvement circulaire de ce segment. Si l'on fait abstraction de la pesanteur les bras ne sont alors soumis qu'à des efforts longitudinaux. Mais lorsque le mouvement de rotation est varié il n'en est plus de même. Les bras sont dans le même état de déformation que si la jante étant en repos était à la fois sollicitée en ses divers points par des forces moer normales et dirigées en dehors, et par des forces tangentielles $mr \frac{d\omega}{dt}$. Ces dernières tendent à fléchir les bras et la somme de leurs moments par rapport à l'axe de rotation est égale au moment de la résultante de toutes les forces extérieures qui agissent réellement sur le système solide tournant dont le volant fait partie.

Les conséquences pratiques de ces considérations appartiennent à la partie de la Mécanique appliquée qui traite de la résistance des matériaux.

§ 4. - Effet du choc dans la presse à coin.

395. - Cette machine a été étudiée (210) dans le cas de l'équilibre en regard au frottement. Il s'agit de la considérer en mouvement pendant et après le choc exercé par un mouton de poids P ou Mg tombant sur la tête horizontale du coin. Ce coin dont l'angle ABC

est 2^e glisse entre une pièce fixe D et une autre E mobile glissant sur un appui horizontal



et soumise à une réaction Q de la matière à presser. À l'instant initial du choc le mouton a une vitesse V, le coin et le bloc E sont en repos; à l'instant final le mouton et le coin ont une vitesse commune u parallèle à AB, et le bloc une vitesse 2u sin i. Il faut déterminer u; nous le ferons en posant successivement les équations du mouvement de chaque pièce solide du système.

Soit à un instant quelconque de la durée du choc, v la vitesse du mouton, F' la réaction du coin. On a

$$M \frac{dv_x}{dt} = F'_x \quad \text{et} \quad M \frac{dv_y}{dt} = Mg - F'_y$$

Le coin au même instant se meut avec une vitesse v' sous l'action d'une force égale et opposée à F', de son poids M'g, des réactions N, N', fN, fN' exercées par les corps voisins. On a donc

$$M' \frac{dv'_x}{dt} = N' \cos i - fN' \sin i - N \cos i + fN \sin i - F'_x$$

$$M' \frac{dv'_y}{dt} = M'g - N' \sin i - fN' \cos i - N \sin i - fN \cos i + F'_y$$

Le bloc, encore au même instant, se meut avec une vitesse v'' sous l'action de son poids M''g, de forces égales et opposées à N et fN, des réactions N'' et fN'' de l'appui, et enfin de la force Q. On a

$$M'' \frac{dv''}{dt} = N \cos i - fN \sin i - fN'' - Q$$

$$0 = M''g + N \sin i + fN \cos i - N''$$

En intégrant pour toute la durée du choc c'est à dire jusqu'à l'instant où la vitesse commune du mouton et du coin est u, et ses projections sont $u_x = u \sin i$ et $u_y = u \cos i$, on a six équations qu'on aurait pu poser immédiatement entre les quantités de mouvement et les impulsions:

$$Mu \sin i = \int F'_x dt$$

$$M(u \cos i - V) = \int Mg dt - \int F'_y dt$$

$$M'u \sin i = (\cos i - f \sin i) (\int N' dt - \int N dt) - \int F'_x dt$$

$$M'u \cos i = \int M'g dt - (\sin i + f \cos i) (\int N' dt - \int N dt) + \int F'_y dt$$

$$2M''u \sin i = (\cos i - f \sin i) \int N dt - f \int N'' dt - \int Q dt$$

$$0 = \int M''g dt + (\sin i + f \cos i) \int N dt - \int N'' dt$$

Les intégrales telles que $\int F'_x dt$ dans les 1^{re} et 3^e équations sont égales parce que deux forces mutuelles sont égales à chaque instant. Il y a donc dans ces six équations outre l'inconnue principale u, neuf inconnues auxiliaires dont cinq, $\int F'_x dt$, $\int F'_y dt$, $\int N' dt$, $\int N dt$, $\int N'' dt$ appartiennent aux pressions mutuelles ou sur les appuis fixes, et les autres sont dues

à la pesanteur ou à la résistance Q . Or ces quatre dernières étant beaucoup moindres que les premières peuvent être négligées, ce qui réduit le nombre des inconnues à celui des équations.

396. — Mouvement après le choc. Le coin et le mouton ne forment plus qu'un corps solide ayant une vitesse variable v . On aura les quatre équations ci-après, analogues aux quatre dernières de celles qui précèdent, en supposant la force Q constante :

$$(M + M')(v - u) \sin i = (\cos i - f \sin i) (\int N' dt - \int N dt),$$

$$(M + M')(v - u) \cos i = (M + M')gt - (\sin i + f \cos i) (\int N' dt + \int N dt),$$

$$2M''(v - u) \sin i = (\cos i - f \sin i) \int N dt - f \int N'' dt - Qt,$$

$$0 = M''gt + (\sin i + f \cos i) \int N dt - \int N'' dt.$$

Ces équations du premier degré entre les variables v , t , $\int N dt$, $\int N' dt$, $\int N'' dt$, donneraient par l'élimination des impulsions une équation de la forme $v = u - jt$, d'où l'on déduirait le temps $\frac{u}{j}$ après lequel le mouvement cesserait et l'espace $\frac{u^2}{2j}$ que le coin parcourrait parallèlement à AB . L'observation expérimentale de cet espace pourrait servir à calculer la pression Q .

§ 5. — Camer soulevant un marteau.

397. — On emploie dans les forges trois espèces de marteaux unis par des camers.

1^o Les marteaux à bascule dite aussi martinets. Ils pèsent au plus 80 kg., frappent de 200 à 400 coups par minute. La came agit sur l'extrémité du manche opposée à celle où est fixée la tête du marteau; l'axe de rotation est intermédiaire.

2^o Les marteaux à l'allemande dont le manche est soulevé latéralement par la came entre la tête et l'axe de rotation. Ils pèsent de 300 à 400 kg. Ils frappent de 70 à 200 coups par minute.

3^o Les marteaux frontaux dont la tête est située entre l'axe de rotation et l'extrémité du manche où agit la came. Ils pèsent de 2500 à 4000 kg. et frappent de 60 à 100 coups par minute.

À l'exemple de M. Poncelet qui le premier a donné la théorie de ces appareils (cours de l'école de Metz, 1836) nous admettrons que, ce qui est ordinaire, le choc de la came contre le manche a lieu dans le plan horizontal passant par l'axe de rotation. Nous nous proposons le problème suivant.

398. — Un marteau étant donné, connaissant par conséquent ses dimensions, son poids, son moment d'inertie; ayant les mêmes données sur l'arbre à camers; connaissant le nombre de coups du marteau par seconde d'où l'on déduit la vitesse moyenne des camers; connaissant enfin par le tracé des camers ou par l'expérience l'angle que décrit le marteau depuis l'instant où une came le saisit jusqu'à celui où elle l'abandonne, trouver le travail moteur que

1^{ère} division.

Cours de Méc. et Mach. — 18^e Feuille.

devra recevoir l'arbre à cames pour conserver son mouvement périodiquement uniforme. Chaque période d'un coup de marteau se divise en trois phases : la première est celle du choc qui commence quand le manche en repos est saisi par la came, et finit à l'instant où la vitesse du marteau et celle des cames sont devenues égales entre elles pour les points situés sur les circonférences passant au point de contact ; la deuxième est celle de la levée du marteau en contact avec la came ; la troisième dite de la marche à vide de l'arbre à cames commence à l'instant où la came quitte le manche et finit à l'instant où la came suivante vient le choquer.

19. — 1^{ère} Phase, choc. Soit, à un instant quelconque du choc, N' la pression verticale variable que le manche reçoit de la came, à une distance R' de l'axe de rotation du marteau. Soit à ce même instant $\frac{d\omega'}{dt}$ l'accélération angulaire du marteau considéré comme un corps solide. Il y a, suivant le principe de d'Alembert, équilibre entre les forces d'inertie et les forces réellement exercées sur le marteau. Celles-ci sont entre la force N' , les actions de la pesanteur dont la résultante est le poids P' du marteau, et les réactions des coussinets sur lesquels il tourne. Mais la force N' pendant le choc étant très-grande comparativement au poids P' celui-ci peut être négligé. Les forces d'inertie ont à cause de la symétrie du marteau (333 bis page 54.) une résultante unique qui se décompose en une force centrifuge $\frac{P'}{g} \omega'^2 a$ et une force perpendiculaire à la droite joignant l'axe de rotation au centre de gravité, force d'inertie tangentielle qui a pour valeur $\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt}$ et pour moment $I' \frac{d\omega'}{dt}$. L'accélération angulaire ayant pendant le choc une valeur très-grande en comparaison de ω'^2 , il en résulte que $\frac{P'}{g} \omega'^2 a$ doit être négligé auprès de $\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt}$. Enfin le centre de gravité du marteau étant à très-pen près sur l'horizontale qui joint le point de contact de la came à l'axe de rotation la force $\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt}$ est sensiblement verticale descendante. La force N' est également verticale descendante dans le martinet, ascendante dans les deux autres espèces de marteaux.

Cela posé, la réaction totale des coussinets a pour valeur $\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt} \pm N'$, et l'équation des moments, r étant le rayon des tourillons du marteau, est

$$N'R' = I' \frac{d\omega'}{dt} + f_1 r \left(\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt} \pm N' \right);$$

Le signe + convient aux marteaux à bascule, le signe - aux deux autres espèces. On sait que dans ce second cas on peut déterminer R' de manière que la pression sur l'axe soit nulle (350). Il suffit en effet de poser $\frac{P'}{g} a \frac{d\omega'}{dt} = N'$, et par suite $N'R' = I' \frac{d\omega'}{dt}$, pour en tirer $R' = \frac{I'g}{Pa}$.

De l'équation générale ci-dessus nous tirons

$$\frac{dw'}{dt} \left(I' + f_i r' a \frac{P'}{g} \right) = N' (R' \mp f_i r')$$

et en intégrant depuis l'instant où la vitesse du marteau est nulle jusqu'à celui où elle devient v aux points situés à la distance R'

$$\frac{v}{R'} \left(I' + f_i r' a \frac{P'}{g} \right) = (R' \mp f_i r') \int N' dt \dots \dots \dots [A]$$

Pour éliminer $\int N' dt$ considérons l'altération du mouvement de l'arbre à cames pendant la même phase du choc. Soit N égale et opposée à N' la réaction du marteau sur la came. Cette force N est par conséquent ascendante dans le cas du martinet, descendante dans les autres. L'arbre à cames ayant son centre de gravité dans l'axe de rotation, la résultante de translation de ses forces d'inertie est nulle. La pression totale sur les coussinets abstraction des forces autres que celles qui sont dues au choc se réduit donc à N , et l'on a l'équation des moments pour l'arbre à cames, dont le moment d'inertie est I , R et r désignant les distances à son axe analogues à R' et r'

$$I \frac{dw}{dt} = -NR - f_i r N = -N(R + f_i r),$$

et en intégrant depuis l'instant où la vitesse des cames est u jusqu'à celui où elle se réduit à v .

$$\frac{u-v}{R} I = (R + f_i r) \int N dt \dots \dots \dots [B]$$

Or les impulsions $\int N dt$ et $\int N' dt$ sont égales. On les élimine aisément de [A] et [B] et en posant, pour simplifier l'écriture, M et M' étant des masses fictives (387)

$$I = MR^2, \quad I' = M'R'^2, \quad \frac{1 + f_i \frac{r}{R}}{1 \mp f_i \frac{r'}{R'}} \left(1 + \frac{f_i r a P'}{MR'^2 g} \right) = K$$

on trouve $M(u-v) = KM'v \dots \dots \dots [1]$

C'est à dire que la quantité de mouvement perdue par la masse fictive M qui représente l'arbre à cames est égale, sauf le coefficient K , à celle qu'a gagnée la masse fictive M' qui représente le marteau.

Dans la pratique le coefficient K diffère peu de l'unité. M. Poncelet cite deux exemples, un marteau à bascule et un marteau à l'allemande pour lesquels il était 1,0006 et 1,014.

400. — Pendant la très courte durée du choc, l'arbre à cames a perdu de sa puissance vive une partie qui d'après la signification de M , est exprimée par $\frac{1}{2} M(u^2 - v^2)$, et que le moteur devra lui restituer par un travail numériquement égal que nous désignerons par \mathcal{E}_1 ; travail qui sera exercé sur l'arbre à cames, en outre de ceux que nous allons calculer, pendant le temps qui s'écoulera jusqu'au commencement d'un nouveau choc. Ainsi

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} M(u^2 - v^2) \dots \dots \dots [2]$$

Pour calculer cette quantité nous n'avons encore, entre les inconnues u et v , que

la relation [1]. Mais comme ces vitesses sont l'une la plus grande et l'autre la plus petite que possèdent les cames, et comme d'ailleurs elles diffèrent peu entre elles attendu que dans la pratique le rapport $\frac{M}{M'}$ est généralement grand, au moins 12 et quelquefois supérieur à 30, il en résulte qu'on ne fera qu'une erreur peu sensible si l'on considère la moyenne arithmétique $\frac{u+v}{2}$ comme égale à la vitesse moyenne des cames déduite du nombre de leurs révolutions dans un temps donné. Soit V cette vitesse moyenne; ainsi

$$\frac{u+v}{2} = V \dots \dots \dots [3]$$

De [1], [2] et [3] on conclut d'abord

$$E_1 = KM'vV \text{ puis } v = \frac{2MV}{2M+KM'} \text{ et enfin } E_1 = M'V^2 \frac{K}{1 + \frac{KM'}{2M}}$$

quantité peu différente de $M'V^2$, de sorte que l'arbre à cames subit par suite de sa rencontre avec le marteau une diminution de puissance vive, dont la moitié est à peu près celle que gagne le marteau; l'autre moitié est perdue par l'effet du travail moléculaire dans le choc.

401. 2^e Base, levée. Pendant la levée du marteau, le mouvement de celui-ci et des cames est à peu près uniforme. Le moteur qui agit sur l'arbre à cames doit fournir le travail E_2 nécessaire pour entretenir ce mouvement sous l'action du poids résistant du marteau et des frottements. Soit Q la force supposée verticale et descendante que, dans l'hypothèse du mouvement uniforme, le moteur exerce sur l'arbre à cames, à une distance q de l'axe; soit P le poids de cet arbre et de toutes ses pièces, soit N_1 la pression normale et sensiblement verticale qui a lieu au contact de la came et du manche du marteau. La pression totale sur les couffins de l'arbre à cames est à fort peu près (en négligeant l'influence du frottement du manche et de la came, sur cette pression), $Q + P \mp N_1$, selon l'espèce du marteau. Soit y le chemin sensiblement vertical que parcourt pendant la levée le point de contact de la came et du manche. Nous aurons pour le travail de Q pendant le même temps, en assimilant le frottement de la came à celui d'un engrenage (232)

$$E_2 = Qy \frac{q}{R} = f_1 y \frac{r}{R} (Q + P \mp N_1) + N_1 y \left(1 + \frac{1}{2} f_1 y \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right)$$

Or le travail $N_1 y$ transmis au marteau doit être égal au travail résistant de la pesanteur et du frottement des tourillons du marteau. D'après les notations précédentes le centre de gravité du marteau est à la distance α de l'axe et s'élève de $y \frac{\alpha}{R}$. Nous aurons en appelant r' le rayon des tourillons de l'arbre du marteau.

$$N_1 y = P' y \frac{\alpha}{R'} + f_1 y \frac{r'}{R'} (P' \pm N_1)$$

Cette équation et la précédente déterminent N_1 et Q et par suite E_2

402. 3^e Base, marche à vide de l'arbre à cames. L'arbre à cames dans cette circons-

l'arbre n'est soumis à aucune autre force résistante que celle du frottement sur ses tourillons. Cet arbre ayant son centre de gravité dans l'axe de rotation la résultante de translation des forces d'inertie est nulle, et la relation totale des appuis est égale et opposée à la résultante du poids P' et de la force Q qu'exerce le moteur. Si celle-ci est verticale comme P' il en résulte que les frottements exercés sur les tourillons ont leur valeur $f_1(P' + Q')$ très-peu différente de $f_1(P' + Q)$, la force Q étant celle qui a été attribuée approximativement à l'action du moteur pendant la 2^e phase. D'après cela si l'on désigne par y' le chemin que décrit la came depuis l'instant où elle a quitté le manche du marteau jusqu'à celui où la came suivante vient le choquer, le travail moteur nécessaire pour compenser le travail du frottement pendant cette 3^e phase est

$$C_3 = f_1 y' \frac{r'}{R'} (P' + Q).$$

$y + y'$ est l'intervalle de deux camees consécutives, égal à $\frac{2\pi R'}{C}$ le nombre des camees étant C .

403. — Le travail à fournir par le moteur sur l'arbre à came, pour chaque coup de marteau est $C_1 + C_2 + C_3$; (la 1^{ère} partie et la 3^e s'exercent simultanément pendant la 3^e phase si le mouvement était réellement uniforme pendant la 2^e). On en conclut aisément le travail moteur moyen par seconde.

§ 6. — Vis à percussion ou balancier.

404. — Nous abrégons et modifions un peu la description et la théorie que M. Poncelet a donnée de cette machine dans son cours de Metz déjà cité.

Une vis en fer mobile, à axe vertical et à filets quarrés traverse un écrou en bronze logé dans un chapeau fixe. Ce chapeau, ses deux montants et un plateau inférieur appelé semelle forment un ensemble solide ordinairement coulé d'une seule pièce. Au-dessus du chapeau la tête de la vis est engagée dans un grand levier en fer dit balancier, dont les deux extrémités portent des corps sphériques ou lenticulaires de grande masse qui donnent à cet appareil un moment d'inertie considérable. À sa partie inférieure la vis est assemblée avec une autre pièce mobile nommée mandrin qui monte et descend avec elle, mais sans tourner, étant guidée par des coulisses fixées aux deux montants ou supports du chapeau. Au bas du mandrin est engagé et arrêté avec des vis ou avec une clef, l'outil en acier trempé destiné à exercer une forte pression sur les plaques métalliques que l'on pose au-dessous. Lorsqu'il sert à percer, l'outil se nomme emporte-pièce ou poinçon; sa base plane, perpendiculaire à la direction de son mouvement, a son contour tranchant, au-dessus duquel les dimensions transversales du poinçon diminuent un peu afin qu'après son passage dans le trou qu'il fait, le reste du corps de l'outil n'éprouve aucune résistance latérale. La semelle présente une ouverture au-dessus de laquelle se fixe une plaque en acier trempé,

nommée matrice, percée d'un trou que le poinçon à l'extrémité inférieure de sa course traverse exactement, sans jeu ni frottement.

Cette machine est mise en mouvement par des hommes qui, agissant aux extrémités du levier soit directement soit par l'intermédiaire de tiraudes, impriment à la vis et à son équipage une rotation et par conséquent une puissance vive considérable. Un travail qu'ils développent s'ajoute celui de la gravité diminuée de celui des frottements. Le poinçon atteint la pièce à percer ou à découper que l'on a poussée sur la matrice, et en vertu de la puissance vive acquise par le système, et quelque fois du travail que les hommes exercent encore pendant le percement, il pénètre à travers la matière et en détache une partie qui tombe. La vitesse de la vis est considérablement diminuée à la fin du percement, après quoi, la résistance se réduisant au frottement, le mouvement s'accélère de nouveau, à cause de la forte inclinaison de la vis, jusqu'à l'instant où la machine est arrêtée soit par un obstacle fixe qui éteint en pure perte la puissance vive qu'elle possède encore, soit par des ressorts qui lui en restituent une portion.

405. — Phase de la descente à vide. — $Q = Mg$ poids de la vis et de son équipage, I moment d'inertie de la partie tournante, Pp le moment généralement variable du couple horizontal moteur, r' le rayon moyen de la vis, i l'angle de l'hélice moyenne à l'horizon, H la hauteur dont la vis est descendue à l'instant où le poinçon atteint la pièce à percer, ω la vitesse angulaire à cet instant. Quelle est la puissance vive du système à ce même instant ?

Appelons ω la vitesse angulaire et u la vitesse verticale de la vis à un instant quelconque de la descente; il y a équilibre entre 1° le poids Mg ; 2° les forces horizontales P ; 3° les réactions N et fN de l'écrin; 4° les forces d'inertie tangentielle qui se décomposent en forces horizontales $mr \frac{d\omega}{dt}$ et forces verticales $m \frac{du}{dt}$ ou $mr' \operatorname{tang} i \frac{d\omega}{dt}$ à cause de la relation $\frac{u}{\omega r'} = \operatorname{tang} i$; 5° les forces centrifuges dont la résultante est nulle à cause de la symétrie autour de l'axe. Nous négligeons comme très faible le frottement du mandrin avec la vis et avec ses guides.

$$\text{Projections verticales} \dots Mg - \cos i \Sigma N - f \sin i \Sigma N - Mr' \operatorname{tang} i \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\text{Moments} \dots Pp + r' \sin i \Sigma N - r' f \cos i \Sigma N - I \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\text{d'où, pour éliminer } \Sigma N, \dots \frac{r'(\sin i - f \cos i)}{\cos i + f \sin i} = r' \operatorname{tang}(i - \varphi) = \frac{I \frac{d\omega}{dt} - Pp}{Mg - Mr' \operatorname{tang} i \frac{d\omega}{dt}};$$

$$\text{de là } \frac{d\omega}{dt} \{ I + Mr'^2 \operatorname{tang} i \operatorname{tang}(i - \varphi) \} = Mgr' \operatorname{tang}(i - \varphi) + Pp;$$

enfin, on a, en multipliant par $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ pour éliminer dt , et en intégrant,

$$\frac{1}{2} \omega^2 \{ I + Mr'^2 \operatorname{tang} i \operatorname{tang}(i - \varphi) \} = Mgr' \alpha' \operatorname{tang}(i - \varphi) + \int Pp d\alpha.$$

Dans cette formule φ est l'angle du frottement de la vis sur l'écrin; α est l'angle décrit horizontalement par la vis et par conséquent $\alpha' = \frac{H}{r' \operatorname{tang} i}$; $\int Pp d\alpha$ est le travail

des forces horizontales P ; le travail dû à la pesanteur est MgH ou $Mgr' \sin i$. La puissance vive acquise est $\frac{1}{2} \omega'^2 I + \frac{1}{2} M \omega'^2$ ou $\frac{1}{2} \omega'^2 (I + Mr'^2 \tan^2 i)$ à cause de $u = \omega r' \tan i$. Ainsi sans le frottement, c'est-à-dire si l'on faisait $\varphi = 0$ on trouverait, ce qui doit être

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \mathcal{O}P + \mathcal{O}Q.$$

Le coefficient f du frottement diffère peu de 0,10; l'angle φ est donc à peu près de 6° . Si l'on suppose $\tan i = 1$ on trouve $\tan(i - \varphi) = 0,81$. On voit ainsi l'influence du frottement dans la 1^{re} phase.

406. — Phase du percement. h épaisseur de la tôle à percer; x la hauteur dont le poinçon y a pénétré à un instant de la 2^e phase; c contour du poinçon et de la partie à enlever; F' résistance actuelle que la pièce à percer exerce sur le poinçon. Nous admettons avec M. Loncelet qu'on représente par K un coefficient qui dépend de la matière ou a la relation

$$F' = Kc(h-x).$$

D'après des expériences de M. Moiré, cette formule se vérifie en donnant à K les valeurs suivantes: pour le fer chauffé au rouge brun 8206000 Kg., et pour le plomb à froid 4249000 Kg.

Cela posé, à un instant quelconque du percement, il y a équilibre entre 1^o le poids Mg ; 2^o les forces P ; 3^o la résistance ascendante F' ; 4^o les réactions N et fN des surfaces hélicoïdes inférieures de l'écrin; 5^o le frottement du pivot d'assemblage de la visse du mandrin, qui a été négligé dans la 1^{re} phase; 6^o les forces d'inertie. Nous remarquons que la puissance vive du mandrin étant très faible par rapport à celle du corps tournant, on peut sans erreur sensible admettre que la pression F' qui s'exerce sur le poinçon se transmet intégralement au pivot d'assemblage. On a donc en appelant r'' le rayon de ce pivot:

$$\text{projections verticales} \dots Mg - F' - Mr' \tan i \frac{d\omega}{dt} + \cos i \Sigma N - f \sin i \Sigma N = 0$$

$$\text{moments} \dots Pp - \frac{2}{3} f F' r'' - I \frac{d\omega}{dt} - r' \sin i \Sigma N - r' f \cos i \Sigma N = 0$$

$$\text{d'où} \dots \frac{r'(\sin i + f \cos i)}{\cos i - f \sin i} = r' \tan(i + \varphi) = \frac{Pp - \frac{2}{3} f F' r'' - I \frac{d\omega}{dt}}{F' - Mg + Mr' \tan i \frac{d\omega}{dt}}$$

$$\text{puis} - \frac{d\omega}{dt} \{ I + Mr'^2 \tan i \tan(i + \varphi) \} = (F' - Mg) r' \tan(i + \varphi) - Pp + \frac{2}{3} f r'' F'.$$

En multipliant par $c \, dt = d\alpha = \frac{dx}{r' \tan i}$ et intégrant de ω' à ω'' , ou de 0 à h , on en tire de α' à α'' , on a

$$\frac{1}{2} (\omega''^2 - \omega'^2) \{ I + Mr'^2 \tan i \tan(i + \varphi) \} = \frac{1}{r' \tan i} \left\{ \left(Kc \frac{h^2}{2} - Mgh \right) r' \tan(i + \varphi) + \frac{2}{3} f r'' Kc h^2 \right\} - \int_{\alpha'}^{\alpha''} Pp \, d\alpha$$

Cette dernière intégrale est le travail des forces P pendant le percement; on peut généralement le négliger, vu la faible amplitude $\alpha'' - \alpha'$.

407. — On pourrait s'imposer la condition que w'' fût nulle, on en conclurait la valeur de w' et par suite celle du travail $\int Pp dx$ pendant la descente à vide. Ce serait le moindre travail possible pour produire un percement.

N^{ème} Section.

Mécanique des fluides.

Chapitre 1^{er}. — Hydrostatique.

§ 1. — Propriétés caractéristiques des fluides.

408. — On désigne sous le nom d'hydrostatique la science de l'équilibre non-seulement de l'eau, mais de tout fluide supposé parfait.

Un fluide est un assemblage, en apparence continu, de points matériels qui cèdent à de très faibles efforts tendant à les séparer ou à les faire glisser les uns sur les autres. On distingue les fluides en liquides et en gaz ou fluides aëriiformes. Les liquides ne se compriment que sous des pressions extrêmement grandes, et s'appellent souvent par cette raison fluides incompressibles. Les gaz ou fluides aëriiformes sont compressibles sous des efforts beaucoup moindres et donc, dans certaines limites, d'une parfaite élasticité; c'est pourquoi on les nomme aussi fluides élastiques.

409. — Le caractère essentiel de la fluidité parfaite, dans les liquides comme dans les gaz, est l'absence de tout frottement, soit entre les parties du fluide, soit entre elles et les corps environnantes. Cette propriété n'existe pas d'une manière absolue dans la nature; mais on peut l'admettre comme une approximation justifiée par l'expérience, surtout quand il s'agit de fluides en repos ou n'ayant que des mouvements lents relativement aux corps qui les touchent.

410. — Théorème de l'égalité de pression en tous sens. De la fluidité parfaite admise comme principe fondamental en hydrostatique, se déduit par conséquence nécessaire une autre propriété qu'on a longtemps regardée comme un fait primordial appelé principal de Pascal, savoir que la pression rapportée à l'unité de surface pour chaque point d'un fluide est égale en tous sens.

Pour s'en former une idée précise, il faut définir ce que l'on entend par la pression en un point d'un fluide. Un corps de ce genre étant supposé enfermé de toutes parts dans

une enveloppe polyédrique, si l'on considère une portion plane de cette enveloppe on voit qu'elle reçoit de la part du fluide une infinité de petites forces agissant du dedans au dehors. Si le fluide est parfait, la résultante de ces forces, qui constitue la pression totale supportée par la portion d'enveloppe considérée, est toujours perpendiculaire à cette surface; c'est en cela que consiste l'absence du frottement, tandis que s'il s'agit d'un liquide plus ou moins visqueux, les actions qu'il exerce peuvent être obliques à l'enveloppe comme dans le frottement des corps solides entre eux.

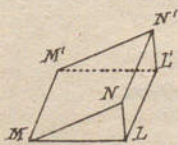
Si en subdivisant la surface pressée en partie de plus en plus petites, on trouve que la pression totale sur chaque partie décroît dans le même rapport la pression est dite uniforme, et si l'on divise une pression totale rapportée à l'unité de force (le Kg.), par l'aire de la partie qui la supporte, exprimée en son rapport à l'unité de surface (le m. q.) on a, pour la surface dont il s'agit, ce qui s'appelle la pression par unité de surface (pression en Kg. par m. q.).

Si les pressions sur les subdivisions de la surface pressée ne sont pas proportionnelles aux aires, le quotient de la pression totale divisée par l'aire totale, donne la pression moyenne par unité de surface; et la limite dont on approche en appliquant ce calcul à une aire de plus en plus petite, dans laquelle se trouve toujours un point déterminé est en ce point la pression par unité de surface.

Cette notion s'applique à un point intérieur du fluide. Si par ce point on imagine une portion de plan, les deux parties adjacentes du fluide exercent des actions mutuelles qu'on peut regarder comme les pressions égales que supportent les deux faces de ce plan; l'une de ces pressions divisée par l'étendue superficielle sur laquelle elle s'exerce est la pression moyenne, et la limite de la pression moyenne à mesure qu'on réduit cette étendue en y comprenant toujours le point considéré, et en conservant au plan sa direction, est la pression par unité de surface au point dont il s'agit, et perpendiculairement à la direction adoptée.

Cela posé, par l'égalité de pression en tous sens pour un même point, il faut entendre que la pression par unité de surface en un point pris arbitrairement dans un fluide est la même en quelque sens qu'on la considère, c'est-à-dire quelque direction qu'on donne à la petite portion de plan dont nous venons de parler, pourvu qu'elle comprenne toujours le même point. Cette vérité est proprement un théorème.

Pour le démontrer, faisons passer par le point M deux plans quelconques $MM'N$, $MM'L$ et menons dans ces plans, perpendiculairement à leur intersection les quatre droites MN , $M'N'$, ML , $M'L'$, égales entre elles et à la longueur MM' prise sur l'intersection. Le fluide contenu dans le prisme droit triangulaire ainsi déterminé est en équilibre sous les forces extérieures qui sont: 1° les pressions totales normales exercées sur les cinq faces; 2° les forces analogues à celle de la pesanteur qui sollicitent toutes les molécules de la portion du fluide considérée. Mais à mesure qu'on



diminue dans un même rapport les dimensions MN , MM' , ces dernières forces deviennent aussi petites qu'on veut relativement aux pressions sur les faces, parce que les unes finissent par être proportionnelles au volume du prisme ou au cube de MM' , tandis que les autres deviennent

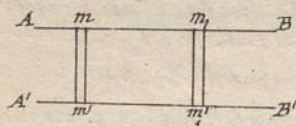
proportionnelles au carré de cette longueur. Donc, à la limite, les premières doivent être négligées relativement aux autres, et l'équilibre finit par exister entre les seules pressions. Or, si on projette ces forces sur un axe parallèle à NI , il ne reste que les pressions sur les faces MN' , ML' , qui faisant des angles égaux avec LI , doivent être égales pour que leurs projections le soient; et ces forces étant égales, il en résulte que les pressions rapportées à une même unité de surface suivant les deux directions perpendiculaires aux plans quelconques MN' , ML' , sont égales.

Lorsqu'il s'agit d'un fluide aëriiforme, la pression est souvent appelée force élastique; on lui donne aussi, assez improprement, le nom de tension qui devrait être exclusivement consacré aux actions mutuelles attractives.

411. — Surfaces et couches de niveau dans les fluides pesants. Une seconde conséquence de la nullité de frottement entre les parties des fluides, c'est que dans un fluide en repos, quand les forces extérieures se réduisent à la pesanteur et aux pressions des parois environnantes, toute couche horizontale ou de niveau non interrompue, a dans toute son étendue la même pression et la même densité.

1°. Elle a la même pression; car si, entre deux points quelconques, on considère dans la couche un fillet prismatique horizontal, il est également pressé à ses deux extrémités sans quoi il se mouvrait en vertu de la nullité du frottement. Or, si les pressions sont égales dans le sens horizontal, elles le sont dans des sens quelconques (410).

2°. Quant à la densité, soient deux plans horizontaux AB , $A'B'$: la pression dans l'étendue de chacun d'eux considérée à part est uniforme. Soient entre ces deux plans deux colonnes cylindriques verticales $m'm$, $m'_1m'_1$, dont les bases soient égales. La pression sur la base m' est égale à celle qui a lieu en m augmentée du poids de la colonne mm' , puisqu'il n'y a pas de frottement sur les faces latérales de cette colonne. Il en est de même pour la colonne $m_1m'_1$; les deux colonnes ont donc même poids sous le même volume; d'où résulte la proposition énoncée.



412. — Relation des pressions en deux points différents d'un fluide pesant. Le même raisonnement prouve que si l'on désigne par :

P la pression par unité de surface en un point du fluide;

Π le poids par unité de volume de ce fluide, au même point;

z la distance de ce point au dessous d'un plan horizontal de comparaison,

ces trois variables sont liées par la relation

$$dP = \Pi dz.$$

Lorsqu'il s'agit d'un liquide homogène en repos, on a par conséquent l'équation

$$P = P_0 + \Pi h,$$

dans laquelle h est la différence de niveau des deux points où les pressions sont P_0 et P , pourvu qu'on puisse passer du premier au second, par des détours quelconques, sans sortir du liquide.

413. — Hauteur représentative d'une pression. Si dans la formule

$$P = P_0 + \Pi h$$

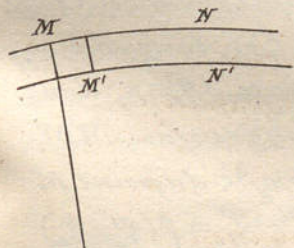
on suppose $P_0 = 0$, c'est-à-dire que la hauteur h soit comptée à partir d'un plan où la pression serait nulle, on a

$$P = \Pi h \quad \text{ou} \quad h = \frac{P}{\Pi}$$

et par cette raison le quotient $\frac{P}{\Pi}$ s'appelle la hauteur représentant la pression P ; c'est la hauteur d'une colonne verticale pesant Π par unité de volume et exerçant sur sa base inférieure la pression P par unité de surface, la pression sur la base supérieure étant nulle.

415. — Stabilité de divers liquides superposés. En vertu de l'homogénéité des couches de niveau la surface de séparation de deux liquides voisins en équilibre est un plan horizontal. Il faut de plus pour la stabilité de cet équilibre que le liquide inférieur soit plus dense que le supérieur, c'est-à-dire que cette condition est nécessaire pour que, si la situation horizontale de la surface de séparation est tant soit peu dérangée par une cause quelconque, l'état primitif tende à se rétablir dès que cette cause cessera. Cela tient à cette propriété générale des systèmes matériels sous l'action de la pesanteur et de réactions de corps fixes: mis sans vitesse dans une situation qui n'est pas celle de l'équilibre ils se mettent en mouvement de manière que la pesanteur fasse un travail positif et par conséquent le centre de gravité descend.

417. — Généralisation de la théorie précédente par l'équation de l'équilibre d'un fluide sous l'action de forces quelconques. De même que gdm est le poids d'un élément dont la masse est dm , représentons par Jdm la force totale extérieure au fluide, qui sollicite cet élément, dans une direction qui peut varier, comme l'intensité de cette force d'un point à un autre du système. J est par conséquent la force totale extérieure par unité de masse, pour un point quelconque M de ce système. Par ce point imaginons une surface MN qui en chacun de ses points ait pour normale la direction de la force J en ce point; cette surface est appelée surface de niveau dans le fluide dont il s'agit par extension de la signification ordinaire de cette expression relativement à la pesanteur. Soit maintenant un point M' infiniment voisin du point M , et par ce point M' imaginons la surface de niveau qui lui correspond. Les deux surfaces de niveau aux points M, M' peuvent à la limite être considérées comme



parallèles. Concevons dans leur intervalle un petit prisme ou cylindre dont les bases comprennent les points M et M' et dont les faces latérales soient normales aux surfaces de niveau. Si nous désignons par:

P la pression par unité de surface au point M ,

$P + dP$ la quantité analogue au point M' ,

ω l'aire des bases du petit prisme,

dh sa hauteur, distance des deux surfaces de niveau,

$\rho = \frac{\Pi}{g}$ la densité ou masse rapportée à l'unité de volume du fluide

au point M , ou ce qui revient au même dans l'étendue du prisme considéré.

Nous voyons que ce prisme est en équilibre sous l'action:

- 1° Des forces ωP et $-\omega(P+dP)$ agissant normalement sur les deux bases;
 2° De la force $\rho \omega dh$ agissant dans la même direction sur tout le fluide qui compose le prisme;
 3° Des pressions exercées par le fluide environnant normalement aux faces latérales.
- Donc pour l'équilibre on a, en supprimant le facteur ω :

$$dP = \rho J dh,$$

formule analogue à l'équation $dP = \Pi dz$ du N° 412; mais dP n'est plus en général la différentielle d'une fonction d'une seule variable; seulement il faut remarquer que dans tous les cas dP et dh sont nulle ensemble, c'est-à-dire que dans une même couche de niveau la pression est constante.

418. - Cas particulière où Jdh est une différentielle exacte des coordonnées variables d'un point du fluide. Puisque J est une force, rapportée à l'unité de masse, et que dh est la projection sur cette force de la distance MM' , le produit Jdh peut être considéré comme le travail que ferait cette même force dans le déplacement de son point d'application de M en M' . D'après cela, en nous reportant au N° 259 nous verrons que Jdh est une différentielle d'une fonction des coordonnées du point M , variables indépendantes, lorsque les forces, dont J est la résultante, passent par des points fixes (centres d'attraction ou de répulsion) et que leurs intensités sont fonctions des distances r de leur point d'application M à ces centres respectifs. La propriété du travail d'une résultante donne, en effet,

$$Jdh = \sum j dr = \sum F(r) dr = d \sum F_j(r),$$

ce qu'on ramène à la différentielle d'une fonction des coordonnées x, y, z de M en appelant a, b, c , les coordonnées du point C et en posant

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

$\sum F_j(r)$ est ainsi transformée en une fonction φ des trois variables indépendantes qui déterminent un point M du fluide, et l'équation $dP = \rho Jdh$ devient $dP = \rho d\varphi$.

Il reste à voir qu'en ce cas beaucoup moins particulier que celui de la simple pesanteur (412), la densité ρ est constante dans l'étendue d'une couche de niveau. En effet si l'on fait varier x, y, z de manière à rester sur une même surface de niveau MM , on a $d\varphi = 0$, par suite $dP = 0$, donc φ et P ont dans cette surface des valeurs constantes φ_1 et P_1 . De même dans une surface $M'M'$, infiniment voisine, φ et P ont des valeurs constantes φ' et P' . Mais si l'on passe du point M au point M' , très-voisin sur la 2^e surface, on aura $dP = \rho d\varphi$, c'est-à-dire $P' - P_1 = \rho(\varphi' - \varphi_1)$

ou $\rho = \frac{P' - P_1}{\varphi' - \varphi_1}$ quantité indépendante de la position du point M sur la surface à laquelle il appartient. Donc la densité de la couche MM, M', M' est constante dans toute son étendue

Remarque. Dans les traités de Mécanique analytique, on remplace ordinairement J par ses trois composantes rectangulaires X, Y, Z , et le travail Jdh par $Xdx + Ydy + Zdz$, formule dans laquelle dx, dy, dz sont les accroissements que prennent les coordonnées x, y, z

d'un point M quand on passe au point infiniment voisin et d'ailleurs quelconque M' . On remarque comme nous l'avons fait que dans le cas particulier du N° 417 l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte d'une fonction q de x, y, z . Le reste du raisonnement précédent subsiste.

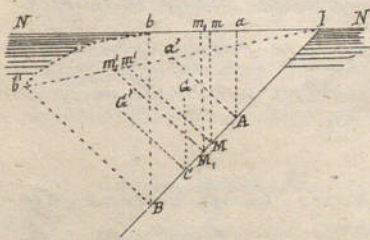
§ 2. - Pression totale d'un liquide pesant homogène sur un plan.
Centre de pression.

419. - Soit ω l'aire de l'un des éléments d'une portion de plan en contact avec un liquide en repos, soit h sa hauteur au-dessous d'un plan horizontal NN dans lequel la pression par unité de surface est P_0 , soit Π le poids du liquide par mètre cube. La pression sur l'élément ω est $\omega P_0 + \omega \Pi h$, et les pressions sur tous les éléments du plan étant perpendiculaires à ce plan, ont une résultante égale à leur somme $P_0 \Sigma \omega + \Pi \Sigma \omega h$. Or si Ω désigne l'aire totale $\Sigma \omega$ et si H est la hauteur du centre de gravité du plan pressé au-dessous du plan de niveau, on a $\Sigma \omega h = \Omega H$, et la pression totale est $\Omega (P_0 + \Pi H)$. On remarque que $\Pi \Omega H$ est le poids d'un prisme de liquide qui aurait pour base Ω et pour hauteur H .

Si le plan NN est en contact avec l'atmosphère, la pression P_0 s'obtient par l'observation du baromètre.

420. - Centre de pression. La résultante des forces normales au plan pressé perce ce plan en un point appelé centre de pression, qui est toujours situé au-dessous du centre de gravité de la surface. En effet, si par la pensée on rend cette paroi horizontale en la faisant tourner autour d'un axe horizontal tracé dans son plan par le centre de gravité, la pression totale n'est pas changée puisqu'elle est toujours $\Omega (P_0 + \Pi H)$, et la résultante passe alors par le centre de gravité, puisque dans ce cas les pressions sur des éléments égaux du plan sont égales. Or, si l'on ramène la paroi à sa position inclinée, les pressions partielles sur la partie supérieure de la paroi sont diminuées, les autres sont augmentées; donc la résultante passe au-dessous de l'axe de rotation.

La position du centre de pression d'un liquide sur une paroi plane se trouve par le calcul en appliquant la théorie de la composition des forces parallèles. Nous nous bornerons au cas où le liquide est homogène. Nous négligerons comme on fait ordinairement, le terme dû à la pression atmosphérique parce que celle-ci est supposée agir sur la face opposée égale et parallèle à celle de la paroi considérée.



1^{re} Division.

Dans la figure ci-contre, dont le plan est supposé vertical et perpendiculaire à la paroi pressée, représentons par NN le plan horizontal dans lequel la pression du liquide est considérée comme nulle. Soit AB la trace verticale de la paroi et soit I l'intersection de son plan prolongé avec NN . Soit C le centre de pression et supposons qu'on demande sa dis-

Comme de Mév. et Mach. - 2^e Feuille.

tance AC à l'axe horizontal projeté en A . Décomposons la surface AB en bandes horizontales infiniment étroites, telles que celle qui se projette en MM_1 . Appelons z la distance verticale MM_1 ; x la distance AM ; dx par conséquent la largeur MM_1 ; y la longueur de la bande dans le sens horizontal. La pression sur la surface ydx est $\Pi z y dx$; son moment par rapport à l'axe A est $\Pi z y x dx$. Si donc nous représentons par x' la distance AC , nous avons :

$$x' \int \Pi z y dx = \int \Pi z y x dx$$

Représentons la distance AI par c , et l'angle NIA par α . Donc $z = (c+x) \sin \alpha$ et l'équation précédente donne $x' = \frac{\int (cx+x^2)y dx}{\int (c+x)y dx}$.

Il ne reste plus qu'à substituer à y son expression en fonction de x et à exécuter les intégrations dans les limites de la surface pressée.

Si cette surface est un trapèze dont les bases soient horizontales, représentons ces bases projetées en A et B par a et b , et soit l la hauteur AB . Nous avons

$$y = a + \frac{b-a}{l} x,$$

et en effectuant les intégrations depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$,

$$x' = \frac{l^2(a+3b) + 2lc(a+2b)}{2l(a+2b) + 6c(a+b)}$$

Cas particuliers : pour $c=0$

$$x' = \frac{l(a+3b)}{2(a+2b)}$$

$b=0, c=0$, triangle, base à fleur d'eau $x' = \frac{l}{2}$;

$a=0, c=0$, triangle, sommet à fleur d'eau $x' = \frac{3}{4}l$;

$a=b, c=0$, parallélogramme, côté horizontal à fleur d'eau $x' = \frac{2}{3}l$.

On trouve aisément à priori ces résultats.

La recherche du centre de pression d'un liquide sur une paroi plane peut se ramener à celle du centre de gravité d'un volume. La pression sur la bande MM_1 est égale en intensité au poids d'une tranche de liquide projetée en $MM_1 m_1 m'_1$ qui aurait pour base le rectangle égal à yz projeté en Mm , et pour épaisseur dx ou MM_1 . En étendant à toute la paroi AB cette observation, on voit :

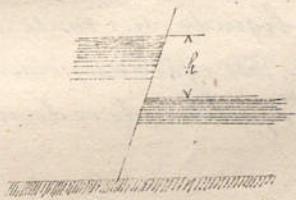
1^o Que la pression totale est égale au poids du prisme ou cylindre droit tronqué $ABb'a'$ qui aurait pour base inférieure la paroi AB et sa base oblique supérieure dans le plan $a'b'$ passant par I et tel que toute perpendiculaire Mm' est égale à la verticale correspondante Mm ;

2^o Que la résultante des pressions passe par le centre de gravité G' du même cylindre, et par conséquent le centre de pression C est la projection rectangulaire, sur la

paroi, de ce même centre de gravité;

On voit aussi que le centre de pression C est sur la verticale passant par le centre de gravité du prisme ou cylindre tronqué à arêtes verticales Aa bB , ayant pour l'axe de ses bases la paroi AB , et sa base supérieure dans le plan horizontal NN . Cette considération conduit immédiatement aux trois dernières valeurs de x ci-dessus.

Lorsque les deux faces d'une cloison sont pressées par deux portions distinctes d'un même liquide, dont les surfaces en contact avec l'atmosphère sont à des niveaux différents, la différence des pressions par mètre quarré sur les deux faces immergées est visiblement constante et égale au poids H du mètre cube de liquide multiplié par la différence h de niveau, abstraction faite de la légère variation de la pression atmosphérique sur les deux surfaces du liquide.



§ 3. — Pression d'un fluide sur une surface courbe.

422. — Théorème. La pression Pw d'un fluide sur un élément superficiel quelconque dont l'aire est w , a pour projection, sur un axe Ox quelconque, une force égale à la pression Pw' que supporterait, au même point, un élément égal à la projection w' de l'élément superficiel sur un plan yOz perpendiculaire à Ox . Car si l'on appelle α l'angle de la normale à l'élément w avec Ox , la projection de la pression Pw est $Pw \cos \alpha$, et $w \cos \alpha = w'$. Cette propriété se démontre directement d'une manière analogue à la démonstration du théorème de l'égalité de pression en tous sens, en considérant l'équilibre d'un petit cylindre tronqué fluide qui aurait pour première base l'élément w , ses génératrices parallèles à Ox , et pour seconde base l'élément w' à une petite distance de l'autre.

423. — Corollaire I. — Si le fluide qui s'appuie sur une surface courbe est à une pression constante (ce qu'on peut souvent admettre approximativement pour un gaz de peu d'étendue) la somme algébrique des projections sur un axe Ox des pressions élémentaires supportées par cette surface est égale à la pression que supporterait en contact avec le même fluide une surface égale à la projection de la surface courbe sur un plan yOz perpendiculaire à Ox . Il doit être entendu que, lorsque les parallèles à l'axe Ox rencontrent deux fois la surface pressée, les projections des pressions comme les projections des éléments superficiels où cette rencontre a lieu, se détruisent. Exemples: Calotte sphérique, portion de surface cylindrique à base circulaire qui, développée, deviendrait un rectangle. Chaudières à vapeur.

X 424. — Corollaire II. — Lorsqu'on a égard à l'action de la pesanteur sur le fluide liquide ou gazeux, qui presse une surface courbe, la même propriété a lieu pourvu que l'axe Ox soit horizontal.

425. — Corollaire III. — Dans la même hypothèse du fluide pesant, la pression normale sur un élément superficiel quelconque a pour projection verticale une force égale au poids du cylindre fluide vertical tronqué ayant pour base inférieure l'élément superficiel et ayant sa base supérieure au niveau où la pression est nulle; ce cylindre étant d'ailleurs composé de couches homogènes avec celles qui composent le fluide pesant.

On explique ainsi pourquoi la pression d'un liquide sur le fond d'un vase non cylindrique est tantôt plus grande, tantôt plus petite que le poids du liquide contenu dans le vase. Dans tous les cas, la résultante des pressions exercées par ce liquide sur toute la paroi intérieure du vase, abstraction faite de la pression atmosphérique, est égale au poids du liquide entier, ce qui est d'ailleurs une conséquence nécessaire de l'équilibre de ce dernier sous l'action de la pesanteur et des réactions du vase.

§ II. — Équilibre des corps plongés dans un fluide pesant.

426. — Lorsqu'un corps est plongé en totalité ou en partie dans un fluide pesant, en repos, qui entoure complètement la partie immergée, les pressions que ce fluide exerce normalement à la surface du corps ont une résultante unique passant par le centre de gravité du fluide déplacé, et égale mais directement opposée au poids de ce même fluide. Cela résulte des corollaires I et II, mais se reconnaît à priori en remarquant que rien ne serait changé aux pressions si le corps plongé était remplacé par le fluide qu'il déplace, et alors la proposition serait une conséquence des règles de la statique. Il est bien entendu que le fluide environnant est en contact avec toute la surface qui limite le corps considéré au-dessous du plan de niveau où cesse le fluide. Celui-ci peut d'ailleurs être composé de couches horizontales de diverses densités; mais alors il faut prolonger par la pensée ces couches dans la partie immergée du corps solide, pour avoir le poids du fluide déplacé et son centre de gravité. La résultante des pressions du fluide sur le corps qui y est immergé s'appelle improprement la perte de poids du corps due à son immersion. Le centre de gravité du fluide déplacé est convenablement désigné sous le nom de centre des pressions que le corps immergé supporte.

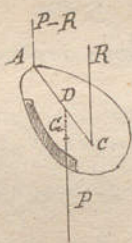
427. — Équilibre d'un corps solide entièrement plongé. — Si ce corps est sous les seules actions de la pesanteur et du fluide environnant, il faut pour l'équilibre :

- 1^o Que son poids soit égal à celui du fluide qu'il déplace;
- 2^o Que le centre de gravité du solide, et celui du fluide déplacé ou celui du volume du corps si le fluide est homogène, soient sur une même verticale.

Quant à la seconde condition il y a une distinction importante à faire. Puisque le corps est solide on peut, sans rien changer à son état de repos ou de mouvement, rem-

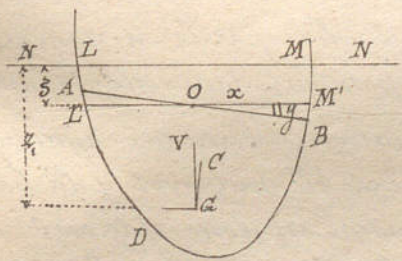
placer les forces auxquelles il est soumis par leurs résultantes savoir la force P représentant son poids appliquée au centre de gravité G du solide, et la pression résultante R verticale ascendante, égale à P mais appliquée au centre de pression C . La résultante de translation de ces forces étant nulle, de quelque manière qu'on place le corps dans le liquide, sans vitesse initiale, le centre de gravité reste immobile, mais en vertu de la force R , le corps tourne autour de G vers la position où C est verticalement au-dessus de G . De là la distinction des deux équilibres, l'un stable, l'autre instable, suivant que G est au-dessous ou au-dessus de C .

Si le solide, au lieu d'être libre dans le liquide, est suspendu à un point fixe par un fil très mince et suppose sans pesanteur, celui-ci pour l'équilibre devra être vertical comme les deux forces P et R , dont la différence sera la tension de ce fil. Le point d'attache A du fil au corps solide, et les deux points G et C seront dans un même plan vertical, et en supposant $P > R$, la verticale du point G partagera en D la distance des points A et C en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces $P - R$ et R , ce qui détermine la situation du corps suspendu par rapport au fil.



428. — Corps flottants. Pour l'équilibre d'un corps flottant à la surface d'un liquide, il faut: 1°. que son poids soit égal à celui du liquide déplacé; 2°. que le centre de gravité du corps et le centre de pression soient sur une même verticale. L'équilibre est encore stable si le centre de gravité est au-dessous du centre de pression; mais cette condition, toujours suffisante n'est pas nécessaire. Si par exemple un cylindre droit à base circulaire, dont le centre de gravité n'est pas dans l'axe flotte de manière que cet axe soit horizontal, ou si le corps flottant est une sphère non homogène, il faut et il suffit pour la stabilité que le centre de gravité soit au-dessous du centre de figure, parce qu'il est alors le plus bas possible.

429. — Condition générale de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. Supposons que prenant dans l'état d'équilibre un corps qui flotte sur un liquide homogène, on lui imprime de très petites vitesses desquelles il résulte qu'il s'incline et s'enfonce. Il s'agit de trouver la condition sous laquelle le déplacement du corps restera aussi petit qu'on voudra, pourvu que les vitesses initiales soient elles-mêmes assez petites. L'équilibre dans ce cas seulement sera stable. Pour abréger nous dirons avec M. Duhamel (Cours de Mécanique, 1846), à qui nous



allons emprunter le fond de cette théorie, que nous imprimons aux points du corps flottant des vitesses infiniment petites, que l'équilibre sera stable si le déplacement de ce corps reste toujours infiniment petit, et instable dans le cas contraire.

Après un temps quelconque le plan de flottaison AB suivant lequel le niveau

1^{re} Division.

Cours de Mec. et Mach. ~ 22^e Feuille.

supérieure NN du liquide couvrait le corps flottant à pris une autre position, et nous nous proposons de démontrer que quelque rapprochée de NN qu'on suppose cette position, elle ne pourra pas être atteinte si les vitesses initiales sont assez petites.

Prenez pour la figure un plan de projection vertical et perpendiculaire à AB . Soient G le centre de gravité du solide, C le centre de gravité du volume ADB primitivement immergé, O axe horizontal tracé dans le plan AB par le centre de gravité de cette section Ω l'aire de cette même section AB ; la distance $GC = a$; V le volume ADB ; $\frac{\Pi}{\rho}$ la densité du liquide; par conséquent $\frac{\Pi V}{\rho}$ la masse du solide et ΠV son poids.

Introduisons comme variables infiniment petites: 1° la distance ξ de O au plan NN ; 2° l'angle θ de GC avec la verticale ou de AB avec l'horizon. Une autre variable auxiliaire qui disparaîtra est la distance z_1 de G à NN .

À l'instant où le corps est supposé occuper la position ainsi définie, l'accroissement $\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2$ de sa puissance vive est égal au travail des forces depuis l'instant initial.

Le travail de la pesanteur est (161) égal à $\Pi V z_1$, moins une constante initiale.

Le travail de la pression ou poussée du liquide, équivalente à une force à chaque instant égale au poids du liquide déplacé et appliquée en son centre de gravité peut se remplacer par quatre travaux; savoir: trois travaux négatifs dus à la partie ADB , à la tranche horizontale $LMM'L'$ et à la partie BOM' , et un travail positif à déduire des trois parties précédentes pour la partie AOL' .

Or, pour ADB le travail de la pression est $-\Pi V(z_1 - a \cos \theta)$ ou $-\Pi V(z_1 - a + \frac{a\theta^2}{2})$ ou enfin $-\Pi V(z_1 + \frac{a\theta^2}{2})$ plus une constante initiale. Si G était au-dessus de C , le signe de a changerait.

Pour la tranche $LMM'L'$ qu'on peut considérer comme cylindrique, ξ étant infiniment petit, le travail des pressions du liquide est égal à $-\frac{1}{2} \Pi \Omega \xi^2$; c'est la somme des produits des poids des molécules liquides qui rempliraient la tranche, multipliés par la distance qu'elles auraient parcourue pour venir du plan NN à leurs positions dans cette tranche.

Pour la partie $OM'B$, décomposons-la en éléments prismatiques verticaux ayant pour bases les éléments de l'aire projetée en OB . Soient $d\alpha$ un de ces éléments, et y la hauteur d'un prisme à la distance x de la droite O . Le volume du prisme est donc $y d\alpha \cos \theta$ ou $x d\alpha \sin \theta \cos \theta$ qu'on peut remplacer par $x \theta d\alpha$; et le travail de la pression, relatif à cet élément prismatique, s'obtient en multipliant son volume par Π et par la distance $\xi + \frac{1}{2} x \sin \theta$ de son milieu au plan NN . C'est donc $-\Pi x \theta d\alpha (\xi + \frac{1}{2} x \theta)$, expression qu'il faut intégrer dans l'étendue de OB .

Mais avant de faire cette somme, on remarque que la partie AOL' en donne une qu'il faut ajouter et dont les éléments sont de la forme $\Pi x' \theta d\alpha (\xi - \frac{1}{2} x' \theta)$; c'est ce qui

revient à dire qu'il faut intégrer l'expression $-\Pi x \theta d\alpha (\xi + \frac{1}{2} x \theta)$ dans toute l'étendue AB . C'est donc $-\Pi \theta \xi \int x d\alpha - \frac{1}{2} \Pi \theta^2 \int x^2 d\alpha$. La droite O passant par le centre de gravité de la section AB , on a $\int x d\alpha = 0$, et $\int x^2 d\alpha$ est le moment d'inertie I_0 de laire de cette section par rapport à la même droite. Le travail des pressions, pour les deux parties $OM'B$, $OL'A$ est donc $-\frac{1}{2} \Pi \theta^2 I_0$.

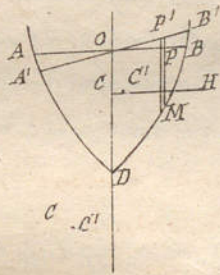
L'équation du travail applicable au corps flottant est par conséquent

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = \Pi V z_1 - \Pi V (z_1 + \frac{\alpha \theta^2}{2}) - \frac{1}{2} \Pi \Omega \xi^2 - \frac{1}{2} \Pi \theta^2 I_0 + \text{const.}$$

ou
$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = -\Pi \Omega \xi^2 - \frac{1}{2} \Pi (I_0 + \alpha V) \theta^2 + \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Conséquences de cette équation. Lorsque $I_0 + \alpha V$ est positif, c'est-à-dire si C est au-dessous de C' , ou si étant au-dessus il en est à une distance moindre que la plus petite valeur de $\frac{I_0}{V}$, l'équilibre est stable, car quelque petites que soient les valeurs qu'on veuille assigner aux quantités ξ et θ , elles ne pourront pas être atteintes, à moins qu'on ne donne à la puissance vive initiale $\Sigma \frac{1}{2} m v_0^2$ une valeur déterminée. On sait d'ailleurs qu'il y a dans le plan AB deux positions principales de la droite O auxquelles répondent le maximum et le minimum de I_0 .

430. — Le point situé au-dessous du centre des pressions C à la distance $\frac{I_0}{V}$ s'appelle métacentre probablement à cause de son analogie avec le centre d'une sphère non homogène flottante, centre au-dessous duquel doit être son centre de gravité pour la stabilité. Le métacentre jouit d'une propriété remarquable: Si l'on considère un corps flottant ADB symétrique par rapport à un plan vertical OD , et qu'on le fasse mouvoir parallèlement à un autre plan vertical perpendiculaire au premier, de manière que le volume de la partie plongée ne change pas de grandeur en changeant de position et de figure, le centre de gravité C de cette partie décrit dans le corps flottant une courbe dont le centre de courbure, pour le point C correspondant à l'équilibre, est le métacentre relatif à la rotation dont il s'agit.



Soient OB et OC les axes rectangulaires des x et des y , V le volume ADB . Les coordonnées y , et x , du centre de gravité C sont

$$y_1 = \frac{1}{V} \int y^2 d\alpha, \quad x_1 = \frac{1}{V} \int xy d\alpha = 0$$

Les coordonnées du centre de gravité C' répondant à un plan de flottaison $A'B'$ voisin, en faisant $PP' = z = x\theta$ sont

$$y'_1 = \frac{1}{V} \int (y+z) \left(\frac{y-z}{2} \right) d\alpha = \frac{1}{V} \int \frac{y^2 d\alpha}{2} - \frac{\theta^2}{2V} \int x^2 d\alpha = y_1 - \frac{I_0 \theta^2}{2V}$$

$$x'_1 = \frac{1}{V} \int x(y+z) d\alpha = \frac{1}{V} \int xz d\alpha = \frac{I \theta}{V}$$

Donc dans le voisinage de C la courbe CC' se confond avec celle dont les coordonnées rapportées aux axes CO, CH, seraient

$$y = \frac{I_0 \theta^2}{2V} \quad \text{et} \quad x = \frac{I_0 \theta}{V} \quad \text{d'où} \quad y = \frac{V}{2I_0} x^2$$

parabole dont le rayon de courbure à l'origine est $(1 + \frac{dy}{dx})^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{I_0}{V}$

§ 5. — Du calcul de la hauteur des montagnes d'après les observations barométriques.

431. — Lorsque l'atmosphère est en repos relativement à la terre, la pression qu'elle exerce en un lieu déterminé sur une surface d'un mètre carré est égale au poids d'une colonne cylindrique verticale d'air, ayant un mètre carré de section droite et s'élevant depuis le point dont il s'agit jusqu'à la limite supérieure de l'atmosphère; pour parler avec plus de précision, cette pression est la résultante de l'attraction totale de la terre sur la colonne ainsi définie et des forces centrifuges qu'il faut appliquer à ses éléments pour pouvoir la considérer comme étant en équilibre.

La pression atmosphérique en un lieu est immédiatement connue au moyen du baromètre, et diminue à mesure que ce lieu est plus élevé. C'est la idée de se servir du baromètre pour trouver la différence de niveau de deux lieux d'observation.

432. — Si le poids de l'air par unité de volume était constant, en appelant Π ce poids, z la différence de niveau de deux points de l'atmosphère, P_0 et P_1 les pressions par unité de surface en ces deux points, h_0 et h_1 les hauteurs barométriques correspondantes ramenées à la température zéro, Π_M le poids de l'unité de volume du mercure à cette température, on aurait

$$P_0 = P_1 + \Pi z, \quad P_0 = \Pi_M h_0 \quad \text{et} \quad P_1 = \Pi_M h_1 \quad \text{d'où} \quad z = \frac{\Pi_M}{\Pi} (h_0 - h_1).$$

En admettant pour Π_M sa valeur 13598^{kg} , si l'on adoptait par exemple Π le poids de l'air sec sous la pression moyenne atmosphérique et à 0° , poids qui est de $1,293^{\text{kg}}$, on trouverait qu'à chaque millimètre de différence de hauteur barométrique $h_0 - h_1$, répondrait une différence de niveau z de $10,46^{\text{m}}$. En faisant, dans la formule

$$h_1 = 0 \quad \text{et} \quad h_0 = 0,76,$$

on trouverait que la hauteur totale de l'atmosphère serait de $10460 \times 0,76$ ou 7950^{m} .

433. — Mais l'hypothèse à laquelle nous venons de nous arrêter un moment, est trop loin de la vérité pour conduire à des résultats approximatifs, si ce n'est dans le cas de petites différences de niveau. Dans toute autre circonstance, il faut avoir égard, comme

nous allons le faire, à la variation de densité de l'air par suite du changement de pression et de température. Nous négligerons seulement la variation de la pesanteur due à l'accroissement de la distance au centre de la terre, et à l'augmentation de la force centrifuge, ce qui est admissible quand les hauteurs au-dessus du niveau de la mer ne sont pas très-considérables, et ce qui, dans tous les cas, n'entraîne qu'une faible erreur.

Soit P la pression par mètre carré en un point M , $P + dP$ la pression en un point M' supérieur à M de la distance verticale dz . On a

$$dP = -\Pi dz,$$

en désignant par Π le poids de l'air rapporté au mètre cube dans la tranche MM' ou au point M , sauf une différence qui disparaît à la limite. Ce poids Π est une fonction de P , de la température τ , et de la densité tabulaire du gaz, laquelle varie suivant la quantité de vapeur d'eau que contient l'atmosphère au point considéré. Pour simplifier, on suppose cette densité tabulaire constante; mais attendu que l'atmosphère contient d'autant plus d'eau que sa température est plus élevée, ce qui diminue son poids par unité de volume, toutes choses égales d'ailleurs, on a égard à cette circonstance en augmentant un peu le coefficient de dilatation et le faisant, d'après Laplace, égal à 0,004 au lieu de 0,00366.

On peut ainsi poser, en désignant par K une constante convenable,

$$\Pi = \frac{P}{K(1+0,004\tau)}$$

et par conséquent $dP = -\frac{1}{K(1+0,004\tau)} P dz$ ou $dz = -K(1+0,004\tau) \frac{dP}{P}$.

Pour intégrer, il faudrait connaître la loi suivant laquelle la température τ varie soit avec la hauteur z soit avec la pression. Faute de cette connaissance, on substitue à la température variable une température moyenne arithmétique entre celle τ_0 et τ_1 qui ont lieu aux deux points dont il s'agit d'obtenir la différence de niveau. Ainsi l'on fait

$$\tau = \frac{1}{2}(\tau_0 + \tau_1).$$

Dès lors l'intégration de la dernière équation différentielle donne, en appelant Z cette différence, P_0 la pression au point inférieur, P_1 la pression au point supérieur

$$Z = 2,3026 K [1+0,002(\tau_0 + \tau_1)] \log \frac{P_0}{P_1}.$$

Le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ est égal, quand on néglige la variation de la pesanteur, au rapport des hauteurs barométriques ramenées à une même température; de sorte que si l'on appelle h_0 et h_1 les hauteurs du baromètre observées aux deux stations, et si l'on désigne par T_0 et T_1 les températures du mercure à l'instant de l'observation, on a,

1^{ère} Division.

Cours de Méc. et Mach. - 2^{de} Partie.

la dilatation cubique du mercure étant de $\frac{1}{5550}$ par degré centigrade :

$$P_0 : P_1 = \frac{h_0}{1 + \frac{T_0}{5550}} : \frac{h_1}{1 + \frac{T_1}{5550}} \text{ ou } \frac{P_0}{P_1} = \frac{h_0 (5550 + T_1)}{h_1 (5550 + T_0)}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer, dans l'expression ci-dessus de Z , le coefficient K , et c'est ce qu'on peut faire très approximativement par le calcul. En supposant l'air sec à la température zéro, pesé à la surface de la terre et à la latitude de Paris, on aurait

$$\Pi = 1,300 = \frac{10,334}{K} \text{ d'où } K = \frac{10334}{1,3} \text{ et } 2,3026 K = 18304.$$

Mais des observations trigonométriques et barométriques faites par M. Ramond dans le midi de la France ont fait connaître que pour cette latitude le coefficient numérique de la formule devrait être 18393, et que par cette augmentation on rectifiait avec l'exactitude désirable les légères erreurs de la théorie précédente. La formule devient donc

$$Z = 18393 \left[1 + 0,002 (T_0 + T_1) \right] \log \frac{h_0 (5550 + T_1)}{h_1 (5550 + T_0)}$$

434. — A cette formule M. Babinet a proposé d'en substituer une qui dispense de l'emploi des logarithmes et qui s'obtient, en remarquant que dans l'intégrale définie $\int \frac{dP}{P}$ entre deux limites P_1 et P_0 dont le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ diffère peu de l'unité ; on peut sans erreur notable remplacer le dénominateur variable P par sa valeur

moyenne constante $\frac{1}{2} (P_0 + P_1)$ ce qui donne $\int \frac{dP}{P} = \frac{P_0 - P_1}{\frac{1}{2} (P_0 + P_1)}$, au lieu de $2,3026 \log \frac{P_0}{P_1}$.

En fait lorsqu'on a $\frac{P_0}{P_1} = 1,1$ on trouve $\frac{2(P_0 - P_1)}{P_0 + P_1} = 0,09524$ et $\log. \text{ hyp. } \frac{P_0}{P_1} = 0,09531$. Par ce remplacement la formule précédente devient

$$Z = 15964 \left[1 + 0,002 (T_0 + T_1) \right] \frac{P_0 - P_1}{P_0 + P_1}$$

et en augmentant un peu le coefficient pour compenser l'infériorité de la fraction approximative substituée au logarithme on peut remplacer 15964 par 16000.

Chapitre 2. - Hydraulique théorique et expérimentale.

§ 1. - Du mouvement permanent d'un liquide dans le cas où les frottements peuvent être négligés.

435. - Mouvement permanent. - Un courant est parvenu à l'état de mouvement permanent ou de régime permanent lorsque sa vitesse considérée en chaque point géométrique et immobile de l'espace qu'il traverse, reste, aux divers instants qui se succèdent, constante en grandeur et en direction, quoique chaque molécule du fluide puisse avoir un mouvement varié.

436. - Dans un liquide en mouvement permanent, la pression varie d'un point à un autre suivant une loi qui peut être difficile à déterminer. Mais il en est autrement dans quelques cas simples pour lesquels on admet en pratique les règles suivantes, qui supposent que dans une portion du liquide n'ayant pas une grande étendue le frottement des molécules les unes sur les autres peut quelquefois être négligé. Cette hypothèse est confirmée par l'expérience et sera expliquée plus tard par l'étude des effets du frottement dans les conduites d'eau et dans les canaux découverts.

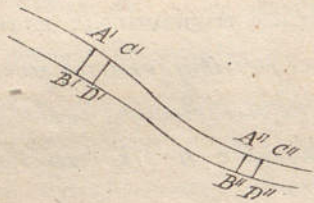
1^{ère} Règle. Si un courant se compose de filets liquides dont le mouvement soit rectiligne et sensiblement uniforme, les pressions de leurs molécules entre elles en vertu de la pesanteur et abstraction faite des frottements, suivent les mêmes lois que dans l'état de repos du liquide, car les forces qui sollicitent chaque filet en mouvement uniforme satisfont aux conditions de l'équilibre. Ainsi 1^o si deux points MM' assez peu éloignés l'un de l'autre pour que le frottement dans l'intervalle soit négligeable, ont la différence de niveau z , que la pression par mètre soit P au point supérieur M et P' au point M' , on a $P' = P + \Pi z$, même quand les points M et M' n'appartiennent pas à un même filet; 2^o si l'on imagine dans le courant une section plane peu étendue dont l'aire soit A et dont le centre de gravité soit à la hauteur H au dessous du point où la pression par mètre est P , la pression totale sur la section A est $A(P + \Pi h)$ et la pression moyenne est $P + \Pi h$, celle qui a lieu au centre de gravité de la section.

2^{ème} Règle. - Les mêmes lois ont encore lieu dans un liquide ayant des mouvements quelconques, mais très-lents; car cette lenteur n'a lieu que dans un état très-voisin de l'équilibre.

3^{ème} Règle. - Si dans une certaine section transversale du courant les filets

ont des vitesses parallèles, égales ou inégales, et qu'immédiatement après cette section les filets décrivent à peu près les paraboles que chaque molécule parcourrait en vertu de sa vitesse et de son poids si elle était isolée dans le vide, la pression à l'intérieur du liquide est la même qu'à l'extérieur. Car puisque les molécules se meuvent comme si elles n'étaient soumises qu'à l'action de la pesanteur les pressions latérales que chaque filet éprouve se font équilibre deux à deux et sont par conséquent toutes égales à la pression extérieure.

437. — Théorème de Daniel Bernoulli applicable à un liquide pesant sans frottement.



Soit $A'B'B''A''$ un espace occupé par une portion de liquide en mouvement permanent, de manière qu'à chaque instant de nouvelles molécules entrent en $A'B'$ tandis que d'autres sortent en $A''B''$. Nous admettons les hypothèses suivantes :

1^o Une même vitesse V' est commune aux molécules liquides qui traversent le plan $A'B'$ à peu près normalement, à ce plan qu'on peut au besoin supposer d'une très-petite étendue;

2^o Il en est de même de la vitesse V'' normale à l'autre plan $A''B''$;

3^o Les molécules liquides devant glisser les unes sur les autres pour passer de la section $A'B'$ dans la section différente $A''B''$, on suppose que le frottement qui en résulte peut être négligé;

4^o On néglige également le frottement du filet liquide considéré contre les corps solides ou liquides qui l'environnent.

Cela posé, il s'agit de calculer les vitesses V' , V'' en fonction des quantités qui peuvent les déterminer.

Soit Ω' l'aire de la section $A'B'$ et $\Omega'P'$ la pression totale que le liquide, d'un côté du plan éprouve de la part du liquide de l'autre côté. P' est ainsi la pression moyenne par unité de surface sur le plan $A'B'$, et d'après la première règle (436), on admet que cette pression moyenne est égale à la pression qui a lieu par unité de surface au centre de gravité de la section $A'B'$.

Soient Ω'' et $\Omega''P''$ les quantités analogues pour le plan $A''B''$.

Soient Π le poids du liquide par mètre cube, et h la distance du centre de gravité de $A''B''$ au-dessous de celui de $A'B'$.

Appelons θ un temps très-petit pendant lequel les molécules liquides du plan $A'B'$ passent au plan très-voisin $C'D'$, et celles de $A''B''$ passent en $C''D''$.

Le volume du liquide qui, dans le temps θ traverse la section $A'B'$ est exprimé par $\Omega' \cdot \overline{A'C'}$ ou $\Omega'V'\theta$; c'est le volume de la tranche $A'B'D'C'$, égale au volume $\Omega''V''\theta$ de la tranche $A''B''D''C''$ à cause de la permanence du mouvement, et de l'incompressibilité du liquide. Si donc nous représentons par Q le volume écoulé

Bernoulli

par unité de temps, nous auront

$$Q\theta = \Omega'V'\theta = \Omega''V''\theta \quad \text{ou} \quad Q = \Omega'V' = \Omega''V'' \dots \dots \dots [1]$$

Pour trouver une autre relation entre V' et V'' , appliquons le théorème du travail (280) au système composé de tous les points matériels qui, d'abord compris entre les plans $A'B'$ et $A''B''$ se trouvent, à la fin du temps θ , compris entre $C'D'$ et $C''D''$. On voit d'abord que l'accroissement de la puissance vive de tout le système pendant ce temps est

$$\frac{\Pi Q\theta}{2g} (V''^2 - V'^2)$$

car, à cause de la permanence, la puissance vive des parties comprises entre $C'D'$ et $A''B''$ est la même à l'instant initial et à l'instant final du temps θ .

Pendant le même temps θ , le travail de la pression $P'\Omega'$ sur le plan mobile de AB' en $C'D'$ est $P'\Omega' \cdot \overline{A'C}$ ou $P'Q\theta$; celui de la pression résistante $P''\Omega''$ sur le plan mobile de $A''B''$ en $C''D''$ est $-P''\Omega'' \cdot \overline{A''C''}$ ou $-P''Q\theta$.

Le travail de la pesanteur prend également une expression très simple. En effet (281) le travail de la pesanteur sur un système matériel quelconque donné ne peut varier qu'avec la quantité dont s'abaisse ou s'élève son centre de gravité. Or le déplacement du centre de gravité du système considéré serait le même si, au lieu du mouvement réel qui a lieu, c'était seulement la tranche $A'B'D'C'$ qui se transportât en $A''B''D''C''$, le reste demeurant immobile. Le travail dont il s'agit est donc $\Pi Q\theta h$.

Cela posé, d'après le théorème du travail, en négligeant suivant l'hypothèse le travail des actions mutuelles et celui des frottements des corps environnants, on a

$$\frac{\Pi Q\theta}{2g} (V''^2 - V'^2) = P'Q\theta - P''Q\theta + \Pi Q\theta h$$

ou

$$\frac{V''^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = \frac{P'}{\Pi} - \frac{P''}{\Pi} + h \dots \dots \dots [2]$$

L'énoncé de cette formule, dans laquelle $\frac{P'}{\Pi}$ et $\frac{P''}{\Pi}$ sont (413) les hauteurs représentant les pressions P' et P'' , est le théorème de D. Bernoulli. Il suppose qu'on néglige les frottements, ce qui n'est pas permis quand il s'agit d'un courant où s'opèrent certains changements brusques de vitesse, ou bien d'un courant d'une grande étendue, soit à ciel ouvert, soit dans un tuyau comme nous le verrons bientôt.

438. — On peut faciliter l'énoncé et le souvenir du théorème de Bernoulli en y introduisant les notions de colonnes et de niveaux piésométriques.

Si on imagine que d'un point A d'un liquide en repos on fasse partir un tube qui s'élève et aboutisse au vide, comme un tube barométrique, d'ailleurs droit ou courbe, vertical ou incliné, la différence de niveau du premier point et du sommet

1^{ère} Division.

Cours de Méc. et Mach. — 24^e Feuille.

B B

Ainsi quand on connaîtra les aires $\Omega, \Omega', \Omega''$ et les ordonnées z, z', z'' , on aura entre les trois vitesses et les trois pressions quatre équations qui permettront de déterminer quatre de ces quantités en fonction des deux autres.

Supposons par exemple que les inconnues soient les trois vitesses et la pression P' . On trouvera d'abord, sans avoir égard à la section intermédiaire, et en éliminant V

$$V'' = \sqrt{2g \left(z - z'' + \frac{P'}{\Pi} - \frac{P''}{\Pi} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega''}{\Omega} \right)^2}}$$

Or, il importe de remarquer que cette formule est soumise à une cause d'erreur et à une exception.

1^o On verra bientôt que dans une grande conduite le frottement a une influence considérable. Mais même dans un vase peu étendu, un étranglement, par exemple en $A'B'$ peut être tel que, pour fournir la dépense donnée par le calcul la vitesse du liquide doive être très-grande non seulement au passage de la plus petite section, mais dans l'étendue de son raccordement avec le reste du vase. Il n'est plus permis alors de négliger les frottements.

2^o En calculant la pression P' , dans le problème précédent, on peut la trouver négative, ce qui serait incompatible avec la fluidité. Il n'est pas nécessaire d'exécuter les calculs pour s'assurer que ce cas peut se rencontrer, car on voit qu'après avoir calculé V'' d'après la formule ci-dessus, en la substituant dans l'équation

$$V'\Omega' = V''\Omega$$

On pourrait, en supposant la section Ω' assez petite, trouver la vitesse V' aussi grande qu'on voudrait et telle, par conséquent, que $\frac{V'^2}{2g} + z'$ fût supérieur à $\frac{V''^2}{2g} + \frac{P''}{\Pi} + z''$.

Cette considération prouve que, même abstraction faite des frottements, si l'on se donne les ordonnées z et z' , la pression P en C , et le rapport $\frac{\Omega'}{\Omega}$ la vitesse V' a une limite qu'elle ne peut dépasser quelle que soit la disposition du vase à la suite de la section $A'B'$. Car de $\frac{P'}{\Pi} > 0$ on conclut

$$\frac{V'^2}{2g} \left(1 - \frac{\Omega'^2}{\Omega^2} \right) < z - z' + \frac{P'}{\Pi}$$

cette équation peut s'écrire $\frac{V'^2 \Omega'^2 - V''^2 \Omega''^2}{2g \Omega^2} < z - z' + \frac{P'}{\Pi}$
 ou $\frac{V'^2}{2g} - \frac{V''^2}{2g} < z - z' + \frac{P'}{\Pi}$ ou $\frac{V'^2}{2g} + z' < \frac{V''^2}{2g} + z'' + \frac{P''}{\Pi}$

On comprend même aisément que si l'on voulait appliquer cette théorie et disposer le vase à la suite de la section Ω' de manière à obtenir le maximum de vitesse et de dépense, le résultat expérimental pourrait être de beaucoup inférieur à la limite ci-dessus indiquée. Cela s'explique:

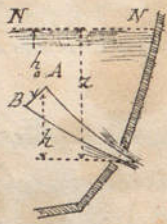
1^o Par les frottements;

2^o Parce que l'hypothèse d'une pression nulle ne peut jamais se réaliser

à cause de l'air et de la vapeur qui se dégagent de l'eau à mesure que la pression diminue.

§ 2. - Écoulement par un petit orifice en mince paroi.

441. - Vitesse.



Un vase est entretenu constamment plein d'un liquide homogène au-dessous d'un plan NN horizontal, où la pression par unité de surface est P_n . Ce vase est percé d'un orifice en mince paroi, c'est-à-dire qu'en cet endroit l'épaisseur que traverse le liquide est moindre que la moitié de la plus petite dimension de l'ouverture. L'aire de cet orifice est assez petite pour que la vitesse du liquide, dans l'intérieur du vase, à une certaine distance de l'orifice soit négligeable en comparaison de la vitesse de sortie du liquide, qui en dehors du vase supporte la pression P , laquelle est par exemple la pression de l'atmosphère.

Dans ces circonstances l'expérience prouve que le régime permanent s'établit très-promptement et que la veine d'écoulement diminue de section, à partir de l'orifice jusqu'à une petite distance où cette section devient sensiblement constante sur une certaine étendue. Ce phénomène est appelé contraction de la veine fluide. Il est dû à ce que le liquide affluant à toute part de l'intérieur du vase vers l'orifice, les filets qui y coulent à peu près parallèlement à la paroi ne peuvent brusquement lui devenir perpendiculaires. On peut d'ailleurs admettre que tous les filets fluides, à l'endroit de la contraction, se meuvent parallèlement entre eux et décrivent ensuite à peu près les mêmes paraboles qu'ils parcourraient s'ils étaient isolés.

Il résulte de ces faits et hypothèses :

- 1° Que si l'on imagine dans le liquide un des filets dont se compose le courant, la vitesse V de la section AB (voir la figure) de ce filet est négligeable;
- 2° Que la pression sur ce même filet à l'intérieur de la veine contractée est P comme à l'extérieur
- 3° Que la pression en AB est $P_n + \pi h_0$
- 4° Que par conséquent en faisant $h_0 + h = z$, et en appelant v la vitesse à l'endroit de la contraction, le théorème de Bernoulli donne

$$v = \sqrt{2g \left(z + \frac{P_n}{\pi} - \frac{P}{\pi} \right)}$$

Cette formule a été vérifiée par l'expérience, particulièrement dans le cas expé-

riement par Toricelli où le plan NN et la veine d'écoulement sont en contact avec l'atmosphère, car auquel $P_n = P$. En mesurant d'une part la dépense Q par seconde et d'autre part l'aire de la section contractée Ω , on a trouvé la vitesse moyenne $\frac{Q}{\Omega}$ inférieure de deux ou trois centièmes seulement à la vitesse théorique $\sqrt{2gz}$.

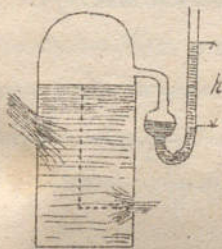
Un autre moyen employé avec succès de constater la vitesse à l'endroit de la contraction consiste à mesurer l'amplitude du jet parabolique du liquide jaillissant.

442. — La pression P_n dans le plan NN situé à la hauteur z au-dessus du centre de la section contractée peut être différente de P .

Exemples: 1^{er} — Si le plan NN , outre la pression atmosphérique supporte au moyen d'un piston un poids de P kilogrammes, en désignant par a l'aire du piston on a

$$v = \sqrt{2g \left(z + \frac{P}{a\Pi} \right)}$$

2^e — Si la pression additionnelle sur le plan NN est représentée par une colonne piésonométrique d'un liquide quelconque, d'une hauteur h' , on a, en désignant par Π' le poids du mètre cube de ce liquide,



$$P_n = P + \Pi' h' \quad \text{et par conséquent} \quad v = \sqrt{2g \left(z + \frac{\Pi'}{\Pi} h' \right)}$$

3^e — Si l'orifice en mince paroi par lequel le liquide s'échappe, au lieu d'être dans l'air, est noyé au-dessous de la surface d'un grand bassin rempli du même liquide, on voit aisément que si la surface du vase et celle du bassin inférieur sont en contact avec l'atmosphère la quantité $z + \frac{P_n}{\Pi} - \frac{P}{\Pi}$ est la différence de hauteur des deux niveaux, à quelque profondeur que l'orifice soit immergé.

443. — Dépense par seconde. — Pour calculer la dépense par seconde d'un petit orifice donné en mince paroi, il faudrait pouvoir déterminer l'aire Ω de la section contractée, quand on connaît les dimensions de l'orifice et la charge z . Jusqu'à présent la théorie a été impuissante à cet égard. L'expérience a appris que lorsque la paroi à l'intérieur du vase étant plane dans le voisinage de l'orifice, le liquide peut arriver de toutes parts à celui-ci par filets symétriques par rapport à son axe de figure, en appelant A l'aire de l'orifice, et K un coefficient fractionnaire presque constant et peu différent de 0,62, on a, pour la dépense par seconde, dans le cas où $P_n = P$,

$$Q = KA\sqrt{2gz}.$$

Beaucoup d'auteurs appellent le produit $A\sqrt{2gz}$ la dépense théorique de l'ori-

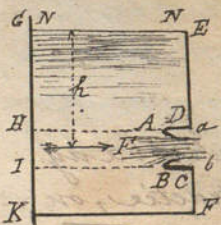
fice par suite d'une fautive théorie qui suppose que dans le plan même de l'orifice en mince paroi la vitesse devrait être $\sqrt{2gz}$ si le fluide n'éprouvait pas de frottement. On a vu plus haut que la contraction n'est pas due au frottement, et pour comprendre pourquoi la vitesse du liquide, à l'instant où il traverse le plan de l'orifice, est moindre que $\sqrt{2gz}$, il suffit de remarquer que dans cette section la pression moyenne par mètre est plus grande que la pression atmosphérique, parce que les filets de la veine ayant, en cet endroit, un mouvement curviligne exercent du dehors en dedans une pression additionnelle ou force centrifuge.

444. — Lorsque l'orifice n'est pas très-petit, si l'on prend pour z la charge sur le centre de gravité, le coefficient K varie suivant des lois que l'expérience seule fait connaître. Voir sur ce sujet les mémoires de MM. Poncelet et Lesbros dont les résultats sont résumés dans l'Œuvre Mémoire de Mécanique pratique de M. Morin. Le coefficient 0,62 paraît spécialement convenir aux orifices circulaires et aux orifices rectangulaires dont la base est double ou triple de la hauteur. Quant aux orifices carrés, le coefficient, lorsque la charge sur le centre de l'orifice excède $2\frac{1}{2}$ fois la hauteur, varie de 0,600 à 0,605.

Lorsque l'orifice n'est pas circulaire, on observe dans le jet un phénomène connu sous la dénomination d'inversion de la veine. Si par exemple l'orifice est carré, la section de la veine, à une distance du vase égale à $1\frac{1}{2}$ fois le côté de l'orifice, a une figure peu différente d'un carré, mais les diagonales en sont parallèles aux côtés de l'orifice. Cela paraît provenir de ce que, à l'endroit où les filets qui viennent des milieux des côtés tendent à devenir parallèles, ceux qui viennent des angles tendent encore à se rapprocher et obligent les premiers à s'écarter.

§ 3. — Ajutage rentrant de Borda.

445. — Voici un cas remarquable où non-seulement la vitesse, mais la contraction et la dépense se déterminent par le calcul. On suppose que l'orifice étant disposé comme l'indique la figure, la longueur AD du tube rentrant soit limitée de manière que la veine liquide sorte sans toucher la paroi intérieure de cet ajutage. L'orifice AB étant très-petit par rapport à la section horizontale du vase, la vitesse contre les parois verticales de celui-ci est très-petite, même en D et C , et la pression aux divers points de ces parois est partout celle qui aurait lieu dans l'état de repos. Donc la pression qu'exerce sur le liquide la paroi E, D, C, F qui entoure l'orifice étant projetée sur un axe perpendiculaire au plan vertical AB est partout la même que celle des parties G, H, I, K de la paroi G, K , et celle-ci exerce en outre en HI une pression $F = \Pi Ah$ (si l'on désigne par



A l'aire de l'orifice AB) plus la pression atmosphérique, qui agit également sur la veine $Aa bB$.

Cela posé, appliquons le théorème de la quantité de mouvement (278) au liquide qui, à un instant quelconque pris pour instant initial, est compris entre NN et $a b$ section faite à l'endroit de la contraction. Soit θ un temps pendant lequel ce liquide se déplace infiniment peu. Prenons l'axe de projection horizontal dans le sens de la vitesse de sortie en $a b$, celle-ci étant v , et l'aire de la section contractée étant Ω , la masse du liquide dépensé pendant le temps θ est $\frac{\pi \Omega v \theta}{g}$, et sa quantité de mouvement $\frac{\pi \Omega v^2 \theta}{g}$ est l'accroissement de la projection de la quantité de mouvement du système matériel considéré, attendu la permanence du régime dans l'intérieur du vase, et la direction verticale de la vitesse dans le plan NN . Quant aux impulsions horizontales des forces elles se réduisent à $F\theta$ ou $\pi A h \theta$, attendu que toutes les autres forces se détruisent en projection. Le théorème de la quantité de mouvement donne donc l'équation

$$\frac{\pi \Omega v^2 \theta}{g} = \pi A h \theta$$

et comme on a d'ailleurs, d'après le théorème de Bernoulli applicable à ce cas $v^2 = 2gh$, on en conclut $\Omega = \frac{1}{2} A$, et la dépense par seconde $Q = \frac{1}{2} A \sqrt{2gh}$

Ce dernier résultat est confirmé par une expérience de Borda. On voit que la démonstration précédente ne pourrait pas s'appliquer à un orifice ouvert immédiatement dans une paroi plane, parce que les filets glissant sur cette paroi avec une vitesse croissante aux approches de l'orifice y exercent une pression moindre que la pression hydrostatique. Il faudrait donc dans ce cas poser

$$F > \pi A h,$$

en continuant d'appeler F l'exces de la pression de la paroi totale CK sur la pression de la paroi opposée. On en conclurait

$$\Omega > \frac{1}{2} A \quad \text{et} \quad Q > \frac{1}{2} A \sqrt{2gh}$$

§ 4. — Orifices évasés à l'entrée, sans coursier
ou avec coursier à la sortie.

446. — Si, au lieu d'un orifice en mince paroi, on employait un ajutage $ABba$ ayant exactement la figure de la veine jaillissante jusqu'à la section contractée, on devrait obtenir, au moins dans le cas d'un petit orifice, la dépense $Q = \Omega \sqrt{2gx}$, en appelant Ω l'aire de l'orifice extrême $a b$, et x la charge sur le centre de gravité.

Pour un orifice en mince paroi, les dimensions AB , ab , CD de la veine sont entre elles comme les nombres 100, 79 et 39 selon Michelotti, et comme 10, 8, 5 selon Cytelwein.



En employant un ajutage de cette forme, Michelotti a trouvé la dépense

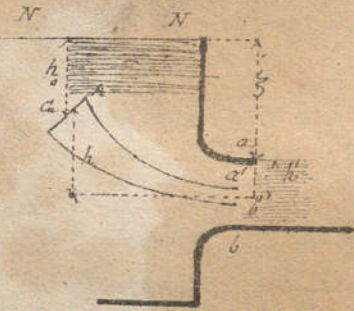
$$Q = 0,9845 \sqrt{2gz}$$

La nécessité d'un coefficient plus petit que l'unité s'explique par l'effet du frottement négligé dans la formule théorique et par l'action mutuelle des filets qui ne décrivant pas rigoureusement, à partir de la section ab , les paraboles qu'ils parcourraient s'ils étaient isolés dans le vide, exercent réellement les uns sur les autres une pression qui dépasse la pression atmosphérique.

Des ajutages appelés buses coniques ou pyramidales produisent des effets analogues.

447. — On augmente la dépense d'un orifice rectangulaire ouvert dans une paroi plane en disposant au dedans du vase une, deux ou trois autres parois planes perpendiculaires à la première et dont chacune empêche la contraction de son côté. Si les plans formaient un ajutage prismatique complet assez long pour que le liquide sortît à plein tuyau, et non comme dans l'ajutage de Poise, la dépense suivrait une loi qui sera étudiée plus loin.

448. — Supposons qu'un orifice vertical parfaitement évasé et rectangulaire soit suivi d'un canal ou courtois à ciel ouvert, tellement disposé que la veine conserve, à partir de la section ab , un mouvement rectiligne et uniforme (On verra bientôt qu'il suffit pour cela que le canal ait une pente qu'on apprendra à calculer). Admettons d'ailleurs que la vitesse dans le bassin d'amont soit négligeable.



Considérons un filet $ABB'a'$. En vertu de la 1^{re} Règle du N° 436, en désignant par P_a la pression atmosphérique en a et en NN , et faisant $aa' = h'$, on a pour la pression par unité de surface en $a'b'$, $P_a + \Pi h'$, tandis que la pression en AB est $P_a + \Pi h_0$.

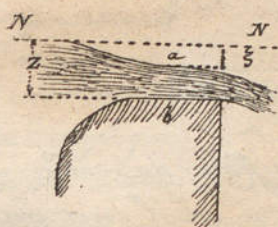
Le théorème de Bernoulli donne donc, pour la vitesse en $a'b'$ en négligeant celle qui a lieu en AB dans l'intérieur du vase,

$$\frac{v^2}{2g} = h + h_0 - h' = \zeta \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2g\zeta}$$

formule dans laquelle ζ est la charge sur le sommet a de l'orifice et non sur le centre

§ 5. - Écoulement par déversoir.

449. - Dans l'impossibilité de donner une théorie satisfaisante de l'écoulement d'un liquide par dessus un déversoir mince, nous traiterons la question suivante qui présente, avec l'autre, au moins de l'analogie.



Un bassin entretenu constamment plein jusqu'au niveau NN dépense le liquide affluant par dessus un barrage horizontal ou déversoir. On suppose que l'épaisseur de ce barrage soit telle que la surface du courant y devienne sensiblement horizontale sur une petite étendue dans laquelle par conséquent le liquide coule par filets à peu près parallèles. La hauteur Z du niveau NN au-dessus de la crête du déversoir est donnée. On néglige les frottements. On demande quelle est la dépense du liquide par mètre de largeur du déversoir, en supposant que dans le régime permanent la hauteur inconnue ξ du niveau NN au-dessus de la surface horizontale du courant en a soit celle qui convient à la plus grande dépense possible.

D'après le raisonnement employé dans le cas précédent, la vitesse en chaque élément de la section ab est $\sqrt{2g\xi}$. La dépense cherchée est donc $Q = (Z - \xi)\sqrt{2g\xi}$, quantité qui serait nulle si l'on supposait $\xi = 0$ ou $\xi = Z$. Entre ces deux valeurs de ξ il y en a une pour laquelle Q devient un maximum. On a dans ce cas

$$\xi = \frac{1}{3} Z \quad \text{et} \quad Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} Z \sqrt{2gZ} = 0,385 Z \sqrt{2gZ}.$$

Cette formule ne pourrait être employée dans les circonstances de l'énoncé sans une correction relative aux frottements; mais l'expérience prouve qu'appliquée aux déversoirs minces elle n'est pas aussi éloignée de l'exactitude qu'on pourrait le craindre.

En réalité si pour représenter la dépense par mètre de largeur de l'orifice, on pose la formule

$$Q = K Z \sqrt{2gZ} = 4,431 K Z \sqrt{Z};$$

Le coefficient K varie avec le rapport de la largeur de l'orifice à celle du canal supérieur. Des expériences faites d'abord par M. M. Poncelet et Lesbros en 1827 et continuées depuis par ce dernier, sur un orifice en forme de déversoir dont la largeur était de 0^m,20, tantôt avec contraction latérale tantôt sans cette contraction, ont donné des résultats dont nous extrayons ce qui suit:

Valeurs de Z	0 ^m ,02	0 ^m ,03	0 ^m ,04	0 ^m ,06	0 ^m ,08	0 ^m ,10	0 ^m ,14	0 ^m ,20	0 ^m ,32
Valeurs de K avec contraction latérale...	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385
" " sans contraction latérale...	0,473	0,459	0,449	0,442	0,434	0,434	0,434	0,432	0,428

Les derniers coefficients sont ceux qu'il paraît convenable d'adopter lorsque le déversoir a une grande étendue relativement à la charge Z , qui doit d'ailleurs excéder 0^m,03 à cause, surtout, de la difficulté de mesurer exactement une charge moindre.

450. — Cette formule et la théorie précédente supposent que l'eau n'a pas de vitesse sensible dans le bassin en amont de l'orifice. Si l'on supposait au contraire qu'elle eût une vitesse v dans le plan NN , il faudrait, d'après le théorème de Bernoulli, exprimer la dépense par

$$Q = (Z - \zeta) \sqrt{2g \zeta + v^2} = ((Z + h) - (\zeta + h)) \sqrt{2g(\zeta + h)}$$

en appelant h la hauteur due à la vitesse v . Or cette expression ne diffère de celle du cas précédent qu'en ce que $Z + h$ et $\zeta + h$ remplacent Z et ζ ; d'où il suit que le maximum de Q serait

$$0,385 (Z + h) \sqrt{2g (Z + h)}$$

On peut admettre, au moins comme une approximation, que, en égard à la vitesse v , la dépense par mètre est

$$Q = K \sqrt{2g} \left(Z + \frac{v^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}}$$

en donnant à K la valeur qui convient selon la contraction latérale.

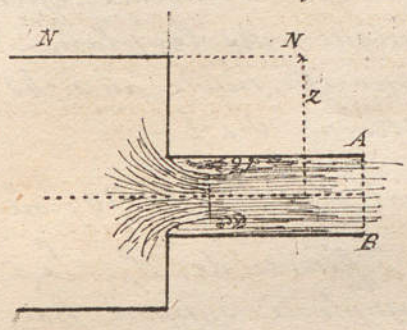
§ 6. - Ajutages cylindriques remplis par le liquide.

451. — Lorsqu'un orifice pratiqué dans une paroi plane est prolongé par un tuyau cylindrique d'une longueur au moins égale à une fois et demie le diamètre, la veine jaillissante n'est pas sensiblement contractée après sa sortie du tuyau; d'où il suit que si, en admettant que les filets qui la composent aient une même vitesse, il était en outre permis de négliger le travail moléculaire du liquide, on trouverait pour le volume Q dépensé à chaque seconde par un tuyau dont la section serait Ω , sous la charge z , $Q = \Omega \sqrt{2gz}$.

Or, l'expérience, quand la longueur du tuyau est de 2 à 3 fois le diamètre donne $Q = 0,82 \Omega \sqrt{2gz}$, dépense d'ailleurs plus forte que si l'ajutage n'existait pas, tandis que la vitesse est plus petite qu'elle ne serait.

La théorie rend compte de ce fait. Lorsque le liquide commence à s'écouler

par l'ajutage, la veine d'abord détachée de la paroi du tuyau entraîne en partie l'air qui l'entoure dans ce tuyau; l'air restant est dilaté et exerce une moindre pression sur la veine contractée; la vitesse de celle-ci s'accroît donc. Mais la pression de l'atmosphère subsistant à l'extérieur ralentit la veine à la suite de la contraction, et la fait par conséquent gonfler jusqu'à ce qu'elle rejoigne le tuyau et en suive la paroi.



L'air finit par être expulsé du tuyau et être remplacé par du liquide, ce qui n'empêche pas la contraction du liquide qui pénètre continuellement du vase dans le tuyau. La veine contractée est alors entourée d'une portion de liquide à l'état de remous, c'est-à-dire tournoyant lentement en dehors du courant, phénomène analogue à celui qui a lieu dans les rivières à l'aval des piles des ponts.

Cela étant, soit P_0 la pression par m. g. dans le plan NN' où la vitesse peut être négligée. Soient dans le plan A'B' où a lieu la plus grande contraction, v' la vitesse dans la veine contractée, Π' l'aire de la section de cette veine, P' la pression moyenne par mètre.

Depuis l'intérieur du vase jusqu'au plan de la contraction, le liquide coule sans mélange avec le remous; la formule de Bernoulli est applicable, et l'on a

$$\frac{v'^2}{2g} = z + \frac{P_0}{\Pi} - \frac{P'}{\Pi}; \dots \dots \dots [1]$$

mais entre les plans A'B' et AB il n'en est plus de même; il s'exerce sur le liquide dans cet intervalle un travail moléculaire négatif dont on se rend compte par les observations suivantes:

1°. Si une veine liquide arrive verticalement avec une vitesse V dans un vase en repos d'une plus grande section transversale et contenant déjà une quantité du même liquide, l'expérience constate que lorsque la profondeur du liquide contenu dans le vase est suffisante, le liquide affluent passe promptement au repos, sa surface supérieure restant sensiblement horizontale pendant qu'elle s'élève, ce qui prouve que les actions moléculaires, tant du liquide que du vase dont le mouvement vibratoire se transmet à sa surface et à l'air environnant, développent sur le système des molécules liquides dans l'espace un travail négatif égal à la puissance vive $\frac{1}{2}MV^2$ du liquide introduit pendant le même temps dans le vase.

2°. Si la veine ayant la vitesse V' le vase a, suivant la même direction, une vitesse V'' , le travail négatif des actions moléculaires ne dépendant que de leur mouvement relatif, puisqu'il est exprimé (280) par $\sum \int f dl$, est le même que si, le vase étant en repos, le liquide affluent avait la vitesse $V' - V''$; il est donc par seconde égale à $\frac{1}{2}M(V' - V'')^2$, la masse M étant celle qui, dans chaque seconde

passer de la vitesse V' à la vitesse V'' .

A l'aide de cette considération, il est facile d'appliquer le théorème de l'effet du travail au système liquide compris à un instant quelconque entre les plans $A'B'$ et AB , en imitant, sauf la modification indiquée, la marche suivie au n° 437. L'accroissement algébrique de la puissance vive pendant le temps θ est

$\frac{\pi Q \theta}{2g} (V^2 - V'^2)$. Le travail des pressions d'amont et d'aval est $(P' - P) Q \theta$; on désigne ici par P la pression dans le plan AB qui peut être différente de P_0 . Le travail de la pesanteur est nul, le tube étant pour plus de simplicité supposé horizontal. Enfin on vient de voir que, le travail résistant moléculaire est $\frac{\pi Q \theta}{2g} (V' - V)^2$.

On a donc, en divisant tous les termes par $\pi Q \theta$,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = \frac{P'}{\pi} - \frac{(V' - V)^2}{2g}, \dots \dots \dots [2]$$

Cette quantité $\frac{(V' - V)^2}{2g}$, qui provient du travail résistant dû à l'agitation du liquide s'appelle *perte de charge* parce qu'elle produit le même effet qu'une diminution de la hauteur $\frac{P'}{\pi}$ représentant la pression d'amont sur le liquide considéré.

Pour éliminer V' soit K le coefficient de la contraction en $A'B'$. On en conclut $V' = \frac{V}{K}$, d'après quoi les équations [1] et [2] donnent

$$\frac{V^2}{2g} \left(1 + \left(\frac{1}{K} - 1\right)^2\right) = z + \frac{P_0}{\pi} - \frac{P}{\pi},$$

ou en représentant par ζ la différence de niveau piérométrique $\dots z + \frac{P_0}{\pi} - \frac{P}{\pi}$

correspondante aux sections NN, AB , et en substituant pour K sa valeur 0,62,

$$1,376 \frac{V^2}{2g} = \zeta \quad \text{d'où} \quad V = 0,85 \sqrt{2g \zeta}$$

L'expérience ne donne que 0,82 au lieu de 0,85. Cette petite différence peut s'expliquer par l'influence des frottements du vase et aussi par quelque inégalité de vitesse dans les filets de la veine à son passage en AB .

De $V = 0,82 \sqrt{2g \zeta}$ on tire $\zeta = 1,487 \frac{V^2}{2g}$,

résultat qu'il importe de retenir, savoir que la charge ζ est environ moitié en sus de la hauteur due à la vitesse moyenne de sortie; de sorte que $\frac{1}{2}$ de ζ est une *perte de charge due aux frottements*, les deux autres tiers étant la hauteur due à la vitesse V .

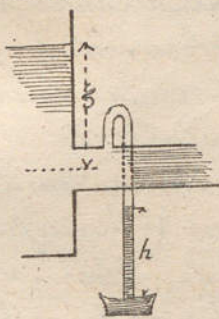
Il faut bien remarquer que cette perte n'a pas ou presque pas lieu pour

Les orifices en mince paroi qui pour une aire et une charge donnée produisent une moindre dépense de liquide que les ajutages cylindriques, dans le rapport de 62 à 82, mais une plus grande vitesse dans le rapport de 98,5 à 82.

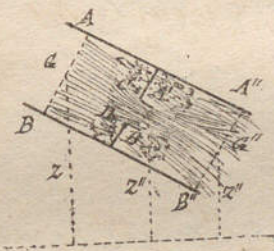
452. — Pression à l'endroit de la contraction; expérience de Venturi. Pour trouver P' prenons la valeur expérimentale $N = 0,82 \sqrt{2gZ}$ d'où $N' = \frac{0,82}{0,62} \sqrt{2gZ}$ et substituons dans l'équation [1]; nous obtenons

$$\frac{P - P'}{\Pi} = \left\{ \left(\frac{82}{62} \right)^2 - 1 \right\} = 0,75 Z$$

Ce résultat est confirmé par une expérience très-remarquable de Venturi. A un cylindre de 0^m,0406 de diamètre et de 0,122 de longueur en un point situé à 0^m,018 de son origine, il a adapté un tube de verre recourbé dont l'autre extrémité plongeait dans un vase contenant de l'eau colorée. La charge Z du bassin supérieur sur l'axe de l'ajutage étant de 0^m,88 l'eau aspirée s'est élevée dans le tube de verre à une hauteur h de 0^m,65.



453. — Perte de charge due à un étranglement. Supposons qu'un tuyau cylindrique $ABB''A''$ soit interrompu par une cloison très-mince percée d'un orifice CD . Un courant permanent y est établi; il traverse par filets parallèles et avec une même vitesse V les deux sections égales AB , $A''B''$, l'une avant l'autre après l'étranglement. L'aire commune de ces sections transversales est Ω . L'aire de l'orifice CD est α . Quelle est la relation entre les pressions moyennes P en AB , et P'' en $A''B''$ dont la différence n'est pas simplement $Z - Z''$ parce que les conditions du théorème de Bernoulli ne sont pas ici réalisées?



La théorie du n° 451 s'applique immédiatement à cette question. De AB en $A''B''$ le liquide coule sans mélange avec le remous dans lequel le liquide perd rapidement la vitesse N qu'il a en $A''B''$ pour reprendre en $A''B''$ celle qu'il avait en AB . Il y a donc dans cet intervalle et pendant un temps θ un travail négatif exprimé par $\frac{\Pi Q \theta}{2g} (N - V)^2$; de sorte qu'en appliquant le théorème du travail comme au n° 437 mais avec cette modification, on trouve après suppression du facteur commun $Q\theta$,

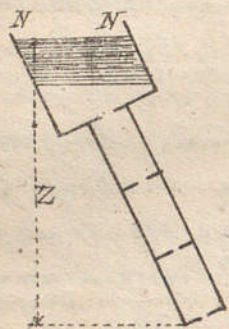
$$0 = \frac{P}{\Pi} - \frac{P''}{\Pi} + Z - Z'' - \frac{(N - V)^2}{2g}$$

Ainsi la différence de niveau piézométrique qui dans l'hypothèse du théorème

de Bernoulli serait nulle, parce que les vitesses en AB et $A''B''$ sont égales, à moins
 leur exprimée par $\frac{(v-V)^2}{2g}$. C'est ce qu'on nomme la perte de charge due à l'étranglement
 CD .

Pour éliminer v , soit K le coefficient de contraction de CD en $A''B''$. On a $Kav = \Omega v$
 et par conséquent $\frac{(v-V)^2}{2g} = \left(\frac{\Omega}{Ka} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g}$

454. - Exemple. - Un vase intercepté plein jusqu'à un certain niveau NN dépense son li-
 quide par un tube de $0^m,0262$ de diamètre dans lequel sont placés quatre cloisons
 minces percées chacune d'un orifice de $0,0065$ de diamè-
 tre et situées à $0^m,314$ de distance les unes des autres, de sorte
 que la longueur totale du tube est de 3 fois cette longueur.
 Le 4^e et dernier orifice verse dans l'air. On demande la
 dépense par seconde en fonction de la charge Z .



Soit v la vitesse à l'endroit de la contraction à l'aval
 de chacun des quatre orifices égaux. Soit V la vitesse dans
 le tube aux endroits où le parallélisme des filets est établi.
 Les considérations précédentes montrent qu'en travail de
 la pesanteur il faut joindre les travaux résistants dus

aux trois étranglements intérieurs on obtient ainsi, en conservant les notations ci-dessus

$$\frac{v^2}{2g} = Z - 3 \frac{(v-V)^2}{2g}, \quad \text{d'où} \quad \frac{v^2}{2g} \left\{ 1 + 3 \left(1 - \frac{Ka}{\Omega} \right)^2 \right\} = Z.$$

En faisant $K = 0,62$; $\frac{a}{\Omega} = \left(\frac{0,0065}{0,0262} \right)^2 = 0,0615$, et la dépense $Q = Kav$, on trouve

$$Q = 0,319 a \sqrt{2gZ}$$

Une expérience citée par M. d'Aubuisson et faite dans les circonstances ci-des-
 sus énoncées a donné le nombre $0,331$ au lieu de $0,319$. La différence peut tenir à
 l'imexactitude du coefficient; elle vient plus probablement de ce que les étranglements
 n'étaient pas assez espacés pour satisfaire aux hypothèses de la théorie.

§ 7. - Mouvement permanent des liquides dans les tuyaux.

455. - Lorsqu'il s'agit du mouvement d'un liquide dans un long tuyau, quoique celui-
 ci soit cylindrique et que par conséquent les filets fluides y soient sensiblement pa-
 rallèles au delà de la contraction d'entrée, il n'est plus permis de négliger la force
 résistante que le tuyau exerce sur le liquide. L'expérience constate aisément l'exis-

tence de cette force en prouvant qu'un tuyau alimenté par un bassin à niveau constant dépense moins de liquide à mesure qu'il est plus long, quoique son diamètre et la différence de niveau du bassin et de l'orifice restent les mêmes.

La résistance longitudinale du tuyau agit par immédiatement sur tout le liquide qu'il contient, et qui n'en subit l'effet qu'à cause du frottement de ses molécules les unes contre les autres. Pour le comprendre, il convient de concevoir ce liquide partagé en couches concentriques très-minces. La plus voisine de la paroi du tuyau peut être considérée comme recevant seule de ce corps solide une action immédiate en sens contraire de son mouvement, la couche suivante ne reçoit de la première une résistance analogue que parce qu'elle va un peu plus vite; en même temps elle exerce sur cette première couche une force égale dans le sens du mouvement, et elle est sollicitée dans le même sens par la troisième couche, dont la vitesse est un peu plus grande que la sienne. En général toute couche intermédiaire est retardée par la couche qui l'enveloppe mais entraînée par celle qu'elle entoure.

456. — Formule du mouvement permanent et par conséquent uniforme dans les tuyaux cylindriques. Soit une portion du liquide comprise à un instant quelconque entre deux plans $A'B'$, $A''B''$. Chacun des éléments matériels de ce liquide ayant un mouvement uniforme, la somme algébrique des forces extérieures agissant sur le système, projetées sur un axe quelconque, celui du tuyau, par exemple, est nulle. Ces forces sont les suivantes :

1° Les pressions qui s'exercent à l'entrée en $A'B'$. Appelons p la pression par mètre à l'extrémité d'entrée d'un filet dont la section transversale a une aire très-petite ω ; la pression totale sur la base du filet est donc $p\omega$; elle est indépendante de la vitesse particulière du filet; la somme des pressions en $A'B'$ dans le sens du mouvement est $\Sigma p\omega$ ou $P\Omega$ en désignant par P la pression moyenne par mètre carré dans la section $A'B'$, et par Ω l'aire de la section du tuyau.

2° Les pressions qui s'exercent à la sortie en $A''B''$. Leur somme projetée est négative et exprimée par $P''\Omega$, la pression moyenne par mètre en $A''B''$ étant P'' .

3° Le poids $\Pi\Omega$. $\overline{A'A''}$ du liquide considéré. Sa projection rectangulaire sur l'axe est $\Pi\Omega(z' - z'')$ en désignant par z' et z'' les ordonnées des centres de gravité de $A'B'$ et $A''B''$ au-dessus d'un plan horizontal quelconque.

4° Enfin la résistance longitudinale du tuyau. Dubuat avait reconnu par expérience qu'elle est indépendante de la pression, en constatant qu'un même tuyau mettant en communication deux réservoirs de niveaux différents donne la même dépense d'eau quand on fait varier également la hauteur du liquide dans les deux réservoirs, de manière que la différence de niveau reste la même. Cette propriété bien éloignée de la loi du frottement des corps solides paraît

être une conséquence de la presque incompressibilité des liquides. Prouy, profitant d'une indication de Coulomb fit voir, en 1804, qu'on satisfait assez approximativement aux phénomènes constatés par l'expérience, dans des cas très-nombreux et très-divers, en égalant la résistance dont il s'agit au produit de la surface de contact du tuyau et du liquide par une fonction de la vitesse moyenne, composée de deux termes dont l'un est proportionnel à cette vitesse et l'autre à son carré. Prouy ne s'est pas d'ailleurs dissimulé que cette relation n'était qu'approximative; qu'en effet la résistance du tuyau paraissant devoir être une fonction de la vitesse du liquide près de la paroi du tuyau, il n'était nullement prouvé ni probable que cette vitesse fût-elle même exactement une fonction de la vitesse moyenne, c'est-à-dire du quotient de la dépense par la section, quel que fût le diamètre du tuyau.

Si donc on appelle U la vitesse moyenne, l la longueur $A'A''$ de la partie de tuyau considérée, χ le périmètre de la section, α et β deux quantités constantes déterminées par l'expérience, la résistance longitudinale du tuyau sur le liquide $A'B'B''A''$ est approximativement exprimée par

$$l \chi. (\alpha U + \beta U^2)$$

L'uniformité de mouvement donne donc l'équation:

$$P'\Omega - P''\Omega + \Pi\Omega(z' - z'') - l \chi (\alpha U + \beta U^2) = 0;$$

ou en divisant par $\Pi\Omega$ et faisant $\frac{\alpha}{\Pi} = a$, $\frac{\beta}{\Pi} = b$, $\frac{P'}{\Pi} - \frac{P''}{\Pi} + z' - z'' - l \frac{\chi}{\Omega} (aU + bU^2) = 0 \dots [1]$

équation applicable à une conduite de section constante et de longueur quelconque; pourvu qu'elle ne présente que de faibles sinuosités.

On voit aisément que la quantité

$$\frac{P'}{\Pi} - \frac{P''}{\Pi} + z' - z''$$

est la différence de niveau piésométrique des deux points extrêmes de la partie de conduite considérée; elle s'appelle aussi la perte de charge due à la résistance du tuyau. En la désignant par y on a

$$y = l \frac{\chi}{\Omega} (aU + bU^2)$$

Le quotient $\frac{y}{l}$ qu'on désigne par J , est la perte de charge par mètre de longueur du tuyau. Si l'on représente par D le diamètre du tuyau et par conséquent $\frac{\Omega}{\chi}$ par $\frac{D}{4}$, l'équation précédente devient comme l'a donnée Prouy:

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2$$

457. — Application à une conduite mettant deux bassins en communication. On suppose que chacun des deux bassins est entretenu à un niveau constant en contact avec l'at-

morphère, et que la vitesse de l'eau y est assez petite pour être négligée auprès de celle qui a lieu dans la conduite. D'après cela, et conformément à la théorie des ajutages cylindriques, la différence de niveau piézométrique entre le bassin d'amont et une section A'B' prise dans l'intérieur du tuyau à une distance de son origine égale à 2 fois $\frac{1}{2}$ le diamètre est $y' = 1,49 \frac{U^2}{2g}$; entre A' et B' et une section A''B'' prise tout près du bassin inférieur, la différence de niveau piézométrique est

$$y = \frac{4l}{D}(aU + bU^2)$$

et comme la pression au centre de A''B'' est sensiblement la même qu'aux points du bassin qui sont à la même hauteur, il en résulte que la somme des deux différences de niveau piézométrique y' et y est la différence de niveau ξ des deux bassins. Ainsi l'étant la longueur de la conduite, sauf déduction de 2 fois $\frac{1}{2}$ le diamètre, on a

$$\xi = 1,49 \frac{U^2}{2g} + \frac{4l}{D}(aU + bU^2) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}DJ = aU + bU^2 \dots \dots [1]$$

en faisant $J = \frac{1}{l} \left(\xi - 1,49 \frac{U^2}{2g} \right) \dots \dots \dots [2]$

458. — Détermination des coefficients a et b. Mettons l'équation [1] sous la forme

$$\frac{1}{4} \frac{DJ}{U} = a + bU \dots \dots \dots [3]$$

Si l'on fait varier expérimentalement les quantités D, l, ξ , soit ensemble, soit séparément, et qu'on observe pour chaque cas la dépense Q par seconde, on en conclura les valeurs correspondantes de $U = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2}$ et de J. Cela fait, supposons qu'on prenne dans un plan deux axes coordonnés, et que l'on construise une suite de points dont les coordonnées soient proportionnelles les unes aux valeurs de U et les autres aux valeurs correspondantes du premier membre de l'équation [3]. Si la loi exprimée par cette équation était rigoureusement d'accord avec l'expérience cette suite de points serait sur une ligne droite dont la position ferait connaître les constantes a et b.

Cette opération graphique a été employée par Drony avec cette seule différence qu'il a négligé le terme $1,49 \frac{U^2}{2g}$ ordinairement très petit par rapport à ξ . En appliquant cette construction à 51 expériences de Comptel, de Bossut et de Dubuat, il a fait voir que la formule était à peu près vérifiée, et il lui a été facile de tracer une droite qui s'écartât peu, tantôt au dessus tantôt au dessous des points d'abord obtenus. Il a pu en conclure des valeurs de a et de b propres à représenter approximativement la généralité des faits. Ces valeurs sont, selon lui :

$$a = 0,0000173 \quad \text{et} \quad b = 0,000348.$$

Il résulte d'observations faites par M. Mary et d'expériences postérieures de M. Darcy que dans les cas de gros tuyaux ces coefficients indiquent pour une charge donnée une vitesse sensiblement moindre que celle qui a lieu réellement. Mais en attendant qu'une formule plus exacte puisse être substituée à celle de Drony, il y a peu d'inconvénient à faire usage de celle-ci, puisqu'elle assigne aux conduites habituellement employées des dépenses au moins égales à celles qui se réalisent en pratique.

459. — Indication des problèmes relatifs à une conduite. Entre les quatre quantités D diamètre de la conduite, J perte de charge par mètre de longueur, U vitesse moyenne, Q dépense par seconde, on a les deux équations

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2 \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{4} \pi D^2 U,$$

qui permettent de calculer deux de ces quantités quand on connaît les deux autres.

Quand, Q et J étant données, D et U sont les inconnues, on a en éliminant D :

$$J^2 Q = 4\pi U (aU + bU^2)^2$$

Drony, pour faciliter l'emploi de la formule

$$\frac{1}{4} DJ = aU + bU^2$$

a publié une table qui donne pour diverses valeurs de U les valeurs correspondantes de

$$aU + bU^2 \quad \text{ou de} \quad \frac{1}{4} DJ$$

M. Fournoyron a inséré dans le compte rendu de l'Académie des sciences (Août 1843) une table qui donne à côté de U la valeur correspondante de

$$4\pi U (aU + bU^2)^2 \quad \text{égale à} \quad J^2 Q.$$

460. — Remarque sur la signification de J . On a dit pourquoi cette quantité s'appelle la perte de charge par mètre due au frottement. On peut encore lui attribuer une autre signification. Appelons R la résistance longitudinale d'une portion de conduite et P le poids de l'eau qu'elle contient; nous aurons, d'après ce qui précède

$$R = \pi L \pi D (aU + bU^2) \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{4} \pi D^2 L \Pi;$$

par conséquent $\frac{R}{P} = \frac{4}{D} (aU + bU^2) = J.$

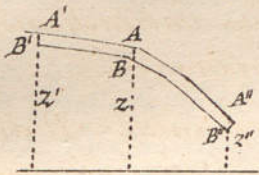
J est donc le rapport de la résistance du tuyau au poids du liquide qui a subi cette résistance.

Exemple: Pour $U = 2^m$ et $D = 0,10$ on a $\frac{R}{P} = 0,057.$

461. — Cas d'exception. Connaissant pour deux sections $A'B'$, $A''B''$ d'une conduite d'un diamètre constant D les pressions P' , P'' , les ordonnées z' , z'' et la longueur

queur $A'A'' = l$, on pourra calculer la vitesse U par l'équation [1].

$$\frac{P'}{\Pi} - \frac{P''}{\Pi} + z' - z'' - \frac{4l}{D} (aU + bU^2) = 0.$$



Si l'on se donne ensuite l'ordonnée z du centre d'une autre section AB en désignant par λ la longueur $A'A$, on pourra déterminer la pression P dans cette section par l'équation

$$\frac{P'}{\Pi} - \frac{P}{\Pi} + z' - z - \frac{4\lambda}{D} (aU + bU^2) = 0$$

Or, il peut résulter des données que l'on trouve pour P une valeur négative, ce qui serait incompatible avec la théorie précédente et avec la nature des liquides. On sait que le mouvement permanent de l'eau dans un siphon est impossible lorsque le point culminant du tuyau est 10^m,3 au-dessus du bassin de prise d'eau; mais l'exception qui vient d'être indiquée est bien plus étendue quand on a égard au frottement. Non seulement on doit, dans la pratique éviter ce cas d'exception, mais il convient que la pression du liquide ne devienne pas moindre que la pression atmosphérique, parce que d'un tel abaissement de pression résulterait le dégagement partiel de l'air contenu dans l'eau; et l'air dégagé occupant une partie de la capacité de la conduite en diminuerait le produit.

462. — Effets des étranglements et des courbes dans les conduites. La théorie du n° 453 s'applique aux étranglements dans les conduites en ce sens qu'un élargissement brusque, qui fait qu'à une vitesse v' en succède une autre, moindre v'' occasionne par seconde un travail négatif des frottements $\Pi Q \frac{(v' - v'')^2}{2g}$ et par conséquent une perte de charge $\frac{(v' - v'')^2}{2g}$. Mais le rapport de v' à v'' n'est pas toujours simplement proportionnel au rapport des sections dans l'étranglement et dans la conduite en aval, parce que le coefficient de contraction est variable de 0,62 à 1.

La théorie de l'influence des courbes est peu avancée. On conçoit qu'un coude oblige le liquide à se porter vers la partie concave et à former vers la partie convexe un remous à la suite duquel le courant se rétablit par filets parallèles, et que ce phénomène ayant de l'analogie avec celui des étranglements doit occasionner une perte de charge variable avec la vitesse et avec la courbure. Du Buat a fait à ce sujet quelques expériences dont les résultats ont conduit Navier à représenter la perte de charge, due à



un coude arrondi, par la formule $\frac{U^2}{2g} (0,0039 + 0,0186r) \frac{c}{r^2}$, dans

laquelle U est la vitesse moyenne, r le rayon de l'arc de cercle qui réunit les axes

des deux parties droites du tuyau, et c la longueur de cet arc.

L'expérience prouve que les conductes dont le rayon r est d'environ 10 fois le diamètre de la conduite n'exercent qu'une résistance peu sensible, qu'on peut négliger.

§ 8. — Mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts.

463. — Le cas le plus simple du mouvement permanent de l'eau dans un canal découvert, c'est-à-dire où le courant est en contact avec l'atmosphère, est celui du mouvement uniforme qui a lieu quand le courant considéré, entre deux limites fixes se compose de filets parallèles, sensiblement rectilignes, dont les éléments sont animés d'une vitesse qui, sans être la même pour tous les filets, est constante dans l'étendue de chacun d'eux.

464. — Définitions. ω étant l'aire de la section d'un filet, et v sa vitesse, le produit ωv est la dépense constante q par seconde du filet. La somme $\sum \omega v$ faite pour tous les filets du courant donne sa dépense Q par seconde. La somme $\sum \omega$ est l'aire Ω de la section du courant. Le quotient $\frac{Q}{\Omega}$ est la vitesse moyenne U . Dans le cas du mouvement uniforme Ω et U sont des constantes.

465. — Profil transversal. La section transversale d'un courant en mouvement uniforme présente toujours une ligne horizontale sur laquelle le liquide est en contact avec l'atmosphère. C'est une conséquence du règle établi au § 1.

Le filet situé vers le milieu de la superficie du courant a la plus grande vitesse qui se nomme vitesse à la surface.

466. — Dubuat a entrepris de déterminer d'après l'expérience les relations entre la vitesse moyenne U , la vitesse à la surface V , et la vitesse près du milieu du fond W . Les faits qu'il a observés dans de petits canaux en bois où la profondeur de l'eau n'a pas excédé 0^m, 27 sont représentés approximativement par les formules suivantes dont la première est due à Prony.

$$U = \frac{V(V + 2,37)}{V + 3,15}$$

$$U = \frac{1}{2}(V + W).$$

Si l'on donne à V les valeurs 0^m, 50; 1^m; 1^m, 50, on trouve pour $\frac{U}{V}$, 0,79; 0,81; 0,83. De là un moyen approximatif de jaugeer un cours d'eau, en observant, à l'aide de flotteurs, la vitesse au milieu de la superficie du courant.

467. — Formule de Prony pour le mouvement uniforme. Dubuat et Prony ont essayé d'appliquer au mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts les lois observées pour les tuyaux cylindriques. Si l'on admet que la résistance de la paroi mobile est encore exprimée par

$$\pi l x (aU + bU^2)$$

la formule [1] établie au n° 454 est applicable au canal découvert en y faisant $P' = P''$; et si l'on représente par z la pente totale sur la longueur l cette formule devient

$$z = \frac{l x}{\Omega} (aU + bU^2)$$

ou bien en faisant la pente par mètre $\frac{z}{l} = I$ et le quotient $\frac{\Omega}{x} = R$ appelé par Dubuat rayon moyen (parce que R est la moitié du rayon quand la section est un cercle ou un demi-cercle).

$$RI = aU + bU^2 \dots \dots \dots [2]$$

468. — Coefficients. Si les courants avaient leurs sections demi-circulaires, les coefficients a et b devraient ici différer peu des valeurs qui conviennent aux tuyaux. Mais pour concilier la formule [2] avec de nombreuses observations faites sur les canaux artificiels ou naturels, Prony a trouvé qu'il fallait faire

$$a = 0,000044 \quad \text{et} \quad b = 0,000309.$$

Plus tard Sytelwein, prenant en considération un plus grand nombre d'expériences, a proposé les évaluations

$$a = 0,000024 \quad \text{et} \quad b = 0,000366$$

qui donnent à $aU + bU^2$ la même valeur pour $U = 0,35$ et un accroissement d'environ $\frac{1}{10}$ pour $U = 1$.

Cette dissidence tient sans doute à ce que l'hypothèse qui sert de fondement à la formule n'est pas exacte, quoique suffisante dans bien des cas. Les coefficients a et b devraient varier un peu avec les dimensions de la section transversale.

Une table calculée par Prony, et qui donne pour diverses valeurs de U les valeurs correspondantes de RI ou de $aU + bU^2$ facilite les applications de la formule.

469. — Lorsque la section transversale d'un courant, et par conséquent sa vitesse moyenne varie, la formule [2] cesse d'être applicable. La théorie du mouvement permanent varié qui a lieu alors n'entre pas dans le programme de l'école Polytechnique.

§ 8. 8^o

1^{re} Division.

Cours de Méc. et Mach. — 2^o Feuille

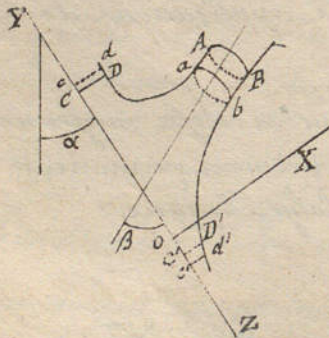
§ 8. - Pression mutuelle d'un liquide et d'un corps solide pendant leur mouvement relatif.

470. - Les connaissances physico-mathématiques que l'on possède sur ce sujet sont encore incomplètes, sans le cas très-simple que nous allons traiter le premier.

Pression d'une veine liquide contre un plan fixe. Un courant d'un liquide quelconque lancé dans le vide ou dans l'air rencontre un plan qui l'oblige de se dévier. On suppose qu'à une certaine distance en avant du plan les molécules du liquide se meuvent parallèlement entre elles, avec une vitesse commune sans se presser mutuellement, si ce n'est en vertu de la pression atmosphérique. On suppose encore le plan assez étendu pour que le liquide, après s'être détourné, se meuve parallèlement à ce plan, avec des vitesses d'ailleurs quelconques, sa pression se trouvant alors de nouveau réduite à celle de l'atmosphère. Enfin on suppose le courant parvenu à un état ou régime permanent.

Cela posé, on considère la résistance ou pression que le plan exerce sur les points matériels du liquide comme décomposée chacune en deux forces; l'une parallèle au plan, l'autre perpendiculaire dont une partie répond à la pression atmosphérique; et l'on demande la somme des composantes perpendiculaires restantes, somme égale et opposée à la pression normale du liquide sur le plan, abstraction faite de la pression atmosphérique. Quant aux composantes parallèles au plan, elles constituent le frottement qu'il exerce sur le liquide, il n'est pas question ici de le déterminer.

Considérons à un instant quelconque la partie du liquide $CDABD'C'$ comprise entre un plan AB coupant perpendiculairement le courant et une surface cylindrique dont nous figurons deux arêtes $CD, C'D'$, et au-delà de laquelle le liquide coule parallèlement au plan pressé YZ . Ce plan est perpendiculaire au plan de la figure et fait avec la verticale un angle α . Soit v la vitesse commune et constante des molécules qui traversent le plan A . Après un petit temps θ ces molécules occuperont un plan voisin ab dont la distance à AB sera $v\theta$. Au même instant final les molécules qui se trouvaient d'abord dans la surface cylindrique désignée dans la figure par CD et $C'D'$ seront sur une autre surface voisine dont cd et $c'd'$ représentent deux arêtes. Ainsi tout le système de points matériels considéré sera finalement compris entre le plan ab et la surface $cdcd'$. Ceux de ces



points qui, au dernier instant, se trouveront entre $a b$ et $CDC'D'$ auront, en vertu de la permanence, les mêmes masses et les mêmes vitesses que ceux qui y étaient d'abord.

Soit β l'angle aigu que fait avec le plan YZ la direction de la vitesse V . Appliquons le théorème de la quantité de mouvement (278) en prenant pour axe de projection la droite OX perpendiculaire à YZ .

Les vitesses entre $CDC'D'$ et $cd c'd'$ étant perpendiculaire à OX , l'accroissement algébrique, pendant le temps θ , de la quantité de mouvement du système projetée sur OX se réduit à la masse $\frac{\pi}{g} \Omega v \theta$ de la tranche $AB ba$, multipliée par la vitesse v , et par $\sin \beta$, projection qui, d'abord négative, doit entrer comme positive dans l'équation, parce qu'elle se rapporte à la position initiale. Le premier membre de l'équation est donc

$$\frac{\pi}{g} \Omega v^2 \theta \sin \beta.$$

Soit F la force ou somme de forces cherchée; son impulsion suivant OX est $F\theta$. Les autres forces extérieures qui agissent sur le système sont:

- 1° Les composantes des réactions du plan, parallèles à ce plan; leurs projections sont nulles;
- 2° Les pressions atmosphériques dont les projections sur un plan quelconque, se détruisent comme si le système $ABC'D'DC$ était en repos.
- 3° Les forces exercées par la pesanteur dont la projection sur OX , le poids du système étant P , est $-P \sin \alpha$.

On a donc, en vertu du théorème de la quantité de mouvement,

$$\frac{\pi}{g} \Omega v^2 \theta \sin \beta = F\theta - P\theta \sin \alpha \quad \text{ou} \quad F = \frac{\pi \Omega v^2}{g} \sin \beta + P \sin \alpha$$

La partie $P \sin \alpha$ dépendante de l'action de la pesanteur, est la pression qu'exercerait le système $DCABC'D'$ s'il glissait sans changer de forme parallèlement au plan YZ . L'autre partie de la pression F est égale au poids d'un cylindre de liquide considéré qui aurait pour base la section Ω du courant AB , et pour longueur le double de la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ due à la vitesse v , l'arête faisant avec la base du cylindre l'angle β que la direction du courant, prise au point où sa vitesse est v , fait avec le plan qu'il rencontre plus loin.

471. — Si, le plan rencontré étant peu étendu, on était précédé d'une surface convexe, les vitesses du liquide au-delà de ce plan feraient des angles obtus avec OX , la force F serait moindre, parce que la quantité de mouvement projetée finale serait algébriquement plus petite que dans le cas précédent. Par la raison contraire, si, au moyen de rebords adaptés au plan pressé par le

liquide, on obligerait le courant à le quitter en faisant des angles aigus avec la normale OX , la pression F serait plus grande.

L'expérience confirme ces déductions théoriques.

472. — Aux premiers instants de la rencontre du plan par le fluide, avant que le régime permanent soit établi, la pression est beaucoup plus grande, parce que les valeurs absolues des vitesses dans l'espace $abD'C'D$ diminuent très-rapidement. Cette partie du phénomène est analogue au choc d'un corps solide qui ayant une masse M viendrait avec une vitesse v faisant avec le plan YZ l'angle β , rencontrer un autre corps solide fixe terminé par ce plan. Si l'action mutuelle était non élastique, de manière que le corps choquant perdît toute vitesse perpendiculaire au plan, l'impulsion de la réaction du corps choqué serait

$$\int F dt = Mv \sin \beta;$$

mais cette équation ne ferait pas connaître F force variable pendant le choc, qui dépendrait de la dureté des deux corps. Dans la direction parallèle au plan YZ , l'équation du mouvement en égard au frottement fF donnerait en appelant u la vitesse finale.

$$Mu - Mv \cos \beta = -f \int F dt, \quad \text{d'où } u = v(\cos \beta - f \sin \beta).$$

On voit que ce moyen de déterminer la vitesse, et par suite, si l'on veut, la puissance vive qui subsiste après le choc n'est pas applicable au liquide considéré au N° 470, à moins qu'il ne s'agisse du cas où le liquide s'échapperait par filets parallèles non seulement au plan mais entre eux.

473. — Corps plongé dans un liquide indéfini. L'expérience a constaté que si dans un courant de grandes dimensions transversales on plonge un corps solide la résultante des pressions horizontales que celui-ci reçoit du liquide en mouvement est à peu près, pour un même corps, proportionnelle au carré de la vitesse relative. En soumettant à cette expérience une plaque mince, puis un cube, puis un prisme d'une longueur triple, Dubuat a reconnu:

1° Que la pression sur la face opposée au courant est plus grande que la pression hydrostatique;

2° Que la pression, sur la face d'aval, où a lieu un remous, est au contraire plus petite;

3° Que la résultante de ces deux forces peut être représentée par la formule

$$K \Pi A \frac{v^2}{2g}$$

dans laquelle Π est le poids de l'unité de volume du liquide, A l'aire de la section transversale du corps, v la vitesse relative du liquide, K un coefficient qui est, suivant Dubuat, 1,43 pour la plaque mince, 1,17 pour le cube et

1.10 pour le prisme. Si les plans, antérieur et postérieur, sont remplacés par des surfaces convexes, le coefficient K diminue.

La théorie peut, jusqu'à un certain point, rendre compte de cette influence de la longueur et de la figure du corps plongé. Le temps nous manque pour exposer ces considérations qui d'ailleurs n'entrent pas dans le programme du cours.

474. - Corps flottants. - Si l'on appelle A la section droite de la partie plongée d'un prisme, la formule de la résistance est encore d'après l'expérience la même que dans le cas précédent. Si le prisme est terminé rectangulairement et que sa longueur soit de 3 à 6 fois \sqrt{A} , on a environ $K = 1,10$
 Avec une poupe suffisamment aiguë, on peut avoir $K = 1,00$
 Si on ajoute à un bateau prismatique une proue formée soit de deux plans verticaux dont la saillie est égale à la largeur du bateau, soit d'une surface cylindrique verticale dont la base est un demi-cercle on a à peu près $K = 0,50$
 Une proue formée des faces latérales du bateau prolongées et coupées en dessous par un plan faisant avec l'horizon un tiers d'angle droit réduit la résistance au tiers. Dans ce cas $K = 0,33$
 Pour un navire, A étant l'aire de la plus grande section transversale au dessous du plan de flotaison, on peut avoir selon Navier $K = 0,16$

§ 9. - Notions sur le jaugeage des eaux courantes.

475. - Pour les petites quantités d'eau coulant ou pouvant couler continuellement, l'unité de mesure était autrefois le ponce de fontainier; c'est la dépense que fait continuellement un orifice en mince paroi, circulaire, d'un ponce ($0^m,0271$) de diamètre, l'eau du bassin étant maintenue sans vitesse sensible à 7 lignes ($0^m,0158$) de hauteur au dessus du centre de l'orifice. L'évaluation communément admise de cette dépense était de 14 pintes de 48 pouces cubes ou $13^{\text{lit}},33$ par minute, ce qui revient à $0^m,00022217$ par seconde et à $19^m,195$ en 24 heures.

M. de Tromy a proposé de substituer au ponce d'eau une unité qu'il a nommée module et dont la valeur serait de 20^m en 24 h. ou $0^m,229315$ en une seconde. Il a constaté que cette quantité d'eau s'écoulerait par un orifice de $0^m,02$ de diamètre, ayant sur son centre une charge de $0^m,05$ et formant ajutage cylindrique de $0^m,017$ de longueur. L'eau doit, pour cela couler dans l'ajutage à plein tuyau, condition qui exige l'attention de l'expérimentateur.

476. - Pour mesurer la dépense d'un cours d'eau qui peut être barré par un vannage ou un déversoir on emploie la formule indiquée aux N^{os} 443, 444 et 449.

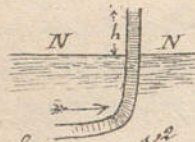
477. - Si le cours d'eau ne peut être barré, on le jauge approximativement par la méthode des flotteurs. On constate par une observation suffisamment répétée le temps t qu'un flotteur d'une densité presque égale à celle de l'eau met à parcourir une longueur connue L prise au milieu d'une partie rectiligne du courant. Si dans cet espace l'aire Ω de la section transversale du cours d'eau est constante, le quotient $\frac{L}{t} = V$ vitesse au milieu de la superficie; on conclut (466) la vitesse moyenne U et par suite la dépense $Q = \Omega U$. Si la section est variable on a $Q = U \Omega$ et $U = nV$ le coefficient n différant peu de 0,81. Or x étant la longueur à partir de l'origine de L , on a $V = \frac{dx}{dt} = \frac{Q}{n\Omega}$ d'où $Q = \frac{n}{t} \int \Omega dx$ qu'on intègre par les méthodes approximatives.

N^{ve} Division.

Cours de méc. et mach. - 30^e Feuille.

478. — On emploie aussi le moulinet de Woltmann, instrument semblable à un petit moulin à vent qui permet d'observer la vitesse en un point quelconque d'un cours d'eau. On prend la moyenne d'un nombre suffisant de vitesses trouvées. L'instrument est préalablement taré, en le faisant mouvoir avec des vitesses connues dans une eau stagnante.

479. — Cube de Pitot proposé en 1732. — Si l'on plonge en partie dans l'eau un tube ouvert par les deux bouts et recourbé à angle droit, de manière que l'extrémité de la branche horizontale soit opposée au mouvement relatif du liquide, celui-ci s'élève dans le tube, au-dessus de la surface NN du courant, d'une hauteur h qu'on a cru d'abord devoir être égale à la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ due à la vitesse relative. Mais Dubuat en faisant mouvoir un tube de fer blanc de 0,04 de diamètre dont la branche horizontale avait 0,35 de longueur et était plongée à 0,41 au-dessous du niveau de l'eau stagnante a trouvé le rapport de h à $\frac{v^2}{2g}$ variable comme il suit:

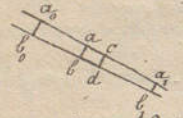


vitesse v	0,78	1,08	1,80
rapport de h à $\frac{v^2}{2g}$	1,22	1,11	1,08

On ne peut donc avec certitude se servir de cet instrument pour mesurer la vitesse; mais il peut fournir une approximation.

§10. — Notions sur l'écoulement des gaz.

480. — Écoulement permanent d'un gaz dans le cas où le frottement peut être négligé. Soit a, b, c, d une portion d'un des filets dont se compose le fluide en mouvement, filet assez étroit pour que le fluide puisse être considéré comme se mouvant par tranches parallèles. Soit ab une section transversale quelconque dont l'aire est ω , soient v et P la vitesse et la pression en cet endroit. Soit une section infinitésimale voisine cd de ab . Désignons par ds ou $v dt$ leur distance, et par dh la différence de niveau des centres de gravité de ces sections. Soit enfin m la masse de la tranche $abcd$. Le centre de gravité de cette tranche a , à la limite, la même accélération $\frac{dv}{dt}$ que les molécules de la section ab . Les forces extérieures sont ωP sur la face ab , $-\omega(P+dP)$ sur la face cd , enfin le poids mg dont la projection suivant la direction du mouvement est $mg \frac{dh}{ds}$. On a donc



$$m \frac{dv}{dt} = mg \frac{dh}{ds} - \omega dP \dots \dots \dots [1].$$

d'où en remplaçant m par $\frac{\Pi}{g} \omega v dt$ ou $\frac{\Pi}{g} \omega ds$, $\dots \dots \dots \frac{v dv}{g} = dh - \frac{dP}{\Pi} \dots \dots \dots [2].$

Si l'il s'agissait d'un liquide le poids Π serait constant, et l'intégration de l'équation [2] reproduirait la formule de Bernoulli (437).

481. — La valeur de Π pour un fluide élastique dépend, suivant des lois connues, de la nature du gaz, de sa température et de sa pression. Pour un gaz déterminé dont la température est supposée constante on peut poser $\Pi = \frac{P}{K}$. L'équation [2] donne

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = H + \frac{K}{\log.c} \log \frac{P_0}{P_1} \quad \text{ou plus simplement} \quad \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = H + \frac{P_0 - P_1}{\frac{1}{2}(\Pi_0 + \Pi_1)} \dots \dots \dots [3]$$

Il est la différence de niveau de l'extrémité de sortie au-dessous de l'entrée. La dernière formule est suffisamment approximative lorsque le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ des pressions extrêmes ne dépasse pas 2. Elle montre que dans le cas ordinaire de la pratique cette formule diffère peu de celle qui convient aux liquides; mais elle montre aussi que pour une différence de pression $P_0 - P_1$, exprimée en kilogrammes, l'ac-

croisement du carré de la vitesse est beaucoup plus grand parce que le poids moyen $\frac{1}{2} (\Pi_0 + \Pi_1)$ du mètre cube est beaucoup plus petit.

482. - Une autre relation résultant de l'égalité de poids des dépenses de gaz de deux sections quelconques, existe entre les quantités v, v_0, P, P_0 ; le produit $\Pi \omega v$ ou $\frac{P \omega v}{K}$ est constant, on a donc $P_0 \omega_0 v_0 = P \omega v$, ce qui permet d'éliminer une des deux vitesses quand on connaît le rapport des sections extrêmes.

483. - Remarque. - Aucune des deux formules [3] n'est applicable au calcul de la dépense d'un orifice soit en mince paroi soit avec ajutage lorsque le rapport $\frac{P_0}{P}$ des pressions est grand, parce que l'application qu'on en fait est fondée sur des hypothèses qui ne se réalisent pas dans ce cas. La première est que, dans une section de la veine jaillissante, à peu de distance de l'orifice, les filets dont elle se compose ont une même vitesse et une pression commune égale à celle du fluide ambiant. Or, il n'en est pas ainsi lorsque les pressions, intérieure et extérieure, sont différentes, parce que le fluide jaillissant conserve alors une partie de l'excès de la pression intérieure et que la veine fluide s'épanouit immédiatement après la contraction; les filets ont donc un mouvement curviligne sensible, sauf le filet central, et par conséquent la pression décroît depuis ce filet central jusqu'à ceux du pourtour de la veine, où elle diffère peu de celle du fluide ambiant. Une seconde hypothèse est que le frottement, dans le phénomène dont il s'agit peut être négligé; ce qui semble inadmissible dans le cas des très grandes vitesses. On voit par là l'impossibilité de calculer d'une manière plausible la vitesse d'un gaz qui se précipiterait dans le vide, supposition qui n'est pas d'ailleurs compatible avec la permanence de l'écoulement.

484. - Mouvement permanent des gaz dans les conduites cylindriques. Il suffit de reprendre l'équation [1] du n° 840 en ajoutant au second membre un terme qui représente la résistance de la paroi. Par analogie avec ce qui a lieu pour les liquides, on est conduit à considérer cette force longitudinale comme proportionnelle à la surface de contact $X ds$ et à une fonction $av + bv^2$ de la vitesse moyenne. L'expérience a appris de plus que cette résistance est proportionnelle à la densité du gaz et que le terme av peut ordinairement être négligé au profit de bv^2 , ce qui se fait également pour les liquides dans les cas de grandes vitesses. Cette force est donc exprimée par $\Pi X bv^2 ds$. L'équation du mouvement est ainsi, au lieu de [2]

$$\frac{v dv}{g} = dh - \frac{dP}{\Pi} - \frac{X}{\omega} b v^2 ds \dots \dots \dots [4]$$

De plus comme on l'a remarqué au n° 482, le produit $\Pi \omega v$ ou $\frac{P}{K} \omega v$ est constant, et puisque ω est ici invariable ainsi que K , on peut, en désignant par C une constante convenable poser

$$Pv = C \dots \dots \dots [5]$$

Étant de là v^2 et $v dv$, et les substituant dans [4] ainsi que $\Pi = \frac{P}{K}$ et $\frac{X}{\omega} = \frac{4}{D}$, on a

$$\frac{C^2}{g} \cdot \frac{dP}{P} = - P^2 dh + K P dP + \frac{4 b C^2}{D} ds \dots \dots \dots [6]$$

Le seul terme $- P^2 dh$ n'est pas séparément intégrable parce que P est variable avec h . Mais comme d'une part la différence de niveau des extrémités d'une conduite de gaz peut souvent être négligée, et que d'autre part la pression P varie d'une quantité peu considérable par rapport à ses valeurs extrêmes, on fera une erreur très-peu sensible si à la variable P^2 on substitue la moyenne $\frac{1}{2} (P_0^2 + P_1^2)$ de ses valeurs prises aux deux extrémités de la conduite.

En intégrant dans cette hypothèse l'équation [6], en désignant par L la longueur de la conduite, et par Z la différence de niveau de l'extrémité de sortie au-dessous de celle d'entrée (quantité positive ou négative) puis mettant pour C sa valeur soit $P_1 v_1$ soit $P_0 v_0$ suivant qu'on

cherche v_1 ou v_0 on obtient:

$$\frac{v_1^2}{2g} \left(8 \frac{bgL}{D} + 2 \log \text{hyp.} \frac{P_0}{P_1} \right) = \frac{K}{2} \left[\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^2 - 1 \right] + \frac{Z}{2} \left[\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^2 + 1 \right] \dots \dots \dots [7]$$

ou

$$\frac{v_0^2}{2g} \left(8 \frac{bgL}{D} + 2 \log \text{hyp.} \frac{P_0}{P_1} \right) = \frac{K}{2} \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^2 \right] + \frac{Z}{2} \left[1 + \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^2 \right] \dots \dots \dots [8]$$

485. — Si l'on voulait éviter les logarithmes, dans le cas par exemple où le rapport $\frac{P_0}{P_1}$ serait l'inconnue cherchée, on remplacerait $\log \text{hyp.} \frac{P_0}{P_1}$ par sa valeur approchée $\frac{2(P_0 - P_1)}{P_0 + P_1}$ qui ne lui est inférieure que de 4 pour 100 quand $\frac{P_0}{P_1}$ est 2.

486. — Détermination des constantes K et b . 1° On a en même temps pour un gaz quelconque

$$\Pi = \frac{P}{K} \quad \text{et} \quad \Pi = 1,299 \frac{P}{P_a} \frac{1}{1 + \alpha \tau} \delta, \quad \text{d'où} \quad K = \frac{7955(1 + \alpha \tau)}{\delta}$$

P_a étant la pression moyenne atmosphérique = 10334 kg, α le coefficient de dilatation du gaz, et δ sa densité tabulaire, c'est-à-dire le rapport de son poids à celui de l'air sous le même volume, à la même pression et la même température.

2° Navier, d'après les résultats d'observations faites par Girard et d'Aubuisson a reconnu que, quel que soit le gaz, on peut poser:

$$bg = 0,00348 \quad \text{et par conséquent} \quad b = 0,000355$$

à peu près comme pour le mouvement de l'eau dans les tuyaux (458).

487. — Exemple. Dans une conduite horizontale ou en pente faible, dont le diamètre est 0^m,381 et la longueur 5000^m, de l'air à la température de 10° coule avec une vitesse de 10^m à l'extrémité d'entrée. On demande le rapport des pressions aux points extrêmes.

On a $\delta = 1$; $\tau = 10$; $K = 7955 \times 1,04 = 8273$; $Z = 0$; $\frac{v_0^2}{2g} = 5,10$; $L = 5000$; $D = 0,381$

Faisons $\frac{P_1}{P_0} = x$. La formule [8] simplifiée (485) devient

$$5,10 \left[365,4 + 4 \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] = 4136(-x^2) \quad \text{ou} \quad x^2 - 0,00984 \frac{x}{1+x} - 0,545 = 0; \quad \text{d'où} \quad x = 0,74.$$

417. (bis) — En terminant cette section relative à la mécanique générale des fluides, nous croyons devoir donner une explication sur la rédaction du N° 417 qui peut donner lieu à quelque doute. En réduisant à $dP = \rho J dh$ l'équation d'équilibre d'un fluide, et ne faisant dépendre que de la distance dh de deux surfaces de niveau très voisines, la variation dP de la pression, nous avons tacitement admis que dans une même surface de niveau la pression P est constante, ce qui peut et doit se démontrer à priori, comme dans le cas particulier du N° 411 par la considération d'un filet élémentaire couché sur la surface de niveau et par conséquent perpendiculaire aux forces mJ . Dès lors il est rigoureux de dire que les pressions sur les deux bases du prisme ayant la hauteur dh sont P_0 et $(P + dP) d\omega$.

5^{ème} Section.Des Machines diverses
considérées dans leur état de mouvement.§1. - Définitions et considérations générales
sur les Machines.

488. - Une machine est un ensemble de corps dont les uns sont fixes ou considérés comme tels, et les autres, susceptibles de mouvement, sont destinés à recevoir, en quelque point, certaines forces, et à exercer, par d'autres points, des forces qui diffèrent ordinairement des premières par leur intensité, par leur direction et par la vitesse de leurs points d'application.

489. - On appelle effet dynamique d'une machine le travail des forces qu'elle exerce sur les corps extérieurs qu'on a en vue de soumettre à son action. Ce travail est généralement positif; mais il est négatif dans quelques cas particuliers. Exemple: une grue qui sert à descendre lentement des fardeaux; la main de l'ouvrier sur la manivelle fait alors un travail négatif ou résistant.

490. - Dans les cas ordinaires, l'effet dynamique étant positif, la réaction des corps extérieurs sur lesquels la machine est destinée à agir produit réciproquement sur elle un travail négatif ou résistant. Cette réaction peut s'appeler la résistance principale pour la distinguer des autres forces, désignées sous le nom de résistances secondaires dont le travail négatif est étranger à l'objet de la machine et ne peut être néanmoins complètement évité, parce qu'il est dû aux actions mutuelles soit de la machine et de ses appuis ou de l'air environnant, soit des parties de la machine entre elles. Quelques auteurs donnent aux résistances secondaires le nom de résistances passives qui semblerait ne devoir s'appliquer, tout au plus, qu'aux forces exercées par les appuis fixes des machines.

491. - Classification des résistances secondaires. Nous rappelons succinctement que les travaux résistants dus aux actions mutuelles des corps se rapportent à trois ordres de phénomènes distincts: 1^o Les frottements et résistances au roulement; 2^o Les flexions et déformations alternatives dont un cas particulier a été étudié sous la dénomination de raideur des cordes; 3^o Les chocs qui absorbent en partie la puissance vive utilisable des corps, soit par le déplacement relatif permanent de leurs molécules, soit en leur imprimant des vibrations inutiles qui finissent par s'éteindre en se communiquant partiellement aux corps environnants.

492. — Divers modes du travail moteur. Les forces qui agissent sur une machine pour produire ou entretenir son mouvement pendant qu'elle est soumise à diverses résistances consistent quelquefois dans l'action de la pesanteur sur la machine elle-même, quelquefois dans l'action de ressorts intérieurs qui tendent à revenir à leur figure naturelle; mais le plus souvent dans les pressions exercées par des corps qui ne font pas partie de la machine et qui constituent son moteur distinct. Ils remplissent cette fonction de deux manières, tantôt en perdant partiellement la vitesse qu'ils possédaient (Exemples: moulins à vent et certaines roues hydrauliques dans lesquelles l'eau se meut à peu près horizontalement, mais en entrant avec une vitesse plus grande que la vitesse de sortie); tantôt en transmettant les forces qu'ils reçoivent eux-mêmes, soit de la pesanteur, soit de l'élasticité des fluides, soit de l'action musculaire des animaux.

493. — Théorème général de la transmission du travail. Les propriétés générales du mouvement d'un système matériel sous l'action de forces extérieures et intérieures étant applicables à une machine quelconque, appelons:

T_m le travail moteur résultant pendant un certain temps soit de l'action de ressorts intérieurs, soit des forces exercées par un moteur extérieur spécial.

T_e l'effet dynamique, et par conséquent $-T_e$ le travail, dans le même temps, des forces qui, agissant sur la machine, constituent la résistance principale;

$-T_r$ le travail des résistances secondaires pendant le même temps;

P le poids total de la machine;

H_0 et H les ordonnées, initiale et finale, de son centre de gravité au-dessous d'un plan horizontal fixe quelconque;

p ou $m\bar{g}$ le poids d'un élément matériel de la machine;

v_0 et v les vitesses, initiale et finale, de ce point pour le temps considéré.

Le théorème du travail (280) et le théorème (281) spécial à la pesanteur donnent

$$T_e = T_m + P(H - H_0) - T_r - \left(\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2 \right)$$

relation très-importante qu'on exprime facilement en langage ordinaire.

494. — Discussion de cette équation. A partir d'un instant initial déterminé, les termes T_e , T_m , T_r essentiellement positifs croissent avec le temps. Au contraire le terme variable $\sum \frac{1}{2} mv^2$ atteint promptement une valeur qu'ensuite il ne dépasse pas; souvent même il varie peu à partir de l'instant où il a atteint cette limite, et si c'est après cet instant qu'on prend l'état initial de la machine, la différence $\sum \frac{1}{2} mv^2 - \sum \frac{1}{2} mv_0^2$ oscille entre des valeurs peu considérables. Dans tous les cas, elle finit par pouvoir être négligée au près de la quantité croissante T_e . Il en est de même du produit $P(H - H_0)$, à moins que la machine ne soit locomotive, auquel cas la valeur absolue de ce produit s'ajoute au travail moteur T_m ou travail résistant T_r suivant

que la machine descend ou monte.

On peut donc, en calculant les termes de l'équation précédente entre deux instants suffisamment éloignés, la réduire très approximativement à la formule très simple

$$T_r = T_m - T_r,$$

qui démontre que les machines ne rendent jamais utilement autant de travail que les moteurs leur en donnent, et qui fait voir l'absurdité de la recherche de ce qu'on appelle le mouvement perpétuel.

495. - *Utilité des machines.* Quoique les machines ne créent point le travail mécanique, elles n'en sont pas moins de la plus évidente utilité: prenant le travail tel que la nature le présente disponible, elles le transportent, le disséminent ou le concentrent de mille manières selon nos besoins en faisant varier à volonté l'un ou l'autre des facteurs du travail transmis.

496. - *Diverses parties des machines.* Une machine est ordinairement composée de plusieurs pièces distinctes mais liées entre elles, dont l'une, appelée récepteur reçoit l'action du moteur, et d'autres appelées organes de transmission de mouvement sont interposées entre le récepteur et les corps sur lesquels s'opère l'effet dynamique de la machine. Chaque pièce d'une machine composée peut être considérée elle-même comme une machine ayant son moteur et sa résistance principale. Il arrive même communément que dans le calcul d'une machine, en partant du récepteur, on s'arrête à une certaine pièce au-delà de laquelle le reste est considéré comme un outil dont les fonctions sont déterminées surtout par l'expérience laquelle fait également connaître la vitesse qui convient à certains points de cette machine spéciale et l'intensité des forces qu'il faut appliquer à ces mêmes points pour la faire fonctionner régulièrement.

497. - *Considérations spéciales aux diverses parties des machines.* Les récepteurs doivent nécessairement varier suivant l'espèce et les circonstances particulières du moteur qu'il s'agit d'employer; la théorie joue un rôle important dans le choix et la disposition des moyens d'économiser les forces que la nature offre à l'industrie. L'étude des récepteurs hydrauliques en présentent des exemples remarquables.

Les transmissions de mouvement sont soumises aux préceptes de la cinématique et de la dynamique, dont l'une étudie les conditions géométriques à remplir, et l'autre calcule les efforts que les diverses pièces doivent subir, évalue les résistances secondaires inévitables, et fournit les moyens de remédier aux irrégularités de mouvement inhérentes soit à la nature du moteur, soit à celle de la résistance principale. La théorie précédente des volants est un exemple de ce genre de service.

Quant aux machines outils, il en est pour lesquelles le calcul des forces capables d'entretenir d'entretenir leur mouvement est d'un intérêt secondaire. Elles sont beaucoup d'appareils destinés à suppléer à l'adresse de la main de l'homme, et dont l'objet essentiel est la perfection de l'ouvrage à accomplir ou la régularité

du mouvement à produire, avantages qui peuvent complètement compenser l'accroissement du travail moteur nécessaire. La description et l'étude de ces machines appartiennent à une branche très-importante de la Mécanique : c'est la Technologie mécanique.

§ 2. — Notions sur le travail dynamique des moteurs animés.

498. — Le travail que peuvent fournir, dans un temps donné, l'homme et les animaux appliqués comme moteurs aux machines dépend du genre de récepteur sur lequel ils agissent, et de la durée des périodes de leur action et de leur inaction. Les nombres du tableau ci-joint, résultent de nombreuses observations recueillies et comparées par M. M. Navier et Poncelet, supposent un travail répété chaque jour sans excéder la fatigue que réparent le repos, la nourriture et le sommeil. A chaque manière d'agir répondent : 1° l'effort moyen et la vitesse constituant le travail par seconde qu'on doit attendre du moteur indiqué ; 2° la durée du travail journalier et par suite le travail obtenu chaque jour.

499. — Observations. Les articles 1 et 5 du tableau montrent que le plus grand travail dynamique qu'on obtienne d'un homme a lieu lorsqu'il agit par les muscles de ses jambes avec une vitesse égale à celle de la marche en exerçant sur l'appui qui le supporte un effort égal à son poids. Si cet effort augmente, il faut pour le maximum d'effet que la vitesse diminue, mais il n'y a pas compensation, comme on le voit au n° 3, quand même on compterait pour partie de l'effet utile l'élevation du corps du manoeuvre. Cette observation de Coulomb a été mise en pratique avec succès par M. Coignet, ingénieur militaire, aux travaux de terrassements du fort de Vincennes. Une corde passant sur une grande poulie étaient attachés deux plateaux dont l'un portait la charge à élever, et l'autre l'homme qui descendait en se reposant, et remontait ensuite par une échelle. L'expérience a constaté qu'un homme pesant environ 70 Kg. s'élevait journellement 310 fois à la hauteur de 13 m., ce qui fait 283 100 Kg. m.

Les roues à berrilles ayant environ 5^m de diamètre sont encore employées de nos jours pour extraire les pierres des carrières. Elles offrent des dangers qui devraient leur faire préférer les treuils à manivelle.

En Angleterre on a employé des prisonniers à moudre du blé ou à faire mouvoir des machines à filer en les faisant agir sur des roues d'environ 1,50 de diamètre et d'une grande largeur, portant des planchettes ou marches sur lesquelles montaient 20 hommes à la fois, en s'appuyant des mains contre une perche fixe placée à la hauteur de leur poitrine. La tâche journalière de chaque prisonnier était de monter 50 marches de 0^m,20 par minute, et d'exécuter ce travail pendant 7 heures en tout, subdivisées par de fréquents repos où les hommes se succédaient sans arrêter la machine, la durée de leur présence à la

Tableau des valeurs du travail journalier que peuvent fournir les moteurs animés dans diverses circonstances.

Mode d'action.	Poids supporté ou effort moyen.	Vitesse.	Travail par seconde.	Durée du travail par jour.	Travail journalier.
	Kg.	m.	Kg. m.	heures.	Kg. m.
1 ^{re} Élévation immédiate des corps pesants.					
1. Un homme montant une rampe douce ou un escalier, sans aide de sa main, son travail consistant dans l'élévation de son corps	65	0,15	9,75	8	280800
2. Un manoeuvre élevant des matériaux avec les mains	20	0,17	3,4	6	73440
3. Un manoeuvre portant des fardeaux sur son dos au haut d'une rampe douce ou d'un escalier et revenant à vide	65	0,04	2,6	6	56160
4. Un manoeuvre élevant des terres à la pelle à la hauteur moyenne de 1 ^m 60	2,7	0,4	1,08	10	38880
2 ^{de} Action sur les machines.					
5. Un manoeuvre agissant sur une } 1 ^{re} au niveau de l'axe	60	0,15	9	8	259200
roue à cheville ou à tambour } 2 ^{de} vers le bar de la roue	12	0,70	8,4	8	251120
6. Un manoeuvre agissant horizontalement sur un cabestan	12	0,60	7,2	8	207360
7. Un manoeuvre agissant sur une manivelle	8	0,75	6	8	172800
8. Un homme exercé poussant et tirant alternativement suivant une verticale (sciure de long)	6	0,75	4,5	10	162000
9. Un manoeuvre élevant des fardeaux avec une corde et une poulie, ce qui l'oblige de faire descendre la corde à vide	18	0,20	3,60	6	77760
10. Un cheval attelé à une voiture et allant au pas	70	0,90	63	10	2168000
11. Id. id. allant au trot	44	2,20	96,8	4,5	1568160
12. Un cheval attelé à un manège et allant au pas	45	0,90	40,5	8	1166400
13. Id. id. allant au trot	30	2,00	60	4,5	972400
14. Un bœuf attelé à un manège, allant au pas	60	0,60	36	8	1036800
15. Un mulet id. id.	30	0,90	27	8	777600
16. Un âne id. id.	14	0,80	11,2	8	322560

roue étant de 10 heures par jour. En supposant à l'homme un poids de 65 kg, son travail dynamique journalier était de $65^{kg} \times 0^m,20 \times 50 \times 60 \times 7 = 273000 \text{ kg.m}$. On ne peut s'empêcher de remarquer combien est dégradant pour l'homme cet emploi exclusif de sa force physique sans locomotion et sans le moindre concours de son intelligence.

Le mode d'action indiqué à l'article 2 est défavorable parce qu'il emploie exclusivement les bras, et à certains moments dans une position très-fatigante. La manivelle (art. 7), qui fait aussi principalement fonctionner les bras, n'a pas au même degré cet inconvénient. Il est utile que le travail fasse volant afin de permettre à l'ouvrier de faire varier un peu l'intensité de la pression sur la manivelle aux divers points de la circonférence qu'elle parcourt. Le bras ou rayon de la manivelle est de $0^m,35$ à $0^m,40$.

Les articles de 10 à 13 montrent que le cheval attelé à un manège ne produit pas le travail de 75 kg.m. par seconde adopté pour l'unité dite cheval dynamique. Il faut que le diamètre du manège soit au moins de 13^m pour que le cheval ne soit pas trop gêné. En comparant le cheval agissant ainsi à l'homme appliqué à une manivelle on reconnaît que le cheval équivaut à 7 hommes.

En général, les nombres du tableau ne sont que des valeurs moyennes qu'il convient d'adopter ou dont il faut peu s'écarter pour réaliser le meilleur résultat. Si dans une application on modifie l'un des facteurs du travail journalier, il faut changer au moins l'un des deux autres. M. Christian (Mécanique industrielle) cite l'exemple d'un homme (probablement au-dessus de la vigueur moyenne) qui employé pendant 3 mois à faire tourner une manivelle, a développé chaque jour pendant 7 heures un effort moyen de 14 kg. avec une vitesse de $0^m,50$, ce qui produit par jour 176400 kg.m.

§ 3. - Généralités sur les récepteurs hydrauliques.

500. - On appelle récepteurs hydrauliques des appareils destinés à recevoir et à transmettre utilement le travail moteur que l'eau peut exercer soit en y perdant une partie de sa vitesse précédemment acquise, soit en y descendant sans s'accélérer sous l'action de la pesanteur.

501. - Puissance absolue d'une chute d'eau. L'eau dans un récepteur est à un état, sinon permanent au moins périodique, à intervalles quelquefois très-courts, comme dans les roues hydrauliques. Elle vient d'un canal d'amont ou bief supérieur et s'écoule ensuite dans un bief inférieur. Soit H la différence de niveau des deux biefs en deux points $A A'$ peu éloignés du récepteur, mais assez pour que l'écoulement y ait lieu par filets parallèles; H est ce qu'on appelle la hauteur de la chute. Nommons P le poids de l'eau dépensée par seconde, Ω l'aire de la section faite dans le courant en amont par le point A , V la vitesse en cet endroit Y la distance du centre de gravité de cette section au dessous

de A; $\Omega', V' Y$ les quantités analogues pour la section d'aval en A'.

Considérons le système liquide compris entre les deux sections désignées, et appelons θ la durée d'une période très-courte pendant laquelle ce système matériel passe de la position indiquée à une position voisine: En vertu de la périodicité, l'accroissement de la puissance vive de cette portion de liquide est

$$\frac{1}{2} \frac{P\theta}{g} (V'^2 - V^2),$$

et est égal au travail des forces extérieures et intérieures. Les premières sont principalement:

1° La pression d'amont, qui, en négligeant la pression atmosphérique a pour intensité $\Pi Y \Omega$ et pour travail $\Pi Y \Omega V \theta$ ou $P \theta Y$

2° La pression d'aval dont le travail est $- P \theta Y'$

3° L'action de la pesanteur dont le travail est () $P \theta (H + Y' - Y)$

4° Les réactions que le récepteur exerce sur le liquide et qui sont égales et contraires aux pressions que le liquide exerce sur le récepteur. Le travail de celles-ci, dans une seconde, étant représentée par T_m , le travail des forces que l'eau reçoit du récepteur, dans le temps θ est $- \theta T_m$.

Faisant la somme de ces quatre quantités et y ajoutant la somme du travail des actions intérieures de l'eau, plus ou moins agitée dans son passage de A en A', et du travail des frottements extérieurs subis par le même liquide, somme représentée par $- T_f$ dans l'unité de temps et $- \theta T_f$ dans le temps θ , on a après la suppression du facteur θ et les déductions faites

$$P \left(\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} \right) = PH - T_m - T_f \quad \text{d'où} \quad T_m = P \left(H + \frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} \right) - T_f$$

On voit que le travail moteur T_m transmis au récepteur en une seconde est toujours moindre que

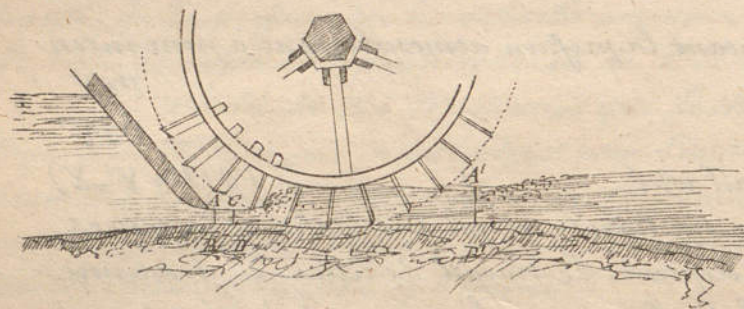
$$P \left(H + \frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} \right)$$

Cette quantité dont on néglige ordinairement la partie $\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g}$, parce que les vitesses prises à quelques mètres en amont et en aval du récepteur sont faibles et à peu près égales, est ce qu'on peut appeler la puissance absolue de la chute d'eau.

502. — Le rapport du travail transmis T_m à la puissance absolue de la chute s'appelle le rendement du récepteur. L'art de l'ingénieur tend à l'augmenter autant que possible en égard à l'intérêt économique qui s'attache au résultat comparé aux frais d'établissement. Nous allons exposer les considérations principales de la théorie des récepteurs hydrauliques les plus usités.

§ 4. - Roues hydrauliques dites en dessous et à aubes planes.

503. - Indiquons les circonstances du passage dans ces roues.



1^o L'eau arrive en amont de la roue sous la forme d'un courant presque horizontal à section rectangulaire dont nous désignerons la hauteur AB par h , la largeur par b et dont tous les filets ont à peu près la même vitesse v ; de sorte que la dépense Q du courant par seconde est

$$Q = bhv.$$

2^o A partir de l'instant où une aube pénètre dans le courant, l'intervalle compris entre elle et l'aube qui

la suit forme une espèce de vase dans lequel le liquide s'introduit, en vertu du mouvement relatif, jusqu'à ce que la seconde aube joignant le coursier, sans l'espace appelé jeu, l'entrée de l'eau dans le vase se trouve presque fermée;

3^o Il peut se faire qu'à cet instant la sortie de l'eau du côté d'aval soit déjà ouverte: cela a lieu lorsque le fond du coursier est plan et tangent au cylindre décrit par les bords extérieurs des aubes, ou lorsqu'il présente une partie cylindrique dont la longueur est moindre que l'intervalle de deux aubes consécutives. Il en résulte que l'entrée et la sortie de l'eau restent quelque temps ouvertes simultanément pour un même vase, ce qui est un vice évident;

4^o Si la longueur de la partie cylindrique du coursier excède l'intervalle de deux aubes consécutives, et si le jeu est très-petit, le vase reste fermé pendant un temps qui, quoique très-court, peut être suffisant pour que l'eau renfermée dans ce vase achève de se ralentir et de se réduire à une vitesse à peu près commune et égale à la vitesse moyenne des aubes. Dans ce cas l'eau se nivelle dans le vase et la hauteur moyenne dont sa surface horizontale s'élève dépend principalement de la vitesse de la roue comparée à celle du courant qui l'alimente. Soit y cette hauteur, r le rayon de la circonférence extrême de la roue, C la distance des aubes de milieu en milieu sur cette circonférence, c l'épaisseur des aubes. Le volume d'eau contenu entre deux aubes est

$$by \left(C \frac{r - \frac{y}{2}}{r} - c \right)$$

Le nombre d'aubes et de tels volumes qui passent par seconde est $\frac{v}{C}$, la vitesse de la circonférence de la roue étant v . On a donc la dépense d'eau par seconde

$$bhv = b \left(c \frac{2r-y}{2r} - c \right) \frac{y u}{c}, \text{ ou } y^2 - 2r \left(1 - \frac{c}{c} \right) y = 2rh \frac{v}{u}$$

Exemple: $r = 2^m, 5$; $h = 0^m, 20$; $\frac{v}{u} = 2$; $\frac{c}{c} = \frac{1}{21}$; $y = 0^m, 475$.

5° La ^{vitesse} moyenne de la partie immergée de la roue est $u \frac{2r-y}{2r}$. Et partir de l'instant où la

première des deux aubes consécutives se sépare du coursier, l'eau possédant cette vitesse moyenne tend à continuer sa marche horizontale et sort par conséquent de la roue par le seul effet de cette vitesse sans qu'il soit nécessaire pour cela de lui ménager une chute à l'aval. Le mouvement horizontal de l'eau est un peu contrarié par le mouvement circulaire des aubes, surtout si les plans de celles-ci passent par l'axe de la roue. Mais on atténue cet inconvénient en donnant à la roue un grand diamètre. D'ailleurs les aubes en se retirant de l'eau font que celle-ci conservant la même vitesse abaisse un peu son niveau; de cette petite descente résulte un travail de la pesanteur qui compense le travail résistant des aubes à l'endroit dont il s'agit.

6° Et partir de l'endroit où le courant quitte la roue, la disposition du canal de fuite et la situation du point d'eau du bief inférieur produisent des cas divers qu'il importe de distinguer: l'eau sortant de la roue peut se réunir au bief d'aval, soit avec une pente descendante, soit sans pente notable, soit avec une contrepente.

Nous dirons tout à l'heure quelques mots de ces dernières circonstances. Bornons nous pour le moment à considérer le courant depuis l'endroit de son entrée dans la roue en CD jusqu'à celui de sortie en $A'B'$, et cherchons à déterminer le travail total par seconde des actions ou pressions de l'eau sur la roue lorsque le mouvement de l'une et de l'autre est devenu périodiquement permanent, la durée de la période étant égale au temps très-court θ pendant lequel une aube parcourt l'intervalle qui la sépare de l'aube suivante.

504. Pour simplifier, nous négligeons l'épaisseur des aubes et leur angle variable avec la verticale. Nous admettrons que la vitesse moyenne de l'eau à sa sortie est égale à la vitesse des aubes prise au milieu de leur partie immergée. Enfin nous négligeons les frottements du coursier contre le liquide.

Ces hypothèses et le mouvement horizontal de l'eau en AB et $A'B'$ rendent très-simple l'application du théorème de la quantité de mouvement.

Soient v' et h' la vitesse et la profondeur de l'eau en $A'B'$. Ainsi $v'h' = v h$, la largeur du courant étant h en $A'B'$ comme en AB . En désignant par P le poids de l'eau qui s'écoule en 1", on a pour l'accroissement pendant le temps θ de la quantité de mouvement de tout le liquide compris, au commencement de ce temps, entre AB et $A'B'$,

$$\frac{P\theta}{g} (v' - v).$$

1^{re} Division.

Cours de Méc. et Mach. - 33^e Feuille.

Les forces extérieures dont l'impulsion doit être projetée horizontalement sont:

1^o Les pressions sur les plans d'amont et d'aval AB et $A'B'$, lesquelles, en négligeant la pression atmosphérique dont l'impulsion totale sur le système est nulle sont exprimées par

$$\frac{1}{2} \pi b h^2 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \pi b h'^2;$$

2^o Les actions de la pesanteur dont les projections horizontales sont nulles;

3^o Les réactions des aubes sur l'eau qui les presse dans les deux sens. Soit F la somme algébrique des composantes horizontales de ces forces, somme dirigée en sens contraire du courant.

On a donc, en négligeant les frottements extérieurs, et en supprimant le facteur θ commun aux impulsions

$$\frac{P}{g} (v' - v) = \frac{1}{2} \pi b h^2 \left(1 - \frac{h'^2}{h^2}\right) - F.$$

La force F est précisément égale à la somme des composantes horizontales des forces exercées par le liquide sur les aubes. On peut la considérer comme la résultante de ces forces et lui donner approximativement pour point d'application un point de la roue possédant la vitesse v' . Ainsi le travail moteur total transmis par l'eau à la roue dans chaque seconde est $F \cdot v'$. Représentons-le par T_m , et l'équation précédente, en remplaçant h' par sa valeur $\frac{hv}{v'}$ et $\pi b h v$ par P , devient

$$T_m = \frac{P}{g} v' (v' - v) - \frac{1}{2} P h \left(\frac{v}{v'} - \frac{v'}{v} \right) \dots \dots \dots [1]$$

Les théories données par divers auteurs pour la question qui nous occupe les ont conduits à un résultat plus simple, savoir:

$$T_m = \frac{P}{g} v' (v' - v) \quad \text{ou} \quad T_m = P \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v'^2}{2g} - \frac{(v - v')^2}{2g} \right)$$

dont l'inexactitude tient à ce qu'on néglige l'élevation que prend nécessairement le liquide en perdant une partie de sa vitesse.

505. - L'expression [1] du travail reçu par la roue fait voir que si l'on suppose v et h donnés, et que l'on fasse varier v' vitesse de la roue qui dépend de la résistance qu'on lui applique, le travail T_m varie et atteint son maximum lorsque la valeur de v' satisfait à l'équation

$$\frac{1}{g} (v - 2v') + \frac{1}{2} h \left(\frac{v}{v'^2} + \frac{1}{v} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - 2x + \frac{1}{4} \frac{h}{h_1} (x^2 + 1) = 0 [2]$$

en faisant $\frac{v'}{v} = x$ et $h_1 = \frac{v^2}{2g}$

Si, suivant l'hypothèse ordinairement admise, on considère h comme nulle on voit que le maximum de T_m répond à $v' = \frac{1}{2} v$; et que sa valeur est

$$\frac{1}{2} P \frac{v^2}{2g}$$

moitié de la puissance vive possédée avant le choc par l'eau dépensée.

On voit aussi que v' peut différer sensiblement de $\frac{1}{2}v$ sans que le travail T_m s'éloigne notablement du maximum. Ainsi par exemple:

$$v = \frac{4}{9}v \quad \text{et} \quad v' = \frac{5}{9}v$$

donnent
$$v'(v - v') = \frac{20}{81}v^2$$

qui est à $\frac{1}{4}v^2$ dans le rapport de 80 à 81.

506. — En réalité l'hypothèse $h=0$ est inadmissible, parce que si la profondeur h du courant était trop petite, la roue serait excessivement large et le jeu entre les aubes et le coursier ferait perdre une fraction considérable de l'action de l'eau.

Si l'on suppose, par exemple $h = 0^m,18$ et $\frac{v^2}{2g} = 1,50$, c'est-à-dire $h = 0,12h_1$, l'équation [2] donne $\frac{v'}{v} = 0,56$, et l'équation [1] $T_m = 0,42 P \frac{v^2}{2g}$. Mais il est à remarquer qu'une variation notable du rapport $\frac{v'}{v}$ altère peu le rapport de T_m à $P \frac{v^2}{2g}$ qui prend les valeurs 0,41 et 0,39 suivant qu'on fait $\frac{v'}{v}$ égal 0,50 on a 0,45.

507. — Expériences de Smeaton. Des expériences directes ont été faites en 1759 sur un modèle en petit de roue à palette en dessous, par l'ingénieur anglais Smeaton. Elles lui ont donné 0,33 seulement pour le maximum du rapport de T_m à $P \frac{v^2}{2g}$, et 0,40 pour la valeur correspondante du rapport $\frac{v'}{v}$. Cela peut tenir à ce que le fond du coursier étant plan, une partie de l'eau passait dans la roue en conservant une partie de son excès de vitesse. Or, la perte d'effet due à cette cause était atténuée par le ralentissement de la roue, ce qui explique pourquoi le maximum de T_m a été trouvé correspondre à $\frac{v'}{v} = 0,40$.

Au reste en faisant dans l'équation [1] $\frac{v'}{v} = 0,40$ et $h = 0,12 \frac{v^2}{2g}$, on trouve

$$T_m = 0,35 P \frac{v^2}{2g},$$

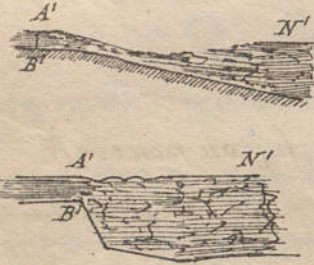
ce qui diffère bien peu du résultat obtenu par Smeaton.

508. — Disposition de la roue relativement aux biefs d'amont et d'aval. — L'objet qu'on se propose dans l'établissement d'une roue hydraulique est de lui transmettre le plus grand travail possible avec une chute donnée. Il convient donc de compléter la théorie précédente en examinant: 1° quelle peut ou doit être la situation du niveau du bief d'amont par rapport au point C où la roue commence à s'immerger dans le courant qui possède la vitesse v ; 2° quelle peut ou doit être par rapport à la superficie du bief inférieur la situation du point A' où les aubes quittent le courant possédant en ce point la vitesse v' avec la profondeur h' .

1^o L'eau pour arriver en C sort ordinairement du bief d'amont en passant sous une vanne, et il importe que la distance entre cette vanne et le point d'immersion de la roue soit aussi petite que possible, parce que, pour entretenir dans l'espace intermédiaire la vitesse du courant, il faut une pente dont la grandeur totale est à retrancher comme perte de la chute disponible.

Il convient par ce motif d'incliner la vanne. Il importe également que les parois verticales de l'ouïse soient prolongées dans le bassin supérieur par des surfaces arrondies afin d'éviter autant qu'il se peut la contraction latérale suivie d'élargissement brusque à l'aval de l'ouïse.

2^o La différence de niveau du point A' et du bief inférieur de l'usine dépend de diverses circonstances. Si, suivant une disposition souvent pratiquée autrefois, on a placé le fond B du coursier à peu près au niveau N' du bief inférieur, l'eau en quittant la roue tombera dans ce bief et acquerra en pure perte un accroissement de vitesse qui s'anéantira ensuite, ainsi que l'excès de la vitesse v' sur celle du bief d'aval, par l'effet de l'agitation et des frottements du liquide. On supprimera la perte de chute de A' en N' si le fond du coursier B' est établi de manière que la superficie A' de l'eau au sortir de la roue se trouve au même niveau que le bief inférieur; et c'est la règle qu'il faudrait suivre si, immédiatement après le plan A'B', la section du courant était brusquement agrandie en profondeur et en largeur. Dans ce cas la vitesse v' diminuerait rapidement et la puissance vive $P \frac{v'^2}{2g}$ qui lui correspond serait encore complètement perdue pour l'usine.



On peut faire mieux encore pour obtenir de la chute supposée donnée un plus grand travail T_m . C'est de disposer le coursier et le canal de fuite comme l'indique la figure du N^o 503, c'est-à-dire de faire en sorte que le point A' soit plus bas que le point N', la différence de niveau de ces deux points étant telle que la superficie du courant puisse remonter de l'un à l'autre par l'effet de l'excès de la vitesse v' sur celle qui doit subsister dans le bief d'aval. La théorie du phénomène de contrepente qui peut être ainsi réalisé n'entre pas, faute de temps, dans le programme des études de l'École Polytechnique. On se borne ici à dire qu'à l'aval du point A' où la roue sort du courant, il conviendrait de donner au fond du canal de fuite une pente d'environ $\frac{1}{3}$ jusqu'à la rencontre du fond naturel du bief, et d'attribuer à la contrepente de A' en N' une valeur égale à environ les deux tiers de $\frac{v'^2}{2g}$. De cette manière si l'on appelle z la différence de niveau du bief supérieur au point C, la chute totale H d'un bief à l'autre serait

$$H = z + h - h' - \frac{2}{3} \frac{v'^2}{2g} \dots \dots \dots [3]$$

et le rendement théorique de la roue

$$\frac{v'(v-v') - \frac{h}{2} \left(\frac{v}{v'} - \frac{v'}{v} \right)}{z+h-h' - \frac{2}{3} \frac{v'^2}{2g}}$$

Ce résultat devrait être convenablement modifié dans la pratique pour avoir égard au jeu plus ou moins grand entre les aubes et le coursier, et à l'obliquité des aubes si le diamètre de la roue n'était pas assez grand.

509. — Supposant connu le poids $P = \Pi Q$ dépensé par seconde et la hauteur H de la chute, on peut se proposer la détermination des autres quantités qui appartiennent à une roue de l'espèce dont nous venons de nous occuper. On remarquera que z est un peu supérieur à $\frac{v^2}{2g}$, soit environ $1,1h_1$, en sorte que les équations [1] du N° 504 et [3] du N° 508 peuvent s'écrire ainsi :

$$T_m = \left\{ 2h_1 \frac{v'}{v} - \frac{1}{2} h \left(\frac{v}{v'} - v \right) \right\} \left(1 - \frac{v'}{v} \right) P$$

et

$$H = 1,1h_1 - h \left(\frac{v}{v'} - 1 \right) - \frac{1}{2} h_1 \left(\frac{v'}{v} \right)^2$$

et il semblerait qu'en éliminant une des trois quantités h , $\frac{v'}{v}$ et h_1 , on pourrait considérer T_m comme une fonction de deux variables indépendantes qu'il conviendrait de choisir de manière à obtenir son maximum. Mais on serait conduit ainsi à faire $\frac{v'}{v}$ et h plus grands que la pratique ne le permet. A moins de donner à la roue un très grand diamètre, et à la partie courbe du coursier une assez grande étendue, si l'on faisait $v' > \frac{1}{2}v$, il pourrait en résulter que l'eau n'aurait pas le temps de perdre entre les aubes l'excès de sa vitesse; il paraît préférable de poser immédiatement pour $\frac{v'}{v}$ la valeur expérimentale trouvée par Smeaton: soit $\frac{v'}{v} = 0,40$; et quant à la hauteur h , il ne faut guère la faire plus grande que $0^m,20$, d'où résulte $h' = 0,50$, afin que les aubes restent sensiblement verticales pendant leur immersion. A l'aide de ces données, les équations ci-dessus détermineraient dans chaque cas h_1 , et le rendement théorique $\frac{T_m}{PH}$. Connaissant $\frac{v'}{v}$, h et h_1 , et par suite z , h' et $\frac{2}{3} h_1 \left(\frac{v'}{v} \right)^2$ on construirait sans difficulté le profil longitudinal du coursier, dans sa situation relative aux deux biefs. Enfin la largeur b serait donnée par la relation $Q = bhv$ dans laquelle $v = \sqrt{2gh_1}$.

Au reste la roue à aubes planes en dessous ne doit guère être considérée

que comme un objet dont l'étude prépare à celle des autres systèmes de récepteurs bien préférables dans la pratique, si ce n'est dans le cas où la puissance absolue de la chute dépassant les besoins, l'ingénieur devrait avoir surtout en vue l'économie des frais d'établissement.

§ 5. - Roues à coursier circulaire dites roues de côté.

510. - Une roue de cette espèce tourne autour d'un axe horizontal dans un coursier à fond cylindrique circulaire qui, à partir d'un point plus ou moins rapproché du niveau du bief d'amont (point au-dessous duquel a lieu l'introduction de l'eau entre les anches) descend jusqu'à l'aplomb de l'arbre de la roue, en laissant le moins de jeu possible aux bords extérieurs des anches, au moyen de quoi celles-ci forment avec le fond du coursier une suite de vases d'où l'eau, une fois qu'elle y est entrée, ne peut s'échapper qu'à mesure que les anches arrivent avec elle au point inférieur où le coursier cesse de les enboîter exactement.

On peut ordinairement négliger, comme très-petite, la vitesse que l'eau possède à quelques mètres de distance en amont de la roue. D'après cela si la roue étant à l'état de mouvement sensiblement uniforme, on appelle :

u la vitesse conservée par l'eau dans une section du courant d'aval, plus ou moins rapprochée de la roue ;

H la hauteur de la chute entre le bief d'amont et le niveau d'aval, au point où la vitesse est u ;

P le poids de l'eau écoulée par seconde ;

T_m le travail moteur transmis à la roue dans le même temps ;

T_f le travail résistant développé en une seconde soit par le frottement des parois solides en contact avec l'eau, soit par les actions mutuelles du liquide entre les deux limites de la chute H considérée, on a

$$T_m = PH - P \frac{u^2}{2g} - T_f.$$

Le terme T_f qui mesure une perte de puissance dépend de diverses causes, savoir :

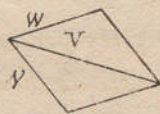
1^o Perte de puissance pour amener l'eau du bief d'amont jusqu'à la roue. L'eau peut sortir du bief supérieur soit par une vanne soit par un déversoir. Dans le premier cas, il importe d'avoir égard aux observations précédemment faites sur la disposition de la vanne d'une roue en dessous.

2^o Perte de puissance pour l'introduction de l'eau dans la roue. - L'entrée de l'eau dans le vase formé par deux anches consécutives, depuis l'instant où le bord de la première plonge dans le courant jusqu'à celui où le bord de la seconde vient joindre la tête ou anête supérieure du coursier donne lieu à un travail résistant subi par le liquide.

Soient p le poids et V la vitesse d'une molécule du courant à l'instant où elle atteint soit un point de la roue soit une portion du liquide qui, précédemment entrée, a déjà pris la vitesse de la roue que nous désignerons par v . Aussitôt que la molécule considérée est ainsi en contact avec le vase formé de deux aubes consécutives, elle participe à l'agitation qui y règne et subit des résistances en vertu desquelles elle finit par ne plus posséder que la vitesse v .

Pour déterminer le travail résistant qui s'est développé pendant ce changement de vitesse, il faut se rappeler, premièrement, que le travail des actions mutuelles ne dépend que des mouvements relatifs des corps; secondement que la vitesse w de la molécule d'eau relativement à la roue et la vitesse v d'entraînement de cette roue sont les deux composantes de la vitesse absolue V de l'eau, d'où l'on conclut la relation

$$w^2 = V^2 + v^2 - 2Vv \cos(V, v)$$



Cela posé, il y a à remarquer que la vitesse w peut s'amoindrir par deux causes; savoir: 1° les frottements résultant de l'agitation, 2° la pesanteur, lorsque la molécule liquide finit par s'arrêter dans le vase en un point plus élevé que le premier point de rencontre, comme nous avons vu que cela arrive dans la roue à palettes en dessous. On néglige ordinairement cette partie du phénomène et l'on regarde comme entièrement due aux frottements du liquide la perte de la vitesse w ; par conséquent le travail de ces forces résistantes sur la molécule considérée est exprimée par

$$-\frac{1}{2} \frac{P}{g} w^2$$

A cette hypothèse on en ajoute une autre. On admet que ce que nous venons de dire d'une molécule s'applique à tout le courant, c'est-à-dire que tous ses éléments ont, en intensité et en direction une même vitesse V à l'instant de leur rencontre avec la roue ayant la vitesse v , et que chaque élément perd par les frottements la vitesse w , de sorte que P étant le poids de l'eau dépensée par seconde, le travail résistant de ces frottements, dans le même temps est

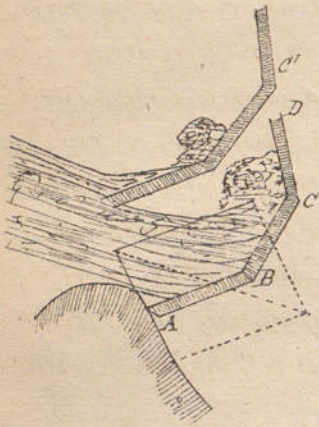
$$-\frac{P}{2g} w^2 \quad \text{ou} \quad -\frac{P}{2g} (V^2 + v^2 - 2Vv \cos(V, v))$$

Si la vitesse V était indépendante de la figure des aubes formées par les aubes, la direction de celles-ci serait indifférente quant au travail résistant dû à l'introduction de l'eau dans la roue. Mais il en est tout autrement, et quoique le phénomène dont il s'agit soit fort compliqué et ne paraisse pas pouvoir se soumettre au calcul, on peut se rendre compte des règles suivantes dont la pratique m'a démontrée dès 1819 l'utilité.

I. — Il importe que la direction des aubes en leur point le plus éloigné de l'axe de la roue, soit à peu près celle de la vitesse relative de l'eau à son entrée en ce point dans la roue. Si au contraire cette vitesse relative s'élevait au-dessus des aubes, il en résulterait

deux inconvénients notables : un choc en dessous des aubes, et l'emprisonnement momentané d'une certaine quantité d'air entre l'eau et le dessus des aubes.

II. — La direction des aubes, au point d'entrée, doit différer peu de celle du rayon de la roue.



III. — Lorsque le centre de la roue est peu élevé au-dessus du point d'entrée, il est avantageux de donner aux aubes une figure polygonale à pan coupé (croquis ci-contre) afin de diminuer le choc de l'eau contre le fond CD de l'auget;

IV. — Le petit intervalle DC sert à laisser sortir et rentrer l'air quand l'auget s'emplit et se vide, et la position élevée du point D suppose un jaillissement de l'eau à l'intérieur de la roue.

3°. — Perte de puissance par le frottement de l'eau sur le coursier circulaire. — Cette perte peu considérable quand les roues tournent lentement, devient sensible quand leur vitesse est grande; elle peut se calculer approximativement. La résistance que le lit d'un courant en mouvement uniforme exerce sur le liquide compris dans une longueur L est

$$\pi \chi L (aU + bU^2) \text{ ou plus simplement } \pi \chi L b U^2,$$

Or la vitesse U a une relation avec la vitesse du fond W ; car on a à peu près

$$U = 0,8V \text{ et } 2U = V + W; \text{ d'où } U = \frac{4}{3} W.$$

Par conséquent la résistance du lit est $\pi \chi L b \left(\frac{4}{3} W\right)^2$

et son travail pendant une seconde $-\pi \chi L b \left(\frac{4}{3} W\right)^2 W$ ou $-\frac{PLb}{R} \left(\frac{4W}{3}\right)^2 \frac{W}{U}$,

à cause des relations $P = \pi \Omega V$ et $R = \frac{\Omega}{\chi}$. Cette formule s'applique à la question proposée en faisant W égal à la vitesse de la roue à sa circonférence, et U à la vitesse moyenne de l'eau dans la roue.

Exemple: $W = 3$; $R = 0,15$; $L = 3$; $W = 1,05U$; $b = 0,00037$. Travail $-0^m,12P$.

4°. — A la perte qui vient d'être évaluée il faudrait ajouter celle qui résulte du jeu entre les aubes et le coursier. On n'en peut guère tenir compte qu'en affectant d'un coefficient de réduction l'expression du travail transmis T_m .

5°. — Perte de puissance depuis l'aplomb de l'arbre jusqu'à l'extrémité du canal de fuite. — Ici se présentent les considérations déjà exposées (508) sur le moyen d'utiliser une partie de la puissance vive possédée par l'eau à sa sortie de la roue.

Les indications qui précèdent fournissent le moyen d'apprécier presque avec exactitude le rendement d'une roue du genre de celle dont il s'agit ici.

511. — Roue de côté lente. Ces mêmes indications démontrent l'avantage qu'on doit obtenir, sous le rapport du rendement, en ralentissant le mouvement de la roue. S'il était praticable de faire arriver l'eau avec une très-faible vitesse sur une roue qui tournerait très-lentement, il est clair que les diverses causes de perte de puissance signalées ci-dessus perdraient leur importance, et que le travail transmis à la roue différerait très-peu de la puissance totale de la chute. Mais plus la roue est lente plus elle doit être large pour dépenser un volume donné, et les circonstances locales ne laissent pas toujours à cet égard une entière liberté. D'un autre côté, en ralentissant la roue on augmente la perte inévitable qui résulte du jeu entre les aubes et le coursier, et l'on accroît la complication et les frottements des engrenages nécessaires pour transmettre aux machines ou à la vitesse convenable. L'expérience a appris que lorsque rien ne s'y oppose, la vitesse la plus convenable de la circonférence d'une roue de côté est d'environ $1^m, 30$ par seconde.

L'introduction de l'eau dans la roue se fait par un orifice en déversoir placé immédiatement contre la roue. La hauteur du niveau du bief supérieur au dessus du sommet de ce déversoir peut varier de $0^m, 20$ à $0^m, 27$, quand la chute excède un mètre. Une trop faible épaisseur de la lame déversante entraîne une trop grande largeur; une trop forte épaisseur produit une trop grande vitesse d'arrivée de l'eau dans la roue.

Les aubes disposées comme l'indiquent le précédent croquis doivent être espacées de $0^m, 30$ à $0^m, 40$. La capacité des angets doit être suffisante pour les eaux les plus abondantes que l'on veut utiliser. Si le volume d'eau disponible était constant, il ne devrait remplir que les deux tiers environ de la capacité totale.

L'expérience constate que le rendement d'une roue de côté lente peut dépasser $0^m, 80$.

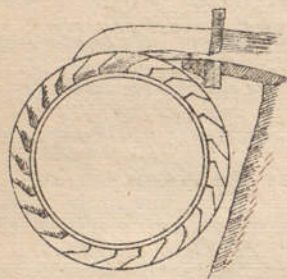
§. 6. — Roue à augets non emboîtée, dans un coursier.

512. — La théorie simplifiée de cette roue diffère peu de la précédente. Les vases ou augets qui reçoivent l'eau font entièrement partie de la roue et retournent, sans l'intervention d'un coursier fixe, cette eau qui les abandonne avant d'arriver à l'aplomb de l'arbre.

Les principes généraux de la mécanique suffisent pour rendre raison des préceptes pratiques qui suivent:

1^o Pour qu'une roue à augets rende le plus grand effet possible, il faut que sa vitesse soit très-petite; car cette vitesse est à peu près celle de l'eau à l'instant où elle quitte la roue, et elle est due à une hauteur de chute qui est perdue pour le

récepteur. La vitesse de 1^m à la circonférence paraît celle qui donne le meilleur résultat. Cependant il ne faut pas s'exagérer l'importance de la perte qu'entraîne une grande vitesse; car une vitesse de 2^m, par exemple, n'est due qu'à une hauteur de 0^m,204 qui a moins de valeur relative à mesure que la chute totale est plus grande.



2^o Les roues à augets, dites roues en dessus, qui reçoivent l'eau à leur point culminant avec une vitesse un peu plus grande que celle des augets, sont préférables à celles qui prennent l'eau en dessous du sommet, parce que dans ces dernières, l'eau tombe de plus haut dans les augets. Lorsque le niveau supérieur du bief supérieur est à peu près constant, il est bon que le sommet de la roue soit établi à très peu de hauteur, environ 0^m,20, au-dessous de ce niveau. Il est avantageux de prolonger le fond de l'auget qui amène l'eau à la roue par une lame métallique très rapprochée de la roue et terminée à environ 0^m,40 en amont de l'aplomb de l'arbre. Les bords latéraux de cette auget sont prolongés jusqu'en aval du sommet de la roue pour empêcher l'eau de s'échapper latéralement au moment de la mise en train.

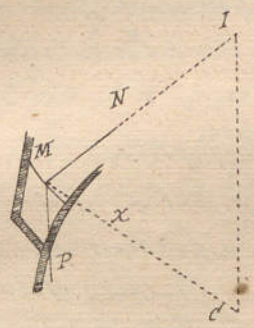
3^o La forme des augets doit être calculée de manière à concilier autant qu'il est possible la facile introduction de l'eau et sa retenue jusqu'à une petite distance du niveau du bief inférieur. Dans les roues en dessus il importe que l'épaisseur de la couronne des augets dans le sens du rayon soit petite, comme de 0^m,25 à 0^m,28, afin que l'eau commence à agir, en vertu de son poids, à la plus grande élévation, ou, en d'autres termes, afin que la vitesse relative de l'eau, à son entrée dans la roue, soit réduite autant qu'il se peut. Une roue ayant à sa circonférence une vitesse de 0^m,30 à 1^m,40 peut dépenser convenablement de 70 à 100 litres par seconde et par mètre de largeur.

4^o Les roues à augets ne sont pas ordinairement immergées au-dessous du niveau du bief d'aval. Pour qu'elles puissent l'être avec avantage il faudrait les embêter à la partie inférieure dans un courtois qui empêcherait l'eau de s'échapper avant d'arriver au point le plus bas; mais il faudrait aussi adapter à chaque auget, vers l'intérieur de la roue, une soupape qui permettrait à l'air de rentrer quand l'eau sortirait.

Il résulte de diverses expériences que dans les roues à augets lentes, le rendement va jusqu'à 0,75 et même 0,80.

513. — Roue à augets rapide. — On emploie quelquefois, surtout dans les forges, des roues en dessus à grande vitesse; ce qui entraîne une perte considérable de travail et oblige de tenir le sommet de la roue beaucoup plus bas que le niveau du bief d'amont. Dans ce cas, il est à remarquer que la superficie de l'eau, dans chaque auget, n'est plus sensiblement horizontale, comme on peut l'admettre quand la vitesse est faible.

La figure qu'elle affecte est utile à connaître parce qu'elle détermine le plus grand volume d'eau qu'un auget peut contenir dans chaque position, et par conséquent le point où cet auget, chargé d'un volume donné, commence à déverser. On peut, comme l'a enseigné M. Poncelet, trouver approximativement cette figure. Il considère l'eau contenue dans un auget comme y étant sensiblement en repos relatif. Une molécule de la surface du liquide décrit donc un cercle d'un mouvement uniforme; la résultante X des forces qui la sollicitent est donc dirigée au centre et a pour valeur $\frac{p\omega^2 r}{g}$, le poids de la molécule étant p, sa distance au centre r, la vitesse angulaire de la roue ω . Or, cette résultante X a pour composantes le poids de la molécule, force verticale, et la réaction totale N des molécules environnantes, force normale à la surface du liquide.



Soit MI la direction de cette normale, et I son intersection avec la verticale, passant par le centre C de la roue.

Les trois côtés MC, CI, MI sont respectivement parallèles à la résultante X et à ses composantes p et N; ils leur sont proportionnels; ainsi

$$CI : MC :: p : X \text{ ou } CI : r :: p : \frac{p\omega^2 r}{g}; \text{ d'où } CI = \frac{g}{\omega^2},$$

quantité indépendante de r et de la position de l'auget. Ainsi, dans l'hypothèse approximative énoncée ci-dessus, la surface de l'eau dans un auget quelconque est cylindrique, à section circulaire dont le centre est un point fixe I (Ex. roue de 3^m de diamètre ayant une vitesse de 4^m à la circonférence CI = 1^m,38).

Une construction graphique et l'application de la formule de Ch. Simpson permettent de calculer le travail dû au poids de l'eau depuis le point où elle commence à se déverser en dehors des augets jusqu'à celui où elle en est entièrement sortie.

§ 7. ~ Roues à aubes courbes de M. Poncelet.

514. ~ La faiblesse du rendement des roues en dessous à aubes planes sans contre-pente du courant en aval vient, premièrement, du travail résistant dû à l'agitation de l'eau forcée de réduire sa vitesse moyenne à celle des aubes, tandis que son centre de gravité ne s'élève que très peu; secondement de la puissance vive perdue en pure perte par le liquide à l'instant où il quitte la roue. M. Poncelet s'est proposé d'éviter ce double inconvénient en conservant à la roue en dessous

les avantages qu'elle a sur la roue lente de côté : ceux d'une plus grande vitesse et d'une moindre largeur. Toute la question, a-t-il dit (Mémoire sur les roues à aubes courbes, 1827) consiste à faire en sorte que l'eau n'exerce aucun choc à son entrée dans la roue, ni dans son intérieur, la quitte également sans conserver aucune vitesse sensible. Pour remplir cette double condition, dont l'importance est établie précédemment par les considérations générales sur les récepteurs hydrauliques, il a remplacé les aubes planes ordinaires par des aubes courbes présentant leur tranchant et leur concavité au courant.

On simplifie la théorie de cette roue, à l'aide de quelques hypothèses. On assimile la portion de liquide qui s'introduit horizontalement entre deux aubes consécutives à un point matériel ou petit corps solide, qui n'éprouverait aucun frottement. On suppose que la tangente extrême de l'aube se confond avec celle de la circonférence de la roue et avec la direction de la vitesse de l'eau au point d'introduction.

Soit V cette dernière vitesse et v celle de la circonférence de la roue. L'eau à l'instant de son entrée a donc sur l'aube, et tangentielllement à la surface de celle-ci une vitesse relative $V - v$. Considérant le rayon de la roue comme assez grand pour que le mouvement des aubes soit, dans une certaine étendue, un mouvement sensiblement uniforme de translation horizontale, on peut appliquer au mouvement relatif du corps moteur sur l'aube les lois du mouvement absolu.

Il s'y élève donc, s'il est sans frottement, à une hauteur $\frac{1}{2g}(V-v)^2$, puis redescend et reprend, quand il atteint de nouveau l'extrémité de l'aube, la vitesse relative $V - v$ mais en sens contraire du mouvement de la roue. La vitesse absolue qu'il possède à l'instant où il quitte cette dernière est donc $V - (V - v)$ ou $2V - V$. Par conséquent la puissance vive que ce corps a perdue, son poids étant désigné par p , est

$$\frac{1}{2} \frac{p}{g} [V^2 - (2V - V)^2] \quad \text{ou} \quad \frac{2p}{g} (V - v) v$$

Or, l'hypothèse étant que le corps moteur n'est soumis à aucun frottement, il s'ensuit que sa diminution de puissance vive lorsque, après s'être élevé il est redescendu au même niveau, est égale au travail qu'il a reçu de l'aube et par conséquent au travail moteur qu'il a transmis à cette aube. Donc si P est le poids de l'eau motrice dépensée par seconde et T_m le travail moteur qu'elle exerce sur la roue, on a

$$T_m = 2 \frac{P}{g} (V - v) v,$$

et pour son maximum

$$T_m = P \frac{V^2}{2g},$$

répondant à $v = \frac{1}{2}V$ et égal à la puissance vive du liquide à l'instant où il

une partie circulaire emboitant la roue sur une longueur à peu près égale à l'intervalle de deux aubes, après quoi se trouve un approfondissement ou saut brusque qui permet à l'eau de quitter la roue normalement à la circonférence. Le point le plus bas de la roue doit être au niveau des eaux moyennes dans le canal de fuite. La vanne qui livre l'eau à la roue doit être disposée suivant les indications données au § 4 (508, 1°). Les aubes sont assemblées et contenues entre deux couronnes annulaires montées sur un certain nombre de bras et destinées à empêcher l'eau de se répandre latéralement. Suivant des expériences de M. Morin, la capacité des angets compris entre les couronnes et les aubes doit dépasser 1,6 fois le volume d'eau dépensé, afin que l'eau ne jaillisse pas vers l'arbre en dehors de ces espaces. L'écartement intérieur des couronnes excède un peu la largeur de l'orifice et du fond du coursier d'introduction. La courbe du profil des aubes est indifférente, pourvu qu'elle soit continue, qu'elle rencontre la circonférence extérieure sous un angle d'environ 30° et la circonférence intérieure à peu près à angle droit. Le nombre des aubes est ordinairement de 36 pour les roues de 3 à 4^m de diamètre, et de 48 pour celles de 6 à 7^m.

518. — Suivant M. Morin, le rendement des roues de cette espèce, dans les circonstances favorables, peut aller jusqu'à 0,65. Elles sont donc incontestablement préférables aux roues à aubes planes en dessous. Mais leur rendement est notablement inférieur à celui des roues de côté bien disposées.

§ 8. — Roues à axe vertical. — Turbines. Roues dites à réaction.

519. — Les roues à axe vertical sont de deux genres. Les unes sont dites mues par le choc. L'eau qu'elles reçoivent jaillit au bas de la chute par un tuyau et se rend dans le bief inférieur avec une vitesse égale à celle des aubes qu'elle a frappées. Cette disposition analogue à celle des roues verticales en dessous entraîne une grande perte de travail. Nous ne nous y arrêterons pas.

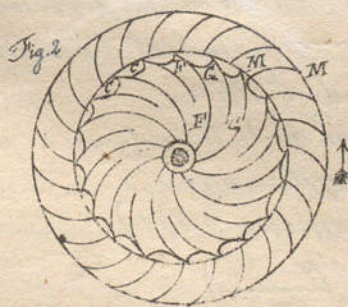
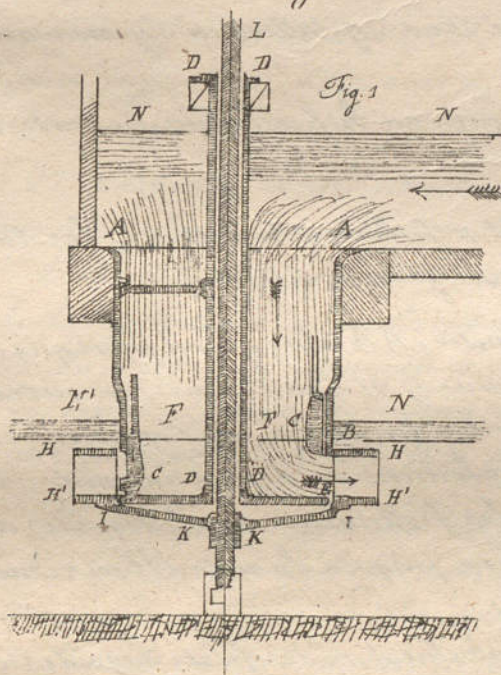
Les autres recevant l'eau avec le moins possible de changement brusque de vitesse sont dites mues par pression; il vaudrait mieux dire sans choc, car en réalité l'eau et même un corps quelconque n'exerce sa fonction de moteur sur une machine que par sa pression.

Les roues à axe vertical, que l'industrie emploie en grand nombre depuis 25 ans, sous le nom de turbine, proposé vers 1826 par M. Burdin, ingénieur des mines, ont plusieurs avantages spéciaux: le premier est que les canaux compris entre leurs aubes ont deux orifices, l'un pour l'entrée, l'autre pour la sortie de l'eau, de manière que le liquide peut les parcourir sans agitation; le second est que chacun de ces canaux peut être continuellement traversé par le courant, de sorte qu'une

roue de dimensions modérées peut débiter utilement une grande dépense d'eau; le troisième est qu'une turbine peut être appliquée avec un rendement satisfaisant à une chute de très-grande hauteur sans accroissement ou plutôt avec diminution des dimensions de la roue; le quatrième est qu'une turbine peut continuer de fonctionner utilement malgré une élévation accidentelle du bief inférieur, qui arrêterait le mouvement d'une roue à axe horizontal.

520. — Les turbines sans choc sont de deux espèces. Les unes, comme dans l'industrie sous le nom de leurs constructeurs, Fontaine-Baron, Kœchlin, et autres, mais dont la théorie a été donnée dès 1752 par Euler, ont leurs orifices d'entrée et de sortie dans deux plans horizontaux différents de manière que l'eau agit sur ces roues en descendant. Les autres, telles que celles de M. Fourneyron, ont leurs orifices d'entrée et de sortie à la même hauteur, de manière que l'eau s'y meut horizontalement.

521. — Turbine Fourneyron. — Nous exposerons ici la disposition et la théorie de cette



dernière roue comme exemple de la manière d'appliquer le calcul à toutes les turbines

NN niveau du bief supérieur; N'N' celui du bief inférieur.

AA ouverture circulaire à bord évasé dans le fond de la chambre en charpente qui termine le canal d'amont.

ABBA puits fixe en fonte, composé de deux parties cylindriques, l'inférieure un peu plus étroite, où joue la vanne CC.

DDDD cylindre fixe dit tuyau porte-fond.

DEDE plateau horizontal formant le fond fixe du puits et solidement assemblé avec le tuyau porte-fond. Le diamètre F'E est égal à celui BB du cylindre inférieur du puits. C'est dans l'intervalle BE que l'eau motrice s'échappe de dessous la vanne.

F'F, G'G, fig. 1 et 2, cloisons cylindriques dites directrices fixées au fond du puits où elles sont assemblées avec le plateau DE et en partie avec le tuyau DD.

HH'TKKIH'H turbine fixée sur son axe vertical L.L. qu'elle entraîne dans son mouvement de rotation. Elle est formée de deux couronnes planes horizontales HH, HH' avec lesquelles sont assemblées les aubes courbes MM (fig. 2) qui occupent leur intervalle.

La couronne inférieure $H'H'$ est liée avec l'arbre, $L.L.$ par une sorte de cuvette $IKKI$ qui se mouvant dans l'eau presque stagnante y éprouve moins de résistance que des bras qui seraient séparés comme dans une roue ordinaire.

Cette vanne formée d'un cylindre métallique à l'intérieur duquel sont fixés des tasseaux en bois qui s'insèrent entre les directrices, et qui sont arrondis de manière que l'eau en s'écoulant entre les directrices, le fond et ces tasseaux sort en jet horizontal. L'ensemble de ce vannage est manœuvré à l'aide de trois tiges verticales et d'un mécanisme qui les fait mouvoir à la fois. La vanne est représentée levée du côté droit de la figure et baissée de l'autre côté.

522. — Nous allons examiner par quelles dispositions cet appareil peut satisfaire, au moins approximativement, aux trois conditions d'un récepteur hydraulique parfait, savoir :

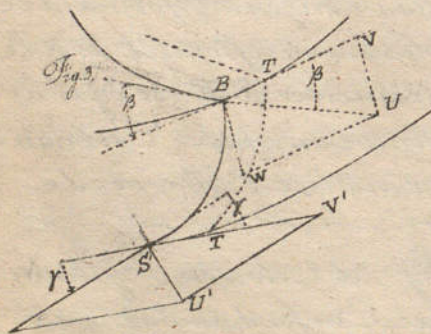
1^o Que l'eau descende du bief supérieur jusqu'à son entrée dans la roue sans subir un travail résistant notable;

2^o Que l'eau entre dans la roue et la parcoure sans agitation en s'y mouvant par filets sensiblement parallèles.

3^o Que l'eau à sa sortie de la roue et à sa réunion au bief inférieur ne conserve qu'une très-petite vitesse absolue.

Les roues lentes de côté réalisent autant qu'il est possible ces conditions; les turbines y satisfont presque aussi bien avec l'avantage d'une grande vitesse.

523. — 1^{re} condition. — Pour y satisfaire on fait le diamètre AA assez grand pour que la vitesse descendante soit petite; on érase l'entrée du puits; si l'eau, par son entrée oblique dans la chambre supérieure a une tendance à y tourner, on s'oppose à cet effet au moyen d'une cloison verticale placée diamétralement au dessus du puits. On



peut donc négliger les frottements sur le liquide depuis le bief supérieur jusqu'à la roue. Il en résulte que si l'on appelle :

u la vitesse absolue d'un des filets liquides à sa sortie du vannage et à son entrée dans la roue,

h la hauteur du niveau du bief d'amont au dessus du centre de gravité de l'orifice,

P la pression par m. g. du liquide en ce point,

p la pression atmosphérique,

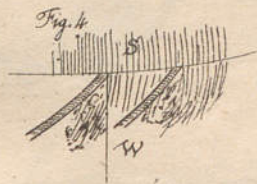
On a approximativement (441) :

$$u^2 = 2g \left(h + \frac{p - P}{\Pi} \right) \dots \dots \dots [1]$$

524. — 2^{me} condition. — Soit SU une droite qui représente, en intensité, et en direction la vitesse u pour le point d'introduction S ; soit SV une droite qui représente, de même la vitesse v de la roue au point S .

On en conclut par le parallélogramme $SVUW$ l'intensité et la direction SW de la vitesse relative w de l'eau à son entrée dans la roue. Et si l'on représente par β l'angle VSU égal à celui de la directrice avec la circonférence intérieure de la turbine, on a

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \beta \dots \dots \dots [2]$$



Cela posé, pour satisfaire à la condition d'éviter l'agitation du liquide, il faut que la direction des aubes à leur origine coïncide (Fig. 3.) avec celle de la vitesse relative w , sans quoi le liquide, dans son mouvement relatif, se présentant obliquement (Fig. 4) à l'entrée du canal formé de deux aubes consécutives éprouverait une

contraction suivie d'élargissement brusque, et les tourbillonnements qui en sont la conséquence.

La 2^e condition exige encore comme conséquence que les canaux formés par les aubes n'aient pas une trop forte courbure relativement à leur largeur, sans quoi l'eau s'y comporterait comme dans les tuyaux brusquement courbés. De là l'utilité de multiplier suffisamment les aubes, ce qui n'est pas sans inconvénient, parce que l'épaisseur des aubes produit des perturbations dans le jet affluent.

525. 3^e Condition. Pour introduire dans le calcul la vitesse absolue de l'eau à l'instant de sa sortie, commençons par calculer sa vitesse relative à cet instant.

Le filet liquide qui entre dans la roue en S (Fig. 3.) sort en S' en parcourant la courbe horizontale SS' égale à celle des aubes. Soit w' la vitesse relative de l'eau en S' et soit v' la vitesse de la roue en ce même point. Soit h' la hauteur du centre de gravité de l'orifice de sortie au-dessus du niveau $N'N'$, de sorte que la pression par $m \cdot g$ en ce centre de gravité est $p + \Pi h'$.

Cela posé, appliquons au filet liquide SS' passant par les centres de gravité des orifices, le théorème de l'effet du travail dans le mouvement relatif à un système solide tournant avec une vitesse angulaire ω . Décomposons le filet AB en un nombre infini de masses égales m et considérons le temps très-court θ pendant lequel l'une d'elles vient prendre la place de la suivante. Pendant ce temps, l'accroissement de puissance vive, dû au mouvement relatif est

$$\frac{1}{2} m (w'^2 - w^2).$$

Le travail de la pression d'amont en P multiplié par le volume décrit par la section rectangulaire animée de la vitesse w ; ce volume est

$$\frac{mg}{\Pi}; \text{ le travail } \frac{mgP}{\Pi}.$$

De même le travail de la pression d'aval est

$$-\frac{mg}{\pi} (\rho + \pi h')$$

Donc la somme des travaux des pressions extrêmes est

$$mg \left(\frac{\rho - p}{\pi} - h' \right)$$

Le travail de la force centrifuge sur une des masses m est

$$m\omega^2 x dx,$$

Si x est la distance de cette masse à l'axe de la roue, au commencement du temps θ et $x + dx$ la distance de la masse suivante dont elle prend la place. Donc si r et r' sont les rayons de la roue en S et S' , le travail de la force centrifuge, pour tout le filet, pendant le temps θ est l'intégrale

$$\frac{1}{2} m \omega^2 (r'^2 - r^2) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} m (v'^2 - v^2).$$

L'équation de l'effet du travail est donc

$$\frac{1}{2} m (w'^2 - w^2) = mg \left(\frac{\rho - p}{\pi} - h' \right) + \frac{1}{2} m (v'^2 - v^2)$$

ou
$$w'^2 - w^2 + v^2 - v'^2 = 2g \left(\frac{\rho - p}{\pi} - h' \right) \dots \dots \dots [3]$$

526 Les vitesses v et v' de la roue et les rayons r, r' correspondants ont la relation

$$vr' = v'r \dots \dots \dots [4]$$

L'incompressibilité du liquide et la permanence du mouvement fournissent une 5^e équation. Prenons à partir de S et de S' deux arcs très petits désignés par σ et σ' et proportionnels à leurs rayons r et r' . Représentons par γ l'angle de la vitesse w' ou de l'aube en S' avec la circonférence. L'égalité de volume d'épense par les deux sections obliques ayant σ et σ' pour bases donne

$$u\sigma \sin \beta = w'\sigma' \sin \gamma \quad \text{ou} \quad u \sin \beta = w'r' \sin \gamma \dots \dots \dots [5]$$

Notre but en considérant la vitesse relative w' était de trouver l'expression de la vitesse absolue de sortie du liquide que nous appellerons u et qui est la résultante de w' et de la vitesse v' de la roue en S' , d'où l'on conclut

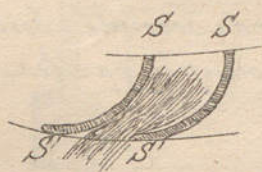
$$w'^2 = w'^2 + v'^2 - 2w'v' \cos \gamma = (wv' - v')^2 + 4wv'v' \sin^2 \frac{1}{2} \gamma$$

La vitesse u ne pourrait donc être nulle que par $wv' = v'$ et en même temps $\gamma = 0$. Or cette dernière hypothèse ne peut se réaliser, car il en résulterait que la dépense

$$w'\sigma' \sin \gamma'$$

qui se ferait par l'arc σ' sur l'unité de hauteur serait nulle, et si l'on disposait les

aubes tangentielllement à la circonférence extérieure, le liquide prendrait une autre direction. Tout ce qu'on peut faire c'est que w' ait une petite valeur, et c'est à quoi l'on parvient en faisant γ assez petit et en même temps.



$$w' - v' = 0 \dots \dots \dots [6]$$

$$\text{d'où résulte } w'^2 = 2v'^2(1 - \cos \gamma) \dots \dots \dots [7]$$

Les sept équations qui viennent d'être obtenues permettent, quand on se donne la chute $h - h'$, les rayons r, r' et les angles β et γ , de calculer les vitesses v' et w' et d'éliminer les autres inconnues. En ajoutant [1], [2] et [3], après y avoir fait $w' = v'$ et en représentant la hauteur totale de la chute $h - h'$ par H , on obtient

$$uv \cos \beta = gH \dots \dots \dots [8]$$

Puis les équations très simples [4], [5], [6] et [8] mènent à la formule

$$v'^2 = gH \frac{\tan \beta}{\sin \gamma} \dots \dots \dots [9]$$

et, par conséquent, d'après [7]

$$w'^2 = 2gH \frac{\tan \beta (1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} \dots \dots \dots [10]$$

Il est remarquable que ces résultats sont indépendants de la profondeur d'immersion h' parce que nous avons négligé le frottement du liquide extérieur.

Exemple: Pour $\beta = 36^\circ$ et $\gamma = 25^\circ$ on trouve la vitesse de la circonférence extérieure de la turbine

$$v' = 0,93 \sqrt{2gH},$$

et la perte de chute due à la vitesse de sortie

$$\frac{w'^2}{2g} = 0,17 H.$$

Le rendement serait donc 0,83 sans l'effet des frottements qui ont été négligés.

527. — D'après ce qui précède, on peut se donner arbitrairement ou suivant les indications de la pratique, les angles β et γ . Mais l'angle que le premier élément de l'aube au point d'entrée S fait avec la circonférence intérieure de la turbine doit être calculé en conséquence. Les équations [8], [9] et [5] donnent la vitesse d'entrée

$$u = \frac{r'}{r} \sqrt{2gH \frac{\sin \gamma}{\sin 2\beta}}.$$

Connaissant ainsi dans le triangle SVU les deux côtés u, v et l'angle compris β , on en conclut non-seulement le 3^e côté w , (équation ci-dessus [2]), mais encore l'angle de w avec v , c'est-à-dire l'angle WSV .

528. — Calculons encore, sans égard aux frottements, le volume Q dépensé par seconde. Soit C' le développement de la circonférence extérieure, deduction faite de la place occupée par les aubes; soit a la hauteur intérieure de la roue. On a

$$Q = C' a w' \sin \gamma,$$

ou en mettant pour w' la valeur de v' tirée de [9]

$$Q = C a \sqrt{g H} \tan \beta \sin \gamma.$$

Cette formule et les précédentes supposent que la vanne est entièrement ouverte.

L'expérience constate que sous cette condition, la turbine, malgré son immersion dans le bief inférieur, donne un rendement de 0,70 et même plus. Mais lorsque cette roue a été établie pour utiliser une grande dépense d'eau, si en temps de sécheresse on dispose d'un volume moindre et qu'on soit en conséquence obligé de n'ouvrir la vanne qu'en partie, le rendement décroît sensiblement ce qui est dû surtout au changement brusque de vitesse de l'eau à son passage de l'orifice trianglé de la vanne dans les canaux des aubes de la roue. C'est un inconvénient grave de ce genre de roue; car l'intérêt d'un usinier est de tirer le meilleur parti possible des eaux peu abondantes, même sous la condition d'un moindre rendement dans la saison des grandes eaux.

Nous avons dit que les turbines ont la propriété de s'appliquer avantageusement à de grandes chutes. M. Fourneyron en a établi une à Saint-Blaise dans la Forêt Noire qui utilise une chute de 108^m de hauteur; son diamètre n'est que de 0^m,55, sa vitesse de 2300 tours par minute, sa puissance effective de 40 chevaux vapeur. La partie fixe que nous avons désignée sous le nom de puits n'a dans ce cas qu'une faible hauteur, est fermée par un couvercle et alimentée d'eau par une conduite qui descend du bief supérieur. Le couvercle est traversé par l'arbre qui porte en dehors une roue d'engrenage.

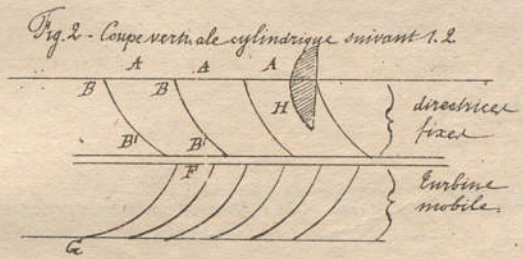
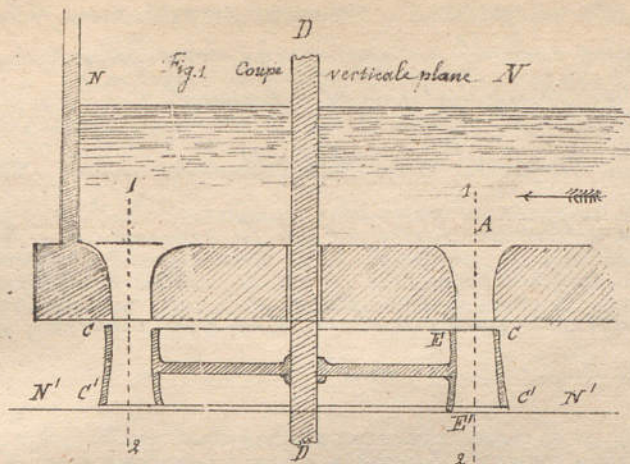
531. — Turbine d'Euler, dont le principe est mis en pratique par MM. Fontaine, Kœchlin, &c.

$N'N'$ niveau supérieur, $N''N''$ niveau inférieur normal.

AAA , ouverture pratiquée dans une zone annulaire du fond fixe, et par laquelle l'eau descend suivant les cloisons directrices BB' .

$CC'CC'$ turbine fixée sur l'arbre DD . Les aubes courbes FG (Fig. 2 ci contre) occupent l'espace annulaire dont la coupe verticale est $EE'CC'$ (Fig. 1).

La théorie de ce récepteur est analogue à celle du précédent, sauf que la pesanteur



exerce un travail sur l'eau pendant sa descente entre les aubes de la roue, et que la force centrifuge due au mouvement relatif ne faisant qu'appuyer le liquide contre la paroi C C ne produit pas de travail sensible.

Quant au moyen de régler la dépense, M. Fontaine, constructeur à Chartres, emploie de petites vanes telles que celle dont la coupe est indiquée en H (Fig. 2); MM. Noëhlin et Cie de Mulhouse font usage de clapets qui ferment à volonté un certain nombre des orifices A.

532. — Indication du procédé pneumatique de M. Girard pour remédier à l'exhaussement de niveau, en temps de crue, du bief inférieur. L'eau sortant de la roue se rend dans ce bief en passant en dessous d'une cloison qui forme autour de la turbine une

capacité dans laquelle de l'air injecté par une petite pompe est comprimé au point nécessaire pour empêcher la surface de l'eau dans cette sorte de cloche de toucher la roue. Celle-ci tourne donc dans l'air et l'on peut avec moins d'inconvénient fermer partiellement les orifices qui amènent l'eau motrice.

533. — Roues dites à réaction. Si l'on conçoit qu'un vase rectangulaire percé latéralement d'un orifice vertical, et contenant de l'eau entretenue à un niveau constant, glisse sans frottement suivant un plan horizontal, il conservera uniformément son mouvement horizontal une fois imprimé, malgré une résistance égale à la différence des pressions du liquide sur la paroi ouverte et sur la paroi opposée. On disait autrefois que cet effet était dû à la réaction du liquide sur le vase, expression qui ne caractérise pas bien le phénomène dont il s'agit, puisque tous les récepteurs hydrauliques fonctionnent en vertu de la réaction qu'exerce sur eux le liquide dont ils modifient le mouvement.

Une roue du genre dont il s'agit est un vase tournant autour de son axe de figure vertical, recevant l'eau sans vitesse sensible en des points très rapprochés de l'axe et la laissant échapper par des orifices verticaux distribués symétriquement à une certaine distance de cet axe.

L'eau pouvant être amenée par un tuyau soit en dessus soit en dessous du vase, désignons par h la hauteur due à la pression qui a lieu aux points d'entrée, d'où déduction faite de la pression atmosphérique.

Soit r le rayon du point de sortie dans l'air et soit h' la hauteur de ce point au-

1^{ère} Division

Comme Mécan. et mach. - 38^e Feuille.

dessous de celui d'entrée (cette quantité pouvant être négative). En appliquant à un filet le théorème de l'effet du travail pour le mouvement relatif, en regard par conséquent à la force centrifuge, on trouve la vitesse relative de sortie w par la formule

$$w^2 = 2g(h + h') + \omega^2 r^2 \quad \text{ou} \quad w^2 = v^2 + 2gH$$

en appelant v la vitesse absolue de la roue au point de sortie et H la somme $h + h'$.

La vitesse absolue de l'eau à sa sortie, que nous désignons par u , est la résultante des vitesses w et v . Si l'on suppose celles-ci directement opposées l'une à l'autre, on aura

$$u = w - v.$$

La puissance vive conservée par l'eau dépensée à chaque seconde et par conséquent la différence entre la puissance PH et le travail transmis, est

$$P \frac{u^2}{2g} \quad \text{ou} \quad \frac{P}{2g} (\sqrt{v^2 + 2gH} - v)^2$$

Cette perte ne peut jamais devenir nulle; mais son rapport à PH peut être aussi petit qu'on veut en faisant v suffisamment grand.

Par exemple, pour que ce rapport devienne $\frac{1}{10}$ il suffit de faire

$$v = \frac{0,9}{2\sqrt{0,1}} \sqrt{2gH} = 1,42 \sqrt{2gH}$$

Si on donnait au point de sortie cette vitesse, le rendement serait de 0,90; mais cette conclusion suppose, comme la théorie précédente, que les frottements du liquide dans le vase sont très-peu considérables, il faudrait donc éviter de la faire couler dans des tuyaux étroits. Du reste, la difficulté de dépenser un grand volume d'eau en satisfaisant aux conditions théoriques, et celle de régler cette dépense, seraient des obstacles à l'emploi industriel des roues dont il s'agit, quand même elles ne seraient pas théoriquement inférieures aux turbines.

§ 9. — Roues à axe horizontal dans un courant à grande section, (dites roues pendantes.)

534. — Une roue de cette espèce est mue par un cours d'eau dont la section excède de beaucoup la surface des aubes. Il serait très-difficile de soumettre à un calcul exact les circonstances du mouvement de l'eau à son passage dans la roue et dans son voisinage pour en déduire le travail imprimé aux aubes. Nous nous

α l'aire de la partie immergée des aubes projetée verticalement.

v la vitesse du centre de gravité de cette surface.

V la vitesse du courant en amont de la roue.

Certains filets possédant la vitesse V passent entre les aubes dont ils prennent la vitesse v . De sorte que m étant la masse du liquide que ces filets dépassent par seconde, leur quantité de mouvement diminue pendant ce temps de $m(V-v)$.

Si l'on admet que cette variation de la quantité de mouvement n'est due qu'à la réaction F horizontale des aubes, ce qui revient à supposer que les pressions du fluide environnant sur les filets considérés se font équilibre, on a

$$F = m(V-v) \text{ et le travail transmis } T_m = Fv = mv(V-v)$$

Enfin il est naturel de supposer que la masse m est proportionnelle à l'aire a des aubes à la vitesse V du courant et à la densité du liquide. On obtient ainsi

$$T_m = K \frac{\Pi a V v (V-v)}{2g}$$

M. Doncelet a vérifié expérimentalement cette formule et a trouvé qu'elle est approximativement satisfaite en faisant $K = 1,6$.

V étant donnée, le maximum de T_m répond d'après la formule à $v = \frac{1}{2}V$. et $T_m = \frac{1}{4} K \Pi a \frac{V^2}{2g}$. L'expérience a conduit à adopter le rapport $\frac{v}{V} = 0,40$ qui donne pour T_m le même résultat à $\frac{1}{25}$ près.

Les aubes de ces roues doivent avoir en hauteur de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{4}$ du rayon. Des rebords fixés à leur pointon seraient avantageux. Le diamètre de ces roues ne dépasse guère 4 ou 5 mètres. Le nombre des aubes est ordinairement de 12. Il convient qu'elles forment en avant du rayon un angle de 30° quand la roue plonge de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{5}$ du rayon. L'eau entre ainsi plus aisément entre les aubes, qui ensuite éprouvent moins de résistance à sortir du courant d'aval que si leur plan passait par l'axe de rotation.

535. — Roues à aubes des bateaux à vapeur. Soient u vitesse, relativement au bateau, du centre de gravité de la partie immergée des palettes; v vitesse, relativement encore au bateau, de l'eau prise en dehors de l'agitation (si cette eau est stagnante, v est par conséquent en sens contraire la vitesse absolue du bateau); A l'aire de la plus grande section transversale du bateau; a la surface immergée des palettes.

Les pressions mutuelles de l'eau, de la roue et du bateau sont les mêmes que si celui-ci étant en repos, l'eau venait rencontrer, avec une vitesse v , la carène immobile et la roue animée au centre de gravité de ses aubes d'une vitesse u plus grande que v . Suivant la théorie précédente la force horizontale exercée par la roue sur l'eau, et réciproquement, est $F = m(u-v)$ ou en posant $m = K \frac{\Pi a v}{2g}$, $F = K \frac{\Pi a v (u-v)}{2g}$

D'une autre part la pression de l'eau sur la carène est $K \Pi A \frac{v^2}{2g}$. L'équilibre ou le mouve-

Par analogie avec la formule $F' = \Pi \Omega \frac{v^2}{g} \sin \beta + P \sin \alpha$ du n° 470 on admet, en négligeant le second terme très petit et d'ailleurs changeant de signe quand on passe d'un bras au bras opposé, on admet que la pression F exercée sur l'élément ldr est proportionnelle

- 1° Au poids du mètre cube d'air Π ;
- 2° A la section droite du prisme d'air dont la base est ldr et dont les arêtes sont parallèles à w . Cette surface est donc $ldr \sin(w, x)$;
- 3° A la hauteur $\frac{w^2}{2g}$ due à la vitesse w .
- 4° Au sinus de l'angle wAb , ou $\sin(w, x)$

$$\text{On a donc } F' = \frac{K}{2g} \Pi l (w \sin(w, x))^2 dr.$$

et le travail de cette force en 1", ... $F \cos \alpha \cdot r w = \frac{K}{2g} \Pi l w r dr (V \sin \alpha - w r \cos \alpha)^2 \cos \alpha$.

r , w et α étant jusqu'ici des variables indépendantes, on peut chercher, pour des valeurs données de r et de w , quelle est la valeur de α qui répond au maximum de ce travail. On a ainsi :

$$2(V \cos \alpha + w r \sin \alpha) \cos \alpha - (V \sin \alpha - w r \cos \alpha) \sin \alpha = 0;$$

$$\text{d'où } \tan \alpha = \frac{3wr}{2V} + \sqrt{\left(\frac{3wr}{2V}\right)^2 + 2}.$$

Coriolis qui a donné cette formule dans son traité du Calcul de l'effet des Machines, l'a trouvée d'accord avec les faits d'expérience observés par Coulomb. Si l'on fait $V = 4^m, 05$ vitesse ordinaire du vent, et $w = 0,70$, vitesse angulaire peu différente de celle qui convient effectivement dans ce cas, on obtient pour $r = 2^m$, $\alpha = 6,3^\circ$ et pour $r = 12^m$, $\alpha = 81^\circ$.

On conçoit la possibilité théorique de substituer dans l'expression du travail celle de α en fonction de w et de déterminer cette dernière quantité de manière à obtenir le maximum du travail. Cette théorie traitée avec développement dans l'ouvrage cité de Coriolis est trop compliquée pour être exposée ici.

Résultats d'observations et d'expériences de Coulomb et de Smeaton (extrait abrégé du cours de M. Loncelet à Metz, 1836).

1° Figure des ailes. Les ailes étant rectangulaires, la forme la plus avantageuse est celle des ailes dites à la Hollandaise, qui offrent au vent une surface légèrement concave et dont les éléments rectilignes sont disposés ainsi qu'il suit. Le rayon ou longueur d'un bras étant d'environ 12 m., le premier quart, à partir de l'axe, ne porte point de lattes transversales. Les $\frac{3}{4}$ restants étant supposés partagés en 5 parties égales, aux 6 points de division désignés par

1	2	3	4	5	6
72°	71°	72°	74°	77° $\frac{1}{2}$	83°

1^{re} Division.

Cours de Mécan. et Mach. - 39^e Feuille.

(Le premier angle est plus grand que celui qui résulte du calcul précédent emprunté à Coriolis; mais il est aussi plus loin que l'axe de rotation.)

La largeur l de l'aile est ordinairement $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{6}$ de sa longueur.

2^o Vitesse des ailes. Cette vitesse mesurée à l'extrémité des ailes, doit pour le meilleur effet, être à la vitesse du vent dans un rapport à peu près constant de 2,5 à 2,7.

3^o Travail transmis aux ailes par le vent. Il est approximativement proportionnel à la surface S des ailes et au cube de vitesse V du vent. Formule $T = 0,135V^3$, travail exprimé en kg. m. par seconde si S l'est en m. q. et V en m. par seconde.

537. — Le propulseur hélicoïde des bateaux à vapeur a avec le moulin à vent l'analogie que les roues à palettes des bateaux ont avec les roues pendantes. L'élément ab qui, dans le sens de la longueur l était tout à l'heure considéré comme rectiligne, parce que cette longueur l était très petite relativement au rayon r , devient hélicoïde quand cette condition n'existe plus.

§ 11. — Pompes et autres machines hydrauliques.

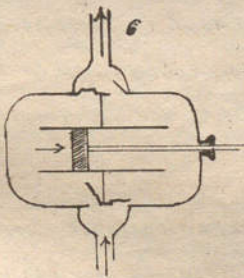
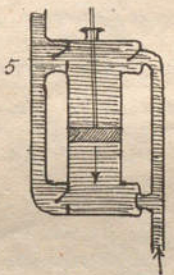
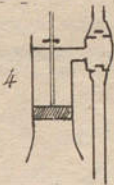
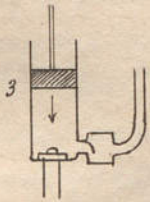
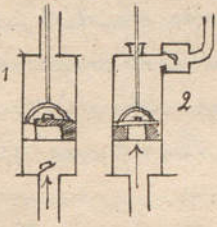
538. — Pompes à mouvement rectiligne alternatif. — La principale pièce mobile d'une telle pompe est un piston ayant un mouvement de va et vient. Tantôt il a peu d'épaisseur, il est garni de cuir ou d'autre matière flexible, et se ment dans un cylindre alésé nommé corps de pompe; tantôt c'est un cylindre métallique dont la longueur excède celle de la course et dont la surface convexe exactement calibrée glisse dans une boîte à étouper (stuffing box), et ce piston dit plongeur joue dans son cylindre non alésé qu'il ne touche pas et qui s'appelle encore corps de pompe.

539. — D'autres pièces mobiles sont les soupapes qui sont de diverses sortes, soupape à charnière ou clapets, soupapes coniques à tiges et guides, soupapes à boulet avec muselière.

540. — Dans les pompes dites à simple effet, l'intérieur du corps de pompe est alternativement en communication par deux soupapes avec deux tuyaux dont l'un plongeant dans le puisard s'appelle tuyau d'aspiration, et l'autre se nomme tuyau d'ascension. Quelquefois le corps de pompe plonge lui-même dans le puisard, et alors le tuyau d'aspiration est tellement court qu'on ne le considère plus comme existant.

541. — L'une des soupapes peut se trouver attachée au piston percé d'un orifice qu'elle ouvre et ferme alternativement; l'autre soupape à siège fixe est dite dormante, et fait communiquer le corps de pompe ordinairement avec le tuyau d'aspiration, fig. 1.

quelquefois avec le tuyau d'ascension, Fig. 2. Si au contraire le piston est plein (Fig. 2 et 4), les deux soupapes sont dormantes et appartiennent l'une au tuyau d'aspiration, l'autre au tuyau d'ascension.



542. — L'usage a établi les dénominations suivantes : une pompe est dite aspirante lorsque le corps de pompe est en totalité ou en partie plus élevé que le niveau du puitsard, d'où il suit que l'introduction de l'eau dans le corps de pompe est un effet de la pression atmosphérique.

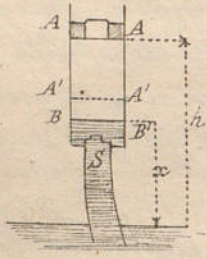
Une pompe est dite élévatoire quand le piston s'élève pour faire monter l'eau (Fig. 1, 2, 4) ; elle est dite foulante dans tous les autres cas.

543. — La tige du piston sort du corps de pompe tantôt par une ouverture libre dans l'air ou dans l'eau, tantôt par une boîte à étouper.

544. — Les pompes à simple effet sont ainsi appelées parce que lorsque leurs tiges sont minces, elles ne font sensiblement monter l'eau que pendant l'une des courses simples du piston. Une pompe est dite à double effet lorsque le piston fait monter l'eau dans chacune des deux courses simples et alternatives qui se succèdent. Il suffit pour cela d'employer un piston plein et quatre soupapes dormantes (Fig. 5 et 6). Améaton a obtenu le même résultat avec une simple pompe en dormant à la tige du piston, dans la partie qui est alternativement dans l'eau et hors de l'eau une section égale à la moitié de celle du corps de pompe. Cette disposition a été récemment imitée en faisant d'une portion de la tige du piston à soupape un cylindre ou piston plongeur.

545. — Limite de l'élévation de l'eau dans le tuyau d'aspiration et dans le corps de pompe. Supposons que la face inférieure du piston, dans une course, décrive le volume V compris entre les deux plans $AA, A'A'$; que le plan AA soit à une hauteur h au-dessus du niveau du puitsard ; qu'entre le plan $A'A'$ et la soupape dormante reste un espace dont le volume est désigné par V' ; qu'après un certain nombre de courses de piston, celui-ci occupant la position AA la plus éloignée de la soupape, l'eau se soit élevée jusqu'au plan BB dont la hauteur au-dessus du puitsard est représentée par x ; que le volume compris entre les plans BB et $A'A'$ soit désigné par v . Il s'agit d'exprimer la condition nécessaire pour que le piston

se transportant de AA en $A'A'$ la soupape qu'il porte s'ouvre pour laisser échapper une partie de l'air contenu dans le corps de pompe.



Le piston étant en AA si la pression atmosphérique est P_a , la pression de l'air enfermé entre AA et BB , est $P_a - \Pi x$, sous le volume $V+v$. Le piston se transportant ensuite en $A'A'$, la soupape dormante S reste fermée, le niveau BB reste immobile, et si nous supposons que la soupape du piston soit tenue fermée, le même air aura sous le volume v la pression

$$(P_a - \Pi x) \frac{V+v}{v}$$

La condition pour qu'il puisse s'échapper en partie par la soupape, même en faisant abstraction du poids de celle-ci est

$$(P_a - \Pi x) \frac{V+v}{v} > P_a \quad \text{ou} \quad x < \frac{P_a}{\Pi} \cdot \frac{v}{V+v}$$

et sera satisfaite a fortiori si l'on a, en désignant par H la hauteur d'eau représentative de la pression atmosphérique

$$h < H \frac{v}{V+v}$$

On pourrait distinguer les deux cas où l'eau peut s'arrêter soit en dessous de la soupape dormante, soit entre cette soupape et le plan $A'A'$. Mais cette discussion n'a pas d'intérêt pratique. On n'aspire par ordinairement au delà de 8^m ; il y aurait de l'air dégagé de l'eau et danger d'aspiration d'air par les joints du tuyau.

546. — On cite un exemple curieux d'aspiration au dessus de 10^m par l'effet du mélange de l'eau aspirée avec de l'air introduit par un petit orifice dans le tuyau d'aspiration un peu au dessus du puisard. Ce fait, dont la réalisation exige que le tuyau soit assez petit pour que l'eau et l'air y montent par couches, ne fournirait par un moyen économique d'épuisement.

547. — L'élévation de l'eau dans les tuyaux d'ascension n'a pas d'autre limite que celle de la résistance des matériaux. A la machine actuelle de Marly on élève l'eau d'un seul jet à 155^m ; à Nuelgoat l'élévation est de 230^m .

547. — Effets dynamiques des pompes. — Si l'on supposait que le piston eût ainsi que l'eau dans les tuyaux un mouvement très-lent, le calcul de l'effort nécessaire pour l'y maintenir soit en montant soit en descendant, dépendrait de l'espèce de la pompe, d'après les principes de l'hydrostatique et ne présenterait d'autre difficulté

que celle de l'évaluation du frottement du piston sur lequel il n'existe pas de données expérimentales.

On trouverait évidemment que le travail moteur nécessaire pour une double course serait égal au poids de l'eau élevée multiplié par la hauteur d'élevation, plus au produit de la longueur de la double course multipliée par la valeur moyenne du frottement du piston.

Le moteur doit subvenir en outre aux pertes de charge produites par les étranglements et les courbes brusques, et aux frottements dans les tuyaux. Il importe que l'eau, dans les conduites se meuve à peu près uniformément : 1^o parce que le travail du frottement qu'elle y éprouve est sensiblement proportionnel au carré de la vitesse, et que la valeur moyenne des carrés de plusieurs nombres est plus grande que le carré de la moyenne de ces nombres ; 2^o parce que le mouvement rapidement varié d'une grande masse d'eau exige du piston et des pièces solides auxquelles il est attaché, des efforts variables qui produisent quelquefois des chocs dans les articulations et qui occasionnent des pertes de travail soit par des déformations persistantes dans les pièces du mécanisme, soit par des vibrations communiquées aux appuis. On régularise le mouvement de l'eau dans les conduites à l'aide de réservoirs d'air, ou de pompes multiples.

La pompe à incendie est un exemple de l'emploi de ces moyens. Les pompes à double effet diminuent l'irrégularité, mais moins bien que trois pompes à simple effet, mues par une manivelle triple.

540. - Dans la pratique, la vitesse moyenne n'excede pas 0^m30 par seconde. Le produit de chaque coup n'est qu'environ les $\frac{4}{5}$ du volume décrit par le piston. L'effet utile, non compris la résistance de la conduite, n'est qu'environ les $\frac{2}{3}$ du travail moteur.

550. - Machine à colonne d'eau. L'eau peut agir comme moteur sur un piston mis en mouvement dans un cylindre : la machine à colonne d'eau en est un exemple. Le recueil de croquis de Machines, 3^e série, feuille 8, indique la disposition de la machine à colonne d'eau établie en 1831 sous la direction de M. Juncker, ingénieur des Mines, pour l'épuisement de la mine d'Anelgoat (Finistère). La légende ci-après rappellera les explications données dans le cours oral.

A Piston principal qui se meut dans le cylindre BB. ouvert par le haut et fermé par le bas. La tige verticale du piston A, traversant le fond du cylindre, donne le mouvement à une pompe élévatoire.

D Tuyau horizontal par lequel passe l'eau qui alternativement entre dans le cylindre pour soulever le piston A puis sort pour le laisser descendre.

C Partie inférieure d'un tuyau qui amène l'eau motrice descendant d'un réservoir dont le niveau est à 7^m au dessus.

Dans la figure 1, à gauche, où le piston est suppose en train de monter, on voit que les deux tuyaux C et D sont en communication la valve circulaire U étant

ouverte, comme elle doit l'être quand la machine fonctionne.

- G** Tuyau de décharge ou d'émission par lequel l'eau, qui a précédemment soulevé le piston, s'écoule pendant que celui-ci descend; c'est ce qui a lieu dans le cas de la figure 1, à droite. La partie G du tuyau de décharge dans la machine de Hulgout est placée à 14^m au dessous de la galerie d'écoulement.
- E** Piston-soupape, que les deux figures représentent dans ses deux positions extrêmes. À gauche il laisse communiquer les tuyaux C et D, et intercepte l'écoulement par le tuyau d'émission G; le piston monte. À droite c'est l'inverse. La hauteur du piston E est au moins triple de celle de la tubulure. Sa partie du milieu ferme le passage. Les deux antres sont creusés d'entailles en forme de coque qui font varier graduellement le passage de l'eau et rendent les chocs insensibles.
- F** Piston auxiliaire du piston-soupape. Son diamètre est un peu plus grand que celui du piston E avec lequel il est lié par une tige rigide. Ce piston F est surmonté d'un manchon, sorte de piston plongeur qui traverse un chapeau à garniture hermétique.
- H I** Petit tuyau qui lorsqu'il n'est pas intercepté, permet (figure de gauche) à l'eau motrice d'exercer sa pression par dessus le piston auxiliaire F dans l'intervalle compris entre son cylindre fixe et le manchon, en s'introduisant par l'ouverture I. Dans ce cas la résultante des efforts qui s'exercent sur l'ensemble des pistons E et F est descendante.
- M M** Tuyau par lequel l'eau reportant de l'intervalle ci-dessus indiqué par la même ouverture I, s'écoule dans le tuyau de décharge G; c'est ce qui a lieu dans le cas de la figure de droite, où la communication est interceptée entre les points I et H, et au contraire établie entre I et M. Dans cette situation la résultante des efforts subis par l'ensemble des pistons E et F est ascendante.
- K L** Petit système régulateur formé de deux pistons assemblés sur une même tige, et analogue à celui des deux pistons E, F. Dans la première figure, le piston K est au dessous de I; dans la deuxième il est au dessus. Dans les deux cas, l'eau motrice transmet par H sa pression en sens contraire aux deux petits pistons. Une grosse tige L traversant une garniture hermétique remplit un office pareil à celui du manchon qui surmonte le piston auxiliaire F, si ce n'est que les deux pistons du petit régulateur sont de même diamètre, et que les deux faces du piston supérieur sont mises en communication par un petit tuyau latéral constamment ouvert. L'effet est le même que si le piston supérieur n'existait pas; et que le piston K fût simplement lié à la tige L; la différence des pressions de l'eau motrice sur ce système est nécessaire pour compenser l'excès de la pression de l'eau en G et M sur celle de l'atmosphère.
- N N** Tige verticale cylindrique fixée sur le piston A, et guidée à sa partie supérieure par des anneaux échancrés, qui lui font passage à une tige prismatique XY assemblée avec cette tige.

PQRT Système de levier au moyen duquel le piston arrivant vers l'une ou l'autre des extrémités de sa course fait jouer le petit piston régulateur *K* et par suite le piston soupape *E*. Et cet effet le levier *PQ* dont l'axe de rotation fixe est en *O*, porte en *P* un arc dit secteur qui dans son mouvement reste tangent à la triangle *XY*. Cet arc est muni à ses deux extrémités de deux dents ou mentonnets qui sont alternativement poussés par deux cames *X* et *Y* fixées sur la triangle liée à la tige *NN*. Ces cames *X, Y* sont en saillie sur les deux faces opposées de la triangle; lorsque le piston *A* en montant approche de l'extrémité supérieure de sa course, la came *X* touche le mentonnet supérieur du secteur, soulève le levier *PQ* et par conséquent le piston régulateur *K* qui prend la position de la 2^e figure; dès lors l'eau motrice agissant non plus par dessous mais seulement par dessus le piston *F* met le piston soupape *E* en mouvement ascendant pour le faire passer de la position de la 1^{re} fig. à celle de la 2^e. Au contraire quand le piston *A* descendant approche de l'extrémité inférieure de sa course, la came *Y* accroche le mentonnet inférieur du secteur, abaisse le levier *PQ* et le piston régulateur *K* qui prend la position de la 1^{re} figure; dès lors l'eau motrice agissant dans l'espace annulaire au-dessus du piston auxiliaire *F* le fait descendre ainsi que le piston soupape *E* pour les ramener de la position de la 2^e figure à celui de la 1^{re}.

UV Valves circulaires appelées modérateurs qu'on ferme partiellement pour ralentir au besoin le mouvement du piston *A*. Il y a encore un autre moyen de diminuer le nombre de coups de piston dans un temps donné: il consiste en deux robinets placés l'un à gauche de *K* dans le tuyau *HI* l'autre au-dessous de *K* dans le tuyau *KM*. La fermeture totale ou partielle arrête ou ralentit le mouvement du piston soupape *E*.

On voit pourquoi la machine est dite à simple effet. L'eau motrice en soulevant le piston *A* soulève en même temps la tige de la pompe et l'eau continue dans le tuyau d'ascension. Lorsque le piston et sa tige descendent par l'action de leur poids, le piston de la pompe élévatoire (N^o 542 Fig. 4) soulève l'eau du tuyau d'aspiration. Le poids trop considérable de la tige est contrebalancé par la charge d'environ 14^m d'eau qui a lieu sous le piston *A* quand il est en communication avec le tuyau de décharge *C*.

Le rendement de la machine à colonne d'eau d'Kuelgoat est d'environ 0,65. C'est une très-habile imitation d'appareils du même genre construits en Bavière sous la direction de M. Reichenbach, excellent ingénieur de ce pays. (Voir le mémoire de M. Juncker, Annales des Mines, tome VIII). L'échelle du croquis de cette machine est d'environ 0,027.

551. — Indication succincte des roues élévatoires à palettes et à angets fixes, des norias, de la vis d'Archimède. Le diamètre extérieur de cette vis est d'environ 0^m,50. Le noyau occupe le tiers du diamètre. La longueur est de 12 à 18 fois le diamètre. Les cloisons hélicoïdales forment trois filets dont la trace sur l'enveloppe fait un angle d'environ 60° avec l'axe, lequel est incliné de 30 à 45° à l'horizon. La vis étant manœuvrée par 6 ouvriers travaillant 6 heures par jour, chacun d'eux élève 15^m d'eau à 1^m de hauteur dans le même temps.

§ 12. — De la Machine à vapeur.

1^o Considérations générales.

552. — Travail de la vapeur. Une certaine quantité de vapeur étant actuellement à la pression P , exprimée en kg. par m. q., si son enveloppe est mobile dans une ou plusieurs de ses parois, de sorte que son volume V prenne dans un temps très-court un accroissement dV , le travail de la vapeur sur la partie mobile de l'enveloppe a l'expression très-simple PdV .

Ce travail s'opère dans deux circonstances différentes :

L'antôt la pression P reste constante, parce que la vapeur reste en communication avec le liquide qui la produit, entretenu à une même température. Dans ce cas V étant le volume décrit dans un temps quelconque par la surface mobile qu'elle presse, le travail de la vapeur pendant ce temps est PV . On l'appelle travail à pleine pression.

L'antôt la communication de la vapeur et du liquide étant interceptée la pression est variable et l'on admet comme suffisamment exact en pratique, qu'elle suit la loi de Mariotte sans tenir compte de la variation de sa température. Si l'on désigne par P_0, P_1, V_0, V_1 , les valeurs initiales des variables P et V , on a

$$PV = P_0V_0 = P_1V_1 = C \text{ et le travail } T = \int PdV = P_0V \log \text{ hyp } \frac{P_0}{P_1};$$

on l'appelle le travail dû à l'expansion ou à la détente de la vapeur. Cette formule s'applique d'ailleurs à la compression d'un gaz et même d'une vapeur pourvu que le poids de la vapeur reste le même, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de précipitation ou, comme on dit, de condensation.

553. — Dans les machines à vapeur à un seul cylindre, la paroi mobile pressée par la vapeur motrice est une des faces d'un piston dont l'autre face reçoit une pression résistante dite contre-pression à peu près constante et due soit à l'atmosphère, soit à l'appareil appelé condenseur. Si P' est l'intensité de cette pression par m. q., son travail pendant que la face sur laquelle elle agit décrit le volume V' , est $-P'V'$.

554. — Travail dû à une quantité donnée de vapeur en vertu de son action à pleine pression et de sa détente en égard à la contre-pression.

Supposons que la vapeur dépensée soit employée sans perte résultant d'un espace libre compris entre l'orifice d'admission et le piston, de sorte que celui-ci ayant décrit sous l'action de la vapeur à pleine pression le volume V , la même vapeur qui occupe ce volume V remplisse à la fin de la course le volume total V_1 que le piston aura décrit.

Il en résulte que le travail à pleine pression est PV

que le travail dû à la détente, P_1 étant la pression finale, est $PV \log \text{ hyp } \frac{P}{P_1}$

que le travail de la contre-pression est $-P'V_1$, on a cause de la relation

$$P'V = P_1 V_1 \dots \dots \dots - P'V \cdot \frac{P'}{P_1}$$

Le travail reçu par le piston est donc $T = P'V \left(1 + \log. \text{hyp.} \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1} \right) \dots \dots \dots [1]$

Si V est le volume moyen de vapeur dépensé par seconde, en divisant T par 75 on aura le travail reçu par le piston exprimé en chevaux dynamiques, résultat qu'il faudra affecter d'un coefficient pratique de réduction qui varie suivant les circonstances que nous indiquerons.

555. - Poids de la houille employée à produire la vapeur. Le nombre d'unités de chaleur nécessaire pour réduire en vapeur, dans l'état de saturation, à la température τ , un kg. d'eau prise à τ_0 degré, est, d'après M. Regnault.

$$606,5 + 0,305 \tau - \tau_0$$

Par conséquent dans les mêmes circonstances, pour obtenir un volume V de vapeur dont nous représenterons le poids du mètre cube par Π_v , le nombre d'unités de chaleur nécessaire est

$$C = \Pi_v V (606,5 + 0,305 \tau - \tau_0).$$

Or, on sait que Π_v est lié à la pression et à la température par la relation

$$\Pi_v = \frac{5}{8} 1^{4,299} \frac{P}{P_2} \frac{1}{1 + 0,00368 \tau} = \frac{0,784}{1 + 0,00368 \tau} \frac{P}{10000}$$

De plus l'expérience a appris que, bien que la combustion d'un kg. de houille ordinaire développe réellement 7050 unités de chaleur, les meilleurs foyers n'utilisent guère que les 0,6 de cette quantité parce que l'air qui s'échappe dans la cheminée emporte la majeure partie du reste. Ainsi le poids H de la houille nécessaire pour obtenir C unités de chaleur est $\frac{C}{4230} = H$.

De là on peut conclure le travail en Kg. m. produit par un Kg. de houille

$$\frac{T}{H} = \frac{4230 \left(1 + \log. \text{hyp.} \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1} \right)}{0,784 (606,5 + 0,305 \tau - \tau_0)} \times 10000 (1 + 0,00368 \tau)$$

Enfin, si, suivant l'usage on veut exprimer le travail en chevaux et la consommation de combustible en kg. brûlé par heure, il faut diviser $\frac{T}{H}$ par 3600 x 75 ou 270000, ce qui donnera

$$\left. \begin{array}{l} \text{Chevaux pour chaque Kg.} \\ \text{de houille par heure} \end{array} \right\} = \frac{4230 (1 + 0,00368 \tau) \left(1 + \log. \text{hyp.} \frac{P}{P_1} - \frac{P'}{P_1} \right)}{27 \times 0,784 (606,5 + 0,305 \tau - \tau_0)} \dots \dots \dots [2]$$

556. - Valeurs qu'on peut attribuer aux indéterminées des formules [1] et [2]. - La vapeur qui vient de la chaudière est à l'état de saturation, c'est-à-dire qu'elle a la plus haute

pression et par conséquent la plus grande densité que comporte sa température. La loi qui lie les quantités P et τ est représentée par des formules empiriques données dans le traité de physique, et par des tables d'un usage commode.

On doit à M. Navier la remarque que le poids Π_v à l'état de saturation est approximativement une fonction du 1^{er} degré de la pression correspondante. On a en effet

$$\Pi_v = 0,1 + 0,5 \frac{P}{P_a} \text{ à moins de } \frac{1}{50} \text{ près jusqu'à } P = 5 P_a, \text{ pression de 5 atmosph.}$$

La pression P peut être égale ou inférieure à la pression atmosphérique; dans ce dernier cas elle est obtenue au moyen d'un condenseur, dans lequel la température n'est pas ordinairement au dessous de 40° , à quoi correspond une pression de $0^{\text{m}} 072$ par c. m. q. ou de $0,07$ d'atm.; elle est souvent de $0,1$ d'atm.

La pression P_1 à l'instant de la plus grande détente doit être supérieure à P afin que le travail total des pressions et des frottements ne soit pas négatif. En pratique la pression P_1 ne descend pas ordinairement au dessous de $\frac{1}{2}$ atm.

Quant à la pression P initiale, elle varie dans les divers genres de machines, depuis 1^{atm} jusqu'à 5 ou 6 assez fréquemment; elle va quelquefois jusqu'à 9.

Suivant que cette pression est inférieure à 1^{atm} $\frac{1}{2}$ ou qu'elle est comprise entre 1^{atm} $\frac{1}{2}$ et 4, ou qu'elle est supérieure à 4, les machines sont dites à basse pression, à moyenne pression, ou à haute pression.

557. — D'après ces généralités on peut considérer théoriquement quatre genres de machines à vapeur.

1^{er} Genre. Machine à détente et condensation. En attribuant à P diverses valeurs on reconnaît aisément que le travail obtenu pour chaque Kg. de houille croît avec la pression initiale P ; mais il est loin d'augmenter proportionnellement à cette pression. Cela tient à ce que, à mesure que la pression et la température augmentent le volume V répondant à la consommation d'un Kg. de houille diminue presque dans le même rapport. Le bénéfice se réduit donc au travail de la détente. On reste les très grandes pressions rendraient les chaudières difficiles à gouverner et dangereuses.

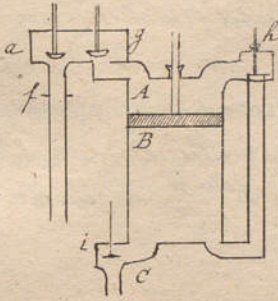
2^o Genre. Machines à condensation sans détente. $P_1 = P$. En faisant l'essai de diverses valeurs pour P on reconnaît l'impossibilité de dépasser sensiblement la pression atmosphérique.

3^o Genre. Machines à détente sans condensation. Employées à 4 ou 5 atmosphères, elles ont l'avantage de l'économie de la construction. Ce système est nécessaire quand l'eau manque pour la condensation.

4^o Genre. Machines sans détente ni condensation. Ce système est tellement inférieur aux autres sous le rapport de l'économie du combustible qu'il ne doit pas être employé, sauf le cas exceptionnel où il faudrait tirer d'une machine donnée le plus grand travail possible sans égard à la consommation de la houille.

2^o. Description d'une machine du 1^{er} Genre
à simple effet (Machine de Cornwall)

La fig. ci-contre n'est destinée qu'à donner une première idée des fonctions du piston et des soupapes. Elle indique sans précision leur disposition, et ne montre point les mécanismes qui font mouvoir ces dernières pièces.



A côté du piston sur lequel agit la vapeur motrice,
B côté de la contre pression,
f tuyau amenant la vapeur de la chaudière,
C tuyau communiquant au condenseur,
a soupape modératrice fixe quand le régime de la machine est établi,
g soupape d'admission,
h soupape d'équilibre,
i soupape d'exhaustion.

Le jeu de la machine présente six périodes :

- 1^{re} Période. { g soupape d'admission ouverte, pleine pression P en A,
h soupape d'équilibre fermée.
i soupape d'exhaustion ouverte; pression du condenseur P' en B et C.
Le piston descend parcourant une fraction de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{4}$ de sa course.
- 2^e Période. { g fermée
h reste fermée } détente en A, pression variable de P à P'. Le piston continue de descendre.
i reste ouverte
- 3^e Période. { g reste fermée
h reste fermée } pendant cette période très-courte, le piston achève de descendre et perd sa vitesse dans ce sens.
i se ferme
- 4^e Période. { g reste fermée
h s'ouvre } l'égalité des pressions en A et B s'établit par l'ouverture de la soupape h. Le piston remonte par la cause indiquée ci-après.
i reste fermée
- 5^e Période. { g reste fermée
h se ferme } pendant cette période très-courte le piston achève son ascension. La vapeur restée au-dessus se comprime et est ramenée à la pression initiale P ou à peu près. Le piston s'arrête.
i reste fermée
- 6^e Période. { les trois soupapes fermées. } repos de la machine pendant un temps variable à volonté jusqu'à ce que la soupape i d'abord, et la soupape g très-peu après s'ouvrent pour recommencer la 1^{re} période.

Cette disposition connue sous le nom de Machine de Cornouailles est employée dans les mines pour l'élevation des eaux. La tige du piston est attachée à l'une des extrémités d'un balancier, à l'autre est suspendue la maîtresse tige des pompes. Ces pompes sont à plombs qui élèvent l'eau pendant qu'elles descendent. Le travail de l'élevation de l'eau s'accomplit donc pendant que le piston à vapeur remonte : c'est le poids convenablement réglé de la tige des pompes qui est la force mouvante pendant cette période. Au contraire pendant la descente du piston la vapeur devient motrice, la maîtresse tige remonte, mais l'eau est en repos, excepté dans un court tuyau d'aspiration. La plombe pression donne l'accélération descendante au commencement; la détente laisse à la fin dominer la résistance.

La légende suivante est l'explication du dessin d'une machine de cette espèce insérée dans le recueil de croquis et emprunté au Traité d'exploitation des Mines, de M. Combes (1846). La pression de la vapeur dans les chaudières était de $2^{\text{atm}} \frac{3}{4}$. L'échelle du dessin est d'environ 0,013 pour 1^m. La course du piston était de $3^{\text{m}} \frac{35}{100}$.

A Cylindre ou se meut le piston à vapeur.

FCH Balancier auquel le piston est relié par un parallélogramme articulé.

K Tige descendant dans un puits de mine pour y faire mouvoir des pompes foulantes.

C Tuyau conduisant la vapeur du cylindre au condenseur.

D Condenseur, sorte de caisse entourée de l'eau froide que contient une grande bûche. Cette eau pénètre dans le condenseur sous forme de jet très divisé par une ouverture dont un robinet règle la dépense.

E Pompe dite pompe à air dont le piston est lié par une longue tige au balancier FCH. Elle sert à extraire, outre l'eau reproduite par la condensation de la vapeur, l'air venant de l'eau d'alimentation de la chaudière et surtout de l'eau froide injectée dans le condenseur. Le condenseur et la pompe à air communiquent par un tuyau horizontal inférieur.

L Pompe alimentaire mue également par la machine; elle prend une partie de l'eau chaude (à environ 40°) que la pompe à air E a tirée du condenseur D, et la refoule dans la chaudière pour remplacer celle qui s'en échappe en vapeur.

a Boîte cylindrique contenant la soupape modératrice qui reste immobile dès que son ouverture est réglée suivant l'intensité de la résistance que la machine doit vaincre.

b Tige de la soupape modératrice traversant le fond supérieur de la boîte a; un levier horizontal et une tringle verticale d e permettent au conducteur de la machine de manœuvrer la soupape modératrice pour accélérer ou ralentir le mouvement.

f Lieu, au-dessous de la boîte a, où s'embranché le tuyau (non représenté dans la figure) qui amène la vapeur de chaudière. La vapeur traverse de bas en haut la soupape modératrice.

g Boîte de la soupape d'admission; la vapeur se rend de la soupape modératrice à la partie supérieure de cette boîte g par une communication horizontale. Après avoir traversé

de haut en bas, la soupape d'admission, la vapeur s'écoule dans la partie supérieure du cylindre par une autre communication horizontale.

h boîte de la soupape d'équilibre.

B tuyau vertical, en haut duquel est la soupape d'équilibre, et qui met en communication le haut et le bas du cylindre, pendant que le piston remonte.

i boîte de la soupape d'exhaustion dont le dessus communique avec le bas du cylindre et le dessous avec le condenseur par le tuyau *C*.

N coupe de la soupape d'exhaustion à double siège, disposition comme sous le nom de soupape de Cornouailles. Les soupapes d'admission et d'équilibre sont semblables mais un peu petites.

Pièces servant à régler le mouvement intermittent de la machine.

I longue tige verticale nommée pontrelle liée au balancier, servant: 1^o à fermer la soupape d'admission *g* pour faire commencer la 2^e période (celle de la détente); 2^o à fermer la soupape d'exhaustion *i* pour faire commencer la 3^e période; 3^o à ouvrir la soupape *h* d'équilibre très-peu avant que le piston et la pontrelle terminent la course descendante; 4^o à fermer la soupape *h* pour faire commencer la 5^e période très-peu avant la fin de la course ascendante du piston de la pontrelle. Quant à l'ouverture de la soupape d'exhaustion *i* et à celle de la soupape d'admission *g*, elles s'opèrent par l'intermédiaire de l'appareil figuré en *M*.

M, *ML* coupe et projection horizontale d'une pompe à eau, dite cataracte, située dans un bûche rempli d'eau.

U petit arbre horizontal sur confins, auquel est fixé un bras relié par articulation à la tige verticale de la pompe *M*.

m second bras plus long, fixé de l'autre côté au même arbre et inséré du côté gauche de la pontrelle *I*.

n contrepois porté par un 3^e bras, partant du même arbre du même côté que le premier.

un 4^e bras en prolongement du premier est encore fixé à ce même arbre *U*.

Au moment où le piston de la machine arrive vers le bas et la pontrelle *I* abaisse le levier *m* (par l'action d'un tapéon qu'on voit dans la figure ou dessous du tuyau *C*), fait tourner l'arbre *U* et par conséquent le 1^{er} levier qui soulève le piston plongeur de la pompe *M*. Une soupape de manœuvre inférieure livre entrée dans le corps de pompe à une partie de l'eau de la bûche, qui ne peut sortir ensuite que par un tuyau muni d'un robinet dont on règle l'ouverture de manière que le piston de la cataracte, poussé par le contrepois *n* descende plus en

moins lentement, à la sollicité du conducteur de la machine; pendant que le piston à vapeur et la pontrelle I remontent rapidement et s'arrêtent ensuite, plus ou moins de temps. En descendant, comme on vient de le dire, le piston de la cataracte fait remonter le 4^e bras fixé à l'arbre LL. Ce 4^e bras soulève une tringle verticale (non représentée dans la figure, parce qu'elle est derrière la pontrelle I), laquelle tringle, parvenue à une hauteur suffisante, met en jeu successivement deux mécanismes qui ouvrent d'abord la soupape d'exhaustion, et, très-peu de temps après, la soupape d'admission. Cette double ouverture fait sortir le piston à vapeur du repos, et commencer la 1^{re} période des fonctions de la machine. La pontrelle I en descendant referme d'abord la soupape d'admission, puis la soupape d'exhaustion et, très-peu après, ouvre la soupape d'équilibre, en même temps qu'elle soulève la cataracte; alors a lieu la 4^e période pendant laquelle le piston à vapeur remonte rapidement en entraînant la pontrelle I, qui bientôt referme la soupape d'équilibre, tandis que la tringle soulevée par le 4^e bras du levier LL de la cataracte suit le mouvement de celle-ci et remonte plus ou moins lentement.

3^e. Description de la machine de Watt à double effet.

559. — Cette machine dont la feuille 12 (3^e série) des croquis donne une représentation avec coupe des principaux organes intérieurs, est à condensation, sans détente. Elle est à double effet; c'est-à-dire que la vapeur agit alternativement des deux côtés du piston, de sorte que, moyennant une dépense double de vapeur elle produit un travail double de celui qui serait produit, à chaque double course du piston, si la vapeur motrice n'était introduite que d'un côté. La légende suivante explique les principaux détails de cette machine destinée à produire un mouvement de rotation continu.

A tuyau d'arrivée de la vapeur. Une plaque circulaire dite soupape à gorge remplace la soupape modératrice de la machine de Cornwall.

B cylindre à vapeur.

C piston. La vapeur, indiquée par des hachures horizontales dans le cylindre et dans les tuyaux latéraux, agit actuellement en dessus du piston, étant en communication avec le tuyau A.

DF balancier auquel sont liées d'une part la tige du piston, et d'autre part la bielle FE.

G H manivelle fixée sur l'arbre du volant.

Sur le même arbre est fixé un excentrique qui imprime à une grande bielle horizontale un mouvement alternatif, lequel se communique par une sorte de renvoi de sonnette à la tige verticale du tiroir qu'on voit entouré de vapeur dans le tuyau vertical dit boîte à vapeur, à gauche du grand cylindre B.

M condenseur dont l'espace intérieur est actuellement en communication avec le cylindre au-dessous du piston, le tiroir occupant sa position la plus élevée. Lorsque, au contraire,

il est à sa position la plus basse, le conduit qui mène de la boîte à vapeur au bas du cylindre se trouve en communication avec la vapeur qui entoure le tiroir, tandis que le tuyau analogue au haut du cylindre, est en communication avec le condenseur par l'intérieur du tiroir. Cette dernière pièce est comme on voit une sorte de tuyau creux qui s'élargit à ses deux extrémités, où il est muni de garnitures de chanvre pour empêcher la vapeur alimentaire de se répandre dans la boîte verticale au dessus et au dessous du tiroir.

I pompe à air dont la fonction a déjà été indiquée. Sa tige est articulée sur le parallélogramme en un point qui décrit une courbe, sensiblement droite, semblable à celle qui parcourt la tête de la tige du grand piston. On remarque les soupapes du piston de la pompe à air, et les deux soupapes dormantes, l'une au fond du condenseur, l'autre au dégorgeoir.

K bache qui reçoit l'eau chaude extraite du condenseur.

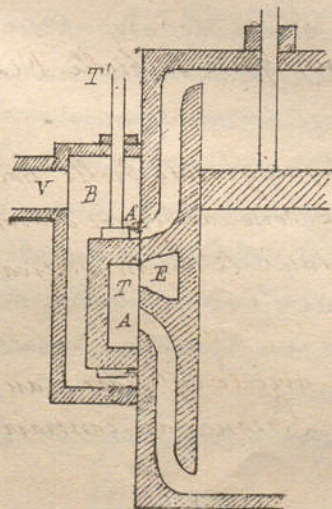
L pompe alimentaire. Lorsque son piston plongeur monte, comme le suppose la figure, la soupape qu'on voit plus bas à gauche s'ouvre et laisse arriver sous ce piston l'eau chaude de la bache K. Lorsque le même piston descend la soupape de gauche se ferme, celle de droite s'ouvre et l'eau est poussée vers la chaudière.

Derrière la pompe alimentaire L on voit l'indication sans détail de la pompe à eau froide; cette eau tirée d'impuits ou d'un courant est versée dans la grande bache d'eau froide où sont établis le condenseur M et la pompe à air I.

On voit également qu'une courroie sans fin menée par l'arbre du volant communique un mouvement de rotation à l'arbre vertical d'un régulateur dit à force centrifuge dont les boules en s'écartant plus ou moins font hausser ou baisser une fourchette; l'arbre horizontal sur lequel celle-ci est fixée communique, à l'aide de triangles et de leviers condés, ses déplacements angulaires à la soupape modératrice A dont le passage se rétrécit ou s'agrandit lorsque le mouvement de la machine devient trop rapide ou trop lent.

4°. De la distribution de la vapeur dans les machines à double effet et à détente.

560. — La vapeur est fréquemment distribuée comme l'indique la figure ci-contre:



V tuyau qui amène la vapeur de la chaudière; il contient une soupape modératrice.

B caisse fixe dite boîte à vapeur, où règne une pression à peu près constante quand le régime de la machine est établi.

T tiroir ayant un mouvement de va et vient imprimé à sa tige T'.

A, A, orifices dits lumières d'admission qui servent alterna-

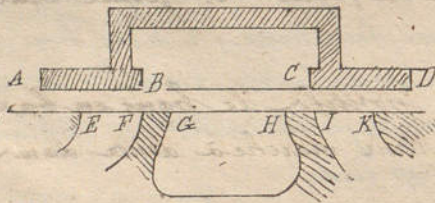
ivement à introduire la vapeur dans le cylindre et à la laisser sortir.

L'orifice dit lumière d'échappement par lequel entre la vapeur pour s'échapper dans le condenseur ou dans l'atmosphère.

Les figures 5 de la feuille 14 des croquis indiquent les diverses positions du tiroir qui correspondent à la pleine pression en haut, à la détente en haut, à la pleine pression en bas, à la détente en bas. On voit que, dans tous les cas, il y a, comme il convient, l'échappement du côté opposé à celui où agit la vapeur motrice.

On a vu dans l'étude des transformations de mouvement (page 16 à N^{os} 51 et 52) que l'emploi des excentriques permet de soumettre une tige à un mouvement périodique alternatif suivant une loi donnée. On peut donc par ce moyen régler la distribution de la vapeur suivant la loi qu'on aura adoptée.

561. — Distribution par l'excentrique circulaire. Les frottements qui entraînent les excentriques à onde sont quelquefois préférés les excentriques circulaires. Nous prendrons pour exemple la distribution adoptée pour les locomotives du chemin de fer du Nord, et sans exposer la série d'essais et de raisonnements qui ont dirigé les inventeurs, nous exposerons les faits tels qu'ils sont.



Les dimensions essentielles du tiroir sont

Les dimensions essentielles du tiroir sont	}	bandes $AB = CD = 0^m,065$
		intervalle des bandes $BC = 0,114$
		Les 3 espaces ensemble $AD = 0^m,244$

Les dimensions des lumières sont

Les dimensions des lumières sont	}	lumière d'admission $EF = IK = 0^m,040$
		lumière d'échappement $GH = 0^m,076$
		intervalles des lumières $FG = HI = 0,020$
		Ces 5 espaces ensemble $EK = 0,196$

Il en résulte que lorsque le tiroir occupe sa position moyenne, comme dans la figure, les deux bandes masquent les lumières d'admission et même les dépassent, savoir du côté des bords extérieurs E, K , de $0^m,024$, et du côté des bords intérieurs F, I , de $0^m,001$. Ces quantités s'appellent recouvrement extérieur et recouvrement intérieur.

Le piston à vapeur est lié à une manivelle dont l'axe de rotation est celui d'une roue de la locomotive. Si nous voulons n'étudier que le mouvement du piston relativement à la locomotive considérée comme fixe, et si, pour plus de simplicité, nous supposons la bielle très grande par rapport au bras de la manivelle, les espaces parcourus par le piston s'expriment très simplement, en fonction des angles décrits par la roue.

x étant la distance du piston à l'une des extrémités de sa course et α l'angle

décrit par la manivelle depuis l'instant où x était nulle, si on appelle R le bras de la manivelle égal à la demi-course du piston, on a

$$x = R(1 - \cos \alpha)$$

Le tiroir est mené par un excentrique fixe sur le même arbre. Par conséquent la loi de son mouvement est la même. Mais il faut remarquer que lorsque le piston commence sa course, le tiroir n'est ni à une extrémité, ni au milieu de la sienne. A cet instant, si le piston est à l'extrémité gauche de son parcours, le tiroir est placé de manière que le bord A de la bande gauche soit de $0^{\text{m}},005$ en avant, c'est-à-dire à droite du bord E de la lumière d'admission E, F , par conséquent la droite que nous appellerons le bras de l'excentrique (joignant l'axe de rotation au centre de la poulie de l'excentrique) fait un certain angle $90^\circ + \alpha$ avec le bras de la manivelle. L'angle α ainsi défini s'appelle l'avance angulaire du tiroir tandis que la longueur de $0^{\text{m}},005$ ci-dessus indiquée se nomme l'avance linéaire à l'admission. Cela posé, si nous voulons exprimer l'espace y qui aura été parcouru, par un point quelconque du tiroir pendant que le piston aura parcouru l'espace x , nous aurons, en désignant par r le bras de l'excentrique,

$$y = r(\sin(\alpha + a) - \sin \alpha).$$

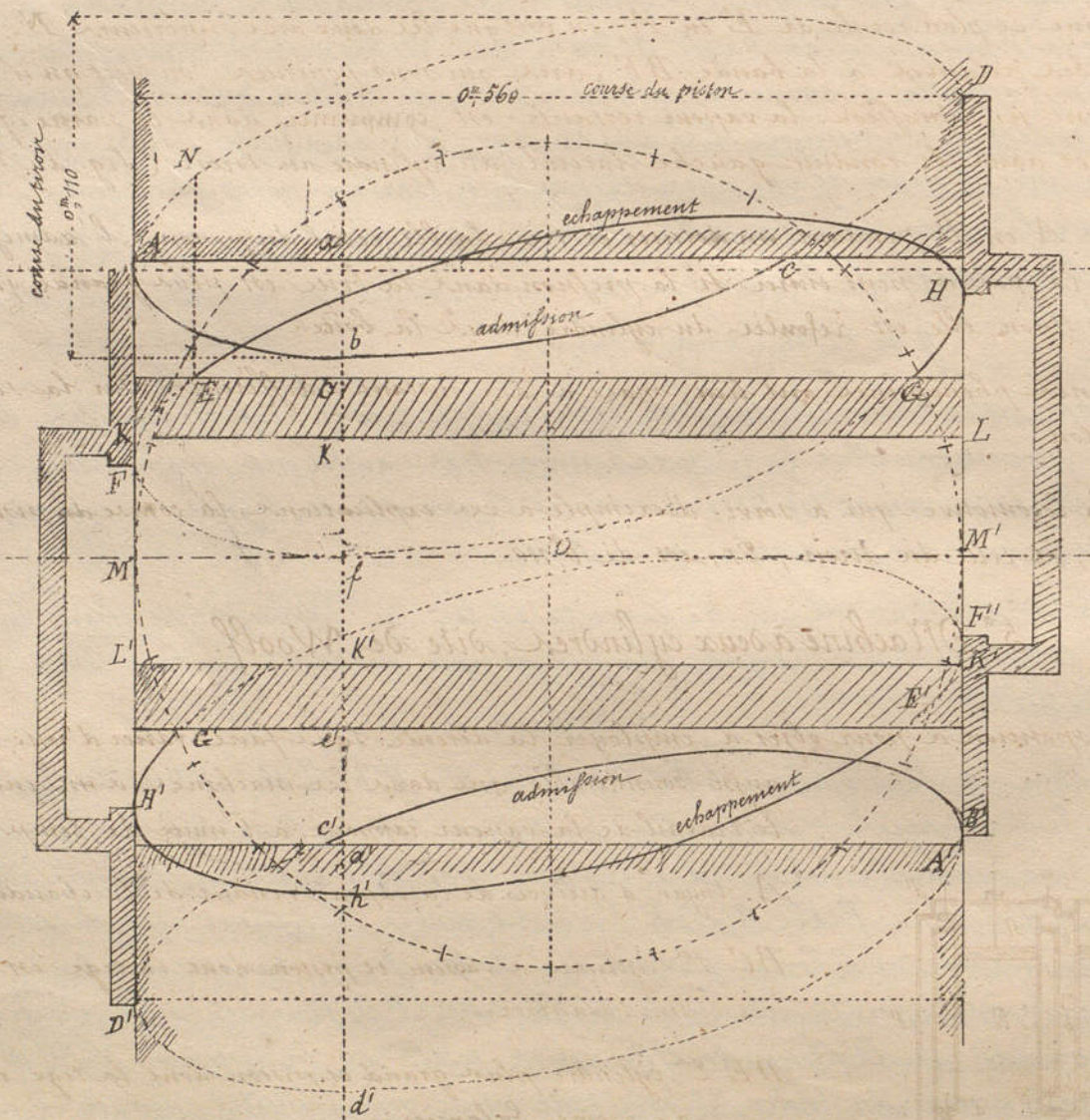
Si l'on construit une courbe dont les abscisses soient proportionnelles à x et les ordonnées proportionnelles à y on se rendra très aisément compte des positions simultanées du piston et du tiroir, comme le montre la figure ci-jointe tracée d'après les proportions indiquées plus haut.

Les x sont portés de gauche à droite et les y positifs de haut en bas, de sorte que lorsque la courbe descend cela indique que le tiroir marche à droite dans la figure précédente.

Les quatre courbes égales $ABCD$, $EFGH$, $E'F'G'H$, $A'B'C'D$ (qui dans l'hypothèse de bielles infinies sont des ellipses, comme il est facile de le voir par l'élimination de α des deux équations précédentes) indiquent par les distances de leurs points aux droites AC , EG , KL , $E'G'$, $A'C'$, $K'L'$ les distances successives des bords B, F, H, D' des bandes du tiroir aux bords des lumières d'admission, tandis que les abscisses ou distances des mêmes points des courbes à la droite BD indiquent à une autre échelle l'espace parcouru par le piston dont la course totale est la distance MM' de BD à DB' . Le cercle tracé autour du centre O avec cette course pour diamètre montre en même temps l'espace angulaire décrit par le bras de la manivelle. Exemple: à l'instant où, à partir du point mort de gauche, la manivelle a parcouru $\frac{4}{24}$ de la circonférence, le piston s'est avancé, à droite, de la partie Mf de la course entière MM' ; l'admission de la vapeur a lieu sur la largeur ab de la lumière de gauche; sa sortie du cylindre s'opère sur la largeur totalement démasquée $e'd$ de la lumière de droite; elle s'échappe dans

l'atmosphère sur la largeur fK' de la lumière intermédiaire d'échappement.

Les moitiés inférieures des courbes, c'est-à-dire les parties $BCD, FGH, H'E, K', D'AB$ qui sont au-dessous des positions extrêmes des bords des bandes du tiroir, indiquent les positions de ces bords pendant la marche en avant du piston. Les moitiés supérieures se rapportent à sa marche en arrière. Les parties pleines des courbes, suivant que celles-ci se rapportent aux bords extérieurs ou aux bords intérieurs des bandes, indiquent les positions du tiroir qui permettent soit l'admission soit l'échappement de la vapeur. Exemple, pour les positions simultanées b, f, h', d' il y a admission dans la 1^{re} lumière, échappement dans la 2^e.



L'examen attentif des courbes donne lieu aux remarques suivantes :

Au départ de gauche du piston, l'admission est ouverte de ce côté comme on le voit en B ; elle a commencé à s'ouvrir un peu auparavant, quand le piston avait encore à reculer de la distance de A à la tangente MB .

L'admission subsiste pendant que le plan de la face gauche du piston va de B en C.

Pendant que ce plan du piston va de C en G, il y a détente à gauche, puisque de ce côté l'admission et l'échappement sont simultanément interceptés.

En point G on voit l'échappement commencer, de ce même côté gauche du piston, avant la fin de la course de celui-ci qui en a encore environ $\frac{1}{16}$ à parcourir. Ce fait qu'on appelle l'avance de l'échappement a l'avantage de préparer le piston à la marche en arrière en donnant à la vapeur du côté gauche le temps de s'évacuer en grande partie d'avance.

Pendant le retour du plan du piston de H en E, il y a échappement libre de ce côté.

Pendant que ce plan recule de E en A, on voit que les deux arcs supérieurs NA, EK des deux courbes relatives à la bande BF (arcs qui sont ponctués, on voit qu'il n'y a ni échappement ni admission: la vapeur restante est comprimée dans la partie gauche du cylindre et dans le conduit gauche lateral du cylindre au tiroir (fig. du n° 560)

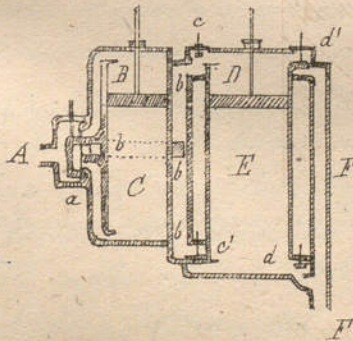
Enfin de A en B pendant un dernier et très faible recul du piston, l'admission est ouverte; la vapeur peut entrer si la pression dans la boîte est plus grande que dans le cylindre; sinon, elle est repoussée du cylindre dans la boîte.

Les mêmes phénomènes ont lieu, mais à des instants différents, sur la seconde face du piston.

Dans la locomotive qui a servi d'exemple à ces explications, la course du piston, $2R$, est de 0^m56, et celle du tiroir, $2r$, est de 0^m110.

5°. Machine à deux cylindres, dite de Woolf.

562. — Cette disposition a pour objet d'employer la détente sans faire varier d'une manière aussi considérable que dans les machines à un seul cylindre; le travail de la vapeur rapporté à l'unité de temps.



A tuyau d'arrivée de la vapeur venant de la chaudière.

BC 1^{er} cylindre à vapeur et piston dont la tige est liée à un balancier.

DE 2^{er} cylindre plus grand et piston dont la tige est liée au même balancier.

a boîte à tiroir. Le tiroir introduit la vapeur à haute pression alternativement en dessus (cas de la fig.) et en dessous du 1^{er} piston.

bbbb tuyau en partie annulaire horizontal contourant le

petit cylindre; et en partie vertical; il conduit au grand cylindre tantôt au dessus (car de la fig.) tantôt au dessous du 2^e piston, la vapeur qui dans la course précédente a agi à pleine pression sur le 1^{er} piston.

C, C' soupapes pour l'admission de cette vapeur dans le grand cylindre.

F F tuyau constamment en communication avec le condenseur.

d, d' soupape d'exhaustion du grand cylindre.

Les tiges du tiroir et des quatre soupapes reçoivent leur mouvement au moyen d'un système de leviers en communication avec un excentrique calé sur l'arbre d'un volant qui fait une révolution à chaque double course du balancier et des pistons.

Les deux pistons liés à un même balancier descendent et montent ensemble; la course du 2^e est un peu plus grande que celle du 1^{er}.

Soit V le volume décrit par une face du petit piston pendant que la vapeur s'introduit à la pleine pression P . Soit V_1 le volume décrit par cette même face pendant la course entière. On peut pour plus de généralité supposer que ce volume est un peu plus grand que V , de sorte qu'il y aurait travail moteur dû à la détente dans le petit piston. Si l'on néglige comme assez petit par rapport à V l'espace compris entre le tiroir et le piston à l'origine de sa course, le travail moteur de la vapeur introduite sur le 1^{er} piston est, V et p représentant son volume et sa pression variables,

$$PV + \int_V^{V_1} p dv = PV \left(1 + \int_V^{V_1} \frac{dv}{v} \right)$$

Pendant que dure la course à laquelle appartient ce travail, le grand piston décrit un volume V_2 plus grand que V_1 et une même quantité, en poids, de vapeur passe du volume V , au volume V_2 (pourvu qu'on néglige la capacité du tuyau $b b b b$) en exerçant sur les deux pistons un travail dont une partie est négative et l'autre positive et la somme algébrique positive

$$PV \int_V^{V_2} \frac{dv}{v}$$

Pendant ce même temps, la pression du condenseur étant P' le travail résistant de ce côté est $\dots P'V_2$

Donc, en égard à la relation $PV = P_2 V_2$, le travail total des pressions sur les deux pistons pour chaque course, et pour la dépense V de vapeur est

$$PV \left(1 + \int_V^{V_2} \frac{dv}{v} - \frac{P'}{P_2} \right) \text{ ou } PV \left(1 + \log. \text{ hyp. } \frac{P}{P_2} - \frac{P'}{P_2} \right)$$

C'est la même formule que pour une machine à un seul cylindre, et ce résultat facile à prévoir tient à ce qu'on néglige l'influence des espaces compris dans le

tuyau de communication, et entre les soupapes et les positions extrêmes des pistons.

L'avantage qu'on a eu en vue dans l'adoption de ce système est que l'effort total sur le balancier est moins variable que dans la machine à détente et à un seul cylindre. Mais cet avantage est atténué par la complication de l'appareil et une machine à un cylindre régularisée par un volant suffisant paraît préférable.

6° Détente variable.

563. — Les appareils mentionnés aux n° 560 et 561 et la machine de Woolf réalisent la détente dans une proportion déterminée d'une manière invariable par la figure du tiroir, de l'excentrique, et par les dimensions des cylindres. Mais on comprend aisément l'utilité d'une disposition qui permette d'augmenter ou de diminuer à volonté la partie de la course dans laquelle la vapeur agit à pleine pression. Cela est facile dans la machine de Cornwall en déplaçant sur la ponticelle la came qui, en descendant, ferme la soupape d'admission et fait commencer la période de la détente; mais il faut pour cela arrêter la machine. Les appareils que nous allons indiquer produisent le même effet et fonctionnent pendant que la machine est en mouvement.

564. — Appareil de détente variable de Parcot. (Croquis 3^e série, feuille) Le tiroir a une forme moins simple que ceux des n° 560 et 561. Il y a trois compartiments G, H, I, et la vapeur ne peut arriver aux lumières A et B pour pénétrer dans le cylindre qu'en traversant des orifices α, α, α , pratiqués au dos des compartiments G, H. Sur ce dos du tiroir sont appliquées et pressées par des ressorts deux plaques dites glissières E, F, qui tantôt sont entraînées dans le mouvement du tiroir et tantôt s'arrêtent en le laissant glisser. Ces plaques sont aussi percées d'orifices, de telle sorte que chacune d'elles peut, suivant sa position relative sur le dos du tiroir, tantôt laisser entrer la vapeur dans le compartiment auquel elle correspond, et tantôt intercepter son passage. A cet effet, chaque glissière porte un goujon e et un talon d. Le goujon avant la fin d'une des courses du tiroir heurte une paroi fixe de la boîte à tiroir; la glissière s'arrête tandis que le tiroir continue de marcher, et à la fin les orifices coïncident. Lorsque dans sa course suivante le tiroir est arrivé à la position où l'admission doit commencer, comme il a entraîné avec lui la glissière en lui faisant sa position relative, la vapeur passe par les orifices du compartiment correspondant. Mais ensuite le talon d vient heurter une came m qui l'arrête; la glissière devenant ainsi immobile pendant que le tiroir avance, ferme les orifices α qui correspondent à cette plaque, et la détente commence de ce côté. Or les deux cames m sont liées à un arbre n qu'il suffit de tourner plus ou moins pour faire arriver plus tôt ou plus tard l'instant de la rencontre d'un talon et de sa came, et par conséquent pour avancer ou retarder le commencement de la détente. Le déplacement angulaire de cet arbre n peut être laissé à la disposition du surveillant de la machine; il peut

être aussi opéré par la machine elle-même au moyen du régulateur à force centrifuge.

565. - Appareil de détente variable de Meyer. L'orifice par lequel la vapeur s'introduit dans la boîte à tiroir est muni d'une soupape conique H dont la tige est sollicitée par un ressort à s'écarter de cet orifice; mais, pendant que la détente doit avoir lieu, un excentrique monté sur un arbre tournant repousse la tige de la soupape et l'oblige de fermer l'orifice de la boîte à tiroir. Or l'excentrique, si on le coupe par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, a un profil variable; de manière que si on fait glisser cet excentrique sur son arbre, on fait changer la durée de la fermeture de la soupape et par conséquent l'étendue de la détente. Dans la fig. 3 des croquis, le glissement de l'excentrique est produit par le régulateur à force centrifuge de la machine qui se règle ainsi d'elle-même, moyennant un rapport convenable des vitesses angulaires du régulateur et du volant.

566. - Couliſſe de Stephenson employée dans les locomotives des chemins de fer. Elle a deux objets; l'un est de déterminer le mouvement du tiroir, à volonté, pour la marche de la locomotive en avant, ou pour sa marche en arrière; le second est de faire varier dans certaines limites la détente. Deux excentriques circulaires B, B' (croquis, 3^e série, feuille 18) ont leurs bielles articulées en c; c' au deux extrémités d'une couliſſe courbe; dans cette couliſſe est engagée une pièce D qui peut y occuper diverses positions, et à laquelle s'articule l'extrémité de la tige du tiroir. Cette même couliſſe est suspendue à articulation à l'extrémité inférieure d'une tige liée à un système de leviers G E F L K. Lorsque la couliſſe est complètement abaissée, l'extrémité G de la bielle menée par l'excentrique B est très-près de l'extrémité D de la tige du tiroir; celui-ci, qui d'ailleurs ne peut se mouvoir qu'en ligne droite, obéit donc exclusivement à l'excentrique B. C'est le contraire quand la couliſſe est complètement élevée. Dans le 1^{er} cas, la locomotive marche en avant; dans le second, elle marche en arrière. Si la couliſſe est partiellement baissée, comme dans la figure, le tiroir est conduit à la fois par les deux excentriques qui donnent à la couliſſe un mouvement d'oscillation, et l'effet de l'excentrique qui agit en c l'emporte sur l'autre; c'est encore la marche en avant qui a lieu. Mais ce qui est remarquable, c'est que la course du tiroir étant diminuée, la détente commence plus tôt. Le modèle à grande échelle qui a fonctionné sous les yeux des élèves a mis en évidence cette double propriété de la couliſſe de Stephenson.

7^e. Coefficient pratique de la formule du travail de la vapeur.

567. - La formule [1] du N° 554 s'applique à tous les genres de machines employées dans l'industrie, moyennant un coefficient de réduction par lequel on tient approximativement compte en pratique du travail résistant des pompes et autres appareils accessoires, des frottements, des pertes de vapeur, &c.

Le travail correspondant à un volume V de vapeur sortant de la chaudière à une pression P est exprimé d'après les notations du n° 554 par

$$K \cdot P V \left(1 + \log_{\text{hyp.}} \frac{P}{P'} - \frac{P'}{P} \right),$$

Le coefficient K ayant, d'après M. le g^l A. Morin, les valeurs suivantes qui résultent de diverses expériences :

Désignation des machines.	Puissance des machines en chevaux.	Valeur de K suivant l'état d'entretien des machines.	
		très bon état.	état ordinaire.
Machines ordinaires à détente et à condensation.	4 à 8	0,33	0,30
	10 à 20	0,42	0,35
	20 à 40	0,50	0,42
	au dessus de 30	0,44	0,35
Machines d'épuisement des mines de Cornouailles.	30 à 40	0,49	0,39
	40 à 50	0,57	0,46
	50 à 60	0,62	0,50
	60 à 70	0,66	0,53
	70 à 80	0,82	0,66
	80 à 100.	0,70	0,56
Machines à détente sans condensation		0,40	0,35

Table des matières.

Table des matières.

3.^e Section. - Dynamique des systèmes matériels.

Chap. 1.^{er}. - Dynamique du point matériel.

Pages

250. § 1.^{er} Résumé des notions précédentes sur ce sujet. - Intensité et direction de l'accélération. Accélération de la projection égale à la projection de l'accélération. Accélération tangentielle. Accélération centripète. Equations de la quantité de mouvement et de l'impulsion projetées. Equations de la quantité de mouvement et de l'impulsion tangentielle. Equation du travail. Forme analytique de cette dernière équation.
254. § 2. Cas particulier de l'équation du travail dit Principe des forces vives. - Surfaces de niveau. Le cas particulier dont il s'agit se réalise toutes les fois que les forces passent par des centres fixes et sont fonctions des distances du mobile à ces divers centres.
261. § 3. Mouvement d'un point sur une courbe donnée. - Hypothèse de l'absence du frottement. Ce qu'on appelle la réaction de la courbe et la pression du mobile sur la courbe. Celle-ci est la résultante de la force centrifuge $-\frac{mv^2}{\rho}$ et des forces normales obtenues en décomposant chaque force effective autre que la réaction en deux forces l'une tangentielle l'autre normale à la courbe.
264. § 4. Applications du § précédent. - Point pesant sur un plan incliné sans frottement. Mouvement circulaire d'un point matériel dont on néglige la pesanteur. Pendule conique. Surface parabolique d'un liquide pesant ayant un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. Point pesant sur un cercle vertical. Mouvement pendulaire; durées comparées de la descente suivant l'arc de cercle et suivant la corde.
273. § 5. Moments des quantités de mouvement et des impulsions pour un point matériel. - L'accroissement élémentaire ou fini du moment de la quantité de mouvement autour d'un axe quelconque est égal à la somme des moments des impulsions des forces pendant le même temps. - Autre énoncé de cette équation: Le produit de la masse par l'accroissement de la vitesse angulaire autour d'un axe quelconque est égal à la moitié de la somme des moments des impulsions des forces pendant le même temps, ou bien, le produit de la masse par l'accélération angulaire autour d'un axe est égal à la moitié de la somme des moments des forces autour du même axe, au même instant. L'équation des moments des quantités de mouvement n'est que l'intégrale de l'équation des moments des forces effectives et des forces équivalentes $m \frac{dv_x}{dt}$, $m \frac{dv_y}{dt}$

no

Pages

$\frac{m dv_z}{dt}$ ou $m \frac{d^2x}{dt^2}$, $m \frac{d^2y}{dt^2}$, $m \frac{d^2z}{dt^2}$. Cas particulier dit principe des aires 9

276. § 6. Extension de tous les théorèmes précédents aux mouvements relatifs. - Il suffit de joindre aux forces réelles ou effectives qui sollicitent le mobile, les forces fictives $-m J_c$, $2m \omega r$, conformément aux nos 122 et suiv. Exemple d'un corps sous la seule action de l'attraction terrestre. 11

Chap. 2. Théorèmes généraux de la Dynamique des systèmes matériels.

277. § 1^{er}. Résumé des notions précédentes sur ce sujet. - Distinction des forces extérieures et des forces intérieures relativement à un système matériel. Principe de la réaction égale et contraire à toute action. Théorème de la quantité de mouvement et de l'impulsion projetées sur une droite. Théorème du mouvement du centre de gravité. Théorème du travail; expression spéciale que prend le travail des forces intérieures. Travail de la pesanteur sur un système quelconque. 11

282. § 2. Cas particulier de l'équation du travail dit principe des forces vives d'un système matériel. - C'est l'extension de la propriété analogue établie ci-dessus pour un point matériel. 12

283. § 3. Moments des quantités de mouvement et des impulsions pour un système matériel. - Extension du § ci-dessus. Composition des quantités de mouvement d'un système. Moment résultant de ces quantités de mouvement, à un instant quelconque, autour d'un axe déterminé; il est exprimé par un axe représentatif pour la grandeur, la direction et le sens. La projection rectangulaire de cet axe, sur une droite quelconque, exprime de la même manière la somme des moments des quantités de mouvement autour de cette droite. Pourquoi le plan du moment résultant s'appelle plan du maximum des aires. Car on il est invariable. 13

288. § 4. Des six équations du mouvement d'un système matériel indépendantes des forces intérieures. Principe de d'Alembert. Les équations de projections et de moments pour les quantités de mouvement et les impulsions sont analogues aux équations d'équilibre de deux systèmes de forces. On les obtient immédiatement par le principe de d'Alembert. 15

291. § 5. Extension des théorèmes précédents aux cas de mouvement d'un système matériel relativement à un milieu géométrique invariable en mouvement. - Plan invariable de Laplace. Décomposition de la puissance vive d'un système matériel quelconque en deux parties dont l'une est celle qu'aurait le système s'il était condensé au centre de gravité. 16

1^{re} Division.

Cours de Méc. et Mach. - 45^e Feuille.

294. § 6. Applications des théories de ce chapitre. - En quel sens la propriété de l'inertie de la matière appartient à un système. Faculté locomotive chez les animaux. Projectile qui fait explosion dans l'espace. Bateau en mouvement uniforme. Pression variable d'un homme sur un plan horizontal. Corps pesant en mouvement dans un liquide. Effet de la poudre sur les projectiles et les bouches à feu. Du choc des corps. Choc direct, sa durée, intensité des forces au contact. Dérive de puissance vive dans le cas où les deux corps restent unis. - Battage des pilotes. - Théorème de Carnot. Choc des corps élastiques dans le cas où ils ne vibrent pas après leur séparation. Oscillations d'un prisme élastique vertical.... 17

Chap. 3. - Dynamique spéciale des Solides.

320. § 1^{er} Solide tournant autour d'un axe fixe. Moments d'inertie. - Pourquoi le moment d'inertie s'appelle ainsi. Formule de l'accélération angulaire. Expression de la puissance vive d'un solide tournant, en fonction de sa vitesse angulaire et de son moment d'inertie. - Propriétés géométriques de moments d'inertie, relativement 1^o à un axe parallèle; 2^o à divers axes passant par un même point. Ellipsoïde représentatif. Axes principaux. Ellipsoïde central. Méthode pour déterminer le moment d'inertie d'un corps homogène. Formules de moments d'inertie. Pression d'un solide tournant sur ses appuis.... 29

333^{bis}
340^{bis} Addition au § 1. Caractère auquel on reconnaît qu'une droite est axe principal en un point de son cours. Condition sous laquelle les forces d'inertie ont une résultante unique.... 54

341 § 2. Applications du § précédent. - Pendule composé; centre d'oscillation; propriété réciproque des centres de suspension et d'oscillation; pression du pendule sur ses appuis; pendule de Maetzel. Balance de torsion. Corps tournant autour d'un axe vertical sous l'action de la pesanteur et d'un ou plusieurs couples; meules de moulin à blé. Centre de percussion. Pendule balistique. Régulateur à force centrifuge.... 35

350^{bis} Addition au n^o 350.... 55

354. § 3. Mouvement d'un solide autour d'un point fixe où passe la résultante des forces extérieures. Le moment résultant des quantités de mouvement, qui est constant, a son axe représentatif perpendiculaire au plan mené, tangentiellement à l'ellipsoïde d'inertie, par le point où celui-ci est percé par l'axe de rotation instantanée. Valeur de ce moment résultant. Le mouvement du corps est complètement défini par le roulement de son ellipsoïde sur un plan tangent fixe, avec une vitesse angulaire variable de manière que sa puissance vive reste constante. Pourquoi les axes principaux d'inertie sont nommés axes per-

manente de rotation 43

359. § 4. Du mouvement d'un solide soumis à des forces quelconques. - Cas de forces agissant pendant des temps très courts. En général le mouvement de rotation sphérique d'un corps autour de son centre de gravité, relativement à des axes de translation, est celui qui aurait lieu si le centre de gravité était fixe, les forces extérieures, hors de ce point, restant les mêmes. Exemples divers: mouvement de deux boules sphériques pesantes liés entre eux; corps sphérique formé de couches homogènes; mouvement d'une sphère ou d'un cylindre homogène roulant sur un plan incliné. (Voir 367^{ème} page 55). Mouvement d'une sphère homogène sur un plan horizontal. 45

370. § 5. Considérations sur l'application aux solides naturels de la théorie du mouvement des systèmes invariables. Mouvement d'un solide naturel. Relation entre la puissance vive d'un système vibrant et celle d'un solide invariable coïncidant (à l'instant considéré) avec le premier mais possédant le mouvement moyen de celui-ci. Puissance vive dissimulée. 51

Chap. 4. - Mouvement de certaines pièces solides des machines; pertes de travail qui en résultent.

375. § 1. Treuil horizontal auquel sont suspendus des corps pesants. Cas où le centre de gravité du treuil est dans l'axe de rotation; cas où il est dehors. 56

381. § 2. Actions mutuelles des corps tournants dans le mouvement varié. Conséquence pratique à tirer de l'influence des moments d'inertie dans cette question. 57.

385. § 3. Des volants. Applications diverses: manivelle simple à simple effet; manivelle simple à double effet; manivelle à simple effet et à contre poids; manivelle à double effet à contrepoids; manivelle à double effet avec masse en mouvement alternatif. Manivelle double à simple effet. Manivelle double à double effet. Effets des forces d'inertie sur les bras des volants. 60

395. § 4. Effet du choc dans la presse à coin. - Vitesses à la fin du choc; mouvement après le choc. 67.

397. § 5. Camer soulevant un marteau. Calcul du travail moteur nécessaire pour entretenir ce mouvement périodiquement uniforme de l'arbre à camers. 69

404. § 6. Vis à percussion ou balancier. Phase de la descente à vide. Phase du percement. 73

4^e Section.

4^e Section. Mécanique des Fluides.Chap. 1^{er} Hydrostatique.

408. §1^{er}. Propriétés caractéristiques des fluides. Le caractère essentiel de la fluidité parfaite est l'absence de tout frottement. On en conclut l'égalité de pression en tous sens pour chaque point du fluide. Surfaces et couches de niveau dans les fluides pesants en repos. Relation des pressions en deux points différens d'un fluide pesant. Hauteur représentative d'une pression. Stabilité de divers liquides superposés. Généralisation de de la théorie précédente par l'équation de l'équilibre d'un fluide sous l'action de forces quelconques. 76.
- 417^{bis}. Addition au N^o 417. 120
419. §2. Pression totale d'un liquide pesant homogène sur un plan. Centre de pression. 81.
422. §3. Pression d'un fluide sur une surface courbe. 83
426. §4. Équilibre des corps plongés dans un fluide pesant. Solide entièrement plongé; distinction de deux équilibres, l'un stable, l'autre instable. Cas d'un corps entièrement plongé, mais attaché par un fil à un point fixe. Corps flottants; condition générale de la stabilité de leur équilibre. Métacentre. 84.
431. §5. Du calcul de la hauteur des montagnes d'après les observations barométriques. 88.

Chap. 2.~ Hydraulique théorique et expérimentale.

435. §1. Du mouvement permanent d'un liquide dans le cas où les frottements peuvent être négligés. Règles approximatives admises en pratique relativement à la variation de la pression d'un point à un autre d'un liquide, dans quelques cas simples. Théorème de D. Bernoulli. Notion des colonnes et niveaux piésométriques qui simplifie son énoncé. Application à un tuyau de section variable; restrictions auxquelles cette application est soumise. 91.
441. §2. Écoulement par un petit orifice en mince paroi. Contraction de la veine fluide. Vitesse. Dépense. Indication des expériences relatives aux cas où l'orifice n'est pas très-petit. Phénomène de l'inversion de la veine. 96
445. §3. Ajutage rentrant de Borda. Détermination théorique de la contrac-

- tion, confirmée par l'expérience 98
446. § 4. Orifices évasés à l'entrée, sans courcier ou avec courcier à la sortie 99
449. § 5. Écoulement par déversoir. Théorie approximative. Résultats d'expérience 101
451. § 6. Ajutage cylindrique rempli par le liquide. Expérience de Venturi qui confirme la théorie de ce phénomène. Perte de charge due à un étranglement 102
455. § 7. Mouvement permanent de liquides dans les longs tuyaux. Formule de Prony. Application à une communication entre deux bassins. Cas d'exception. Effets des étranglements et des coudes dans les conduites 106
463. § 8. Mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts. Vitesse à la surface. Vitesse à la paroi. Vitesse moyenne; leurs relations. Formule de Prony pour le mouvement uniforme 112
470. § 9. Pression mutuelle d'un liquide et d'un corps solide pendant leur mouvement relatif. Pression d'une veine liquide contre un plan fixe ou fixe étendu pour obliger le liquide de s'échapper parallèlement à ce plan. Indication des expériences sur les corps plongés dans un fluide indéfini, et sur les corps flottants en mouvement 112
475. § 10. Notions sur le jaugeage des eaux courantes 117
480. § 11. Notions sur l'écoulement des gaz. - Cas où le frottement peut être négligé. Mouvement des gaz dans les conduites cylindriques 118

5^e Section. - Des machines diverses considérées dans leur état de mouvement.

488. § 1^{re}. Définitions et considérations générales sur les machines. Effet dynamique d'une machine. Résistance principale. Résistances secondaires. Classification de ces dernières: frottements et résistance au roulement; flexions et déformations alternatives; chocs. Divers modes du travail moteur: Les corps remplissent de deux manières la fonction de moteur. Théorie générale de la transmission du travail. Utilité des machines. Leurs diverses parties: récepteur; organes de transmission; machines outils 121
498. § 2. Notions sur le travail dynamique des moteurs animés. - Tableau des valeurs du travail journalier que peuvent fournir les moteurs animés

1^{re} Division.

Cours de Mec. et Mach. - 46^e Feuille.

- dans diverses circonstances sans excéder la fatigue que réparent le repos, la nourriture et le sommeil. 124.
500. § 3. Généralités sur les récepteurs hydrauliques. Puissance absolue d'une chute d'eau. Rendement du récepteur. 126
502. § 4. Roues hydrauliques dites en dessous et à aubes planes. - Degré convenable d'immersion des aubes au dessous du niveau du bief d'aval. Expériences de Smeaton et comparaison de leurs résultats avec ceux qu'indiquent la théorie. 128.
510. § 5. Roues à couronne circulaire dites de côté. Diverses pertes de travail. 134.
512. § 6. Roue à aubes non emboîtées dans un couronne. - Figure de l'eau dans les aubes. 137.
514. § 7. Roue à aubes courbes de M. Poncelet. Leur théorie. Leur rendement. 139.
519. § 8. Roue à axe vertical. Turbines. Roue dite à réaction. - Théorie de la turbine de M. Fourneyron, donnée comme exemple de la marche à suivre dans l'étude des turbines diverses. Indications relatives à la turbine d' Euler. 142.
534. § 9. Roue à axe horizontal dans un courant à grande section, dite roue pendante. Roue à aubes des bateaux à vapeur. 150.
536. § 10. Des moulins à vent et du propulseur hélicoïde. Théorie de l'inclinaison des ailes. Indication des résultats de la pratique.
538. § 11. Pompes et autres machines hydrauliques. Classification des diverses pompes à mouvement rectiligne alternatif. Pistons. Soupapes. Pompes à simple effet, élévatoires, foulantes. Pompes à double effet. Influence de la grosseur de la tige du piston sur l'eau élevée pendant sa descente. Limite de l'élévation de l'eau dans le tuyau d'aspiration et dans le corps de pompe. Machine à colonne d'eau; légende explicative du dessin de cette machine. Indication succincte des roues élévatoires à palettes et à aubes, des norias, de la vis d'Archimède; résultats d'expérience. 154
- § 12. Des machines à vapeur
552. 1°. Considérations générales. Travail dû à une quantité donnée de vapeur. Poids de la houille employée. Distinction des machines en quatre genres. 160.
558. 2°. Description d'une machine du 1^{er} genre à simple effet (de Cornwall). 163
559. 3°. Description de la machine de Watt à double effet. 166

560. 4° De la distribution de la vapeur dans les machines à double effet et à détente... 167.

562. 5° Machines à deux cylindres dites de Woolf 171.

563. 6° Détente variable. Appareils de Farcot, de Meyer, Conlipse de Stephenson... 173

567. 7° Coefficients pratiques de la formule du travail de la vapeur 174.



On the course of the Nile

By James Bruce

du Cours d'Analyse.

1^{ère} Leçon.

Différentier une intégrale définie par rapport à l'une de ses limites ou à une quantité qui se trouve dans la fonction sous le signe \int . Expliquer la règle par une figure.

Intégration sous le signe \int . On a $\int dy \int_a^b f(x,y) dx = \int_a^b dx \int f(x,y) dy$.

Détermination de quelques intégrales définies.

$$\int_0^\pi \sin^n x \cdot dx = u_n = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$\int_0^\pi \sin^{n+1} x \cdot dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n+1)}$$

En observant que u_n est $< u_{n+1}$ et $u_{n+1} < u_{n+2}$ on trouve la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \dots}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\pi}{2}$$

En différenciant n fois par rapport à a , on a

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}}}$$

2^e Leçon.

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \text{ donne } \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{a^n}, n \text{ entier}$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{a-b\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \cdot dx = \frac{a}{a^2+b^2} \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \cdot dx = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Multipliant par dx et intégrant à partir de $a=c$, on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cos bx \cdot dx = \frac{1}{2} \log \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} \int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin bx \cdot dx = \text{arc tang } \frac{a}{b} - \text{arc tang } \frac{c}{b}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x} dx = \frac{\pi}{2}, b \text{ positif.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 0 \text{ selon que } \alpha < 1 \text{ ou } > 1.$$

3^e Leçon.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{ par des considérations géométriques}$$

$$\text{On en déduit } \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx \text{ et } \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx$$

Intégration de formules $M dx + N dy$, $M dx + N dy + P dz$. Conditions d'intégrabilité.

4^e Leçon.

Équations différentielles du premier ordre à deux variables.

Cas où les variables se séparent.

Intégration des équations homogènes. Exemple. $x dy - y dx = dx \sqrt{x^2 + y^2}$ — intégration géométrique de cette équation

On peut rendre homogène l'équation $(a + mx + my + ny) dx (b + px + qy) dy = 0$.

Comment on l'intègre quand $mq - np = 0$.

Intégration de l'équation linéaire du 1^{er} ordre $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ et de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n, \text{ } P \text{ et } Q \text{ étant des fonctions de } x. \text{ Exemples.}$$

5^e Leçon.

Déterminer une courbe qui coupe sous un angle donné ou à angle droit une suite de courbes de même espèce $F(x, y, a) = 0$.

Intégrer $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R$ quand on a une intégrale particulière u .

On pose $y = u + z$ et l'on trouve z en intégrant l'équation

$$\frac{dz}{dx} + (P - 2Qu)z = Qz^2$$

Intégrer $f(p) = 0$, $x = \varphi(p)$.

$$y = x f(p) + \varphi(p), \quad y = px + \varphi(p), \quad (p = \frac{dy}{dx})$$

L'intégrale générale de l'équation $y = px + \varphi(p)$ est $y = cx + \varphi(c)$ et représente un système de lignes droites.

Il y a une solution singulière qui représente la courbe à laquelle ces droites sont tangentes.

6^e Leçon.

toute équation différentielle du premier ordre $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ou $M dx + N dy = 0$ a une intégrale qui contient une constante arbitraire.

Quelles que soient les fonctions M et N , il existe toujours un facteur v tel que le produit $v(M dx + N dy)$ est la différentielle exacte d'une fonction u des deux variables x, y considérées comme indépendantes.

Il y a même une infinité de facteurs qui sont de la forme $\sqrt{x}(u)$.

On a l'intégrale de l'équation $M dx + N dy = 0$ quand on connaît deux de ses facteurs.

L'équation qui devient différentielle exacte par un facteur fonction de x seule est l'équation linéaire

$$\frac{dy}{dx} + P y + Q = 0$$

7^e Leçon

Une équation différentielle d'un ordre quelconque m étant donnée, il existe une équation intégrale qui contient m constantes arbitraires.

On peut développer y par la série de Taylor, suivant les puissances de $x-a$.

$$y = b + b'(x-a) + \frac{b''}{1.2}(x-a)^2 + \dots + \frac{b^{(m-1)}}{1.2.3 \dots (m-1)}(x-a)^{m-1} + \frac{f(a, b, b', \dots, b^{(m-1)})}{1.2.3 \dots m}(x-a)^m + \frac{f(a, b, b', \dots)}{1.2.3 \dots m(m+1)}(x-a)^{m+1} + \dots$$

$b, b', \dots, b^{(m-1)}$ étant les valeurs arbitraires de $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ pour $x=a$ et $f(a, b, b', \dots, b^{(m-1)})$ & les valeurs de $\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$ tirées de l'équation différentielle proposée

$$\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

et de ses dérivées.

Élimination des constantes entre l'équation intégrale et ses dérivées. Équation intégrale de différents ordres.

L'équation $\frac{d^m y}{dx^m} = V$ ou $f(x)$ donne pour intégrale

$$y = b + b'(x-a) + \frac{b''}{1.2}(x-a)^2 + \dots + \frac{b^{(m-1)}}{1.2.3 \dots (m-1)}(x-a)^{m-1} + \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x V dx^m$$

$$\text{et l'on a } \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x V dx^m = \frac{1}{1.2.3 \dots (m-1)} \left\{ x^{m-1} \int_a^x V dx - (m-1)x^{m-2} \int_a^x V dx + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} \int_a^x V dx \dots \pm \int_a^x V dx \right\}$$

$$= \frac{1}{1.2.3 \dots (m-1)} \int_a^x f(x) \cdot (x-z)^{m-1} dx.$$

8^e Leçon.

Intégrer $\frac{d^m y}{dx^m} = f\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \frac{d^2 y}{dx^2} = f(y), \frac{d^m y}{dx^m} = f\left(\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}\right)$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0, \frac{d^2 y}{dx^2} - n^2 y = 0$$

Trouver la combe dont le rayon de courbure est constant, ou fonction donnée de l'abscisse, ou proportionnel à la longueur de la normale terminée à l'axe des x . L'intégration s'a-

chère quand on suppose le rayon égal à la normale ou double de cette normale.

9^e. Leçon.

Une équation différentielle homogène par rapport à y et à ses dérivées est de la forme

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0 \text{ s'abaisse en faisant}$$

$$\frac{dy}{dx} = u \text{ ou } y = e^{\int u dx}$$

On abaisse ainsi une équation de la forme $f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0$

en prenant y pour variable indépendante, et posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \text{ d'où } \frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy} = p \frac{d^2y}{dy^2} = p \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left(\frac{dp}{dy}\right)^2, \text{ \&c}$$

10^e. Leçon.

Quand une équation linéaire d'ordre m ne contient pas de terme indépendant de la fonction inconnue et de ses dérivées, la somme de plusieurs intégrales particulières est encore une intégrale.

Intégration d'une équation linéaire à coefficients constants.

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

On trouve des valeurs particulières de y de la forme Ce^{rx} , r étant une racine quelconque de l'équation numérique $r^m + Pr^{m-1} + \dots + Tr + U = 0$, et en désignant par r_1, r_2, \dots, r_m les m racines de cette équation, l'intégrale générale est

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_m e^{r_m x}.$$

On peut déterminer les constantes arbitraires C_1, C_2, \dots de manière que pour $x=a$ y et ses $m-1$ premières dérivées prennent des valeurs données à volonté.

L'expression de y doit être modifiée dans le cas où l'équation en r a des racines imaginaires et dans le cas où elle a des racines multiples.

L'intégrale générale d'une équation linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0$$

dans laquelle P, Q, \dots, T, U sont des fonctions de x ou des constantes, est de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m$$

y_1, y_2, \dots étant des valeurs particulières de y qui satisfont à l'équation.

On peut prendre la même expression de y pour l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V.$$

en regardant C_1, C_2, \dots, C_m , non plus comme des constantes, mais comme des fonctions de x qu'on peut déterminer par de simples quadratures.

11^e Leçon.

Si l'on peut trouver une solution y_1 de l'équation.

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + Uy = V$$

on aura pour solution générale $y = y_1 + z$, z étant l'intégrale générale de

$$\frac{d^m z}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Uz = 0$$

On peut ainsi intégrer les équations

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + Uy = A \text{ ou } = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + Cx + H$$

$$\text{ou } = A \cos nx + B \sin nx.$$

$$\text{ou } = A \cos nx + B \sin nx + A' \cos' x + B' \sin' x + \&c.$$

$$\text{ou } = A e^{nx} + A' e^{n'x} + \&c.$$

Étant données deux équations différentielles à deux inconnues, on peut éliminer l'une d'elles et ses dérivées.

Intégration de deux équations linéaires simultanées du 1^{er} ordre.

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qz = V,$$

$$\frac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V'$$

Car où les coefficients P, Q, P', Q' sont constants.

12^e Leçon.

Équations différentielles simultanées. On ramène tous les cas à celui où elles sont du premier ordre. Les expressions générales des fonctions inconnues doivent contenir autant de constantes arbitraires qu'il y a d'inconnues. L'intégration du système

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{V}{P}, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{V}$$

doit conduire à trois équations contenant x, y, z, u avec trois constantes arbitraires c, c', c'' . En les résolvant par rapport à ces constantes, elles prendront la forme

$$\alpha = c, \quad \beta = c', \quad \gamma = c'',$$

α, β, γ étant de certaines fonctions de x, y, z, u qui, substituées à la place de θ ,

vérifie identiquement l'équation

$$P \frac{d\theta}{dx} + Q \frac{d\theta}{dy} + R \frac{d\theta}{dz} + V \frac{d\theta}{du} = 0$$

Toute fonction de x, y, z, u , reductible à la forme $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ satisfait à la même équation, et réciproquement.

13^e Leçon.

Il faut s'assurer que les équations $\alpha = C, \beta = C', \gamma = C''$, ne sont ni incompatibles, ni indéterminées; ce qu'on peut toujours reconnaître.

Élimination d'une fonction arbitraire qui entre dans une équation, au moyen des dérivées partielles. Exemples.

14^e Leçon.

Intégration de l'équation linéaire à différentielles partielles.

$$P \frac{du}{dx} + Q \frac{du}{dy} + R \frac{du}{dz} = V.$$

On intègre le système d'équations différentielles simultanées

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{V} \text{ sous la forme } \alpha = C, \beta = C', \gamma = C'',$$

et l'intégrale cherchée est

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \text{ ou } \gamma = \Phi(\alpha, \beta)$$

φ désignant une fonction arbitraire.

Il peut exister une solution singulière $\lambda = 0$, telle qu'on a

$$P \frac{d\lambda}{dx} + Q \frac{d\lambda}{dy} + R \frac{d\lambda}{dz} + V \frac{d\lambda}{du} = 0,$$

non pas identiquement, mais après avoir éliminé l'une des variables x, y, z, u , au moyen de l'équation $\lambda = 0$.

Intégration de l'équation

$$P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} = V$$

à l'aide des considérations géométriques

15^e Leçon.

Intégration des équations différentielles des surfaces cylindriques, coniques, conoïdes et de révolution.

16^e Leçon.

Intégration de l'équation $\frac{d^2u}{dy^2} = \alpha^2 \frac{d^2u}{dx^2}$ qu'on ramène à $\frac{d^2u}{d\alpha d\beta} = 0$, en po-

sant

$$x + ay = \alpha, \quad x - ay = \beta.$$

L'intégrale générale est

$$u = \varphi(x + ay) + \Psi(x - ay).$$

On détermine les deux fonctions φ et Ψ , en supposant u et $\frac{dy}{dx}$ données en fonctions de x pour $y=0$

17^e Leçon.

Equation d'équilibre d'un fil flexible

$$dT = -(X dx + Y dy + Z dz)$$

Chaînette $d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = w ds.$

$$y - c' = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x-c}{h}} + e^{-\frac{x-c}{h}} \right) \quad \text{ou} \quad y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right)$$

l'arc $S = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}} \right)$. Le rayon de courbure égale à la normale $= \frac{y^2}{h}$.

Détermination des constantes

18^e Leçon.

Mouvement vertical d'un corps pesant, en ayant égard à la variation de la pesanteur.

19^e Leçon.

Mouvement descendant et ascendant d'un point pesant dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse

20^e Leçon.

Mouvement des projectiles dans le vide

21^e Leçon.

Mouvement du pendule simple. Durée des petites oscillations $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

22^e Leçon.

Durée des oscillations d'une amplitude quelconque, exprimée par une série.

Valeur approchée $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right)$

Mouvement d'un point pesant sur la cycloïde.

23^e Leçon.

23^e Leçon.

Principe des aires $r^2 d\theta = c dt$, quand un point est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe.

Expressions de la vitesse et de la force

$$v^2 = c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right\}, \quad R = \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right)$$

Lois de Kepler. Conséquences. Direction de la force qui sollicite les planètes.

Son intensité égale à $\frac{c^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2}$ ou $\frac{\mu}{r^2}$; la valeur de μ est la même pour toutes les planètes.

24^e Leçon.

Mouvement d'un point attiré par un centre fixe en raison inverse du carré de sa distance à ce centre

$$r^2 d\theta = c dt, \quad c^2 \left\{ \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right\} = \frac{2\mu}{r} - b$$

Autre méthode

$$\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right) = \frac{\mu}{r^2}, \quad nt = u - e \sin u.$$

25^e Leçon.

Loi de l'attraction universelle de Newton. Le mouvement relatif d'une planète m autour du soleil M est le même que le mouvement absolu d'un point matériel attiré par une masse égale à $M + m$ qui serait placée en un point fixe. La force accélératrice étant représentée par $\frac{\mu}{r^2}$, on a

$$u = f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2},$$

d'où l'on conclut que la masse de chaque planète est beaucoup plus petite que celle du soleil. Le rapport de la masse du soleil à celle d'une planète qui a un satellite a pour valeur approchée

$$\frac{M}{m} = \frac{a^3}{a'^3} \cdot \frac{T'^2}{T^2}$$

Pour la terre, on a

$$G = \frac{f m}{r^2} \quad f(M+m) = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{G r^2 T^2} - 1 = 354592.$$

26^e Leçon.

26^e Leçon.

Des vibrations transversales et longitudinales des cordes.

27^e Leçon.

Mouvement vibratoire d'un fluide élastique dans un tuyau cylindrique indéfini, dans un tuyau fermé à une extrémité, ouvert à une extrémité.

28^e Leçon.

Mouvement d'un gaz dans un tuyau limité, soit fermé, soit ouvert aux deux extrémités.

Vibrations d'une barre élastique indéfinie ou limitée

29^e Leçon.

Définition de la probabilité mathématique.

Probabilité d'un événement composé de deux ou de plusieurs événements indépendants ou dépendants les uns des autres. Exemples.

Probabilité partielle, totale.

30^e Leçon.

Des épreuves répétées. Problème des partis. Énoncé du théorème de Jacques Bernouilli. Espérance mathématique. Loterie.

31^e Leçon.

Table de mortalité. Vie probable d'un individu d'un âge donné.

Vie moyenne. La population d'un pays, si elle est à peu près constante pendant un certain nombre d'années, est égale au nombre des naissances annuelles multipliée par la vie moyenne.

Rentes viagères sur une tête; sur deux têtes.

Assurances sur la vie.

32^e Leçon.

Révision et Complément.

Intégration de trois équations différentielles linéaires

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V & ^{+}$$

Intégration par série de l'équation

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + n^2 xy = 0$$

..... de l'équation

1^{ère} Division.

Sommaire du Cours d'Analyse. - 3^e Feuille.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0$$

33^e Leçon.

Trouver l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

quand on connaît une intégrale particulière y_1 .

$$y = C''y_1 + C'y_1 \int \frac{-fPdx}{y_1^2}$$

§ Intégration de l'équation

$$Pp + Qq = R$$

par les considérations géométriques

Cette équation exprime que le plan tangent à la surface cherchée en un point quelconque doit passer par la droite représentée par les équations

$$\frac{X-x}{P} = \frac{Y-y}{Q} = \frac{Z-z}{R}$$

Toutes les droites semblables sont tangentes à une suite de courbes dont chacune satisfait aux équations différentielles

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

En les intégrant, on aura les équations

$$\alpha = C, \quad \beta = C'$$

de l'une quelconque de ces courbes, et le lieu de celles qu'on obtient en posant

$$C' = \varphi(C)$$

est une surface qui a pour équation

$$\beta = \varphi(\alpha)$$

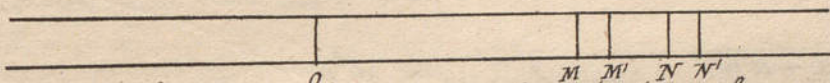
et qui satisfait à la question.

Le Cours d'Analyse.

Vibrations de gaz dans les tuyaux cylindriques.

Dans l'état mutuel d'équilibre du gaz, sa force élastique W est égale à gh , g étant la pesanteur, m la densité du mercure et h la hauteur de la colonne de mercure qui fait équilibre à la pression de ce gaz.

Nous supposons que les molécules du fluide en repos qui sont dans un même plan perpendiculaire aux arêtes du tuyau, se déplacent d'un mouvement commun parallèlement aux arêtes.



Soient x et $x + dx$ les distances à un point fixe de deux plans infiniment voisins, M, M' perpendiculaires aux arêtes, qui comprennent entre eux une tranche dont la masse est ρdx , en désignant par ρ la densité du gaz en repos, et par α la section transversale du tuyau. Après le temps t , cette tranche s'est transportée en NN' ; nous désignerons par u le déplacement MN des molécules qui étaient d'abord dans le plan M ; il sera une fonction des deux variables x et t qu'il faudra déterminer. L'épaisseur de la tranche MM' est dx , et celle de la tranche NN' est $dx + du$ ou $dx \left(1 + \frac{du}{dx}\right)$: et comme ces tranches contiennent la même masse de gaz, les forces élastiques du gaz en M et en N doivent, d'après la loi de Mariotte, être en raison inverse des volumes des deux tranches, et par conséquent de leurs épaisseurs, ce qui donne, en appelant p la force élastique ou la pression du gaz en N rapportée à l'unité de surface

$$\frac{p}{\omega} = \frac{dx}{dx + du} = \frac{1}{1 + \frac{du}{dx}}$$

ou

$$p = \omega \left(1 - \frac{du}{dx}\right)$$

en négligeant le carré de la dilatation $\frac{du}{dx}$ qui est très petite.

La pression sur la face N de la tranche NN' étant αp ou $\alpha \omega \left(1 - \frac{du}{dx}\right)$, on aura la pression $\alpha p'$ sur l'autre face N' , en changeant x en $x + dx$ dans l'expression de αp , ce qui donne

$$\alpha p' = \alpha \omega \left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2} dx\right).$$

La différence de ces deux pressions

$$\alpha \omega \frac{d^2 u}{dx^2} dx$$

est la force motrice de la masse de gaz comprise dans la tranche NN' , masse égale à ρdx .
En divisant la force motrice par la masse, on aura pour l'expression de la force accélératrice

$$\frac{\omega}{\rho} \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Si la tranche n'était pas considérée comme solide, cette force accélératrice serait celle du centre de gravité de cette tranche NN' en y supposant toute la masse réunie. Or on peut dire que ce centre se meut comme la base N dont il est infiniment voisin.

Si la tranche est sollicitée encore par une force accélératrice étrangère, on aura pour force accélératrice

$$\frac{\omega}{\rho} \frac{d^2 u}{dx^2} + X$$

qui il faudra égaler à

$$\frac{d^2(x+u)}{dt^2} \quad \text{ou simplement à } \frac{d^2 u}{dt^2}$$

puisque x ne varie pas avec t .

On a donc, pour le mouvement d'une tranche, l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\omega}{\rho} \frac{d^2 u}{dx^2} + X,$$

et, s'il n'y a pas de force étrangère

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{\omega}{\rho} \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \dots \dots \dots (1)$$

en posant

$$a^2 = \frac{\omega}{\rho} = \frac{gmk}{\rho}$$

Cas du tuyau indéfini dans les deux sens.

L'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} \quad \dots \dots \dots (1)$$

est

$$u = \varphi(x+at) + \Psi(x-at) \quad \dots \dots \dots (2)$$

On déterminera les fonctions φ et Ψ si l'on connaît le déplacement initial u pour $t=0$ de chaque tranche à partir de sa position d'équilibre et sa vitesse initiale $\frac{du}{dt}$, qui seront des fonctions données de x . Mais au lieu du déplacement u pour $t=0$, nous supposerons donnée la dilatation initiale $\frac{du}{dx}$ pour $t=0$. Ainsi l'on doit avoir

$$\text{pour } t=0, \quad \frac{du}{dx} = f(x) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = f_1(x).$$

Or, la formule (2) donne

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x+at) + \Psi'(x-at) \dots \dots \dots (3)$$

$$\frac{du}{dt} = a(\varphi'(x+at) - \Psi'(x-at))$$

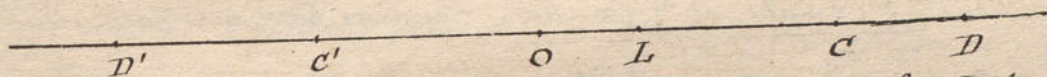
En faisant $t=0$, on aura

$$\varphi'(x) + \Psi'(x) = f(x)$$

$$\varphi'(x) - \Psi'(x) = \frac{1}{a} f_1(x)$$

et conséquemment $\varphi'(x) = \frac{1}{2} (f(x) + \frac{1}{a} f_1(x))$ $\Psi'(x) = (f(x) - \frac{1}{a} f_1(x)) \dots \dots (4)$

Supposons que la partie primitivement ébranlée s'étende de $x=0$ à $x=l$ seulement. Alors les fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ et par conséquent aussi $\varphi'(x)$ et $\Psi'(x)$ sont nulles pour toutes les valeurs de x non comprises entre 0 et l



Considérons d'abord un point situé au delà de l'ébranlement initial OL du côté des x positives. Soit x étant plus grande que l , $x+at$ sera à fortiori $> l$, t étant positif; on aura par conséquent $\varphi'(x+at) = 0$,

et $\frac{du}{dx} = \Psi'(x-at)$

$$\frac{du}{dt} = -a\Psi'(x-at)$$

et pour que ces valeurs de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ ne soient pas nulles, il faut que $x-at$ soit comprise entre 0 et l , ou qu'on ait $x > at$ et $x < at+l$, c'est-à-dire qu'au bout du temps t il n'y a de mouvement au delà de OL que dans une portion CD tout au plus d'une longueur égale à l . Cette portion ébranlée, qu'on appelle onde, est constituée d'une manière invariable qui ne dépend que de la fonction Ψ' . Elle s'éloigne indéfiniment de OL avec une vitesse constante a ; il ne faut pas confondre ce déplacement de l'onde avec le mouvement d'une molécule qui ne dure que pendant le temps $\frac{l}{a}$; car il résulte de $x-at > 0$ et $< l$ qu'une même molécule ne commence à se mouvoir qu'après un temps égal à $\frac{x-t}{a}$ et revient au repos après un temps égal à $\frac{x}{a}$.

Pour une tranche quelconque de cette onde, il y a un rapport constant a entre la vitesse et la dilatation, car on a la relation

$$\frac{du}{dt} = -a \frac{du}{dx}$$

Pour les points à gauche de l'origine O , x étant négative, on a

$$\Psi'(x-at) = 0,$$

et
$$\frac{du}{dx} = \varphi'(x+at) \quad \cdot \quad \frac{du}{dt} = a\varphi'(x+at)$$

d'ailleurs $\varphi'(x+at)$ est nulle quand x n'est pas comprise entre $-at$ et $-at+l$.

Le mouvement se propage donc aussi vers les x négatives par une onde C'D' dont la nature dépend de la fonction φ' et qui se transporte à gauche du point 0 avec une vitesse uniforme égale à a .

Une même molécule est en mouvement pendant un intervalle de temps égal à $\frac{l}{a}$, depuis $t > \frac{-x}{a}$ jusqu'à $t < \frac{l-x}{a}$. Dans chaque tranche, on a la relation

$$\frac{du}{dt} = a \frac{du}{dx}$$

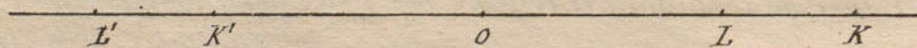
Quant aux points situés entre 0 et L, $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ dépendant d'abord des deux fonctions $\varphi'(x+at)$ et $\Psi'(x-at)$. Ces deux fonctions s'annulent dès que t surpasse $\frac{l}{a}$, de sorte qu'après ce temps là toute la partie OL reste en repos, et il y a deux ondes qui s'en éloignent à droite et à gauche, comme nous l'avons dit.

Le mouvement se propagerait par une seule de ces deux ondes, si l'ébranlement initial était tel qu'on eût dans la partie OL $\varphi'(x)=0$ ou $\Psi'(x)=0$, ce qui, d'après les formules (4), revient à supposer la relation

$$\frac{du}{dt} = -a \frac{du}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dt} = a \frac{du}{dx} \quad \text{pour } t=0.$$

Si l'ébranlement initial avait lieu dans plusieurs parties du tuyau séparées par des intervalles en repos, il suffirait de supposer les fonctions $\varphi'(x)$ et $\Psi'(x)$ nulles dans ces intervalles pour rentrer dans le cas qui précède d'un ébranlement limité; chaque partie ébranlée doit donner naissance à deux ondes qui s'en vont à droite et à gauche avec la vitesse uniforme a .

Tuyau fermé à une extrémité et indéfini dans un sens.



En prenant pour origine des x l'extrémité fermée, on aura la condition $\frac{du}{dt} = 0$ pour $x=0$, quelque soit t . Les fonctions $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ ne sont données que pour les valeurs de x positives.

La condition $\frac{du}{dt} = 0$ pour $x=0$, donnera, quel que soit t (positif ou négatif si l'on veut que les états antérieurs à l'origine du temps soient représentés aussi bien que ceux qui suivent

$$\varphi'(at) = \Psi'(-at) = 0$$

ou, en désignant par z une variable quelconque, positive ou négative,

$$\varphi'(z) = \Psi'(-z) \dots \dots \dots (5)$$

Cette équation détermine les fonctions φ' et Ψ' pour les valeurs négatives de la variable, ces fonctions étant données pour les valeurs positives.

Les valeurs (3) de $\frac{du}{dx}$ et de $\frac{du}{dt}$ ainsi déterminées pour des valeurs quelconques de x et de t sont les mêmes que si le tuyau, n'étant pas fermé en O , s'étendait indéfiniment dans les deux sens, l'état initial étant choisi du côté où l'on prolonge le tuyau de la manière qui vient d'être indiquée.

Dans cette hypothèse, en changeant x en $-x$ dans les formules (4), on aura, pour la dilatation et la vitesse de la tranche qui répond à l'abscisse $-x$, en ayant égard à la relation (5)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_x = \varphi'(-x+at) + \Psi'(-x-at) = \Psi'(x-at) + \varphi'(x+at) = \left(\frac{du}{dx}\right)_x$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_x = \alpha(\varphi'(-x+at) - \Psi'(-x-at)) = \alpha(\Psi'(x-at) - \varphi'(x+at)) = -\left(\frac{du}{dt}\right)_x$$

Ainsi dans deux sections à égales distances de l'origine O , la dilatation est la même et les vitesses sont égales et de signes contraires.

Il suffit que cette propriété ait lieu à l'origine du temps, pour qu'elle ait lieu à une époque quelconque; car pour qu'elle ait lieu quand $t=0$, on retrouve la condition

$$\varphi'(z) = \Psi'(-z).$$

Si l'ébranlement initial est renfermé dans un espace limité KI , entre les abscisses K et $K+l$, il donnera naissance à deux ondes animées des vitesses a et $-a$, et d'après ce qui précède, il y aura deux ondes symétriques de celles-ci, s'écartant à droite et à gauche de l'intervalle $K'I'$ symétrique de KL .

Celles qui s'éloignent de l'origine O n'éprouveront aucune altération.

Quant aux deux autres, elles arriveront en même temps en O , et continuant leur route, elles se composeront en se pénétrant, de sorte que les valeurs de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ en un même point commun aux deux ondes seront les sommes des valeurs qu'elles ont dans chaque onde, puis ces deux ondes, après s'être traversées et séparées, continueront leur marche sans altération.

On voit, d'après leur symétrie, que l'effet produit dans le tuyau réel est le même que si les diverses tranches de l'onde qui s'approche du plan fixe O se repliaient sur elles-mêmes en conservant la même densité et prenant une vitesse égale en sens contraire. Après que toutes ces tranches seront arrivées en O , on aura une onde se dirigeant du côté des x positives, et qui ne sera autre chose que la première renversée comme on vient de le dire. C'est en cela que consiste la réflexion du mouvement sur un plan fixe.

Tuyau indéfini dans un sens et ouvert dans un milieu gazeux de densité constante.

On admet que la force élastique du gaz à l'ouverture O du tuyau est la même que celle du gaz extérieur en repos, et par conséquent la dilatation $\frac{du}{dx}$ est nulle pour $x=0$, (à cause de $p = \omega \left(1 - \frac{du}{dx}\right)$).

Il en résulte, quel que soit t ,

$$\varphi'(at) + \Psi'(-at) = 0$$

ou
$$\varphi'(x) + \Psi'(-x) = 0 \dots \dots \dots (6)$$

En supposant le tuyau et le fluide prolongés indéfiniment à gauche de O , on aura d'après les formules (5) et (6) pour la tranche dont l'abscisse est $-x$,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} = \varphi'(-x+at) + \Psi'(-x-at) = -\Psi'(x-at) - \varphi'(x+at) = -\left(\frac{du}{dx}\right)_x$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_x = a(\varphi'(-x+at) - \Psi'(-x-at)) = a(-\Psi'(x-at) + \varphi'(x+at)) = \left(\frac{du}{dt}\right)_x$$

Ainsi dans deux sections également distantes de l'origine, les vitesses sont égales et de même signe, et les dilatations égales et de signes contraires.

Il suit de là que si l'ébranlement initial n'a lieu que dans une étendue limitée, il y aura dans le tuyau réel une onde s'éloignant indéfiniment de l'origine et dans le tuyau prolongé indéfiniment, deux autres ondes marchant vers l'origine, se pénétrant et se traversant sans s'altérer, de sorte que dans le tuyau réel à un instant quelconque se trouvera l'onde qui se dirigeait d'abord vers l'origine et qui s'y réfléchit ensuite de manière à former une nouvelle onde dirigée en sens contraire, les vitesses dans les différentes sections sont les mêmes et de même sens que quand l'onde s'approchait de l'origine, tandis que la dilatation change de signe.

C'est en cela que consiste la réflexion du mouvement sur un milieu de densité constante.

Tuyau fermé à ses deux extrémités

L'état du fluide dans ce tuyau fermé est toujours représenté par la formule (3) en supposant le tuyau et le fluide prolongés indéfiniment dans les deux sens. Mais ici il faut déterminer pour des valeurs quelconques de la variable x les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ qui ne sont connues que pour les valeurs de x comprises entre 0 et l , l étant la longueur du tuyau fermé.

Il faut exprimer que la vitesse $\frac{du}{dt}$ est nulle pour $x=0$ et pour $x=l$, quelque soit t , ce qui donne, en faisant $at = x$,

$$\varphi'(z) = \Psi'(-z)$$

$$\varphi'(l+z) = \Psi'(l-z)$$

On connaît $\Psi'(l-z)$, z étant entre 0 et l , donc on connaît aussi $\varphi'(l+z)$ ainsi $\varphi'(z)$ est connue pour les valeurs de z plus petites que $2l$.

En changeant z en $l+z$ dans la seconde équation, elle donne

$$\varphi'(2l+z) = \Psi'(-z)$$

et comme on a aussi $\varphi'(z) = \Psi'(-z)$

il s'ensuit

$$\varphi'(z) = \varphi'(2l+z)$$

La fonction $\varphi'(z)$ reprend donc la même valeur, quand la variable z augmente de $2l$. Il en est de même de $\Psi'(-z)$, car la formule

$$\varphi'(z) = \Psi'(-z)$$

donne $\Psi'(-z-2l) = \varphi'(z+2l) = \varphi'(z) = \Psi'(-z)$.

Il suit de la périodicité des fonctions φ' et Ψ' que la dilatation et la vitesse redeviennent les mêmes en un même point du tuyau à des époques distantes l'une de l'autre d'un intervalle $T = \frac{2l}{a}$.

On peut encore établir ce fait en considérant que l'ébranlement initial donne naissance à deux ondes qui marchent en sens inverse et vont successivement se réfléchir aux deux extrémités suivant les lois qui ont été expliquées précédemment.

Après avoir subi deux réflexions et parcouru des chemins égaux à deux fois la longueur du tuyau, elles viennent, au bout d'un intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$, reproduire, en se composant, l'état initial; et cet effet se répétera de nouveau indéfiniment.

Tuyau limité ouvert à ses deux extrémités.

On doit avoir, quel que soit t , $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x=0$ et $x=l$, ce qui donne, quel que soit z

$$\varphi'(z) + \Psi'(-z) = 0,$$

$$\varphi'(l+z) + \Psi'(l-z) = 0.$$

$\varphi'(z)$ et $\Psi'(z)$ sont données pour les valeurs de z comprises entre 0 et l . Donc $\varphi'(l+z)$ est connue pour ces mêmes valeurs, d'après la 2^e question, et par conséquent $\varphi'(z)$ est connue depuis $z=0$ jusqu'à $z=2l$. En changeant z en $z+l$, cette 2^e question donne

$$\varphi'(2l+z) + \Psi'(-z) = 0,$$

et comme on a aussi $\varphi'(z) + \Psi'(-z) = 0,$

il en résulte $\varphi'(z) = \varphi'(2l+z)$;
 et de même $\Psi'(-z) = \Psi'(-2l-z)$.

L'état du tuyau est donc encore périodique et redevient le même après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$; conclusion qu'on peut déduire aussi de la réflexion des ondes.

Tuyau limité ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

On doit avoir, quel que soit t , $\frac{du}{dx} = 0$ pour $x=0$, et $\frac{du}{dt} = 0$ pour $x=l$; ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi'(z) + \Psi'(-z) &= 0, \\ \varphi'(l+z) - \Psi'(l-z) &= 0 \end{aligned} \quad \text{quel que soit } z.$$

Ces équations déterminent les fonctions $\varphi'(z)$ et $\Psi'(z)$ pour toutes les valeurs positives et négatives de z , quand on les connaît pour les valeurs positives plus petites que l .

La seconde équation donne

$$\varphi'(2l+z) = \Psi'(-z)$$

et la première $\Psi'(-z) = -\varphi'(z)$.

Donc $\varphi'(2l+z) = -\varphi'(z)$;

de sorte que la fonction $\varphi'(z)$ change de signe quand la variable augmente de $2l$; par conséquent si z augmente de $4l$, la fonction reprendra sa première valeur;

(car on aura $\varphi'(4l+z) = -\varphi'(2l+z) = \varphi'(z)$).

La fonction $\Psi'(z)$ aura la même période $4l$, puisque

$$\varphi'(z) + \Psi'(-z) = 0.$$

Ainsi l'état du tuyau ne redevient le même qu'après un intervalle de temps égal à $\frac{4l}{a}$.

On arriverait à la même conclusion en considérant le mouvement des deux ondes qui proviennent de l'ébranlement initial, leurs réflexions successives aux deux extrémités du tuyau et leur retour aux parties primitivement ébranlées, après avoir parcouru des chemins égaux à $4l$ dans un temps égal à $\frac{4l}{a}$.

Énoncé.

Intégrer l'équation différentielle

$$(x^2 + y^2) dx + \frac{x^3 - 5x^2y}{x+y} dy = 0.$$

Solution.

Cette équation étant homogène, on pose $\frac{y}{x} = z$; en la divisant par x^2 elle devient

$$(1+z^2) dx + \left(\frac{1-5z}{1+z}\right) (z dx + x dz) = 0$$

ou

$$\left\{ (1+z^2)(1+z) + (1-5z)z \right\} dx + (1-5z)x dz = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1-5z) dz}{z^3 - 4z^2 + 2z + 1} = 0$$

On décompose

$$\frac{1-5z}{z^3 - 4z^2 + 2z + 1} \text{ en fractions simples. Le dénominateur est égal à } (z-1) \left(z - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \left(z - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right). \text{ On pose donc}$$

$$\frac{1-5z}{z^3 - 4z^2 + 2z + 1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z - \frac{3+\sqrt{13}}{2}} + \frac{C}{z - \frac{3-\sqrt{13}}{2}}$$

On détermine les valeurs de A, B, C par la méthode connue $\left(A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{4}{3} \&c\right)$

et l'équation à intégrer devient

$$\frac{dx}{x} + \frac{4}{3} \frac{dx}{z-1} - \frac{2+\sqrt{13}}{3} \frac{dz}{z - \frac{3+\sqrt{13}}{2}} + \frac{\sqrt{13}-2}{3} \frac{dz}{z - \frac{3-\sqrt{13}}{2}} = 0.$$

On trouve en intégrant

$$l.x + \frac{4}{3} l(z-1) - \frac{2+\sqrt{13}}{3} l\left(z - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) + \frac{\sqrt{13}-2}{3} l\left(z - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right) = C;$$

$$\text{ou } 3lx + 4(l(y-x) - lx) - (2+\sqrt{13}) \left(l\left(y - \frac{3+\sqrt{13}}{2}x\right) - lx\right) + (\sqrt{13}-2) \left(l\left(y + \frac{\sqrt{13}-3}{2}x\right) - lx\right) = 3C;$$

$$\text{ou } lx^3 + l(y-x)^4 - l(y^2 - 3xy - x^2) + l \cdot \left(\frac{y + \frac{\sqrt{13}-3}{2}x}{y - \frac{3+\sqrt{13}}{2}x}\right)^{\sqrt{13}} = 3C$$

$$\text{ou enfin } \frac{x^3(y-x)^4}{(y^2 - 3xy - x^2)^2} \cdot \left(\frac{y + \frac{\sqrt{13}-3}{2}x}{y - \frac{3+\sqrt{13}}{2}x}\right)^{\sqrt{13}}$$

Primer de Gramática Castellana

Escuela de Gramática Castellana

Francisco

1851

Clasificación

École Impériale
Polytechnique.

1^{ère} Division.

1853-1854.

mmmm

Solutions

des

Questions proposées

pour

Le deuxième Exercice d'Analyse.

I.

Intégrer l'équation

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{y^2 + b^2} \frac{dy^2}{dx^2}$$

On pose $y = e^{-su dx}$
et l'équation devient

$$a \left(\frac{du}{dx} + u^2 \right) = \sqrt{1 + b^2 u^2}$$

d'où l'on tire

$$dx = \frac{a du}{\sqrt{1 + b^2 u^2} - a^2 u^2}$$

en posant

$$\sqrt{1 + b^2 u^2} = z^2 - bu$$

on obtient

$$dx = \frac{2ab(z^2 + 1)}{2b^2 z^2 + 2b^2 z - az^4 - a + 2az^2}$$

Les racines du dénominateur égale à zéro sont $+1-1$ et $-\frac{b}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{b^4 + a^2}$; en sorte que l'intégration se fait sans difficulté par les méthodes connues.

II.

Intégrer l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{dy}{dx} = x^2$$

Posons $\frac{dy}{dx} = p$,

l'équation devient

$$\frac{df}{du} \sqrt{a^2 + x^2} + p = x^2$$

Equation linéaire du premier ordre qui s'intègre par la formule donnée dans le cours

On trouve

$$f = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \int \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 \sqrt{a^2 + x^2}}{3} - 2a^2 \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}}{x^2 + \sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

d'où, en intégrant,

$$y = \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{3} a^2 \int \frac{\sqrt{a^2 + x^2} du}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} + \int \frac{C du}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{3a^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \int (a^2 + x^2) dx - \int \frac{x du \sqrt{a^2 + x^2}}{a^2} \right\} + C \int \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{9} x^3 - \frac{2}{3a^2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(a^2 x + \frac{x^3}{3} \right) - \frac{1}{3a^2} (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{C}{2} l(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{Cx}{2a^2} \sqrt{a^2 + x^2} + C' \right\}$$

III.

Intégrer l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 - 5x,$$

de manière que pour $x = 0$ on ait

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

L'intégrale générale de l'équation privée du second membre est

$$C e^{2x} + e^{-x} (A + Bx)$$

On trouve ensuite, par la méthode des coefficients indéterminés que

$$y_1 = -\frac{1}{2} x^2 + 4x - 6$$

satisfait à l'équation dont l'intégrale générale est, par suite

$$y = -\frac{1}{2} x^2 + 4x - 6 + C e^{2x} + e^{-x} (A + Bx)$$

Pour satisfaire aux conditions demandées, il faut prendre

$$C = \frac{4}{9} \quad A = \frac{59}{9}, \quad B = \frac{33}{9}$$

IV.

Intégrer l'équation

$$3 \frac{d^4 y}{dx^4} - 7 \frac{d^2 y}{dx^2} - 6y = 2x - x^3.$$

La marche, &c.

La marche à suivre est la même que dans les questions précédentes. On trouve:

$$y = \frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x + C_1 e^{x\sqrt{3}} + C_2 e^{-x\sqrt{3}} + A \cos x \sqrt{\frac{2}{3}} + B \sin x \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

V.

Intégrer l'équation

$$4 \frac{d^4 y}{dx^4} - x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = \sin x.$$

La marche à suivre est la même que dans les deux cas précédents. On trouve:

$$y = C_1 + C_2 e^x + e^{-\frac{x}{2}} (A + Bx) + \frac{7}{50} \sin x - \frac{1}{50} \cos x$$

VI.

Déterminer une courbe telle qu'en menant ses normales et prolongeant chacune d'elles d'une quantité égale à elle-même à partir du point où elle coupe l'axe des x le lieu des points ainsi obtenus soit une courbe tangente à ces normales.

Si x et y désignent les coordonnées d'un point de la courbe et x', y' celles du point correspondant de la transformée, on a

$$y' = -y \quad x' = x + 2y \frac{dy}{dx}$$

donc, en écrivant

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{dx}{dy}$$

on obtient, pour équation du problème

$$-\frac{1}{p} = \frac{-\delta}{1 + 2p^2 + 2y \frac{d\delta}{dx}}$$

ou p désigne $\frac{dy}{dx}$

Prenant y pour variable indépendante, on a

$$1 + 2p^2 + 2yp \frac{d\delta}{dy} = \delta^2$$

ou

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\delta d\delta}{1 + p^2}, \quad \ln \frac{y}{e} = -\ln(1 + p^2)$$

d'où

$$\delta = \sqrt{\frac{c}{y}} - 1, \quad \text{équation différentielle d'une cycloïde.}$$

VII.

Intégrer l'équation

$$y \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = a^2 - 2y^2.$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dx} \left(y \frac{dy}{dx} \right) = a^2 - 2y^2$$

en posant $y^2 = z$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2(a^2 - 2z)$$

ou

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 4z = a^2$$

équation linéaire à coefficients constants dont l'intégration est sans difficulté.

VIII.

Intégrer l'équation

$$x \frac{dy}{dx} - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

et donner la formule générale du facteur qui peut rendre son premier membre intégrable.

On pose $y = xz$ et l'équation devient alors

$$\frac{dx}{x} = - \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$l(x) = -l(z + \sqrt{1+z^2}),$$

d'où l'on déduit

$$x(z + \sqrt{1+z^2}) = C,$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Le facteur qui rend le premier membre de l'équation proposée une différentielle exacte, a pour forme générale

$$\frac{x \sqrt{y^2 + x^2}}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \varphi(y + \sqrt{y^2 + x^2})$$

École Impériale
Polytechnique.

1^{re} Division.

1853-1854.

mmmm

Solutions

des

Questions proposées

pour

Le troisième Exercice d'Analyse.

I.

Intégrer l'équation

$$\frac{(dy^2 + y^2 dx^2)^{\frac{3}{2}}}{2 dy^2 dx + y^2 dx^3 - y d^2 y dx} = y.$$

où x est la variable indépendante

En faisant $\frac{dy}{dx} = p$ et $p^2 + y^2 = t^2$,

l'équation devient

$$\frac{t^3}{2t^2 - yt \frac{dt}{dy}} = y$$

ou

$$t^2 = 2ty - y^2 \frac{dt}{dy}$$

ou

$$dy = \frac{2ty dy - y^2 dt}{t^2}$$

et, en intégrant $y = \frac{t^2}{c} + c$.

On tire de là t ou $\sqrt{y^2 + p^2} = \frac{y^2}{y-c}$ et p ou $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{2cy-c^2}}{y-c}$

$$dx = \frac{(y-c)dy}{y\sqrt{2cy-c^2}}$$

et, en intégrant, $x = c' + \frac{1}{c} \sqrt{2cy-c^2} + \arccos \frac{y-c}{y}$.

II.

Intégrer l'équation

$$dx^2 dy - x ds^2 d^2y = a dx ds \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2}$$

dans laquelle $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est prise pour variable indépendante.

Posons $\frac{dy}{dx} = p$ et $\frac{dp}{dx} = q$.

On a $dy = p dx$, $d^2y = p d^2x + q dx^2$, $ds = \sqrt{1+p^2} dx$, $d^2s = 0$,

ou $dx d^2x + dy d^2y = 0$; d'où résulte $d^2x = -p d^2y$;

et comme on a aussi $d^2y = p d^2x + q dx^2$,

on tire $d^2y = \frac{q dx^2}{1+p^2}$, $d^2x = \frac{-p q dx^2}{1+p^2}$

L'équation proposée se réduit à

$$p - (x+a)q = 0.$$

En la différentiant, et en observant que $dp = q dx$, on a $-(x+a) dq = 0$;

d'où $dq = 0$, $q =$ une constante c ,

$$p = c(x+a) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2} c(x+a)^2 + c'.$$

équation de toute parabole qui a pour axe la droite $x = -a$.

III.

Déterminez la courbe dont le rayon de courbure en chaque point est égal à la distance de ce point à un point fixe.

En employant l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, on a à intégrer l'équation

$$\frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2r}{d\theta^2}} = r,$$

qui est la même que celle du premier problème, pourvu qu'on écrive y et x à la place de r et de θ . Son intégrale sera donc

$$\theta = c' + \frac{1}{c} \sqrt{2cr - c^2} + \text{arc cos } \frac{r-c}{r}$$

(On la trouve en faisant $r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2} = t^2$).

IV.

Déterminer la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à celui de sa développée.

Soient ρ le rayon de la courbe cherchée au point M , ρ' le rayon correspondant de sa développée, S et σ les arcs de ces courbes, φ , l'angle que la tangente en M à la première courbe fait avec l'axe des x . On a

$$\rho = \frac{dS}{d\varphi}, \quad \rho' = \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \quad \text{et} \quad \rho' = m\rho.$$

Donc $\frac{d\rho}{d\varphi} = m\rho$, d'où l'on tire $\rho = ae^{m\varphi}$, a constante arbitraire,

et $dS = \rho d\varphi = ae^{m\varphi} d\varphi$.

Puis $dx = dS \cos \varphi = ae^{m\varphi} \cos \varphi d\varphi$, $dy = dS \sin \varphi = ae^{m\varphi} \sin \varphi d\varphi$,

et en intégrant $x - c = \frac{ae^{m\varphi}}{1+m^2} (\sin \varphi + m \cos \varphi)$

$$y - c' = \frac{ae^{m\varphi}}{1+m^2} (m \sin \varphi - \cos \varphi)$$

Ajoutant les carrés, on a

$$(x-c)^2 + (y-c')^2 = \frac{a^2}{1+m^2} e^{2m\varphi}$$

et en divisant

$$\frac{y-c'}{x-c} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m} \operatorname{tang} \varphi}$$

En désignant par r la droite qui joint le point M au point qui a pour coordonnées $x=c$, $y=c'$, et par θ l'angle que cette droite fait avec l'axe des x , ces équations deviennent

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\varphi}, \quad \operatorname{tang} \theta = \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \mu}{1 + \operatorname{tang} \mu \operatorname{tang} \varphi} \left(\frac{1}{m} = \operatorname{tang} \mu \right)$$

$$\theta = \varphi - \mu, \quad \varphi = \mu + \theta$$

et l'on a enfin

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} e^{m\mu} \cdot e^{m\theta} = Ke^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique. Le rayon recteur fait avec la tangente l'angle $\varphi - \theta$ qui est constant et égal à μ .

Intégrer les deux équations.

$$4 \frac{dy}{dx} + 9 \frac{dz}{dx} + 44y + 49z = x$$

$$3 \frac{dy}{dx} + 7 \frac{dz}{dx} + 34y + 38z = e^x.$$

En éliminant tour à tour $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$, on obtient

$$\frac{dy}{dx} + 2y + z = 7x - 9e^x.$$

$$\frac{dz}{dx} + 4y + 5z = 4e^x - 3x.$$

En multipliant la seconde par θ et ajoutant

$$\frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} + (2 + 4\theta)y + (1 + 5\theta)z = (7 - 3\theta)x + (2\theta - 9)e^x.$$

On pose $y + \theta z = t$ et en supposant θ constant, on a

$$\frac{dt}{dx} + (2 + 4\theta)t + (1 + 5\theta)z = (7 - 3\theta)x + (4\theta - 9)e^x,$$

équation qu'on partage en deux autres

$$-(2 + 4\theta)\theta + 1 + 5\theta = 0 \quad \text{ou} \quad 4\theta^2 - 3\theta - 1 = 0$$

et

$$\frac{dt}{dx} + (2 + 4\theta)t = (7 - 3\theta)x + (4\theta - 9)e^x$$

L'équation $4\theta^2 - 3\theta - 1 = 0$ donne deux valeurs de θ

$$\frac{3 \pm 5}{8}$$

ou

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_2 = -\frac{1}{4}$$

et l'on a deux valeurs de t correspondantes

$$t_1 = e^{-6x} (4 \int e^{6x} x dx - 5 \int e^{7x} dx + c) = \frac{2x}{3} - \frac{1}{9} - \frac{5e^x}{7} + ce^{-6x} = y + z$$

$$t_2 = e^{-x} \left(\frac{31}{4} \int e^x x dx - 10 \int e^{2x} dx + c' \right) = \frac{31}{4}x - \frac{31}{4} - 5e^x + c'e^{-x} = y - \frac{1}{4}z$$

Enfin l'on trouve

$$y = \frac{19}{3}x - \frac{56}{9} - \frac{29}{7}e^x + \frac{ce^{-6x}}{5} + \frac{c'e^{-x}}{5}$$

$$z = -\frac{17}{3}x + \frac{55}{9} + \frac{24}{7}e^x + \frac{4c}{5}e^{-6x} - \frac{4c'}{5}e^{-x}.$$

VI.

Intégrer l'équation à différences partielles

$$(x-y+z) \frac{dz}{dx} + (2y-z) \frac{dz}{dy} = z.$$

D'après la théorie connue, on commence par intégrer ce système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{x-y+z} = \frac{dy}{2y-z} = \frac{dz}{z}$$

Si l'on prend d'abord l'équation

$$\frac{dy}{2y-z} = \frac{dz}{z};$$

On peut l'écrire ainsi

$$z dy - 2y dz + z dz = 0;$$

ou

$$d\left(\frac{y}{z^2}\right) + \frac{dz}{z^2} = 0$$

et qui donne, en intégrant,

$$\frac{y}{z^2} - \frac{1}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{y-z}{z^2} = c.$$

Donc

$$y-z = cz^2.$$

L'équation

$$\frac{dx}{x-y+z} = \frac{dz}{z}$$

devient

$$\frac{dx}{x-cz^2} = \frac{dz}{z} \quad \text{ou} \quad \frac{z dx - x dz}{z^2} + c dz = 0.$$

De là résulte $\frac{x}{z} + cz = c'$

et en remplaçant c par sa valeur, on a

$$\frac{x+y-z}{z} = c'$$

ou

$$\frac{x+y}{z} = c' \quad (\text{en écrivant } c' \text{ au lieu de } c'+1).$$

L'équation intégrale demandée sera donc

$$\frac{x+y}{z} = \varphi\left(\frac{y-z}{z^2}\right)$$

VII.

Déterminer une surface telle que son plan tangent en chaque point M rencontre une droite donnée de position en un point qui soit également distant du point M de la surface et d'un point fixe pris sur la droite donnée.

Prenons cette droite pour axe des z et le point fixe O pour origine.
Le plan tangent à la surface au point M a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

En faisant dans cette équation

$$X = 0, Y = 0,$$

on aura $Z_1 = z - px - qy$,

distance à l'origine du point T où il rencontre l'axe des z .

En exprimant que cette distance OT est égale à MT , on a

$$z - px - qy = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - Z_1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + (px + qy)^2}$$

ou bien $2zpx + 2zyq = z^2 - x^2 - y^2$;

équation à différentielles partielles qu'il faut intégrer.

À cet effet, on intègre le système

$$\frac{dx}{2zx} = \frac{dy}{2zy} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$$

On a d'abord $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

qui donne $y = cx$ ou $\frac{y}{x} = c$.

Ensuite l'équation $\frac{dx}{2zx} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}$

devient $\frac{dx}{x} = \frac{2zdz}{z^2 - (1 + c^2)x^2}$

ou $\frac{2xzdz - z^2dx}{x^2} + (1 + c^2)dx = 0$;

et l'on trouve, en intégrant :

$$\frac{z^2}{x} + (1 + c^2)x = c'$$

ou en remettant pour c sa valeur $\frac{y}{x}$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = c'$$

La surface aura donc pour l'equation

$$x^2 + y^2 + z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

comme on peut faire

$$y = cx \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = x\varphi(c).$$

On voit que cette surface est le lieu d'une suite de cercles dont les plans passent par l'axe OZ , et qui touchent cet axe au point O , leurs centres se trouvant sur une courbe quelconque dans le plan XOY .

VIII.

Determiner une surface telle que son plan tangent, en un point quelconque M rencontre une droite donnée de position en un point dont la distance à un point fixe pris sur cette droite soit égale à la distance de ce point fixe au point M de la surface.

On a l'equation

$$z - px - qy = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ou

$$xp + yq = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Il faut donc intégrer le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

On a d'abord

$$\frac{y}{x} = c.$$

Ensuite

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

devient

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - \sqrt{(1+c^2)x^2+z^2}}$$

ou

$$x dz - z dx + \sqrt{(1+c^2)x^2+z^2} \cdot dx = 0$$

Faisant

$$\frac{z}{x} = t,$$

on a

$$\frac{dt}{\sqrt{1+c+t^2}} + \frac{dx}{x} = 0$$

et, en intégrant

$$\log. x + l(t + \sqrt{1+c^2+t^2}) = \text{constante}$$

ou

$$x(t + \sqrt{1+c^2+t^2}) = c'$$

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c'$$

Donc, on a pour la surface

$$z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Solutions

des

Questions proposées

pour

Le quatrième Exercice d'Analyse.

I.

Un point matériel est placé en un point O . Il tombe sur un plan incliné OK , la force qui le sollicite étant une attraction proportionnelle à la distance exercée par le point A . Trouver sa position à *piis* après le temps t . Si le plan incliné change de direction en passant toujours par le point O , les positions du mobile, après un même temps t , formeront une courbe dont on demande l'équation

Si P est la projection du point K sur la ligne OK , la force effective qui sollicite le mobile est proportionnelle à PO . Si donc on pose $PM = x$, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx,$$

$$x = A \cos t \sqrt{K} + B \sin t \sqrt{K}$$

A et B se détermineront par la condition

$$x = \alpha, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad p^2 t = 0.$$

On en conclura $B = 0$. La loi du mouvement est donc représentée par la formule

$$x = A \cos t \sqrt{K}.$$

Si l'inclinaison du plan varie, le lieu des positions du mobile après le temps t est un cercle.

II.

Trouver la loi du mouvement d'un point pesant sur la cycloïde, en supposant

une résistance proportionnelle à la vitesse.

La force effective qui sollicite le point à descendre le long de la cycloïde est $g \cos \alpha$. Or on a

$$\cos \alpha = \frac{MT}{a} = \frac{S}{2a},$$

à désignant le diamètre du cercle générateur.

En supposant donc une résistance proportionnelle à la vitesse, l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2 S}{dt^2} - A \frac{dS}{dt} + \frac{gS}{2a} = 0;$$

équation linéaire à coefficients constants dont l'intégrale est de la forme

$$S = C e^{\alpha t} + C' e^{\alpha' t}$$

ou

$$S = C \cos \alpha t + C' \sin \alpha' t$$

suivant que les racines de l'équation

$$\alpha^2 - A\alpha + \frac{g}{2a} = 0$$

sont réelles ou non.

III.

Trouver une courbe telle que un point matériel placé sans vitesse en un de ses points et tombant sous l'influence de la pesanteur, mette à parcourir un arc quelconque de cette courbe, le même temps qu'il mettrait à parcourir la corde.

Si ω désigne l'angle que fait avec la verticale le rayon vecteur r d'un point de la courbe, les temps employés à parcourir successivement ce rayon vecteur et l'arc qu'il sous-tend seront

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{r}{\cos \omega}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\omega^2}}}{r \cos \omega} d\omega.$$

En égalant les deux temps, on trouve, après une simple différentiation

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\omega} = \frac{\cos 2\omega}{\sin 2\omega};$$

d'où, en intégrant

$$r^2 = 2a^2 \sin 2\omega.$$

IV.

Un point matériel pesant est posé sur la circonférence d'un cercle vertical. Il tombe en suivant d'abord cette circonférence; mais comme il est seulement posé sur elle, il finira par la quitter. On demande en quel point.

Il quittera le cercle au moment où la pression qu'il exerce sur lui deviendra nulle; car pour le suivre plus longtemps, il faudrait qu'il exerçât une pression négative; ce qui ne se peut. On déterminera donc le point inconnu par l'équation

$$g \cos \alpha = \frac{v^2}{r} = \frac{2g(r \cos \alpha_0 - r \cos \alpha)}{r}$$

et cette équation déterminera l'angle α si α_0 est connu

V.

Trouver la formule d'équilibre d'un fil dont chaque élément est sollicité par une force proportionnelle à la distance et dirigée vers un point donné.

On a $X = -Kx, \quad Y = -Ky;$

$$dT = -(X dx + Y dy) = +Kz dz, \quad T = C_1 + \frac{Kz^2}{2},$$

$$d\left(T \frac{du}{ds}\right) = -Kx ds, \quad dT \frac{dy}{ds} = -Ky ds$$

Multipliant la première équation par y , la seconde par $2x$, et retranchant, il vient

$$dT \left(y \frac{du}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right) + T \left(y \frac{d^2x}{ds^2} - x \frac{d^2y}{ds^2} \right) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dT}{T} = - \frac{y \frac{d^2x}{ds^2} - x \frac{d^2y}{ds^2}}{y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds}}$$

et, en intégrant

$$T = C' \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right), \quad \frac{Kr^2}{2} + C = C' r^2 \frac{d\theta}{ds}$$

ou, en élevant au carré $\left(\frac{Kr^2}{2} + C \right)^2 = C'^2 r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = C'^2 r^2 \frac{1}{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2}$

d'où l'on tirera $d\theta$, et l'équation de la courbe s'obtiendra par une quadrature.

VI.

Un point matériel pesant parcourt une courbe fixe sous l'influence de la pesanteur. Cette courbe exerce sur lui, outre la pression normale, un frottement proportionnel à cette pression; trouver la nature de la courbe qui permet à la vitesse de demeurer constante.

Il faut que le frottement égale la composante tangentielle de la pesanteur.

$$g \frac{dx}{ds} = f \left(g \frac{dy}{ds} + \frac{v^2}{\rho} \right), \quad g \left(\frac{dx}{ds} - f \frac{dy}{ds} \right) = \frac{fv^2}{\rho}$$

$\frac{dx}{ds} - f \frac{dy}{ds}$ est proportionnel au cosinus de l'angle de la tangente avec une droite inclinée sur l'axe des x de l'angle de frottement α ; prenant cette droite pour axe des x' , on a

$$K \frac{dx'}{ds} = \frac{fv^2}{\rho} = fv^2 \frac{d\omega}{ds}$$

ω étant l'angle de contingence

donc $K dx' = fv^2 d\omega$; et comme v est constant $Kx' + C = fv^2 \omega$
 $fv^2 \operatorname{tang} \omega = \operatorname{tg}(Kx' + C)$

or $\operatorname{tg} \omega = \frac{dy'}{dx'}$; donc $fv^2 \frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tg}(Kx' + C)$

et on obtient y' par une quadrature facile.

VII.

Un point matériel pesant est placé sur la portion convexe d'une cycloïde AMB . Il part du point le plus élevé M avec une vitesse donnée. Déterminez la position du point où il quittera la cycloïde.

Le principe de la solution est identiquement le même que pour la question 4.

VIII.

Mouvement d'un point matériel assujéti à rester sur une droite donnée et sollicité par une force proportionnelle à la distance dirigée vers un centre fixe placé hors de cette droite. On suppose une résistance, proportionnelle à la vitesse exercée, par le milieu dans lequel se fait le mouvement.

La mise en équation est la même que celle de la question 1; il faut ajouter seulement à l'expression de la force accélératrice un terme de la forme $G \frac{dx}{dt}$; ce qui n'empêche pas l'équation d'être linéaire à coefficients constants.

I.

I. Trouver le mouvement d'un point matériel animé d'une vitesse initiale donnée, et sollicité par une force dirigée vers un point fixe et proportionnelle à la distance.

Prenez deux axes des coordonnées rectangulaires passant par le centre fixe et situés dans le plan de ce point et de la vitesse initiale, plan dans lequel s'effectue le mouvement. Les deux équations du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a^2y$$

Ces deux équations admettent les intégrales générales.

$$(1) \quad x = A \cos a(t-\alpha), \quad y = B \cos a(t-\beta)$$

dans lesquelles A, B, α, β sont quatre constantes arbitraires. On voit immédiatement que le mouvement est périodique et que la durée de la révolution est $\frac{2\pi}{a}$.

Si l'on élimine t entre ces deux équations, on aura l'équation de la trajectoire.

Or les équations (1) s'écrivent

$$\cos a \alpha \cdot \cos at + \sin a \alpha \cdot \sin at = \frac{x}{A}$$

$$\cos a \beta \cdot \cos at + \sin a \beta \cdot \sin at = \frac{y}{B}$$

On en déduit

$$\sin at = \frac{\frac{x}{A} \cos a \beta - \frac{y}{B} \cos a \alpha}{\sin a (\alpha - \beta)}$$

$$\cos at = \frac{\frac{x}{A} \sin a \beta - \frac{y}{B} \sin a \alpha}{\sin a (\beta - \alpha)}$$

En substituant ces valeurs dans la relation

$$\sin^2 at + \cos^2 at = 1$$

On obtient l'équation de la trajectoire.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy \cos a (\alpha - \beta)}{AB} = \sin^2 a (\beta - \alpha)$$

On arrive donc aux lois suivantes : 1.^o le rayon vecteur décrit des aires proportionnelles au temps ; 2.^o la trajectoire est une ellipse dont le point fixe occupe le centre ; 3.^o la durée de la révolution est indépendante du grand axe de l'ellipse.

Menons l'axe des x par la position initiale du mobile, et supposons, pour simplifier, que la vitesse initiale soit perpendiculaire à cet axe, on aura $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$; A sera égal à la distance initiale, B à la vitesse initiale.

II.

Mouvement d'un projectile pesant dans l'air, en supposant que la résistance de l'air soit proportionnelle à la vitesse.

Prenons pour plan des coordonnées rectangulaires le plan vertical passant par la vitesse initiale du projectile, plan dans lequel s'effectue le mouvement. Supposons que l'axe Ox soit horizontal, l'axe Oy vertical et dirigé de bas en haut. Si l'on représente la résistance de l'air par $g \frac{v}{K}$; pour chaque unité de masse, les équations du mouvement seront

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{K} \frac{dx}{dt}$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{g}{K} \frac{dy}{dt}$$

La première équation, mise sous la forme,

$$\frac{d \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{g}{K} dt$$

S'intègre aisément et donne

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = A e^{-\frac{gt}{K}}$$

Pour intégrer la seconde, on fera disparaître d'abord le terme constant en posant

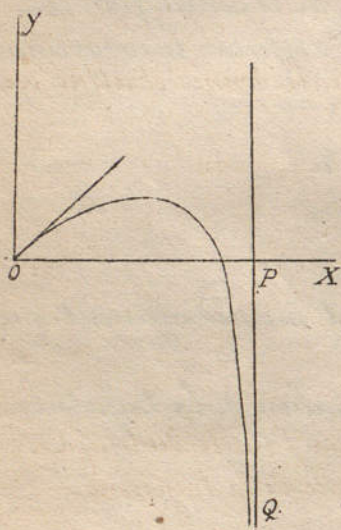
$$\frac{dy}{dt} = -K + \frac{dy'}{dt} ;$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{g}{K} \frac{dy'}{dt} ;$$

$$\frac{dy'}{dt} = B e^{-\frac{gt}{K}}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} = -K + B e^{-\frac{gt}{K}}$$

L'équation



L'équation devient

d'où, comme précédemment

L'équation (3) montre que la composante horizontale de la vitesse diminue indéfiniment l'équation (4) que la composante verticale tend vers une limite $-K$, ce qui est évident a priori, puisque K désigne la vitesse que devrait posséder le mobile pour que la résistance de l'air fut égale au poids du corps.

Si on intègre une seconde fois les équations (3) et (4), on a

$$(5) \quad x = \frac{KA}{g} \left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right)$$

$$(6) \quad y = -Kt + \frac{KB}{g} \left(1 - e^{-\frac{gt}{K}}\right),$$

en supposant que l'origine des coordonnées soit placée à la position initiale du mobile.

L'abscisse x augmente et tend vers une limite égale à $\frac{KA}{g}$; la valeur absolue de y augmente indéfiniment. Ainsi la trajectoire a une branche infinie asymptote, à la droite $x = \frac{KA}{g}$.

III.

Mouvement d'un point matériel, animé d'une vitesse initiale donnée et attiré vers un centre fixe en raison inverse du cube de la distance.

On se servira des formules générales

$$(1) \quad v^2 = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right],$$

$$(2) \quad R = \frac{c^2}{r^3} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right)$$

dans lesquelles c désigne le double de l'air décrite par le rayon vecteur dans l'unité du temps. Si l'on représente la force attractive par $\frac{\mu}{r^3}$, on aura l'équation différentielle de la trajectoire

$$(3) \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \left(\frac{\mu}{c^2} - 1 \right) \frac{1}{r}.$$

1^{er} Cas. — $\frac{\mu}{c^2} < 1$. Posons $1 - \frac{\mu}{c^2} = a^2$; l'équation (1) admet pour intégrale générale

$$\frac{1}{r} = A \cos a(\theta + B).$$

Faisons passer l'axe polaire par la position initiale du mobile, et supposons, pour simplifier que la vitesse initiale v_0 soit perpendiculaire sur l'axe; nous avons

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{r_0}, \quad c = v_0 r_0.$$

La trajectoire aura pour équation

$$(4) \quad r = \frac{r_0}{\cos a\theta}$$

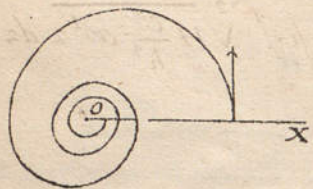
Le mobile s'éloigne indéfiniment du centre fixe. La trajectoire a une branche infinie asymptotique à une ligne droite.

2^e Cas. — $\frac{\mu}{c^2} > 1$. Posons $\frac{\mu}{c^2} - 1 = a^2$. L'équation (1) admet pour intégrale générale

$$\frac{1}{r} = A e^{a\theta} + B e^{-a\theta},$$

Si l'on suppose encore que la vitesse initiale soit perpendiculaire sur le rayon vecteur, la trajectoire a pour équation

$$(5) \quad r = \frac{2r_0}{e^{a\theta} + e^{-a\theta}}$$



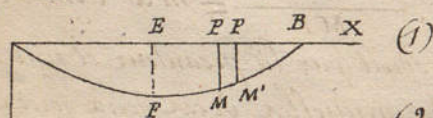
Le mobile se rapproche indéfiniment du centre fixe autour duquel il fait un nombre infini de révolutions avec une vitesse de plus en plus grande. La trajectoire a la forme d'une spirale.

IV.

Un fil flexible d'une longueur donnée est attaché par ses deux extrémités en deux points fixes A et B d'une droite horizontale AB. — Chaque élément MM' de ce fil supporte une charge proportionnelle à l'aire du trapèze MM'PP.

Trouver la forme d'équilibre du fil.

Prenez pour axe des x la droite AB, pour axe des y une verticale menée par le point A. Si l'on appelle ϵ le poids de l'unité de surface, le poids du trapèze MM'PP sera $\epsilon y dx$, et les équations d'équilibre du fil seront



$$(1) \quad d\left(T \frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$(2) \quad d\left(T \frac{dy}{ds}\right) + \epsilon y dx = 0$$

L'équation (1) donne

$$(3) \quad T \frac{dx}{ds} = \epsilon h^2$$

et l'équation (2) devient

$$h^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) + y dx = 0,$$

ou

$$h^2 dp + \frac{y}{p} = 0,$$

en posant $dy = p dx$. On en déduit, par l'intégration,

$$h^2 p^2 + y^2 = C^2;$$

d'où

$$p = \frac{\sqrt{C^2 - y^2}}{h}$$

$$\frac{dx}{h} = \frac{dy}{\sqrt{C^2 - y^2}},$$

et, en intégrant de nouveau,

$$\frac{x}{h} = \text{arc sin } \frac{y}{C},$$

ou

$$(4) \quad y = C \sin \frac{x}{h}.$$

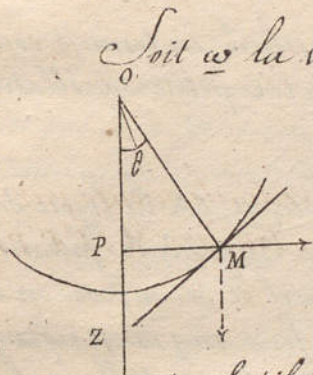
Soit

Soit à la longueur AB , l'ordonnée devant être nulle pour $x = a$, on a
 La constante C représente la flèche EF . On calculera la longueur l du fil par l'intégrale
 définie.

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{c^2}{h^2} \cos^2 \frac{x}{h}} dx = h \int_0^{\frac{\pi}{h}} \sqrt{1 + \frac{c^2}{h^2} \cos^2 z} dz = 2h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{c^2}{h^2} \cos^2 z} dz$$

V.

Un pendule est assujéti à rester dans un plan animé d'un mouvement angulaire de rotation uniforme autour d'un axe vertical passant par le point de suspension du pendule. Déterminez la position d'équilibre du pendule. Le pendule étant écarté très peu de sa position d'équilibre, trouvez son mouvement.



Soit ω la vitesse angulaire de rotation du plan vertical autour de l'axe OZ , θ l'angle que fait le pendule avec la verticale OZ , l la longueur du pendule. Le plan vertical entraîne le point matériel M avec une vitesse $\omega \times MP$ ou $\omega l \sin \theta$. La force qui produirait le mouvement circulaire du point M , en supposant que le pendule n'ait pas de mouvement relatif dans son plan, est une force dirigée vers le centre P est égale à $\frac{m \cdot \omega^2 \cdot m P^2}{MP} = m \omega^2 l \sin \theta$.

Le mouvement relatif du pendule dans le plan vertical sera produit par la pesanteur et une force égale et contraire à la force centripète. Les composantes tangentielle de ces deux forces sont
 $mg \sin \theta$, $m \omega^2 l \sin \theta \cos \theta$,
 et dirigées en sens contraires.

Appelons γ l'angle que fait le pendule avec la verticale dans la position d'équilibre relatif. Dans cette position les deux composantes tangentielle sont égales et l'on a
 $\cos \gamma = \frac{g}{\omega^2 l}$.

Le pendule ne quittera la verticale que lorsque la vitesse angulaire de rotation surpassera $\sqrt{\frac{g}{l}}$.
 À des vitesses plus grandes, correspondent des valeurs de γ de plus en plus grandes de 0 à $\frac{\pi}{2}$.
 Supposons maintenant que l'on écarte le pendule de sa position d'équilibre, l'équation du mouvement relatif sera

$$(1) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta + \omega^2 \sin \theta \cos \theta = \omega^2 \sin \theta (\cos \theta - \cos \gamma)$$

ou

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -2 \omega^2 \sin \theta \sin \frac{\theta - \gamma}{2} \sin \frac{\theta + \gamma}{2}$$

Cette équation montre que le pendule oscille autour de sa position d'équilibre. Dans le cas où le pendule est écarté très peu de sa position d'équilibre, si l'on pose $\theta = \gamma + \theta'$, l'équation du mouvement se réduit approximativement à

$$(2) \quad \frac{d^2 \theta'}{dt^2} = -\omega^2 \theta' \sin^2 \gamma$$

L'équation

L'équation (2) admet pour intégrale générale

$$\theta' = A \cos(\omega t \sin \gamma + B).$$

Si l'on appelle α l'écartement initial et si l'on suppose que la vitesse initiale relative soit nulle, on a $B = \theta$, $A = \alpha$; donc $\theta' = \alpha \cos(\omega t \sin \gamma)$.

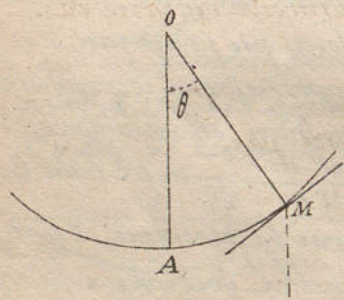
Ainsi le pendule exécute des oscillations isochrones et d'égale amplitude de part et d'autre de la position d'équilibre. La durée des oscillations est

$$T = \frac{\pi}{\omega \sin \gamma} = \pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{\cot \gamma}{\sin \gamma}}$$

La durée des oscillations est d'autant plus petite que la vitesse angulaire de rotation ω est plus grande.

VI.

Trouver le mouvement d'un pendule placé sur un plan incliné, en tenant compte du frottement de la lentille contre le plan. Étudier particulièrement les petites oscillations.



Soit γ l'angle du plan incliné avec l'horizon, OA la ligne de plus grande pente, OM une position quelconque du pendule faisant avec OA l'angle θ . Le poids mg du point matériel se décompose en deux, une force $mg \sin \gamma$ parallèle à OA , une force $mg \cos \gamma$ normale au plan; la première donne une composante tangentielle égale à $mg \sin \gamma \sin \theta$, la seconde produit un frottement $f mg \cos \gamma$ dirigé suivant la tangente et en sens contraire du mouvement (f désignant le coefficient de frottement que nous supposons très petit). Si on suppose que le pendule marche de droite à gauche, l'équation du mouvement est

$$(1) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \gamma \sin \theta + \frac{fg}{l} \cos \gamma.$$

Étudions les petites oscillations. L'équation (1) se réduit approximativement à

$$(2) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta \sin \gamma + \frac{fg}{l} \cos \gamma$$

Posons

$$\theta = f \cot \gamma + \theta'$$

le terme constant disparaît et l'on a l'équation

$$\frac{d^2 \theta'}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta' \sin \gamma;$$

qui admet pour intégrale

$$\theta' = A \cos\left(t \sqrt{\frac{g \sin \gamma}{l}} + B\right),$$

D'où

$$\theta = f \cot \gamma + A \cos\left(t \sqrt{\frac{g \sin \gamma}{l}} + B\right)$$

Si l'on appelle α l'écartement initial du pendule et si l'on suppose que la vitesse initiale soit nulle, on a $B = 0$, $A = \alpha - f \cot \gamma$; donc

$$(3) \quad \theta = f \cot \gamma + (\alpha - f \cot \gamma) \cos\left(t \sqrt{\frac{g \sin \gamma}{l}}\right)$$

On en déduit

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dt} = -(\alpha - f \cot \gamma) \sqrt{\frac{g \sin \gamma}{l}} \sin\left(t \sqrt{\frac{g \sin \gamma}{l}}\right)$$

Comme $\frac{d\theta}{dt}$ doit avoir une valeur négative, il est nécessaire, pour que le pendule se mette en mouvement, que l'écartement initial α soit plus grand que $f \cot \gamma$. Si cette condition est remplie, il y a plusieurs cas à distinguer: 1°. $\alpha < 2f \cot \gamma$; θ ne peut devenir nul; le pendule s'arrête avant d'arriver au point le plus bas; 2°. $\alpha > 2f \cot \gamma$; le pendule descend jusqu'au point A, le dépasse et s'élève de l'autre côté à une hauteur égale à $\alpha - 2f \cot \gamma$; puis il redescend pour s'élever de nouveau vers la droite à une hauteur égale à $\alpha - 4f \cot \gamma$, et ainsi de suite. L'amplitude éprouve une diminution constante $2f \cot \gamma$ à chaque demi oscillation; après un certain nombre d'oscillations, l'amplitude devenant moindre que $f \cot \gamma$, le pendule s'arrête. La durée des oscillations est

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g \sin \gamma}};$$

les oscillations sont encore isochrones; mais les deux parties d'une oscillation ne sont pas d'égale durée comme dans le pendule ordinaire; la première partie a une durée plus grande que la seconde.

VII.

Trouver le mouvement d'un point matériel, animé d'une vitesse initiale donnée, & sollicité par deux forces dirigées vers un centre fixe, l'une attractive en raison inverse du carré de la distance, l'autre répulsive en raison inverse du cube de la distance.

La force R qui sollicite chaque unité de masse peut être représentée par

$$R = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^3}$$

En appliquant la formule générale

$$R = \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right),$$

on a l'équation différentielle de la trajectoire

$$(1) \quad \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{b}{c^2} \right) \frac{1}{r} = \frac{a}{c^2}$$

Posons

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{b+c^2} + z, \quad 1 + \frac{b}{c^2} = K^2;$$

cette équation devient

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = -K^2 z$$

et admet pour intégrale générale

$$z = A \cos K (\theta + B)$$

d'où

$$(2) \quad \frac{1}{r} = \frac{a}{b+c^2} + A \cos K (\theta + B)$$

Faisons passer l'axe polaire par la position initiale du mobile et supposons, pour simplifier, que la vitesse initiale V_0 du mobile soit perpendiculaire à l'axe, nous aurons

$$B = 0, \quad C = V_0 r_0, \quad A = \frac{1}{r_0} - \frac{a}{b+c^2},$$

et, en posant

$$\frac{a r_0}{b+c^2} = \frac{1}{1+e},$$

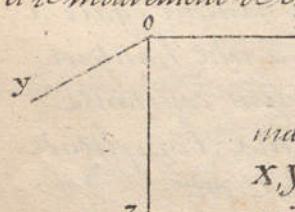
$$(3) \quad r = \frac{r_0 (1+e)}{1+e \cos K \theta}$$

1°. Cas. — $e < 1$ ou $V_0 < \sqrt{\frac{2ar_0-b}{r_0^2}}$. La trajectoire est la transformée d'une ellipse. Le mobile tourne indéfiniment autour de l'origine, s'en éloignant et s'en rapprochant alternativement; les mêmes valeurs de r se reproduisent périodiquement après l'angle $\frac{2\pi}{K}$, plus petit que 2π . Si K est commensurable, la courbe se ferme après un certain nombre de révolutions, et le mobile décrit la même courbe. Si K est incommensurable, aucune des sinuosités de la courbe ne coïncide avec une des précédentes.

2°. Cas. — $e > 1$, ou $V_0 > \sqrt{\frac{2ar_0-b}{r_0^2}}$. Le mobile s'éloigne indéfiniment de l'origine. La trajectoire, transformée d'une hyperbole, a une branche infinie asymptotique à une ligne droite.

VIII.

Trouver le mouvement de 2 points matériels pesant dans le vide, s'attirant mutuellement en raison inverse du carré de la distance. Déterminer le mouvement du centre de gravité de ces deux points matériels et le mouvement de chacun d'eux par rapport au centre de gravité.



Prenons pour axe des z une verticale dirigée de haut en bas. Appelons m et m' les masses des deux mobiles (x, y, z) , (x', y', z') leurs coordonnées, r leur distance mutuelle, X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité. Les équations du mouvement de ces deux points sont

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = f m m' \frac{x' - x}{r^3} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = f m m' \frac{y' - y}{r^3} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = mg + f m m' \frac{z - z'}{r^3} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} m' \frac{d^2 x'}{dt^2} = f m m' \frac{x - x'}{r^3} \\ m' \frac{d^2 y'}{dt^2} = f m m' \frac{y - y'}{r^3} \\ m' \frac{d^2 z'}{dt^2} = m' g + f m m' \frac{z - z'}{r^3} \end{cases} \quad (3) \begin{cases} (m + m') X = mx + m' x' \\ (m + m') Y = my + m' y' \\ (m + m') Z = mz + m' z' \end{cases}$$

On trouve

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = g.$$

Ainsi le centre de gravité se meut comme un projectile dans le vide; il décrit une parabole. On connaît sa position initiale; on obtient sa vitesse initiale en comparant les quantités du mouvement initiales des 2 mobiles. On voit en effet que le mouvement du centre de gravité d'un système est le même que si on concentrait en ce point toutes les masses, en y transportant les vitesses et les forces parallèlement à elles mêmes.

Appelons (ξ, η, ζ) , (ξ', η', ζ') les coordonnées des deux mobiles par rapport à des axes mobiles menés par le centre de gravité parallèlement aux axes fixes, ρ et ρ' leurs distances au centre de gravité; on a

$$x = X + \xi, \quad x' = X + \xi',$$

et en substituant dans les équations (1) et (2).

$$(5) \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = f m' \frac{\xi' - \xi}{r^3} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = f m' \frac{\eta' - \eta}{r^3} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = f m' \frac{\zeta' - \zeta}{r^3} \end{cases} \quad (6) \begin{cases} \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = f m \frac{\xi - \xi'}{r^3} \\ \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = f m \frac{\eta - \eta'}{r^3} \\ \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = f m \frac{\zeta - \zeta'}{r^3} \end{cases}$$

Si l'on observe que $m \xi + m' \xi' = 0$, $\frac{\rho}{m'} = \frac{\rho'}{m} = \frac{r}{m + m'}$,

les équations (5) et (6) deviennent

$$(7) \begin{cases} \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{f m'^3}{(m + m')^2} \frac{\xi}{\rho^3} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -\frac{f m'^3}{(m + m')^2} \frac{\eta}{\rho^3} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -\frac{f m'^3}{(m + m')^2} \frac{\zeta}{\rho^3} \end{cases} \quad (8) \begin{cases} \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = -\frac{f m^2}{(m + m')^2} \frac{\xi'}{\rho'^3} \\ \frac{d^2 \eta'}{dt^2} = -\frac{f m^2}{(m + m')^2} \frac{\eta'}{\rho'^3} \\ \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} = -\frac{f m^2}{(m + m')^2} \frac{\zeta'}{\rho'^3} \end{cases}$$

Ces dernières équations montrent que chacun des deux mobiles se meut autour du centre de gravité suivant les lois de Kepler, comme s'il était sollicité vers ce centre par une force attractive en raison inverse du carré de la distance. Les deux rayons vecteurs étant en ligne droite et dans un rapport constant, les deux mobiles décrivent autour du centre de gravité deux courbes du second degré semblables dans un même plan qui se meut parallèlement à lui-même, tandis que le centre de gravité décrit la parabole. Si les courbes sont des ellipses, les mobiles tournent autour du centre de gravité. Quand ce sont des hyperboles ou des paraboles, ils s'en éloignent indéfiniment en sens opposé.

Le mouvement relatif de l'un des mobiles par rapport à l'autre est représenté par les équations

$$(9) \quad \frac{d^2 (\xi - \xi')}{dt^2} = -f (m + m') \frac{\xi - \xi'}{r^3},$$

que l'on déduit des équations (5) et (6) par soustraction. Ce mouvement relatif a lieu suivant une courbe du second degré semblable aux précédentes et dans le même plan de direction invariable.

Solutions

des

Questions proposées

pour

Le sixième Exercice d'Analyse.

I.

En supposant que deux points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance, déterminer le mouvement relatif de l'un de ces points par rapport à l'autre.

Il résulte des démonstrations données au cours, que ce mouvement est le même que celui d'un point repoussé par un centre fixe dans lequel les deux masses seraient réunies. Pour trouver la trajectoire dans ce cas, on posera

$$-\frac{\mu}{r^2} = \frac{c^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\omega^2} \right\}$$

ou

$$-\mu = c^2 \left\{ \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\omega^2} \right\}$$

En posant $\frac{1}{r} = z$ cette équation est linéaire à coefficients constants, et son intégrale fournira l'équation d'une section conique ayant pour foyer le centre d'attraction. Cette section conique est toujours une hyperbole.

II.

Déterminer le mouvement d'un point pesant suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible et d'une masse enroulé sur une poulie circulaire fixe dans un plan vertical. — Assigner la tension de ce fil à chaque instant et la durée des petites oscillations que le point peut exécuter sur la développante de cercle que ce mode de suspension lui permet de parcourir.

Pour résoudre cette question, on fera usage du principe du travail et l'on suivra une marche analogue à celle qui a servi à établir la théorie du pendule circulaire.

$$\text{On a} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(z-h)$$

s désignant l'arc de trajectoire et h et z les distances verticales de la pesanteur initiale et d'une position quelconque à l'horizontale passant par le point O .

Or, en nommant r le rayon de cercle O , l la longueur initiale du fil, θ l'angle qu'il fait avec la verticale, α la valeur initiale de θ , on a

$$ds^2 = d\theta^2 \{l-r(\alpha-\theta)\}^2$$

$$h = l \cos \alpha - r \sin \alpha$$

$$z = \{l-r(\alpha-\theta)\} \cos \theta - r \sin \theta$$

$$\text{donc} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \{l-r(\alpha-\theta)\}^2 = 2g \{l(\cos \theta - \cos \alpha)\} + 2gr(\sin \alpha - \sin \theta) + 2gr(\alpha-\theta)\cos \theta$$

$$\text{donc} \quad dt = \frac{d\theta \{l-r(\alpha-\theta)\}}{\sqrt{2g \{l(\cos \theta - \cos \alpha) + 2gr(\sin \alpha - \sin \theta) + 2gr(\alpha-\theta)\cos \theta\}}}$$

θ et α étant petite, on a, approximativement

$$\cos \theta - \cos \alpha = \frac{\alpha^2 - \theta^2}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \theta = \alpha - \theta$$

$$\cos \theta = 1$$

et il vient

$$dt = \frac{d\theta \{l-r(\alpha-\theta)\}}{\sqrt{l(\alpha^2 - \theta^2)}};$$

ce qui s'intègre très-facilement.

III.

Un fil pesant, homogène, d'une longueur donnée et d'une épaisseur variable, est attaché à deux points fixes. Quelle doit être son épaisseur en chaque point pour que la courbe qu'il forme dans sa position d'équilibre soit un arc de cercle.

On doit &c.

On doit avoir

$$dT \frac{dx}{ds} = 0 ;$$

donc

$$T \frac{dx}{ds} = C ;$$

$$T = C \frac{ds}{dx} = C \frac{z}{x}$$

z désignant le rayon du cercle formé par la courbe. On conclut de là

$$d\left(T \frac{dy}{ds}\right) = d\left(C \frac{y}{x}\right) = g \rho ds$$

et de cette équation on trouve la valeur de ρ en chaque point.

IV.

Un fil pesant, homogène, d'une longueur donnée et d'une épaisseur variable, est attaché à deux points fixes. Quelle doit être son épaisseur en chaque point pour que la courbe qu'il forme soit un arc de cycloïde ayant sa base horizontale?

On aura encore

$$T \frac{du}{ds} = C ;$$

$$d\left(C \frac{dy}{dx}\right) = g \rho ds$$

et de là on déduira ρ .

V.

Quelle est la courbe sur laquelle un point pesant doit se mouvoir pour exercer sur elle une pression toujours égale à son poids?

On doit avoir

$$g \cos \alpha + \frac{v^2}{\rho} = g$$

ou

$$g \cos \alpha + \frac{2g(h-y)}{\rho} = g ;$$

mais

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

donc

$$(h-y) \frac{d\alpha}{ds} = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$$

d'ailleurs

$$ds = \frac{dy}{d\alpha}$$

donc

$$\frac{dy}{h-y} = \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha} = \frac{2 \cos \alpha d\alpha}{1 - \cos \alpha} = -2 d\alpha + \frac{d\alpha}{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha}$$

d'où on déduira y en fonction de α .

VI.

Deux points matériels fixes de masses égales attirent en raison inverse du carré des distances un autre point matériel placé sans vitesse initiale à égales distances de chacun d'eux. Déterminer le mouvement du point attiré quand il fait de très petites oscillations.

Après avoir établi, par le principe du travail, l'équation rigoureuse du mouvement, on simplifie les intégrations, comme cela s'est fait dans la théorie du pendule, par la supposition que les mouvements soient très-petits.

La force accélératrice est

$$\frac{2\mu}{z^2} \cos \alpha = \frac{2\mu y}{y^2 + a^2 \sqrt{y^2 + a^2}}$$

donc

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2\mu y}{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -\frac{2\mu}{\sqrt{a^2 + y^2}} + C = \frac{2\mu}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{2\mu}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

h désignant la hauteur initiale. On en déduit:

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}}}$$

Si y est très-petit on a

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{1}{a} \left\{ 1 + \frac{y^2}{a^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{a^2} \right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \right)$$

donc

$$dt = \frac{a \sqrt{x} dy}{\sqrt{2\mu} \sqrt{b^2 + y^2}}$$

et l'on retrouve les lois connues des petites oscillations du pendule.

VII.

Trouver la loi suivant laquelle doit varier la section d'un fil flexible et pesant suspendu par ses deux extrémités, pour que la tension en chaque point soit proportionnelle à la surface de la section et que les chances de rupture soient, par conséquent, partout les mêmes.

On a

$$T \frac{dx}{ds} = T_0,$$

$$T \frac{dy}{ds} = \int g \rho ds,$$

on tire de ces deux équations

$$\frac{dy}{dx} = \int \frac{g \rho ds}{T_0}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a \rho}{T_0} \frac{ds}{dx}$$

On doit avoir $T = a g \rho$, a étant une constante; l'équation devient ainsi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T}{T_0 a} \frac{ds}{dx}$$

d'où

$$a \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx} \right)^2$$

ou, en posant

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

$$d \frac{dy'}{dx} = 1 + y'^2;$$

$$x \frac{dx}{a} = \frac{dy}{1 + y'^2};$$

$$\frac{x}{a} = \text{arc tang } y';$$

donc

$$y' = \frac{dy}{dx} = \text{tang } \frac{x}{a},$$

et

$$\frac{y}{a} = \log \frac{1}{\cos \frac{x}{a}}.$$

Celle est l'équation de la courbe demandée.

V III.

Un fil est enroulé sur un arc de cercle fixe et sollicité, à ses deux extrémités, par des forces égales dirigées suivant la tangente au cercle; il y a équilibre. Calculer la pression exercée par le fil sur chaque élément du cercle et la résultante de toutes ces pressions.

La tension est constante; car la différentielle, égale à la composante tangentielle de la force qui sollicite le fil, est nulle en chaque point; de plus, la composante normale de la force qui sollicite un fil en équilibre est égale au rapport de la tension au rayon de courbure du fil. Cette force est évidemment ici la pression; la pression sur l'élément ds est donc

$$\frac{T ds}{R}.$$

En cherchant la résultante de toutes ces forces, on trouve une force unique dirigée suivant le rayon qui divise l'arc en deux parties égales et égale à

$$2T \cos \frac{\alpha}{2},$$

α désignant l'angle correspondant à cet arc.



VIII.

[Faint, illegible handwriting]

[Faint, illegible handwriting]

[Faint, illegible handwriting]



602
13/1/72

2
16"

