

3900

50

40

ITARD 120

APPLICATION
DE LA GEOMETRIE
A LA GEOMETRIE

DEMONSTRATION
DE LA
THEOREME

DE LA
THEOREME

A PARIS,
Chez B. BACHELIER, Imprimeur de la Bibliothèque
Nationale, Palais National, ci-devant des Sciences, au Salon de
Mathématiques.

1825

APPLICATION
DE L'ALGEBRE
A LA GEOMETRIE.
OU
METHODE

DE DE'MONTRER PAR L'ALGEBRE,
les Theorèmes de Geometrie, & d'en résoudre
& construire tous les Problèmes.

L'on y a joint une Introduction qui contient les
Regles du Calcul Algebrique.

Par Mr GUISNE'E de l'Academie Royale
des Sciences, Professeur Royal de Mathematique,
& ancien Ingenieur ordinaire du Roy.



A PARIS,

Chez { JEAN BOUDOT, Imprimeur du Roy & de l'Academie Royale des Sciences, rue saint Jacques, au Soleil d'Or.

ET

{ JACQUE QUILLAU, Impr. Jur. Libr. de l'Université, rue Galande, près de la rue du Fouarre.

MDCCV.

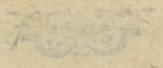
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

SCD LYON 1
Mathématiques

APPLICACION
DE LA ALGEBRA
A LA GEOMETRIA
O
METHODE

DE DEMONSTRAR PAR LA ALGEBRA
las Theoricas de Geometria, & sus proposiciones
de construir todos los Problemas.
En y se junta una Introduccion que contiene las
Reglas del Calculo Algebraico.

Por DON JOSE N. E. de l'Academie Royale
de Sciences, Professeur Royal de Mathematiques,
& ancien Ingenieur ordinaire du Roy.



A PARIS,

chez le Citoyen BENOIST, Ingenieur du Roy & de l'Academie
des Sciences, rue Saint Jacques,
au Salon d'Or.

ET

chez M. OUVRIER, Imprimeur de l'Université,
rue Grande, près de la rue de la Fontaine.

M D C C V

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

P R E F A C E.



Il y a quelques années que l'on écrivit cet Ouvrage en faveur de quelques personnes de qualité qui s'appliquent à la Science qu'on y traite. On n'avoit pas alors dessein de le donner au Public. Mais un de ceux pour qui il a été écrit, l'ayant jugé plus propre que tous les Ouvrages de même nature qui l'ont précédé, pour instruire ceux qui veulent s'appliquer aux Mathematiques, & en traiter toutes les parties algebriquement, a bien voulu faire la dépense de l'impression par le seul motif de leur faire plaisir.

x → de Montmort

On y explique le plus simplement que l'on peut, les Methodes de démontrer par l'Algebre, tous les Theorèmes de Geometrie, & de résoudre, & construire tous les Problèmes déterminez & indéterminez, geometriques & mécaniques. En un mot, on explique tous les usages qu'on peut faire de l'Algebre commune, dans toutes les parties des Mathematiques, pourvû qu'on exprime par des lignes les grandeurs qu'elles ont pour objet; & on ne suppose pour cela que les simples élemens de la Geometrie ordinaire.

L'on y supposoit aussi la connoissance du Calcul algebrique, parcequ'il se trouve expliqué dans plusieurs Livres imprimez: mais plusieurs personnes ayant crû qu'il seroit plus à propos d'en

P R E F A C E.

donner les Règles, & de les joindre à l'Ouvrage en forme d'Introduction, que de renvoyer le Lecteur, qui n'en aura point encore de connoissance, à d'autres Ouvrages; on a suivi leur avis, & l'on y a ajouté cette Introduction, où l'on a expliqué toutes les operations algebriques, les proprietéz des rapports, ou fractions, des proportions, & des équations.

On y a établi un principe general pour démontrer toujours de la même maniere tous les Theorèmes qu'on peut former sur la grandeur considerée generalement; & ce principe est le même que l'on trouve aussi dans la troisieme Section de l'Application de l'Algebre à la Geometrie, pour en démontrer les Theorèmes.

L'on trouvera aussi des Regles particulieres pour multiplier & diviser, les unes par les autres, les puissances qui renferment les mêmes lettres, pour les élever à d'autres puissances, & pour en extraire les racines. Ces Regles ne feront peut-être pas inutiles pour entendre avec plus de facilité, plusieurs endroits de l'Excellent Livre de *l'Analyse des infinimens Petits* de feu Monsieur le Marquis de l'Hôpital, que j'ai aussi eu en vûe dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie. On y trouvera en effet expliquez tous les endroits de l'Analyse qui dépendent de l'Algebre & de la Geometrie ordinaire; & dans lesquels cet illustre Auteur n'a pas jugé à propos de mettre tout au long, ou de poursuivre

P R E F A C E.

des operations dont il suppose son Lecteur capable.

Je divise cet Ouvrage en douze Sections, que j'ai rangées selon leur ordre dans la Table qui suit, où j'indique ce qui est contenu dans chacune. J'ajouterai que dans la premiere Section, j'ai parlé des équations déterminées, & indéterminées, des racines de leurs inconnues, & de leurs usages; & pour ne pas faire des répétitions inutiles, j'ai crû devoir omettre dans l'Introduction, ce que j'en ai dit en cet endroit. J'ai aussi mis dans cette Section, des observations pour nommer les lignes qui doivent servir à la résolution d'un Problème, pour tirer celles qu'il est necessaire de tirer, pour trouver plus facilement des équations; & ces observations font d'un si grand secours, qu'il est necessaire de les bien entendre, & même de les apprendre par cœur.

Comme les équations, qui servent à construire les Problèmes, en renferment toutes les conditions, & toutes les qualitez, on a accoutumé d'en démontrer la construction par l'Analyse, en retirant les mêmes équations des proprietés des Courbes qu'on y employe. Mais cette Méthode n'ayant aucune difficulté, j'ai démontré à la maniere des Anciens la construction de la plupart des Problèmes déterminez que j'ai résolus, quoiqu'elle ait été tirée de l'Analyse, afin de faire voir la difference qu'il y a entre l'une & l'autre maniere. Mais quant à la construction

P R E F A C E.

des Problèmes indéterminez , qui n'est autre chose que la description des Courbes dont on a les équations , il n'y a point d'autre voye naturelle pour la démontrer, que l'Analyse.

Les Sections coniques étant d'un grand usage dans la Geometrie , j'ai jugé à propos d'en démontrer par l'Analyse , dans la 4, 5, 6, & 7^e Section , les principales proprietéz ; & principalement celles dont je prévoyois avoir besoin pour la construction des Problèmes. Je les ai d'abord considérées dans le Cone, parcequ'elles y ont pris leur origine & leur nom , & pour faire voir que celles que l'on trouve décrites sur des Plans dans la 5, 6, & 7^e Section , sont précisément les mêmes que celles qu'on coupe dans le Cone.

Addition à la page liij de l'Introduction.

5^o. IL est quelquefois à propos , & même nécessaire ; pour rendre plus facilement l'équation qui renferme l'Hypothese semblable à celle qui renferme la conséquence, de nommer les grandeurs proportionnelles, comme nous avons dit n^o. 19, 20, 21 & 22; & de nommer par les mêmes lettres les quantitez inégales qui ne sont point proportionnelles , en caracterisant les unes par quelque signe , ou par quelque lettre qui fasse voir leur inégalité. Par exemple , si l'on veut démontrer quelque propriété qui convienne à trois grandeurs différentes A, B, C ; ayant nommé A, a , au lieu de nommer B, b ; & C, c ; on peut nommer B, ma , (m signifie *multiple* , ou *soûmultiple*) , ou $a \pm p$; & C, na (n signifie *multiple* , ou *soûmultiple* , différent de m) , ou $a \pm p \pm r$, en se servant du signe $+$, ou $-$, selon que les quantitez qu'on veut exprimer , sont moindres , ou plus grandes que celle qui est exprimée par la premiere lettre a .

TABLE DES SECTIONS.

- SECTION I. OÙ l'on donne les définitions & les principes généraux qui seront pour résoudre les Problèmes, & démontrer les Théorèmes de Geometrie, page 1
- SECTION II. OÙ l'on donne la maniere d'exprimer geometriquement les quantitez Algebriques, & de résoudre les Problèmes simples, & plans; ou ce qui est la même chose, de construire les équations déterminées du premier & du second degré, page 30
- SECTION III. OÙ l'on donne la Méthode de démontrer les Théorèmes de Geometrie, page 60
- SECTION IV. Des Sections du Cone, & du Cilindre, p. 68
- SECTION V. OÙ l'on démontre les principales propriétés de la parabole, décrite par des points trouvez sur un Plan. page 80
- SECTION VI. OÙ l'on démontre les principales propriétés de l'Ellipse décrite par des points trouvez sur un Plan, page 91
- SECTION VII. OÙ l'on démontre les principales propriétés de l'Hyperbole décrite par des points trouvez sur un Plan, page 116
- SECTION VIII. OÙ l'on donne la Méthode de résoudre les Problèmes indéterminez du premier & du second degré, c'est-à-dire, de construire les équations à la ligne droite, & aux quatre Courbes du premier genre, qui sont le Cercle, la Parabole, l'Ellipse & l'Hyperbole, page 132
- SECTION IX. OÙ l'on donne la Méthode de construire les Problèmes solides déterminéz, par le moyen de deux équations locales, ou indéterminées, lorsque l'une des deux se rapporte au cercle, ou y peut être ramenée, page 187
- SECTION X. OÙ l'on donne la Méthode de construire les

TABLE DES SECTIONS.

- Problèmes solides par le moyen de leurs équations déterminées ; ou ce qui est la même chose , de construire les équations déterminées du troisième, & du quatrième degré ,* page 199
- SECTION XI. *Où l'on donne la Méthode de résoudre & de construire les Problèmes indéterminez dont les équations excèdent le second degré ; ou ce qui est la même chose, de décrire les Courbes dont ces équations expriment la nature, & de résoudre, & de construire les Problèmes déterminéz, dont les équations excèdent le quatrième degré ,* page 210
- SECTION XII. *Des courbes mécaniques, ou transcendentes, de leur description, & des Problèmes qu'on peut construire par leur moyen ,* page 233

AVERTISSEMENT POUR LES CITATIONS.

Les articles sont marquez par les chiffres Romains I, II, III, &c. & les n° par les chiffres Arabes. Par exemple, pour trouver cette citation, art. 4 n°. 6, il faut chercher la page, où l'on trouve le chiffre Romain IV, & ensuite le chiffre Arabe 6, qui n'en est pas beaucoup éloigné. Pour une plus grande facilité, voici la Table des articles.

TABLE DES ARTICLES.

ARTICLE I, pag. 1. Art. II, pag. 4. Art. III, pag. 10. Art. IV, pag. 22. Art. V, pag. 30. Art. VI, pag. 35. Art. VII, pag. 38. Art. VIII, pag. 60. Art. IX, pag. 68. Art. X, pag. 80. Art. XI, pag. 85. Art. XII, pag. 91. Art. XIII, pag. 101. Art. XIV, pag. 116. Art. XV, pag. 132. Art. XVI, pag. 141. Art. XVII, pag. 145. Art. XVIII, pag. 148. Art. XIX, pag. 153. Art. XX, pag. 162. Art. XXI, pag. 168. Art. XXII, pag. 175. Art. XXIII, pag. 187. Art. XXIV, pag. 199. Art. XXV, pag. 210. Art. XXVI, pag. 233.

INTRODUCTION.



INTRODUCTION
A
L'APPLICATION DE L'ALGEBRE
A
LA GEOMETRIE.

D E F I N I T I O N S.

I. **L'**ALGEBRE est l'Art de faire sur les lettres de l'Alphabet, les operations que l'on fait sur les nombres, c'est-à-dire, l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division & les Extractions de racines.

L'on se sert des lettres de l'Alphabet préferablement à d'autres caracteres arbitraires, dont on pourroit également se servir, tant parcequ'on les connoît & qu'on écrit avec plus d'habitude que tous autres caracteres, que parceque ces lettres ne signifiant rien d'elles mêmes, on peut s'en servir pour exprimer tout ce qu'on voudra.

Ce qui fait qu'on ne peut pas tirer le même avantage des caracteres Arithmetiques & des Nombres, que des lettres dans l'Application de l'Algebre à tous ses usages, c'est, 1^o. qu'après avoir fait quelques unes des operations dont on vient de parler sur les lettres, on en connoît non seulement le résultat, mais on connoît & on distingue en même temps toutes les quantitez qu'il renferme; ce qui n'est point de même dans les résultats des mêmes operations faites sur les nombres.

2^o. Que les quantitez inconnues entrent dans le calcul aussi-bien que les connues, & que l'on opere avec la même facilité sur les unes que sur les autres.

3^o. Que les Démonstrations que l'on fait par le calcul algebrique sont generales, & qu'on ne sauroit rien prouver par les nombres que par induction.

C'est précisément en ces trois choses que consiste le grand avantage qu'on tire du calcul algebrique dans son application à toutes les parties des Mathematiques, qu'on en démontre tous les Theorèmes, & qu'on en refout tous les Problèmes avec autant de facilité qu'il y auroit de difficulté à faire les mêmes choses selon la maniere des Anciens.

On s'est accoûtumé à employer les premières lettres de l'Alphabet a, b, c, d , &c. pour exprimer les quantitez connues, & les dernières $m, n, p, q, r, s, t, u, x, y, z$ pour exprimer les inconnues.

1. Outre les lettres qu'on employe dans l'Algebre, il y a encore quelques autres signes qui servent pour marquer les operations que l'on fait sur les mêmes lettres. Ce signe $+$, signifie *plus*, & est la marque de l'Addition. Ainsi $a + b$, marque que b est ajoutée avec a .

Ce signe $-$, signifie *moins*, & est la marque de la Soustraction. Ainsi $a - b$, marque que b est soustraite de a .

Celui-ci \times , signifie *fois*, ou *par*, & est la marque de la multiplication. Ainsi $a \times b$, marque que a & b , sont multipliées l'une par l'autre.

On néglige tres-souvent ce signe, parcequ'on est convenu que lorsque deux ou plusieurs lettres sont jointes ensemble sans aucun signe qui sépare ces lettres, où les quantitez qu'elles expriment, sont multipliées, par exemple ab marque assez que a & b se multiplient: mais on s'en sert toujours pour marquer que deux quantitez exprimées par des lettres majuscules de l'Alphabet se multiplient. Ainsi $AB \times CD$; marque que la grandeur exprimée par AB est multipliée par la grandeur exprimée par CD . On employe encore le signe de multiplication en d'autres occasions qu'on trouvera dans la suite.

INTRODUCTION.

ijj

Ce signe $=$, signifie *égal*, & marque qu'il y a égalité entre les quantitez qui le précédent, & celles qui le suivent. Ainsi $a = b$ marque que a est égale à b .

Celui-ci $>$ signifie *plus grand*. Ainsi $a > b$ marque que a surpasse b .

Celui-ci $<$ signifie *plus petit*. Ainsi $a < b$, marque que a est moindre que b .

Celui-ci ∞ signifie *infini*. Ainsi $x = \infty$, marque que x est une quantité infiniment grande.

2. Les lettres de l'Alphabet sont nommées *quantitez algebriques*, lorsqu'on les employe pour exprimer des grandeurs sur lesquelles on veut operer.

3. Les quantitez algebriques sont nommées *simples, incomplexes* ou *monomes*, lorsqu'elles ne sont point liées ensemble par les signes $+$ & $-$; $a, ab, \frac{aa}{b}$ &c. sont des quantitez incomplexes.

4. Elles sont nommées *composees*, ou *complexes*, ou *polynomes*, lorsqu'elles sont liées ensemble par les signes $+$ & $-$; $a + b, ab + bb, ab - bc + cd, \frac{aa + bb}{a}$, sont des quantitez complexes.

5. Les parties des quantitez complexes distinguées par les signes $+$ & $-$ sont nommées *termes*. $ab + bc - cd$, est une quantité complexe, qui renferme trois termes, ab, bc & cd . Il y a quelques remarques à faire sur le mot de *terme* qu'on trouvera ailleurs.

6. Les quantitez complexes qui n'ont que deux termes sont nommées *binomes*; celles qui en ont trois, *trinomes*, &c.

7. Les quantitez incomplexes qui sont précédées du signe $+$, ou plutôt qui ne sont précédées d'aucun signe (car les quantitez incomplexes, & les premiers termes des quantitez complexes qui ne sont précédées d'aucun signe sont supposées être précédées du signe $+$) sont nommées *positives* & celles qui sont précédées du signe $-$, *negatives*; d'où il suit que les quantitez complexes sont

a ij

positives, lorsque les termes qui ont le signe + surpassent ceux qui ont le signe — ; négatives, lorsque les termes précèdent du signe — surpassent ceux qui sont précédés du signe +.

8. Les quantitez incomplexes, & les termes des quantitez complexes qui contiennent les mêmes lettres sont nommées *semblables*. $2abc$ & abc sont des quantitez incomplexes semblables ; $3aab - 2aab + 4abb$ est une quantité complexe qui renferme deux termes semblables $3aab$ & $-2aab$; le troisième terme $4abb$, n'a point de semblable.

9. Pour s'appercevoir plus facilement de la similitude des quantitez algebriques, il faut toujours écrire les premières lettres de l'Alphabet les premières, & les autres dans leur ordre, c'est-à-dire par exemple, qu'au lieu d'écrire bac , ou cab , il faut écrire abc .

10. Les nombres qui précèdent les quantitez algebriques sont nommez *coefficiens*.

Dans cette quantité $aa + 3ab + 4bb$, 3 & 4 sont les coefficiens des termes $3ab$ & $4bb$. L'on prend l'unité pour coefficient des quantitez qui ne sont précédées d'aucun nombre, & quoique l'on n'ait point acoutumé de l'écrire, on la doit néanmoins toujours supposer. Ainsi aa doit être regardée comme s'il y avoit $1aa$.

R E D U C T I O N

Des quantitez complexes algebriques à leurs plus simples expressions.

11. **I**L faut ajouter les coefficiens des termes semblables, lorsqu'ils ont le même signe + ou —, & donner à la somme le même signe ; & lorsqu'ils ont differens signes, il faut soustraire les plus petits coefficiens des plus grands, & donner au reste le signe du plus grand. Ainsi $3ab + 2ab$ étant réduite, devient $5ab$; $4ac + 4ab - 6ab$ devient $4ac - 2ab$; $3a - 5a$ devient $-2a$; $3abc - abc$, ou $3abc - 1abc$, devient $2abc$. Il en est ainsi des autres.

INTRODUCTION.

v

Dans tous les calculs algebriques, il ne faut jamais laisser de termes semblables sans être réduits.

A D D I T I O N

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

12. **I**L n'y a qu'à les écrire de suite, ou au-dessous les unes des autres, avec leurs signes, & réduire ensuite les termes semblables, & l'on aura la somme des quantitez qu'il falloit ajouter ensemble. Ainsi pour ajouter $3ab - 4bc + 5cd$ avec $2ab - 3cd$, l'on écrira $3ab - 4bc + 5cd + 2ab - 3cd$, qui se réduit à $5ab - 4bc + 2cd$. Pour ajouter $5abc - 4bcd$ avec $5abd - 8abc + 6bcd$, l'on écrira $5abc - 4bcd + 5abd - 8abc + 6bcd$, qui se réduit à $5abd - 3abc + 2bcd$. Pour ajouter $6a - 3b$ avec $2a - 3b$, l'on écrira $6a - 3b + 2a - 3b$, qui se réduit à $8a$. Il en est ainsi des autres.

S O U S T R A C T I O N

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

13. **I**L n'y a qu'à les écrire de suite, ou au-dessous l'une de l'autre en changeant tous les signes de celles qui doivent être soustraites; & l'on aura après la réduction des termes semblables, la difference des quantitez proposées.

Pour soustraire $3a - 2b + 3c$ de $5a - 3b - 5c$, l'on écrira $5a - 3b - 5c - 3a + 2b - 3c$, qui se réduit à $2a - b - 8c$. Pour soustraire $3ab - 2bc + 2cd$ de $5ab - 4bc + 2cd$, l'on écrira $5ab - 4bc + 2cd - 3ab + 2bc - 2cd$, qui se réduit à $2ab - 2bc$. Il en est ainsi des autres.

MULTIPLICATION

Des quantitez algebriques incomplexes, & de leurs puissances.

14. ON est convenu que pour multiplier deux ou plusieurs lettres, il n'y a qu'à les écrire de suite sans aucun signe qui les separe, & l'on aura le produit cherché. Ainsi pour multiplier a par b , l'on écrira ab . Pour multiplier ab par ac , l'on écrira $aabc$. Il en est ainsi des autres.

Il y a souvent des nombres, ou coefficients qui précèdent les quantitez algebriques qu'il s'agit de multiplier; il faut aussi avoir égard à leurs signes. Voici la regle qu'il faut suivre.

15. On multipliera les coefficients, en suite les lettres & on donnera au produit le signe $+$ si les deux quantitez sont précédées du même signe $+$ ou $-$, & on lui donnera le signe $-$, si l'une des quantitez est précédée du signe $+$ & l'autre du signe $-$.

Pour multiplier $3a$ par $2b$, on dira trois fois 2 font 6, a par b fait ou donne, ou est égal à ab ; ainsi l'on aura $6ab$ pour le produit de $3a \times 2b$. De même $3ab \times -2ab = -6aabb$, $-3ab \times -2cd = +6abcd$, $5ab \times cd$, ou $1cd = 5abcd$, $aab \times abb = aaabbb$, ou a^3b^3 : car lorsque la même lettre se trouve plus de deux fois dans un produit, on l'écrit seulement une fois, & l'on écrit à sa droite un caractère arithmetique qui exprime combien de fois cette lettre doit être écrite. Ainsi pour $aaaa$, l'on écrira a^4 ; pour $aaabbb$, l'on a écrit a^3b^3 ; on peut aussi pour aa écrire a^2 ; pour bb , b^2 , &c.

DÉFINITION.

16. LE caractère arithmetique qui marque combien de fois une lettre doit être écrite dans un produit, est nommé *exposant*. Ainsi dans a^3b^4 , 3 est le posant de a , & 4, celui de b ; dans a^3b , 3 est l'exposant de a , & 1 l'exposant de b : car quand une lettre est seule, ou qu'elle ne doit être écrite qu'une fois dans un produit, on doit suppo-

INTRODUCTION.

vij

fer qu'elle a pour exposant l'unité, quoiqu'on ne l'écrive point. Ainsi a exprime la même chose que a^1 , ou $1a^1$, a^1b , la même que a^1b^1 . &c.

REMARQUE.

17. **D**E même que la multiplication de deux lignes droites engendre ou produit un rectangle, ou un carré, si elles sont égales; la multiplication de trois lignes droites, un parallelepipedé, ou solide; ou un cube, si elles sont égales: par la même raison les Algebristes appellent rectangle algebrique, le produit de deux lettres différentes, comme ab ; carré algebrique, le produit d'une lettre par elle-même, comme aa ou a^2 ; solide algebrique, le produit de trois lettres différentes comme abc , ou aab ; cube algebrique, le produit d'une lettre multipliée consécutivement deux fois par elle-même, comme a^2 , ou b^3 . Mais ils n'en demeurent pas là, & quoiqu'il n'y ait point dans la nature de solide qui ait plus de trois dimensions, ils ne laissent pas que d'en imaginer d'algebriques dont le nombre de dimensions va à l'infini, comme a^3 , a^4 , a^5 , a^6 , a^3b , $aabb$, a^3bb , a^4b^3 , &c. Et ces quantitez algebriques sont d'autant plus composées, que le nombre de leurs dimensions est grand; de sorte que un produit algebrique qui a quatre dimensions, est plus composé que celui qui n'en a que trois; celui qui en a trois, est plus composé que celui qui n'en a que deux, &c. Et le nombre des dimensions d'un produit algebrique est égal au nombre d'unités que contient la somme des exposans des quantitez qui le forment. Par exemple, a^3b est un produit de quatre dimensions, parceque 3 exposant de a , + 1 exposant de $b = 4$. a^3b^4 est un produit de sept dimensions, parceque 3 + 4 = 7. Il en est ainsi des autres.

Ils appellent *puissance*, ou degré; le produit d'une quantité algebrique multipliée par elle-même une fois, deux fois, trois fois, & ainsi à l'infini. Ainsi a , ou a^1 est le premier degré, ou la première puissance de a ; aa ou a^2 ,

le second degré, ou la seconde puissance, ou le carré de a ; a^2 , le troisième degré, ou la troisième puissance ou le cube de a ; a^3 , le quatrième degré, ou la 4^e puissance, ou le carré carré de a ; a^4 , le cinquième degré, ou la 5^e puissance, ou le carré cube de a ; a^5 , le sixième degré, ou la sixième puissance, ou le cube cube de a ; a^6 , le septième degré, ou la septième puissance de a , & ainsi à l'infini, d'où l'on voit que les puissances tirent leur nom de leurs exposans.

18. Une puissance peut aussi être regardée comme le produit de deux puissances, ou comme la puissance d'une autre puissance: ainsi a^6 peut être regardée comme le produit de $a^2 \times a^4$, ou comme la seconde puissance de a^3 , ou comme la troisième de a^2 .

19. Il y a aussi des puissances faites du produit de deux ou plusieurs lettres multipliées l'une par l'autre: ainsi $aabb$, est la seconde puissance de ab ; a^2b^6 , la troisième puissance de abb . Il en est ainsi des autres.

DÉFINITION.

20. **S**I deux quantitez différentes, ou égales forment un produit, ou une puissance, ces quantitez sont nommées *côtez* ou *racines* de ce produit ou de cette puissance. Ainsi a & b sont les côtez, ou les racines de ab ; a le côté ou la racine de aa , &c.

FORMATION

Des puissances des quantitez complexes.

IL est évident (n^o. 17) que pour élever une quantité in complexe à une puissance donnée, il n'y a qu'à multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une que l'exposant de la puissance donnée contient d'unités. Ainsi pour élever ab à la troisième puissance, il faut multiplier ab deux fois par elle-même, ce qui donnera a^2b^2 . Il en est ainsi des autres.

INTRODUCTION. ix

22. D'où il est aisé de voir qu'on peut faire la même chose d'une manière plus courte, en multipliant les Exposans de la grandeur donnée par l'Exposant de la puissance à laquelle on veut élever cette grandeur. Ainsi la 3^e puissance de ab , ou $a^1 b^1$ est $a^{1 \times 3} b^{1 \times 3} = a^3 b^3$; la 4^e puissance de a^3 est $a^{3 \times 4} = a^{12}$; la 3^e puissance de aab^3 , ou $a^2 b^3$ est $a^{2 \times 3} b^{3 \times 3} = a^6 b^9$; la 3^e puissance de $-a$, ou $-a^1$ est $-a^{1 \times 3} = -a^3$; la quatrième puissance de $-a$ ou $-a^1$ est $a^{1 \times 4} = a^4$, & en general la puissance n de a^m est a^{mn} . La puissance n de $-a^m$ est $\pm a^{mn}$, selon que n signifie un nombre pair, ou impair.

23. Il est clair (n^o. 14, & 15) que pour multiplier un produit ou une puissance par un autre produit, ou par une autre puissance où se trouvent les mêmes lettres, il n'y a qu'à ajouter leurs Exposans. Ainsi $a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$; $a^2 b^2 \times a^2 b^3 = a^{2+2} b^{2+3} = a^4 b^5$; $a^3 \times a^{-5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^3 \times a^{-3} = a^{3-3} = a^0 = 1$. On verra dans la suite pourquoi $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, & pourquoi $a^0 = 1$.

MULTIPLICATION

Des quantitez complexes algebriques, & de la Formation de leurs puissances.

RÈGLE.

24. ON multipliera tous les termes de l'une des quantitez par chacun de ceux de l'autre, en observant les Règles prescrites n^o. 14, & 15, & l'on aura le produit total que l'on réduira (n^o. 11) à sa plus simple expression.

EXEMPLES.

25. Soit la quantité $A. a + 2b - c.$
 à multiplier par $B. 2a + 3b.$

$$\begin{array}{r} \text{Produits particuliers.} \left\{ \begin{array}{l} C. 2aa + 4ab - 2ac. \\ D. \quad + 3ab + 6bb - 3bc. \end{array} \right. \\ \hline \text{Produit total.} \quad E. 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc. \end{array}$$

Le premier terme $2a$ de la quantité B multipliant tous les termes de la quantité A donnera la quantité C .

Le second terme $3b$ de la quantité B , multipliant tous les termes de la quantité A donnera la quantité D ; & ayant fait la réduction des deux quantitez C & D , l'on aura la quantité E qui sera le produit des deux quantitez A & B . Donc $2a + 2b - c \times 2a + 3b = 2aa + 7ab - 2ac + 6bb - 3bc.$

26. Soit la quantité $A. aa + bb.$
 à multiplier par $B. aa - bb.$

$$\begin{array}{r} \text{Produits particuliers.} \left\{ \begin{array}{l} C. a^4 + aabb. \\ D. \quad - aabb + b^4 \end{array} \right. \\ \hline \text{Produit total} \quad E a^4 - b^4. \end{array}$$

Le premier terme aa de la quantité B , multipliant la quantité A produit la quantité C . Le 2^e terme $-bb$ de la quantité B multipliant la quantité A produit la quantité D , & en réduisant les produits particuliers C & D , l'on a le produit total E . Donc $aa + bb \times aa - bb = a^4 - b^4.$

27. On se contente quelquefois pour exprimer la multiplication de deux quantitez complexes, d'écrire entre deux le signe de multiplication.

Ainsi pour multiplier $a + b$ par $a - b$, l'on écrit $a + b \times a - b$, ou $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$. Il en est ainsi des autres.

FORMATION

Des puissances des quantitez complexes.

28. P our élever une quantité complexe à une puissance

INTRODUCTION.

xj

ce donnée, il faut, comme pour les quantitez incomplexes, la multiplier consecutivement autant de fois moins une que l'exposant de la puissance donnée contient d'unitéz. Ainsi pour élever $a + b$, à la 3^e puissance, il faut (n^o. 24) multiplier $a + b$ par $a + b$, ce qui donne $aa + 2ab + bb$, qui étant encore multipliée par $a + b$, donne $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, qui est la 3^e puissance, ou le cube de $a + b$. Il en est ainsi des autres.

On peut abreger l'operation lorsqu'il s'agit d'élever un pobyname au quarré.

29. On écrira le quarré du premier terme $+$ ou $-$ deux fois le rectangle au produit du premier par le second, $+$ le quarré du second; & ces trois termes seront le quarré cherché, si c'est un binome. Mais si c'est un trinome, on écrira encore $+$ ou $-$ deux fois le produit des deux premiers par le troisième $+$ le quarré du troisième. Si c'est un quadrinome, on écrira encore $+$ ou $-$ deux fois le produit des trois premiers par le quatrième. $+$ le quarré du quatrième, & ainsi de suite. Ainsi le quarré de $a - b + c$ est $aa - 2ab + bb + 2ac - 2bc + cc$.

On a mis ici cette abréviation, parceque l'on a tres-souvent besoin de cette operation dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

Voici une abréviation plus considerable pour élever un binome à une puissance quelconque.

30. L'on écrira au premier terme la premiere lettre du binome élevée à la puissance donnée; au second la même lettre élevée à une puissance plus basse de l'unité, & multipliée par la 2^e lettre; au troisième, la même lettre élevée à une puissance encore plus basse de l'unité & multipliée par le quarré de la seconde; & ainsi de suite, en abaissant à chaque terme la puissance de la premiere lettre de l'unité, & élevant au contraire celle du second de l'unité, jusqu'à ce que l'on arrive au terme, où la même premiere lettre n'aura qu'une dimension qui sera le pénultième; & l'on écrira au dernier terme la seconde let-

b ij

tre élevée à une puissance égale à celle du premier. Ainsi pour élever $a + b$ à la 4^e puissance, l'on écrira, $A. a^4 + a^3b + aabb + ab^3 + b^4$. Si le binome est tout positif, tous les termes de la puissance auront le signe +; si la seconde lettre est négative, les termes où elle se trouvera élevée à une puissance impaire, ou dont l'exposant est un nombre impair, auront le signe —, & tous les autres le signe +, comme on voit dans la puissance A .

Il reste encore à trouver les coefficients; en voici la Méthode.

On donnera au second terme pour coefficient l'exposant du premier; on multipliera le coefficient du second par l'exposant que la première lettre a du binome a au même second & le produit divisé par 2, sera le coefficient du troisième. De même, le coefficient du troisième multiplié par l'exposant que la première lettre a au même troisième; & le produit divisé par 3, sera le coefficient du quatrième; & ainsi de suite. De manière que le coefficient d'un terme quelconque multiplié par l'exposant que la première lettre du binome a dans le même terme, & le produit divisé par le nombre qui marque le lieu que ce même terme occupe dans l'ordre des termes de la puissance, est le coefficient du terme suivant. Ainsi la 4^e puissance du binome $a + b$ entièrement formée est,

$$a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4. \text{ Il en est ainsi des autres.}$$

S'il y a quelque nombre entier ou rompu qui précède l'un des deux, ou tous les deux termes du binome, on multipliera le coefficient de chaque terme de la puissance par une puissance de ce nombre égale à celle où la lettre qu'il précède y est élevée. Ainsi pour élever $a + 2b$ à la 3^e puissance, l'on y élèvera premièrement $a + b$, & l'on aura $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, l'on multipliera ensuite les coefficients des termes où b se rencontre par la puissance de 2 égale à celle où b y est élevée, c'est-à-dire que l'on multipliera $3aab$ par 2, $3abb$ par 4, & b^3 par 8, & l'on aura $a^3 + 6aab + 12abb + 8b^3$, qui sera le cube de $a + 2b$.

On peut aussi élever par les mêmes règles un binome quelconque $p + q$ à une puissance indéterminée m (m signifie un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif) qui sera,

$$p^m + mp^{m-1}q + m \times \frac{m-1}{2} p^{m-2}q^2 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} p^{m-3}q^3 + m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} p^{m-4}q^4 \text{ \&c.}$$

Où l'on voit que la première lettre p du binome a pour exposant dans tous les termes, m moins un nombre entier; c'est pourquoi si ce nombre entier se trouve dans quelqu'un égal à m , l'exposant de p y sera $= 0$; & par conséquent $p = 1$, & ce terme sera le dernier de la puissance m du binome $p + q$. Mais si ce nombre entier ne se trouve jamais $= m$, la puissance m du binome $p + q$ pourra être continuée à l'infini.

31. Le binome $p + q$ élevé à la puissance m , comme on vient de faire, peut servir de formule générale, pour élever un binome, ou un polynome quelconque à une puissance donnée.

Soit par exemple $2ax - xx$ qu'il faut élever à la 3^e puissance.

Ayant supposé $2ax = p$, $-xx = q$, & $m = 3$, l'on substituera en la place de p , de q , & de m , leurs valeurs $2ax$, $-xx$, & 3 ; & en la place des puissances de p & de q , les puissances égales de leurs valeurs $2ax$ & $-xx$, & l'on aura $8a^3x^3 - 12a^2ax^4 + 6ax^5 - x^6$ pour la puissance cherchée: car m devient $= 3$ au quatrième terme de la Formule. De même pour élever $a + b - c$ à la 3^e puissance. Ayant supposé $a = p$, $b - c = q$, & $m = 3$, l'on aura après les substitutions $a^3 + 3aab + 3abb + b^3 - 3aac - 6abc + 3acc - 3bbc + 3bacc - c^3$. Il en est ainsi des autres.

32. On se contente quelquefois pour élever un polynome à une puissance donnée, d'écrire à sa droite l'exposant de la puissance à laquelle on le veut élever. Ainsi pour élever $a + b$ au carré, on écrit $a + b^2$; pour l'élever au cube, l'on écrit $a + b^3$; & en general, pour éle-

ver $a + b$ à la puissance m , l'on écrit $\overline{a + b}^m$. m signifie un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif.

33. Il est clair que pour élever une puissance quelconque d'un polynome, formée comme on vient de dire, à une puissance donnée, il n'y a qu'à multiplier l'exposant de l'une par l'exposant de l'autre. Ainsi pour élever $\overline{a + b}^2$ à la 3^e puissance, l'on écrira $\overline{a + b}^{2 \times 3} = \overline{a + b}^6$. pour élever $\overline{a + b}^m$ au carré, ou à la 2^e puissance, l'on écrira $\overline{a + b}^{2m}$. Pour élever $\overline{a + b}^m$ à la puissance n , l'on écrira $\overline{a + b}^{mn}$. Il en est ainsi des autres.

34. Il est encore évident que pour multiplier deux puissances de la même quantité complexe, formées comme on a dit n^o. 32. il n'y a qu'à ajouter ensemble leurs exposans. Ainsi pour multiplier $\overline{a + b}^2$ par $\overline{a + b}^3$, l'on écrira $\overline{a + b}^{2+3} = \overline{a + b}^5$; $\overline{a + b - c}^2 \times \overline{a + b - c}^{-5} = \overline{a + b - c}^{2-5} = \overline{a + b - c}^{-3}$; $\overline{a - b}^m \times \overline{a - b}^n = \overline{a - b}^{m+n}$; $\overline{a + b}^m \times \overline{a + b}^{-n} = \overline{a + b}^{m-n}$; $\overline{a + b}^m \times \overline{a + b}^{-m} = \overline{a + b}^{m-m} = \overline{a + b}^0 = 1$.

DIVISION

Des quantitez algebriques incomplexes & complexes.

REGLE GENERALE.

35. ON écrira le diviseur au dessous du dividende en forme de fraction, & l'on prendra cette fraction pour le quotient de la division. En effet, puisque toute division numerique exprimée, comme on vient de dire, est égale à son quotient, par exemple $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{15}{3} = 5$, & quelle peut par consequent être prise pour son quotient; il en doit être de même des divisions algebriques. Ainsi pour diviser ab par c , l'on écrira $\frac{ab}{c}$; pour diviser $aa +$

bb par $c+d$, l'on écrira $\frac{aa+bb}{c+d}$; & c.

36. Mais comme il est toujours nécessaire de réduire les quantitez algebriques à leurs plus simples expressions lorsqu'il est possible, & que les divisions, ou fractions dont on vient de parler, n'y sont pas toujours réduites, il faut donner les regles nécessaires pour cet effet.

Il y a différentes manieres, ou plutôt, il y a des cas où il faut operer d'une certaine maniere ; d'autres, où il faut operer d'une autre maniere pour réduire les fractions, ou les divisions à leurs plus simples termes. Nous ne donnerons à présent que le cas où l'operation est celle qu'on a toujours nommée division ; les autres se trouveront ailleurs.

D I V I S I O N

Des quantitez incomplexes.

37. IL est évident (n°. 14 & 15) que lorsque le dividende est le produit du diviseur par une autre quantité quelconque, le quotient sera le dividende, après en avoir effacé le diviseur. Ainsi le quotient de ab divisé par a est b , c'est-à-dire que $\frac{ab}{a} = b$; le quotient de abc divisé par

ab est c , c'est à-dire que $\frac{abc}{ab} = c$; de même $\frac{a^3}{aa} = a$;

$\frac{a^3bb}{aaa} = ab$. Il en est ainsi des autres.

Il y a souvent des nombres autres que l'unité qui précèdent ou le dividende, ou le diviseur, & quelquefois tous les deux. Il faut aussi avoir égard aux signes. Voici la règle qu'il faut observer.

38. On divisera par les regles de la division numerique, le nombre qui précède le dividende par celui qui précède le diviseur, & (n°. 37), les lettres du dividende par celles du diviseur, & l'on donnera au quotient le signe + si le dividende & le diviseur ont tous deux le même signe + ou - ; & si l'un a + & l'autre -, l'on donnera

au quotient le signe —. Ainsi le quotient de $12ab$ par $3a$ est $4b$: car $\frac{12}{3} = 4$, & $\frac{ab}{a} = b$, & partant $\frac{12ab}{3a} = 4b$.

De même $\frac{12abc}{-4ac} = -3b$; $\frac{-15a^3bb}{3aab} = -5ab$; $\frac{-12a^3bb}{-3ab} = 4aab$. Il en est ainsi des autres.

39. Si le dividende & le diviseur sont semblables, & égaux, le quotient sera l'unité. Ainsi $\frac{a}{a} = 1$, $\frac{12ab}{12ab} = 1$. Ce qui suit de ce que toute quantité se mesure, ou se contient elle même une fois.

40. Il arrive souvent que les nombres se peuvent diviser, & que les lettres ne se peuvent pas diviser; & au contraire, auquel cas il faut diviser ce qui se peut diviser, & laisser le reste en fraction. Ainsi $\frac{12ab}{3c} = \frac{4ab}{c}$; $\frac{8abc}{3ab} = \frac{8c}{3}$.

41. Lorsque ni les nombres, ni les lettres ne se peuvent diviser, on écrit le diviseur au dessous du dividende en forme de fraction; & c'est en ce cas qu'il est nécessaire de prendre cette fraction pour le quotient de la division. Ainsi pour diviser a par b , l'on écrira $\frac{a}{b}$; pour diviser $3ab$ par $2c$, l'on écrira $\frac{3ab}{2c}$; pour diviser $-2ab$ par $3c$, l'on écrira $\frac{-2ab}{3c}$, ou $\frac{2ab}{-3c}$; pour diviser $5ab$ par $-2c$, l'on écrira $\frac{5ab}{-2c}$, ou $\frac{-5ab}{2c}$; pour diviser $-4ab$ par $-3c$, l'on écrira $\frac{-4ab}{-3c}$, ou $\frac{4ab}{3c}$. On trouvera ailleurs la raison des changemens de signes que l'on vient de faire.

Si l'on multiplie le quotient d'une division par le diviseur, il viendra la quantité à diviser : car la multiplication, & la division ont des effets contraires, aussi-bien que l'addition & la soustraction.

42. Il est clair (n°. 21 & 37) que pour diviser une puissance

INTRODUCTION. xvij

sance quelconque d'une quantité in complexe par une puissance quelconque de la même quantité, il n'y a qu'à soustraire l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.

Ainsi $\frac{a^3}{aa} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^2b^3}{a^2b} = a^{2-2} b^{3-1} = abb$;

$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^3}{4a^2} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$; $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a$;

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$; $\frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = 1$, &c.

D I V I S I O N

Des quantitez complexes.

43. **L**ORSQUE le dividende est le produit du diviseur par quelqu'autre quantité, il est clair que la division se fera toujours exactement aussi-bien que celle des quantitez in complexes.

Or il est souvent aisé de voir si une quantité que l'on veut diviser par une autre quantité, est le produit de la quantité qui doit être le diviseur par une troisième quantité; & alors le quotient sera cette troisième quantité. Ainsi $ax - bx$ divisée par $a - b$, donnée au quotient x : car $ax - bx$ est le produit de $a - b$ par x ; & $ax - bx$ divisée par x , donne au quotient $a - b$. Pareillement

$\frac{aaxx - bbxx}{aa - bb} = xx$, & $\frac{aaxx - bbxx}{xx} = aa - bb$, &c.

44. Lorsqu'on ne peut pas aisément voir si une quantité complexe peut être divisée par une autre quantité complexe, il faut l'examiner par la regle qui suit, qui est celle qu'on appelle division.

45. Pour faire plus facilement la division des quantitez complexes, on examine dans les deux quantitez que l'on veut diviser l'une par l'autre, qu'elle est la lettre qui se trouve le plus fréquemment avec des dimensions différentes; & l'on écrit dans l'une & dans l'autre quantité le terme, où cette lettre a plus de dimensions, le premier, & ensuite les autres termes, selon l'ordre des puissances de la même lettre. Quelques-uns appellent cette lettre, lettre dominante.

R E G L E.

46. ON écrit le diviseur à la gauche du dividende ; & suivant les regles de la division des quantitez incomplexes, on divise le premier terme du dividende par le premier du diviseur, & l'on écrit le resultat, ou quotient à la droite du dividende. On multiplie tous les termes du diviseur par le quotient ; & l'on soustrait le produit du dividende, ce qui se fait (n^o. 13) en écrivant le même produit au-dessous du dividende avec des signes contraires ; & on fait ensuite la réduction, en regardant le dividende & ce produit comme une seule quantité.

On divise de nouveau les quantitez qui viennent après la réduction par le même diviseur, ce qui donne un nouveau terme au quotient ; & on acheve cette seconde operation comme on a fait la premiere. On réitere encore la même operation autant de fois qu'il est nécessaire, ou jusqu'à ce que la réduction devienne nulle, ou égale à zero, qui arrive toujours lorsque la quantité à diviser est le produit du diviseur par une troisième quantité, qui est le quotient de la division. Les Exemples éclairciront la regle.

E X E M P L E I.

47. SOIT $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ à diviser par $a - b$. Ayant écrit le dividende & le diviseur comme on vient de dire, l'on opere en cette sorte en prenant a pour la lettre dominante.

<i>Diviseur.</i>	<i>Dividende.</i>	<i>Quotient.</i>
$a - b$	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$a^2 - 2ab + bb.$
Prod. $\left\{ \begin{array}{l} - a^3 + aab \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{l} - a^3 + aab \\ \hline 1^{\text{e}} \text{ Rédu. } A \quad 0 - 2aab + 3abb - b^3 \\ \text{Produit.} \quad + 2aab - 2abb \end{array} \right\}$	
	$\left. \begin{array}{l} 1^{\text{e}} \text{ Rédu. } A \quad 0 - 2aab + 3abb - b^3 \\ \text{Produit.} \quad + 2aab - 2abb \\ \hline 2^{\text{e}} \text{ Rédu. } B \quad 0 + abb - b^3 \\ \text{Produit.} \quad - abb + b^3 \end{array} \right\}$	
	$\left. \begin{array}{l} 2^{\text{e}} \text{ Rédu. } B \quad 0 + abb - b^3 \\ \text{Produit.} \quad - abb + b^3 \\ \hline 3^{\text{e}} \text{ Rédu. } C \quad 0 \quad 0 \end{array} \right\}$	

Le premier terme $+ a^3$ du dividende divisé par le premier $+ a$ du diviseur donne pour quotient $+ aa$, & multipliant le diviseur $a - b$ par le quotient $+ aa$, l'on a $a^3 - aab$, & ayant écrit $- a^3 + aab$ au-dessous du dividende, & fait la Réduction, l'on aura la quantité A , que j'appelle premiere Réduction.

Le premier terme $- aab$ de la premiere Réduction A divisé par le premier $+ a$ du diviseur, donne pour quotient $- 2ab$, & multipliant le diviseur $a - b$ par le nouveau terme du quotient $- 2ab$, l'on a $- 2aab + 2abb$; & ayant écrit $+ 2aab - 2abb$ au-dessous de la premiere Réduction A , l'on aura la seconde Réduction B .

Le premier terme $+ abb$ de la seconde Réduction B , divisé par le premier $+ a$ du diviseur donne pour quotient $+ bb$; & multipliant le diviseur $a - b$ par $+ bb$, l'on a $a + aab - b^3$; & ayant écrit $- aab + b^3$ au dessous de la seconde Réduction, l'on aura zero pour la troisieme Réduction, qui marque que la division est faite, & par

consequent que $\frac{a^3 - 2aab + 3abb - b^3}{a - b} = aa - 2ab + bb,$

EXEMPLE II.

48. Diviseur.	Dividende.	Quotient.
$aa - ab + cd.$ Produit.	$\left. \begin{array}{l} a^4 - aabb + 2abcd - ccd \\ - a^4 + a^3b - aacd \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} aa + ab - cd. \\ \end{array} \right\}$
Premiere Réd. \circ	$+ a^3b - aabb - aacd + 2abcd - ccd$	$ccdd$
Produit.	$- a^3b + aabb$	$- abcd$
Seconde Réduct. \circ	\circ	$- aacd + abcd - ccd$
Produit.	\circ	$+ aacd - abcd + ccd$
Troisieme Réduction.	\circ	\circ
Donc	$\frac{a^4 - aabb + 2abcd - ccd}{aa - ab + cd}$	$= aa + ab - cd.$

c ij

E X E M P L E III.

49. Diviseur.	Dividende.	Quotient.
$yy - aa - bb.$	$\left. \begin{array}{r} y^6 + aay^4 + b^4yy - a^6 \\ - 2bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ - aab^4 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{r} y^4 + 2aayy + a^4 \\ - bbyy + aabb. \end{array} \right\}$
Produit.	$\left\{ \begin{array}{r} -y^6 + aay^4 \\ + bby^4 \end{array} \right\}$	
1 ^{re} Réduct.	$\left\{ \begin{array}{r} 0 + 2aay^4 + b^4yy - a^6 \\ - bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ - aab^4 \end{array} \right\}$	
Produit.	$\left\{ \begin{array}{r} -2aay^4 + 2a^4yy \\ + 2aabbbyy \end{array} \right\}$	
2 ^e Réduction.	$\left\{ \begin{array}{r} -bby^4 + b^4yy - a^6 \\ + a^4yy - 2a^4bb \\ + 2aabbbyy - aab^4 \end{array} \right\}$	
Produit.	$\left\{ \begin{array}{r} + bby^4 - aabbbyy \\ - b^4yy \end{array} \right\}$	
3 ^e Réduct.	$\left\{ \begin{array}{r} 0 + a^4yy - a^6 \\ + aabbbyy - 2a^4bb \\ - aab^4 \end{array} \right\}$	
Produit.	$\left\{ \begin{array}{r} -a^4yy + a^6 \\ + a^4bb \end{array} \right\}$	
4 ^e Réduct.	$\left\{ \begin{array}{r} + aabbbyy - a^4bb \\ - aab^4 \end{array} \right\}$	
Produit.	$\left\{ \begin{array}{r} -aabbbyy + a^4bb \\ + aab^4 \end{array} \right\}$	
5 ^e Réduct.	$\left\{ \begin{array}{r} 0 \\ 0 \end{array} \right\}$	
Donc	$\begin{array}{r} y^4 + aay^2 + b^4yy - a^6 \\ - 2bby^4 - a^4yy - 2a^4bb \\ - aab^4 \\ \hline yy - aa - bb \end{array} = y^4 + 2aayy + a^4 \\ - bbyy + aabb.$	

EXEMPLE IV.

50. *Diviseur.* $3xx - aa$. *Dividende.* $9x^3 + 12ax^2 - 4a^3x - a^4$. *Quotient.* $3xx + 4ax - aa$.

Produit. $\left. \begin{array}{r} 9x^3 + 12ax^2 - 4a^3x - a^4 \\ - 9x^3 + 3aaxx \end{array} \right\}$

1^{re} Réduction. $\circ + 12ax^2 + 3aaxx - 4a^3x - a^4$

Produit. $\begin{array}{r} - 12ax^2 \qquad \qquad \qquad + 4a^3x \end{array}$

2^e Réduction. $\circ + 3aaxx - a^4$

Produit. $\begin{array}{r} - 3aaxx + a^4 \end{array}$

3^e Réduction. $\circ \qquad \qquad \qquad \circ$

Donc $\frac{9x^3 + 12ax^2 - 4a^3x - a^4}{3xx - aa} = 3xx + 4ax + aa$.

51. Il y a des divisions qui ne se font qu'en partie, ce qui arrive lorsqu'il vient une Réduction où toutes les lettres du diviseur ne se trouvent plus, ou bien ne s'y trouvent point dans l'état & dans l'ordre qu'elles gardent dans le diviseur: & en ce cas, l'on écrit le diviseur au-dessous de la dernière Réduction, ce qui forme une fraction que l'on ajoute au Quotient, comme on va voir dans l'Exemple qui suit.

EXEMPLE V.

52. *Diviseur.* $ac - dd$. *Dividende.* $aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4$. *Quotient.* $ab + cc$.

Produit. $\left. \begin{array}{r} aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4 \\ - aabc \qquad \qquad \qquad + abdd \end{array} \right\}$

1^{re} Redu. $\circ + ac^3 \qquad \circ - ccdd + d^4$

Produit. $\begin{array}{r} - ac^3 \qquad \qquad \qquad + ccdd \end{array}$

2^e Réduction. $\circ \qquad \qquad \qquad \circ + d^4$

Donc $\frac{aabc + ac^3 - abdd - ccdd + d^4}{ac - dd} = ab + cc + \frac{d^4}{ac - dd}$.

53. Il y a des divisions que l'on pourroit continuer, même à l'infini, quoique tous les termes du diviseur ne se trouvent point dans la dernière Réduction: mais le Quotient deviendroit plus composé, & la division de-

viendroit inutile ; c'est pourquoi , dans ces sortes de divisions , il en faut demeurer à l'endroit , où le Quotient est le plus simple qu'il puisse être.

54. Il arrive aussi fort souvent que les coefficients , ou les nombres qui précèdent les termes , ou quelqu'un des termes du dividende , ou du diviseur , empêchent que la division ne se fasse , quand même toutes les lettres seroient dans l'un & dans l'autre disposées de manière que la division se pût faire.

55. Il y a aussi des divisions qui ne se peuvent point du tout faire ; ce qui arrive lorsqu'aucun des termes du diviseur ne se trouve point tout entier dans aucun de ceux du dividende : & alors on écrit le diviseur au-dessous du dividende , ce qui forme une fraction que l'on prend pour le Quotient de la division , comme on a dit n°. 34.

L'on a souvent besoin de connoître tous les diviseurs d'un nombre donné , & d'une quantité algébrique donnée pour choisir celui d'entr'eux qui convient à de certaines opérations que l'on est obligé de faire ; c'est pourquoi nous en allons donner ici la Méthode.

M É T H O D E.

Pour trouver tous les Diviseurs d'un nombre donné.

56. **I**L faut diviser le nombre donné par 2 , s'il est possible , & autant de fois qu'il est possible ; ensuite diviser le dernier Quotient par 3 , s'il est possible ; & autant de fois qu'il est possible ; de même par 5 , par 7 , par 9 , &c. jusqu'à ce que le dernier Quotient soit l'unité , ou que le diviseur devienne le nombre proposé , auquel cas , il n'a aucun diviseur que lui-même ; & ayant écrit dans une rangée de haut en bas tous les diviseurs dont on s'est servi , on multipliera le premier diviseur par le 2^e , & on écrira le produit à la droite du 2^e . On multipliera ensuite les deux premiers diviseurs , & le produit qu'on a déjà trouvé par le troisième diviseur , & l'on écrira les Produits vis à vis le même troisième diviseur ; on multipliera de même tout ce qui est au-dessous du 4^e divi-

INTRODUCTION. xxij

leur par le même 4^e diviseur, & l'on écrira les Produits à sa droite, & ainsi de suite, & tous ces Produits seront autant de diviseurs du nombre proposé.

E X E M P L E.

Soit le nombre 150 dont il faut trouver tous les diviseurs.

Je divise 150	A	B
par 2, & j'écris	150	2.
le Quotient 75	75	3. 6.
au-dessous de	25	5. 10. 15. 30.
A, & le divi-	5	5. 25. 50. 75. 150.
seur 2 au-des-	1	
sous de B;		

Je divise 75 par 3, & j'écris le Quotient 25, & le diviseur 3 sous A, & sous B; je divise 25 par 5, & j'écris le Quotient 5, & le diviseur 5, sous A & sous B; je divise 5 par 5, & j'écris le Quotient 1, & le diviseur 5 sous A, & sous B. Cela fait, je multiplie le premier diviseur 2 par le second 3, & j'écris le Produit 6 à côté de 3. Je multiplie tout ce qui est au-dessus du 3^e diviseur 5, par lui-même, & j'écris les Produits 10, 15, 30, à sa droite; enfin je multiplie tout ce qui est au-dessus du 4^e diviseur 5, par lui-même, & j'écris les Produits 25, 50, 75, & 150; (car on néglige 10, 15 qui s'y trouve déjà) comme on les voit. Il est clair que tous ces nombres qui sont du côté de B peuvent diviser sans reste, le nombre donné 150.

57. C'est la même règle pour les quantitez algebriques. Soit par exemple, la quantité $a^3 + aabb$, dont il faut trouver tous les diviseurs.

	A	B
$a^3 + aabb$.	a .	a .
$aab + abb$.	a .	aa .
$ab + bb$.	b .	aab .
$a + b$.	$a + b$.	$aa + ab$.
		$a^2 + aab$.
		$ab + bb$.
		$aabb + abb$.
		$a^3b + aabb$.
		1.

Je divise $a^3 + aabb$ par a , & j'écris le Quotient $aab + abb$,

sous A , & le diviseur a sous B . Je divise $aab + abb$ encore par a , & j'écris le Quotient $ab + ba$, & le diviseur b sous A , & sous B . Je divise $ab + bb$ par b , & j'écris le Quotient $a + b$, & le diviseur b sous A , & sous B . Enfin je divise $a + b$ par $a + b$; & j'écris le Quotient 1, & le diviseur $a + b$, sous A & sous B . J'acheve l'operation comme celle des nombres, & je trouve tous les diviseurs de la quantité $a^3 + aabb$ au-dessous de B .

R E S O L U T I O N.

Des puissances, ou de l'extraction des racines des quantitez algebriques.

58. **E**XTRAIRE la racine d'une puissance, ou d'une quantité algebrique, c'est trouver, par une operation contraire à celle de la formation des puissances, une quantité plus simple que la proposée, qui étant multipliée par elle-même, autant de fois qu'il est necessaire, produise la puissance ou la quantité proposée.

Il y a autant de sortes de racines, qu'il y a de puissances, & l'on donne à chaque racine le nom de la puissance à laquelle elle se rapporte. Ainsi la quantité qu'il ne faut multiplier qu'une fois par elle-même pour produire la quantité ou la puissance dont elle est la racine, est nommée *racine quarrée*, ou seconde racine; celle qu'il faut multiplier deux fois par elle-même, pour produire la puissance dont elle est la racine, est appelée *racine cube*, ou troisieme racine; celle qu'il faut multiplier trois fois, est nommée *racine quarrée quarrée*, ou quatrieme racine; celle qu'il faut multiplier quatre fois *racine quarrée cube*, ou cinquieme racine; celle qu'il faut multiplier cinq fois, *racine cube cube*, ou sixieme racine, &c.

On se sert de ce caractere $\sqrt{\quad}$ qu'on appelle *signe radical*, pour signifier le mot de *racine*: mais pour le déterminer à signifier une telle racine, on y joint l'exposant de la puissance à laquelle se rapporte la racine en question, & cet exposant est alors appelé exposant du signe radical. Ainsi $\sqrt{\quad}$, ou simplement $\sqrt{\quad}$, signifie racine

cine quarrée, ou seconde racine; $\sqrt{\quad}$, signifie racine cube, quatrième racine, &c. De sorte que \sqrt{ab} , ou $\sqrt{aa+bb}$, $\sqrt{aa+2ab+bb}$, signifie qu'il faut extraire la racine quarrée de ab , ou de $aa+bb$, ou de $aa+2ab+bb$, &c.

Il y a des quantitez dont la racine proposée s'extrait exactement; d'autres, dont on ne la peut extraire qu'en partie; & d'autres, dont on ne la peut point du tout extraire.

59. Les quantitez dont on ne peut extraire exactement la racine, & qu'on est obligé d'exprimer par le moyen du signe radical, sont nommées, *sourdes*, ou *irrationnelles*, & celles qui ne sont affectées d'aucun signe radical, sont nommées *rationnelles*. Ainsi \sqrt{ab} , $\sqrt{aa+bb}$, sont des quantitez irrationnelles, parceque l'on n'en peut pas extraire la racine quarrée; $\sqrt[3]{aab}$ est une quantité irrationnelle, parceque l'on n'en peut pas extraire la racine cube; &c.

EXTRACTION

Des racines des quantitez incomplexes

60. PUISQUE (n^o. 22.) pour élever une quantité in-complexe à une puissance donnée, il faut multiplier les exposans de cette quantité par l'exposant de la puissance proposée; il est clair que pour extraire la racine proposée d'une quantité in-complexe, il n'y a qu'à diviser les exposans de cette quantité par l'exposant du signe radical convenable; ou, ce qui revient au même, multiplier les exposans de la quantité proposée par une fraction dont le numerateur soit l'unité, & le dénominateur soit l'exposant du signe radical dont il s'agit, c'est-à-dire, par $\frac{1}{2}$, s'il s'agit de la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, s'il s'agit de la racine cube; $\frac{1}{4}$, s'il s'agit de la racine quarrée quarrée, &c: car les dénominateurs 2, 3 & 4 sont les exposans des si-

gnes radicaux $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, $\sqrt[4]{\quad}$, &c. L'on rend par-là l'operation de l'extraction des racines, semblable à celle de la formation des puissances, & l'on a des exposans pour les racines aussi bien que pour les puissances: car $\frac{1}{2}$ est l'exposant de la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, l'exposant de racine cube; $\frac{1}{4}$, l'exposant de la racine quarrée quarrée, &c. & l'on peut par conséquent énoncer l'extraction des racines, en disant qu'il faut élever une quantité donnée à la puissance $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. au lieu de dire qu'il en faut extraire la racine quarrée, cube, quarrée quarrée, &c.

Si après la multiplication des exposans de la quantité proposée par les fractions dont on vient de parler, les exposans qui sont alors fractionnaires, se peuvent tous réduire en entier, la racine proposée sera une quantité rationnelle; si une partie de ces exposans se peut réduire en entier, & que l'autre partie demeure fractionnaire, la racine ne sera extraite qu'en partie, & l'on mettra la partie rationnelle devant le signe radical, & la partie irrationnelle après; si tous ces exposans demeurent fractionnaires, la racine ne sera point extraite, & l'on se contentera de mettre le signe radical devant la quantité proposée; enfin si les exposans fractionnaires qui ne peuvent être réduits en entier surpassent l'unité, la puissance de la lettre dont ils sont exposans, sera en partie rationnelle, & en partie irrationnelle. Il faudra operer sur les coëfficiens, comme sur les lettres, en y employant les extractions numeriques des racines, & la Méthode de trouver tous les diviseurs d'un nombre, expliquée n^o. 56. Tout ce qu'on vient de dire sera éclairci par les Exemples qui suivent.

E X E M P L E S.

61. S O I T $a^2 b^4 c^6$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{2}$; ayant multi-

plié les exposans 2, 4 & 6 par $\frac{1}{2}$, l'on aura $a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{6}{2}}$, ou
 ou ab^2c^3 après avoir réduit les exposans fractionnaires en
 entier, de sorte que $\sqrt{a^2b^4c^6} = ab^2c^3$, ce qui est évident.

De même, $\sqrt{a^2b} = ab^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{b}$: car a est la racine de
 aa , ou a^2 , & $b^{\frac{1}{2}}$ est la même chose que \sqrt{b} ; $\sqrt{ab} =$
 $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$; c'est-à-dire que \sqrt{ab} est une quantité toute
 irrationnelle; $\sqrt{a^3b} = a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = (n^{\circ} 23.)$

$a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{ab}$; $\sqrt{72a^3b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$: car il est clair par
 les Exemples précédens, que $\sqrt{a^3b^3} = ab\sqrt{ab}$, & je dé-
 montre que $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ en cette sorte. Si l'on cherche
 (n^o. 56) tous les diviseurs de 72, & qu'on examine tous
 les quarrés qui s'y rencontrent (s'il s'agissoit de la racine
 cube, il faudroit examiner tous les cubes, & ainsi des
 autres racines) on trouvera que 36 est le plus grand.

Or $\frac{72}{36} = 2$ & $36 \times 2 = 72$; c'est pourquoi $\sqrt{72}$ peut être
 regardée comme le produit de $\sqrt{36} \times \sqrt{2}$: mais $\sqrt{36} = 6$;
 donc $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, & partant $\sqrt{72a^3b^3} = 6ab\sqrt{2ab}$. On
 trouvera de même que $\sqrt{12aab} = 2a\sqrt{3b}$, & que $\sqrt{6aabc} =$
 $a\sqrt{6bc}$; parceque 6 ne peut être divisé par aucun quarré.
 Il en est ainsi des autres.

EXTRACTION

Des racines des Polynomes.

62. **L**A Méthode d'extraire les racines des Polynomes,
 selon la maniere ordinaire, est semblable à celle d'extrai-
 re la racine des nombres,

EXEMPLE I.

SOIT la quantité $aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$;
dont il faut extraire la racine quarrée.

<i>Diviseurs.</i>	<i>Quantité proposée.</i>	<i>Racine, ou Quot.</i>
	$aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc.$	$(a + b + c.$
	$\underline{aa.}$	
1. $2a + b.$	$A. \quad \circ \quad +2ab + bb + 2ac + 2bc + cc$	
	$\quad \quad \underline{-2ab - bb}$	
2. $2a + 2b + c.$	$B. \quad \quad \circ \quad \circ + 2ac + 2bc + cc$	
	$\quad \quad \quad \quad \underline{-2ac - 2bc - cc}$	
	$C. \quad \quad \quad \quad \quad \circ \quad \circ \quad \circ.$	

Je dis, le premier terme aa est un quarré, dont la racine est a que j'écris au Quotient, & je soustrais le quarré de a qui est aa du premier terme aa de la quantité proposée, en l'écrivant au-dessous avec le signe $-$. Je réduis à la maniere de la division la quantité proposée, & le quarré soustrait, & j'écris la Réduction A au-dessous d'une ligne.

Je double le Quotient a , ce qui me donne $2a$ que j'écris à la gauche de la Réduction A , & qui fait partie du premier diviseur. Je divise le premier terme $+2ab$ de la quantité A par $2a$; ce qui me donne $+b$ que j'écris au Quotient, & à la droite du diviseur $2a$, & j'ai le premier diviseur complet $2a + b$ que je multiplie par le nouveau Quotient b , & j'ai plus $2ab + bb$ que je soustrais de la quantité A , en l'écrivant au-dessous avec des signes contraires, & la Réduction de ces deux quantitez me donne la quantité B . Je double le Quotient $a + b$, & j'ai $2a + 2b$ pour une partie du nouveau diviseur que j'écris à la gauche de B . Je divise de nouveau le premier terme $2ac$ de la quantité B par $+2a$, ce qui me donne $+c$ que j'écris au Quotient, & à la droite du nouveau diviseur $2a + 2b$; ce qui fait $2a + 2b + c$ pour le second diviseur complet. Je multiplie ce second diviseur $2a$

$+ 2b + c$ par le nouveau Quotient c , & j'ai $2ac + 2bc + cc$ que j'écris au-dessous de la quantité B avec des signes contraires ; & réduisant ces deux quantitez je trouve zero pour la troisième Réduction ; d'où je conclus que l'operation est achevée, & que par consequent,

$$\sqrt{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc} = a + b + c.$$

E X E M P L E II.

S O I T la quantité $9aa - 12ab + 4bb$ dont il faut extraire la racine quarrée.

<i>Diviseurs.</i>	<i>Quantité proposée.</i>	<i>Racine ou Quotient.</i>
	$9aa - 12ab + 4bb.$	$(3a - 2b.$
	$- 9aa$	
$6a - 2b.$	$A. \circ - 12ab + 4bb$	
	$+ 12ab - 4bb$	
$B.$	$\circ \qquad \qquad \circ$	

Le premier terme $9aa$ étant un quarré dont la racine est $3a$; j'écris $3a$ au Quotient, & son quarré $9aa$ au-dessous de $9aa$ avec le signe $-$, & la premiere Réduction est la quantité A . Je double le Quotient $3a$, ce qui me donne $6a$, qui font partie du premier diviseur, & que j'écris à la gauche de la quantité A . Je divise $- 12ab$ par $+ 6a$, ce qui me donne $- 2b$ que j'écris au Quotient & à la droite de $6a$, & j'ai par ce moyen le diviseur complet $6a - 2b$. Je multiplie $6a - 2b$ par $- 2b$, ce qui me donne $- 12ab + 4bb$, & j'écris $+ 12ab - 4bb$ au-dessous de la quantité A . Je réduis ces deux dernieres quantitez, & la Réduction B qui se trouve égale à zero, fait voir que la quantité proposée est un quarré dont la racine est $3a - 2b$, c'est-à-dire, que $\sqrt{9aa - 12ab + 4bb} = 3a - 2b.$

S'il venoit une Réduction qui ne pût être divisée par le double du Quotient, ce seroit une marque que la quantité proposée ne seroit point quarrée; & il faudroit alors se contenter de la mettre sous le signe radical. Par

exemple, si on vouloit extraire la racine quarrée de $aa + bb$, l'on trouveroit que la racine de aa est a : mais on ne pourroit diviser la Réduction bb par $2a$, ce qui feroit voir que $aa + bb$, n'est point un quarré; c'est pourquoy il faudroit se contenter d'en exprimer la racine en cette sorte $\sqrt{aa + bb}$. Il en est ainsi des autres.

Au reste, il est aisé de connoître par la formation des puissances, ou lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul algebrique, si une quantité proposée est quarrée, ou un cube, &c. & d'en extraire par conséquent la racine sans le secours d'aucune operation, ou par la seule inspection des termes de la quantité proposée.

63. Mais sans cela, & sans le secours des Règles que nous venons de donner, l'on peut, avec toute la facilité possible extraire toutes sortes de racines, quarrées, cubes, quarrées quarrées, &c. par le moyen de la formule generale proposée n°. 30: car pour cela il n'y a qu'à regarder les quantitez dont on veut extraire une racine quelconque, comme des quantitez qu'il faut élever à une puissance dont l'exposant soit celui de la racine qu'on veut extraire, c'est-à-dire, que cet exposant soit $\frac{1}{2}$, si c'est la racine quarrée; $\frac{1}{3}$, si c'est la racine cube; $\frac{1}{4}$, si c'est la racine quarrée quarrée, &c. ce qui est facile en suivant ce qui est prescrit n°. 31, comme on va voir par les Exemples qui suivent.

E X E M P L E I.

SOIT la quantité $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ dont il faut extraire la racine cube, ou ce qui est la même chose, qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{3}$.

Ayant fait $a^3 = p$, $- 3aab + 3abb - b^3 = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes, $p^m + mp^{m-1}q$ de la formule generale proposée n°.

30 ; (car les autres termes sont inutiles, lorsque les racines qu'on veut extraire, sont rationnelles ;) l'on aura $a^{3m} + ma^{3m-3} \times -3aab + 3abb - b^3$, & faisant encore $m = \frac{1}{3}$, l'on aura $a^1 + \frac{1}{3} a^{-2} \times -3aab + 3abb - b^3$, ou $a - a^{-2+2}b + a^{-2+1}bb - \frac{1}{3} a^{-2}b^3$: mais parceque le second terme $-a^{-2+2}b = -a^0b = 1b = b$; le troisieme & quatrieme terme sont nuls. Ainsi l'on a $a - b$ pour la racine cherchée, c'est-à-dire, que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^3 - 3aab + 3abb - b^3}} ; \text{ ou } \sqrt[3]{a^3 - 3aab + abb - b^3} = a - b.$$

EXEMPLE II.

Soit la quantité $aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{2}$.

Ayant fait aa ou $a^2 = p$, $+ 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes de la Formule $p^m + mp^{m-1}q$, l'on aura $a^{2m} + ma^{2m-2} \times 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc$, ou en en fai-

$$\text{fant } m = \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2} a^{1-2} \times 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc,$$

$$\text{ou } a + a^{1-2+1}b - a^{1-2+1}c + \frac{1}{2} a^{1-2}bb - a^{1-2}$$

$$bc + \frac{1}{2} a^{1-2}cc. \text{ Mais parceque le second \& troisieme}$$

terme deviennent $+b$, & $-c$; il suit que tous les autres termes, où b , & c se rencontrent sont nuls. Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc}} ; \text{ ou}$$

$$\sqrt{aa + 2ab - 2ac + bb - 2bc + cc} = a + b - c.$$

EXEMPLE III.

SOIT la quantité $9aa + 12ab + 4bb$ dont il faut extraire la racine quarrée, ou qu'il faut élever à la puissance $\frac{1}{2}$.

Ayant supposé $9aa$, ou $9a^2 = p$, & $12ab + 4bb = q$, & mettant ces valeurs de p & de q dans les deux premiers termes de la Formule $p^m + mp^{m-1}q$, l'on aura $9^m a^{2m} +$

$$m9^{m-1} a^{2m-2} \times 12ab + 4bb, \text{ ou en faisant } m = \frac{1}{2}, 9^{\frac{1}{2}} \times$$

$$a^{1+\frac{1}{2}} \times 9^{-\frac{1}{2}} \times 9^{-\frac{1}{2}} a^{-1} \times 12ab + 4bb, \text{ ou } 9^{\frac{1}{2}} a + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}}$$

$$a^{-1} \times 12ab + 4bb: \text{ mais } 9^{\frac{1}{2}} \text{ ou } \sqrt{9} = 3; \text{ donc } 3a + \frac{1}{2}$$

$$\times \frac{1}{3} a^{-1} \times 12ab + 4bb, \text{ ou } 3a + \frac{1}{6} a^{-1} \times 12ab + 4bb, \text{ ou}$$

$$3a + \frac{12}{6} a^{-1+1} b + \frac{4}{6} a^{-1} bb, \text{ ou } 3a + 2a^0 b + \frac{2}{3} a^{-1} \times$$

bb : mais le second terme $2a^0 b = 1b$; c'est pourquoi ce second terme est le dernier, & le troisième est nul. Ainsi

$$\sqrt{9aa + 12ab + 4bb} = 3a + 2b,$$

REMARQUE.

64. SI dans aucun terme la valeur de m , exposant de p , ne se trouvoit point $= 0$, la racine de la quantité proposée seroit irrationnelle, & l'extraction se pourroit continuer à l'infini; ce qu'on appelle approximation des racines: mais cela n'est point nécessaire pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie: car lorsque la racine d'une quantité est irrationnelle, on se contente de l'exprimer par le moyen du signe radical qui lui convient, comme on a déjà dit, & comme on pourra voir dans la suite.

Pour

INTRODUCTION. xxxiiij

○ Pour s'asseurer si on a bien extrait une racine, il est bon de l'élever à sa puissance : car s'il vient la quantité proposée, l'extraction aura été bien faite. Par exemple, l'on vient de trouver $3a + 2b$ pour la racine quarrée de $9aa + 12ab + 4bb$. Or si l'on multiplie $3a + 2b$ par $3a + 2b$, l'on trouvera $9aa + 12ab + 4bb$ qui est la quantité proposée, c'est pourquoi l'extraction a été bien faite.

R E D U C T I O N

Des quantitez irrationelles à leurs plus simples expressions.

65. IL y a des quantitez complexes, comme d'incomplexes, dont on ne peut point extraire exactement la racine demandée : mais il arrive souvent que ces quantitez sont le produit de la puissance dont on veut extraire la racine par quelqu'autre quantité ; & en ce cas on peut extraire la racine en partie, en mettant devant le signe radical la racine de cette puissance, & l'autre quantité sous le signe radical. Par exemple, il est aisé de voir que $aab + aac$ n'est point un quarré, & qu'on n'en peut par consequent extraire la racine quarrée, qu'en l'écrivant sous le signe radical en cette sorte $\sqrt{aab + aac}$: mais on voit aisément que $aab + aac$ est le produit de aa qui est un quarré, par $b + c$, ou que $\sqrt{aab + aac} = \sqrt{aa} \times \sqrt{b + c}$: or $\sqrt{aa} = a$; donc $\sqrt{aab + aac} = a \times \sqrt{b + c} = a\sqrt{b + c}$; & c'est ce qu'on appelle extraire une racine en partie, ou plutôt ce qu'on appelle réduire une quantité irrationelle à sa plus simple expression, ce qu'on doit toujours faire quand cela se peut, soit que les quantitez soient complexes ou incomplexes.

Lorsqu'on ne voit pas par la seule inspection des termes, si une quantité irrationelle complexe ou incomplexe peut être réduite à une expression plus simple, on l'examinera en cherchant (n^o. 56 ou 57) tous les diviseurs qui la peuvent exactement diviser ; & s'il s'en trouve quelqu'un qui soit une puissance du même nom que la racine qu'on

e

veut extraire, la quantité proposée se pourra réduire à une plus simple expression: car elle pourra être regardée comme le produit de cette puissance, & du quotient qui vient en la divisant par la même puissance. Par exemple, s'il faut extraire la racine quarrée de $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$, en cherchant tous les diviseurs de cette quantité, on trouvera que $aa - 2ab + bb$, qui est un quarré, en est un, & qu'en divisant $a^3 - 3aab + 3abb - b^3$ par $aa - 2ab + bb$, il vient au quotient $a - b$; c'est pourquoy $\sqrt{a^3 - 3aab + 3abb - b^3} = \sqrt{aa - 2ab + bb} \times \sqrt{a - b}$: or $\sqrt{aa - 2ab + bb} = a - b$; donc $\sqrt{a^3 - 3aab + 3abb - b^3} = a - b \sqrt{a - b}$.

Lorsqu'on trouve plusieurs diviseurs qui sont des puissances de même nom que les racines qu'on veut extraire, on ne se servira que du plus grand.

66. On ajoute, on soustrait, on multiplie, & on divise les quantitez irrationelles comme les rationelles; & ces 4. operations se font de la même maniere pour les unes & pour les autres: mais pour une plus grande facilité, il les faut auparavant réduire à leurs expressions les plus simples; & comme les quantitez irrationelles ne different des rationelles que par le signe radical qui caractérise de maniere celles qu'il précède, que quand elles contiendroient les mêmes lettres que celles qui le précédent, elles ne leur seroient pas pour cela semblables; de sorte que les quantitez qui sont hors du signe radical, ne doivent point être mêlées dans aucune de ces quatre operations, avec celles qui sont sous le signe radical.

Il faut néanmoins remarquer que les quantitez irrationelles sont semblables, lorsque celles qui sont sous les signes radicaux, ne different en rien du tout les unes des autres, & lorsque celles qui sont hors des signes radicaux ne different de même en rien du tout, ou ne different que par leurs coëfficiens. Ainsi $3a\sqrt{a}$ & $2a\sqrt{a}$; $3a\sqrt{a+b}$;

& $a\sqrt{a+b}$; $\frac{a}{b}\sqrt{ax-xx}$, & $\frac{3a}{b}\sqrt{ax-xx}$, sont des

INTRODUCTION.

xxxv

quantitez irrationelles semblables. On suppose que le signe radical soit le même, ce qui arrive toujours dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

A D D I T I O N

Des quantitez irrationelles.

67. **O**N les écrira de suite, ou au-dessous les unes des autres avec les signes qu'on leur trouve, & lorsqu'elles seront semblables, on en fera (n°. 11) la réduction comme si c'étoit des quantitez rationnelles. Ainsi pour ajouter $2a\sqrt{b}$ avec $3a\sqrt{b}$, l'on écrira $2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{b}$, qui se réduit à $5a\sqrt{b}$. Pour ajouter $3a\sqrt{b}$ avec $2c\sqrt{b}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} + 2c\sqrt{b}$, & il est indifférent de laisser ces quantitez en cet état, ou de les écrire en cette sorte $3a + 2c\sqrt{b}$. Pour ajouter $a\sqrt{ax - xx}$ avec $b\sqrt{ax - xx}$, l'on écrira $a\sqrt{ax - xx} + b\sqrt{ax - xx}$, ou $a + b\sqrt{ax - xx}$. Pour ajouter $3a\sqrt{b}$ avec $2c\sqrt{d}$, l'on écrira $3a\sqrt{b} + 2c\sqrt{d}$ qui ne peut point avoir d'autre expression.

S O U S T R A C T I O N

Des quantitez irrationelles.

68. **O**N les écrira de suite en changeant les signes de celles qui doivent être soustraites; & lorsqu'elles seront semblables. on en fera (n°. 11) la réduction comme si c'étoit des quantitez rationnelles. Ainsi pour soustraire $3a\sqrt{b}$ de $5a\sqrt{b}$, l'on écrira $5a\sqrt{b} - 3a\sqrt{b}$ qui se réduit à $2a\sqrt{b}$. Pour soustraire $3a\sqrt{2b}$ de $5b\sqrt{2b}$, l'on écrira $5b\sqrt{2b} - 3a\sqrt{2b}$, ou $5b - 3a\sqrt{2b}$. Pour soustraire $-2b\sqrt{ax - xx}$ de $3b\sqrt{ax - xx}$, l'on écrira $3b\sqrt{ax - xx} + 2b\sqrt{ax - xx}$, qui se réduit à $5b\sqrt{ax - xx}$. Pour soustraire $2c\sqrt{d}$ de $3a\sqrt{b}$ l'on écrira $3a\sqrt{b} - 2c\sqrt{d}$, qui ne peut avoir d'autre expression.

MULTIPLICATION

Des quantitez irrationnelles.

69. Si les quantitez que l'on veut multiplier sont complexes, l'on multipliera la partie rationnelle par la rationnelle; & la partie irrationnelle par l'irrationnelle, & l'on écrira le produit des parties rationnelles devant le signe radical & le produit des irrationnelles après, & l'on réduira le produit total à son expression la plus simple. Ainsi $a\sqrt{b} \times c\sqrt{b} = ac\sqrt{bb}$: mais $\sqrt{bb} = b$; donc $ac\sqrt{bb} = abc$; d'où l'on voit que lorsque les parties irrationnelles sont semblables, il n'y a qu'à multiplier le produit des rationnelles par ce qui se trouve sous le signe radical. De même $a\sqrt{b} \times \sqrt{c}$, ou $a\sqrt{b} \times \sqrt{c}$ (car on prend l'unité pour partie rationnelle, lorsqu'il n'y en a point d'autre) $= a\sqrt{bc}$; $2a\sqrt{b} \times 3b$, ou $2a\sqrt{b} \times 3b\sqrt{1} = 6ab\sqrt{b}$; $2a\sqrt{bc} \times b\sqrt{ab} = 2ab\sqrt{abbc} = 2abb\sqrt{ac}$; $2a\sqrt{3bc} \times 3b\sqrt{6ab} = 6ab\sqrt{18abbc} = 18abb\sqrt{2ac}$; $a\sqrt{2b} \times 2b\sqrt{3c} = 2ab\sqrt{6bc}$. $\sqrt[3]{ab} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{aabb}$; $2a\sqrt[3]{ab} \times 3b\sqrt[3]{aa} = 6ab\sqrt[3]{a^2b} = 6aab\sqrt[3]{b}$. Il en est ainsi des autres.

70. Si les quantitez que l'on veut multiplier sont complexes, on multipliera tous les termes de l'une par chacun de ceux de l'autre, en suivant les regles des quantitez complexes, & la Réduction des produits particuliers étant faite, l'on aura le produit total. Ainsi $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb} = aa+bb$; $\sqrt{aa-bb} \times -\sqrt{aa-bb} = -aa+bb$; $2a\sqrt{aa+bb} \times b\sqrt{aa+bb} = 2a^2b+2ab^2$. Ceci est évident; car lorsque la même quantité se trouve sous le signe radical $\sqrt{\quad}$, en ôtant le signe radical, cette quantité se trouve multipliée par elle-même. Ce qu'on

peut encore prouver en cette sorte: $\sqrt{aa+bb} \times \sqrt{aa+bb}$

$$= \frac{aa+bb}{2} \times \frac{aa+bb}{2} = (\text{n}^\circ. 34.) \frac{aa+bb}{2} + \frac{aa+bb}{2}, \text{ ou}$$

$$(\text{n}^\circ. 33.) \frac{aa+bb}{2} \times 2 = aa+bb. \text{ Il en est ainsi des autres.}$$

Pour multiplier $\sqrt{a+b}$ par $\sqrt{a-b}$, on multipliera $a+b$ par $a-b$, comme si c'étoit des quantitez rationnelles, & l'on aura $\sqrt{aa-bb}$. De même $a + \sqrt{ab} \times b = ab + b\sqrt{ab} + a + \sqrt{ab} \times \sqrt{bc} = a\sqrt{bc} + \sqrt{abbc} = a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac}$; $3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac} \times 2c\sqrt{ab} = 6ac\sqrt{abbc} - 4bc\sqrt{aabc} = 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$. Voici des Exemples plus composez.

$$\begin{array}{r} a + \sqrt{aa-bb} \text{ multiplié.} \\ \text{par } a + \sqrt{aa-bb} \\ \hline aa + \sqrt{aa-bb} \\ + \sqrt{aa-bb} + aa - bb \\ \hline \text{Prod. } aa + 2a\sqrt{aa-bb} + aa - bb. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + \sqrt{aa-xx} \text{ multiplié} \\ \text{par } a - \sqrt{aa-xx} \\ \hline aa + a\sqrt{aa-xx} \\ - a\sqrt{aa-xx} - aa + xx \\ \hline \text{Produit. } aa * -aa + xx. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{ab} + \sqrt{aa-xx} \text{ multiplié} \\ \text{par } \sqrt{ab} + \sqrt{aa-xx} \\ \hline ab + \sqrt{a^3b} - abxx \\ + \sqrt{a^3b} - abxx + aa - xx \\ \hline \text{Produit. } ab + 2\sqrt{a^3b} - abxx + aa - xx. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ac + b\sqrt{aa-xx} \text{ multiplié} \\ \text{par } bc - c\sqrt{aa-yy} \\ \hline abcc + bbc\sqrt{aa-xx} \\ - acc\sqrt{aa-yy} - bc\sqrt{a^4} - aaxx - aayy + xxyy \\ \hline \text{Prod. } abcc + bbc\sqrt{aa-xx} - acc\sqrt{aa-yy} \\ (-bc\sqrt{a^4} - aaxx - aayy + xxyy) \end{array}$$

DIVISION

Des quantitez irrationelles.

71. ON écrira le dividende au-dessous du diviseur en forme de fraction, & l'on prendra cette fraction pour le Quotient de la division. Mais lorsque l'on s'apercevra que le dividende sera le produit du diviseur par une autre quantité, ce qui est aisé dans les quantitez complexes, on prendra cette autre quantité pour le Quotient. Et dans les quantitez complexes, lorsqu'on n'apercevra pas le Quotient, on examinera (n°. 46.) si la division se peut faire; & si elle se fait, l'on aura un Quotient sans fraction: mais si elle ne se fait point, on se contentera de la division indiquée. Ainsi $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = b$; $\frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} =$

$$\sqrt{c}; \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c}; \frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x}: \text{car } a+x \times a-x = aa-xx. \text{ Il en est ainsi des autres.}$$

Il y a d'autres Réductions pour les divisions indiquées qu'on trouvera ailleurs; & tout ce que nous allons dire des rapports, & des fractions, se doit aussi entendre de ces sortes de divisions, soit qu'elles soient rationnelles, ou irrationnelles.

T H E O R I E.

Des Raisons, ou Raports, des Fractions, des Equations, & des Proportions.

D E F I N I T I O N S.

II. **R**AISON, ou Rapport est la comparaison de deux grandeurs de même genre, telles que sont deux nombres, deux lignes, deux surfaces, deux corps, deux espaces de temps, deux quantitez de mouvement, deux vitesses d'un même, ou de deux differens mobiles, deux poids, deux sons, &c.

Or comparer les grandeurs, c'est operer sur les grandeurs; & comme l'on ne peut operer sur les grandeurs qu'en les ajoutant, soustrayant, multipliant, divisant, & en en extrayant les racines; il faut necessairement que leur comparaison se fasse par quelques-unes de ces operations.

Mais parceque l'Addition, & la Multiplication les confondent, & n'en marquent point l'égalité, ou l'inégalité, en quoi consiste précisément la comparaison des grandeurs, & que l'extraction des racines n'agit que sur une seule; & qu'au contraire la Soustraction fait connoître l'égalité de deux grandeurs, ou l'excès de l'une par-dessus l'autre, ou la difference de l'une à l'autre, & que la Division détermine combien de fois une grandeur en contient, ou est contenue dans une autre; ou, ce qui est la même chose, indique la maniere dont une grandeur en contient, ou est contenue dans une autre, ou en marque l'égalité; il suit qu'il n'y a que la Soustraction & la Division qui puissent servir à comparer les grandeurs.

1. La comparaison de deux grandeurs par la Soustraction; ou, ce qui est la même chose, la Soustraction elle-même, est nommée raison ou rapport *arithmetique*. Ainsi

$12 - 4$; $a - b$, ou $b - a$, &c , sont des raisons ou des rapports arithmetiques.

2. La comparaison de deux grandeurs par la Division ; ou , ce qui est la même chose , la Division elle-même est appelée raison , ou rapport *geometrique*. Ainsi $\frac{12}{4}$, ou $\frac{4}{12}$;

$\frac{a}{b}$, ou $\frac{b}{a}$, &c. sont des raisons ou des rapports geomet.

On prend ici la Soustraction indiquée pour la Soustraction même , ou pour la difference des deux grandeurs qui la composent ; & l'on prend de même la Division indiquée pour la Division même , ou pour le Quotient des deux quantitez qui la forment.

On appellera dans la suite *Réduction* , le résultat de ces deux Regles , ou de ces deux Rapports , c'est-à-dire , la difference & le Quotient des deux quantitez qui les composent.

COROLLAIRE I.

3. Il est clair que les raisons ou rapports tant arithmetiques que geometriques , sont égaux lorsque leurs Réductions sont égales. Ainsi $12 - 4 = 16 - 8$, parceque $12 - 4 = 8$, & $16 - 8 = 8$. De même $\frac{12}{4} = \frac{2}{3}$, parceque

$\frac{12}{4} = 3$, & $\frac{2}{3} = 3$. Par la même raison , si $\frac{a}{b} = f$, &

$\frac{c}{d} = f$; l'on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

4. Mais les Réductions , ou les Quotients des divisions , ou des rapports geometriques , sont toujours égaux , lorsque les dividendes contiennent , ou sont contenues de même maniere dans les diviseurs. C'est pourquoi lorsque une grandeur a contiendra , ou fera contenue dans une autre grandeur b , comme une troisième c contient ou est contenue dans une quatrième d , ces quatre grandeurs formeront toujours deux rapports geometriques égaux ,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

COROLLAIRE II,

COROLLAIRE II.

5. IL est de même évident que les raisons, ou rapports tant arithmétiques que géométriques, sont inégaux, lorsque leurs Réductions sont inégales, & que le plus grand est celui dont la Réduction est la plus grande. Ainsi $12 - 4 > 10 - 6$: car $12 - 4 = 8$, & $10 - 6 = 4$. De même $\frac{12}{4} > \frac{16}{8}$: car $\frac{12}{4} = 3$, & $\frac{16}{8} = 2$.

6. Le premier terme d'un rapport arithmétique, & le terme supérieur d'un rapport géométrique, sont nommez *antecedens*; le second d'un rapport arithmétique, & l'inférieur d'un rapport géométrique, sont nommez *consequens*. Ainsi dans les rapports $a - b$, & $\frac{a}{b}$, a est l'antecedent, & b le consequent : mais comme les raisons ou les rapports géométriques ne sont autre chose que des Divisions indiquées, & que ces Divisions sont, à proprement parler, des fractions; il suit qu'il n'y a aucune différence entre raison, rapport, division, & fraction; de sorte que tout ce qu'on dira dans la suite des uns, se doit aussi entendre des autres. On remarquera seulement que pour parler comme les autres, lorsqu'il s'agira des raisons ou rapports, on appellera les deux termes *antecedent* & *consequent*; lorsqu'il s'agira de divisions, on les appellera *dividende* & *diviseur*; & lorsqu'il s'agira de fractions, on les appellera *numérateur* & *dénominateur*.

7. Lorsque l'antecedent d'une raison est égale à son consequent, on l'appelle *raison d'égalité*; & lorsque l'un surpasse l'autre, on l'appelle *raison d'inégalité*.

8. Lorsque l'antecedent d'un rapport géométrique; contient plusieurs fois exactement son consequent, il est nommé *multiple* de ce consequent, & lorsque l'antecedent est contenu plusieurs fois exactement dans son consequent, il est nommé *soumultiple* du même consequent.

9. De tels rapports tirent leur dénomination du nombre de fois que l'antecedent contient le consequent, ou

f

y est contenu. De sorte que si l'antecedent contient deux, trois, quatre fois, &c. son consequent, le raport sera nommé *double*, *triple*, *quadruple*, &c. & si l'antecedent est contenu deux, trois, quatre fois, &c. dans le consequent, le raport sera nommé *soûdouble*, *soûtriple*, *soûquadruple*, &c. Ainsi $\frac{12}{4}$ est un raport triple, & $\frac{4}{12}$ est un raport soûtriple.

10. On appelle *équation* deux quantitez algebriques differentes, entre lesquelles se trouve le signe d'égalité; ainsi $a = b$; $ax - xx = yy$; $x = \frac{ab}{c}$ sont des équations.

11. Les deux quantitez algebriques qui se trouvent de part & d'autre du signe d'égalité sont nommées *membres* de l'équation; celle qui le precede est nommée le premier membre, & celle qui le suit, le second. D'où l'on voit que les deux membres d'une équation sont les expressions algebriques d'une même quantité, ou de deux quantitez égales.

COROLLAIRE.

12. IL est évident que deux rapports égaux arithmetiques, ou geometriques, peuvent toujours former une équation. Ainsi si a surpasse, ou est surpassée par b , de la même quantité que c surpasse ou est surpassée par d , l'on aura toujours $a - b = c - d$, ou $b - a = d - c$. De même si a contient ou est contenue dans b , comme c contient ou est contenue dans d , l'on aura toujours $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ou $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

13. Mais si au lieu de former une équation de deux rapports égaux, arithmetiques, ou geometriques, on arrange leurs quatres termes de suite, en sorte que l'antecedent de l'un des deux rapports soit le premier, son consequent, le second; l'antecedent de l'autre raport, le troisième, & son consequent le quatrième, en séparant les deux rapports par quatre points, & les deux termes de

chaque raport par un seul point, en cette sorte $a . b :: c . d$, (en supposant que $a - b = c - d$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$); on appellera *proportion*, ou *analogie* cette disposition des quatre termes de deux rapports égaux. De sorte que proportion ou analogie, n'est autre chose que l'égalité de deux rapports arangez autrement qu'en équation. Si les rapports sont arithmetiques, on la nommera *proportion arithmetique*; s'ils sont geometriques, on la nommera *proportion geometrique*.

14. Pour énoncer une proportion, comme celle-ci $a . b :: c . d$; on dira, si elle est arithmetique, *a* surpasse *b*, ou est surpassée par *b*, comme *c* surpasse *d*, ou est surpassée par *d*, & si elle est geometrique, on dira *a* contient *b*, ou est contenue dans *b*, comme *c* contient *d*, ou est contenue dans *d*. Mais pour abreger, soit que la proportion soit arithmetique, ou geometrique, on dit *a* est à *b*, comme *c* est à *d*, ou comme *a* est à *b*, ainsi *c* est à *d*, en observant néanmoins que le mot *est* signifie *surpasse*, ou *est surpassé* dans la proportion arithmetique; & que dans la geometrique, il signifie *contient* ou *est contenu*.

L'on distingue deux sortes de proportions, tant arithmetiques que geometriques, la *discrete*, & la *continue*.

15. La proportion discrete est celle dont les quatre termes sont differens, comme celle-ci $a . b :: c . d$.

16. La proportion continue, est celle où la même quantité est le consequent du premier raport & l'antecedent du second, comme celle-ci $a . b :: b . c$.

17. Les quantitez qui forment une proportion sont nommées *proportionnelles*. Ainsi la proportion discrete renferme quatre proportionnelles, & la continue n'en renferme que trois, & celle du milieu est nommée *moyenne proportionnelle*, arithmetique, ou geometrique, selon que la proportion est arithmetique, ou geometrique, & dans l'une & dans l'autre proportion; le premier & le dernier termes sont nommés *extrêmes*, & les deux du milieu, *moyens*.

18. Lorsqu'une proportion continue renferme plus

de trois termes : ou plutôt lorsque plusieurs grandeurs dont le nombre surpasse 3, sont rangées de suite, de manière que chacune d'elles puisse servir de conséquent à celle qui la précède ; & d'antécédent à celle qui la suit, cette rangée de grandeurs est appelée *progression*, arithmétique ou géométrique, selon que les rapports que les grandeurs qui la composent ont entr'elles, sont arithmétiques ou géométriques. *A, B, C*, sont des progressions arithmétiques. *D, E, F*, des progressions géométriques.

$$\begin{array}{ll} A. 1. 2. 3. 4. 5, \&c. & D. 1. 2. 4. 8. 16, \&c. \\ B. 10. 8. 6. 4. 2, \&c. & E. 81. 27. 9. 3. 1, \&c. \\ C. 4. 2. 0 - 2 - 4, \&c. & F. 4. 2. 1. \frac{1}{2}. \frac{1}{4}, \&c. \end{array}$$

COROLLAIRE I.

19. IL est clair (n^o. 18.) que dans une progression arithmétique, l'excès d'un terme quelconque par-dessus celui qui le suit, ou qui le précède, doit être toujours le même. De sorte que si on nomme le premier terme d'une progression arithmétique *a* ; & l'excès qui regne dans la progression *m*, (*m* peut signifier un nombre quelconque, entier, ou rompu, positif, ou négatif) l'on pourra former par le moyen de ces deux lettres, une progression arithmétique générale en cette sorte,

$$a. a + m. a + 2m. a + 3m, \&c.$$

COROLLAIRE II.

20. IL n'est pas moins évident que si dans la progression géométrique, l'on divise un terme quelconque par celui qui le suit, la réduction, ou le quotient sera toujours le même ; c'est pourquoi si l'on nomme le premier terme d'une progression géométrique *b*, & la réduction ou quotient qui regne dans la progression *n* (*n* signifie un nombre positif, entier, ou rompu), l'on pourra former une progression géométrique générale, en cette sorte.

$$b. \frac{b}{n}. \frac{b}{n^2}. \frac{b}{n^3}, \&c. \text{ car si une quantité } b \text{ divisée par}$$

une autre, donne au quotient n , la même quantité b , divisée par le quotient n donnera cette autre.

21. Ceci se peut aussi appliquer aux proportions tant arithmétiques que géométriques. Soit par exemple, la proportion arithmétique suivante $a . b :: c . d$; si l'on nomme $a - b$, ou $b - a$, m ; $c - d$ ou $d - c$ sera aussi m ; donc $a . a - m :: c . c - m$, ou $a . a + m :: c . c + m$, d'où l'on voit que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens, c'est-à-dire, $a + c \pm m = a \pm m + c$, puisque ces deux sommes, qui sont les deux membres de cette équation, renferment les mêmes quantitez.

22. De même, si dans la proportion géométrique suivante $a . b :: c . d$, on fait $\frac{a}{b} = n$, l'on aura aussi $\frac{c}{d} = n$; & partant (n°. 20.) $a . \frac{a}{n} :: c . \frac{c}{n}$; d'où l'on voit aussi que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, c'est-à-dire, $\frac{ac}{n} = \frac{ac}{n}$; car ces deux produits qui sont les deux membres de cette équation, renferment les mêmes quantitez.

A X I O M E I.

23. S I l'on ajoute, ou si l'on soustrait, ou si l'on multiplie, ou si l'on divise des quantitez égales par des quantitez égales; les sommes, ou les différences, ou les produits, ou les quotiens, seront égaux.

C O R O L L A I R E S.

1^{er}. I L suit qu'on peut ajouter, soustraire, multiplier, ou diviser les deux membres d'une équation par les deux membres d'une autre, chacun par chacun. Par exemple, si $a = b$, & $c = d$, l'on aura $a \pm c = b \pm d$, ou $a \pm d = b \pm c$; $ac = bd$, ou $ad = bc$; $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, ou $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$.

2^e. Il suit aussi de cet Axiome, & de ce que l'Addition & la Soustraction ont des effets contraires, que l'on peut

f iij

passer tel terme que l'on voudra d'un membre d'une équation dans l'autre en changeant son signe, ce qu'on appelle *transposition*. On peut même passer tous les termes d'un des membres dans l'autre, ce qu'on appelle égaliser tout à zero. Ainsi cette équation $a+b-c=g$ se peut changer en celle-ci $a+b=g+c$, ou en celle-ci $a=g+c-b$, ou en celle-ci $a+b-c-g=0$, ou $0=g-a-b+c$: car par exemple, dans le premier changement, on ne fait qu'ajouter c de part & d'autre du signe d'égalité, parcequ'elle y est soustraite, ce qui donne $a+b-c+c=g+c$, qui se réduit à $a+b=g+c$. Il en est ainsi des autres changemens.

3°. Il suit de ce Corollaire que l'on peut changer tous les signes d'une équation: car il n'y a qu'à supposer qu'on fait passer tous les termes d'un membre dans l'autre; & que l'on peut mettre seuls dans un des membres, les termes qu'on veut, avec les signes qu'on veut.

4°. Il suit encore du même Axiome, & de ce que la division détruit ce que fait la multiplication; & au contraire, qu'on peut délivrer une équation de toutes les fractions qui s'y peuvent rencontrer: car il n'y a qu'à multiplier toute l'équation par tous les dénominateurs l'un après l'autre, ou ce qui revient au même, la multiplier une seule fois par le produit de tous les dénominateurs, & ensuite réduire (art. 1. n°.37.) les termes fractionnaires. Par exemple, pour ôter les fractions de cette équation $\frac{abx}{c} + gx = \frac{bcd}{a}$, on la multiplira par c &

puis par a , ou une seule fois par ac , & l'on aura $\frac{a^2bcx}{c} + acgx + \frac{abccd}{a}$: mais (art. 1. n°.37.) $\frac{a^2bcx}{c} = a^2bx$, & $\frac{abccd}{a} = bccd$; donc $a^2bcx + acgx = bccd$ qui n'a plus de fractions.

L'on abregé l'opération, & particulièrement quand les dénominateurs sont des polynomes, en écrivant les numérateurs des termes fractionnaires sans y rien changer, & en multipliant les autres termes par les dénomi-

nateurs. Ainsi pour ôter la fraction de cette équation

$$\frac{xx - aa}{b - y} = c, \text{ ayant multiplié } c \text{ par } b - y, \text{ l'on aura } xx$$

$$- aa = bc - cy. \text{ Il en est ainsi des autres.}$$

5°. Il suit aussi qu'on peut délivrer une lettre, ou telle puissance qu'on voudra d'une même lettre, qui se trouve dans une équation, de toutes autres quantitez qui la multiplient; ce qu'on appelle trouver la valeur d'une lettre ou d'une puissance: car il n'y a pour cela qu'à diviser toute l'équation par les quantitez qui multiplient cette lettre après avoir mis dans un des membres tous les termes où se trouve cette lettre, & tous les autres termes dans l'autre membre, & qu'à faire ensuite la réduction. Par exemple, si dans cette équation $ax = bc$, l'on veut mettre x seule dans le premier membre, l'on aura en divisant

$$\text{toute l'équation par } a, \frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}; \text{ mais (art. I. n°. 37.)}$$

$$\frac{ax}{a} = x; \text{ donc } x = \frac{bc}{a}. \text{ Le second membre ne peut être réduit.}$$

Si dans celle-ci $ax = ab + bx - bc$, l'on veut avoir x seule dans un des membres, l'on aura en transposant, & en supposant que a surpasse b , $ax - bx = ab - bc$, & en divisant tout par $a - b$, l'on aura $\frac{ax - bx}{a - b} = \frac{ab - bc}{a - b}$;

$$\text{mais (art. I. n°. 43, ou 46) } \frac{ax - bx}{a - b} = x; \text{ donc } x =$$

$$\frac{ab - bc}{a - b}.$$

Si dans cette équation $ax - bx = aa - bb$, l'on veut avoir x seule, en divisant par $a - b$, l'on aura $\frac{ax - bx}{a - b}$

$$= \frac{aa - bb}{a - b}; \text{ mais (art. I. n°. 46) } \frac{ax - bx}{a - x} = x, \text{ \& } \frac{aa - bb}{a - b}$$

$$= a + b; \text{ donc } x = a + b.$$

Si dans cette équation $aaax + aayy - 2ax^3 - 2axy + xxy = 0$, l'on veut mettre yy seule dans le premier membre, l'on aura en transposant $aayy - 2axy + xxy = 2ax^3 - aax$, & en divisant chaque membre par $aa - 2ax + xx$, l'on aura $yy = \frac{2ax^3 - aax}{aa - 2ax + xx}$. Il en est ainsi des autres.

Axiome II.

24. **L**es puissances & les racines des quantitez égales sont égales.

Ainsi si $x = +a$, l'on aura en quarrant chaque membre $xx = aa$; & si $xx = aa$, les racines seront $x = +a$; si $xx = ab$, les racines seront $x = +\sqrt{ab}$. Si $xx = -ab$, les racines seront $x = +\sqrt{-ab}$, qu'on appelle racine *imaginaire*, parce que l'on n'en peut pas exprimer la valeur, telles sont toutes les quantitez irrationnelles negatives.

Si $yy = \frac{2ax^3 - aax}{aa - 2ax + xx}$, les racines seront $y = \frac{\sqrt{2ax^3 - aax}}{\sqrt{aa - 2ax + xx}}$; mais (art. I. n°. 66.) $\sqrt{2ax^3 - aax} = x\sqrt{2ax - aa}$, & $\sqrt{aa - 2ax + xx} = a - x$; donc $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$.

Si $xx = ax + bb$, les racines seront $x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: car en transposant, l'on a $xx - ax = bb$: or si l'on extrait (art. I. n°. 62) la racine du premier membre $xx - ax$, on trouvera qu'il y manque $+\frac{1}{4}aa$, afin qu'il soit carré; c'est pourquoi en ajoutant de part & d'autre $\frac{1}{4}aa$, l'on aura $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}aa + bb$: mais $\sqrt{xx - ax + \frac{1}{4}aa} =$ (art. I. n°. 62) $x - \frac{1}{2}a$, & la racine du second membre ne s'extrait que par le moyen du signe radical; donc $x - \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ ou en transposant $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Si les signes étoient

étoient differens , cela n'apporterait aucun changement dans l'operation.

C'est aussi parceque les puissances des quantitez égales sont égales, que l'on peut délivrer une équation de quantitez irrationelles qui s'y rencontrent , ce qu'on appelle *faire évanouir les signes radicaux* : car s'il ne s'y en rencontre qu'une , après l'avoir mise seule dans un des membres de l'équation par les Corollaires précédens ; il n'y aura qu'à élever chaque membre à la puissance qui a pour exposant celui du signe radical. Ainsi pour délivrer des quantitez irrationelles , cette équation $xx = a - x \times \sqrt{xx + yy}$, l'on aura en divisant par $a - x$, $\frac{xx}{a - x} = \sqrt{xx + yy}$, ou en divisant par $\sqrt{xx + yy}$, $\frac{xx}{\sqrt{xx + yy}} = a - x$, & en quarrant chaque membre , l'on aura $\frac{x^4}{xx + yy} = aa - 2ax + xx$, où il n'y a plus de quantitez irrationelles.

Mais s'il se rencontre deux quantitez irrationelles dans une même équation, on la délivrera de l'une , & ensuite de l'autre , comme on vient de dire. Par exemple, pour délivrer de quantitez irrationelles, cette équation $\sqrt{xx + yy} + \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b$, l'on aura en transposant , $\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = b - \sqrt{xx + yy}$, & en quarrant chaque membre , l'on aura $aa - 2ax + xx + yy = bb - 2b\sqrt{xx + yy} + xx + yy$, & en ôtant ce qui se détruit par la réduction , & transposant, il vient $2b\sqrt{xx + yy} = bb - aa + 2ax$, & en quarrant encore chaque membre, l'on a $4bbxx + 4bbyy = b^4 - 2aabb + a^4 + 4abbx - 4a^3x + 4aaxx$, où il n'y a plus de quantitez irrationelles.

A X I O M E III.

25. **O**n peut mettre en la place d'une quantité quelconque incomplexé ou complexé, une autre quantité égale incomplexé, ou complexé, ce qu'on appelle *substituer*:

I INTRODUCTION.

C'est par le moyen de cet Axiome que l'on réduit plusieurs équations à une seule, & que l'on en fait évanouir les lettres que l'on veut, pourvu que chacune de ces lettres, ou quelques unes de leurs puissances se trouvent au moins dans deux de ces équations, & que l'on ait au moins une équation de plus qu'il y a de lettres que l'on veut faire évanouir. En voici la Méthode.

26. On choisit une des équations (c'est ordinairement la plus simple) & l'on met seule (Axio. 1. & ses Coroll.) la lettre qu'on veut faire évanouir, dans un des membres; (c'est ordinairement dans le premier), & l'on substitue dans les autres équations, en la place de cette lettre, ou de ses puissances, sa valeur, ou celle de ses puissances, qui se trouve dans l'autre membre de l'équation que l'on a préparée; en sorte que cette lettre ne se trouve plus dans aucune, & l'on a alors une équation de moins. On recommence de nouveau à choisir la plus simple des équations résultantes, & l'on met seule dans le premier membre, la lettre qu'on veut faire évanouir, & l'on substitue comme auparavant la valeur de cette lettre dans les autres équations. On réitère la même opération jusqu'à ce que l'on ait fait évanouir l'une après l'autre, toutes les lettres que l'on a dessein de faire évanouir, ou jusqu'à ce que l'on n'ait plus qu'une seule équation. On va éclaircir ceci par des Exemples.

EXEMPLES.

1^{er}. SOIENT les trois équations *A, B, C*, dont on veut faire évanouir les deux lettres *x* & *y*.

$$\begin{array}{ll}
 A. \quad xz = yy. & D. \quad xz = bb - 2bz + zz. \\
 B. \quad x - y = a. & E. \quad x - b + z = a. \\
 C. \quad z + y = b. & F. \quad az + bz - zz = bb - 2bz + zz. \\
 & G. \quad 2zz = 3bz + az - bb.
 \end{array}$$

Je choisis l'équation *C* pour faire évanouir *y*, & j'en tire $y = b - z$, & en quarrant chaque membre (parce-

INTRODUCTION.

lj

que le carré de y se trouve dans l'équation A , j'ai $yy = bb - 2bz + zz$, & mettant dans l'équation A , pour yy sa valeur $bb - 2bz + zz$, & dans l'équation B , pour y sa valeur $b - z$, j'ai les deux équations D & G , où y ne se trouve plus. Je choisis de nouveau l'équation E pour faire évanouir x , & j'en tire $x = a + b - z$, & mettant dans l'équation D pour x sa valeur $a + b - z$, j'ai l'équation F , qui devient par la réduction, & par la transposition, l'équation G , où x & y ne se trouvent plus.

2°. Soient les deux équations $aa + 2ax + xx = 2yy + 2by + bb$, & $yy + by = aa + ax$, d'où il faut faire évanouir y . Je remarque que si la seconde équation étoit multipliée par 2, l'on auroit $2yy + 2by = 2aa + 2ax$, où les termes où y se trouve, sont les mêmes que dans la première; c'est pourquoi si l'on met dans la première pour $2yy + 2by$ sa valeur $2aa + 2ax$ tirée de la seconde, après l'avoir multipliée par 2, l'on aura $aa + 2ax + xx = 2aa + 2ax + bb$, qui se réduit à $xx = aa + bb$. Il en est ainsi des autres.

27. On peut encore par le moyen de cet Axiome faire certains changemens dans une équation en faisant certaines suppositions. Par exemple, si l'on a $x^3 = aab$, en supposant $ay = xx$; & mettant cette valeur de xx dans l'équation $x^3 = aab$, l'on aura $axy = aab$, ou $xy = ab$; en divisant toute l'équation par a .

De même, si l'on a $xx = ax + bb$, en supposant $ac = bb$, l'on aura $xx = ax + ac$; & si l'on a $xx = ax + ac$, en supposant $bb = ac$, l'on aura $xx = ax + bb$. Ce qu'on appelle changer un rectangle en carré, ou un carré en rectangle. On a souvent besoin de faire ces changemens.

Pour ce qui reste à dire sur les équations: voyez l'Application de l'Algebre à la Geometrie, Section I. art. 2 & 3.

On trouve dans les Ouvrages de plusieurs Sçavans Geometres, un grand nombre de Theorèmes démontrés sur les rapports, proportions, & progressions; mais il y manque la Méthode de les démontrer tous par le mê-

me principe, qui est ce qu'il y a de plus à desirer tant en cette occasion que dans toutes les autres parties de Mathematiques.

On pourroit tirer de ce que nous avons dit n°. 18, 19, 20, & 21, une Méthode pour démontrer tres-facilement toutes les proprieté des proportions, & des progressions tant arithmetiques que geometriques: mais elle n'est pas assez generale, & ne convient qu'aux grandeurs proportionnelles; c'est pourquoi je me suis déterminé à prendre une autre voye, qui convienne tout à la fois, non seulement aux grandeurs proportionnelles, mais encore à tous les Theorèmes que l'on se propose de démontrer par l'Algebre dans toutes les parties de Mathematiques. Voici le principe.

P R I N C I P E.

28. **A**PRES avoir nommé les quantitez qui doivent entrer dans la question par des lettres, l'on écrira l'Hypothese en équation, & la consequence aussi en équation; & en suivant les trois Axiomes précédens, & leurs Corollaires, on fera en sorte de rendre l'Hypothese semblable à la consequence, & alors le Theorème sera démontré. Et si les termes de l'équation que renfermera la consequence, se trouvent entierement semblables; de sorte que par la réduction, elle puisse devenir $0=0$. Le Theorème sera aussi démontré: car les termes d'une équation ne scauroient être entierement semblables sans être égaux, & ne scauroient se détruire sans être semblables.

E X P L I C A T I O N D U P R I N C I P E.

1°. **U**N Theorème contient deux parties, l'Hypothese & la Consequence; l'Hypothese est ce que l'on y suppose; & la Consequence est la verité qu'il s'agit de démontrer.

2°. Le principe demande qu'on écrive toujours l'Hypothese en équation. Souvent l'Hypothese renferme cette équation, ou une proportion qu'il est aisé de changer en équation: car si l'on a, $a, b :: c, d$, l'on aura (n°. 11.)

$a - b = c - d$, si la proportion est arithmétique, & $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si la proportion est géométrique, puisque proportion n'est autre chose que l'égalité de deux rapports.

3°. Si l'Hypothèse ne renferme ni équation ni proportion, on égalera les quantitez qu'elle renferme à d'autres lettres prises arbitrairement, & l'on aura par ce moyen des équations, comme on verra par ces Exemples.

4°. On tirera de l'Hypothèse autant d'équations qu'on pourra : car cela ne peut que faciliter les moyens de rendre l'Hypothèse semblable à la Conséquence.

Lorsqu'il s'agit de démontrer quelques propriétés touchant les grandeurs inégales, & touchant les rapports inégaux, l'on exprimera l'Hypothèse, & la conséquence par le moyen du signe $>$, ou $<$, en cette sorte $a >$ ou $< b, \frac{a}{b} >$ ou $< \frac{c}{d}$, & on se servira de ces expressions, que l'on pourroit appeler *inégalitez*, comme si c'étoient des équations : car il est clair qu'on peut ajouter, soustraire, multiplier, & diviser les deux membres de ces inégalitez par une même quantité, ou par des quantitez égales, les combiner, comme on voudra avec des équations, les élever à des puissances, en extraire les racines ; en un mot, on peut les traiter à la manière des équations, pourvû qu'on ne les combine point ensemble, sans que le membre le plus grand cesse d'être le plus grand ; de sorte qu'on aura les mêmes moyens de rendre l'Hypothèse semblable à la Conséquence, ou la Conséquence semblable à l'Hypothèse, que si c'étoit des équations, & de démontrer par conséquent toutes les propriétés des rapports inégaux, de la même manière que celles des rapports égaux.

Ce qu'on dira dans la suite des rapports & des proportions, se doit entendre des rapports & proportions géométriques, à moins qu'on n'avertisse que c'est des rapports & proportions arithmétiques qu'on veut parler.

THEORÈME I.

29. **S**i quatre grandeurs a, b, c, d , sont en proportion géométrique, le produit des extrêmes sera égal au produit des moyens.

Il faut prouver que si $a . b :: c . d$, l'on aura $ad = bc$.

L'on a par l'Hypothèse $a . b :: c . d$; donc (n°. 11.) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; or il est clair (Axio. 1. Coroll. 4.) qu'en ôtant les fractions, on aura $ad = bc$, qui est semblable à la Consequence. *C. Q. F. D.*

30. On prouvera de même que dans une proportion continue le produit des extrêmes est égal au carré de la moyenne. Ainsi si $a . b :: b . c$, l'on aura $ac = bb$.

Ce Theorème fournit un autre moyen dont nous nous servirons dans la suite, de changer une proportion en équation.

COROLLAIRES.

1^{er}. **I**l suit que connoissant trois des termes a, b, c , d'une proportion, on pourra toujours trouver le 4^e que je nomme x : car puisque (Hyp.) $a . b :: c . x$, l'on aura (n°. 29.) $ax = bc$; donc en divisant toute cette équation par a , l'on aura $x = \frac{bc}{a}$, d'où l'on voit que la valeur de bc divisée par la valeur de a , donnera celle de x .

2^e. De même dans la proportion continue, connoissant les extrêmes a & b , on trouvera la moyenne que je nomme y ; car puisque (Hyp.) $a . y :: y . b$, l'on aura $yy = ab$; & partant (Axio. 2.) $y = \pm \sqrt{ab}$; c'est pourquoi la racine de la valeur de ab sera la valeur de y . Les valeurs negatives ne satisfont point aux Problèmes. On en expliquera l'usage ailleurs.

THEOREME II.

31. **L**ES racines des produits qui forment chaque membre d'une équation sont réciproquement proportionnelles, c'est-à-dire qu'en prenant les racines d'un des membres pour les extrêmes, & les racines de l'autre pour les moyens, ces quatre racines formeront une proportion.

Soit l'équation $abc = dfg$. Il faut prouver que $ab : df :: g : c$, ou afin que la conséquence soit en équation $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$: car l'équation ne peut être vraie que la proportion ne le soit aussi.

En divisant toute l'équation $abc = dfg$, par gc , l'on aura $\frac{abc}{gc} = \frac{dfg}{gc}$, ou (art. 1. n^o. 37.) $\frac{ab}{g} = \frac{df}{c}$, qui est semblable à la conséquence. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRES.

1^{er}. **O**N peut tirer de la même équation $abc = dfg$ plusieurs autres proportions, & les démontrer de la même manière, pourvu qu'on prenne les extrêmes dans un membre, & les moyens dans l'autre, & qu'on garde la Loi des Homogenes, c'est-à-dire que les termes de chaque rapport aient un pareil nombre de dimensions : par exemple, on en peut tirer $a : d :: fg : bc$; $b : f :: dg : ac$, &c. mais quoiqu'on le puisse, on n'en doit pas tirer $a : df :: g : bc$: car on compareroit des quantitez de differens genres, comme une ligne avec un plan. Il en est ainsi des autres.

2^e. Il est clair qu'afin qu'une équation puisse être réduite en proportion, il faut que chaque membre soit le produit de deux quantitez qui se puisse séparer par la division; c'est pourquoi il est souvent nécessaire de la changer d'état pour la réduire en proportion. Par exemple, on ne peut réduire cette équation $xx = ax + bb$ en proportion dans l'état où elle est : car le second mem-

bre ne peut être divisé par aucune quantité : mais en transposant, l'on a $xx - ax = bb$, d'où l'on peut tirer $x . b :: b . x - a$. De celle-ci $xx = ax - bb$, on peut tirer $a - b . x :: x . a + b$. De celle-ci $xx = aa + bb$, ou $xx - aa = bb$, on peut tirer $x - a . b :: b . x + a$. Mais pour changer celle-ci $xx = aa - bc$ en proportion ; il faut changer bc en un quarré, ou aa en un rectangle dont un côté soit b , ou c ; faisant donc, par exemple, $bc = dd$, l'on aura $xx = aa - dd$, d'où l'on tire $a - d . x :: x . a + d$. Il en est ainsi des autres.

3°. Il suit aussi qu'un raport ou une fraction comme $\frac{ab}{c}$ est un des termes d'une proportion, & renferme les trois autres : car faisant $\frac{ab}{c} = x$, l'on aura en multipliant par c , $ab = cx$; donc (n°. 31.) $c . a :: b . x$, ou $c . a :: b . \frac{ab}{c}$, en remettant pour x sa valeur $\frac{ab}{c}$.

4°. Il suit aussi des deux Theorèmes précédens que si quatre grandeurs a, b, c, d , seront proportionelles, c'est-à-dire que $a . b :: c . d$, elles seront aussi proportionelles dans les quatre variations suivantes.

1. $a . c :: b . d$, ce qu'on appelle, *permutando*.
2. $b . a :: d . c$, ce qu'on appelle, *invertendo*.
3. $a + b . b :: c + d . d$, ce qu'on appelle, *componendo*.
4. $a - b . b :: c - d . d$, ce qu'on appelle, *dividendo*.

Car si les équations que l'on tirera (n°. 29.) de ces quatre analogies sont vraies, les analogies le seront aussi. Or la premiere & la seconde analogie donnent $ad = bc$, la troisieme donne $ad + bd = bc + bd$, & la quatrieme $ad - bd = bc - bd$: mais l'Hypothese $a . b :: c . d$, donnée $ad = bc$, qui est la premiere équation, & qui montre par consequent la verité des deux premieres analogies.

Si l'on ajoute, & si l'on soustrait bd de chaque membre de l'équation $ad = bc$ tirez de l'Hypothese, l'on aura $ad + bd = bc + bd$, & $ad - bd = bc - bd$, qui sont semblables

semblables aux deux dernières équations tirées des deux dernières analogies, & qui en font par conséquent voir la vérité.

Il y a encore d'autres variations dans les proportions que l'on démontrera avec la même facilité.

THEOREME III.

32. **S**I deux grandeurs quelconques a & b , sont multipliées par une même grandeur c , rationnelle, ou irrationnelle, les produits ac & bc , seront en même raison que les mêmes quantitez a , & b .

Il faut prouver que $ac : bc :: a : b$, ou, afin que la conséquence soit en équation, que (n°. 29.) $abc = abc$.

Parceque les deux membres de cette équation sont semblables, il suit (n°. 29, & 31.) que ce qui étoit proposé est vrai.

COROLLAIRES.

1°. **I**L est clair qu'on peut multiplier les quatre termes d'une proportion, ou l'un ou l'autre des deux rapports qui la forment, ou les deux antecedens, ou les deux consequens de ces rapports, par telle quantité qu'on voudra, sans que ces rapports cessent d'être égaux.

2°. Et parceque les rapports, ou les divisions indiquées sont des fractions, il suit qu'on peut multiplier les deux termes d'une fraction par telle quantité qu'on voudra sans que cette fraction change de valeur. Ainsi $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$,

en multipliant les deux termes par c .

3°. Une quantité quelconque, qui n'est point fractionnaire devient une fraction étant comparée à l'unité, ce qui n'y change rien; c'est pourquoi toute quantité qui n'est point fractionnaire, peut être changée en une fraction, dont le dénominateur sera telle quantité qu'on

voudra. Ainsi a ou $\frac{a}{1} = \frac{ab}{b}$, en multipliant chaque terme par b .

b

4^e. Il suit aussi qu'on peut donner à des fractions des dénominateurs semblables, lorsqu'elles en ont de différens, ce qu'on appelle *réduire les fractions à même dénomination*: car pour cela, il n'y a qu'à multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre, s'il n'y en a que deux. Ainsi pour réduire à même dénomination $\frac{ab}{c}$ & $\frac{df}{g}$, ayant multiplié les deux termes de la première par g , & ceux de la seconde par c , l'on aura $\frac{abg}{cg}$

& $\frac{cdf}{cg}$. S'il y en a un plus grand nombre, on multipliera les 2 termes de chacune par le produit des dénominateurs des autres. Ainsi pour réduire $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{f}$, $\frac{c}{g}$ en même dénomination; ayant multiplié les deux termes de la première par fg , ceux de la seconde par dg , & ceux de la troisième par df , l'on aura $\frac{afg}{dfg}$, $\frac{bdg}{dfg}$, $\frac{cdf}{dfg}$.

Il se trouve souvent des fractions que l'on peut réduire à même dénomination, sans les changer toutes d'expression. Ainsi $\frac{abb}{cd}$ & $\frac{gb}{c}$, seront réduites en même dénomination, en multipliant les deux termes de la seconde par d : car l'on aura $\frac{dgb}{cd}$.

5^e. Il suit encore que c'est la même chose de diviser le dénominateur d'une fraction, par une quantité quelconque, ou de multiplier son numérateur par la même quantité. Ainsi $\frac{ab}{c} = \frac{abd}{cd} = \frac{abd}{c}$.

THÉOREME IV.

33. *SI l'on divise deux grandeurs quelconques a & b par une même grandeur c, rationnelle ou irrationnelle; les quotiens $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$, seront en même raison que les premières grandeurs a & b.*

Il faut prouver que $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, ou, ayant supposé

$\frac{a}{c} = p$, & $\frac{b}{c} = q$, que $p . q :: a . b$, ou afin que la conséquence soit en équation, que $bp = aq$.

La première équation (Axio. 1. Coroll. 4.) donne $a = cp$, & la seconde, $b = cq$, d'où l'on tire (Axio. 1. Coroll. 1.) $acq = bcp$, ou en divisant par c , $aq = bp$; donc (Th. 2.) $p . q :: a . b$, ou $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$, en remettant pour p , &

pour q , leurs valeurs $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$. C. Q. F. D.

On pourroit démontrer ce Théorème en cette sorte. L'hypothèse $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$; donne (Theor. 1.) $\frac{ab}{c} = \frac{ab}{c}$ qui est une équation évidente par elle-même.

2^e. C'est aussi par le moyen de ce Théorème que l'on réduit les rapports ou fractions à leurs plus simples expressions. Ce qui se fait en divisant l'antécédent & le conséquent de chaque rapport par une même quantité, que l'on nomme, *commun diviseur*, & les deux quotiens forment un autre rapport, ou fraction égale à la proposée, mais plus simple.

Or il est souvent aisé d'apercevoir ce commun diviseur, & particulièrement quand les deux termes du rapport que l'on veut réduire sont complexes. Mais si on ne l'aperçoit pas par la seule inspection des termes, on cherchera (art. 1. n^o. 56, ou 57.) tous les diviseurs de l'antécédent, & tous ceux du conséquent; & les diviseurs de l'antécédent qui se trouveront aussi parmi ceux du

h ij

1x INTRODUCTION.

consequent, seront des diviseurs communs; mais on ne se servira que du plus grand: s'il ne s'en trouve aucun parmi ceux de l'antecedent, qui se trouve aussi parmi ceux du consequent, la fraction ne pourra être réduite à de plus simples termes.

EXEMPLES.

EXEMPLE 1. $\frac{aab}{ac}$ se réduit, ou est égal à $\frac{ab}{c}$ en divisant chaque terme par leur commun diviseur a .

Exemple 2. $\frac{abc\sqrt{abd}}{cx\sqrt{ag}} = \frac{ab\sqrt{bd}}{x\sqrt{g}}$ en divisant les parties rationnelles par c , & les irrationnelles par \sqrt{a} .

Exemple 3. $\frac{abc\sqrt{abc}}{ca\sqrt{b}} = \frac{ab\sqrt{ac}}{d}$ en divisant les parties rationnelles par c , & les irrationnelles par \sqrt{b} .

Exemple 4. $\frac{a^3}{a^3} = \frac{1}{1} = 1$, en divisant les deux termes par a^3 : Mais (art. 1. n°. 22.) $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$; donc $a^0 = 1$, ce que nous avons supposé dans l'endroit que nous venons de citer.

Exemple 5. $\frac{a^3}{a^2} = \frac{1}{a^2}$, en divisant chaque terme par a^2 : mais (art. 1. n°. 22.) $\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1$; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ce que nous avons encore supposé au même endroit.

Exemple 6. $\frac{25ab}{15bc} = \frac{5a}{3c}$ en divisant chaque terme par $5b$.

Exemple 7. $\frac{aac + abc}{aa + bb} = \frac{ac}{a + b}$, en divisant chaque terme par leur commun diviseur $a + b$.

Exemple 8. $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb} = \frac{aa + ab + bb}{a + b}$, en divisant chaque terme par le commun diviseur $a + b$.

THEOREME V.

34. **S**I l'on divise une même quantité a , par des quantitez différentes b & c , les quotiens seront reciproquement proportionnels à leurs diviseurs.

Il faut prouver que $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} :: c \cdot b$, ou, ayant supposé

$\frac{a}{b} = p$, & $\frac{a}{c} = q$, que $p \cdot q :: c \cdot b$, ou afin que la consequence soit en équation, que $bp = cq$.

La premiere supposition donne $a = bp$, & la seconde $a = cq$; donc (Axio. 3.) $bp = cq$; & partant (Theor. 2.) $p \cdot q :: c \cdot b$, ou $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} :: c \cdot b$, en remettant pour p , & pour q , leurs valeurs $\frac{a}{b}$, & $\frac{a}{c}$. C. Q. F. D.

On pourroit démontrer plus simplement ce Theorème: car la consequence $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} :: c \cdot b$ donne (Theor. 1.)

$\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$, ou (art. 1. n^o. 37.) $a = a$, ou, $a - a = 0$, ou $0 = 0$.

THEOREME VI.

35. **S**I trois grandeurs a , b , c , sont en proportion continue, la premiere a , sera à la troisieme c , comme le quarré de la premiere aa , au quarré de la seconde bb .

Il faut prouver que $a \cdot c :: aa \cdot bb$, ou, afin que la consequence soit en équation, que $aac = abb$.

L'on a (Hyp.) $a \cdot b :: b \cdot c$; donc $ac = bb$, & partant $aac = abb$ en multipliant chaque membre par a . C. Q. F. D.

THEOREME VII.

36. **L**ORSQUE plusieurs rapports sont égaux, comme $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$ &c. La somme des antecedens $a + c + d$, est à la somme des consequens $b + d + e$, comme celui qu'on voudra des antecedens, est à son consequent.

b iij

Il faut prouver que $a + c + d . b + d + e :: a . b$, ou, afin que la conséquence soit en équation, que $ab + bc + bd = ab + ad + ae$, ou en ôtant de part & d'autre le terme ab qui se détruit par la réduction, $bc + bd = ad + ae$.

Les deux premiers rapports égaux (Hyp.) donnent $ad = bc$, le premier & le troisième donnent $ae = bd$; donc (Axio. I. Coroll. I.) $bc + bd = ad + ae$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

37. IL suit de ce Théorème, que connoissant les deux premiers termes a & b , & le dernier c , d'une progression geometrique, on trouvera aisément la somme de tous les termes qui la composent: car nommant la somme des antecedens x ; la somme des consequens sera $x - a + c$. Or par ce Théorème, $x . x - a + c :: a . b$; donc (Theor. I.) $bx = ax - aa + ac$; ou, en transposant, & en supposant $a > b$, $ax - bx = aa - ac$; d'où l'on tire (Axio. I. Cor. 5.) $x = \frac{aa - ac}{a - b}$. Ce qu'il falloit trouver.

Si $a > b$, ou ce qui est la même chose, si la progression va en diminuant, & qu'on la suppose infinie, en faisant le dernier terme $c = 0$, l'on aura $x = \frac{aa}{a - b}$, pour la valeur de tous les termes de la progression; car le terme ac se détruit à cause de $c = 0$.

THEOREME VIII.

38. LA plus grande a de deux quantitez inégales a & b a un plus grand rapport à une troisième grandeur c que la plus petite b ; & la même grandeur c , a un plus grand rapport à la plus petite b qu'à la plus grande a .

Il faut prouver, 1°. Que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2°. Que $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$.

L'on a par l'Hyp. $a > b$; donc (par le principe précédent, & ses explications) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, en divisant cha-

que membre de cette inégalité par c . Ce qu'il falloit premierement démontrer.

L'on a encore (Hyp.) $a > b$, donc en multipliant chaque membre de cette inégalité par c , & divisant chaque membre par ab , l'on aura $\frac{ac}{ab} > \frac{bc}{ab}$, ou (art. 1. n^o. 37.)

$\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$. Ce qu'il falloit en second lieu démontrer.

Nous avons supposé dans la Multiplication, & dans la Division, que $+ \times +$, & $- \times -$ donnoit $+$; & que $+ \times -$, ou $- \times +$ donnoit $-$. En voici la preuve, en supposant seulement que $+ \times +$ donne $+$, dont personne ne doute.

39. Soit $a - b$ à multiplier par $+c$. Je dis que le produit sera $ac - bc$: car ayant supposé $a - b = p$; l'on aura en transposant $a = p + b$, & multipliant cette équation par $+c$, l'on aura $ac = pc + bc$; donc en transposant, $ac - bc = pc$; donc $a - b \times +c = ac - bc$.

40. Soit presentement $a - b$ à multiplier par $-c$. Je dis que le produit sera $-ac + bc$: car ayant supposé $a - b = p$, l'on aura en transposant $a = p + b$; donc en multipliant par $-c$, l'on aura (n^o. 39.) $-ac = -pc - bc$, ou $-ac + bc = -pc$; donc $a - b \times -c = -ac + bc$.

41. Je dis aussi que $\frac{ab}{-a} = -b$: car le produit du diviseur par le quotient, doit donner le dividende, ce qui n'arriveroit pas si le quotient étoit $+b$: car $-a \times +b = -ab$, qui n'est point le dividende. Au contraire $-a \times -b = +ab$, qui est la quantité à diviser.

42. Il est de-là évident que $\frac{ab}{-a} = \frac{-ab}{a}$, puisque dans l'un & dans l'autre cas, le quotient doit être négatif, ce que nous avons aussi supposé ailleurs.

REMARQUE.

1^o. TOUT le Calcul algebrique est fondé sur les trois Axiomes précédens, & sur les quatre premiers Theorèmes.

mes que l'on vient de démontrer. On n'a démontré les quatre derniers que pour faire voir l'usage de notre principe, & que par son moyen, on peut démontrer d'une manière qui est toujours la même, toutes les propriétés des rapports égaux, & inégaux, des proportions, & des progressions géométriques.

2°. L'on remarquera aussi qu'en suivant le même principe, l'on démontrera avec la même facilité toutes les propriétés des rapports, proportions, & progressions arithmétiques.

3°. Que l'équation qui exprime la conséquence ou la vérité que l'on veut démontrer, peut toujours être délivrée de fractions, de signes radicaux, & réduite à ses plus simples termes, avant que de chercher à lui rendre semblable celle qui renferme l'Hypothèse: car une équation étant vraie dans un état, elle le sera dans tous ceux qu'elle est capable de recevoir.

Il s'agit présentement d'ajouter, soustraire, multiplier, diviser, & extraire les racines des rapports, ou fractions:

— ADDITION, ET SOUSTRACTION.

43. **P**OUR les ajouter, on les écrira de suite sans changer aucun signe; & pour les soustraire, on les écrira de suite en changeant les signes de celles qui doivent être soustraites, soit que leur dénominateur soit le même, ou non. On leur donnera ensuite un même dénominateur; & après avoir réduit (art. 1. n°. 11.) dans l'un & l'autre cas, les numérateurs semblables, on prendra pour la somme, ou pour la différence, celles des deux expressions qui sera la plus simple.

EXEMPLES.

POUR ajouter $\frac{ab}{c}$ avec $\frac{ad}{c}$, l'on aura $\frac{ab+ad}{c}$. Pour ajou-

ter $\frac{aab^2}{a^2-2aab+bb^2}$ avec $\frac{aabb}{aa-bb}$, l'on écrira $\frac{aab^2}{a^2-2aab+bb^2}$

+ $\frac{aabb}{aa-bb}$, ou après les avoir réduites en même dénomination

mination, $\frac{aab^4 + a^4bb - aab^4}{a^4 - 2aabb + b^4} = (\text{art. I. n}^\circ \text{ II.}) \frac{a^4bb}{a^4 - 2aabb + b^4}$
 qui est une expression plus simple que la premiere.

Pour soustraire $\frac{ab}{c-d}$ de $\frac{aa-bb}{c}$, l'on écrira $\frac{aa-bb}{c}$
 $-\frac{ab}{c-d}$, ou, après leur avoir donné un même dénomi-
 nateur $\frac{aac - bbc - aad + bbd - abc}{cc - cd}$. La premiere expression
 est la plus simple.

MULTIPLICATION.

44. **O**N multipliera les numerateurs, & ensuite les dé-
 nominateurs l'un par l'autre; & les deux produits for-
 meront une fraction que l'on réduira à son expression la
 plus simple.

Soit $\frac{ac}{b}$ à multiplier par $\frac{bc}{d}$. Ayant supposé $\frac{ac}{b} = p$, &
 $\frac{bc}{d} = q$. Il faut prouver que $\frac{abcc}{bd} = pq = \frac{acc}{d}$.

La premiere supposition donne $ac = bp$, & la secon-
 de, $bc = dq$; donc (Axio. I. Coroll. I.) $abcc = bdpq$;
 donc (Axio. I. Coroll. 5.) $\frac{abcc}{bd} = pq = \frac{acc}{d}$. C. Q. F. D.

De même $\frac{ab}{c} \times b + \frac{cd}{b}$, ou (Theor. 3. Coroll. 3.) $\frac{ab}{c}$
 $\times \frac{bb + cd}{b} = \frac{ab^3 + abcd}{bc} = \frac{abb + acd}{c}$, en divisant les deux
 termes par b . Par la même raison $\frac{ab}{c} \times d$, ou $\frac{d}{1} = \frac{abd}{c}$.

DÉFINITION.

45. **L**E produit $\frac{ac}{bd}$ de deux rapports differens $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$,
 est appllé *rapport composé*, ou *raison composée*; & le produit
 $\frac{aa}{bb}$ d'un rapport $\frac{a}{b}$, multiplié par lui-même, est appellé
rapport doublé, ou *raison doublée*.

DIVISION.

46. **L**E produit du numerateur du dividende par le dénominateur du diviseur fera le numerateur du quotient, & le produit du dénominateur du dividende par le numerateur du diviseur, fera le dénominateur du quotient. On réduira ensuite le quotient à son expression la plus simple.

Soit proposé le rapport $\frac{ab}{c}$ à diviser par $\frac{ac}{b}$. Ayant supposé $\frac{ab}{c} = p$, & $\frac{ac}{b} = q$. Il faut prouver que $\frac{acb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$.

La premiere supposition donne $ab = cp$; la seconde, $ac = bq$; donc (Axio. I. Coroll. I.) $\frac{ab}{ac} = \frac{cp}{bq}$, ou, en multipliant chaque membre par b , & divisant chaque membre par c , $\frac{abb}{acc} = \frac{p}{q} = \frac{bb}{cc}$. C. Q. F. D.

De même $\frac{ac}{b}$ divisé par d , ou par $\frac{d}{1}$, donne $\frac{ac}{bd}$.

EXTRACTION.

Des racines des quantitez fractionnaires.

47. **I**L est clair par les regles de la multiplication des fractions, que pour extraire leurs racines, il n'y a qu'à extraire celle du numerateur, & celle du dénominateur & ces deux racines formeront une fraction, qui sera la racine de la proposée. Ainsi $\sqrt{\frac{8abbc}{4bcc}} = \frac{2b\sqrt{2ac}}{2c\sqrt{b}} = \frac{b\sqrt{2ac}}{c\sqrt{b}}$.

Il en est ainsi des autres.

Les mêmes operations sur les fractions irrationelles n'ont rien de particulier.

Fin de l'Introduction.



APPLICATION
DE
L'ALGEBRE
A
LA GEOMETRIE.

SECTION PREMIERE.

*Où l'on donne les définitions & les principes généraux
qui servent pour résoudre les Problèmes, &
démontrer les Théorèmes de Geometrie.*

DEFINITIONS.

I.  L y a deux sortes de propositions dans la Geometrie, auxquelles on peut appliquer l'Algebre, qui sont les Théorèmes & les Problèmes.

1. Les Théorèmes sont des propositions qui contiennent des veritez Geometriques qui ne dépendent d'aucune operation, & qu'il faut seulement démontrer.

A

2. Les Problèmes sont d'autres propositions qui demandent que l'on fasse quelque opération, & que l'on démontre que l'opération que l'on a faite, satisfait à la question. Ce qui s'appelle résoudre le Problème.

Il y a des Problèmes déterminez, & d'autres indéterminez.

3. Les Problèmes déterminez sont ceux qui n'ont qu'une seule solution, ou qu'un nombre déterminé de solutions. Si l'on propose, par exemple, de couper une ligne donnée en deux également, on voit clairement que ce Problème ne peut avoir qu'une seule solution; mais si

FIG. 1. l'on propose de couper une ligne donnée AB en un point C , en sorte que le rectangle $AC \times CB$ soit égal au carré d'une autre ligne donnée EF ; il est clair que ce Problème peut avoir deux solutions, & qu'il n'en peut pas avoir davantage: car si après avoir trouvé le point C qui satisfait à la question, on la coupe encore en un autre point D qui soit autant éloigné de A que C l'est de B , le rectangle $AD \times DB$ sera égal au rectangle $AC \times CB$ puisque $AD = CB$, & $AC = DB$. Il est aisé de voir qu'il n'y a point d'autre point qui puisse satisfaire au Problème.

4. Les Problèmes indéterminez sont ceux qui ont une infinité de solutions: comme si l'on propose de diviser une ligne donnée en deux parties sans y admettre aucune autre condition, il est évident que tous les points de cette ligne satisfont au Problème. De même si l'on propose de trouver deux lignes dont le rapport soit égal à celui de deux autres lignes données; l'on voit évidemment que les deux lignes que l'on cherche, peuvent être prises d'une infinité de grandeurs différentes, & qui auront toujours entr'elles le même rapport. Semblablement

FIG. 2. 5. Si l'on demande de trouver un point B sur la circonférence d'un demi cercle ABC , en sorte que la perpendiculaire BH , menée du point cherché B sur le diamètre AC soit moyenne proportionnelle entre les parties AH & HC du diamètre AC . On sçait que tous les points de la

circonférence ont cette propriété, c'est-à-dire que toutes les perpendiculaires, comme BH sont moyennes proportionnelles entre AH & HC en quelqu'endroit que l'on prenne le point B .

D E F I N I T I O N .

6. **L**E s lignes droites ou courbes qui renferment, ou sur lesquelles sont tous les points qui résolvent un Problème indéterminé, sont appellez *lieux Geometriques*. Ainsi la demi circonférence ABC est le lieu qui contient tous les points B , d'où l'on peut tirer des perpendiculaires BH moyennes proportionnelles entre AH , & HC .

A V E R T I S S E M E N T .

7. Quoique l'on se propose ici de donner la maniere de démontrer les Theorèmes de Geometrie par le moyen de l'Algebre ; il ne faut pas entendre cela si generalement qu'il n'y en ait quelques-uns d'exceptez : car il y en a d'Elementaires où l'Algebre n'a point de prise. On ne peut, par exemple, démontrer par l'Algebre que le quarré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal aux deux quarrés des deux autres côtés, ni que les côtés homologues des triangles semblables sont proportionnels. Il en est de même de plusieurs autres ; & c'est particulièrement de ces deux Theorèmes que l'Algebre a besoin, & par le moyen desquels on vient à bout de tout, comme on verra dans toute l'étendue de cet Ouvrage. Soit qu'il s'agisse de résoudre un Problème, ou de démontrer un Theorème de Geometrie par le moyen de l'Algebre, il est toujours necessaire de trouver des équations & pour ce sujet il faut nommer toutes les lignes connues, & inconnues qui y peuvent servir, par des lettres de l'Alphabet, avec cette difference que l'on nommera les données ou connues, ou déterminées, ou constantes par les premières $a, b, c, d, \&c.$ & les inconnues ou indéterminées, ou variables par les dernières, $r, s, t, u, x, y, z.$

Et parcequ'il y a souvent plusieurs chemins pour trouver les équations necessaires pour la démonstration d'un Theorème, ou pour la résolution d'un Problème, on pourroit prendre celui qui

4 APPLICATION DE L'ALGEBRE

se presenteroit le premier s'ils conduisoient tous à des équations également simples, & d'où l'on pût tirer des constructions également élégantes : mais comme l'on arrive quelquefois à des équations tres composées, en suivant certaines routes, & que l'on arriveroit à de tres-simples en en suivant d'autres ; il s'ensuit que lorsqu'on ne trouve pas les premieres équations auxquelles on est parvenu par les premieres suppositions, à des simples, il en faut chercher d'autres par d'autres voyes, & ne se point rebuter : car lorsqu'un Problème est simple de sa nature, on trouve ordinairement des équations simples pour le résoudre : mais parceque pour trouver des équations simples, cela dépend particulièrement des lignes que l'on nomme par des lettres inconnues, c'est-à-dire, qu'en nommant certaines lignes par des lettres inconnues, on arrive à des équations tres-composées, au lieu qu'en en nommant d'autres par les mêmes lettres inconnues, on arrive souvent à des équations tres-simples.

8. On ne peut donner de regles précises pour déterminer parmi les lignes inconnues celles que l'on doit nommer par des lettres inconnues, pour parvenir aux équations les plus simples, ni pour tirer certaines lignes qui sont nécessaires tant pour la démonstration des Theorèmes, que pour la résolution des Problèmes, mais l'on peut faire certaines remarques, & établir certains principes qui ne laissent pas d'avoir un grand usage dans l'un & l'autre cas. On les trouvera ailleurs.

PRINCIPES GENERAUX

Pour appliquer l'Algebre à la Geometrie.

II. **L**ORSQU'IL s'agit de résoudre un Problème, ou de démontrer un Theorème de Geometrie, on doit premierement bien entendre ce dont il s'agit, c'est-à-dire l'état de la question, & bien remarquer les qualitez des lignes qui doivent former la figure sur laquelle on doit operer : car il y a des lignes données de position seulement ; d'autres données de grandeur, & de position tout ensemble ; d'autres données de grandeur, & non de position ; & d'autres enfin qui ne sont données ni de grandeur ni de position.

1. Les lignes données de position seulement, sont celles dont la situation est invariable & toujours la même, mais dont la longueur n'est point déterminée : comme la ligne EEG , qui étant une fois posée dans une situation perpendiculaire au prolongement du diamètre AC d'un demi cercle ABC , à une certaine distance du point C , ne peut avoir aucune autre position.

Les lignes données de grandeur & de position tout ensemble, sont celles qui ne peuvent changer de situation, & dont la longueur est déterminée, de sorte qu'elles ne peuvent ni allonger ni acourcir : comme le diamètre AC du demi cercle ABC , qui étant une fois posé dans une situation perpendiculaire à la ligne FG , ne peut avoir aucune autre position.

Les lignes données de grandeur, & qui ne le sont point de position, sont celles dont la grandeur ne peut varier ; quoique leur situation puisse changer, comme le demi diamètre DB , qui demeure toujours de même grandeur en quelqu'endroit de la circonférence ABC que l'on prenne le point B . Les lignes données de grandeur sont aussi appelées lignes *connues* ou lignes *constantes*, & on les nomme par des lettres connues, a, b, c, d , &c.

Les lignes qui ne sont données ni de grandeur ni de position, sont celles qui en changeant de places, changent aussi de grandeur, comme la perpendiculaire BH qui changera de grandeur & de place autant de fois que le point H s'éloignera ou s'approchera du point D . Les lignes qui ne sont données ni de grandeur ni de position, sont aussi appelées lignes *inconnues*, *indéterminées*, ou *variables*, & on les nomme par des lettres inconnues x, y, z , &c.

2. Lorsqu'on veut résoudre un Problème, on le doit considérer comme déjà résolu, & ayant mené les lignes que l'on juge nécessaires, l'on nommera celles qui sont connues par des lettres connues, & celles qui sont inconnues par des lettres inconnues, & sans faire de distinction entre les quantitez connues & inconnues, on exami-

nera les qualitez de la question, & l'on cherchera le moyen d'exprimer une même quantité en deux manieres différentes, & ces deux expressions d'une même quantité étant égalées l'une à l'autre, donneront une équation qui resoudra le Problème, qui sera déterminé, si elle ne renferme qu'une seule lettre inconnue.

Mais si elle renferme plusieurs lettres inconnues, il faut tâcher par le moyen des différentes conditions du Problème de trouver autant d'équations que l'on aura employé de lettres inconnues, afin que les faisant évanouir, de la maniere qu'il est enseigné dans tous les livres d'Algebre, l'on ait enfin une équation qui n'en renferme qu'une seule; cette équation étant reduite, s'il est nécessaire, à ses plus simples termes par les manieres ordinaires expliquées dans les mêmes livres d'Algebre, donnera la solution du Problème qui sera encore déterminé.

Si l'on ne peut trouver autant d'équations que l'on a employé de lettres inconnues, de sorte qu'il reste au moins deux inconnues dans la dernière équation, le Problème sera indéterminé, & aura une infinité de solutions. Enfin, si dans la dernière équation il restoit trois ou un plus grand nombre de lettres inconnues, le Problème seroit encore indéterminé, mais il seroit d'une autre espece dont nous ne parlerons point.

Il est souvent facile de reconnoître par les qualitez d'un Problème, s'il est déterminé ou indéterminé; auquel cas on sçait, si ayant employé deux inconnues, on doit trouver deux équations, ou si l'on n'en doit trouver qu'une seule: mais il arrive aussi quelquefois que cela n'est pas si facile à distinguer, & c'est en ce cas qu'il faut tâcher de trouver autant d'équations qu'on a employé d'inconnues, afin de déterminer par ce moyen la qualité du Problème.

On n'explique point plus au long ce principe; car tout ce Traité n'en est que l'application. On se contentera de faire ici quelques reflexions sur les équations qui ne contiennent qu'une seule, ou deux lettres inconnues,

c'est-à-dire sur les équations déterminées, & sur les indéterminées.

DES EQUATIONS DETERMINEES.

3. ON sçait que la lettre inconnue de ces équations, a autant de valeurs ou de racines, qu'elle a de dimensions dans le terme où elle est le plus élevée, que ces valeurs sont vraies, fausses, ou imaginaires; on ne dit pas qu'elles soient toutes d'une même espece dans une même équation: car dans une même équation il y en a quelquefois des trois especes, de vraies, de fausses, & d'imaginaires.

Les racines vraies ou positives sont celles qui sont précédées du signe +: comme $x = +a$:

Les racines fausses ou negatives sont celles qui sont précédées du signe -: comme $x = -a$. Les racines fausses sont d'un grand usage dans la Geometrie; car comme elles sont autant réelles que les racines positives, elles servent à déterminer les positions des courbes autant que les positives, dont elles ne diffèrent qu'en ce que les positives devant être prises d'un côté d'un point ou d'une ligne, les fausses doivent être prises de l'autre, comme on verra dans la suite.

Les racines imaginaires sont celles qui sont sous un signe radical avec le signe -: comme $x = \sqrt{-ab}$; & comme la valeur de ces racines ne peut être exprimée, on les regarde comme nulles ou = 0; de sorte que $x = \sqrt{-ab}$ doit être regardée comme $x = 0$.

Dans toutes les équations où il n'y a que deux termes tous deux positifs, l'un connu & l'autre inconnu, si l'exposant de l'inconnue est un nombre pair, elle aura deux valeurs réelles, l'une positive & l'autre negative; toutes les autres seront imaginaires. Par exemple, de $xx = aa$, l'on tire $x = +a$, & $x = -a$; car en quarrant les deux membres de ces deux équations l'on a toujours $xx = aa$, puisque $-x$ donne + aussi bien que $+x$, &

8 APPLICATION DE L'ALGÈBRE

en general de $x^p = a^p$ (p . signifie un nombre pair quelconque) l'on tire $x = \pm a$: ce qui se prouve comme on vient de faire, en élevant l'un & l'autre membre à la puissance paire p ; car l'on aura toujours $x^p = + a^p$.

Si l'un des termes est positif & l'autre negatif, toutes les valeurs de l'inconnue seront imaginaires : car on n'aura jamais le signe de $-$ après avoir élevé une quantité négative à une puissance paire : par exemple $-a$ élevé à une puissance paire p donnera toujours $+ a^p$, & jamais $- a^p$.

Si l'exposant de l'inconnue est un nombre impair, l'inconnue n'aura qu'une racine réelle qui est positive, lorsque les deux termes des équations sont positifs; négative lorsqu'un d'eux est negatif, toutes les autres racines sont imaginaires : par exemple, de $x^3 = a^3$, on tire $x = a$, & non pas $x = -a$, & de $x^3 = -a^3$, on tire $x = -a$ & non pas $x = a$; car le cube d'une grandeur positive est toujours positif, & celui d'une quantité négative est toujours negatif. Et en general de $x^q = + a^q$ (q signifie un nombre impair) on tire $x = + a$; de même, de $x^q = - a^q$ on tire $x = - a$: car $+ a$ élevé à une puissance impaire q donne $+ a^q$. & $- a$ élevé à une puissance impaire q donne toujours $- a^q$.

On fera les mêmes raisonnemens sur les équations composées : par exemple $xx = aa + bb$ donne $x = \pm \sqrt{aa + bb}$, $xx = aa - bb$ donne $x = \pm \sqrt{aa - bb}$: mais en ce cas si b surpasse a , les deux valeurs de x sont imaginaires.

$xx = + ax + bb$ donne $x = \pm \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$: car en transposant l'on a $xx + ax = -bb$; & ajoutant $\frac{1}{4} aa$

de part & d'autre pour rendre le premier membre carré, l'on aura $xx + ax + \frac{1}{4} aa = \frac{1}{4} aa + bb$; donc en ex-

trayant la racine carrée de part & d'autre, l'on a $x + \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$, ou $x = \pm \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Il en est

ainsi

ainsi des autres. Mais il faut remarquer que si dans ce dernier exemple, & dans les semblables, bb a le signe de $-$, & que b surpasse $\frac{1}{2} a$, la valeur de x sera imaginaire; car puisque la quantité $\frac{1}{4} aa - bb$ qui est sous le signe *radical*, est alors negative $\sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$ sera une quantité *imaginaire*; & par conséquent aussi $\pm \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$; car une quantité imaginaire étant combinée de quelque maniere que ce soit avec une quantité réelle, rend le tout imaginaire.

4. On connoît la nature d'un Problème déterminé par le plus haut degré, ou ce qui est la même chose, par la plus haute puissance de l'inconnue, qui se trouve dans l'équation qui sert à le résoudre, en supposant que cette équation soit réduite à son expression la plus simple. De sorte que lorsqu'en resolvant un Problème, on vient à une équation où l'inconnue n'a qu'une dimension: comme $x = \frac{ab}{c}$, qui est une équation du premier degré, le Problème est appelé *simple*.

Lorsqu'on trouve une équation où l'inconnue a deux dimensions: comme $xx = ax + bb$, qui est une équation du second degré, le Problème est nommé *plan*.

Lorsqu'on trouve une équation où l'inconnue a trois ou quatre dimensions, comme $x^3 = aab$, ou $x^4 = a^3b$, qui sont des équations du troisième & du quatrième degré, le Problème est nommé *solide*.

Lorsqu'on vient à une équation où l'inconnue est élevée au-delà du quatrième degré, le Problème est nommé *lineaire*.

5. Quand une équation déterminée a tous ses termes, le nombre en est plus grand de l'unité, que l'exposant de la plus haute puissance de la lettre inconnue qu'elle

renferme. Ainsi une équation du second degré ne peut avoir que trois termes ; une équation du troisième degré, n'en peut avoir que quatre ; une du quatrième, cinq ; & ainsi des autres. Mais il y manque souvent quel qu'un des termes moyens, quelquefois il en manque plusieurs, & quelquefois ils y manquent tous.

Le premier terme d'une équation, est celui où l'inconnue est élevée à une puissance plus haute que dans tout autre terme. Le second, est celui où elle est moins élevée d'une dimension. Le troisième, celui où elle est moins élevée de deux dimensions ; & ainsi de suite. Le dernier, est celui où elle ne se trouve point du tout.

Mais il faut remarquer qu'il se rencontre souvent dans une équation des termes *complexes*, ou composez de plusieurs quantitez Algebriques, jointes ensemble par + ou par -, qui sont ceux où l'inconnue se trouve élevée à la même puissance, ou bien ceux où elle ne se trouve point du tout. Par exemple, ces quantitez $axx - bxx + cxx$, ou $abb - bcc + d^3$, ne doivent être regardées que comme un seul terme.

On écrit ordinairement le premier terme d'une équation seul dans le premier membre, & tous les autres dans le second, selon leur ordre ; ou bien on les égale tous à zero, en les écrivant tous dans le premier membre de l'équation, selon leur ordre ; & en écrivant 0 seul dans le deuxième, en observant que le premier soit toujours simple, & délivré de toute quantité connue, comme on voit dans l'équation suivante.

$$\begin{array}{r} x^3 + bxx - abx + a^3. \\ - cxx + bcx - aab = 0. \\ + dxx \qquad + bcc. \end{array}$$

DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES.

III. **L**es équations où il se rencontre deux lettres inconnues, qu'on appelle aussi équations *locales*, servent

à construire les Problèmes indéterminez, comme celles où il ne s'en rencontre qu'une servent à construire les Problèmes déterminez. Mais parceque tant qu'il y a dans une équation deux lettres inconnues ; en les regardant comme telles, on ne peut connoître ni l'une ni l'autre. C'est pourquoi on est obligé d'assigner à l'une des deux, une valeur arbitraire ; & la regardant ensuite comme donnée , on pourra connoître la valeur de l'autre.

Et comme on peut assigner à la même inconnue une infinité de valeurs l'une après l'autre , l'autre inconnue en pourra aussi avoir une infinité. Mais en donnant ainsi différentes valeurs à une des inconnues d'une équation , on doit , à chaque fois, regarder cette équation comme une équation déterminée ; & par conséquent lui attribuer tout ce qu'on a dit dans l'Article précédent des équations déterminées. En effet, résoudre, ou plutôt construire un Problème indéterminé , c'est construire une infinité de fois un Problème déterminé.

REMARQUE.

I. **L**ES valeurs arbitraires que l'on assigne à une des lettres inconnues d'une équation indéterminée , doivent souvent être limitées, & être renfermées dans certaines bornes. Et si elles excèdent ces bornes, les valeurs de l'autre inconnue , seront ou negatives ou imaginaires. Par exemple, dans cette équation $x = b - y$, toutes les valeurs arbitraires que l'on peut donner à l'inconnue y ne doivent point excéder la grandeur donnée b , autrement celles de x seroient negatives; ce qui est évident. Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = b$; & si l'on fait $y = b$, l'on aura $x = 0$; car l'équation deviendra $x = b - b = 0$. Dans cette équation $xx = aa - yy$, les valeurs arbitraires que l'on peut donner à l'inconnue y , ne doivent point excéder la grandeur donnée a : car autrement les valeurs de x seroient imaginaires, puisque tout le second membre de l'équation seroit negatif. Si l'on fait $y = a$, l'on aura

B ij

$xx = aa - aa = 0$. & si l'on faisoit $y = 0$, l'on auroit $xx = aa$; donc $x = \pm a$. Mais dans cette équation $ax = by$, on peut donner telle valeur que l'on voudra à l'inconnue y : car x aura toujours une valeur positive, à moins que l'on ne face $y = 0$, auquel cas l'on aura $ax = 0$, ou $x = 0 \frac{0}{a} = 0$.

T H E O R È M E.

2. *SI l'on assigne à une des inconnues d'une équation indéterminée du premier degré, où elles ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entr'elles, tant de valeurs arbitraires qu'on voudra. Je dis que tous les points qui détermineront les valeurs correspondantes de l'autre inconnue, seront dans une ligne droite.*

D E ' M O N S T R A T I O N.

S O I T l'équation $ay = bx$, en la réduisant en Analogie l'on a $a. b :: x. y$; soit presentement une ligne droite AH , dont le point A soit fixe; & ayant pris sur AH l'intervalle AB égal à la ligne donnée a , mené par le point B , la ligne BC égale à la ligne donnée b , qui fasse avec AH tel angle qu'on voudra, & mené par A & C , la droite AC indéfiniment prolongée. Il est clair qu'ayant pris sur AH un point quelconque D , mené DE parallèle à BC ; & nommé AD , x ; & DE , y ; l'on aura toujours $a. b :: x. y$, en quelque endroit de la ligne AH que l'on prenne le point D , ou ce qui est la même chose, quelque grandeur arbitraire que l'on assigne à l'inconnue x , celle de y sera toujours déterminée par la ligne AG . De sorte que la ligne AG est lieu qui renferme tous les points qui satisferont au Problème, qui doit être résolu par l'équation proposée $ay = bx$ C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E.

3. *SI l'équation proposée étoit déterminée, comme $ay = bc$, ce seroit toujours la même chose, excepté que la*

lettre c qui tient la place de x , est constante; ainsi ayant pris sur AH , $AD=c$, & mené DE parallele à BC ; DE fera la valeur de y ; mais en ce cas de tous les points de la ligne AG , il n'y a que le seul point E qui résout le Problème, puisque $AD=c$ ne peut avoir différentes valeurs.

COROLLAIRE II.

4. D'où l'on voit que les équations déterminées, & indéterminées du premier degré, sont de même genre; puisqu'elles se construisent par les mêmes lignes, & de la même maniere.

COROLLAIRE III.

5. SI Dans l'équation précédente $ay = bx$, a étoit égale à b , elle deviendroit $y = x$; & il n'y auroit alors qu'à faire $BC = AB$; & assignant à x la valeur arbitraire AD ; $DE (y)$ parallele à BC , feroit égale à $AD = x$.

COROLLAIRE IV.

6. IL est évident que dans toutes les équations indéterminées du premier degré, les inconnues ont entr'elles un rapport constant, c'est-à-dire, qu'elles sont l'une à l'autre comme une ligne donnée, à une ligne donnée, ou en raison d'égalité: comme dans l'équation précédente $ay = bx$, où $x, y :: a, b$, & dans celle-ci $y = x$, où $x, y :: 1, 1$.

COROLLAIRE IV.

7. ON voit aussi avec évidence que dans les équations indéterminées du premier degré, une des inconnues croissant ou diminuant, l'autre croît aussi ou diminue; qu'elles peuvent toutes deux augmenter ou diminuer à l'infini, en gardant toujours entr'elles le même rapport.

THEOREME.

8. *SI dans une équation indéterminée qui n'est point du premier degré, & où par conséquent les deux lettres inconnues sont multipliées ou par elles-mêmes, ou entr'elles, de quelque manière que ce puisse être, l'on assigne à l'une des deux tant de valeurs arbitraires qu'on voudra. Je dis que tous les points qui détermineront les valeurs correspondantes de l'autre, seront dans une ligne courbe.*

DÉMONSTRATION.

DANS les équations à la ligne droite, les inconnues gardent toujours (n° 6) entr'elles un rapport constant. Or lorsque dans une équation, les deux lettres inconnues sont multipliées ou par elles-mêmes, ou entr'elles, ou de l'une & de l'autre manière tout ensemble; elles ou les lignes qu'elles expriment, ne peuvent garder le même rapport dans toutes les variations ou changemens de valeurs qu'elles peuvent recevoir: car il faudroit pour cela, que l'une des deux fût dans un des membres de l'équation, & l'autre dans l'autre, toutes deux seules, ou accompagnées seulement de lettres connues. Mais par l'hypothèse, ces deux lettres sont multipliées ou par elles-mêmes ou entr'elles; donc elles ne peuvent garder un rapport constant dans tous les changemens de valeur qu'on leur peut assigner: c'est pourquoi, en assignant tant de valeurs que l'on voudra à l'une des deux, les valeurs relatives de l'autre ne peuvent être déterminées par une ligne droite. Il faut donc qu'elles le soient par une ligne courbe. *C. Q. F. D.*

C'est ici la preuve générale, chaque équation en fournit de particulières, en les comparant à l'équation à la ligne droite, comme on va voir par l'exemple qui suit.

E X E M P L E.

9. S O I T l'équation $yy = aa - xx$, qui est du second degré; Il est clair, 1°. Que x croissant, y diminue: car le second membre de l'équation devient d'autant plus petit, que x devient grande. 2°. On ne peut pas augmenter x en sorte qu'elle surpasse la ligne exprimée par a : car le second membre deviendrait négatif; & la valeur de y seroit par conséquent imaginaire. 3°. Si l'on fait $x = a$, l'équation deviendra $yy = aa - aa = 0$. Il est donc évident que cette équation ne se rapporte point à la ligne droite; puisque ses qualitez sont toutes différentes de celles des équations du premier degré; & partant qu'elle se rapporte à une ligne courbe.

Pour déterminer & décrire cette courbe par le moyen de son équation $yy = aa - xx$. Soit une ligne droite CH , donnée de position dont l'extrémité C soit fixe, & dont les parties CP soient nommées x ; soit une autre ligne CG perpendiculaire à CH , & dont les parties CQ soient nommées, y ; soit aussi une ligne donnée KL nommée, a ; ayant mené PM parallèle à CG , & QM parallèle à CH ; QM sera $= CP = x$, & $PM = CQ = y$.

FIG. 4.

Si l'on assigne présentement tant de valeurs différentes qu'on voudra à l'une des inconnues x (CP) l'on déterminera par la Geometrie, les valeurs correspondantes de y (PM). De sorte que tous les points M seront à la courbe à laquelle se rapporte l'équation proposée $yy = aa - xx$.

Supposons premièrement $x = 0$; le point P tombera en C , & le point M , sur la ligne CG ; & effaçant dans l'équation, le terme xx , qui devient nul par la supposition de $x = 0$, l'on aura $yy = aa$, donc $y = \pm a$; c'est pourquoi si on prolonge CG du côté de C ; & qu'on fasse Ce , & CE chacun $= KL = a$; CE sera la valeur positive de y , & Ce sa valeur négative, & les points E & e , seront la courbe dont il s'agit.

Supposons en second lieu $y = 0$, le point Q se con-

fondra avec le point C , le point M tombera sur CH , & l'on aura $0 = aa - xx$, ou $xx = aa$; donc $x = \pm a$; c'est pourquoi, si l'on prolonge CH du côté de C , & qu'on prenne de part & d'autre du point C , CB & CA chacune égale $KL = a$; CB sera la valeur positive de x , & CA sa valeur négative, & les points B & A , seront à la même courbe en question. D'où l'on voit déjà que les quatre points A , E , B , e , sont également distans du point C .

Si l'on assigne à x une valeur quelconque CP moindre que CB pour déterminer la valeur de $PM = y$, l'on aura en extrayant la racine quarrée $y = \pm \sqrt{aa - xx}$ d'où l'on tire cette construction. Ayant prolongé PM du côté de P ; du point C pour centre, & pour demi-diamètre l'intervalle $KL = a$, l'on décrira un cercle qui coupera PM en M & m ; PM sera la valeur positive de y , & Pm sa valeur négative, & les points M , m seront à la courbe cherchée; car à cause du triangle rectangle CPM ; l'on a $PM^2 = CM^2 - CP^2$, c'est-à-dire en termes Algébriques $yy = aa - xx$; dont $y = \pm \sqrt{aa - xx}$.

Or il est évident que pour déterminer la valeur de y (PM) dans toutes les positions du point P , il faudra décrire un cercle du centre C , & du rayon KL ; c'est pourquoi ce cercle est lui-même la courbe cherchée; ce qui d'ailleurs étoit facile à remarquer: mais on a jugé à propos de faire sur l'équation au cercle, qui est la plus simple de toutes les courbes, les raisonnemens que l'on vient de faire, pour donner une idée de ceux que l'on doit faire sur les équations aux autres courbes, afin de les décrire par leur moyen, d'en marquer les principales déterminations, & d'en découvrir les principales propriétés.

COROLLAIRE

COROLLAIRE I.

10. **O**N voit clairement qu'au lieu d'avoir assigné à x , dans l'équation précédente, des valeurs CP prises sur CH pour trouver tous les points M, m , ou pour déterminer les valeurs correspondantes de $y = PM$, l'on auroit pû regarder x comme inconnue, & assigner à y des valeurs CQ prises sur CG , qui auroient servi à déterminer de la même maniere les valeurs correspondantes de $x = \underline{QM = CP}$, en tirant de l'équation précédente, $x = \sqrt{aa - yy}$.

COROLLAIRE II.

11. **I**L est clair que si une des inconnues x de cette équation $yy = aa - xx$ devenoit une constante, la valeur de l'autre y pourroit de même être déterminée par le moyen du cercle; d'où il suit en general que toutes les équations déterminées du second degré peuvent être construites par le moyen du cercle, & qu'elles sont de même genre que les équations indéterminées du même second degré.

REMARQUE.

12. **O**N remarquera 1°. Que dans toutes les positions du point P , la ligne PM doit toujours demeurer parallèle à CG ; & que dans toutes les positions du point Q , la ligne QM doit toujours demeurer parallèle à CH . 2°. Qu'il y a toujours deux points, l'un (P) sur CH , & l'autre (Q) sur CB , qui peuvent servir également à déterminer un même point (M). 3°. Que tout ce qu'on vient de dire du cercle se peut appliquer à toutes les autres courbes, lorsqu'il s'agit de les décrire par le moyen de leurs équations.

DEFINITIONS.

13. **D**ANS toutes les courbes, les lignes droites (CH) dont au moins une des extremitéz (C) est fixe, & dont

C

les parties (CP) sont nommées par l'inconnue de l'équation à qui on donne des valeurs arbitraires (CP) pour déterminer la grandeur de la ligne (PM) exprimée par l'autre inconnue, sont nommées *axes* ou *diamètres* de ces courbes.

14. Les mêmes parties (CP) sont nommées *abscisses* ou *coupées*.

15. Les lignes (PM) exprimées par l'inconnue de l'équation dont on cherche la valeur en supposant l'autre inconnue comme donnée à chaque position du point P , & qui demeurent parallèles elles-mêmes, pendant que le même point P change de place, sont nommées *appliquées*, ou *ordonnées* à l'axe CH .

16. Parceque QM est égale & parallèle à CP & CQ à PM , & que le point Q pris sur CG peut servir à trouver le point M aussi bien que le point P ; on peut prendre CG pour l'axe ou le diamètre de la courbe; CQ pour l'abscisse, ou coupée; & QM , pour l'appliquée ou ordonnée; c'est pourquoi on nommera CH , & CG , *axes* ou *diamètres conjugués*; CP & PM , ou CQ & QM ensemble *coordonnées*; le parallélogramme $CPMQ$ formé par les coordonnées, le parallélogramme des coordonnées; & le point C , le *commencement*, ou *l'origine* des coordonnées.

17. Les équations indéterminées ne servent pas seulement à construire les Problèmes indéterminés, ou à décrire les courbes auxquelles elles se rapportent, & dont elles expriment la nature. On pourroit encore par leur moyen construire tous les Problèmes déterminés: car il n'y a point de Problème déterminé, quelque simple qu'il puisse être, où pour le résoudre, on ne puisse employer deux lettres inconnues, & trouver par conséquent deux équations indéterminées, qui étant construites ensemble, selon les règles qu'on donnera dans la suite, les lignes droites ou courbes, auxquelles elles se rapportent, détermineroient par leur intersection les points qui satisferoient aux Problèmes, d'où l'on auroit tiré ces équations.

tions. On pourroit aussi tirer de ces sortes de constructions des démonstrations tres-simples, à la maniere des Anciens. Mais il arriveroit quelquefois que les Problèmes ne seroient pas tous construits avec les lignes les plus simples qu'ils le puissent être, quoique d'ailleurs la construction en fût tres-simple. Or selon M^r *Descartes*, & selon la raison même, c'est un vice en Geometrie d'employer dans la construction d'un Problème, des lignes plus composées que celles qu'exige sa nature.

On trouvera dans l'art. 4. n^o. 17, 18, 19, 20 & 21. des regles pour faire connoître quand un Problème déterminé peut être construit par le moyen de deux équations indéterminées. En voici pour distinguer les courbes les plus simples d'avec les plus composées.

18. C'est le degré d'une équation indéterminée qui fait connoître que la courbe dont elle exprime la nature est plus ou moins simple. Et le degré d'une équation est déterminé par la plus haute puissance de celle des deux inconnues, qui est la plus élevée, lorsqu'elles ne le sont pas également, ou par le produit des deux inconnues, quand il s'y rencontre, & qu'il a plus de dimensions que les mêmes inconnues dans les autres termes. Ainsi lorsque dans une équation, l'une ou toutes les deux inconnues, soit qu'elles soient multipliées, ou par elles-mêmes, ou entr'elles, ont deux dimensions; comme $ax = yy$, ou $ax - xx = yy$, ou $xy = ab$; l'équation est du *second degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, est du *premier genre*.

Lorsque l'une ou toutes les deux, ou leur produit, a trois dimensions: comme $x^3 + axy = a^3$, ou $x^3 - axy = y^3$, ou $xy = ayy + a^3$, l'équation est du *troisième degré*, & la courbe dont elle exprime la nature, est du *second genre*, & ainsi de suite. Or on convient que les courbes du premier genre sont plus simples que celles du second; & celles-ci plus que celles du troisième, &c. C'est pourquoi ce seroit un vice de construire un Problème par le moyen d'une courbe du second genre, lorsqu'il peut être con-

20 APPLICATION DE L'ALGÈBRE
struit par le moyen d'une courbe du premier. Il en est
ainsi des autres genres.

R E M A R Q U E.

19. **L**ORSQU'ON décrit une courbe par le moyen de son équation, on regarde une des lettres inconnues qu'elle renferme, comme donnée à chaque fois qu'on change sa valeur pour déterminer la valeur correspondante de l'autre; on doit donc aussi regarder à chaque fois l'équation, comme une équation déterminée; & parceque les équations déterminées, sont d'autant plus faciles à construire, que leurs inconnues ont moins de dimensions; il est à propos dans les équations indéterminées, où les inconnues ne sont pas également élevées, de prendre pour constante, celle qui a plus de dimensions; & pour inconnue, celle qui en a moins.

Et puisque trouver un point d'une courbe, c'est résoudre un Problème déterminé; lorsque dans une équation indéterminée, l'inconnue que l'on ne prend point pour constante, n'aura qu'une dimension, la description de la courbe dépendra de la construction des Problèmes simples déterminez. Lorsque cette inconnue aura deux dimensions; la description de la courbe dépendra de la construction des Problèmes plans; lorsqu'elle en aura trois ou quatre, la description de la courbe dépendra de la construction des Problèmes solides; & lorsqu'elle en aura un plus grand nombre, la description de courbe dépendra de la construction des Problèmes linéaires.

On remarquera aussi que toutes les opérations que l'on fait en Geometrie, dépendent de la Geometrie plane, c'est-à-dire de la construction des équations déterminées du premier, & du second degré; c'est pourquoi lorsque l'inconnue que l'on ne prend point pour constante dans une équation indéterminée, aura plus de deux dimensions, on ne pourra construire cette équation par elle-même, il la faudra changer en deux autres équations, où l'une

des inconnues n'excede point deux dimensions ; & par le moyen de ces deux équations , on décrira les deux courbes dont elles exprimeront la nature , & leur intersection fera un des points de la courbe dont l'équation proposée exprime la nature.

En déterminant le genre des courbes , comme on a dit (n°. 17.) on trouvera que le premier genre n'en renferme que quatre , qui sont le cercle , la parabole , l'ellipse , & l'hyperbole. De sorte que toutes les équations du second degré appartiennent à quelqu'une de ces quatre courbes. Mais comme le cercle , à cause de sa description qui est tres-simple , passe pour la plus simple des quatre , ce seroit encore un vice en Geometrie , d'employer une des trois autres , lorsque le cercle peut être employé.

C'est parceque l'on construit la plus grande partie des Problèmes de Geometrie par le moyen de ces quatre courbes , que je me suis déterminé à donner dans cet Ouvrage les élémens de la parabole , de l'ellipse & de l'hyperbole , les propriétés du cercle étant assez connues d'ailleurs , afin de n'y supposer que les simples élémens de Geometrie.

Les Geometres distinguent deux sortes de courbes ; les courbes *Geometriques* , & les courbes *Mécaniques*.

20. Les courbes geometriques , sont celles dont les axes ou les diametres conjuguez , & les coordonnées sont des lignes droites , qui peuvent toujours former un parallelogramme , que nous avons nommé (n°. 16.) le parallelogramme des coordonnées , & qui ont des équations réglées qui expriment le raport que ces coordonnées ont entr'elles ; & dont on peut trouver par le moyen de ces équations , non seulement tous les points , mais tel point qu'on voudra , indépendamment des autres.

21. Les courbes mécaniques sont celles dont les coordonnées ne sont point toutes deux droites , ou , dont l'une des coordonnées les rencontrent en une infinité de points. Et comme dans l'équation qui exprime la nature d'une courbe , l'une des deux lettres inconnues doit avoir au

moins autant de dimensions, qu'il y a de points où la ligne exprimée par cette inconnue rencontre la courbe, il faudroit que dans les équations de ces courbes, au moins une des inconnues eut une infinité de dimensions, ce qui est impossible.

A V E R T I S S E M E N T.

22. Avant Mr Descartes, on ne prenoit pour Geometrique que ce qui se faisoit par le moyen du cercle, & de la ligne droite, & tout ce qui se faisoit par d'autres courbes étoit réputé mécanique. Mais Mr Descartes, & après lui tous les nouveaux Geometres, ont pris pour Geometrique, tout ce qui se fait par le moyen des courbes Geometriques. Et les mêmes Auteurs ne prennent pour mécanique, que ce qui se fait par le moyen des courbes mécaniques.

O B S E R V A T I O N S

Pour l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

IV. **V**OICI les Remarques ou Observations dont on a parlé dans le premier Article, n°. 8.

1. Lorsqu'on veut résoudre un Problème, il faut toujours employer deux lettres inconnues, pour nommer deux lignes indéterminées, qui aient leur origine en un point fixe, & qui fassent toujours un angle constant, c'est-à-dire, que la ligne nommée par l'une des lettres inconnues, croissant ou diminuant, celle qui est nommée par l'autre lettre inconnue, demeure toujours parallèle à elle-même, ou à quelque ligne donnée. Ainsi, lorsqu'on a nommé (art. 3. n°. 9.) CP, x ; & PM, y ; l'on a eu égard à cette Observation. De même le demi cercle AMB étant donné; s'il étoit question de déterminer le point M sur sa circonférence; ayant abaissé la perpendiculaire MP , l'on pourroit nommer indifferemment AP , ou CP , ou BP, x ; car les points A, C , & B sont fixes; & PM, y . Et si le Problème est déterminé, on trouvera deux équations indéterminées; mais on n'en trouvera qu'une seule, s'il est indéterminé.

2. Si l'on employe plus de deux inconnues, il faut qu'il y en ait deux qui expriment des lignes, dont la

position soit telle qu'on vient de dire dans l'observation précédente ; on placera ensuite les autres, comme on voudra. Mais on peut presque toujours se dispenser d'en employer plus de deux, en exprimant les autres lignes inconnues, dont on a besoin, ou par la propriété du triangle rectangle, ou par celle des triangles semblables.

3. S'il y a un point donné B sur un des côtes AH d'un angle donné GAH ; la droite BC perpendiculaire à AH , ou parallèle à quelque ligne donnée de position, sera donnée de grandeur & de position; comme aussi les intervalles AB , AC ; & partant ces lignes peuvent être nommées par des lettres connues a , b , c . Mais si le point B , est cherché, les lignes AB , BC , AC seront indéterminées, ou variables: & l'on en pourra nommer deux AB & BC , ou AC & BC par deux lettres inconnues x , & y : car elles ont les qualitez requises par la premiere Observation.

FIG. 3.

4. S'il y a un point donné D hors d'une ligne AB donnée de position & de grandeur, la ligne DC perpendiculaire à AB , ou parallèle à quelque ligne donnée de position, & les deux parties AC , CB , de la ligne AB feront aussi données de grandeur & de position. Mais si le point D est cherché, les lignes DC , AC , & CB seront variables, & l'on pourra nommer une des parties AC , de la donnée AB , x ; CD y ; & CB (ayant nommé AB , a) sera $a - x$.

FIG. 5.

5. Un angle GAH , & un point B au dedans de cet angle (Fig. 6), ou au dehors (Fig. 7) étant donnez de position; les paralleles BC , BD , ou leurs égales AC , AD , feront aussi données, & on les pourra nommer a & b : mais si le point B est cherché, les paralleles AC , AD , seront inconnues, & on les pourra nommer x , & y .

FIG. 6. 7.

6. Ce seroit la même chose, si le point B étoit donné ou cherché sur une courbe donnée HBG , dont AG , & AH sont les deux axes, ou deux diametres conjuguez: mais le point B étant cherché, on pourroit nommer GC , & CB , ou HD , & DB , ou (si la courbe rencon-

FIG. 8.

troit encore CG prolongée en un point F) FC , & CB ,
 x & y .

FIG. 8. 7. Lorsqu'on détermine par une operation repetée, plusieurs points B sur un plan où il y a des lignes qui servent à déterminer tous ces points, & qu'on veut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe sur laquelle les mêmes points se doivent rencontrer, il faut toujours nommer par une lettre inconnue, quelque ligne; comme BC , qui part d'un des points B , & qui étant parallèle à quelque ligne donnée AH , rencontre une autre ligne AG donnée de position en quelque point C , & nommer par une autre lettre inconnue quelque partie de la ligne AG comprise entre le point variable C , & quelque point fixe A , ou G .

FIG. 9. 8. Un angle GAH , & un point fixe D hors de cet angle, étant donné de position sur un plan; s'il s'agit de mener une ligne DEF par quelque point cherché E ou F sur un des côtes de cet angle, dans de certaines conditions, les parties AE , AF seront inconnues, & pourront être nommées x , & y : mais les parallèles DB , DC , aux côtes AH , AG , ou leurs égales AC , AB seront données, & pourront être nommées, a , & b .

9. Si l'on est obligé de tirer des lignes autrement que selon les regles contenues dans les Observations précédentes; on les tirera de maniere qu'elles forment plutôt dans la figure, sur laquelle on opere, des triangles semblables, que des triangles rectangles: car les triangles semblables donnent des équations plus simples que les triangles rectangles.

10. La propriété du triangle rectangle, & des triangles semblables, donnent presque toutes les équations dans lesquelles on tombe, en appliquant l'Algebre à la Geometrie.

11. Les hypotenuses des triangles rectangles doivent toujours être exprimées par le moyen des deux côtes qui forment l'angle droit, à moins qu'elles ne soient données de grandeur. Ainsi les deux côtes étant nommez x

&

& y , l'hypothénuse sera $\sqrt{xx + yy}$.

12. On ne doit jamais nommer les lignes égales, ou qui doivent être égales, par des lettres différentes.

13. S'il y a de la difficulté à employer, & à nommer des lignes qui semblent nécessaires à la résolution d'un Problème; on pourra employer en leur place d'autres lignes, pourvû qu'elles ayent entr'elles le même rapport. Par exemple, en supposant que BC , & DE soient parallèles, s'il s'agit d'employer AB , & BD ; & que AC , & CE soient nommées; on pourra employer AC , & CE au lieu de AB , & BD ; puisque $AC.CE :: AB.BD$. FIG. 3.

14. On abrege le calcul, & on trouve souvent des équations plus simples, en prenant pour l'origine des inconnues le point qui divise par le milieu une ligne donnée de grandeur: & l'on tombe par ce moyen dans un principe tres-connu, & qui est souvent d'un grand secours dans l'Application de l'Algebre à tous ses usages. Le voici.

15. La moitié de la somme de deux grandeurs, plus la moitié de leur différence est égale à la plus grande; & la moitié de la somme de deux grandeurs, moins la moitié de leur différence est égale à la plus petite. Ainsi, nommant la somme $2m$, & la différence $2n$; la plus grande sera $m + n$, & la plus petite $m - n$.

16. Il n'est pas nécessaire de prendre tant de précautions, pour nommer les lignes de la figure sur laquelle on opere, quand il s'agit de démontrer un Theorème: car comme il n'y a point de lignes dont il soit nécessaire de déterminer la longueur, on les peut toutes nommer par telles lettres qu'on voudra, connues, ou inconnues: mais on doit toujours suivre les regles précédentes pour tirer les lignes nécessaires.

On considère néanmoins quelquefois les Theorèmes qu'on veut démontrer, comme des Problèmes à résoudre. Et en ce cas, on peut suivre les principes précédens.

D

A V E R T I S S E M E N T.

Toutes ces Observations peuvent apporter beaucoup de facilité pour trouver des équations dans l'Application de l'Algèbre à la Géométrie: mais la première & la septième sont les plus considérables de toutes; car en suivant ce qui y est prescrit, les Problèmes indéterminez, seront toujours résolus par la voye la plus simple, ou plutôt par la seule voye naturelle; c'est pourquoy si en ce cas, on avoit employé plus de deux inconnues, il faudroit faire évanouir celles qui expriment des lignes dont la position n'est point conforme à ce qui est dit dans ces deux Observations. Mais parcequ'on ne peut pas construire tous les Problèmes déterminez par le moyen de deux équations indéterminées, pour les raisons que l'on a dites art. 3. n°. 17; on est quelquefois obligé d'abandonner ces deux Observations. Voici à peu près ce qu'il y a à observer, quand on les veut suivre.

17. Quand en résolvant un Problème avec deux inconnues, suivant la première Observation, on trouvera deux équations indéterminées; le Problème sera déterminé, & on le pourra construire avec ces deux équations, si elles se rapportent toutes deux à la ligne droite, ou l'une à ligne droite, & l'autre au cercle, ou toutes deux au cercle; car il n'y a point de lignes plus simples que la droite, & la circulaire.

18. Si l'une de ces deux équations indéterminées se rapporte au cercle, & que l'autre soit du second degré, il faudra faire évanouir l'une des deux inconnues, & si l'équation déterminée qui en résulte, n'est point du premier, ou du second degré, on examinera si elle ne peut point être divisée par quelque binome composé de quelqu'un des diviseurs du dernier terme, & d'une puissance du premier qui lui soit égale, pour la réduire, si cela se peut, à une équation déterminée du second degré. Si par ce moyen on n'y réussit point, il faudra, si elle est du quatrième degré, faire évanouir le second

terme, la transformer en une équation du troisième, & voir si elle ne peut point ensuite être divisée par quelque binome, composé d'un des diviseurs de deux dimensions du dernier terme, & du carré de l'inconnue qu'elle renferme, & la réduire par ce moyen à une équation du second degré. Mais si l'on ne trouve aucun binome plan, qui puisse diviser l'équation transformée, le Problème sera solide, & on pourra le construire avec les deux équations indéterminées, de la manière qu'on dira dans la neuvième Section; & la construction sera même beaucoup plus simple, & plus élégante que celle qu'on tiroit de l'équation déterminée, qui résulte de l'évanouissement de l'une des inconnues, comme on pourra voir en comparant les constructions des Problèmes solides de la neuvième Section, avec celles de la dixième.

19. Si par la seule division l'équation déterminée peut être réduite à une équation du second degré, le Problème sera plan, & on le construira par le moyen de l'équation réduite à deux dimensions, comme on enseignera dans la Section suivante.

Si pour réduire l'équation déterminée à une équation du second degré, il faut employer la transformation, on pourroit encore le construire par le moyen de l'une des deux équations du second degré que l'on en tire: mais la construction en sera beaucoup plus simple, si en abandonnant ce qui est dit dans la première Observation, on prend d'autres lignes pour inconnues, & que l'on en tire de nouvelles, selon qu'on le jugera nécessaire, & que par ce moyen on puisse venir à une équation déterminée du second degré. Et si l'on n'y réussit pas du premier coup, il faudra encore tenter d'autres voyes; car quand un Problème est simple, on peut trouver une équation simple, & conforme à sa nature, soit d'une manière, soit d'une autre.

20. Si aucune des deux équations indéterminées ne se rapporte point au cercle, & n'y puisse être réduite par la combinaison de l'une avec l'autre, ou autrement;

D ij

& que l'équation qui résulte de l'évanouissement de l'une des inconnues, soit du troisième ou du quatrième degré, & ne puisse être réduite par la division, ou par la transformation à une équation du second degré; il faudra par son moyen construire le Problème, comme il sera enseigné dans la dixième Section: car il sera nécessairement solide; & quand on chercheroit d'autres équations par d'autres voyes, elles ne pourroient être plus simples que par leurs termes, un Problème ne pouvant jamais changer de nature.

21. Enfin si l'équation qui résulte de l'évanouissement de l'une des deux lettres inconnues renfermées dans les deux équations indéterminées, excède le quatrième degré, & n'y puisse être réduite par la division; le Problème sera lineaire, & on le construira par le moyen des deux équations indéterminées, comme on dira dans la douzième Section.

22. La raison de tout ceci, est que pour construire les Problèmes simples, & plans, on ne doit employer que la ligne droite & le cercle; puisqu'on le peut toujours. Et si on les construisoit par le moyen des deux équations indéterminées que l'on trouve en employant deux lettres inconnues, on y employeroit souvent d'autres courbes, qui ne sont pas si simples que le cercle.

Pour construire les Problèmes solides dont les équations sont du troisième ou quatrième degré, on ne doit employer que le cercle, & une courbe du premier genre, puisque cela se peut aussi toujours.

Mais parceque pour construire les Problèmes lineaires, dont les équations excèdent le quatrième degré, l'on ne peut faire servir le cercle; leur construction sera plus simple par le moyen des deux équations que l'on trouve en employant deux inconnues, selon la première Observation, que de toute autre manière: car, à mon avis, c'est en quelque façon gêner la Géométrie que d'y introduire, souvent avec beaucoup de difficulté, de certaines courbes préférablement à d'autres

qui se présentent naturellement, & dont la description est souvent tres-simple : en quoi je voudrois que les courbes fussent préférées, sans avoir égard à leur genre, de la maniere qu'on le détermine ordinairement.

A V E R T I S S E M E N T.

Lorsqu'on sçait qu'un Problème est simple, ou plan, il n'est point nécessaire d'avoir égard à la premiere observation, ni d'employer deux lettres inconnues pour le résoudre. Il y a aussi des Problèmes si simples, qu'il n'y a aucune difficulté, ni pour nommer les lignes, ni pour trouver des équations.

Tout ce qu'on a dit dans cette premiere Section sera éclairci par toute la suite de cet Ouvrage, qui n'en est que l'Application, & un Commentaire.



SECTION II.

Où l'on donne la manière d'exprimer Geometriquement les quantitez Algebriques, & de résoudre les Problèmes simples, & plans; ou ce qui est la même chose, de construire les équations déterminées du premier & du second degré.

V. **O**N peut exprimer Geometriquement toutes les quantitez Algebriques, par le moyen des quatre operations suivantes, qui sont de trouver des troisièmes, quatrièmes, & moyennes proportionnelles, & de tirer les racines de la somme, ou de la difference de deux ou de plusieurs quarez.

1. Pour exprimer Geometriquement $\frac{ab}{c}$; ayant mené

FIG. 3. une ligne droite AH , dont l'extrémité A soit fixe, fait $AB = c$, $AD = a$, mené $BC = b$, qui fasse avec AB un angle quelconque ABC , s'il n'est pas déterminé d'ailleurs, & mené ACG ; la ligne DE parallèle à BC fera $\frac{ab}{c}$: car à cause des parallèles BC, DE , l'on aura $AB (c) . AD (a) :: BC (b) . DE = \frac{ab}{c}$. Ce seroit la même chose s'il

falloit exprimer geometriquement $\frac{aa}{c}$: car il n'y auroit qu'à faire $BC = AD = a$, après avoir fait $AB = c$; où l'on remarquera que toute quantité fractionnaire peut être regardée comme le quatrième terme d'une proportion qui renferme les trois autres, & dont le dénominateur est le premier.

De même pour exprimer geometriquement $\frac{aa+ab}{c+d}$;
 en réduisant en proportion l'on a $c+d . a+b :: a . \frac{aa+ab}{c+d}$.
 Faisant donc $AB=c+d$, $AD=a+b$, $BC=a$; DE
 parallele à BC , fera $=\frac{aa+ab}{c+d}$. Ce sera la même chose
 si l'on veut exprimer geometriquement $\frac{aa-bb}{c}$: car en
 réduisant en proportion l'on a $a . c . a+b :: a-b .$
 $\frac{aa-bb}{c}$. Semblablement, pour exprimer geometrique-
 ment $\frac{aab}{cd}$ qui contient deux proportions, $c . a :: a . \frac{aa}{c}$, &
 $d . b :: \frac{aa}{c} . \frac{aab}{cd}$, l'on exprimera d'abord $\frac{aa}{c}$, comme on
 vient de voir pour les quantitez précédentes, & ensuite
 $\frac{aab}{cd}$. Il en est ainsi des autres quantitez fractionnaires.

2. Pour exprimer geometriquement \sqrt{ab} . Il faut
 prendre sur une ligne droite AH , $AD=a$, & $DB=b$, FIG. 16.
 & ayant décrit un demi cercle sur le diametre AB ; la
 perpendiculaire DE au point D , sera égale à \sqrt{ab} : car
 nommant DE , x , l'on aura $a(AD) . x(DE) :: x(DE) .$
 $b(DB)$; dont $xx=ab$, & $x=\sqrt{ab}$. De même pour
 exprimer $\sqrt{aa+ab}$, on voit que $aa+ab$, est la produite
 de $a+b$; par a . Ainsi ayant fait $AD=a+b$, & DB
 $=a$; DE , sera $\sqrt{aa+ab}$.

Semblablement, pour exprimer $\sqrt{aa-bb}$; puisque
 $aa-bb$, est le produit de $a+b$ par $a-b$, en faisant
 $AD=a+b$, & $DB=a-b$; DE fera $=\sqrt{aa-bb}$. On
 peut encore exprimer autrement cette quantité, comme
 on va voir. n°. 3.

Pour exprimer $\frac{m}{n} \sqrt{aa - bb}$; ayant trouvé, comme on vient de faire $DE = \sqrt{aa - bb}$, & l'ayant nommée c , l'on aura $\frac{mc}{n}$ au lieu de $\frac{m}{n} \sqrt{aa - bb}$, & l'on trouvera

FIG. 3. (n°. 1.) $DE = \frac{mc}{n}$, faisant $AB = n, BC = m, \& AD = c$.

3. Pour exprimer geometriquement $\sqrt{aa + bb}$. Puisque $aa + bb$ est la somme de deux quarez, il est clair que
 FIG. 11. si l'on décrit un triangle ABC rectangle en B , un de ses côtez AB étant nommé a , & l'autre BC b ; l'hyp-

pothenuse AC sera $= \sqrt{aa + bb}$. Il ne seroit pas plus difficile d'exprimer la racine de la somme de plusieurs quar-

rez, comme $\sqrt{aa + bb + cc}$, &c.

Pour exprimer geometriquement $\sqrt{aa - bb}$, qui est la difference de deux quarez; il est évident qu'ayant décrit un triangle rectangle dont l'hypotenuse soit $= a$ racine du quarré positif, & un des côtez $= b$ racine

du quarré négatif, l'autre côté sera $= \sqrt{aa - bb}$. Ce qui
 FIG. 12. se fait en cette sorte; soit décrit sur le diametre $AB = a$, le demi cercle ACB , & soit inscrit dans le demi cercle la ligne $AC = b$, & mené CB ; l'angle ACB , étant droit

à cause du demi cercle; CB sera $= \sqrt{aa - bb}$. La même chose s'exécute encore en la maniere suivante. Soit décrit un demi cercle sur le diametre $AB = 2a$, élevée au centre C la perpendiculaire CH , prise $CG = b$ racine du quarré négatif, menées EF , & FD paralleles à AB , &

à HC , & mené le rayon CF ; GF ou CD sera $= \sqrt{aa - bb}$; puisque $CF = a$, & CG , ou $DF = b$. Cette dernière maniere convient mieux à la construction des équations que la precedente.

4. Il y a des quantitez Algebriques plus composées que celles dont on vient de parler (n°. 1, 2, 3;) & que l'on ne peut exprimer geometriquement, qu'après y avoir fait certains changemens. Or ces changemens consistent particulièrement à mettre l'expression Algebrique d'un quarré en la place de l'expression Algebrique d'un rectangle, ou de mettre l'expression Algebrique d'un rectangle dont un côté soit donné en la place d'un autre rectangle, ou d'un quarré. Ainsi pour exprimer geome-

triquement cette quantité fractionnaire $\frac{aa + bb - cd}{b}$, dont

le numerateur n'est point le produit de deux quantitez que l'on puisse separer par la division; & qui ne peut par consequent être réduite en analogie; il faut donc changer le quarré Algebrique bb , en un rectangle dont un côté soit a , & le rectangle Algebrique cd , en un autre rectangle Algebrique, dont un côté soit aussi a , afin que la lettre a se trouve dans tous les termes. Soit pour ce sujet x , le côté du rectangle qui doit être égal à bb , dont l'autre côté est la ligne donnée, exprimée par a ; l'on aura, selon les termes de la question, $ax = bb$; donc

$x = \frac{bb}{a}$; ayant donc (n°. 1) exprimé geometriquement

$\frac{bb}{a}$; & l'ayant nommée f ; l'on aura $f = x$; & partant

$af = bb$. Soit semblablement y le côté du rectangle qui doit être égal à cd , dont l'autre côté est la même donnée a ; l'on aura $ay = cd$; donc $y = \frac{cd}{a}$; & ayant nom-

mé g l'expression de $\frac{cd}{a}$ trouvée (n°. 1); l'on aura $ag = cd$; la quantité précédente sera donc changée en

celle-ci, $\frac{aa + af - ag}{b}$, en mettant pour bb , & pour cd ,

leurs valeurs af , & ag que l'on vient de trouver, qui est

facile à exprimer; puisqu'on la peut à present réduire

en l'analogie suivante $b.a :: a+f-g, \frac{aa+af-ag}{b}$. On auroit pû changer le quarré aa , & le rectangle cd , au lieu que l'on a changé bb , & cd .

5. Pour exprimer la quantité $\sqrt{aa-bc}$, il faut changer le quarré aa en un rectangle, dont un côté soit b ou c ; ou bien le rectangle bc en un autre, dont un côté soit a ; & on en aura ensuite facilement l'expression geometrique (n°. 2). Il en est ainsi des autres.

6. Les manieres dont nous venons de nous servir pour exprimer geometriquement les quantitez Algebriques sont generales: on les peut souvent abreger par le moyen de quelques lignes menées paralleles à quelques autres lignes données de position, ou en décrivant quelques cercles, selon que l'indique la figure de chaque Problème que l'on construit: mais comme ces manieres sont particulieres, on n'en peut rien dire ici, cela dépend du genie du Geometre, qui veut résoudre & construire les Problèmes le plus élégamment qu'il lui est possible. On les trouvera pratiquées dans plusieurs exemples.

CONSTRUCTION

*Des Equations déterminées du premier degré,
& de celles du second qui n'ont point
de second terme.*

7. **O**N voit clairement que les expressions geometriques des quantitez Algebriques, donnent aussi la résolution des équations du premier degré, & de celles du second, qui n'ont point de second terme; car si ces mêmes quantitez étoient égalées à des lettres inconnues, leur valeur seroit déterminée par ces expressions. Par exemple, pour construire cette équation

$xx = aa - bc$, d'où l'on tire $x = \pm \sqrt{aa - bc}$, il n'y a qu'à exprimer $\sqrt{aa - bc}$, comme on vient de faire ; & l'expression prise de part & d'autre, de l'origine de x fera sa valeur positive, & negative. Il en est ainsi des autres.

CONSTRUCTION

Des Equations du second degré, qui ont un second terme.

VI. **L**es Equations du second degré qui ont un second terme se peuvent toutes réduire à quelque une des quatre formules suivantes.

1. $xx = ax + bb.$

2. $xx = -ax + bb.$

3. $xx = ax - bb.$

4. $xx = -ax - bb$, dont les racines sont,

1. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$

2. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}.$

3. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$

4. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}.$

CONSTRUCTION

de la première & seconde Formule.

FIG. 14. & 15. I. P O U R la première & la seconde Formule. Soit dans la figure sur laquelle on opere, & d'où l'on a tiré l'équation que l'on veut construire, A le commencement de x qui va vers H . Ayant élevé au point A la ligne AB perpendiculaire à AH , & $= b$ racine du dernier carré bb ; on prendra AC (Fig. 14.) $= \frac{1}{2} a$ du côté de H , par rapport à A pour la première formule où il y a $+\frac{1}{2} a$; & de l'autre côté de H (Fig. 15) pour la seconde formule, où il y a $-\frac{1}{2} a$; & du centre C l'on décrira par B , le cercle DBE , qui coupera AH en E , & en D . Je dis que AE fera la valeur positive de x , & AD sa valeur négative.

DEMONSTRATION.

P U I S Q U E $AC = \frac{1}{2} a$, & $AB = b$; $CB = CE$ fera $= \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; & par conséquent $x = AE = +\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. C. Q. F. D.

On prouvera de même que AD , est la valeur négative de x qui doit être prise de l'autre côté de A par rapport à H .

CONSTRUCTION

de la troisième & quatrième Formule.

FIG. 13. I. S O I T A le commencement de x qui va vers P . & 16. Ayant pris AC du côté de P , par rapport à A pour la troisième Formule, où il y a $+\frac{1}{2} a$ (Fig. 13.); & de l'autre côté de P sur le prolongement de AP pour la qua-

trième formule, où il y a $\frac{1}{2} a$ (Fig. 16); l'on décrira du centre C & du demi diamètre $CA = \frac{1}{2} a$ le demi cercle AHB , on élèvera ensuite CH perpendiculaire à AB , sur laquelle ayant pris $CG = b$, racine du dernier carré, on mènera EF parallèle à AB , qui coupera le demi cercle aux points E & F , d'où l'on abaissera les perpendiculaires FD , EI . Je dis que AD & AI , seront les deux valeurs positives de x (Fig. 13), pour la troisième Formule; négatives (Fig. 16), pour la quatrième.

DEMONSTRATION.

PUISQUE AC ou $CF = \frac{1}{2} a$, & $CG = b$; GF , ou CD

sera $= \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$, & par conséquent $AD = x = \pm \frac{1}{2} a$

$\pm \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$, & $AI = x = \pm \frac{1}{2} a \mp \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$,

lesquelles valeurs sont toutes deux réelles & positives dans la Fig. 13. qui appartient à la troisième Formule, & toutes deux réelles, mais négatives dans la Fig. 16 qui appartient à la quatrième Formule. C. Q. F. D.

REMARQUE.

3. Si $b = CG$ est $= \frac{1}{2} a = CH$, le point G tombera en H , les points D & I en C , & les deux valeurs de x , seront égales.
4. Si CG est plus grande que CH , les deux mêmes valeurs de x seront imaginaires, & le Problème sera impossible. Ce qui se connoît aussi par l'inspection des deux Formules que l'on construit.
5. On peut encore construire ces équations, en faisant évanouir le second terme, après quoi on trouvera les valeurs de l'inconnue par l'art. 5. n°. 2.

6. Il y a encore d'autres équations qui appartiennent au second degré : comme $x^4 = +aa\ xx + a^3 b$, mais on les ramène à quelqu'une des quatre Formules précédentes en égalant le carré xx de l'inconnue à un rectangle, dont un côté est une autre inconnue ; & l'autre côté est une lettre connue de l'équation. On prend ordinairement celle qui s'y trouve le plus fréquemment. Ainsi, en faisant $ay = xx$, & mettant dans l'équation $aa\ yy$ pour x^4 , & ay pour xx , l'on aura $yy = +ay + ab$, qui étant construite par les règles précédentes ; la moyenne proportionnelle entre a & y , sera la valeur de x .

Par le moyen des équations du premier, & du second degré, l'on fait tout ce que les Anciens prenoient pour Geometrique.

EXEMPLES.

VII. Nous allons résoudre plusieurs Problèmes du premier & du second degré, pour servir d'exemples à la construction des équations plus composées que les précédentes.

PROBLÈME SIMPLE.

FIG. 17. I. **D**ÉCRIRE un carré GFHI dans un triangle donné ABC.

Je remarque 1°. Que le triangle ABC étant donné, la perpendiculaire AD le sera aussi. 2°. Que pour former le carré, il suffit de trouver dans la perpendiculaire AD , un point E , tel que DE soit égale à FG menée par le point E parallèle à BG : car alors ayant mené FH , & GI parallèles à AD ; $FHIG$ sera un carré.

Ayant donc supposé le Problème résolu, & nommé les données BC , a ; AD , b ; & l'inconnue DE , ou FG , x ; AE sera $b - x$. Les triangles semblables ABC , AFG donneront $b (AD) . a (BC) :: b - x (AE) . x (FG)$; donc $bx = ab - ax$ ou $ax + bx = ab$, d'où l'on tire

$x = \frac{ab}{a+b}$, qui donne cette construction.

On prendra sur DB prolongée du côté de B l'intervale $DK = BC$, & $KL = AD$, & ayant joint LA , on menera KE parallele à LA , qui coupera AD au point cherché E .

DEMONSTRATION.

A Cause des paralleles LA, KE l'on a IK ou (const.) AD . $AE :: KD$ ou (const.) BC . $DE :: BC$. FG ; donc BC . $DE :: BC$. FG ; & par consequent $DE = FG$; & partant $FHIG$, est un quarré. C. Q. F. D.

PROBLÈME SIMPLE.

2. UN demi cercle, ABC , dont le centre est D , avec une perpendiculaire FB à son diametre AC , qui le divise en deux parties quelconques, AF, FC , & un autre demi cercle FSC , décrit sur le diametre FC , étant donnez; il faut trouver dans le triligne mixte $BFSCB$, le centre O d'un cercle, dont la circonference touche les trois côtez du triligne mixte, comme on voit dans la Figure.

FIG. 18.

Ayant supposé le Problème resolu, mené (art. 4. n°. 1) les lignes OI, OE paralleles à FC & à FB , & les lignes OK, OS aux points touchans K, S ; qui étant prolongées, iront passer aux centres D, G des cercles ABC, FSC , comme il est démontré dans les elemens de Geometrie.

Nommant donc les données AD , ou DC , ou DK, a ; FG , ou GC , ou GS, b ; DF, c ; FB, f ; & les inconnues FE , ou IO , ou OK , ou OS, x ; FI , ou EO, y ; DO sera $a - x$; $GO, b + x$; $GE, b - x$; & $DE, c + x$. Les triangles rectangles OED, OEG donneront $DO^2 - DE^2 = EO^2$, ou en termes Algebriques $aa - 2ax + xx - cc - 2cx - xx = yy = GO^2 - GE^2 = bb + 2bx + xx - bb + 2bx - xx$, ou en retranchant ce qui doit être re-

PROBLÈME

tranché, $aa - cc - 2ax - 2cx = 4bx$, d'où l'on tire
 $x = \frac{aa - cc}{4b + 2a + 2c}$, où je remarque que $aa - cc = a + c \times$
 $a - c = AF \times FC = FB^2 = ff$, & que $4b + 2c = AC$
 $= 2a$, & partant $x = \frac{ff}{4a}$, d'où l'on tire cette constru-

ction.

Soit prolongée la perpendiculaire BF en M , en sorte que $FM = 2 AC = 4a$; du centre F par B soit décrit le demi cercle BQP , qui rencontrera FM en P , & BC prolongée, s'il est nécessaire, en Q . Et ayant joint QM , soit menée par P la droite PE parallèle à QM , qui rencontrera FC en E ; ayant ensuite mené EO , parallèle à FB , & décrit du centre D , & du demi diamètre $DZ = DC - FE$ le cercle LOH ; il coupera EO au point cherché O , qui sera le centre du cercle ISK , qui satisfait au Problème.

DÉMONSTRATION.

SOIT du centre G , & du demi diamètre $Gf = GF + FE$ décrit le cercle fOr . A cause des triangles semblables, MFQ , PFE ; FM , ou (const.) $2 AC \cdot FQ :: PE$, ou $FQ \cdot FE$; donc $2 AC \times FE = FQ^2 = FB^2 = AF \times FC$; donc $2 AC \times FE = AF \times FC$. Et partant $2 AC \cdot AF :: FC \cdot FE$. *dividendo* $AC + FC \cdot AF$, ou $HE :: FL \cdot FE$. Encore *dividendo* $2 FC \cdot HE :: EL \cdot FE$, ou Cr ; donc $HE \times EL = 2 FC \times Cr = FC \times 2 Cr = fE \times Er$; Et partant $HE \times EL = fE \times Er$: mais $HE \times EL = EO^2$; donc aussi $fE \times Er = EO^2$; c'est pourquoi le point O est commun aux deux cercles HOL , fOr , & à la perpendiculaire EO : mais par la construction, les lignes OK , OI , OS sont égales; & les points K , S , I , sont les points touchans; puisque les lignes OS , & KO , vont aux centres G & D des cercles ABC , FSC , & que OI , est perpendiculaire à FB ; donc le point O , est le centre du cercle ISK , qui satisfait au Problème. C. Q. F. D.

PROBLÈME

PROBLÈME PLAN.

3. **U**N demi cercle AEB , dont le centre est C , & une FIG. 19.
perpendiculaire DE à son diamètre étant donnez; il faut trou-
ver sur DE le point F , par où, & par le point A , ayant mené
la ligne AFG ; GF soit égale au demi diamètre AC .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé les don-
nées AC , ou CB , ou FG , a ; AD , b ; DE , c ; & l'in-

connue AF , x ; DF sera $\sqrt{xx - bb}$; l'on a par la pro-
priété du cercle $DE^2 - DF^2 = AF \times FG$, ou $cc - xx$
 $+ bb = ax$, ou $xx = -ax + cc + bb$; d'où l'on tire $x =$

$\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa + cc + bb}$, qui fournit cette construction.

Soient menées du point E aux extremités A & B du
diamètre AB , les droites EA , EB . Et ayant fait EL
 $= \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$, soit décrit du centre A par L , l'arc
 LH qui coupera AB en H . Et du centre H , & du de-
mi diamètre EL , soit décrit un cercle qui coupera AB
aux points I & K . Je dis que AI , fera la valeur positive
de x ; c'est pourquoi si du centre A l'on décrit les deux
arcs KG , IF qui couperont la circonférence AEB en G ,
& DE en F ; la droite AF étant prolongée rencontrera
la circonférence AEB en G , & FG sera par conse-
quent $= AC$; puisqu'elle est égale à IK double de EL
 $= \frac{1}{2}AC$.

DEMONSTRATION.

PAR la construction, & à cause des triangles rectan-
gles AEL , ADE ; $AL^2 - EL^2 = AH^2 - IH^2$
 $= AK \times AI = AG \times AF = AE^2 = AD^2 + DE^2$
 $= AB \times AD = AD \times DB + AD^2$; donc $AG \times AF$,
ou $AF \times FG + AF^2$, ou $AF \times FG + AD^2 + DF^2$

F

42 APPLICATION DE L'ALGÈBRE
 $= AD \times DB + AD^2$; donc, en retranchant AD^2 de
 part & d'autre, $AF \times FG + DF^2 = AD \times DB = DE^2$;
 donc $AF \times FG = DE^2 - DF^2$; d'où il suit que la li-
 gne AF prolongée, rencontre le demi cercle AEB au
 point G où l'arc KG le coupe. C. Q. F. D.

PROBLÈME PLAN.

FIG. 20. 4. **U**N demi cercle BEC dont le centre est D , & un point
 A hors du demi cercle, étant donnez de position sur un Plan;
 il faut trouver le point E , ou F sur sa circonférence, par où, &
 par le point A , ayant mené la ligne AFE , sa partie FE , soit
 égale au demi diamètre BD .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé les don-
 nées AC , a ; AB , b ; BD , ou FE , c ; AE sera $x + c$;
 la propriété du cercle donnera $a(AC) \cdot x + c(AE) : :$
 $x(AF) \cdot b(AB)$; donc $xx + cx = ab$, ou $xx = -cx$
 $+ ab$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc + ab}$ qui don-
 ne cette construction.

Ayant mené du point A la tangente AI , & du point
 touchant I le rayon ID , l'on prendra $IK = \frac{1}{2}BD$
 $= \frac{1}{2}c$; du centre A par K , l'on décrira l'arc KL qui
 coupera AC en L ; & du centre L , & du rayon IK ,
 l'on décrira un cercle qui coupera AC en O & M . Enfin
 du centre A par les points O & M , l'on décrira les
 arcs OF , ME , qui couperont le cercle BEC aux points
 F , E ; de sorte que la ligne AF prolongée, ira au point E ;
 & FE sera par conséquent $= BD$; puisqu'elle est éga-
 le à $OM = 2IK = BD$.

DEMONSTRATION.

A Cause du triangle AIK , rectangle en I ; $AK^2 =$

$IK^2 = AL^2 - OL^2 = AM \times AO = AE \times AF = AI^2$;
 mais $AC \times AB = AI^2$; donc $AE \times AF = AC \times AB$;
 d'où il suit que le point E est commun au cercle BEC , à
 l'arc ME , & à la droite AFE . C. Q. F. D.

PROBLÈME PLAN.

5. **U**N triangle ABC , & un point D hors du triangle FIG. 24
 étant donné, il faut mener du point D une ligne DEF , en
 sorte que le triangle ABC , soit au triangle EBF ; en la raison
 donnée de m à n .

Ayant supposé le Problème résolu ; puisque le point
 D est donné de position, les lignes DG parallèle à AB ,
 & GB qui est le prolongement du côté BC , seront (art. 4.
 n° 5) aussi données ; nommant donc les données AB , a ;
 BC , b ; DG , g ; GB , f ; & les inconnues EB (art. 4 n° 8)
 x ; & BF , y ; GF sera $f + y$, & l'on aura par les qualitez
 du Problème $AB \times BC \cdot EB \times BF :: m \cdot n$: car il est fa-
 cile de démontrer que $AB \times BC \cdot EB \times BF :: ABC \cdot EBF$;
 donc en termes analytiques, $ab \cdot xy :: m \cdot n$; donc $nab =$
 mxy . Et les triangles semblables DGF , EBF donnent, $g \cdot$
 $(DG) \cdot f + y (GF) :: x (EB) \cdot y (BF)$; donc $gy = fx +$
 xy ; & faisant évanouir y , l'on aura $mfxx = -nabx +$
 $nabg$, ou $xx = -\frac{nabx + nabg}{mf}$. Pour reduire cette équation
 à la seconde Formule de l'article 6, & pour la con-
 struire, soit fait $m \cdot n :: a (AB) \cdot \frac{na}{m}$ qui soit BI que je
 nomme c ; mettant donc c dans l'équation en la place
 de $\frac{na}{m}$, elle se changera en celle-ci $xx = -\frac{cbx + cbg}{f}$.

Ayant mené CL parallèle à AB , IK parallèle à BC , &
 GIL qui rencontrera CL en L ; l'on aura, à cause des
 triangles semblables GBI , IKL , $GB (f) \cdot BI (c) :: IK$
 $(b) \cdot KL = \frac{bc}{f}$ qui étant nommée d , & mettant d en la

F ij

place de $\frac{bc}{f}$ dans la dernière équation, elle deviendra

celle-ci $xx = -dx + dg$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}d +$

$\sqrt{\frac{1}{4}dd + dg}$, qui montre que pour avoir la valeur de $x =$

BE , il faut diviser DG en H ; en sorte que $DH : HG :: HG : KL$; & mener HE parallèle à GB qui coupera AB au point cherché E ; de sorte que la ligne DEF menée de D par E , résout le Problème.

D E M O N S T R A T I O N .

P A R la construction $DH : HG$, ou $EB :: EB : KL$, & les triangles semblables DHE , EBF donnent $DH : EB :: HE$, ou $GB : BF$; donc $EB : KL :: GB : BF$; & partant $EB \times BF = GB \times KL$: mais les triangles semblables GBI , IKL , donnent $GB : BI :: IK$, ou $BC : KL$; donc $BI \times BC = GB \times KL$; donc $EB \times BF = BI \times BC$. Mais $AB \times BC : EB \times BF$, ou $IB \times BC :: AB : IB ::$ (const.) $m . n$, comme le triangle ABC , au triangle EBF . *C. Q. F. D.*

FIG. 22. 6. Si l'on veut que le point donné D , soit dans le triangle, il n'y a qu'à changer le signe où f se rencontre; parcequ'alors GB , deviendra négative de positive qu'elle étoit, c'est-à-dire, que le point G tombera entre B

& C ; & l'on aura $xx = -\frac{nabx + nabe}{-mf}$ ou $xx = \frac{nabx - nabe}{mf}$

qui servira à construire le Problème en cette sorte.

Soit divisée AB en I ; en sorte que $AB : BI :: m . n$. Et ayant pris sur GD , $GO = BI$, on mènera par les points B , & O la droite indéfinie BOL , & par C la ligne CZ parallèle à AB , qui rencontrera BOL en L . Soit ensuite prolongée GD en H ; en sorte que $DH : HG :: HG : CL$, & menée HE parallèle à BC , qui coupera AB en E . Je dis que la ligne EDF menée par les points E & D , résout le Problème.

DEMONSTRATION.

ELLE est la même que la précédente.

REMARQUE I.

7. L'EQUATION précédente $xx = \frac{nabx - nabg}{mf}$, étant réduite à celle-ci $xx = dx - dg$, comme l'on a fait celle du cas précédent (n°. 5), fait voir que si la moyenne proportionnelle entre $DG (g)$, & $CL (d)$ surpasse $\frac{1}{2}CL$, le Problème sera impossible: car alors les deux valeurs de x seront imaginaires.

REMARQUE II.

8. SI dans les deux constructions précédentes, le point F étoit tombé au-delà du point C , hors du triangle; il auroit fallu mener la parallèle DG de l'autre côté du point G , qui auroit rencontré le côté AC , prolongé du côté de A dans le premier cas, & l'on se seroit servi du côté AC , comme l'on a fait du côté BC .

FIG. 21.
22.

REMARQUE III.

9. CE seroit encore la même chose, si le point D étoit donné sur un des côtes BC prolongé: car DG parallèle à AB , rencontreroit le côté AC prolongé du côté de A , & l'on trouveroit comme on vient de faire, le point E ; par où ayant mené la droite DEF , l'on auroit le triangle AEF , qui seroit au triangle ABC , comme n à m .

FIG. 23.

REMARQUE IV.

10. SI le point D étoit au sommet de l'un des angles comme en A ; il n'y auroit qu'à diviser BC en F ; en sorte que $BC . BF :: m . n$, & mener AF : car en ce cas $ABC . ABF :: m . n$.

FIG. 24.

REMARQUE V.

FIG. 25. II. **S**i le point D étoit sur un des côtez AB ; en nommant AB, a ; BC, b ; DB, g ; qui sont les données, & l'inconnue BF, x ; l'on auroit, selon l'hypothese, $ab : gx :: m . n$; & partant $mgx = nab$; donc $x = \frac{nab}{mg}$: qui fournit cette construction.

On divisera BC en H , en sorte que $BC . BH :: m . n$; & ayant pris BF quatrième proportionnelle à DB, AB, BH , l'on menera la ligne DF qui satisfera au Problème.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené AH , les triangles ABH, DBF seront égaux; puisque (const.) $DB . AB :: BH . BF$: mais le triangle ABC est au triangle $ABH :: BC . BH :: m . n$; donc $ABC . DBF :: m . n . C . Q . F . D$.

COROLLAIRE.

12. **O**N peut par le moyen de ce Problème, & des remarques qu'on y a faites, résoudre toutes les questions de la Geodesie.

FIG. 26. Soit par exemple, un rectiligne quelconque $ABCEGH$, & un point D hors de ce rectiligne, donnez de position; il faut mener la ligne DOF , qui divise le même rectiligne, de maniere que la partie $OHGEF$, soit à la partie $OABCF$, comme m à n .

On menera du point D aux angles du rectiligne des droites DG, DE, DC, DB . Or puisque l'on connoit la superficie du rectiligne entier, & qu'on peut connoitre celle de toutes les parties qui le composent; on connoitra aussi si quelqu'une des lignes DB, DC, DE, DG , satisfait au Problème. Mais si aucune n'y satisfait, de sorte que la partie $LHGE$ soit trop petite, & la partie $KHGEC$ trop grande; il est nécessaire, selon cette hypothese, que la ligne DOF passe entre les lignes DC, DE , afin que la

Figure soit divisée dans la raison demandée : mais parce que l'on connoit le rapport de toute la Figure à ses parties $KABC$, $LABCE$, l'on connoitra aussi le rapport du quadrilatere $LKCE$ à sa partie $OKCF$; c'est pourquoi, 1°. Si les lignes KL , CE sont paralleles, il n'y a qu'à diviser CE en F , en sorte que CE soit à CF dans la raison convenable, & mener DOF , qui satisfera à la question : car $CE . KL :: CF . KO$, ou $DCE . DKL :: DCF . DKO$; & *dividendo* $LKCE . DCE :: OKCF . DCF$. *permutando* $LKCE . OKCF :: DCE . DCF :: CE . CF$.

2°. Si les lignes CE , KL ne sont point paralleles, elles concourront de part ou d'autre en un point P , que l'on trouvera en cette sorte. Ayant mené LR & LQ paralleles à KC , & à CF , ces droites seront données de grandeur aussi bien que KQ . Soit donc fait à cause des triangles semblables KQL , KCP ; $KQ . QL :: KC . CP$; CP sera donc aussi donnée de grandeur ; c'est pourquoi tirant KS perpendiculaire à CE , qui sera aussi donnée ; l'on aura la superficie du triangle KCP , & par consequent (no. 9), le rapport de tout le triangle à sa partie $OKCF$, & le Problème sera résolu. FIG. 27.

PROBLÈME PLAN.

13. **D**E'CRIRE un triangle ABC rectangle en A , dont le plus petit côté AB , & la difference DC des segmens de l'hypothénuse, faits par la perpendiculaire AE , soient données de grandeur. FIG. 28.

Ayant supposé le Problème résolu, l'on décrira du centre A , & du rayon AB , le cercle GBF , qui passera par le point D ; puisque DC , est la difference des segmens BE , EC de l'hypothénuse BC ; & ayant prolongé AC en G ; GC sera $= AB + AC$; & $FC = AC - AB$. Nommant donc les données AB , a ; DC , b ; & l'inconnue CF , x ; AC sera $a + x$; & GC , $2a + x$; & l'on aura à cause du cercle $CD (b) . CF (x) :: CG$

$(2a+x) \cdot CB = \frac{2ax+xx}{b}$; donc à cause de l'angle droit ABC . $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ou en termes Algébriques $\frac{4aax+4ax^2+xx^2}{bb} = 2aa + 2ax + xx$, ou en ordonnant l'équation,

$$x^2 + 4ax + 4aax - 2abbx - 2aabb = 0, \text{ qui est une}$$

équation du quatrième degré; & qui ne peut être divisée par aucun binôme composé de l'inconnue, & d'un des diviseurs du dernier terme: mais avant que de conclure quelle est la nature du Problème, il faut faire évanouir le second terme. Faisant donc $x+a=z$, l'on a $ax = z-a$; & mettant cette valeur de x dans l'équation en la place de x , & les puissances de cette valeur en la place des puissances semblables de x , l'on aura cette nouvelle équation $z^4 - 2aaz + a^4 = 0$; & com-

me le quatrième terme est aussi évanoui, il suit que le Problème est plan: car faisant $ay = zz$, l'équation se changera en celle-ci, $aay - 2a^3y + a^4 = 0$, ou $yy =$

$$\frac{2aay + bby + abb - a^4}{a}, \text{ que l'on peut ramener à une des 4}$$

formules précédentes; trouver par conséquent la valeur de y , & chercher ensuite une moyenne proportionnelle entre y & a , qui sera la valeur de z , d'où ayant ôté a , on aura celle de x qu'il falloit trouver. Mais ces sortes de constructions sont tres-composées; c'est pourquoi dans de pareils cas, il faut tâcher, en prenant d'autres voyes, de trouver une équation du second degré, qui donneroit une construction beaucoup plus simple, plus élégante, & plus naturelle. Prenons donc BD pour l'inconnue; & l'ayant nommée x ; BC sera $b+x$; BE , $\frac{1}{2}x$; & EC , $\frac{1}{2}x + b$; & l'on aura à cause de l'angle droit BAC , $BE \times EC = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{2}bx = AB^2$: & à cause du triangle rectan-

gle

gle AEB , l'on aura $BE^2 + AE^2 = \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}xx +$

$\frac{1}{2}bx = aa = AB^2$, qui se réduit à $xx = -bx + 2aa$,

d'où l'on tire $x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}bb + 2aa}$, qui donne cette construction.

D , étant le commencement de x qui va vers B , on prendra sur CD , prolongée de part & d'autre, $DG = 2a = 2AB$, & $DH = a = AB$, & ayant décrit sur le diamètre GH , le demi cercle GRH , on élèvera au point D la perpendiculaire DR , qui rencontrera la circonférence en R . Et du centre O , milieu de DC , on décrira par R , le demi cercle BRK qui coupera DG au point cherché B . De sorte que DB fera la valeur positive de x , & DK sa valeur négative; c'est pourquoi ayant décrit sur l'hypoténuse BC , le triangle rectangle BAC , dont le petit côté AB soit $= a$, le Problème sera résolu.

DEMONSTRATION.

PAR la construction $AB = a$, & $DC = b$, il ne reste donc qu'à prouver que la perpendiculaire AE qui tombe de l'angle droit A sur l'hypoténuse BC , divise BD par le milieu en E .

La propriété du cercle donne $BD \times DK = DR^2 = GD \times DH$; donc $BD \cdot GD$ ou $2 DH :: DH \cdot DK$, ou en prenant la moitié des conséquens, $BD \cdot DH$ ou $AB :: AB$.

$\frac{1}{2} DK$; donc $BD \times \frac{1}{2} DK$, ou $\frac{1}{2} BD \times DK = AB^2$;

donc DK , ou $CB \cdot AB :: AB \cdot \frac{1}{2} BD$: Mais les triangles semblables CBA , ABE donnent $CB \cdot AB :: AB \cdot BE$; donc $AB \cdot \frac{1}{2} BD :: AB \cdot BE$; donc $\frac{1}{2} BD = BE$. C. Q. F. D.

G

PROBLÈME PLAN.

FIG. 30. 14. **U**N quarré ABCD dont les côtez AB, AD sont prolongez étant donné ; il faut trouver sur l'un des prolongemens AE, le point E, en sorte que la ligne menée par E, & par l'angle C, terminée par l'autre prolongement BF, soit égale à une autre ligne donnée KL, qui ne soit point moindre que le double de la diagonale du quarré.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé AD, ou AB, a ; KL, b ; & les inconnues AE, x ; AF, y ; DE sera, $x - a$; le triangle rectangle FAE donnera $AE^2 + AF^2 = xx + yy = bb = (\text{hyp.}) EF^2$, qui est une équation au cercle. Et les triangles semblables FAE, CDE ; donneront $y \cdot (FA) \cdot x (AE) :: a (CD) \cdot x - a (DE)$; donc $xy - ay = ax$, qui est une équation à l'hyperbole par rapport à ses asymptes ; & ayant fait évanouir y , & ordonné l'équation, on aura $A \cdot x^4 - 2ax^3 + 2aaxx + 2abbx - aabb = 0$, qui est

$$-bbxx$$

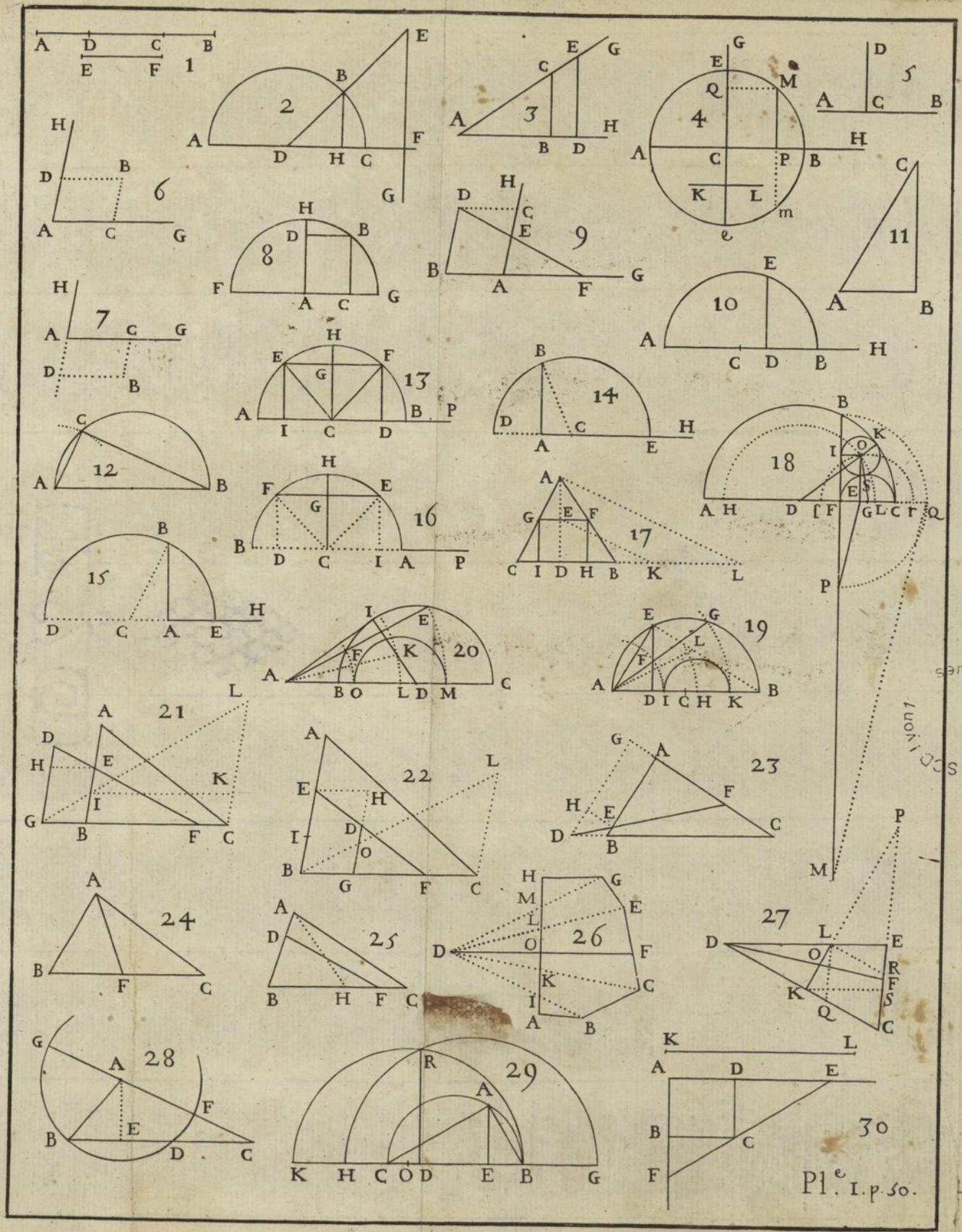
une équation du quatrième degré, & qui ne peut être divisée par aucun binôme ; c'est pourquoi pour déterminer quelle est la nature du Problème, il faut, suivant les principes de M^r Descartes, & ce que nous avons dit art. 4. n^o. 18, faire évanouir le second terme. Soit pour ce

$$\text{fujet } x - \frac{1}{2} a = z ; \text{ donc } x = z + \frac{1}{2} a ; xx = zz + az + \frac{1}{4} aa ; x^3 = z^3 + \frac{3}{2} azz + \frac{3}{4} aaz + \frac{1}{8} a^3 ; x^4$$

$= z^4 + 2az^3 + \frac{3}{2} aazz + \frac{1}{2} a^3 z + \frac{1}{16} a^4$, & mettant ces valeurs de x , de xx , de x^3 , & de x^4 dans l'équation A, elle deviendra celle-ci.

$$B. z^4 + \frac{1}{2} aazz + a^3 z + \frac{5}{16} a^4 - bbz + abbz - \frac{1}{4} aabb, = 0.$$

où il n'y a point de second terme.



Pour transformer presentement l'équation *B* en une équation du troisieme degre, on se servira de cesdeux équations:

$$C. \quad zz - yz - f = 0.$$

D. $zz + yz + t = 0$, que je multiplie l'une par l'autre, pour avoir celle-ci:

$$E. \quad z^4 - fzz - syz - tf = 0. \text{ qui est semblable à } \\ -yyzz - tyz \\ + tzz.$$

l'équation *B*. Mais pour abreger le calcul, j'égle les quantitez connues de chaque terme de l'équation *B* à de simples lettres connues; à sçavoir,

$$\frac{x}{2} aa - bb = p.$$

$$a^3 + abb = q.$$

$\frac{5}{16} a^4 - \frac{x}{4} aabb = r$. De sorte que l'équation *B* devient celle-ci.

$$F. \quad z^4 + pzz + qz + r = 0.$$

Je compare presentement les deux équations *E* & *F*, terme à terme, chacun à son correspondant; ce qui me donne les trois équations suivantes: car les deux premiers termes ne donnent rien.

$$G. \quad t - yy - f = p.$$

$$H. \quad -ty - fy = q.$$

$$I. \quad -tf = r.$$

L'équation *I* donne $f = -\frac{r}{t}$; & mettant en la place de *f*, cette valeur dans les deux équations *G* & *H*, & multipliant ensuite par *t*, l'on a les deux suivantes.

$$K. \quad tt - tyy + r = pt.$$

$$L. \quad -tty + ry = qt.$$

L'équation *K* donne $tt = tyy + pt - r$, & mettant cette valeur de *tt* dans l'équation *L*, l'on a $-ty^3 -$

$pty + 2ry = qt$, d'où l'on tire $M. \quad t = \frac{2ry}{y^3 + py + q}$; &

mettant cette valeur de *t* dans les équations *H* & *I*, l'on

G ij

aura les deux qui suivent, $N. \frac{-2ry}{y^3+py+q} - fy = q$, &

$O. \frac{-2ry}{y^3+py+q} = r$; d'où faisant évanouir l'inconnue f , ôtant les fractions, & retranchant ce qui doit être retranché, l'on aura $P. y^6 + 2py^4 + ppyy - qq = 0$, qui est

l'équation transformée, & qui se rapporte au troisième degré; & remettant à présent dans l'équation P , en la place de p , q , & r leurs valeurs, l'on aura,

$$Q. y^6 + aay^4 + b^4yy - a^6 \\ - 2bby^4 \quad - 2a^4bb = 0 \\ - aab^4$$

Si l'on tente présentement toutes les divisions de cette équation par les binomes qu'on peut former par le carré de l'inconnue y , c'est-à-dire, par yy ; (car il n'est point ici nécessaire de les tenter par aucun autre); & par quelqu'un des diviseurs Plans du dernier terme, l'on trouvera qu'elle se peut diviser par celui-ci.

$R. yy - aa - bb = 0$; & le quotient sera,

$$S. y^4 + 2aayy + a^4 \\ - bbyy + aabb = 0.$$

qui est une équation du second degré; & qui par conséquent fait connoître que le Problème est Plan.

Si on veut le résoudre sans chercher une autre équation du second degré: Voici la méthode qu'on doit suivre.

L'on a déjà l'équation $O. \frac{-2ry}{y^3+py+q} = r$, d'où l'on tire $T. f = -\frac{y^3 - py - q}{2y}$. Il ne s'agit plus que de chercher une valeur semblable de t ; ce qui se fait en cette

forte. L'équation I donne $t = \frac{-r}{f}$; mettant donc cette valeur de t dans les deux équations G & H , l'on aura $-r - fyy - ff = pf$, & $ry - ffy = qf$: & faisant évanouir le carré ff , l'on aura $-r - fyy - \frac{ry + qf}{y}$

$= pf$, d'où l'on tire $f = \frac{-2y}{y^2 + py - q}$; & cette valeur de f , substituée dans l'équation I , donne après avoir ôté les fractions, & ce qu'il y a à ôter, $V. t = \frac{y^2 + py - q}{2y}$.

Si l'on met presentement dans les deux équations C , & D , en la place de f , & de t leurs valeurs prises dans les deux équations T , & V , l'on aura les deux suivantes.

$$xz - yz + \frac{y^2 + py + q}{2y} = 0, \&$$

$$xz + yz + \frac{y^2 + py - q}{2y} = 0, \text{ ou}$$

$$X. \quad xz - yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} = 0, \&$$

$$Y. \quad xz + yz + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} = 0$$

Mais l'équation R , donne $yy = aa + bb$, & $y = \sqrt{aa + bb}$; l'on a aussi $p = \frac{1}{2}aa - bb$, & $q = a^2 + abb$; substituant donc dans les deux équations X , & Y en la place de y , de yy , de p , & de q , leurs valeurs; l'on aura après les réductions ordinaires,

$$xz - z\sqrt{aa + bb} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb} = 0, \&$$

$$xz + z\sqrt{aa + bb} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb} = 0, \text{ ou}$$

$$xz = z\sqrt{aa + bb} - \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}, \&$$

$z = -\sqrt{aa + bb} - \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}$, dont les racines sont,

$$z = \frac{1}{2}\sqrt{aa + bb} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}}, \&$$

$z = -\frac{1}{2}\sqrt{aa + bb} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}}$. Mais pour ôter le second terme de l'équation A , l'on a fait

$z = x - \frac{1}{2}a$; c'est pourquoi en mettant dans les deux dernières équations , en la place de z , sa valeur $x - \frac{1}{2}a$; l'on aura les deux qui suivent ,

$$x = \frac{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{2}a\sqrt{aa + bb}}}{2}$$

dont la construction résout le Problème.

Il faut demeurer d'accord que cette méthode de M^r Descartes , de reconnoître la nature d'un Problème dont l'équation est du quatrième degré , & de tirer de cette équation du quatrième degré , deux équations du second , quand le Problème est Plan , est parfaitement belle , & digne de son genie ; c'est pourquoi j'ai jugé à propos de la mettre ici tout au long ; parceque je ne l'ai vûe nulle part entièrement expliquée. Il est néanmoins à propos , comme on a déjà remarqué , après avoir reconnu qu'un Problème dont l'équation est du quatrième degré est Plan , de chercher par d'autres voyes une équation du second degré ; parceque la construction du Problème en devient plus simple , comme on va voir par cet exemple.

FIG. 31. 15. Les mêmes choses que dans l'énoncé du Problème , étant supposées , on prolongera BC vers G , l'on mènera EG perpendiculaire à FE , qui rencontrera CG en G , & l'on abaissera du point E sur CG la perpendiculaire EH : ce qui formera les triangles semblables CBF , CEG , CHE , & EHG : & outre cela les triangles CBF , EHG égaux , puisque $BC = EH$; c'est pourquoi ayant nommé les données AB ou AD , a ; KL ou FE , b ; & les inconnues CG , x ; CE , y ; BG sera , $a + x$; & FC ou EG $b - y$; les triangles semblables CBF , CEG , donneront $a (CB) \cdot b - y (CF) :: y (CE) \cdot x (CG)$; donc $ax = by - yy$; & le triangle rectangle CEG donnera $CG^2 = xx = bb - 2by + 2yy = CE^2 + EG^2$, ou

$$\frac{bb - xx}{2} = by - yy = ax, \text{ ou } bb - xx = 2ax, \text{ d'où}$$

l'on tire $x = -a + \sqrt{aa + bb}$, qui donne cette construction.

Soit prolongée CD en I , en sorte que $CI = KL$; décrit du centre B par I , le cercle IG , qui coupera BC prolongée en G ; & sur le diamètre CG , le demi cercle CEG , qui coupera AD prolongée E & e , ou la touchera en un seul point E , si le Problème est possible, c'est-à-dire, si KL surpasse ou égale le double de la diagonale du carré AC . Je dis que la ligne FE , ou $ef = KL$; & que par conséquent le Problème est résolu.

DÉMONSTRATION.

A Cause des triangles semblables CBF, CEG . $CB \cdot CF :: CE \cdot CG$; donc $CB \times CG = CF \times CE$. Et à cause du cercle IG dont le centre est B ; $CI^2 = BG^2 - BC^2 = 2BC \times CG + CG^2 = 2CF \times CE + CE^2 + EG^2$ ou $CF^2 = FE^2$; donc $CI^2 = FE^2$; donc $CI = FE = KL$.
C. Q. F. D.

On démontrera de même que $ef = KL$.

PROBLÈME PLAN.

16. **L** A somme AB des deux côtés AE, EI d'un triangle FIG. 32. AEI , l'angle AEI que doivent former les deux côtés AE, EI ; & la perpendiculaire EG menée de cet angle sur la base AI , étant donnez, décrire le triangle AEI .

Ayant supposé le Problème résolu, soit prolongée AE en B , en sorte que $EB = EI$, & menée par A la ligne AD parallèle à EI , & égale à AB ; la ligne menée par les points B & I , rencontrera AD en D : car $BE = EI$, & $BA = AD$. Soit faite AK perpendiculaire à BD , qui sera divisée par le milieu en K , puisque le triangle BAD est isoscele. Ayant enfin mené BH perpendiculaire à AI prolongée, & nommé les données KB , ou KD , c ; la perpendiculaire EG , b ; AK , d ; & les inconnues AI ,

z ; KI , x ; BH , u ; BI fera $c - x$, & ID , $c + x$.

Les triangles semblables IAK , IBH donneront z (IA). d (AK) :: $c - x$ (IB). u (BH); donc $u =$

$\frac{cd - dx}{z}$. Et les triangles semblables HBA , GEA , & BEI ,

BAD donnent, u (HB). b (GE) :: BA . EA :: zc (BD)

$c + x$ (ID). d'où l'on tire $u = \frac{2bc}{c + x}$; donc $\frac{2bc}{c + x} =$

$\frac{cd - dx}{z}$, ou $2bcz = ccd - dxx$; mais le triangle rectan-

gle AKI , donne $xx = zz - dd$; c'est pourquoi en met-

tant cette valeur de xx , dans l'équation précédente, l'on en

tire $zz = -\frac{2bcx}{d} + cc + dd$: Mais en nommant AB , a ;

l'on a, à cause du triangle rectangle AKB , $aa = cc + dd$;

mettant donc dans l'équation en la place de $cc + dd$ la

valeur aa , l'on a celle-ci $zz = -\frac{2bcx}{d} + aa$, d'où l'on

tire $z = -\frac{bc}{d} + \sqrt{\frac{bbcc}{dd} + aa}$, qui fournit cette constru-

ction.

Soit prise $AF = GE$, & menée FL parallèle à KB ;

soit prolongée KA en C , en sorte que $AC = FL$; &

ayant mené AM parallèle à KB , & égale à AB , l'on

décrira du centre C par M , le cercle MN , qui coupe-

ra AK prolongée en N ; & du centre A par N , l'on

décrira le cercle NIO qui coupera KB , en I ; & ayant

joint AI , l'on menera IE parallèle à DA , qui formera

le triangle AIE , qu'il falloit décrire.

D E M O N S T R A T I O N .

IL est clair que $AE + EI = AB$, que l'angle AEI , est tel qu'on le souhaite, & que $AN = AI$. A cause de FL (const.) parallèle à KB , l'on a AK (d). KB (c)

:: AF , ou GE (b). $FL = \frac{bc}{d} =$ (const.) AC , & par-

tant

tant $CN \frac{bc}{d} + z$; & par la propriété du cercle, $CN^2 - CA^2 = AM^2 = AB^2$; ce qui est en termes Algebriques $\frac{2bcz}{d} + zz = aa$, ou $zz = -\frac{2bcz}{d} + aa$ qui est l'équation que l'on a construite; d'où il suit que la construction précédente résout le Problème. *C. Q. F. D.*

J'ai copié ce Problème dans le Traité des lieux Geometriques de M^r de la Hire, parcequ'il ouvre le chemin à la résolution de plusieurs Problèmes semblables, comme est celui qui suit: j'y ai ajouté la construction, & la démonstration que cet Auteur n'avoit pas donnée.

PROBLÈME PLAN.

17. **D**E'CRIRE un triangle AEI, dont on connoit la somme des côtes $AE + EI = AB$, la base AI, & dont l'angle AEI, soit égal à un angle donné. FIG. 32.

En supposant la préparation précédente, & nommant les données AK, d ; AI, b ; & l'inconnue KI, x ; l'on aura par la propriété du triangle rectangle AKI , $xx =$

$bb - dd$; donc $x = \sqrt{bb - dd}$, qui donne cette construction.

Soit du centre A & du rayon AI , décrit le cercle OIN qui coupera KB au point cherché I ; ce qui n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME PLAN.

18. **U**N rectangle ABCD étant donné, il faut décrire un autre rectangle EHGF; dont les côtes soient également éloignés de ceux du rectangle ABCD, & que le rectangle ABCD, soit au petit EHGF dans la raison donnée de m à n . FIG. 33.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé les don-

H

38 APPLICATION DE L'ALGEBRE
 nées AD , ou BC , a ; AB , ou DC , b ; & l'inconnue
 AL , ou LE , x ; EF sera, $a - 2x$, & EH , $b - 2x$.

L'on aura par les qualitez du Problème, $ab \cdot ab - 2ax - 2bx + 4xx :: m \cdot n$. donc $mab - 2max - 2mbx + 4mxx = nab$, d'où l'on tire $xx = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx + \frac{nab - mab}{4m}$.
 Ce qui fournit cette construction.

Soit prise $AI = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & décrit sur le dia-
 metre AI , le demi cercle API . Et ayant élevé au
 centre K , la perpendiculaire KP , pris $KO = \sqrt{\frac{nab - mab}{4m}}$
 & mené par O la ligne QOR , qui rencontrera le demi
 cercle aux points Q & R , par où l'on menera QL &
 RM parallèles à PK , qui couperont AI aux points
 cherchez L & M . De sorte qu'ayant pris AS , BT , &
 BV égales à AL , l'on formera le rectangle $EHGF$, &
 le Problème sera résolu.

D E M O N S T R A T I O N .

P A R la propriété du cercle $AL \times LI = LQ^2$ ou en
 termes Algebriques $x \times \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - x = \frac{1}{2}ax +$
 $\frac{1}{2}bx - xx = \frac{mab - nab}{4m}$, ou $xx = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx$
 $+ \frac{nab - mab}{4m}$, qui est l'équation que l'on a construite.

C. Q. F. D.

J'ai démontré la construction de ces deux derniers
 Problèmes algebriquement, pour indiquer la maniere
 de démontrer tous les autres de même; ce qui est si
 facile, que je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'apporter
 un plus grand nombre d'exemples.

Les Démonstrations, faites à la maniere des anciens,
 éclairent plus l'esprit que les Démonstrations Algebri-
 ques, quoiqu'elles ne soient pas plus certaines: mais aussi

elles ne sont pas si faciles à trouver, comme il est aisé de juger par les Démonstrations des Problèmes précédens, que l'on auroit pû démontrer par l'Algebre aussi facilement que les deux derniers.



SECTION III.

*Où l'on donne la Méthode de démontrer les
les Theorèmes de Geometrie.*

M É T H O D E.

VIII. **A**PRE'S avoir mené les lignes que l'on juge nécessaires, en suivant les Observations de l'article 4, on nommera celles qui doivent entrer dans la question, comme lorsqu'on veut résoudre un Problème, avec cette différence, que l'on peut se servir de toutes les lettres indifferemment: car comme l'on ne cherche la grandeur d'aucune ligne, on les peut regarder comme étant toutes connues, ou inconnues.

Cela fait, on exprimera en termes Algebriques, les veritez que l'on veut démontrer, & on cherchera des équations par les proprietéz du triangle rectangle, & des triangles semblables, ou autrement, que l'on ramenera par le moyen des substitutions aux mêmes expressions, que celles qui expriment les veritez dont il s'agit, & alors le Theorème sera démontré.

S'il arrive que tous les termes de l'équation sur laquelle on opere, se détruisent, de sorte qu'il reste $0=0$, le Theorème sera encore démontré: car c'est une marque que la chose est telle qu'on l'a supposée, sans qu'il soit nécessaire de déterminer la grandeur d'aucune des lignes qui ont été nommées. Ceci arrive ordinairement lorsque l'on regarde les Theorèmes qu'on veut démontrer, comme des Problèmes qu'on veut résoudre.

Il arrive aussi quelquefois que l'on croit résoudre un Problème, & il se trouve par la mutuelle destruction

des termes de l'équation, que c'est un Theorème, qui se trouve aussi par ce moyen démontré. Tout ceci sera éclairci par les Exemples qui suivent.

E X E M P L E I.

Theorème.

1. **S**I une ligne droite donnée AB , est coupée également en C , & inégalement en D ; le quarré de la moitié CB moins le quarré de la partie du milieu CD , sera égal au rectangle des deux parties inégales AD , DB . FIG. 34.

Ayant nommé AC , ou CB , a ; CD , b ; AD sera, $a + b$; & DB , $a - b$.

Il faut démontrer que $aa - bb$ ($CB^2 - CD^2$) = $AD \times DB$.

D E M O N S T R A T I O N.

EN multipliant $a + b$ (AD) par $a - b$, (DB) l'on aura $aa - bb$ ($CB^2 - CD^2$) = $AD \times DB$.
C. Q. F. D.

E X E M P L E II.

Theorème.

2. **S**I une ligne droite AB , coupée par le milieu en C , est prolongée en D d'une grandeur quelconque. Je dis que le quarré de CD moins le quarré de CB , sera égal au rectangle de la toute AD , par la partie prolongée BD . FIG. 35.

Ayant nommé CD , a ; AC , ou CB , b ; AD sera, $a + b$; & BD , $a - b$.

Il faut démontrer que $aa - bb$ ($CD^2 - CB^2$) = $AD \times DB$.

DÉMONSTRATION.

SI l'on multiplie $a+b$ (AD) par $a-b$ (DB), l'on aura $aa-bb$ (CD^2-CB^2) = $AD \times DB$. C. Q. F. D.

On démontrera de même les autres propositions du second Livre d'Euclide, où il s'agit des propriétés des lignes divisées de différentes manières.

E X E M P L E III.

Theorème.

FIG. 36. 3. **D**ANS tout triangle obtusangle ABC , dont l'angle ABC est obtus, si l'on prolonge un des côtés BC du côté de B , & que l'on abaisse du point A sur le prolongement, la perpendiculaire AD ; le carré du côté AC opposé à l'angle obtus, sera égal à la somme des carrés des deux autres côtés AB , BC , & outre cela à deux rectangles dont BC est un côté, & le prolongement BD , l'autre.

Ayant nommé AC , a ; AB , b ; BC , c ; DB , d ; AD , g ; DC sera $c+d$.

Il faut prouver que aa (AC^2) = $bb + cc + 2cd$ ($AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$).

DÉMONSTRATION.

A Cause du triangle rectangle ABC ; aa (AC^2) = gg (AD^2) + $dd + 2cd + cc$ (DC^2): Mais le triangle rectangle ADB donne $bb = gg + dd$; mettant donc en la place de $gg + dd$ sa valeur bb ; l'on aura $aa = bb + 2cd + cc$. C. Q. F. D.

FIG. 37. Si l'on fait DB ($=d$) = 0, le point D tombera en B , & l'angle ABC fera droit; & l'on aura $aa = bb + cc$: car $2cd$ devient nulle à cause de $d = 0$: mais si l'on fait d négative, & moindre que $c = BC$; le point D tombera entre B , & C ; & partant les deux angles ABC , & C seront aigus, & l'on aura en changeant le signe du

terme où d se rencontre, $aa = bb - 2cd + cc$, ou $aa + 2cd = bb + cc$, ou $AC^2 + 2BC \times BD = AB^2 + BC^2$; c'est-à-dire que dans tout triangle, le carré du côté opposé à un angle aigu, avec deux fois le rectangle du côté sur lequel tombe la perpendiculaire, par la partie interceptée entre la perpendiculaire, & cet angle aigu est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

E X E M P L E I V.

Theorème.

4. **S**I dans un cercle $ABGD$, dont le centre est C , l'on mène librement deux droites BE , DF qui se coupent en O . Je dis que $BO \times OE = DO \times OF$. FIG. 38.

L'on menera par le point O , le diamètre $ACOG$, les rayons CB , CD , & les perpendiculaires CI sur BE , & CK sur DF ; & ayant nommé les rayons CA , CG , CB , CD , a ; BI , ou IE , b ; DK , ou KF , c ; OI , d ; OK , f ; CI , g ; CK , h ; CO sera, $b + d$; OE , $b - d$; DO , $c + f$; & OF , $c - f$. Il faut démontrer que $bb - dd = (BO \times OE) = cc - ff = (DO \times OF)$.

D E M O N S T R A T I O N.

LES triangles rectangles CIB , CKD , CIO , CKO , donnent 1°. $aa = bb + gg$, 2°. $aa = cc + hh$, 3°. $kk = dd + gg$, 4°. $kk = ff + hh$; & faisant évanouir aa dans les deux premières équations, kk dans la troisième & quatrième, l'on aura 5°. $bb + gg = cc + hh$, 6°. $dd + gg = ff + hh$; & soustrayant les deux membres de la sixième équation des deux membres de la cinquième, le premier du premier, & le second du second, il viendra $bb - dd = cc - ff$. C. Q. F. D.

E X E M P L E V.

Theorème proposé en forme de Problème.

FIG. 39. 5. **U**N cercle AEBF, dont le centre est C, & un diamètre AB étant donné; il faut trouver au dedans du cercle le point D, d'où ayant abaissé la perpendiculaire DI sur le diamètre AB, & par où ayant mené une droite quelconque EDF; $ED \times DF + DI^2$ soit $= AI \times IB$.

Ayant mené par D la droite GDH parallèle à AB; puisque $GD \times DH = ED \times DF$, on peut mettre $GD \times DH$ en la place de $ED \times DF$; de sorte que le Problème se réduit à trouver le point D; en sorte que $GD \times DH + DI^2 = AI \times IB$.

Ayant supposé le Problème résolu, mené CK parallèle à ID, le rayon CH, & nommé les données CH, AC, ou CB, a; & les inconnues CI, ou KD, x; CK, ou

ID, y; AI sera $a - x$; IB, $a + x$; KH, $\sqrt{aa - yy}$; DH,

$\sqrt{aa - yy} + x$; DG, $\sqrt{aa - yy} - x$, & les conditions du Problème donneront $aa - yy - xx (GD \times DH) + yy (DI^2) = aa - xx (AI \times IB)$ qui se réduit à $0 = 0$. C'est pourquoi le Problème proposé est un Theorème, & comme il ne reste aucune ligne pour déterminer la position du point D; il suit que l'on peut prendre ce point par tout où l'on voudra dans le cercle.

L'on auroit pu démontrer ce Theorème comme le précédent, & l'on pourroit aussi démontrer tous les Theorèmes, comme on a fait celui-ci, en les considérant comme des Problèmes.

EXEMPLE

E X E M P L E VI.

Theorème.

6. **L**ES parallelogrammes BD, CE , & les triangles ABC, DCF , FIG. 40. qui ont même hauteur AG , sont entr'eux comme leurs bases BC, CF .

Ayant nommé BC, a ; CF, b ; & la hauteur AG, c ; l'on aura $ac =$ au parallelogramme BD que je nomme, x , & $bc =$ au parallelogramme CE , que je nomme y ; il faut démontrer que $x(BD) \cdot y(CE) :: a \cdot b$.

D E M O N S T R A T I O N.

PUISQUE $x = ac$, & $y = bc$, l'on a $x \cdot y :: ac \cdot bc$; donc $bcx = acy$, ou $bx = ay$; donc $x \cdot y :: a \cdot b$. C. Q. F. D.
C'est la même chose pour les triangles.

E X E M P L E VII.

Theorème.

7. **L**ES triangles semblables ABC, DEF sont entr'eux FIG. 41. comme les quarrz de leurs côtez homologues AB, DE .

Ayant nommé AB, a ; BC, b ; DE, c ; EF, d ; le triangle ABC, x ; & le triangle DEF, y ; les produits $ab (AB \times BC)$, & $cd (DE \times EF)$ seront en même raison que les triangles ABC , & DEF , ou x , & y ; c'est pourquoi l'on aura $ab \cdot cd :: x \cdot y$; donc $cdx = aby$; mais la ressemblance de ces triangles donne $a \cdot (AB) b :: (BC) :: c (DE) d (EF)$; donc $ad = bc$; donc $d = \frac{bc}{a}$; & mettant cette valeur de

d dans la première équation, l'on aura $\frac{bccx}{a} = aby$, ou $ccx = aay$; donc $x \cdot y :: aa \cdot cc :: AB^2 \cdot DE^2$. C. Q. F. D.

L'on démontrera de même, que tous les polygones semblables sont entr'eux comme les quarrz de leurs côtez homologues. Et comme les cercles sont aussi des

polygones semblables d'une infinité de côtez, dont les diametres sont les côtez homologues; il suit que les cercles sont entr'eux comme les quarréz de leurs diametres, ce que l'on démontre aussi facilement que pour les triangles semblables.

E X E M P L E VIII.

Theorème.

8. **L**ES solides semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtez homologues.

FIG. 42, Soient deux Spheres AB , & CD ; ayant nommé le
43. diametre AB de la Sphere AB , a ; sa circonference, c ; le diametre CD de la Sphere CD , b ; sa circonference, d ; la Sphere AB , x ; & la Sphere CD , y . Il faut démontrer que $x . y :: a^3 . b^3$.

D E M O N S T R A T I O N .

LA Sphere AB est égale à $\frac{aac}{6}$, & la Sphere $CD = \frac{bbd}{6}$;

donc $x . y :: \frac{aac}{6} . \frac{bbd}{6} :: aac . bbd$; donc $bbdx = aacy$:

Mais les cercles étant des polygones semblables, leurs diametres sont comme leurs circonférences; c'est pour-

quoi $a . b :: c . d$; donc $ad = bc$; & partant $d = \frac{bc}{a}$;

mettant donc cette valeur de d dans la premiere équation, l'on a $\frac{b^3cx}{a} = aacy$, ou $b^3x = a^3y$; donc $x . y :: a^3 .$

b^3 . C. Q. F. D.

On démontrera la même chose, & de la même maniere pour les autres solides semblables.

E X E M P L E IX.

Theorème.

FIG. 44 9. **L**ES triangles ABC , DEF dont les bases BC , EF , & les hauteurs AG , DH sont en raison reciproque, sont égaux.

Ayant nommé BC, a ; EF, b ; AG, c ; DH, d ; le triangle ABC, x ; & le triangle DEF, y ; l'on aura le triangle $ABC = \frac{ac}{2} = x$, & le triangle $DEF = \frac{bd}{2}$

$= y$; donc $x \cdot y :: \frac{ac}{2} \cdot \frac{bd}{2} :: ac \cdot bd$; donc $bdx = acy$:

Mais (*hyp*) $a \cdot b :: d \cdot c$; donc $ac = bd$; c'est pourquoi la premiere équation $bdx = acy$ devient $x = y$, $ABC = DEF$. C. Q. F. D.

On démontrera de la même maniere que les parallepipedes, les prismes, les cilindres, les cones, & les pyramides dont les bases, & les hauteurs sont en raison reciproque, sont en raison d'égalité.

On ne donnera pas davantage d'exemples de la Méthode de démontrer par l'Algebre les Theorèmes de Geometrie: car les quatre Sections suivantes, où l'on démontrera les proprietés les plus considerables des Sections coniques, en fourniront un assez grand nombre.



SECTION IV.

Des Sections du Cone & du Cilindre.

DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

FIG. 45, IX. 1. **O**N appelle *Section Conique*, une ligne courbe
 46, IDH , qui est la commune Section d'un Plan
 47. EDF , & de la superficie d'un Cone ABC , dont A est le
 sommet; & la base est un cercle dont le diametre est
 BC .

2. Le triangle ABC est appelé le *triangle par l'axe*; parcequ'il est la commune Section du Cone, & d'un Plan qui passe par le sommet A , & par le diametre BC de la base, & que l'axe du Cone, est dans le Plan du même triangle ABC .

SUPPOSITION.

3. **O**N suppose que le Plan EDF , est perpendiculaire au Plan du triangle ABC , & que le Plan du triangle ABC , est perpendiculaire à la base du Cone.

COROLLAIRE.

4. **D'**où il suit que DG , qui est la commune Section du Plan EDF , & du triangle ABC , est perpendiculaire à EGF , qui est la commune Section du même Plan EDF , & de la base du Cone; & que la même EGF , est perpendiculaire à BC ; & par consequent coupée (Fig. 45, & 47) par le milieu en G ; d'où l'on conclura aussi que si l'on mene par quelque point L de la ligne DG , une ligne MN parallele à BC , & une autre ligne IH parallele à EF ; ces deux lignes MN , & IH , seront dans un plan parallele à la base du Cone, dont la commune Section avec la superficie du Cone, sera un cercle qui passera par les points M, I, N, H , & dont le diametre sera

MN , qui coupera à angles droits, & par le milieu en Z , la ligne IH .

Il suit aussi que le point D , qui est commun à la courbe IDH , & au côté AB du triangle ABC , est plus près du sommet A dans les suppositions précédentes, que tout autre point de la même Courbe.

DEFINITIONS PARTICULIERES.

5. LA Section Conique IDH , est nommée *parabole*, FIG. 45. lorsque le Plan coupant EDF , est parallèle à un des côtés AC du Cone ou du triangle ABC ; DG est nommée l'axe de la parabole; D , son sommet; DL , l'abscisse, ou la coupée; IL , ou LH , l'appliquée, ou l'ordonnée à l'axe.

6. La Section Conique IDH , est appelée, *ellipse*, FIG. 46. lorsque le Plan coupant EDF , coupe les deux côtés AB , AC du Cone ou du triangle par l'axe, & n'est point parallèle à la base du Cone. La ligne Dd est nommée l'axe, ou *diametre principal*; le point K milieu de Dd , le centre; la ligne VKR menée par le centre K perpendiculaire à Dd , l'axe, ou le *diametre conjugué* à l'axe Dd ; DL , l'abscisse ou la coupée; LI , ou LH , l'ordonnée, ou l'appliquée à l'axe Dd .

Il peut arriver un cas où la Section est un cercle, quoique le Plan coupant ne soit point parallèle à la base du Cone: mais cela ne fait rien à notre dessein.

7. La Section Conique IDH , est appelée *hyperbole*, FIG. 47. lorsque le Plan coupant EDF , coupe aussi la superficie Conique opposée, & y forme une autre hyperbole edf , opposée à la première, que l'on démontrera ailleurs lui être égale, & semblable; Dd est nommée l'axe déterminé de l'hyperbole, ou des hyperboles opposées; D , & d , le sommet de l'axe Dd ; DL , l'abscisse, ou la coupée; LI , ou LH , l'appliquée; ou l'ordonnée; le point K milieu de Dd , le centre.

PROPOSITION. I.

Theorème.

FIG. 45. 8. **E**N supposant les mêmes choses que l'on a supposées dans la Figure où la courbe IDH, est une parabole; & outre cela, si on mene DO parallèle à BC, ou à MN; si on prend $AP = DO$, & qu'on mene PQ parallèle à DO, ou à MN. Je dis que $DL \times PQ = LI^2 = LH^2$.

Puisque le Plan coupant EDF est (n°. 5.) parallèle à AC; AP = DO sera = LN; & ayant nommé les données AO, b; DO, ou AP, ou LN, c; PQ, p; & les inconnues DL, x; & LI, y.

Il faut prouver que $px (PQ \times DL) = yy (LI^2)$.

DEMONSTRATION.

LES triangles semblables AOD, DLM, donnent $AO (b) \cdot OD (c) :: DL (x) \cdot LM = \frac{cx}{b}$; Or (n°. 4),

& par la propriété du cercle $(LM \times LN) \frac{cx}{b} = (LI^2) = yy$; mais la ressemblance des triangles AOD, APQ donne $b \cdot (AO) \cdot c (OD) :: c (AP) \cdot p (PQ)$; donc $cc = bp$. Mettant donc bp en la place de cc dans la première équation, l'on aura $px = yy$, C. Q. F. D.

DÉFINITION.

9. **L**A ligne $PQ = p$, est appelée le paramètre de l'axe de la parabole.

PROPOSITION II.

Theorème.

10. **E**N supposant les mêmes choses que dans la Figure où FIG. 46.
 la courbe IDH est une ellipse ; & outre cela , si l'on divise
 Dd par le milieu en K , & si l'on mene SKT parallele à
 MN , & VKR parallele à HI ; RV , sera la commune Section
 de l'ellipse , & d'un cercle SRTV , dont le diametre est ST , &
 qui est coupé dans la superficie Conique par un Plan pa-
 rallele à la base du Cone , ou au Plan du cercle MINH ,
 puisque HI est (n^o. 4) la commune Section de l'ellipse , &
 du cercle MINH. De sorte que V & R seront dans la circonfé-
 rence du cercle SRTV , & dans celle de l'ellipse. Cela po-
 sé , je dis que $DL \times Ld . LI^2 :: DK^2 . KR^2$.

Ayant nommé les données DK , ou Kd , a ; SK , g ;
 KT , f ; KV , ou KR , b ; & les indéterminées KL , x ;
 LI , ou LH , y ; DL sera a — x , & dL , a + x .

Il faut démontrer que $aa - xx (DL \times Ld) . yy$
 $(LI^2) :: aa (DK^2) . bb (KR^2)$.

DÉMONSTRATION.

LES triangles semblables dKT , dLN , & KDS , LDM ,
 donnent $dK (a) . KT (f) :: dL (a + x) . LN = \frac{af + fx}{a}$,

& $KD (a) . KS (g) :: LD (a - x) . LM = \frac{ag - gx}{a}$;

donc par la propriété du cercle $\frac{aafg - afgx + afgx - fgxx}{aa}$

$(LN \times LM) = yy (LI^2)$, qui se reduit à $\frac{aafg - fgxx}{aa} = yy$:

mais $fg = TK \times KS = (\text{par la propriété du cercle})$
 $KR^2 = bb$; c'est pourquoi mettant dans l'équation pré-

cedente pour fg la valeur bb , l'on aura $\frac{aabb - bbxx}{aa} = yy$, ou

$aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, d'où l'on tire $aa - xx . yy :: aa . bb$,

C. Q. F. D.

Si l'on avoit nommé DL , x ; l'on auroit trouvé cette équation $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$

PROPOSITION III.

Theorème.

FIG. 47. II. **E**N supposant les mêmes choses que l'on a supposées dans la Figure où la courbe IDH est une hyperbole, & outre cela, si l'on divise Dd par le milieu en K , & qu'ayant mené KTS parallèle à MN , on trouve une moyenne proportionnelle KR entre KS , & KT . Je dis que $DL \times Ld \cdot LI^2 :: DK^2 KR^2$.

Ayant nommé les données KD , a ; KR , b ; KS , g ; KT , f ; & les indéterminées KL , x ; LI , ou IH , y ; LD fera, $x - a$; & Ld , $x + a$.

DEMONSTRATION.

LES triangles semblables dKT , dLN , & DKS , DLM , donnent, $dK(a) \cdot KT(f) :: dL(x+a) \cdot LN = \frac{fx+af}{a}$,

& $DK(a) \cdot KS(g) :: DL(x-a) \cdot LM = \frac{gx-ag}{a}$; donc

par la propriété du cercle $\frac{gfxx - aafg}{aa} (ML \times LN) = yy$ (LI^2). L'on a aussi par la construction $g(KS) \cdot b(KR) :: b(KR) \cdot f(KT)$; donc $gf = bb$; c'est pourquoi si l'on met dans l'équation précédente, en la place de gf sa valeur bb , l'on aura $\frac{bbxx - aabb}{aa} = yy$, ou $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, d'où l'on tire $xx - aa \cdot yy :: aa \cdot bb$. C. Q. F. D.

Si l'on avoit nommé DL , x ; l'on auroit eu cette équation $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$.

DÉFINITION.

DEFINITION.

12. LA ligne VKR double de KR menée par K parallèle à IH , est appelée l'axe conjugué à l'axe Dd . FIG. 46,
47.

13. Dans l'ellipse & dans l'hyperbole, la troisième proportionnelle à deux diamètres conjugués quelconques, est appelée le paramètre de celui qui occupe le premier lieu dans la proportion.

14. Suivant cette Définition, il est aisé de déterminer le paramètre de l'axe Dd dans l'ellipse, & dans l'hyperbole : car il n'y a qu'à prendre $DP = 2KT$; & la droite PQ , parallèle à MN , qui rencontre le côté AB du cône en Q , fera le paramètre qu'on cherche : car, ayant nommé la ligne PQ , p ; les triangles semblables DKS , DPQ , donnent $a(DK) \cdot g(KS) :: 2f(DP, \text{ou } 2KT) \cdot p(PQ)$; donc $pa = 2fg$; mais (n°. 11) $fg = bb$; donc $pa = 2bb$, d'où l'on tire $a \cdot b :: 2b \cdot p$, ou $2a \cdot 2b :: 2b \cdot p$, c'est à-dire $Dd \cdot RV :: RV \cdot PQ$.

15. Puisque (n°. 14) $a \cdot b :: 2b \cdot p :: b \cdot \frac{1}{2}p$; donc $aa \cdot bb :: a \cdot \frac{1}{2}p :: 2a \cdot p$; donc $aap = 2abb$; donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; c'est pourquoi, si l'on met dans les deux équations précédentes (n°. 10, & 11) au lieu de $\frac{aa}{bb}$ sa valeur $\frac{2a}{p}$; l'on aura $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$, & $xx - aa = \frac{2ayy}{p}$; d'où l'on tire $aa - xx$, ou $xx - aa \cdot yy :: 2a \cdot p$, c'est à-dire, $DL \times LD \cdot LI^2 :: Dd \cdot PQ$.

PROPOSITION IV.

Theorème.

FIG. 48. 13. **L** A même hyperbole IDH, dont l'axe déterminé est Dd, le centre K, le diamètre ou l'axe conjugué RV perpendiculaire à Dd, une ordonnée IL parallèle à RV, étant mise sur un Plan. Je dis qu'ayant fait au sommet D, DB, & DE parallèles, & égales à KR, ou KV; les lignes KB, KE menées du centre K par les points B, E, & indéfiniment prolongées, ne rencontreront jamais l'hyperbole, & qu'elles s'en approcheront de plus en plus à l'infini.

DÉMONSTRATION.

A YANT mené du sommet D, les droites DG, DO parallèles à KB, & à KE; du point I, les droites IM, IP parallèles aux mêmes KE, KB, & prolongé IL de part & d'autre qui rencontre KB & KE en C, & F; & nommé, comme dans la proposition précédente, les données DK, a ; DB, ou DE, b ; KO, ou GD, ou KG, ou OD, qui sont toutes égales, c ; & les indéterminées KL, x ; LI, ou LH, y ; IP ou MK, f ; IM, ou PK z . Les triangles semblables KDB, KLC, donnent KD(a).

$DB(b) :: KL(x) . LC = \frac{bx}{a}$; donc $IC = \frac{bx}{a} - y$ & $IF = \frac{bx}{a} + y$: car puisque (const.) $DB = DE$, LC sera = LF; & puisque (n°. 4) $LI = LH$, IC, sera = HF. De plus, les triangles semblables DBG, ICM, & DEO, IFP donnent, $b . (DB) . c (DG) :: \frac{bx}{a} - y (IC) . z$

(IM), & $b (DE) . c (DO) :: \frac{bx}{a} + y (IF) . f (IP)$,

d'où l'on tire ces deux équations $bz = \frac{bcx}{a} - cy$, & $bf = \frac{bcx}{a} + cy$: mais l'on a par la Proposition précédente $xx =$

— $aa = \frac{axy}{bb}$; c'est pourquoi si on fait évanouir x , & y , par le moyen de ces trois équations, l'on aura celle-ci $fx = cc$, c'est-à-dire, $PI \times IM = KG \times GD$, qui fait voir que f , ou PI , ou MK croissant, z ou MI diminue ; ce qui peut aller à l'infini. Et comme fx , ou $PI \times IM$, doit toujours être $= KG \times GD$; il suit que quelque grande que l'on suppose f , ou PI , ou KM , il faut que MI ait encore quelque longueur ; & partant KM ne rencontrera jamais l'hyperbole $IDH. C. Q. F. D.$

DÉFINITION.

LES lignes KC , & KF sont nommées *asymptotes* de l'hyperbole.

COROLLAIRE.

IL est clair que tous les parallelogrammes, comme $KIMP$, sont égaux entr'eux, & au parallelogramme $KGDO$, en quelqu'endroit de l'hyperbole que l'on prenne le point I .

PROPOSITION V.

Theorème.

14. SOIT AB une superficie cylindrique coupée par un Plan FIG. 47. AB qui passe par l'axe du cylindre. Je dis que si l'on coupe la superficie cylindrique par un autre Plan $dIDHd$ perpendiculaire au Plan AB , & incliné à l'axe du cylindre, la commune Section $dIDHd$ de ce Plan, & de la superficie cylindrique, sera une ellipse.

DÉMONSTRATION.

AYANT divisé Dd qui est la commune Section des Plans AB , & $dIDHd$ par milieu en K , & pris librement un point L sur la même Dd ; si l'on suppose la superficie cylindrique coupée par deux Plans paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe du cylindre, qui passent par les points K & L , les communes Sections $SVTR$, $MHNI$
K ij

de ces deux Plans, avec la superficie cilindrique, feront deux cercles dont les communes Sections VKR , HLI , avec le Plan $dIDHd$, feront perpendiculaires à Dd , à ST , & à MN ; & dont les communes Sections ST , MN , avec le Plan AB , sont les diametres; d'où il suit que $KV = KR$, & $LH = LI$, & que le point K qui divise Dd par le milieu, divise de même ST ; & partant le point K est le centre du cercle SVT .

Ayant donc nommé les données KD , ou Kd , a ; SK , ou KT , ou KR , ou KV , b ; & les indéterminées KL , x ; LI , y ; DL sera $a+x$, & Ld $a-x$.

Les triangles semblables DKS , DLM donnent $DK(a) \cdot KS(b) :: DL(a+x) \cdot LM = \frac{ab+bx}{a}$. Pareillement les triangles semblables dKT , dLN donnent $dK(a) \cdot KT(b) :: dL(a-x) \cdot LN = \frac{ab-bx}{a}$. Mais à cause du cercle MIN , $ML \times LN = LI^2$, c'est-à-dire en termes Algebriques $\frac{aabb-bbxx}{aa} = yy$, ou $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$; & comme cette équation est la même que la précédente (n°. 10). Il suit que la courbe $dIDHd$, est une ellipse. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI.

Theorème.

18. **S**I les bases des superficies coniques ; & par conséquent Fig. 45,
46,
47. les courbes *IMH*, qui sont les communes Sections des mêmes superficies coniques par des Plans paralleles aux bases, ont cette propriété qu'une puissance quelconque de leurs appliquées *LH*, ou *LI*, soit égale au produit de deux puissances de *LM*, & *LN*, telles que la somme de leurs exposans, soit = à l'exposant de la puissance de *LI*, c'est-à-dire par exemple, que $LI^{p+q} = LM^p \times LN^q$, ou $LM^q \times LN^p$. Je dis que les Sections coniques *IDH*, telles que nous les avons définies (n°. 5, 6, & 7) sont de même genre que les courbes *IMH*.

En donnant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a données (n°. 8, 10, & 11) ; & faisant $p + q = m$. p & q , signifient tels nombres qu'on voudra entiers ou rompus.

Soit premierement le Plan coupant *EDF* parallele à *AC*. Il faut prouver que la courbe *IDH*, est une parabole du même genre que la courbe *IMH*.

DÉMONSTRATION.

L'ON trouvera, comme on a fait (n°. 8) $LM = \frac{cx}{b}$;

donc $LM^p = \frac{c^p x^p}{b^p}$. *LN* = *DO* a été nommée *c* ; donc

$LN^q = c^q$; mais par la propriété de la courbe *IMH*,

$LM^p \times LN^q = LI^m$, c'est-à-dire, en termes Algebriques,

ques, $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$, qui est une équation à une parabole

du même genre que la courbe *IMH*, puisque l'inconnue *y*, dont l'exposant est plus grand que celui de *x*, est élevée à la même puissance que *LI* = *y*, dans l'équation à la courbe *IMH*. *C. Q. F. D.*

Ce sera la même Démonstration pour l'ellipse & pour

78 APPLICATION DE L'ALGÈBRE
l'hyperbole, & pour la Section du cylindre.

M^r De la Hire pui est le seul que je sçache qui a parlé de ces courbes, les appelle celles du second, troisième, quatrième, cinquième genre, &c.

Si dans l'équation précédente $LI^m = LM^p \times LN^q$, on fait $p = 2$, & $q = 1$, ou $p = 1$, & $q = 2$; $m = p + q$ fera $= 3$, & l'équation deviendra $LI^3 = LM^2 \times LN$, ou $LI^3 = LM \times LN^2$, & la courbe IMH , sera un cercle du second genre.

Dans la même supposition de $p = 2$, & $q = 1$, l'équation $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$, devient $\frac{c^3 x^3}{b^3} = y^3$, qui est du même degré que celle de la courbe IMH , & qui appartient par conséquent à une parabole du second genre, qu'on appelle *seconde parabole cubique*.

Si $p = 1$, & $q = 2$, l'équation $\frac{c^q c^p x^p}{b^p} = y^m$ deviendra $\frac{c^2 x}{b} = y^3$, qui se rapporte encore à une parabole du second genre, qu'on appelle *première parabole cubique*. Il en est ainsi des autres.

REMARQUE.

16. ON détermineroit avec la même facilité la nature, & le genre de la courbe IDH , dans le Cone, & dans le Cylindre; si la courbe IMH , dont le Plan est parallèle à la base BC , étoit une Section conique d'un genre quelconque. Et en general, la nature de la courbe IMH étant donnée, on déterminera aisément la nature de la courbe IDH ; & au contraire. De sorte qu'il n'y a point de courbe que l'on ne puisse considérer comme la Section d'une espèce de Cone ou de Cylindre, & déterminer par son moyen la nature de la courbe IMH parallèle à la base de ce Cone, & de ce Cylindre; ou bien qu'il n'y a point de courbe, que l'on ne puisse supposer être la base d'un Cone, ou d'un Cylindre, &

déterminer par son moyen la nature des Sections de ce Cone, & de ce Cilindre. De maniere qu'on peut avoir des Sections coniques d'une infinité de genres, & de plusieurs especes dans chaque genre. Or comme les genres les plus composez renferment un plus grand nombre de courbes que les plus simples, il y aura d'autant plus d'especes de Sections coniques dans chaque genre, qu'il sera plus composé.

On s'est contenté de démontrer dans le Cone, la principale propriété des Sections coniques du premier genre, attendu qu'on en va démontrer dans les trois Sections suivantes, toutes les propriétés nécessaires pour l'Application de l'Algebre à la Géometrie, en les décrivant par des points trouvez sur des Plans. On ne les a même considérées dans le Cone que parcequ'elles y ont pris leur origine & leur nom; & pour faire voir que celles qu'on décrit sur des Plans, sont précisément les mêmes que celles qu'on coupe dans le Cone, & qu'on peut par conséquent leur donner les mêmes noms.



SECTION V.

Où l'on démontre les principales propriétés de la parabole, décrite par des points trouvez sur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorème.

FIG. 50. X. **U**NE ligne droite DFP , & deux points fixes D , & F sur cette ligne, étant donnez de position sur un Plan. Je dis que si l'on mene librement la ligne MPm , perpendiculaire à DFP ; & si du centre F , & du rayon DP , l'on décrit un cercle; il coupera la perpendiculaire MPm , en deux points M & m , qui seront à la parabole.

DÉMONSTRATION.

IL est clair qu'ayant divisé DF par le milieu en A , le cercle décrit du centre F , & du rayon DA , touchera en A , la perpendiculaire menée par le point A , & ne rencontrera point celles qui seroient menées au-dessus de A par rapport à F : mais qu'il coupera en deux points toutes celles qui seront menées au-dessous de A , comme MPm ; d'où il suit que la courbe qui passe par les points M , m trouvez, comme on vient de dire, passe aussi par le point A .

Ayant mené FM , & nommé les données, ou constantes AF , ou AD , a ; & les indéterminées, ou variables AP , x ; PM , y ; FP sera $x - a$, ou $a - x$; & FM , ou DP , $x + a$.

Le triangle rectangle FPM donne $xx - 2ax + aa + yy = aa + 2ax + xx$, qui se réduit à $4ax = yy$, ou (en faisant

fant $4ax = p^2$) $px = yy$. Or comme cette équation est la même que celle de l'article 9. n°. 8 ; il suit que la courbe MAm , est une parabole, dont le parametre est $p = 4a = 4AF = 2FD$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

1. IL est évident que $2FD . PM :: PM . AP$: car l'équation $4ax = yy$, étant réduite en analogie, donne $4a . y :: y . x$.

COROLLAIRE II.

2. IL est clair que si l'on mene par D la ligne ED parallèle à PM , & par les points M, m qui sont communs à la parabole & à la perpendiculaire MPm , les droites ME, me parallèles à PD , elles seront égales entr'elles, à PD , & à FM , & que les parties PM, Pm de la perpendiculaire MPm , seront aussi égales.

DÉFINITIONS.

3. LA ligne AP est nommée l'axe de la parabole ; A , le sommet de l'axe, ou de la parabole ; PM , ou Pm l'appliquée, ou l'ordonnée ; AP , l'abscisse ou la coupée ; F , le foyer ; D , le point generateur ; Ee , la ligne generatrice ; AB , quadruple de AF , ou de AD , le parametre de l'axe.

COROLLAIRE III.

4. L'ON voit par l'équation précédente $4ax = yy$ que x croissant y croît aussi ; & qu'ainsi la parabole s'éloigne toujours de plus en plus de son axe à mesure que le point P s'éloigne du sommet A , & que cela peut aller à l'infini : car il n'y a rien dans l'équation qui empêche d'augmenter x à l'infini.

COROLLAIRE IV.

5. D'où il suit que les lignes comme EM menées parallèles à AP passent au dedans de la parabole étant prolongées vers R , & ne la rencontre qu'en un seul point M .

L

COROLLAIRE V.

6. **S**I dans l'équation $4ax = yy$, l'on fait $x = a$, le point P tombera en F , & l'on aura $4aa = yy$; donc $2a = y$; c'est-à-dire que l'appliquée FO qui part du foyer est égale à la moitié du paramètre; & si l'on fait $x = 4a$, l'on aura $16aa = yy$, ou $4a = y$, c'est-à-dire que AP , & PM seront chacune égale au paramètre.

COROLLAIRE VI.

7. **I**L est manifeste que la quantité constante qui accompagne l'inconnue ou l'indéterminée qui n'a qu'une dimension dans un des membres de l'équation, est l'expression du paramètre de l'axe de la parabole, lorsque le carré de l'autre indéterminée est seul dans l'autre membre: par exemple dans cette équation $\frac{axx}{c} = yy$, $\frac{aa}{c}$, est l'expression du paramètre de l'axe de la parabole dont l'abscisse est x ; & l'appliquée y .

PROPOSITION II.

Theorème.

8. **L**ES quarez des ordonnées PM , QN sont entr'eux comme les abscisses correspondantes AP , AQ .

Ayant nommé comme dans la Proposition précédente AB , $4a$; AP , x ; PM , y ; & AQ , f ; QN , z .

Il faut prouver que $PM^2 (yy) \cdot QN^2 (zz) :: AP (x) \cdot AQ (f)$.

D'EMONSTRATION.

LON a par la Proposition précédente $4ax = yy$, & $4af = zz$; donc $yy \cdot zz :: 4ax \cdot 4af :: x \cdot f$. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Theorème.

9. **L**ES mêmes choses étant toujours supposées. Je dis que, si d'un point quelconque m pris sur la parabole, on mène une parallèle à PA , qui rencontrera la génératrice en e , & par le sommet A , la droite AC parallèle à De qui rencontrera em en C ; le cercle mle décrit sur le diamètre me coupera AC par le milieu en I .

Ayant nommé la donnée AD , ou eC , a ; & les indéterminées AP , ou Cm , x ; Pm , ou AC , y ; & CI , f .

Il faut prouver que $CI(f) = \frac{1}{2} AC \left(\frac{1}{2} y \right)$.

DÉMONSTRATION.

L'ON a par la première proposition $4ax = yy$, & par la propriété du cercle $ax(eC \times Cm) = ff(CI^2)$, ou $4ax = 4ff$; donc $y = 2f$, ou $\frac{1}{2}y = f$. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Theorème.

10. **E**N supposant encore les mêmes choses, si l'on prend AG , menée par le sommet A parallèle aux appliquées PM , pour l'axe de la parabole, & GM parallèle à AP , pour l'appliquée, en nommant AG ou PM , x ; GM , ou AP , y ; & le paramètre $4AF$, $4a$. Je dis que $4AF \times GM = AG^2$.

DÉMONSTRATION.

L'ON a par la première Proposition $4ay = xx$. C. Q. F. D.

L'on n'a mis ici cette Proposition que pour faire voir qu'il est indifférent de prendre celui qu'on voudra des deux axes conjugués pour l'abscisse, & l'autre pour l'ap-

L ij

84 APPLICATION DE L'ALGEBRE
 pliquée ; ce qui convient à toutes les courbes Geometriques , où les deux indéterminées forment toujours un parallelogramme que nous avons nommé (art. 3 n°. 16) le parallelogramme des coordonnées.

PROPOSITION. V.

Problème.

11. **U**NE équation à la parabole , $bx = yy$, étant donnée , décrire la parabole , lorsque les coordonnées sont perpendiculaires l'une à l'autre.

b , étant (n°. 7) le parametre ; x , l'abscisse ; & y , l'appliquée de la parabole qu'il faut décrire , comme il est démontré dans la premiere Proposition.

Soit A le commencement de x , qui va vers P ; & de y qui va vers B , ayant pris $AB = b$, & prolongé AP du côté de A , on fera AF , & AD chacune égale à $\frac{1}{4}b = \frac{1}{4}AB$, & l'on décrira une parabole AM par la premiere Proposition qui satisfera au Problème , & dont A sera le sommet , F le foyer , & D le point generateur.

DEMONSTRATION.

AYANT mené une ordonnée quelconque PM ; AF étant , $\frac{1}{4}b$; AP , x ; PM , y ; FP sera , $x - \frac{1}{4}b$, ou $\frac{1}{4}b - x$; & $FM = PD$ (n°. 2) , $x + \frac{1}{4}b$. Et le triangle rectangle FPM donnera $xx + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb = xx - \frac{1}{2}bx + \frac{1}{16}bb + yy$ qui se réduit à $bx = yy$. C. Q. F. D.

REMARQUE

12. **S**I l'on avoit nommé (Prop. 1) DP , x ; & DF , a ; l'on auroit trouvé $2ax - aa = yy$; & si l'on avoit nom-

mé FP, x ; & DF, a ; l'on auroit trouvé $2ax + aa = yy$. Ce qui fait voir que lorsqu'une équation à la parabole a plus de deux termes, l'origine des inconnues n'est point au sommet de l'axe.

PROPOSITION VI.

Problème.

XI. **U**NE parabole AM , dont l'axe est AP , le sommet A , le foyer F , le point generateur D , & la ligne generatrice EDH , étant donnée. On propose de mener d'un point quelconque M , donné sur la parabole, la tangente MT . FIG. VI.

Ayant mené par le point donné M la droite MH parallèle à l'axe AP , & joint les points F, H ; la ligne MOT menée du point M par le point O milieu de FH , fera la tangente cherchée.

DEMONSTRATION.

PUISQUE (Art. 10. n^o. 2.) $MF = MH$, & que FH est coupée par le milieu en O ; la ligne MO est perpendiculaire à FH ; c'est pourquoi si l'on prend sur MO prolongée ou non prolongée un point quelconque G , d'où l'on mene GF , & GH , & GI parallèle à AP , le triangle FGH sera isoscele: mais à cause de l'angle droit GIH , GH surpasse GI ; c'est pourquoi GF surpasse aussi GI ; & par conséquent le point G est hors de la parabole, & partant MO ne la rencontre qu'au point M , où elle la touche. *C. Q. F. D.*

On peut ajouter pour confirmer cette Démonstration, que si d'un point quelconque R pris au dedans de la parabole, on mene RF du point R au foyer, & RH parallèle à AP qui rencontre la parabole en M , & la generatrice en H , la ligne RH surpassera toujours RF : car ayant mené MF , elle sera (Art. 10. n^o. 2.) $= MH$: mais $RM + MF$ surpassent RF ; & partant RH surpasse RF ; c'est pourquoi puisque GF surpasse GI , le point G est hors de la parabole. On ne peut pas dire que le

point G soit sur la parabole: car $GF(=GH)$ seroit $= GI$.

COROLLAIRE I.

1. IL est clair que MO prolongée rencontre l'axe AP aussi prolongée en T : car l'angle FOT étant droit, l'angle OFT sera aigu.

COROLLAIRE II.

2. SI l'on prolonge HM vers R , & la tangente MO du côté de M vers S ; l'angle RMS sera égal à l'angle $OMF=OMH$.

COROLLAIRE III.

3. D'où il suit par les loix de la *Catoptrique* que si le foyer F étoit un point lumineux, les rayons réfléchis à la rencontre de la parabole seroient parallèles à l'axe. Ou ce qui est la même chose, les rayons parallèles à l'axe venant d'un point lumineux infiniment éloigné, se réfléchissant à la rencontre de la parabole, leurs réfléchis passeroient tous au foyer F .

PROPOSITION VII.

Theorème.

4. EN supposant la même chose que dans la Proposition précédente. Je dis que, si l'on mène par le point touchant M , la droite MQ parallèle à HF , qui rencontrera l'axe AP en Q , la partie de l'axe PQ , comprise entre le point Q , & l'ordonnée PM qui part du point M , sera égale à la moitié du paramètre de l'axe de la parabole.

DÉMONSTRATION.

A Cause des parallèles HF , MQ & HM , FQ , les triangles MPQ , HDF sont semblables & égaux; c'est pourquoi $PQ=DF$ = (Prop. I.) à la moitié du paramètre de l'axe.

DÉFINITION.

3. LA ligne PT est nommée *soutangente*, MQ *perpendiculaire*; & PQ , *souperpendiculaire*, ou *sounormale*.

PROPOSITION VIII.

Theorème.

6. **L**ES choses demeurant dans le même état que dans la Proposition précédente. Je dis que la soute tangente PT est double de l'abscisse AP , comprise entre le sommet A & l'ordonnée PM qui part du point touchant M .

Ayant nommé comme dans la première Proposition les données AF , ou AD ; a ; PQ (n°. 5.) $2a$; & les variables AP , x ; PM , y ; PT , t .

Il faut prouver que $t = 2x$.

DEMONSTRATION.

L'ANGLE FOT étant (Prop. 6) droit, l'angle QMT (n°. 4) sera aussi droit; c'est pourquoi $2a$ (QP). y (PM) :: $y \cdot t$ (PT); donc $2at = yy$; Mais (Prop. 1) $4ax = yy$; donc $2at = 4ax$; & partant $t = 2x$. C. Q. F. D.

7. Cette Proposition fournit un moyen aisé de mener une tangente à la parabole; car si d'un point quelconque M , on mene l'ordonnée MP perpendiculaire à l'axe AP ; ayant fait $AT = AP$, la ligne MT sera la tangente cherchée.

PROPOSITION IX.

Theorème.

8. **U**NE Parabole AM dont AP est l'axe; A , le sommet; F , le foyer; D , le point generateur; DE , la ligne generatrice. Si par un point quelconque M pris sur la parabole, on mene (n°. 7) la tangente MT , & par quelque autre point L , la ligne LG parallele à la tangente MT . Je dis que la ligne MR menée par le point touchant M parallele à l'axe AP , coupera GL par le milieu en O .

Ayant mené par les points L , M , O , & G . Les lignes BLI qui rencontre MR prolongée en I , MP , OC ,

FIG. 52. & *GRS* perpendiculaires à l'axe *AP*, & nommé *AF*, ou *AD*, *a*; le parametre de l'axe sera (Art. 10) $4a = 4AF$; *AP*, *x*; *PM*, ou *BI*, ou *SR*, *y*; *AC*, *m*; *BC*, ou *IO*, *f*; *CS*, ou *OR*, *z*; *AB* sera, $m - f$; *AS*, $m + z$; *CP*, ou *OM*, $m - x$; & *PT* (n° 6), $2x$.

Il faut prouver que $OG = OL$, ou ce qui revient au même $OR = OI$, ou $f = z$.

DÉMONSTRATION.

LES triangles semblables (Const.) *TPM*, *ORG*, *OIL*, donnent les deux Analogies suivantes.

$$TP(2x) \cdot PM, (y) :: OR(z) \cdot RG = \frac{yz}{2x}, \text{ \&}$$

$$TP(2x) \cdot PM(y) :: OI(f) \cdot IL = \frac{yf}{2x}; \text{ donc } SG = y + \frac{yz}{2x}, \text{ \& } BL = y - \frac{yf}{2x} : \text{ mais (Art. 10 n° 8)}$$

$$x(AP) \cdot m + z(AS) :: yy(PM^2) \cdot yy + \frac{2yyz}{2x} + \frac{yyz^2}{4xx} (SG^2) \cdot \& x(AP) \cdot m - f(AB) :: yy(PM^2) \cdot yy - \frac{2yyf}{2x} + \frac{yyf^2}{4xx} (BL^2), \text{ d'où l'on tire ces deux équations}$$

$$A. myy + yyz = xyy + \frac{2xyyz}{2x} + \frac{xyyzz}{4xx}, \text{ \&}$$

$$B. myy - yyf = xyy - \frac{2xyyf}{2x} + \frac{xyyff}{4xx}, \text{ \& ôtant le pre-$$

mier membre de la seconde équation *B* du premier membre de la première *A*, & le second de la seconde du second de la première, l'on a $yyz + yyf = \frac{2xyyz + 2xyyf}{2x}$

$$+ \frac{xyyzz - xyyff}{4xx}, \text{ d'où l'on tire } z = f, \text{ ou } OR =$$

OI; donc $OL = OG$. C. Q. F. D.

Il peut arriver differens cas: car le point *O* s'éloignant de *M*, le point *L* tombera en *A*, ou de l'autre côté de *A* par rapport à *M*: mais l'on prouvera toujours de la

la même maniere que $z=f$, $OG=OL$; c'est pourquoi la Proposition est généralement vraie.

DEFINITIONS.

9. LA ligne MR parallele à l'axe AP est appelée *diametre*, parcequ'elle coupe toutes les GL par le milieu en O ; le point M , le *sommet* du diametre MR ; MO , l'*abscisse*, ou *coupee*; OL , ou OG , l'*ordonnée*, ou l'*appliquée* à ce diametre.

PROPOSITION X.

Theorème.

10. EN supposant les mêmes choses que dans la Proposition precedente. Je dis que le quarré d'une ordonnée quelconque OL , ou OG au diametre MR , est égal au rectangle de l'abscisse MO par $4MF$, ou (Art. 10. n°. 2.), ayant prolongé OM en H , par $4MH$.

Ayant nommé l'abscisse MO , t ; l'ordonnée OL , ou OG , u ; MF , ou MH , b ; & les autres lignes comme dans la Proposition precedente.

Il faut prouver que $4bt = uu$, ($4MF \times MO = OG^2$).

DEMONSTRATION.

SI l'on ajoute les deux premiers & les deux seconds membres des deux équations A & B de la Proposition precedente, après avoir mis z en la place de f ; puisque

(Prop. preced.) $z=f$; l'on aura $2myy = 2xyy + \frac{2xyyzz}{4xx}$,

ou $zz = 4mx - 4xx$, ou $zz = 4tx$, en mettant t pour $m - x = PC = MO$: mais le triangle rectangle ORG ,

ou OIL donne $zz(OR^2) + \frac{yyzz}{4xx}(RG^2$. Prop. preced.)

$= uu(OG^2$, ou $OL^2)$, qui devient $4tx + 4at = uu$ en mettant pour zz sa valeur $4tx$, & pour yy sa valeur (Prop. 1) $4ax$: mais $x + a = PD = MF = MH = b$,

M

donc en substituant b en la place de $x + a$ dans l'équation précédente, elle deviendra $4bt = ut$, ou $4MF \times MO = OG^2$. C. Q. F. D.

DÉFINITION.

II. LA ligne égale à $4b = 4MF = 4MH$ est nommée le *paramètre* du diamètre MO .

PROPOSITION XI.

Problème.

12. UNE équation à la parabole ($ax = yy$) dont les coordonnées x & y ne sont point perpendiculaires, étant donnée, décrire la parabole.

FIG. 53. Soit M le sommet du diamètre MO , dont le paramètre est a , & l'origine des variables x , qui va vers O , & y qui va vers K en faisant avec MO l'angle oblique OMK . Il faut décrire par M la parabole LMG dont l'équation est $ax = yy$.

Ayant prolongé OM & pris $MH = \frac{1}{4}a =$ (Prop. précéd.) au quart du paramètre du diamètre MO , on mènera par H la droite HE perpendiculaire à HO , qui sera (Prop. précéd.) la ligne génératrice; & ayant fait l'angle $KMF =$ l'angle KMH , pris $MF = MH$ & mené par F la ligne FD parallèle à MO qui coupera la génératrice HE en D . Par la Proposition précédente, & par la sixième, F fera le foyer; FD , l'axe; D le point générateur, & A milieu de FD le sommet de l'axe de la parabole qu'il faut décrire. On la décrira par la première Proposition.

DÉMONSTRATION.

ELLE est claire par la Proposition précédente, & par la sixième.

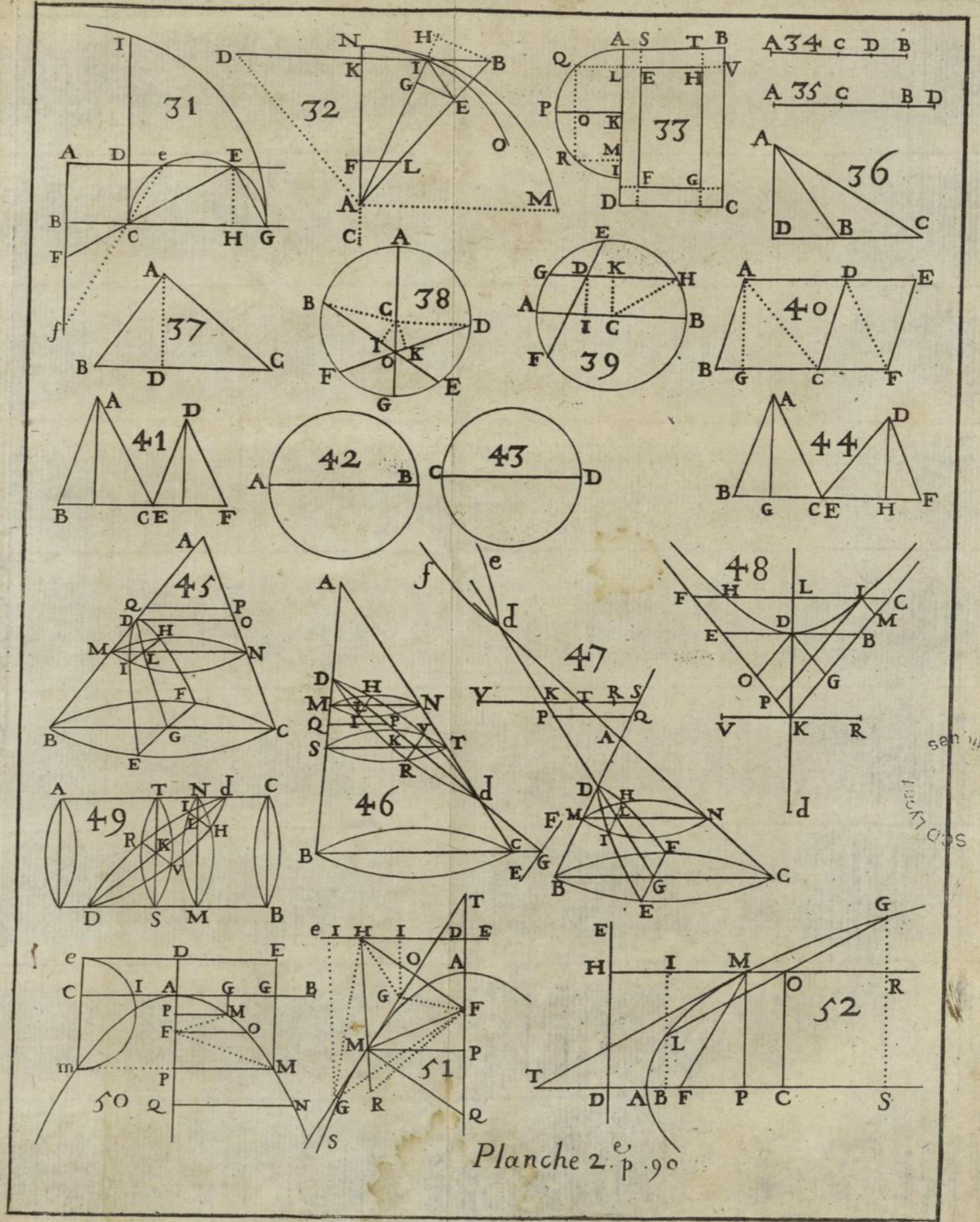
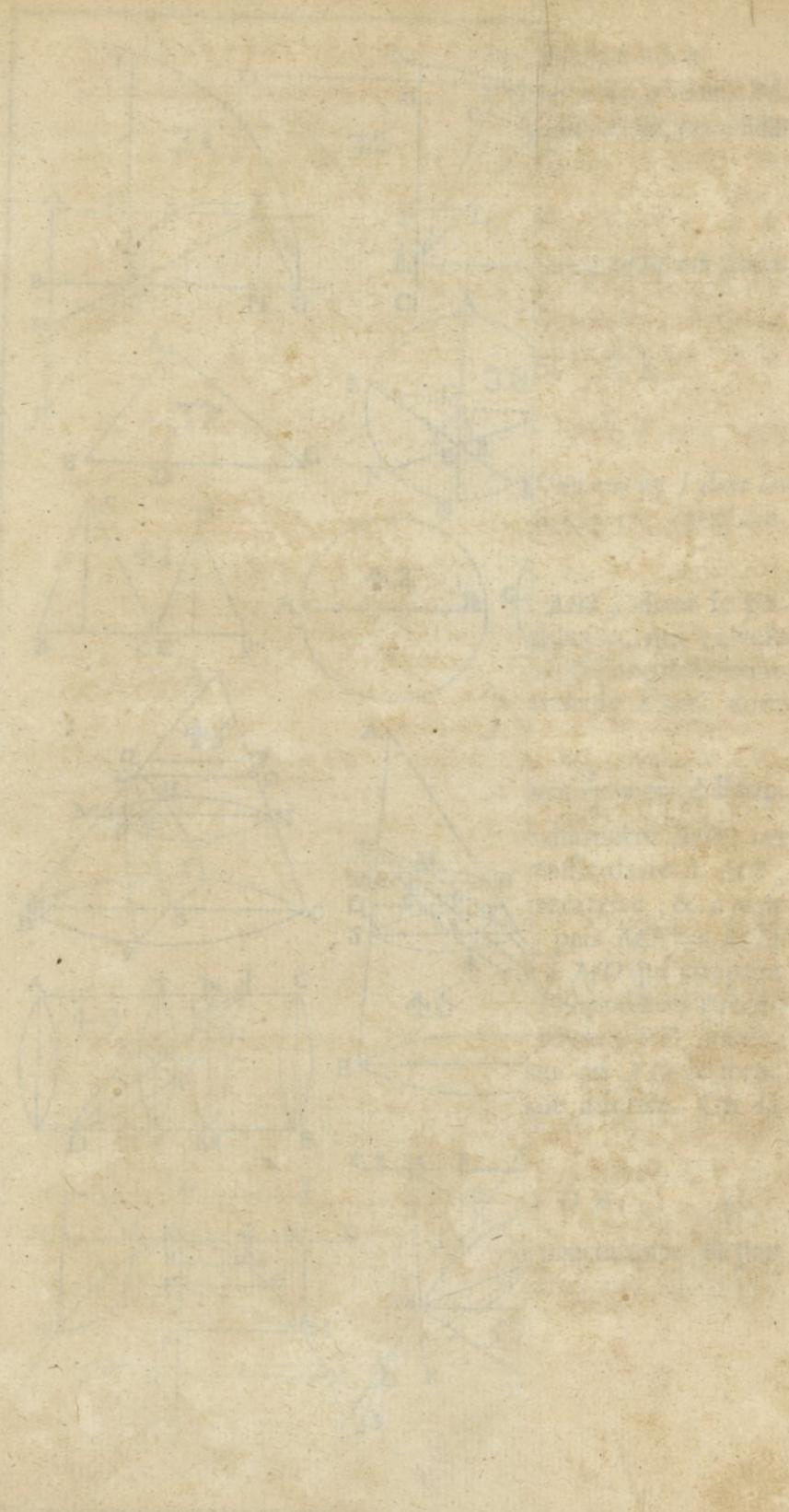


Planche 2. p. 90



SECTION VI.

Où l'on démontre les principales propriétés
de l'Ellipse décrite par des points
trouvez sur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorème.

XII. **U**N E ligne droite AB , divisée par le milieu en C , FIG. 54.
& deux points fixes F , G également distans
du milieu C , ou des extremités A & B , étant donnée de
grandeur & de position; si l'on prend entre F & G un point
quelconque H , & que du centre F & du rayon AH ; du centre
 G & du rayon BH , l'on décrive deux cercles; ces deux cer-
cles se couperont en deux points M , m de part & d'autre de la
ligne AB ; puisque leurs demidiames surpassent $FH + HG$.
Et je dis que les points M & m , & tous ceux qui seront trou-
vez de la même manière, en prenant d'autres points H , se-
ront à une Ellipse dont C est le centre, AB le grand axe, DE
l'axe conjugué à l'axe AB , qui est double de la moyenne propor-
tionnelle entre AF & FB , ou AG & GB .

DEMONSTRATION.

D'UN des points M , trouvez comme on vient de di-
re, ayant abaissé la perpendiculaire MP , mené FM
& GM , & nommé les données AC , ou CB , a ; FC ,
ou CG , c ; & les indéterminées CP , x ; PM , y ; AP
sera, $a - x$; PB , $a + x$; FP , $c - x$ ou, $x - c$; & PG , $c + x$.

Il est clair par la description que $FM + MG = AB = 2a$; puisque $FM = AH$, & $MG = HB$; nommant donc la différence de FM , & MG , $2f$; FM sera, $a - f$ & MG , $a + f$. Cela posé.

M ij

Les triangles rectangles FPM , GPM donneront,
 $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2af + ff$, &

$cc + 2cx + xx + yy = aa + 2af + ff$, & en ôtant la première de la seconde, le premier membre du premier & le second du second, l'on aura $4cx = 4af$, d'où l'on tire

$f = \frac{cx}{a}$, & mettant cette valeur de f , & celle de son carré ff dans l'une des deux premières équations, l'on

aura $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa}$ d'où l'on tire en réduisant, transposant, & divisant par $aa - cc$,

$$aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$$

Mais lorsque le point P tombe en C , $PM (y)$ devient CD , & (x) devient nulle, ou $= 0$; c'est pour-

quoi en effaçant le terme xx , l'on a $aa = \frac{aayy}{aa - cc}$, ou aa

$- cc = yy = CD^2$, & partant $y = \pm CD$: nommant

donc CD, b ; l'on a, $aa - cc = bb$; d'où l'on tire $a - c$ (AF) $\cdot b$ (CD) :: b (CD) $\cdot a + c$ (FB). Qui est une des choses qu'il falloit démontrer. Or mettant bb dans l'é-

quation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$ en la place de $aa - cc$ l'on

a, $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$. Et comme cette équation est la

même que celle qu'on a trouvée (Art. 9 n. 10) il suit que la courbe $ADBE$ est une Ellipse. Ce qui est une des autres choses proposées.

Si dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, l'on fait $y = 0$, l'on

aura $xx = aa$; donc $x = \pm a$, ce qui fait voir que l'Ellipse passe par les points A & B . Et en faisant $x = 0$ l'on

a trouvé $y = \pm CD$ qui montre que l'Ellipse AM passe aussi par les points D & E , en faisant $CE = CD$; c'est

pourquoi (Art. 9 n. 6) AB , est le diametre principal de l'Ellipse; DE son axe conjugué, & C le centre. Ce qu'il falloit enfin démontrer.

DEFINITIONS.

1. **L** E s points F & G sont nommez les foyers de l'Ellipse ; CP , l'abscisse ou coupée, & PM , ou Pm l'ordonnée, ou l'appliquée à l'axe AB .

COROLLAIRE I.

2. **I** L est clair que les lignes FM , GM menées des foyers à la circonférence de l'Ellipse sont, par la description, ensemble égales à l'axe AB , & que $PM = Pm$.

COROLLAIRE II.

3. **I** L est aussi évident que le rectangle des deux parties AF , FB ou AG , GB de l'axe AB faites par un des foyers F , ou G , est égal au quarré du demi axe conjugué DC : car dans la Démonstration précédente l'on a trouvé $aa - cc = CD^2$. Or $aa - cc = a + c \times a - c$. $AF \times FB = CD^2$.

COROLLAIRE III.

4. **O** N voit par les termes de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, & par les signes + & - qui les precedent que x croissant y diminue : car plus x devient grande, plus $aa - xx$ diminue, & par conséquent aussi yy ; puis que les quantitez constantes aa , & bb demeurent toujours de même grandeur ; ce qui fait voir que les points M & m de l'Ellipse, s'approchent d'autant plus de l'axe AB , que le point P s'éloigne de C . On voit aussi que l'on ne peut augmenter x que jusqu'à ce qu'elle devienne $= a$, auquel cas $aa - xx$ devient $= aa - aa = 0$; & par conséquent aussi $y = 0$, ce qui fait voir que les points M & m se confondent alors avec les points A & B , & que l'Ellipse coupe l'axe en ces points, comme on a déjà remarqué.

COROLLAIRE IV.

5. L'EQUATION à l'Ellipse $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ étant réduite en analogie donne $aa - xx (AP \times PB) \cdot yy (PM^2) :: aa (AC^2) \cdot bb (CD^2) :: 4aa (AB^2) \cdot 4bb (DE^2)$, c'est-à-dire que le rectangle des deux parties AP , PB de l'axe AB faites par l'appliquée PM est au carré de l'appliquée PM : comme le carré de l'axe AB est au carré de l'axe conjugué DE .

COROLLAIRE V.

6. SI l'on fait $AB (2a) \cdot DE (2b) :: DE (2b) \cdot \frac{2bb}{a}$, la ligne $= \frac{2bb}{a}$ que je nomme p sera (Art. 9 n°. 13) le parametre de l'axe AB . Or puisque $a \cdot b :: b \cdot \frac{1}{2} p$, l'on a aussi $a \cdot \frac{1}{2} p :: aa \cdot bb$; donc $bb = \frac{1}{2} aap$; donc $\frac{aa}{bb} = \frac{2a}{p}$; C'est pourquoi si l'on met dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, en la place de $\frac{aa}{bb}$, en la place de $\frac{aayy}{bb}$ sa valeur $\frac{2ayy}{p}$, l'on aura $aa - xx = \frac{2ayy}{p}$; d'où l'on tire cette analogie, $aa - xx \cdot (AP \times PB) \cdot yy (PM^2) :: 2a (AB) \cdot p$, c'est-à-dire que le rectangle des deux parties de l'axe faites par l'appliquée est au carré de l'appliquée; comme le même axe, est à son parametre.

COROLLAIRE VI.

7. IL suit du Corollaire précédent que le rectangle de l'axe AB par son parametre est égal au carré de l'axe conjugué DE ; puisque $AB \cdot DE :: DE \cdot p$.

COROLLAIRE VII.

8. **S**I au lieu de $\frac{aa}{bb}$ ou de $\frac{2a}{p}$ on met un autre rapport égal comme $\frac{m}{n}$ l'on aura, $aa - xx = \frac{myy}{n}$; c'est pour-
 quoi l'on fera sur l'équation à l'Ellipse les trois remarques
 suivantes, après avoir délivré l'un des quarrez inconnus
 qu'elle renferme de toute quantité connue.

REMARQUE I.

9. **L**ORSQUE l'antecedent du rapport qui accompa-
 gne un des quarrez inconnus de l'équation à l'Ellipse est
 égal & semblable au terme connu; ou ce qui est la mê-
 me chose, si cet antecedent renferme les mêmes lettres
 que le terme connu de l'équation; sa racine quarrée ex-
 primera le demi diametre dont l'autre inconnue expri-
 me les parties; & la racine quarrée du consequent expri-
 mera le demi diametre conjugué.

REMARQUE II.

10. **L**ORSQUE cet antecedent est le double de la ra-
 cine quarrée du terme connu, il exprimera le diametre
 dont l'autre inconnue exprime les parties; & le conse-
 quent exprimera son parametre.

REMARQUE III.

11. **E**N tout autre cas ce rapport marque le rapport du
 diametre, dont une partie est exprimée par l'autre in-
 connue, à son parametre, ou le rapport du quarré du
 même diametre au quarré du diametre conjugué. Tout
 cela est évident (n°. 6 & 8).

COROLLAIRE VIII.

12. **D**où il suit qu'une équation à l'Ellipse renferme
 les expressions des deux diametres conjuguez, qui forment

la parallelogramme des coordonnées, ou de l'un de ces diametres, & de son parametre, ou la raison du carré de l'un des diametres au carré de l'autre, ou enfin celle de l'un des deux à son parametre: de sorte qu'on aura toujours les deux diametres conjuguez par le moyen de l'équation.

Par exemple, dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$ le terme connu aa est le carré du demi diametre AC ; l'antecedent aa du rapport $\frac{aa}{bb}$ qui accompagne yy est semblable & égal au terme connu aa ; c'est pourquoi le consequent bb est le carré du demi diametre conjugué CD à l'axe ou au diametre principal AC . Dans l'équation $aa - xx = \frac{2aay}{p}$, l'antecedent $2a$ étant double de la racine du terme connu aa ; $2a$ fera le diametre AB , & p son parametre: & partant, si l'on fait $2a : p :: aa : \frac{x}{2} ap$; $\frac{x}{2} ap$ sera l'expression du carré du demidiametre conjugué CD ; & partant $CD = \sqrt{\frac{x}{2} ap}$. Enfin dans l'équation $aa - xx = \frac{mxy}{n}$, aa exprime le carré du demi diametre AC dont les parties CP sont nommées x ; & partant $AB = 2a$. Mais pour avoir l'expression du demi diametre DE conjugué au diametre AB , l'on fera $m : n :: aa : \frac{naa}{m}$; & partant $\sqrt{\frac{n}{m} aa} = CD$, & $2\sqrt{\frac{n}{m} aa} = DE$. Et pour avoir l'expression du parametre du diametre AB , l'on fera $m : n :: 2a : \frac{2an}{m}$, & cette quantité $\frac{2an}{m}$ sera l'expression cherchée.

COROLLAIRE

COROLLAIRE. IX.

13. S I l'on nomme AP, x ; BP fera, $2a - x$, & l'on aura (n^o. 5) $2ax - xx (AP \times PB) \cdot yy (PM^2) :: aa (AC^2) \cdot bb (CD^2)$; donc $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$, qui montre que lorsque les indéterminées n'ont point leur origine au centre de l'Ellipse, il se trouve des seconds termes dans son équation, & qu'une équation locale appartiendra toujours à l'Ellipse, lorsqu'elle renfermera deux quarréz inconnus, l'un desquels ou tous deux seront accompagnez de quelque quantité connue, & auront differens signes dans les deux membres de l'équation, ou même signe dans le même membre, quelque mélange de constantes qu'il s'y rencontre, & pourvû que les deux inconnues ne soient point multipliées l'une par l'autre.

COROLLAIRE X.

14. S I dans l'équation à l'Ellipse $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $2ax - xx = \frac{aayy}{bb}$, $a = b$; l'on aura $aa - xx = yy$, ou $2ax - xx = yy$; qui est une équation au cercle, pourvû que les coordonnées x & y fassent un angle droit: car l'une & l'autre de ces deux équations donne $AP \times PB = PM^2$ qui est la principale propriété du cercle. D'où l'on voit aussi que l'équation à l'Ellipse ne differe de celle du cercle, qu'en ce que l'un des quarréz inconnus est accompagné de quelque quantité connue dans l'équation à l'Ellipse, & qu'ils en sont tous deux délinvrez dans l'équation au cercle. En effet le cercle peut être regardé comme une Ellipse dont les foyers sont confondus avec le centre, & dont tous les diametres sont par conséquent égaux entr'eux, & à leurs paramètres.

Dans l'équation au cercle $aa - xx = yy$, les coordonnées ont leur origine au centre, & dans celle-ci, $2ax - xx = yy$, l'origine des coordonnées n'est point au centre.

N

PROPOSITION II.

Theorème.

15. **L**ES mêmes choses que dans la première Proposition étant supposées. Je dis que l'appliquée FO au foyer F est égale à la moitié du paramètre de l'axe AB.

Il faut prouver que $FO = \frac{1}{2} p$.

D'ÉMONSTRATION.

SI dans l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{aa - cc}$, on fait $x (CP) = c (CF)$, le point P tombera en F, & PM deviendra FO; & l'on aura $aa - cc = \frac{yyaa}{aa - cc}$, d'où l'on tire $y = \frac{aa - cc}{a} = (\text{Prop. I.}) \frac{bb}{a} = (\text{n}^{\circ} 6) \frac{1}{2} p. C. Q. F. D.$

PROPOSITION III.

Problème.

16. **L**ES deux axes conjugués AB, DE d'une Ellipse étant donnez, trouver les foyers F, & G.

Soit du centre D, extrémité de l'axe conjugué DE; & du rayon AC, décrit un cercle qui coupera AB en deux points F & G qui seront les foyers qu'il falloit trouver.

D'ÉMONSTRATION.

PAR la construction $FD + DG = AB$; donc (n^o. 2) F & G sont les foyers. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

Problème.

17. **L**E grand axe AB d'une Ellipse & les foyers F & G étant donnez, déterminer l'axe conjugué à l'axe AB.

Soit du foyer F pour centre, & pour rayon le demi axe AC décrit un cercle. Il coupera la perpendiculaire à AB menée par le centre C en deux points D & E , & DE fera l'axe conjugué à l'axe AB .

DEMONSTRATION.

ELLE est la même que celle de la Proposition précédente.

PROPOSITION V.

Theorème.

18. **S**I l'on fait MQ perpendiculaire à DE . Je dis que le rectangle des deux parties DQ , QE de l'axe DE faites par l'appliquée MQ , est au carré de MQ : comme DE^2 carré de l'axe DE à AB^2 carré de l'axe AB .

En laissant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a donnez dans la premiere Proposition, CP , ou QM étant x ; & PM , ou CQ , y ; DQ fera, $b - y$; & QE , $b + y$.

Il faut démontrer que $bb - yy . xx :: 4bb . 4aa$.

DEMONSTRATION.

EN reprenant l'équation de la premiere Proposition $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, la multipliant par bb , la divisant par aa & transposant l'on aura $bb - yy = \frac{bbxx}{aa}$, d'où l'on tire cette analogie $bb - yy . xx :: bb . aa :: 4bb . 4aa . DQ \times QE . QM^2 :: DE^2 . AB^2$. C. Q. E. D.

DEFINITION.

19. **S**I l'on fait $2b . 2a :: 2a . \frac{2aa}{b}$ que je nomme p ; la ligne $= p$ est appelée le parametre de l'axe DE .

N ij

SCD LYON
mathématiques

COROLLAIRE

20. $b . a :: 2a . p$, donne $bp = 2aa$, ou $bbp = 2aab$,
 ou $\frac{2b}{p} = \frac{bb}{aa}$; c'est pourquoi si on met $\frac{2b}{p}$ en la place de
 $\frac{bb}{aa}$ dans l'équation précédente, l'on aura $bb - yy = \frac{2bxx}{p}$,
 ou si l'on fait $\frac{m}{n} = \frac{2b}{p}$, l'on aura $bb - yy = \frac{mxx}{n}$.

On ajoutera à ce Corollaire les raisonnemens que l'on
 a faits n°. 9, 10, 11, 12, 13 & 14.

PROPOSITION VI.

Problème.

21. **U**N E équation à l'Ellipse $ab - xx = \frac{cyy}{d}$ étant don-
 née, décrire l'Ellipse lorsque les coordonnées font un angle droit.

Soit premièrement trouvé une moyenne proportion-
 nelle entre a , & b qui soit f ; & par conséquent ff
 $= ab$; ainsi l'équation sera $ff - xx = \frac{cyy}{d}$. On fait ce
 changement parceque ab étant l'expression du carré
 du demi diamètre dont les parties sont nommées x , cet-
 te expression doit aussi être un carré.

Soit présentement C , l'origine des inconnues x , qui
 va vers A & vers B , & y , qui va vers D & vers E .
 Le même point C doit aussi être le centre de l'Ellipse;
 puisque les inconnues x & y n'ont point de second
 terme dans l'équation. Soit fait CA & CB chacune $= f$;
 AB sera le grand axe, si c surpasse d ; le petit, si c est
 moindre que d . Pour avoir l'axe conjugué à l'axe AB ,
 soit fait $c . d :: ff . \frac{dff}{c}$, & soit prise CD & CE chacune
 égale à $\sqrt{\frac{dff}{c}}$; DE fera (n°. 12) l'axe cherché. Ayant

ensuite trouvé les foyers F & G par la troisième Proposition, on décrira l'Ellipse par la première.

DÉMONSTRATION.

ELLE est évidente par ce que l'on a démontré n°. 12. Prop. 1 & 3.

PROPOSITION VII.

Problème.

XIII. UNE Ellipse $ADBE$, dont AB est le grand axe; C , le centre; F & G , les foyers, étant donnée. Il faut d'un point quelconque M donné sur l'Ellipse mener la tangente MT . FIG. 55.

Ayant mené FM , & GM , prolongé FM , en I , en sorte que $MI = MG$, & mené GI . Je dis que la ligne MO menée du point M par le point O milieu de GI sera la tangente cherchée.

DÉMONSTRATION.

D'UN point quelconque Z autre que M pris sur MO , ayant mené les droites ZF , ZG , ZI ; puisque par la construction $MG = MI$, & $IO = OG$, MO sera perpendiculaire à GI ; c'est pourquoi le triangle ZGI sera isoscele; & partant $ZI + ZG = ZI + ZG$ surpasse $ZF + ZI = FM + MI = FM + MG$; donc le point Z est hors de l'Ellipse. $C. Q. F. D.$

COROLLAIRE I.

1. SI l'on mene MK parallèle à IG ; l'angle KMO sera droit: puisque (Const.) GI est perpendiculaire à MO .

COROLLAIRE II.

2. LA ligne MK partage l'angle FMG en deux également: car à cause de KM parallèle à GI , l'angle $FMK = FIG = MGI = GMK$.

COROLLAIRE III.

3. LA tangente MO rencontre l'axe AB prolongé en T ; car l'angle GOT étant droit; l'angle OGT sera aigu.

COROLLAIRE IV.

4. L'ANGLE FML est égal à l'angle GMO ; puisqu'ils sont les complémens des angles égaux FMK , GMK ; d'où il suit que si le foyer G étoit un point lumineux, les rayons réfléchis à la rencontre de l'Ellipse passeroient tous par le foyer F .

DÉFINITIONS.

5. AYANT abaissé du point M sur l'axe AB la perpendiculaire MP . PT est appelée la *soutangente*, MK la *perpendiculaire*; & PK , la *souperpendiculaire*, ou *sounormale*.

PROPOSITION VIII.

Theorème.

6. AYANT supposé les mêmes choses que dans la Proposition précédente; & nommé comme dans la première Proposition AC , ou CB , a ; CF , ou CG , c ; CP , x ; PM , y ; FP sera $c+x$, & GP , $c-x$, ou $x-c$; cela posé. Je dis que l'expression algébrique de la *soutangente* PT sera $\frac{aa-xx}{x}$.

DÉMONSTRATION.

LE triangle rectangle GPM donne $GM = \sqrt{cc - 2cx + xx + yy}$. Et parceque MK est parallèle à GI , & que $FI =$ (Prop. preced.) $FM + MG =$ (art. 12 n°. 2) $AB = 2a$, l'on a $FI (2a) \cdot FG (2c) :: MI$, ou $MG (\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}) \cdot GK$
 $= \frac{c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}{a}$; donc $PK = x - c +$
 $\frac{c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}{a}$, ou $\frac{ax - ac + c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}}{a}$, &

à cause de l'angle droit KMT , l'on a PK

$$\left(\frac{ax - ac + c\sqrt{cc - 2cx + xx - yy}}{a} \right) . PM(y) :: PM(y) . PT$$

$$= \frac{aay}{ax - ac + c\sqrt{cc - 2cx + xx + yy}} : \text{mais (Prop. 1) } aa -$$

$$xx = \frac{aay}{aa - cc}, \text{ d'où l'on tire } yy = \frac{a^4 - aacc - aaxx + ccx^2}{aa};$$

c'est pourquoi en mettant cette valeur de yy dans celle de PT , l'on aura après la réduction, & division, PT

$$= \frac{a^4 - aacc - aaxx + ccx^2}{aax - aac + c\sqrt{a^4 - 2aaxx + ccx^2}} : \text{mais } a^4 - 2aaxx + ccx^2$$

est un quarré dont la racine est $aa - cx$; c'est pourquoi cette dernière valeur de PT se change en celle-ci, après avoir ôté ce qui se détruit, & divisé les deux termes de

$$\text{la fraction par } aa - cc . PT = \frac{aa - xx}{x} . C. Q. F. D.$$

COROLLAIRE I.

$$7. CP(x) . PB(a-x) :: AP(a+x) . PT\left(\frac{aa - xx}{x}\right)$$

ce qui fournit un autre moyen de mener la tangente MT .

COROLLAIRE II.

$$8. \text{SI l'on ajoute } x = CP \text{ à l'expression de } PT = \frac{aa - xx}{x}$$

l'on aura $CT = \frac{aa}{x}$ qui fournit encore un autre moyen de mener une tangente à l'Ellipse, en faisant $CP(x)$

$$. CB(a) :: CB(a) . CT\left(\frac{aa}{x}\right).$$

COROLLAIRE III.

$$9. \text{SI de } \frac{aa}{x} = CT, \text{ l'on ôte } a = CB, \text{ l'on aura } BT =$$

$$\frac{aa - ax}{x}, \text{ qui donne encore un autre moyen de mener}$$

COROLLAIRE

104 APPLICATION DE L'ALGÈBRE
 une tangente à l'Ellipse en faisant $CP(x)$. $PB(a - x)$
 $\therefore CB(a) \cdot BT\left(\frac{aa - ax}{x}\right)$.

COROLLAIRE IV.

10. IL est clair que l'angle CMT est toujours obtus : car la perpendiculaire MK à la tangente MT divisant l'angle GMF en deux également, GM étant moindre que FM , GK sera aussi moindre que FK ; & par conséquent le point K tombera toujours entre C , & G .

PROPOSITION IX.

Theorème,

11. AYANT supposé les mêmes choses que dans la Prop. précédente. Si l'on prolonge le petit axe CD , & la tangente MO du côté de M , ces lignes se rencontreront en un point H ; si l'on mène MQ parallèle à BC , & qu'on nomme CD , b ; en laissant aux autres lignes les noms qu'on leur a donnez en la Proposition précédente. Je dis que l'expression Algébrique de la sous-tangente QH , sera $\frac{bb - yy}{y}$.

DÉMONSTRATION.

PQ étant le parallélogramme des coordonnées $CQ = PM$ sera, y ; & $MQ = CP$, x . Et les triangles semblables TPM, MQH donneront $TP\left(\frac{aa - xx}{x}\right) \cdot PM, (y)$
 $\therefore MQ(x) \cdot QH = \frac{xy}{aa - xx}$: mais (Prop. 1) $aa - xx = \frac{axy}{bb}$; donc $xx = \frac{abb - ayy}{bb}$; mettant donc cette valeur de xx dans celle de QH , l'on aura après la réduction, $QH = \frac{bb - yy}{y}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE

COROLLAIRE.

12. Si l'on ajoute $y = PQ$ à $QH = \frac{bb - yy}{y}$, l'on aura $CH = \frac{bb}{y}$, d'où l'on tire $CQ(y) \cdot CD(b) :: CD(b) \cdot CH(\frac{bb}{y})$.

PROPOSITION X.

Theorème.

13. SOIT une Ellipse ADBE, dont AB & DE sont les axes conjuguez; C, le centre; MT, une tangente qui rencontre les axes conjuguez en H & en T. Je dis que la ligne GOL parallèle à la tangente MT sera divisée en deux également en O par la ligne MCV menée du point touchant M par le centre C. FIG. 56.

Ayant mené par les points L, M, O, G, les lignes LK, MP, OQ, GX perpendiculaires à l'axe AB, & par O la ligne RON parallèle à AB qui rencontrera KL en N, & XG en R, & nommé les données AC, ou CB, a; CD, ou CE, b; & les indéterminées CP, x; PM, y; CQ, m; QX, ou OR, z; QK, ou ON, f; AX sera a + m - z; BX, a - m + z; AK, a + m + f; & KB, a - m - f.

Il faut prouver que GO = OL, ou ce qui est la même chose, RO(z) = ON(f).

DEMONSTRATION.

Les triangles semblables CPM, CQO donnent CP(x). PM(y) :: CQ(m). QO = $\frac{my}{x}$ = XR = KN: l'on

a aussi (n°. 8) CT = $\frac{aa}{x}$, & (n°. 12) CH = $\frac{bb}{y}$, & les triangles semblables TCH, ORG, ONL, donnent

O

$$TC \left(\frac{aa}{x} \right) \cdot CH \left(\frac{bb}{y} \right) :: OR(z) \cdot RG = \frac{bbzx}{aay}, \& TC \left(\frac{aa}{x} \right).$$

$$CH \left(\frac{bb}{y} \right) :: ON(f) \cdot NL = \frac{bbfx}{aay}; \text{ donc } XG = \frac{my}{x} +$$

$$\frac{bbzx}{aay}, \& KL = \frac{my}{x} - \frac{bbfx}{aay}. \text{ Mais (art. 12 n}^\circ. 5) aa(CB^2) \cdot bb$$

$$(CD^2) :: aa - mm + 2mz - zz(Ax \times Xb) \cdot \frac{mmy}{xx} +$$

$$\frac{2bbmz}{aa} + \frac{b^4zxzx}{a^4yy} (XG^2), \& aa(CB^2) \cdot bb(CD^2) :: aa -$$

$$mm - 2mf - ff(Ak \times Kb) \cdot \frac{mmy}{xx} - \frac{2bbmf}{aa} + \frac{b^4ffxx}{a^4yy} (KL^2)$$

d'où l'on tire ces deux équations.

$$A. \frac{aammy}{xx} + 2bbmz + \frac{b^4zxzx}{a^4yy} = aabb - bbmm + 2bbmz - bbzz, \&$$

$$B. \frac{aammy}{xx} - 2bbmf + \frac{b^4ffxx}{a^4yy} = aabb - bbmm - 2bbmf - bbff,$$

& ayant ôté la seconde de la première, le premier membre du premier, & le second du second, l'on aura celle-ci,

$$2bbmz + 2bbmf + \frac{b^4zxzx}{a^4yy} - \frac{b^4ffxx}{a^4yy} = 2bbmz + 2bbmf - bbzz + bbff, \text{ d'où l'on tire } zz = ff, \text{ ou } z = f, OR = ON; \text{ donc } GO = OL. C. Q. F. D.$$

La position de la ligne GL peut changer en bien des manières à mesure que le point O s'approche ou s'éloigne du centre C , ou se trouve au-delà par rapport à M : mais cela ne peut au plus que changer les signes dans les expressions des lignes AX , XB , AK , KB , XG & KL , & l'on trouvera toujours $z=f$; c'est pourquoi la Proposition est généralement vraie.

COROLLAIRE I.

14. IL est clair que la ligne FCS menée par le centre C , parallèle à la tangente MT est divisée en deux égale-

ment par le centre C : car le point O tombant en C , GL devient FS , & comme le point M peut être pris indifféremment sur tous les points de l'Ellipse ; il s'ensuit que toutes les lignes comme FCS , sont coupées par le milieu en C ; puisqu'elles peuvent toujours être parallèles à une tangente MT menée par l'extrémité M d'une autre ligne MCV qui passe aussi par le centre C .

DEFINITIONS.

15. **L**es lignes MCV , FCS qui passent par le centre d'une Ellipse sont nommées *diametres*, & lorsque deux diametres MCV , FCS sont posez de maniere que l'un des deux FCS est parallele à la tangente MT menée par l'extrémité M de l'autre MCV ; ils sont nommez *diametres conjuguez* ; & les lignes OG , OL sont nommées *ordonnées*, ou *appliquées* au diametre MV .

COROLLAIRE II.

16. **I**l est évident que les ordonnées à un diametre quelconque sont divisées en deux également par le même diametre.

COROLLAIRE III.

17. **I**l est clair que la position des diametres conjuguez est déterminée par la position de la tangente menée par l'une de leurs extrémités.

COROLLAIRE IV.

18. **S**i l'on ajoute les deux équations A & B de la proposition précédente, après avoir mis z en la place de f , le premier membre au premier & le second au second,

l'on aura celle-ci $\frac{2aamyy}{xx} + \frac{2b^2zxxx}{aayy} = 2aabb - 2bbmm - 2bbzz$, ou, en supposant que le point O tombe en C , auquel cas $QK = z$ devient CI , GL devient FS , KL , SI , & $CQ = m$ devient nulle ou $= 0$, ce qui détruit

les termes où m se rencontre, $\frac{bbxx}{aayy} = aa - xx$, d'où l'on tire $xx = aa - \frac{aayy}{bb}$, en mettant pour $aayy$ sa valeur $aabb - bbxx$ tirée de l'équation $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, trouvée par la première Proposition; d'où l'on conclut que $CP^2 = AP \times PB$: & que $CP^2 = AI \times IB$: car l'on a aussi $xx = aa - \frac{aayy}{bb}$.

COROLLAIRE V.

FIG. 56. 19. **S** I l'on fait dans cette équation $xx = aa - \frac{aayy}{bb}$, $z(CI) = x(CP)$; les points P & I se confondront en un seul

FIG. 57. point Y , & les deux diamètres conjugués MV , FS seront égaux, & l'on aura $2xx = aa$; donc $x = \sqrt{\frac{1}{2}} aa$ qui servira à déterminer leur position en cette sorte. Soit prise CY moyenne proportionnelle entre CB & sa moitié, & mené par Y la perpendiculaire MYS qui rencontrera l'Ellipse aux points M & S , par où l'on mènera les diamètres conjugués MV , FS qui seront égaux.

COROLLAIRE VI.

FIG. 57. 20. **I** L est clair que $AY \times YB = CY^2$: car l'équation (n^o. 18) $xx = aa - \frac{aayy}{bb}$ subsiste toujours, quoique $x = z$ ou $CP = CI = CY$.

COROLLAIRE VII.

21. **A** Cause de $AY \times YB = CY^2 = (n^o 19) \frac{1}{2} aa$ l'on a (art. 12 n^o 5) $\frac{1}{2} aa (CY^2) \cdot yy (PM^2) :: aa (CB^2) \cdot bb (CD^2)$, d'où l'on tire $y = \sqrt{\frac{1}{2}} bb$, qui servira à trouver le point Q sur CD , comme l'on a trouvé (n^o 19) le point Y sur CA ; & la perpendiculaire FQM déterminera aussi la position des deux diamètres conjugués égaux MCV , FCS .

COROLLAIRE VIII.

22. PUISQUE (art. 12 n° 5) $AP \times PB$, ou (n° 18) FIG. 56.
 $CI \cdot PM \:: CB^2 \cdot CD^2$, & $AI \times IB$ ou (n° 18) CP^2 .
 $IS^2 \:: CB^2 \cdot CD^2$, l'on a $CI \cdot PM \:: CP^2 \cdot IS^2$, ou CI .
 $PM \:: CP \cdot IS$, d'où il suit que les triangles CPM ,
 CIS sont égaux.

PROPOSITION XI.

Theorème.

23. AYANT supposé les mêmes choses que dans la Pro- FIG. 56.
 position precedente. Je dis que la rectangle $VO \times OM$ des
 parties du diamètre MV faites par l'appliquée OL est à OL^2 ,
 quarré de la même appliquée ; comme VM^2 , quarré du dia-
 mètre VM , est à FS^2 , quarré du diamètre conjugué à VM .

Ayant nommé AC , ou CB , a ; CD , ou CE , b ; CP ,
 x ; PM , y ; OR , ou ON , z ; CQ , m ; CV ou CM , d ;
 FC , ou CS , f ; CO , u ; & OL ou OG , s .

Il faut prouver que $dd - uu \cdot ff \:: dd \cdot ff \:: 4dd \cdot 4ff$.

DÉMONSTRATION.

L'ON a (art. 12)

A. $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, les triangles semblables MCP ,

OCQ , donnent $d(CM) \cdot x(CP) \:: u(CO) \cdot m(CQ)$;
 donc

B. $dm = ux$, & les triangles semblables SCI , LON ,
 & $CI^2 = (n° 18) aa - xx$, donnent $ff(CS^2) \cdot aa - xx$
 $(CI^2) \:: ff(LO^2) \cdot zz, (ON^2)$; donc

C. $ffz = aass - xxff$.

En reprenant presentement l'équation du quatrième
 Corollaire de la Proposition precedente n° 18, qui étant
 divisée par 2, devient,

D. $\frac{aammyy}{xx} + \frac{b^2zxxx}{aayy} = aabb - bbmm - bbzz$, & en met-

○ iij

tant dans le numerateur du premier terme, & dans le dénominateur du second pour $aayy$, sa valeur $aabb - bbxx$ tirée de l'équation A , l'on aura $\frac{aamm}{xx} + \frac{zzxx}{aa - xx} = aa - zz$, & mettant encore pour mm sa valeur $\frac{uuxx}{dd}$ tirée de l'équation B , & pour zz , sa valeur $\frac{aa\sqrt{ff} - xx\sqrt{ff}}{ff}$ tirée de l'équation C , l'on aura après les réductions & transpositions, $dd - uu = \frac{dd\sqrt{ff}}{ff}$, d'où l'on tire $dd - uu . \sqrt{ff} :: dd . \sqrt{ff} :: 4dd . 4\sqrt{ff}$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

24. **S** I MV & FS sont les deux diametres conjuguez égaux, d sera $= f$; & l'équation deviendra $dd - uu = \sqrt{ff}$, qui seroit une équation au cercle, si l'appliquée OL faisoit un angle droit avec CM .

DEFINITION.

25. **S** I l'on fait $d . f :: 2f . p$, la ligne p sera appelée le parametre du diametre MV .

COROLLAIRE II.

26. **L** A proportion $d . f :: 2f . p$ donne $dp = 2ff$; donc en multipliant par d , l'on a $ddp = 2d\sqrt{ff}$; donc $\frac{2d}{p} = \frac{dd}{\sqrt{ff}}$; c'est pourquoi si l'on met dans l'équation precedente pour $\frac{dd}{\sqrt{ff}}$ sa valeur $\frac{2d}{p}$, l'on aura $dd - uu = \frac{2d\sqrt{ff}}{p}$ d'où l'on tire $dd - uu . \sqrt{ff} :: 2d . p$.

COROLLAIRE III.

27. **L** O N peut encore mettre pour $\frac{2d}{p}$ un autre rapport $\frac{m}{n} = \frac{2d}{p} = \frac{dd}{\sqrt{ff}}$; & l'on aura $dd - uu = \frac{m\sqrt{ff}}{n}$, d'où l'on tire $dd - uu . \sqrt{ff} :: m . n$.

On ajoutera ici les mêmes choses que l'on a dites
art. 12. n^o. 9, 10, 11, 12, 13, & 14.

PROPOSITION XII.

Theorème.

28. **L**ES mêmes choses étant encore supposées, si l'on mène
Gq parallèle à MV. Je dis que $Fq \times qS \cdot qG^2 :: FS^2 \cdot$
 VM^2 .

En nommant encore CM, ou CV, d ; CS, ou CF,
 f ; CO, ou qG, u ; OG, ou Cq, s ; Fq sera $f - s$; & qS,
 $f + s$.

Il faut prouver que $ff - ss \cdot uu :: 4ff \cdot 4dd$.

DEMONSTRATION.

EN reprenant l'équation de la Proposition précédente
 $dd - uu = \frac{ddff}{ff}$, la multipliant par ff , transposant & di-
visant par dd , l'on en tirera $ff - ss = \frac{ffuu}{dd}$, qui donnera ff
 $- ss \cdot uu :: ff \cdot dd :: 4ff \cdot 4dd$. C. Q. F. D.

DEFINITION.

29. **S**i l'on fait $f \cdot d :: 2d \cdot p$, la ligne $\leftarrow p$ sera appelée
le parametre du diametre FS.

COROLLAIRE I.

30. **L**A Proportion précédente donne $pf = 2dd$; donc
 $pf = 2dd$, ou $\frac{2f}{p} = \frac{ff}{dd}$; mettant donc dans l'équa-
tion précédente pour $\frac{ff}{dd}$ sa valeur $\frac{2f}{p}$, l'on aura $ff - ss =$
 $\frac{2fuu}{p}$; d'où l'on tire $ff - ss \cdot uu :: 2f \cdot p$.

11 APPLICATION DE L'ALGEBRE
COROLLAIRE II.

31. L'ON peut encore changer le rapport $\frac{ff}{dd}$, ou $\frac{2f}{p}$ en un autre rapport égal $\frac{m}{n}$, & l'on aura $ff - ff = \frac{mm}{n}$, de qui donne $ff - ff . uu :: m . n$.

On ajoutera encore ici ce qu'on a dit art. 12 n^o. 9, 10, 11, 12, 13 & 14.

COROLLAIRE III.

32. IL est clair (n^o. 25 & 29) que le rectangle de l'un des diametres conjuguez par son parametre est égal au quar- ré de l'autre diametre.

PROPOSITION XIII.

Problème.

33. DEUX lignes quelconques FS & MV qui se coupent par le milieu en C à angles obliques étant données de position & de grandeur pour deux diametres conjuguez d'une Ellipse, déterminer la position & la grandeur des axes de la même Ellipse.

Cette Proposition contient deux cas qu'on pourroit néanmoins reduire à un seul, comme on va voir dans le second : le premier est lorsque les lignes FS & MV sont égales : le second lorsqu'elles sont inégales.

PREMIER CAS.

34. AYANT joint les points M, S & M, F, & ayant divisé MS & MF par le milieu en P & Q, on menera les lignes CP, CQ indéfiniment prolongées de part & d'au- tre qui se couperont à angles droits en C, puisque CS, CM, CF sont égales, & que les points P & Q divisent par le milieu MS & MF.

Soit ensuite fait $PI = CP$ & $QH = CQ$, & du cen- tre C par I, & par H décrit deux cercles qui couperont CP, & CQ aux points A, B, D & E. Je dis que l'Ellipse dont

dont AB & DE sont les axes, passera par les points M, F, V & S . FIG. 58.

DEMONSTRATION.

Ayant nommé AC , ou CB , a ; CD , ou CE , b ; CP , ou PI , x ; PM , ou CQ , ou QH , y ; l'on a par la propriété du cercle, & par la Construction, $aa - xx (AP \times PB) = xx (PI^2, \text{ ou } CP^2)$, & $bb - yy (EQ \times QD) = yy (QH^2, \text{ ou } CQ^2)$, d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{1}{2} aa}$, & $y = \sqrt{\frac{1}{2} bb}$; c'est pourquoi (n°. 19 & 21) les points S, M, V & S , sont à l'Ellipse dont les axes sont AB , & DE . $C. Q. F. D.$

SECOND CAS.

35. SOIT prolongée CM du côté de M , & soit faite MK prise sur le prolongement, égale à la troisième proportionnelle à CM & CS ; & ayant mené par M la droite HMT parallèle à FS , du point O milieu de CK , on élèvera la perpendiculaire OG qui rencontrera HMT en un point G ; puisque (n° 13) MT est tangente à l'Ellipse dont MV & FS sont deux diam. conjuguez, & que (n° 10) l'angle CMT est obtus, & du centre G par C , l'on décrira un cercle qui passera par K , & coupera MG aux points T & H , par où, & par C , l'on menera TC , & HC indéfiniment prolongées au-delà de C par rapport à T & à H : l'on menera ensuite MP & MQ parallèles à CH & à CT ; & ayant pris AB moyenne proportionnelle entre CT & CP ; CD , moyenne proportionnelle entre CH & CQ , fait $CA = CB$, & $CE = CD$. Je dis que l'Ellipse dont AB & CD (qui à cause du cercle se coupent à angles droits) sont les axes, passera par les points M, F, V & S .

DEMONSTRATION.

Ayant abaissé du centre G sur CT la perpendiculaire GN , le point N divisera CT par le milieu en N ; &

P

partant $NG = \frac{1}{2} CH$, & ayant abaissé du point S sur la même CT la perpendiculaire SI , & nommées données CB , ou CA , a ; CD , ou CE , b ; CM ou CV , d ; CF , ou CS , f ; & les indéterminées CP , ou QM , x ; PM , ou CQ , y ; & CI , z ; l'on aura (Const.)

$$CP(x) \cdot CB(a) :: CB(a) \cdot CT = \frac{aa}{x}, \text{ \&}$$

$$CQ(y) \cdot CD(b) :: CD(b) \cdot CH = \frac{bb}{y}; \text{ donc } NT = \frac{aa}{2x},$$

$NG = \frac{bb}{2y}$, $TP = \frac{aa}{x} - x$, & $QH = \frac{bb}{y} - y$, & les triangles semblables CIS , MQH , TPM donneront $CI(z) \cdot CS(f)$

$$:: MQ(x) \cdot MH = \frac{fx}{z}, \text{ \& } CI(z) \cdot CS(f) :: TP$$

$$\left(\frac{aa}{x} - x \right) \cdot TM = \frac{aaf}{zx} - \frac{fx}{z}; \text{ donc } HM + MT, \text{ ou}$$

$$HT = \frac{aaf}{zx}; \text{ \& partant } GT = \frac{aaf}{2xx}; \text{ donc à cause de}$$

l'angle droit GNT , $\frac{a^2 ff}{4zzxx} (GT^2) = \frac{a^4}{4xx} + \frac{b^4}{4yy} (NT^2 + NG^2)$, d'où l'on tire $ff = zz + \frac{b^4 z z x x}{a^2 y y}$. Mais l'on a aussi

$$MQ(x) \cdot QH\left(\frac{bb}{y} - y\right) :: CI(z) \cdot IS = \frac{bbz}{xy} - \frac{zy}{x};$$

donc à cause de l'angle droit CIS , $ff(CS^2) = zz + \frac{b^4 z z}{xxyy}$

$$- \frac{2bbzx}{xx} + \frac{zxyy}{xx} (CI^2 + IS); \text{ donc } zz + \frac{b^4 z z x x}{a^2 y y} = zz +$$

$$\frac{b^4 z z}{xxyy} - \frac{2bbzx}{xx} + \frac{zxyy}{xx}, \text{ d'où l'on tire } aa - xx = \frac{aayy}{bb} \text{ qui}$$

est une équation à une Ellipse dont les axes sont (Prop. 1) $AB = 2a$, & $DE = 2b$, & qui prouve au moins que cette Ellipse passe par les points M , & V ; puisque (Hyp.) $CM = CV$.

$$\text{Or (Const.) } CM(d) \cdot CS(f) :: CS(f), MK = \frac{ff}{d}:$$

mais par la propriété du cercle $\frac{affx}{xxx} - \frac{ffxx}{xx}$ ($HM \times MT = CM \times MK = \text{Const. } CS^2$) $= \frac{ff}{xx}$, d'où l'on tire $xx = aa - xx$; c'est pourquoi (n^o. 18) l'Ellipse passe aussi par les points S & F . C . Q . F . D .

COROLLAIRE.

36. Si $MV = FS$; CM sera $= MK$; & partant les points O & G se confondront avec le point M , qui sera le centre du cercle qui étant décrit par C déterminera la position des axes par sa rencontre avec HT en H & en T , qu'on déterminera comme on vient de faire.

PROPOSITION XIV.

Problème.

UNE équation à l'Ellipse $ab - xx = \frac{cyy}{a}$ étant donnée, décrire l'Ellipse, lorsque les coordonnées font un angle oblique.

On déterminera la grandeur des diametres conjuguez par la Prop 6. on trouvera les axes par la Proposition précédente; on déterminera les foyers par la troisième, & on décrira l'Ellipse par la première.



SECTION VII.

Où l'on démontre les principales propriétés de l'Hyperbole décrite par des points trouvez sur un Plan.

PROPOSITION I.

Theorème.

FIG. 60. XIV. **U**N angle quelconque HCK, & un point quelconque D dans cet angle ; étant donnez de position sur un Plan. Si l'on mene librement par le point D une ligne IDK qui rencontre CH & CK en I & en K, & qu'on prenne sur IDK la partie KO = ID. Je dis que les points O & D, & tous ceux que l'on trouvera comme on vient de faire le point O, en menant d'autres lignes par le point D, seront à une Hyperbole, dont CH & CK sont les asymptotes.

DEMONSTRATION.

AYANT mené par les points D & O, les lignes DL, OG parallèles à CK, & DN, OF parallèles à CH, & nommé les données DL, ou CN, ou (Const.) FK, c ; DN, ou LC, d ; & les indéterminées CF, ou GO, f ; FO, ou CG ou NR, z ; NF ou RO sera $f - c$, & DR, $d - z$; les triangles semblables DRO, OFK donneront $d - z$ (DR) . $f - c$ (RO) :: z (OF) . c (FK); donc $cd - cz = fz - cz$, ou $cd = fz$. Et comme cette équation est la même que celle qu'on a trouvée (art. 9, n° 16), il suit que la courbe décrite comme on vient de dire, est une Hyperbole. Et parceque f croissant, z diminue, ou au contraire, & qu'on peut augmenter f à l'infini, z diminuera aussi à l'infini; c'est pourquoi les lignes CH, & CK

sont les asymptotes, parcequ'elles ne peuvent jamais rencontrer l'Hyperbole. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

1. **I**L est clair que tous les rectangles semblables à $CF \times FO$ sont égaux entr'eux, puisqu'ils sont toujours égaux au même rectangle $CL \times LD$; & que l'on a toujours $sz = cd$.

COROLLAIRE II.

2. **S**I l'on prend sur l'Hyperbole un point quelconque B , & que l'on mene par B une ligne quelconque $TBVS$ qui rencontre l'Hyperbole en un autre point V , & les asymptotes en T & en S , TB sera toujours égale à VS : car ayant mené BX & VQ parallèles aux asymptotes, l'on aura (Corol. I) $CX \times XB = CQ \times QV$, ou (en nommant CX, c ; XB, d ; CQ, f ; QV, z ;) $sz = cd$, ou $sz - cz = cd - cz$, qui étant changée en analogie, donne $d - z. f - c :: z. c$, d'où il suit par la Démonstration de cette Proposition que $XB = QS$; donc $TB = VS$.

COROLLAIRE III.

3. **I**L est clair que les parallelogrammes CD, CB, CO, CV sont égaux entr'eux.

COROLLAIRE IV.

4. **S**I l'on avoit nommé NF , ou RO, f , l'on auroit eu $sz = cd - cz$, qui montre que lorsqu'une équation à l'Hyperbole renferme plus de deux termes, les indéterminées n'ont point leur origine au sommet de l'angle des asymptotes.

COROLLAIRE V.

5. **I**L est évident que lorsqu'on décrit une Hyperbole par un point fixe, comme D , les points O que l'on trouve en faisant $KO = DI$ peuvent servir à en trouver d'autres

PROPOSITION II.

Theorème.

6. **E**N supposant les mêmes choses que dans la première Proposition, si l'on mène par le sommet C de l'angle des asymptotes une ligne quelconque CM qui rencontre OG & DL , prolongées ou non prolongées en P & en M . Je dis que le rectangle $CM \times CN$, ou $CM \times LD$ est égal au rectangle $CP \times CF$, ou $CP \times GO$.

Ayant nommé les données CL , d ; CN , c ; CM , a , & les indéterminées CF , ou GO , f ; CG , ou FO , ζ ; CP , u .
Il faut prouver que $ac = uf$.

DEMONSTRATION.

A cause des triangles semblables CLM , CGP , l'on a $CL . CM :: CG . CP$, ou en termes algebriques $d . a :: \zeta . u$; donc $du = a\zeta$: mais (Prop. 1) $f\zeta = cd$, d'où l'on tire $\zeta = \frac{cd}{f}$; mettant donc cette valeur de ζ dans l'équation précédente, l'on aura $fu = ac$. *C. Q. F. D.*

On peut encore démontrer cette Proposition en cette sorte. A cause des parallèles DM , OP , l'on a $CL . CG :: CM . CP$; c'est pourquoi en mettant dans l'équation de la Proposition précédente $f\zeta = cd$, en la place de d (CL) & de ζ (CG) leurs proportionnelles a (CM) & u (CP), l'on aura $fu = ac$.

PROPOSITION III.

Problème.

FIG. 61. 7. **U**NE Hyperbole MBm , dont les asymptotes sont CT , & CH , étant donnée. Il faut d'un point quelconque B , donné sur l'Hyperbole, mener une tangente HBT .

Ayant mené par B les droites BG & BI parallèles

aux asymptotes, soit prise $IT = CI$. Je dis que la ligne TBH menée du point T par B touchera l'Hyperbole en B , & ne la rencontrera en aucun autre point.

D E M O N S T R A T I O N.

P A R l'Hypothese; TBH rencontre l'Hyperbole en B ; & parceque $CI = IT$, TB sera aussi $= BH$; d'où il suit que BTH ne rencontre l'Hyperbole qu'en un seul point B : car si elle la rencontroit en un autre point O ; HO ($n^o 2$) $= BT$ seroit $= BH$. Ce qui est impossible; c'est pourquoi TBH touche l'Hyperbole en B . *C. Q. F. D.*

C O R O L L A I R E I.

8. I L est clair que toutes les tangentes, comme TBH terminées par les asymptotes en T & H , sont divisées en deux également par le point touchant B .

C O R O L L A I R E II.

9. I L suit aussi que si la position de la tangente TBH , est telle que la ligne menée de l'angle C des asymptotes au point touchant B , divise cet angle en deux également, les angles CBH , CBT seront droits, & au contraire: car puisque les angles BCG , BCI sont égaux, le parallélogramme GI sera un rombe; & partant $CI = CG$; donc CT ($n^o 6$) double de $CI = CH$ double de CG ; c'est pourquoi les angles CBH , CBT sont droits.

C O R O L L A I R E III.

10. I L suit encore que si l'angle des asymptotes HCT est droit, dans toutes les Positions de la tangente TBH , la ligne CB menée de l'angle des asymptotes au point touchant B sera $= BH = BT$; si cet angle est aigu, CB surpassera BH , ou BT ; s'il est obtus CB sera moindre que BH , ou BT : car si du centre B milieu de HT l'on décrit un demi cercle sur le diametre HT , le point C sera sur la circonférence si l'angle HCT est droit; hors du demi cercle, s'il est aigu; & dans le demi cercle, s'il est

obtus ; donc au premier cas $CB = BH$ ou BT ; au second, CB surpasse BH , ou BT ; & au troisième, elle est moindre.

COROLLAIRE IV.

II. IL est encore manifeste que les lignes LK , Mm parallèles à la tangente HBT sont coupées par le milieu en P par la droite CB prolongée, car puisque $BH = BT$, PL sera $= PK$: mais (n° 2) $ML = mK$; donc $PM = Pm$.

PROPOSITION IV.

Problème.

12. UNE équation à l'Hyperbole $xy = aa$ étant donnée, décrire l'Hyperbole.

On voit par l'équation, qui n'a que deux termes, que que l'origine des indéterminées x , & y est au sommet de l'angle des asymptotes.

Soit C l'origine des indéterminées x , qui va vers T , & y qui va vers H , & ayant pris CI & CG chacune $= a$, on achevera le parallélogramme $CGBI$: & l'on décrira (Prop. I.) l'Hyperbole MBm , entre les asymptotes CT & CH .

DÉMONSTRATION.

ELLE est évidente par la première Proposition,

PROPOSITION V.

Théorème.

FIG. 61. 13. SOIT une Hyperbole MBm dont CH & CT sont les asymptotes ; soit aussi par un point quelconque B , menée (n° 7) une tangente HBT , & du point C par le point touchant B la ligne CBP . Si par quelque point P , l'on mène PM parallèle à HT , qui rencontre l'Hyperbole aux points M & m , & les asymptotes en L & K . Je dis que $CP^2 = CB^2 \cdot PM^2 :: CB^2 \cdot BH^2$, ou ce qui revient au même, ayant prolongé BC en A , & fait $CA = CB$, que $AP \times PB \cdot PM^2 :: AB^2 \cdot TH^2$.

Ayant

Ayant mené BI , BG , mQ & mN paralleles aux asymptotes, & nommé les données AC , ou CB , a ; BH , ou BT , b ; CI , ou GB , c ; CG , ou IB , d ; & les indéterminées CP , x ; PM , ou Pm , y ; CQ , ou Nm , f ; CN ou Qm , z ; AP sera $x+a$, & BP , $x-a$.

Il faut prouver que $xx - aa . yy :: aa . bb :: 4aa . 4bb$.

DÉMONSTRATION.

LES triangles semblables CBT , CPK donnent CB (a). BT (b) :: CP (x). $PK = \frac{bx}{a}$; donc $mK = \frac{bx}{a} - y$, $mL = \frac{bx}{a} + y$; & à cause des triangles semblables TBI , KmQ , & BHG , mLN , l'on a $b(TB) . d(BI) :: \frac{bx}{a} - y(Km) . z(mQ)$, & $b(BH) . c(BG) :: \frac{bx}{a} + y(mL) . f(mN)$, d'où l'on tire ces deux équations $bz = \frac{bdx}{a} - dy$, & $bf = \frac{bcx}{a} + cy$, & en multipliant le premier membre de l'une par le premier de l'autre, & le second par le second, l'on a $bbfz = \frac{bbcdxx}{aa} - cdy$; mais par la première Proposition $fz = cd$; donc $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$, en divisant par les quantitez égales fz , & cd ; d'où l'on tire $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; donc $xx - aa . yy :: aa . bb :: 4aa . 4bb$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

14. IL est évident (art. 9 n° 7, 11, & 12), & par cette équation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, qui est la même que celle du même article n°. 11, que le point C , est le centre de l'Hyperbole MBm , que AB est l'axe, si l'angle CBH

Q

FIG. 62. est droit, autrement AB est nommée diamètre déterminé; que DE parallèle & égale à HT est l'axe, ou le diamètre conjugué à AB , que MP & MF sont les ordonnées ou appliquées aux diamètres conjugués AB & DE . De sorte que FP est le parallélogramme des coordonnées.

COROLLAIRE II.

FIG. 62. 15. L'ÉQUATION précédente $xx - aa = \frac{axy}{bb}$ donne

ne $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{bb + yy}$, qui fait voir que si l'on prolonge MF en N ; en sorte que $FN = FM$, le point N sera à l'Hyperbole; & si l'on fait $y = 0$, la ligne MN se confondra avec la ligne AB , le point F avec le point C , & l'on aura $x = \pm a$, d'où il suit que le point M se confond avec le point B , & le point N avec A ; de sorte que $CA = CB$, & que le point A sera à l'Hyperbole.

Si dans la même équation on fait $x = 0$, ayant mené NQ parallèle à DE , ou à PM , les points P & Q se confondront avec le point C , & l'on aura $y = \pm \sqrt{-bb}$. Or parce que les valeurs de y sont imaginaires; il suit que l'Hyperbole ne rencontre point le diamètre DE , ni de côté ni d'autre du point C . Et parce que l'on tire aussi de la même équation $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$; il suit que l'Hyperbole rencontre les parallèles MPm , NQn des deux côtés de AB , tant que x (CP , ou CQ) surpasse a (CB ou CA); qu'elle coupe AB en B & A , lorsque $CP = CB$, ou $x = a$: car $xx - aa$ devient $aa - aa = 0$; & par conséquent $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa} = 0$; & que lorsque les points P & Q tombent entre A & B , c'est-à-dire, lorsque a surpasse x , l'Hyperbole ne rencontre point les parallèles à DE menées entre A & B : car la quantité $xx - aa$ devient négative, & par conséquent les valeurs de $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{xx - aa}$ deviennent imaginaires. Enfin l'é-

quation $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, fait voir que x (CP , ou CQ) croissant, y (PM , ou QN) croît aussi; c'est pourquoi l'Hyperbole s'éloigne de plus en plus à l'infini du diamètre AB prolongé de part & d'autre à l'infini: car il n'y a rien dans l'équation qui empêche d'augmenter x à l'infini, d'où l'on voit que l'Hyperbole a deux parties MBm & NAn opposées l'une à l'autre, qui ne se rencontrent point, & s'étendent à l'infini. Ce sont ces deux parties de l'hyperbole que l'on appelle *Hyperboles opposées*.

COROLLAIRE III.

16. **I**L est clair que les Hyperboles opposées sont égales & semblables; puisque les coordonnées NF , NQ de l'une sont égales aux coordonnées MF , MP de l'autre.

COROLLAIRE IV.

17. **I**L est aussi manifeste que les asymptotes CH , CT de l'Hyperbole MBm , étant prolongées vers g , & vers k , sont aussi les asymptotes de l'Hyperbole opposée NAn ; puisque Nk & ng , sont toujours égales à mK & ML .

COROLLAIRE V.

18. **I**L est encore évident que la ligne hAt menée par le point A parallèle à DE , ou HT ; & qui rencontre les asymptotes en b & t , est égale à HT , ou à DE , & qu'elle touche l'Hyperbole NAn en A ; puisqu'elle est divisée en deux également en A , comme HT l'est en B , & que $CA = CB$.

COROLLAIRE VI.

19. **L**ON a (n° 12) $ML = \frac{bx}{a} - y$, & $MK = \frac{bx}{a} + y$,
 l'on a aussi (n° 13) $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy = \frac{bx}{a} - y \times \frac{bx}{a} + y$, qui
 montre que $BH^2 (bb) = KM \times ML$.

Qij

COROLLAIRE VII.

20. L'ON tire de l'équation à l'Hyperbole $xx - aa =$
 $\frac{aayy}{bb}$ cette autre équation $aa = xx - \frac{aayy}{bb} = x - \frac{ay}{b} \times x + \frac{ay}{b}$.

mais $GM = x - \frac{ay}{b}$, & $GO = x + \frac{ay}{a}$: car les trian-
 gles semblables HBC , CFG donnent $HB(b) \cdot BC(a)$

:: CF ou $PM(\gamma) \cdot FG = \frac{ay}{b}$; & partant $GM = FM$

$- FG = x - \frac{ay}{b}$, & $MO = x + \frac{ay}{b}$; d'où il suit que

$$OM \times MG \left(xx - \frac{aayy}{bb} \right) = CB^2 (aa).$$

DÉFINITION.

21. SI l'on décrit (Prop. 1) dans les angles Hct , TCh
 par les extremitez D & E du diametre DE conjugué au
 diametre AB , les Hyperboles opposées RDS , rEs , ces
 Hyperboles seront nommées *conjuguées* aux Hyperboles
 opposées MBm , NAn .

COROLLAIRE VIII.

22. IL est clair que les lignes Ht , Tb passeront par les
 points D & E , & qu'elles toucheront en ces points les
 Hyperboles RDS , rEs , puisqu'elles y sont divisées par le
 milieu, comme AB , à qui elles sont paralleles & éga-
 les, l'est en C .

COROLLAIRE IX.

23. D'où il suit que DE & AB sont les axes conju-
 guez des Hyperboles RDS , rEs , si DE est perpendicu-
 laire à AB ; autrement, elles en font deux diametres
 conjuguez.

AVERTISSEMENT.

24. IL n'est point necessaire de démontrer que les Hyperbo-
 les RDS , rEs , ont les mêmes proprietés que les Hy-

perboles MBm, NAn; puisque ce ne seroit qu'une repetition inutile.

DÉFINITION.

25. SI l'on fait $a \cdot b :: 2b \cdot \frac{2bb}{a}$ que je nomme p , la ligne égale à p , est appelée le parametre du diametre AB .

COROLLAIRE X.

26. $a \cdot b :: 2b \cdot p$, donne $ap = 2bb$, ou $aap = 2abb$; d'où l'on tire $\frac{2a}{p} = \frac{aa}{bb}$; c'est pourquoi, si dans l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; au lieu de $\frac{aa}{bb}$, l'on met sa valeur $\frac{2a}{p}$, l'on aura $xx - aa = \frac{2aayy}{p}$, d'où l'on tire $xx - aa \cdot yy :: 2a \cdot p$, & si l'on met en la place de $\frac{aa}{bb}$ un autre rapport égal $\frac{m}{n}$, l'on aura $xx - aa = \frac{myy}{n}$. On ajoutera à ce Corollaire ce qu'on a dit (art. 12 n° 9, 10, 11, & 12.

COROLLAIRE XI.

27. SI l'on avoit nommé (n° 12) BP, x ; AP auroit été $2a + x$, & l'on auroit trouvé cette équation $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$, qui montre que lorsque les indéterminées n'ont point leur origine au centre de l'Hyperbole, il se trouve des seconds termes dans son équation.

COROLLAIRE XII.

28. SI dans l'équation à l'Hyperbole $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$ ou $2ax + xx = \frac{aayy}{bb}$, a est $= b$, ces deux équations deviendront les deux suivantes $xx - aa = yy$, & $2ax + xx = yy$, c'est-à-dire, qu'alors $AP \times PB = PM^2$; les diametres conjugués AB, DE seront égaux; (n° 9)

Q iij

les asymptotes à angles droits ; & tous les diamètres égaux à leurs paramètres.

L'on remarquera que ces deux équations à l'Hyperbole ne diffèrent de celle du cercle , & les deux premières de celle de l'Ellipse, qu'en ce que les deux quarrés inconnus , ont un même signe lorsque l'un est dans un membre de l'équation , & l'autre dans l'autre , ou différens signes , lorsqu'ils sont tous deux dans un même membre , & c'est le contraire dans celles du cercle , & de l'Ellipse, comme on a remarqué (art. 12 n^o 13) ; d'où l'on conclura qu'une équation locale appartiendra toujours à l'Hyperbole , quelque mélange de constantes qu'il s'y puisse rencontrer , lorsque les quarrés des deux lettres indéterminées auront un même signe , l'un étant dans un membre de l'équation & l'autre dans l'autre , ou des signes différens , étant tous deux dans le même membre ; & souvent même lorsque les indéterminées s'y trouveront multipliées l'une par l'autre. Je dis souvent : car il y a des exceptions à faire qu'on trouvera dans la suite.

DÉFINITION.

29. L'HYPÉRBOLÉ qui a ses asymptotes à angles droits, ou (n^o. 9) ce qui revient au même, dont les diamètres sont égaux entr'eux & à leurs paramètres, est appelée *Hyperbole équilatère* ; parceque l'axe d'une Section conique est appelé par Apollonius , *latus transversum*, & son paramètre , *latus rectum*.

PROPOSITION VI.

30. UNE équation à l'Hyperbole $xx + cc - dd = \frac{myy}{n}$, étant donnée , décrire l'Hyperbole.

FIG. 62. Soit C l'origine des inconnues x qui va vers P , & y qui va vers F , & qui font un angle quelconque FCP , le point C sera aussi le centre de l'hyperbole ; puisqu'il n'y a point de second terme dans l'équation. En supposant

1^o. Que d surpasse c ; soit $ff = dd - cc$, & mettant dans l'équation en la place de $dd - cc$ sa valeur ff , elle deviendra $xx - ff = \frac{myy}{n}$. Soit pris $CB = f$; CB fera (n^o 13) le demi diamètre de l'hyperbole qu'il faut décrire. Soit fait $m \cdot n :: ff \cdot \frac{mff}{m}$; $\sqrt{\frac{mff}{m}}$ fera (art. 12 n^o. 12) le demi diamètre conjugué CD . Ayant mené par B la ligne HBT parallèle à CD , & fait BH & BT chacune égale à $\sqrt{\frac{mff}{m}}$; $= CD$; l'on menera les lignes CHL , CTK du centre C par les points H & T qui seront (n^o 13) les asymptotes, & l'on décrira l'hyperbole (Prop. 1) par le point B .

DEMONSTRATION.

ELLE est évidente par les art. & n^o. que l'on vient de citer.

30. En supposant 2^o. Que c surpasse d , soit fait $gg = cc - dd$, & mettant dans l'équation en la place de $cc - dd$ sa valeur gg , l'on aura $xx + gg = \frac{myy}{n}$: mais parce que cette équation n'exprime point dans l'état où elle est, la propriété de l'hyperbole démontrée (n^o. 13) ou dans la Prop. 5: car $xx + gg$ n'est point égal à $AP \times PB$; il faut la changer en celle-ci $\frac{xxx}{m} = yy - \frac{ngg}{m}$ en multipliant par n , divisant par m , & transposant, qui montre que le demi diam. exprimé par $\sqrt{\frac{ngg}{m}}$ doit être pris sur CF exprimé par y . Ayant donc pris $CD = \sqrt{\frac{ngg}{m}}$; & fait $n \cdot m :: \frac{ngg}{m} \cdot gg$, g fera le demi diamètre conjugué à CD ; si l'on mène présentement par D la ligne tDH parallèle à CB , & qu'on fasse tD & DH chacune $= g$; les lignes menées du centre C par t & par H , seront les asymptotes; & l'on décrira l'hyperbole par le point D .

DÉMONSTRATION.

ELLE est la même que la précédente.

PROPOSITION VII.

Theorème.

FIG. 63. 31. **U**NE Hyperbole BM , dont C est le centre, AB & DE les deux axes, ou deux diamètres conjugués quelconques; & CH , CT , les asymptotes. Si l'on mène (n°. 6) par un point quelconque M autre que B la tangente EMF , qui rencontre les asymptotes en E & F . Je dis qu'elle rencontrera le diamètre AB en un point L , qui sera situé entre le centre C , & l'extrémité B du même diamètre AB ; & que $CP \cdot CB :: CB \cdot CL$.

Ayant mené par M les droites PMK parallèle à DE , ou HT ; MO , parallèle à CB ; MI , parallèle à CH , & par le point B , les droites BG , BN parallèles aux asymptotes CT , CH , & nommé les données & constantes CB , ou CA , a ; CD , ou BH , ou BT , b ; BG , ou CN , c ; BN , ou CG , d ; & les indéterminées CP , x ; PM , y ; CI , ou (n°. 6) IE , f ; MI , z ; & CL , t .

Il faut prouver que $x \cdot a :: a \cdot t$.

DÉMONSTRATION.

LES triangles semblables CBT , CPK donnent $CB (a) \cdot BT (b) :: CP (x) \cdot PK = \frac{bx}{a}$; donc $MK = \frac{bx}{a} - y$. Les triangles semblables TBN , KMI , donnent $b (TB) \cdot d (BN) :: \frac{bx}{a} - y (KM) \cdot z (MI)$, d'où l'on tire $z = \frac{bdx - ady}{ab}$. Les triangles semblables BNC , MIO donnent $BN (d) \cdot NC (c) :: MI (z) \cdot IO = \frac{cz}{d}$; donc $EO = EI + IO = f + \frac{cz}{d}$; & $BN (d) \cdot BC (a) :: MI (z) \cdot MO$

$= \frac{ax}{d}$. Enfin les triangles semblables EOM, ECL donnent
 $f + \frac{cz}{d} (EO) \cdot \frac{ax}{d} (OM) :: z f (EC) \cdot t (CL)$, d'où l'on
 tire $t = \frac{2afz}{df + cz}$: mais (Prop. 1) . $fz = cd$, & $f = \frac{cd}{z}$,
 c'est pourquoi en mettant ces valeurs de f & de fz dans
 celle de t , l'on aura $t = \frac{2adx}{df + zc}$. Or l'on vient de trou-
 ver $z = \frac{bdx - ady}{ab}$; mettant donc cette valeur de z , &
 celle de son carré dans la précédente valeur de t , l'on
 aura après les réductions $t = \frac{2aabbx - 2a^3by}{aabb + b^2xx - 2abxy + a^2yy}$: mais
 (Prop. 5) $a^2yy = b^2xx - aabb$; c'est pourquoi en mettant
 cette valeur de a^2yy dans la dernière de t , l'on aura après
 les réductions, $t = \frac{aa}{x}$; d'où l'on tire $x \cdot a :: a \cdot t$. C. Q.
 E. D.

COROLLAIRE I.

32. IL est clair qu'on peut par ce moyen, d'un point
 quelconque donné sur l'Hyperbole, mener une tangente
 sans le secours des asymptotes, en prenant CL troisième
 proportionnelle à CP & à CB ,

COROLLAIRE II.

33. SI de $CP (x)$ l'on ôte $CL \left(\frac{aa}{x} \right)$, l'on aura $PL =$
 $\frac{xx - aa}{x}$ pour l'expression de la soutangente PL ,

COROLLAIRE III.

34. SI de $CB (a)$ l'on ôte $CL \left(\frac{aa}{x} \right)$, l'on aura BZ
 $\frac{ax - aa}{x}$, ou si l'on suppose que $CP (x)$ devienne infi-
 niment grande, le point touchant M sera infiniment

R

APPLICATION DE L'ALGÈBRE
 éloigné de B ; & effaçant le terme $-aa$ dans l'expression de BZ ; parcequ'alors il devient nul par rapport à ax , l'on aura $BZ = \frac{ax}{x} = a$; d'où il suit que le point Z tombe en C , & la tangente LM devient CE qui est l'asymptote de l'Hyperbole.

PROPOSITION VIII.

Theorème.

FIG. 64. 35. **U**NE Hyperbole BM , dont C est le centre; AB & DE , les axes conjugués, étant donnée; si l'on fait CF & CG chacune égale à l'intervalle BD , ou BE , & que l'on mene d'un point quelconque M , pris sur l'Hyperbole, les droites MF , MG , & (n^o. 32) la tangente ML . Je dis que l'angle LMF sera égal à l'angle LMG .

Ayant mené l'appliquée MP perpendiculaire à l'axe AB , & nommé CB , ou CA , a ; CD , ou CE , b ; CF , ou CG , ou BD , c ; MF , z ; MG , f ; CP , x ; PM , y ; PF sera, $x - c$; PG , $x + c$; & CL (n^o. 31) $\frac{aa}{x}$; donc $FL = c - \frac{aa}{x}$, ou $\frac{cx - aa}{x}$, & $GL = c + \frac{aa}{x}$, ou $\frac{cx + aa}{x}$.

Il faut prouver que $MF(z) \cdot MG(f) :: FL\left(\frac{cx - aa}{x}\right) \cdot GL\left(\frac{cx + aa}{x}\right) :: cx - aa \cdot cx + aa$.

D'ÉMONSTRATION.

LES triangles rectangles FPM & GPM donnent
 A. $xx - 2cx + cc + yy = zz$, &
 B. $xx + 2cx + cc + yy = ff$: mais (Prop. 4)
 C. $yy = \frac{bbxx - aabb}{aa}$, & le triangle rectangle BCD donne $bb = cc - aa$, mettant donc cette valeur de bb dans l'équation C, l'on a $yy = \frac{ccxx - aaxx - aacc + a^4}{aa}$, & mettant

cette valeur de yy dans les deux équations A , & B , l'on aura après les réductions & extractions de racines, $cx - aa = az$, & $cx + aa = af$; donc $cx - aa . cx + aa :: az . af :: z . f$. C. Q. F. D

COROLLAIRE

36. **D'**où l'on voit que si l'un des points F , ou G étoit un point lumineux, les prolongemens des rayons réfléchis à la rencontre de l'Hyperbole se réuniroient à l'autre point G ou F .

DEFINITION.

37. **L**es points F & G sont appellez les *foyers* de l'Hyperbole.



SECTION VIII.

Où l'on donne la méthode de résoudre les Problèmes indéterminez du premier & du second degré, c'est-à-dire, de construire les équations à la ligne droite, & aux quatre courbes du premier genre, qui sont le Cercle, la Parabole, l'Ellipse & l'Hyperbole.

M É T H O D E.

XV. **L'**ON a vû dans les Sections précédentes 1°. Que les équations indéterminées, où les lettres inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes ni entr'elles, appartiennent à la ligne droite, & que lorsque ces équations n'ont que deux termes, comme celle-ci $ay = bx$, ou $x = y$; les inconnues x & y ont leur origine au point d'interfection de deux lignes droites, dont l'une renferme tous ces points qui satisfont au Problème, & l'autre, tous les points d'où menant des lignes parallèles à quelque ligne donnée, & terminées par la première, font la construction du Problème.

2°. Que lorsqu'une équation à la parabole n'a que deux termes, l'un desquels est le quarré de l'une des inconnues, & l'autre, le produit de l'autre inconnue par une quantité connue, comme $ax = yy$; les inconnues x , & y ont leur origine au sommet de l'axe, ou d'un diamètre exprimé par x , & que lorsqu'elle a plus de deux termes, l'origine des inconnues n'est point au sommet d'un diamètre.

3°. Que lorsqu'une équation au cercle, ou à l'Ellipse, ou aux diamètres de l'Hyperbole, n'a que trois termes, deux desquels renferment les quarrés des deux inconnues, &

le troisieme est entierement connu, comme $aa - xx = yy$, $aa - xx = \frac{aayy}{bb}$, ou $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$, les inconnues x & y ont leur origine au centre de ces trois Courbes, & que lorsque ces equations ont des seconds termes, l'origine des inconnues n'est point au centre.

4°. Que lorsqu'une equation aux asymptotes d'une Hyperbole n'a que deux termes dont l'un est le produit des deux indéterminées, & l'autre un Plan connu comme $xy = ab$, l'origine des inconnues x & y est au sommet de l'angle des asymptotes, & que lorsque cette equation a plus de deux termes, l'origine des inconnues est ailleurs; où l'on remarquera que les quantitez constantes, quelques composées qu'elles se puissent rencontrer, changent rien de ce que nous venons de dire; puisque l'on peut toujours mettre en leur place des valeurs simples: par exemple cette equation $\frac{a^2 - b^2}{cc} - xx = yy$, est une equation au cercle dont le centre est l'origine des indéterminées: car on peut trouver (art. 5) une quantité simple $dd = \frac{a^2 - b^2}{cc}$; de sorte que mettant dd dans l'equation precedente en la place de $\frac{a^2 - b^2}{cc}$ elle deviendra $dd - xx = yy$. Il en est ainsi des autres.

Nous avons donné dans les Sections precedentes la maniere de construire les equations indéterminées du second degré, c'est à dire, de décrire les quatre courbes du premier genre par le moyen de leurs equations: mais ces equations étoient dans l'état où nous les venons de proposer; c'est-à-dire que l'equation à la ligne droite, à la parabole, & aux asymptotes de l'Hyperbole, n'avoit que deux termes; l'equation au cercle, à l'Ellipse, & aux diametres de l'Hyperbole, n'avoient que trois termes parmi lesquels il n'y en avoit point de second: mais lorsqu'on résout un Problème, les equations où l'on arrive ne sont pas toujours, ou plutôt, sont rarement dans cet

état. Ce qu'il y a de constant, c'est que lorsque les lettres indéterminées n'auront pas plus de deux dimensions, soit qu'elles soient multipliées par elles mêmes, ou entr'elles, les équations appartiendront toujours à une des quatre Courbes du premier genre. Il est même tres-souvent facile de reconnoître par la seule inspection d'une équation à laquelle des quatre elle appartient, par ce que l'on a dit ailleurs, & il n'y a qu'un Cas où l'on puisse se méprendre, qui est lorsqu'une équation renferme deux quarrés inconnus, & que le produit des deux lettres inconnues se rencontre encore dans quelqu'un de ses termes : car ces équations appartiennent souvent à l'hyperbole, & quelquefois au cercle, ou à la parabole, ou à l'Ellipse : mais lorsqu'il n'y a qu'un quarré inconnu, & que le produit des deux inconnues se trouve dans un autre terme, l'équation appartiendra toujours à l'hyperbole, & il sera libre de la réduire aux diamètres; ou aux asymptotes, comme on va bien-tôt voir.

Il s'agit de tout ceci que pour construire les équations qui ne sont point dans l'état des précédentes, c'est-à-dire, pour décrire les Courbes auxquelles elles appartiennent, ou il faut donner d'autres règles que celles des trois Sections précédentes, ou il faut donner des règles pour ramener ces équations à l'état où sont celles des mêmes Sections, afin de se servir des mêmes règles dont on s'y est servi pour décrire ces Courbes : mais comme il va paroître un Livre de Monsieur le Marquis de l'Hôpital (pour l'intelligence duquel celui-ci ne sera peut-être pas inutile) dans lequel on trouvera des Méthodes de construire les équations indéterminées, telles qu'on les trouve en resolvant les Problèmes, on a jugé à propos de prendre le parti de ramener les équations indéterminées qui n'excedent point le deuxième degré, à l'état de celles par le moyen desquelles nous avons décrit les Sections coniques dans les trois Sections précédentes. Les moyens dont on se sert pour changer d'état ces équations, sont nommées *réductions*.

DES RÉDUCTIONS

Des Equations indéterminées du premier & du second degré.

1. Il n'y a que deux choses qui empêchent les équations indéterminées du second degré, d'être semblables, ou dans le même état de celles par le moyen desquelles nous avons décrit les Courbes auxquelles elles appartiennent dans les trois Sections précédentes. Ces deux choses sont les seconds termes, & les rectangles composez; de sorte que pour les réduire, il n'y a qu'à faire évanouir par les règles ordinaires les seconds termes, & changer les rectangles, ou produits composez en des rectangles, ou des produits simples.

J'appelle rectangle composé, le produit d'une lettre ou quantité connue, ou inconnue, par une lettre inconnue accompagnée par addition, ou soustraction d'une autre lettre ou quantité connue simple, ou composée. Par exemple $ay \pm xy$, est un rectangle composé de $a \pm x \times y$; $aa \pm ay$, est un rectangle composé $a \pm y \times a$; $\frac{aax + axy}{b}$, est un rectangle composé de $\frac{aa + ay}{b} \times x$; $ay \pm by \pm xy$, est composé de $a \pm b \pm x \times y$. Il est ainsi des autres.

2. Il y a quelquefois quelque changement à faire pour rendre des quantitez complexes semblables aux rectangles composez dont nous venons de parler. Par exemple $aa - by$, n'est point le produit d'une quantité simple par une quantité complexe: car pour cela, il faudroit qu'il y eut un b dans le premier terme aa ; c'est pourquoi il faut (art. 5) changer aa en un rectangle dont un côté soit b , comme en bc , & mettant bc en la place de aa , l'on aura $bc - by = c - y \times b$. Il en est ainsi des autres.

Il y a des équations, où il n'y a qu'à ôter les seconds termes pour les réduire: il y en a d'autres où il n'y a qu'à changer les produits composez en des produits simples, & il y en a d'autres où il y a toutes ces deux choses à faire. Les exemples suivans ne laisseront rien à éclaircir sur ce sujet.

De la réduction des Equations en faisant évanouir les seconds termes.

3. ON sçait que la règle de faire évanouir le second terme d'une équation, est d'égaliser la racine du premier + ou — le coefficient du second divisé par l'exposant du premier à une nouvelle inconnue, ce qui donne une équation que j'appelle *réduction*; d'où l'on tire une valeur de l'inconnue qui est la racine du premier terme de l'équation à réduire; & substituant cette valeur, & celle de ses puissances dans l'équation à réduire, elle se change en une autre équation, où l'inconnue dont on vouloit faire évanouir le second terme, ne se trouve plus: mais il se trouve en sa place la nouvelle inconnue de la réduction, dont le premier terme est élevé à la même puissance que celui de l'inconnue que l'on a fait évanouir: mais qui n'en a point de second. Ceci est general pour les équations de tous les degrez, quoiqu'il ne soit ici question que des équations du second.

E X E M P L E I.

4. SOIT l'équation $xx - ax + yy = by$. Il est clair que cette équation appartient au cercle, puisqu'elle renferme deux quarez inconnus xx & yy qui ont le même signe + étant tous deux dans un même membre de l'équation: mais les inconnues n'ont point leur origine au centre: car les deux quarez inconnus xx & yy ont chacun un second terme ax & by . Pour faire évanouir le second terme — ax , je fais $x - \frac{1}{2}a = z$; donc $x = z + \frac{1}{2}a$, & mettant cette valeur de x , & celle de son carré dans l'équation, elle deviendra $zz - \frac{1}{4}aa + yy = by$, ou zz est un premier terme qui n'en a point de second. Pour faire évanouir le second terme by , je le passe du côté de son premier yy , afin que yy garde son signe +; ainsi l'équation devient

devient $zz - \frac{1}{4}aa + yy - by = 0$; & faisant $y - \frac{1}{2}b = u$, l'on a $y = u + \frac{1}{2}b$; & mettant cette valeur de y & celle de son quarré dans l'équation en la place de y & de yy , l'on aura $zz - \frac{1}{4}aa + uu - \frac{1}{4}bb = 0$, ou $zz = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - uu$, qui montreroit que cette équation appartient au cercle si on ne l'avoit pas connu d'abord, & qui montre que les inconnues z & u ont leur origine au centre ; puisque ni l'une, ni l'autre n'ont point de second terme. Le demi diametre de ce cercle est égal à $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$.

EXEMPLE II.

5. SOIT une équation $xx + bx - zax - yy = 0$. On voit déjà que cette équation est à une Hyperbole équilatere ; puisqu'elle renferme deux quarez inconnus avec differens signes dans un même membre, & délivrez de toute quantité connue ; en faisant $x + \frac{1}{2}b - a = z$, l'on aura $x = z - \frac{1}{2}b + a$, & après les substitutions l'on aura $zz - \frac{1}{4}bb + ab - aa - yy = 0$, ou $zz - \frac{1}{4}bb + ab - aa = yy$: mais si $\frac{1}{2}b$ surpasse a il faudra transférer le terme connu : car en ce cas il est positif, & dans l'équation à l'Hyperbole il doit être négatif ; ainsi l'équation sera $zz = yy + \frac{1}{4}bb - ab + aa$, où les inconnues z & y ont leur origine au centre de l'Hyperbole, dont les demi diametres conjuguez sont égaux entr'eux & à $\frac{1}{2}b - a$, ou $a - \frac{1}{2}b$.

EXEMPLE III.

6. SOIT $xx - 2xy + by = 0$, qui est une équation où il y a un second terme $2xy$ qui peut appartenir indifféremment à deux premiers : mais parce que le carré de y ne s'y trouve point, il faut nécessairement le rapporter à xx ; faisant donc $x - y = z$, l'équation se réduira à $zz - yy + by = 0$: mais la réduction a fait naître un premier terme yy qui a pour second by ; c'est pourquoy en transposant pour donner à yy le signe $+$, l'on a $zz = yy - by$, & faisant $y - \frac{1}{2}b = u$; l'équation se réduira à $zz = uu - \frac{1}{4}bb$, qui est une équation à l'Hyperbole équilatère, où les inconnues z & u ont leur origine au centre.

EXEMPLE IV.

7. SOIT $xx - 2xy - aa + 2yy = 0$, en faisant $x - y = z$, l'équation se réduit à celle-ci $zz - yy - aa + 2yy = 0$, ou $zz - aa + yy = 0$, qui est une équation au cercle, si les inconnues z & y font un angle droit; à l'Ellipse, s'il est oblique.

Si dans l'équation à réduire $xx - 2xy - aa + 2yy$, au lieu de $2yy$, il y avoit $-yy$, ou $-2yy$ &c, elle appartiendroit à l'Hyperbole dont les diamètres ne sont point égaux; s'il y avoit $+3yy$ ou $+4yy$ &c, elle appartiendroit à l'Ellipse; & si au lieu de $2yy$, il y avoit $+by + yy$, elle appartiendroit à la parabole.

EXEMPLES.

Des réductions en changeant les produits composez en produits simples.

ON réduit en changeant les produits composez en des produits simples, toutes les équations où il n'y a point de quarrés inconnus, qui sont celles qui appartiennent

à la ligne droite, ou aux asymptotes de l'Hyperbole; celles où il n'y a qu'un carré inconnu sans le produit des inconnues, qui appartiennent toutes à la parabole; & celles où il n'y a qu'un carré inconnu avec un produit des deux inconnues, qui appartiennent toutes à l'Hyperbole. On pourroit aussi réduire ces dernières, en faisant évanouir le second terme, comme on a fait (n^o. 6) auquel cas elles appartiendroient aux diamètres de l'Hyperbole: mais en les réduisant en changeant les rectangles composez en de simples, elles se rapportent aux asymptotes. Toutes ces équations ne seront point entièrement réduites par cette seconde manière de réduction, que lorsqu'elles ne renfermeront que deux termes.

E X E M P L E V.

8. S O I T l'équation, $x + y = a$, ou $x = a - y$, en faisant $a - y = z$, l'on aura $x = z$ qui est un lieu à la ligne droite. Si l'on fait $x + y = z$, l'on aura $z = a$, qui est aussi un lieu à la ligne droite: mais les deux inconnues d'une équation ne se doivent pas trouver dans une réduction quand on peut faire autrement.

Soit l'équation $x - y = a - c$, ou $x = a - c + y$: en faisant $a - c + y = z$, l'on aura $x = z$.

E X E M P L E V I.

9. S O I T l'équation $ax - by = aa$, ou $ax = aa + by$; ou $ax = bc + by$, en mettant bc pour aa , ayant fait $c + y = z$, l'on aura $ax = bz$, qui est un lieu à la ligne droite.

E X E M P L E V I I.

10. S O I T l'équation $ax - xy = by$, en faisant $a - y = z$, l'on a $y = a - z$; & mettant cette valeur de y dans l'équation à réduire, l'on aura $xz = ab - bz$ qui a encore trois termes; c'est pourquoi, en transposant, l'on a $xz + bz = ab$: & faisant $x + b = u$, l'on a $uz = ab$, qui est une équation aux asymptotes de l'Hyperbole,

EXEMPLE VIII.

11. **S** O I T $abx = bcy + axy$; parceque dans les équations où il n'y a point de carré inconnu, c'est le produit des deux inconnues qui en détermine le degré, il faut, avant que de les réduire, délivrer ce produit de toute quantité connue ; c'est pourquoi en divisant toute l'équation par a , l'on aura $bx = \frac{bcy}{a} + xy$, & faisant $\frac{bc}{a} + x = z$, l'on a $x = z - \frac{bc}{a}$, & mettant cette valeur de x dans l'équation à réduire, l'on aura $bz - \frac{bbc}{a} = zy$, ou $bz - zy = \frac{bbc}{a}$; & faisant encore $b - y = u$, l'on aura $zu = \frac{bbc}{a}$, qui est un lieu aux asymptotes de l'Hyperbole.

EXEMPLE IX.

12. **S** O I T l'équation $xx - ax = by$, pour faire évanouir le second terme, on fera $x - \frac{1}{2}a = z$, & l'on aura $zz - \frac{1}{4}aa = by$, ou $zz = \frac{1}{4}aa + by$, ou $zz = bc + by$, en mettant bc pour $\frac{1}{4}aa$, & faisant encore $c + y = u$, l'on aura $zz = bu$, qui est un lieu à la parabole dont le parametre est b .

EXEMPLE X.

13. **S** O I T l'équation $xx \pm xy = ab$. On peut réduire cette équation en faisant évanouir le second terme, & elle se rapportera aux diametres de l'Hyperbole : car faisant $x \pm \frac{1}{2}y = z$, l'on aura $zz - \frac{1}{4}yy = ab$, ou $zz - ab = \frac{1}{4}yy$. Mais parceque $xx \pm xy = x \times x \pm y$, en

faisant $x + y = z$, l'on aura $zx = ab$ qui se rapporte aux asymptotes.

EXEMPLE XI.

14. SOIT $xx - xy = by$, on pourroit encore réduire cette équation en faisant évanouir les seconds termes, & elles se rapporteroit aux diametres de l'Hyperbole: mais on peut aussi la réduire aux asymptotes comme l'on a fait la précédente: car en transposant, l'on a $xx = by + xy$; & faisant $x + b = z$, l'on a $x = z - b$, & met-
 tant cette valeur de x dans l'équation à réduire, l'on aura $zz - 2bz + bb = zy$, ou $zy + 2bz - zz = bb$, & faisant $y + 2b - z = u$, l'on aura $uz = bb$, qui se rapor-
 te aux asymptotes. Voyez l'article 12. n^o. 10.

CONSTRUCTION DES RÉDUCTIONS.

XVI. EN réduisant les équations indéterminées, l'on en forme d'autres plus simples, que nous avons nommées Réductions. Et comme c'est par le moyen de ces Réductions que l'on construit les premières, l'on a jugé à propos d'en donner ici la construction en particulier pour avoir plus de facilité à construire les autres.

Toutes les Réductions se peuvent rapporter à quel-
 qu'une des six Formules suivantes, ou a, b & c expriment des quantitez connues quelconques complexes, ou in-
 complexes.

- | | |
|-------------------|------------------------------------|
| 1. $x \pm a = z.$ | 4. $x \pm \frac{ay}{b} = z.$ |
| 2. $a - x = z.$ | 5. $x \pm y \pm b = z.$ |
| 3. $x \pm y = z.$ | 6. $x \pm \frac{ay}{b} \pm c = z.$ |

CONSTRUCTION.

De la premiere Formule $x \pm a = z.$

1. SOIT A le point fixe, ou l'origine des inconnues x , y , z , $Fig. 65$ qui va vers H , & y qui va vers G , & qui forment l'angle GAH tel qu'il doit être selon les qualitez du Problème,

dont on suppose ici que l'on fait la construction. 1^o. Si la Réduction est $x + a = z$, il est clair que la construction se doit faire sur la ligne AH exprimée par x , & que pour avoir sur AH indéfiniment prolongée vers H une ligne égale à z , il faut prolonger AH du côté de A en C , en sorte que $AC = a$: car l'on aura alors $CA + AH = a + x = z$; & ainsi le point C sera alors l'origine, ou le commencement de z qui va vers H , & de y qui va vers g , en demeurant toujours parallèle à AG , de sorte que s'il n'y avoit point de Réduction pour y , le point C seroit l'origine des inconnues de l'équation réduite, dont celle que l'on vient de construire est une Réduction.

2. Si la Réduction est $x - a = z$, l'on prendra le point **FIG. 66.** C du côté de H par rapport à A , & l'on fera $AC = a$; & le point C sera le commencement de z qui va toujours vers H , & de y qui va vers g parallèle à AG : car alors $AH - AC = CH = x - a = z$; & s'il n'y avoit point de réduction pour y , le point C seroit l'origine des inconnues de l'équation réduite.

3. Mais si dans l'un ou dans l'autre, ou dans tous les deux Cas précédens, il y a une réduction pour y semblable à la précédente, par exemple, $y + b = u$; l'on fera **FIG. 65.** sur Cg ce que l'on vient de faire sur AH , c'est-à-dire, que s'il y a $y + b = u$, on prolongera Cg en O ; & s'il y a $y - b = u$, l'on retranchera Co de Cg , en faisant CO , ou $Co = b$; & le point O , ou o sera l'origine des inconnues de l'équation réduite u qui va toujours vers g , & z qui va vers M , ou m parallèle à CH ; de sorte que les nouvelles inconnues z & u font le même angle au point O , ou o que les premières x & y au point A , qui est leur origine.

CONSTRUCTION.

De la seconde Formule $a - x = z$.

4. L'ON voit par la seule inspection de cette Formule que les deux inconnues x & z sont ensemble égales à la **FIG. 67.** grandeur a ; c'est pourquoy A étant le commencement

de x qui va vers H , ayant pris sur AH l'intervalle $AC = a$, le point C sera le commencement de z , qui en ce cas va vers A , & de y qui va vers g parallèle à AG : car si l'on prend librement un point D sur AC ; AD étant x , CD sera $a - x = z$; & le point D n'étant point fixe ne peut être l'origine de z ; c'est pourquoi puisque x a son origine au point A , z commencera nécessairement au point fixe C , & ira par conséquent vers A .

5. S'il y a encore une Réduction pour y semblable à une des deux premières Formules, on la construira comme on a fait les précédentes.

CONSTRUCTION.

De la troisième Formule $x \pm y = z$.

6. TOUTES les Réductions, où se trouvent les deux inconnues x & y de l'équation à réduire, viennent des équations où les mêmes inconnues sont multipliées l'une par l'autre dans quelque terme, & où l'une des deux, ou toutes ces deux sont quarrées. Or pour ne point se trouver embarrassé dans la construction de la Réduction, la lettre inconnue de la Réduction qui est multipliée par l'autre inconnue dans l'équation à réduire, doit être construite la première; par exemple, si l'équation à réduire est $xx - xy = ab$; soit qu'on fasse $x - \frac{1}{2}y = z$, pour faire évanouir le second terme, soit qu'on fasse $x - y = z$ pour changer le rectangle composé $xx - xy$, en un simple xz , il faudra toujours construire y la première.

Supposons dans cette Formule que y , étoit multipliée par x dans l'équation à réduire; & soit A le point fixe où commencent les inconnues x qui va vers G , & y qui va vers H , & qui fait avec AG un angle quelconque GAH . Si outre la Formule que l'on construit, il y a une réduction pour y , elle sera semblable à une des deux précédentes, c'est-à-dire, qu'elle sera $y \pm b = u$, & on la construira com-

FIG. 63.

me les précédentes en prenant sur AH , prolongée ou non prolongée selon qu'il y a $y+b$, ou $y-b$, la partie AC , ou $AD = b$, & l'origine de l'inconnue u sera au point C , s'il y a $y+b = u$; au point D , s'il y a $y-b = u$, & ira vers H dans l'un & l'autre cas: mais s'il y a $b-y = u$, le point D sera l'origine de u qui ira vers A . Cela posé,

Si la Réduction est $x+y = z$, l'on prendra sur AD un point quelconque E , par où l'on mena EF parallèle à AG , & ayant prolongé EF en B , en sorte que $EB = AE$, l'on mena de A par B la ligne AB indéfiniment prolongée du côté de B , & $BF = BE + EF = (\text{Const.}) AE + EF = x+y = z$, & le point A sera l'origine des trois inconnues x, y & z . Mais s'il y avoit une Réduction pour y telle que celle qu'on vient de construire, l'origine des inconnues u parallèle à AH & z parallèle à AG , seroit au point O ou P , où la ligne AB rencontreroit la parallèle à AG menée par C ou par D ; de sorte que les coordonnées de la courbe qu'il faut décrire sont à présent AB & BF , ou OB & BF , ou PB & BF .

Si la Réduction croît $x-y = z$, les points B, O & P seroient de l'autre côté de AH .

C O N S T R U C T I O N .

De la quatrième Formule $x \pm \frac{ay}{b} = z$.

7. E L L E est la même que la précédente, excepté qu'au lieu de prendre $EB = AE$, il faut prendre EB telle que $EB.EA :: a.b$: car $BF = EF + EB = x \pm \frac{ay}{b} = z$.

C O N S T R U C T I O N .

De la cinquième & sixième Formule $x \pm y \pm b = z$,

$$\& x \pm \frac{ay}{b} \pm c = z,$$

8. L A construction de ces deux Formules ne diffère de

de celle des deux précédentes qu'à cause de $\pm b$, & de $\pm c$; c'est pourquoi ayant construit (n^o. 6 & 7) $x \pm y$, & $x \pm \frac{ay}{b}$, on prendra sur AG prolongée du côté de A (en supposant qu'il y a $+b$, ou $+c$) $AI = b$, ou $= c$; & l'on menera par I la ligne IK parallèle AB qui rencontrera en K , la ligne BEF prolongée du côté de B , & KF sera $= x + y + b = z$, ou $x + \frac{ay}{b} + c = z$, & le point I sera l'origine des inconnues y & z , s'il n'y a point de réduction pour y : mais s'il y a une réduction pour y , le point L ou M sera l'origine des inconnues u & z ; de sorte que les coordonnées de la courbe qu'il faut décrire, sont présentement IK & KF , ou LK & KF , ou MK & KF .

L'on a supposé qu'il y avoit $+$ dans les deux réductions que l'on vient de construire: mais il n'est pas plus difficile de les construire, en supposant qu'il y a par-tout $-$, ou $+$ & $-$, ou $-$ & $+$: car cela ne peut que changer la position des lignes AB & IK par rapport à elles-mêmes, & à la ligne AH ; & dans tous les cas AB & IK seront toujours parallèles.

C O N S T R U C T I O N.

Des équations, ou des lieux à la ligne droite.

XVII. **A**U lieu de proposer simplement des équations à construire, on proposera des Problèmes à résoudre; & après avoir ramené les équations que l'on en tirera à l'état de celles des trois Sections précédentes, on en donnera la Construction, & ensuite la Démonstration.

PROBLÈME INDE'TERMINE'.

I. **U**N angle GAH étant donné, il faut trouver au dedans Fig. 69. un point M , d'où ayant mené MP parallèle à AG , PM soit égale à une ligne donnée AB .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la don-

T

née AB , a ; & l'inconnue PM , x ; l'on a par la qualité du Problème $x = a$, qui est une équation à la ligne droite, & qui fournit cette construction.

Soit menée par B la ligne BM parallèle à AH . Je dis que BM renferme tous les points qui satisfont au Problème.

DEMONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque N de la ligne BM , la droite NQ parallèle à AG ; AN étant un parallélogramme, l'on aura toujours $QN = AB$, ou $x = a$. C. Q. F. D.

PROBLÈME INDETERMINE'.

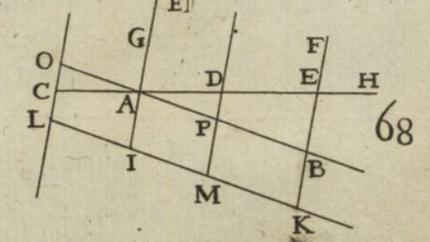
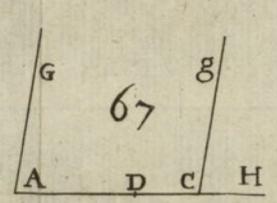
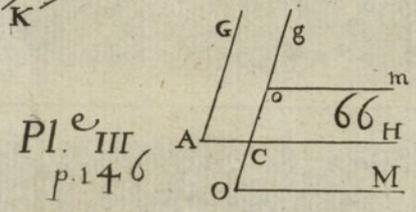
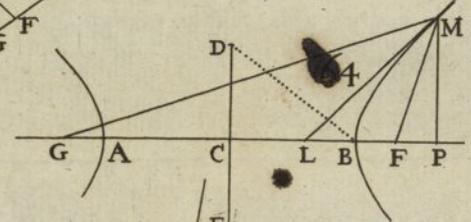
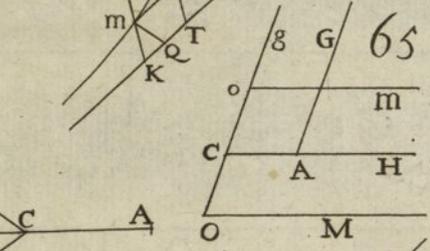
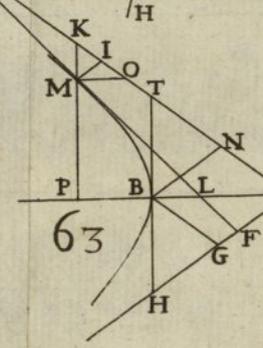
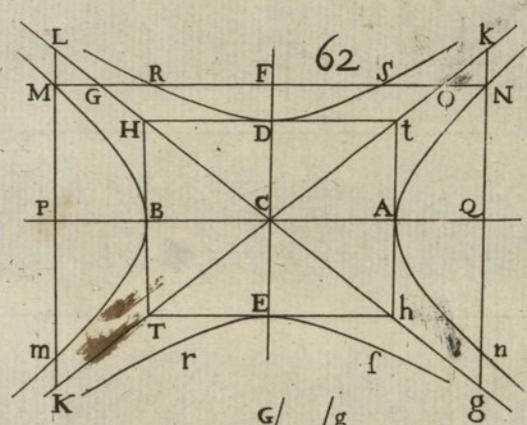
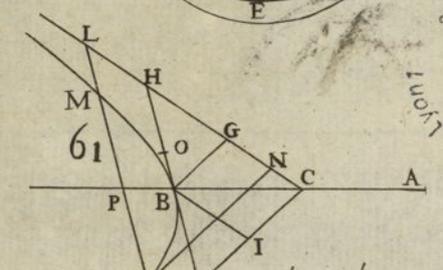
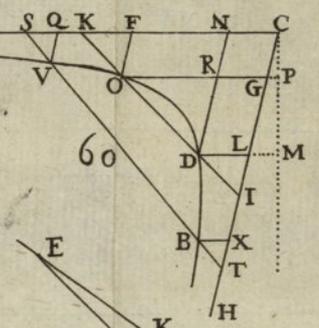
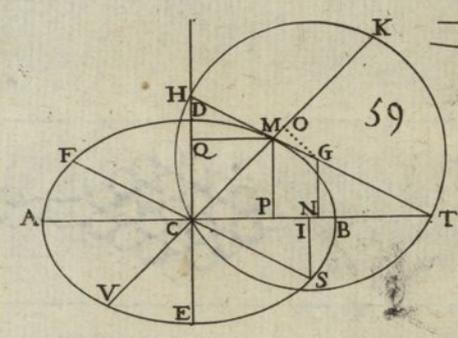
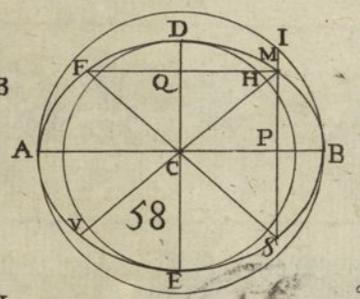
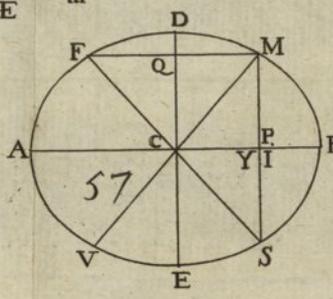
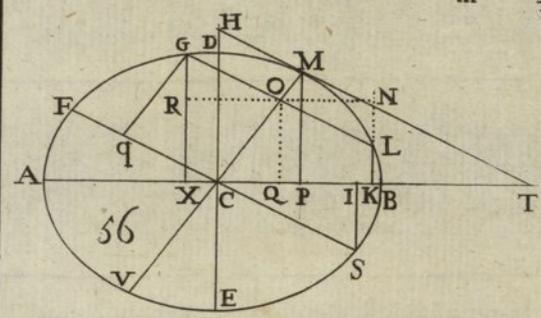
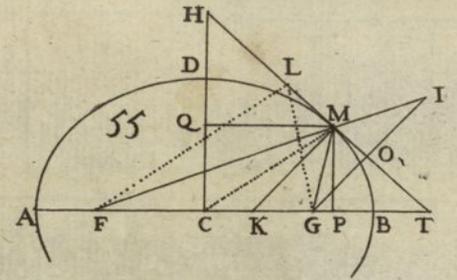
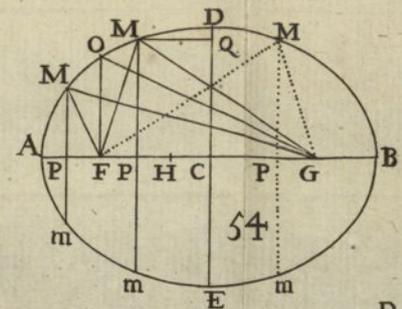
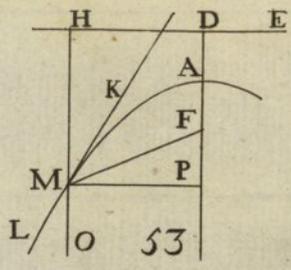
FIG. 70. 2. **U**N angle GAH étant donné, il faut trouver dans cet angle un point M , d'où ayant mené MP parallèle à GA , AP & PM soient ensemble égales à une ligne donnée KL .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée KL , a ; & les inconnues AP , x & PM , y ; l'on aura par les qualitez du Problème $x + y = a$, ou $y = a - x$, qui est une équation à la ligne droite: mais parcequ'elle contient trois termes, je fais $a - x = z$: ce qui réduit l'équation à celle-ci $y = z$, qui n'en a que deux, & qui donne cette Construction.

Ayant pris sur AH & sur AG les lignes AB & AC égales à KL , & mené la ligne BC . Je dis que tous les points comme M de la ligne BC satisfont au Problème.

DEMONSTRATION.

A Cause de la réduction $a - x = z$, AB étant nommée a , & AP , x ; BP fera $a - x$ ou z , dont l'origine est (art. 16 n°. 4) en B , & qui va vers A . Or puisque (Const.) $AB = AC$ & PM parallèle à AC , PM fera égale à PB ; c'est pourquoy $AP + PM$, ou $AP + PB = KL$, ou en termes Algebriques $x + y = a$. C. Q. F. D.



Pl. III
p. 146

SCD Lyon 1036



Faint, illegible text or bleed-through from the reverse side of the page, appearing as ghostly impressions of characters and lines.

PROBLÈME INDETERMINE'.

3. **D** E U X lignes parallèles AH, BK terminées en A & B FIG. 71. par une autre ligne AG qui fait avec elles un angle quelconque GAH, étant données de position. Il faut trouver dans l'angle GBK le point M, d'où ayant mené MP parallèle à GA, qui rencontre BK en E; ME soit à AP, ou à BE dans la raison donnée de m à n.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AB, ou PE, a ; & les inconnues AP, ou BE, x ; PM, y ; EM fera $y - a$; & l'on aura par les conditions du Problème $y - a . x :: m . n$; donc $mx = ny - na$; & comme l'on ne peut point trouver une seconde équation, il suit que le Problème est indéterminé: & le lieu qui renferme tous les points qui satisfont au Problème est une ligne droite; puisque dans l'équation $mx = ny - na$, les inconnues x & y n'y sont multipliées, ni par elle-même, ni entr'elles. Pour réduire cette équation à deux termes, je fais $y - a = z$, & mettant z dans l'équation pour $y - a$, l'on a $mx = nz$ qui donne cette construction.

A étant le point fixe ou l'origine des inconnues x qui va vers H, & y qui va vers G, à cause de la réduction $y - a = z$, le point B devient l'origine des inconnues x qui va vers K, & z qui va vers G; soit pris $BC = n$, & mené par C la droite CD parallèle à BG & $= m$. Je dis que la ligne indéfinie BDI menée par les points B & D satisfait au Problème.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené par un point quelconque N pris sur BI, la droite NQR parallèle à AG, ou à CD, les triangles semblables BCD. BQN donneront $BC . CD :: BQ . QN$, ou en termes Algebriques $n . m :: x . z$; donc $mx = nz$ ou $mx = ny - na$, en mettant pour z sa valeur $y - a$, qui est l'équation que l'on a construite. C. Q. F. D.

T ij

CONSTRUCTION

Des Equations ou des lieux au cercle.

PROBLÈME INDETERMINE.

FIG. 72. XVIII. **U**N E ligne *AB* étant donnée de grandeur & de position. Il faut trouver hors de cette ligne un point *M*, en sorte qu'ayant mené de ce point aux extrémités *A* & *B* de la ligne *AB*, les droites *MA*, *MB*, le carré de *MA* soit au carré de *MB* dans la raison donnée de *m* à *n*.

Ayant supposé le Problème résolu, on abaissera du point *M* sur *AB* la perpendiculaire *MP*, & ayant nommé la donnée *AB*, *a*, & les indéterminées *AP*, *x*; & *PM*, *y*; *PB* sera *a - x*; *MA*², *xx + yy*, & *MB*², *aa - 2ax + xx + yy*, & l'on aura par les qualitez du Problème *xx + yy . aa - 2ax + xx + yy :: m . n*; donc *nxx + myy = maa - 2max + mxx + myy*, ou en supposant que *m* surpasse *n*, *mxx - nxx - 2max + maa + myy - yy = 0*, ou *xx - $\frac{2ma}{m-n}x + \frac{maa}{m-n} + yy = 0$* , en divisant par *m - n*; & comme on ne peut point trouver d'autre équation pour faire évanouir une des inconnues, il suit que le Problème est indéterminé; & parceque dans l'équation il y a deux quarrés inconnus délivrés de toute quantité connue qui ont mêmes signes dans le même membre de l'équation, & que les inconnues *AP* & *PM* exprimée par *x* & *y* font un angle droit; il suit que l'équation appartient au cercle, ou ce qui est la même chose, que tous les points qui satisfont au Problème sont à la circonférence d'un cercle; il ne s'agit donc plus que de le déterminer par le moyen de l'équation que l'on vient de trouver: mais comme il y a un second terme dans l'équation, il est clair (art. 12 n°. 14) que le point *A* qui est l'origine des inconnues *x* & *y* n'est point le centre de ce cercle; pour le trouver il faut faire évanouir le second

terme ; pour ce sujet , je fais $x - \frac{ma}{m-n} = z$, qui réduira l'équation à celle-ci $yy = \frac{mnaa}{mm - 2mn + nn} - zz$, où les inconnues y & z ont leur origine au centre. Or pour trouver le centre du cercle, ou l'origine des inconnues y & z , il faut construire la réduction $x - \frac{m-n}{ma} = z$. Ce qui se fait en cette sorte.

A étant l'origine des inconnues x qui va vers B , & y qui lui est perpendiculaire, soit prise $AC = \frac{ma}{m-n}$, le point C fera (art. 16 n°. 2) l'origine des inconnues y & z , & par conséquent le centre du cercle qu'il faut décrire: mais le terme connu de l'équation réduite $\frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}$ est le quarré du demi diamètre du même cercle; c'est pourquoi si du centre C & du rayon $= \frac{\sqrt{mnaa}}{m-n}$, l'on décrit le cercle DME , tous les points M de sa circonférence satisferont au Problème.

DEMONSTRATION.

AYANT abaissé d'un point quelconque M pris sur la circonférence du cercle la perpendiculaire MP , par la propriété du cercle CD^2 , ou $CE^2 - CP^2 = PM^2$, ce qui est en termes Algebriques $\frac{mnaa}{mm - 2mn + nn} - zz = yy$: mais $zz = xx - \frac{2max}{m-n} + \frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}$; mettant donc cette valeur de zz dans l'équation précédente, on aura après les réductions, & transpositions $mxx - nxx - 2max + maa + myy - nyy = 0$, qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

PROBLÈME INDETERMINE^A.

FIG. 72. 1. LES mêmes choses étant supposées que dans le Problème précédent, il faut trouver le point M en sorte que MA soit à MB dans la raison donnée de m à n .

En donnant aux lignes les mêmes noms que dans le Problème précédent, on aura par la qualité du Problème $\sqrt{xx+yy} \cdot \sqrt{aa-2ax+xx+yy} :: m \cdot n$; donc $n \times \sqrt{xx+yy} = m \sqrt{aa-2ax+xx+yy}$, ou $nnxx + nnyy = mmaa - 2mmax + mmxx + mmyy$, ou en supposant que m surpasse n , & divisant par $mm - nn$, l'on aura xx

$\frac{-2mmax + mmaa}{mm - nn} + yy = 0$, qui est une équation au cercle dont l'origine des inconnues x & y n'est point le centre à cause du second terme $\frac{-2mmax}{mm - nn}$; faisant donc

$x - \frac{mma}{mm - nn} = z$ pour faire évanouir le second terme,

l'équation se réduira à celle-ci $zz - \frac{mmnnaa}{m^2 - 2mmn + n^2} + yy = 0$, où les inconnues z & y ont leur origine au centre du cercle qu'il faut décrire. Pour trouver ce centre, il faut construire la réduction $x - \frac{mma}{mm - nn} = z$. Ce qui se fait en cette sorte.

Le point A étant l'origine des inconnues de l'équation à réduire x qui va vers B , & y qui lui est perpendiculaire; soit prise $AC = \frac{mma}{mm - nn}$, le point C sera celui que l'on cherche; c'est pourquoi si du centre C , & du rayon $= \frac{mma}{mm - nn}$, qui est la racine du terme connu de l'équation réduite, l'on décrit le cercle DME , tous les points de sa circonférence satisferont au Problème.

On peut encore trouver plus simplement le centre

du cercle en cette sorte ; puisque $\frac{mma}{mm-nn}$ est l'expression de la distance du point A au centre que l'on cherche, si l'on ôte & si l'on ajoute à cette expression l'expression du demi diamètre qui est $\frac{mma}{mm-nn}$, l'on aura

$\frac{mma-mna}{mm-nn}$, & $\frac{mma+mna}{mm-nn}$, & divisant les deux termes de la premiere fraction par $m-n$, & ceux de la seconde par $m+n$, l'on aura $\frac{ma}{m+n}$ & $\frac{ma}{m-n}$; prenant donc

$AD = \frac{ma}{m+n}$, & $AE = \frac{ma}{m-n}$, DE fera le diamètre du cercle, & par consequent le point C qui divise DE par le milieu, fera son centre.

DEMONSTRATION.

AYANT abaissé d'un point quelconque M la perpendiculaire PM , par la propriété du cercle $DP \times PE = PM^2$. Ce qui est en termes Algebriques $\frac{mmnaa}{m^2-2mmn+n^2}$

$-zz = yy$: mais $zz = \frac{m^2aa}{m^2-2mmn+n^2} - \frac{2mmx}{mm-nn} + xx$,

& mettant cette valeur de zz dans l'équation précédente l'on a $\frac{mmnaa-m^2aa}{m^2-2mmn+n^2} + \frac{2mmx}{mm-nn} - xx = yy$, & en divisant les deux termes de la premiere fraction par $mm-nn$ l'on a

$xx - \frac{2mmx+mnaa}{mm-nn} + yy = 0$, qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

2. SI dans les équations à réduire des deux Problèmes précédens m est égale à n , elles deviendront $x = \frac{1}{2} a$, qui montre que le lieu qui satisfait au Problème est une ligne droite qu'il faudra élever perpendiculaire-

152 APPLICATION DE L'ALGÈBRE
 ment au milieu de AB , & si m est moindre que n , dans
 les réductions, & dans les équations réduites n se trou-
 vera en la place de m , & m en la place de n , & le cen-
 tre du cercle sera sur AB prolongée du côté de A .

PROBLÈME INDETERMINE'.

FIG. 73. 3. DEUX lignes GA , HB perpendiculaires l'une à l'autre, & un point fixe D sur AG étant données; il faut trouver dans l'angle GAH un point M par où & par D ayant mené la droite MDB qui rencontre AH en B , le rectangle $MD \times DB$ soit égal au quarré de la ligne donnée DA .

Ayant supposé le Problème résolu, mené du point M sur GA la perpendiculaire MP , & nommé la donnée AD , a ; & les indéterminées DP , x ; PM , y ; à cause du triangle rectangle DPM , MD sera $\sqrt{xx + yy}$; & à cause des triangles semblables PDM , ADB ; $DP(x)$.

$DM(\sqrt{xx + yy}) :: DA(a).DB = \frac{a\sqrt{xx + yy}}{x}$; donc par

la condition du Problème $\frac{axx + ayy}{x} (MD \times DB) = aa$

(DA^2); donc $xx - ax + yy = 0$, qui est une équation au cercle où les inconnues x & y n'ont point leur commencement au centre, parceque xx a un second terme $-ax$; qu'il faut par conséquent faire évanouir; c'est

pourquoi en faisant $x - \frac{1}{2}a = z$, on réduira l'équa-

tion à celle-ci $zz - \frac{1}{4}aa + yy = 0$, ou $yy = \frac{1}{4}aa -$

zz , où les indéterminées y & z , ont leur origine au cen-

tre que l'on trouvera en faisant $DC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$, à

cause de la réduction $x - \frac{1}{2}a = z$; & parceque le ter-

me connu de l'équation est $\frac{1}{4}aa$ dont la racine est $\frac{1}{2}a$

= au demi diamètre du cercle, on décrira du centre C
 par

par D le cercle DMG qui satisfera au Problème.

DÉMONSTRATION.

AYANT abaissé d'un point quelconque M la perpendiculaire PM , par la propriété du cercle, $DP \times PG = PM^2$, ce qui est en termes algebriques (DP étant, x ; & DG , a ;) $ax - xx = yy$, ou $xx - ax + yy = 0$, qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

CONSTRUCTION.

Des Equations ou des lieux à la Parabole.

PROBLÈME INDETERMINE'.

XIX. DEUX lignes paralleles AH , BG dont les extrémités A & B sont fixes étant données de position; il faut trouver entre les deux un point M , par où & par le point A , ayant mené la droite AMD & MP parallele à AB ; BD soit à MP ; comme une ligne donnée m est à AB . FIG. 74.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AB , a ; & les indéterminées AP , x ; PM , y ; les triangles semblables MPA , ABD donneront MP (y).

$PA(x) :: AB(a) . BD = \frac{ax}{y}$, & par les qualitez du

Problème $\frac{ax}{y} . y :: m . a$; donc $\frac{ax}{m} = yy$, qui est une équation à la parabole, où les inconnues x & y ont leur origine au sommet du diametre qui est la ligne AH , suivant ce qui est démontré dans la quatrième & cinquième Section.

Si l'on fait $m . a :: a . \frac{aa}{m} = p$; p sera le parametre du diametre AH , & l'équation sera $px = yy$, en mettant pour $\frac{aa}{m}$ sa valeur p , & l'on décrira par le moyen de cette équation la parabole AM sur le diametre AH dont le parametre est p , comme il est enseigné (art. 10 n°. 11),

si l'angle BAP est droit, ou art. II n°. II, s'il est oblique. Et je dis que tous les points de cette parabole satisfont au Problème.

DEMONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque M , pris sur la parabole, la ligne MP parallèle à BA , l'on aura par la propriété de la parabole le rectangle de l'abscisse $AP \times p = PM^2$, ce qui est en termes algebriques $px = yy$, ou $\frac{axx}{m} = yy$, en remettant pour p sa valeur $\frac{aa}{m}$ qui est l'équation que l'on a construite. C. Q. F. D.

PROBLÈME INDETERMINE.

FIG. 74. 1. AYANT supposé les mêmes choses que dans le Problème précédent, & ayant prolongé PM en E . On demande que le point M soit tel que BD soit à ME ; comme une ligne donnée m à BA .

En laissant aux lignes les mêmes noms qu'on leur a donnez dans le Problème précédent, ME sera $a - y$, & les qualitez du Problème donneront $\frac{ax}{y} \cdot a - y :: m \cdot a$;

donc $\frac{axx}{y} = ma - my$, ou $\frac{axx}{m} = ay - yy$, ou $yy - ay + \frac{axx}{m} = 0$, qui est une équation à la parabole, parcequ'il n'y a qu'un quarré inconnu yy , & que les deux inconnues x & y ne se multiplient point: mais parcequ'elle contient trois termes, le sommet du diametre sur lequel il faut décrire la parabole, n'est point en A ; quoique le point A soit l'origine des inconnues x & y . Il faut donc réduire cette équation, afin de trouver par le moyen des réductions le sommet du diametre sur lequel on doit décrire la parabole qui doit résoudre le Problème. En faisant pour ce sujet $y - \frac{1}{2}a = u$, afin de faire évanouir le second terme ay , l'on réduit l'équation à celle-ci $uu - \frac{1}{4}aa$

$\pm \frac{aax}{m} = 0$, ou $uu = \frac{1}{4} aa - \frac{aax}{m}$: car le quarré uu doit être seul dans un des membres de l'équation, & comme il y a encore trois termes dans cette équation, l'origine des inconnues u & x , n'est point encore au sommet du diametre sur lequel on doit décrire la parabole; il faut donc encore que les deux termes $\frac{1}{4} aa - \frac{aax}{m}$ se réduisent à un seul. Pour ce sujet on cherchera 1^o. une 3^e proportionnelle à m & à a , qui étant nommée b ; l'équation réduite se changera en celle-ci $uu = \frac{1}{4} aa - bx$; puisque $\frac{aa}{m} = b$. 2^o; ayant pris $bc = \frac{1}{4} aa$, l'on aura $uu = bc - bx$, en mettant pour $\frac{1}{4} aa$ sa valeur bc ; & faisant enfin $c - x = z$, l'on aura $uu = bz$, en mettant pour $c - x$ sa valeur z , qui est une équation où les inconnues u & z ont leur origine au sommet du diametre sur lequel il faut décrire la parabole, & dont le parametre est b .

Les réductions & les changemens que l'on vient de faire fournissent la construction qui suit. Il est clair que la parabole doit passer par les points A & B : car si dans l'équation à réduire $yy - ay + \frac{aax}{m} = 0$, l'on fait $y = 0$; les termes où y se rencontre deviendront nuls, & l'on aura $\frac{aax}{m} = 0$, ou $x = 0$, qui montre qu'elle passe par le point A , puisque x & y s'y aneantissent; & si au lieu de $y = 0$, on fait $x = 0$, le terme $\frac{aax}{m}$ se détruira, & l'on aura $yy - ay = 0$, d'où l'on tire $y = a$, ce qui montre que la parabole passe aussi par le point B ; puisqu'en ce cas le point P tombant en A à cause de $x = 0$, le point M tombe en B à cause de $y = a$.

Le point A étant l'origine des inconnues x qui va FIG. 75.

vers H , & y qui va vers B ; à cause de la première réduction $y - \frac{x}{2}a = u$, on divisera AB par le milieu en C , & ayant mené par C la droite CF parallèle à AH , le point C sera l'origine des inconnues u qui va vers A & vers B , & x qui va vers F : & à cause de la seconde réduction $c - x = z$, ayant fait $CF = c$, alors le point F sera l'origine des inconnues z qui va vers C , & u qui demeure parallèle à AB , & le sommet du diamètre BC sur lequel l'on décrira (art. 10. n°. 11, ou art. 11 n°. 11, selon que l'angle CAH ou ACF est droit ou oblique) la parabole AFB , par le moyen de l'équation réduite $uu = bz$, qui satisfera au Problème.

DEMONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris sur la parabole la ligne MI parallèle à BC , l'on aura par la propriété de la parabole $uu = bz$, ou $yy - ay + \frac{aay}{m} = 0$, en remettant pour u , pour z , & pour b , leurs valeurs $y - \frac{1}{2}a$, $c - x$, & $\frac{aa}{m}$, & pour bc sa valeur $\frac{1}{4}aa$, qui est l'équation que l'on a construite. C. Q. F. D.

PROBLÈME INDETERMINE'.

FIG. 76. 2. UNE ligne AB étant donnée de grandeur & de position. Il faut trouver un point M hors de cette ligne; en sorte qu'ayant mené la ligne MP parallèle à une ligne donnée AG , & qui rencontre AB , en P ; le rectangle $AP \times PB$ soit égal au rectangle de PM par une ligne donnée b .

Ayant supposé le Problème résolu, soit divisée AB par le milieu en C , & nommé la donnée AC , ou CB , a ; & les indéterminées CP , x ; PM , y ; AP fera $a + x$, & PB , $a - x$; & l'on aura par les qualitez du Problème $aa - xx = by$, ou $xx = aa - by$, qui est une équation.

tion à la parabole où les indéterminées x & y n'ont point leur origine au sommet du diamètre sur lequel il faut la décrire.

Pour réduire cette équation, je prens $bc = aa$, & l'équation deviendra $xx = bc - by$, en mettant bc pour aa . Et faisant $c - y = u$, & mettant u en la place de $c - y$, l'on aura $xx = bu$, que l'on construira en cette sorte.

Le point C étant l'origine des inconnues x qui va vers B & vers A , & y qui va vers D parallele à AG , à cause de la réduction $c - y = u$, l'on prendra $CD = c$, & le point D sera l'origine des inconnues u qui revient vers C , & x qui est parallele à AB , & le sommet du diamètre DC sur lequel on décrira (art. 10 n° 11, ou art. 11 n° 11) la parabole $ADMB$, par le moyen de l'équation réduite $xx = bu$, qui satisfera au Problème.

D E M O N S T R A T I O N .

IL est clair 1°. que la parabole passe par les points A & B : car si dans l'équation à réduire $xx = aa - by$, on fait $y = 0$, le terme $- by$ deviendra nul, & l'on aura $xx = aa$; donc $x = \pm a = CA$, ou CB .

2°. D'un point quelconque M pris sur la parabole ayant mené MP & MQ paralleles à DC & à CB , l'on aura (art. 10 n° 8) $DQ . DC :: QM^2 . CB^2$, ou en termes algebriques u , ou $c - y . c :: xx . aa$, & partant $aac - aay = cxx$: mais l'on a pris $bc = aa$; l'on a donc $c = \frac{aa}{b}$, & mettant dans l'équation en la place de c fa

valeur $\frac{aa}{b}$, elle deviendra $aa - by = xx$, qui est celle que l'on a construite. $C. Q. F. D.$

PROBLÈME INDETERMINE'.

FIG. 77. 3. **U**N angle GAH, & un point fixe B sur un de ses côtés AH étant donné de position. Si par le point B on mène la droite BC perpendiculaire à AH, & d'un point quelconque P la droite PE parallèle à BC qui renontre AG en E, & que du centre B, & du rayon PE l'on décrive un arc de cercle qui coupe PE en M; & comme l'on peut trouver une infinité de points comme M, il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe que tous les points M forment.

Ayant supposé le Problème résolu, mené BM , & nommé les données AB, a ; BC, b ; & les indéterminées BP, x ; PM, y ; AP sera $a + x$; & les triangles semblables donneront $AB (a) . BC (b) :: AP (a + x)$

. $PE = \frac{ab + bx}{a} = (\text{Const.}) BM$; & à cause du triangle

rectangle BPM , l'on aura $xx + yy = \frac{aabb + 2abbx + bbxx}{aa}$,

ou $aaxx + aayy = aabb + 2abbx + bbxx$, ou en supposant que a surpasse b , $aaxx - bbxx = 2abbx + aabb - aayy$, qui est une équation à l'Ellipse. Si l'on supposoit a moindre que b , l'on auroit $bbxx - aaxx = -2abbx - aabb + aayy$, qui est une équation à l'Hyperbole. Enfin si l'on suppose $a = b$, l'on aura, après avoir mis a à la place de b , & réduit l'équation à l'ordinaire, $yy = 2ax + aa$ qui est une équation à la parabole, dont le sommet n'est point en B à cause qu'elle contient trois termes.

Pour la réduire, on la divisera premièrement par 2, afin que x ne soit accompagnée d'aucune quantité connue dans la réduction, & l'on aura $\frac{1}{2} yy = ax + \frac{1}{2} aa$,

& ayant fait $x + \frac{1}{2} a = z$, l'équation réduite fera $\frac{1}{2} yy$

$= az$, ou $yy = 2az$ en mettant z pour $x + \frac{1}{2} a$. Ce qui donne cette construction,

A cause de la réduction $x + \frac{1}{2} a = z$, on divisera AB par le milieu en D , & le point D sera le sommet de l'axe DH , & la parabole se trouve décrite par la Construction.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené d'un point quelconque M pris sur la parabole la ligne MP perpendiculaire à DH , par la propriété de la parabole, le parametre de l'axe étant (art. 10 n° 7) $2a$, l'on aura $2az = yy$, ou $2ax + aa = yy$, en remettant pour z sa valeur $x + \frac{1}{2} a$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

4. CE Problème pourroit servir de fondement à un Traité des trois Sections coniques; puisque la même équation convient à toutes les trois en faisant seulement BC égale, moindre, ou plus grande que AB , & que c'est aussi la même description pour toutes les trois. Je ne m'en suis néanmoins servi que pour la parabole, tant parce que les descriptions que j'ai données de l'Ellipse, & de l'Hyperbole ne sont pas moins simples, que parce que je n'aurois pû démontrer, comme j'ai fait, d'une manière générale les propriétés de l'Hyperbole par rapport à ses axes, & à tous ses diametres.

5. Il est aisé de voir que B est le foyer de la parabole AM ; A , le point generateur; AF parallele à BC , la ligne generatrice: car l'équation réduite $yy = 2az$ montre que $2a$ est le parametre, & par la construction

$$BD = DA = \frac{1}{2} a. \text{ Et parce que (Hyp.) } BC = AB$$

l'on a aussi $AP = PE = (\text{Const.}) BM = FM$; c'est pourquoi cette description est la même que celle de l'article 10, comme on vient de remarquer.

PROBLÈME INDETERMINE'.

6. *S O I T* une équation locale $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{a^2yy}{bb} - by - bb = 0$, qui appartient à une des quatre courbes du premier genre ; puisque les inconnues x & y n'excedent point le second degré.

Pour ramener cette équation à l'état de quelqu'une de celles des trois Sections précédentes, je fais $x + \frac{ay}{b} = z$, pour faire évanouir le second terme $\frac{2axy}{b}$, & l'équation se change en celle-ci $zz - by - bb = 0$, ou $zz = by + bb$, où l'on voit déjà qu'elle est à la parabole ; puisqu'il n'y a qu'un quarré inconnu zz ; mais les inconnues z & y n'ont point leur origine au sommet du diametre sur lequel il la faut décrire, parcequ'il y a encore trois termes ; c'estpourquoi je fais encore $y + b = u$, & l'équation devient $zz = bu$, qui est semblable à celle de l'art. 10.

FIG. 78. Pour construire cette équation soit A l'origine des inconnues y qui va vers H , & x , qui fait avec AH un angle quelconque, & va vers G ; à cause de la deuxième réduction $y + b = u$, on prolongera AH du côté de A en I , en sorte que $AI = b$, & le point I sera l'origine des inconnues u qui va toujours vers H , & x qui fait toujours le même angle avec IH , & est parallele à AG .

A cause de la premiere réduction $x + \frac{ay}{b} = z$, l'on menera par I la droite IO parallele à AG , & ayant fait $IO = a$; l'on menera de O par A la droite OAK , & le point O fera le sommet du diametre sur lequel il faut décrire la parabole : car si par quelque point B , pris sur AH l'on mene la droite PBM parallele à IO , l'on aura à cause des triangles semblables AIO , ABP , $AI(b) \cdot IO(a) :: AB(y) \cdot BP = \frac{ay}{b}$; & par-

tant

tant $PM = x + \frac{ay}{b} = z$; mais parceque les coordonnées de la parabole sont OP & PM , l'expression de OP doit se trouver dans l'équation réduite aussi-bien que celle de PM , qui est z , & au contraire celle de IB , qui est u ne s'y doit plus rencontrer; parceque (art. 10) une équation à la parabole ne renferme que les expressions de l'abscisse, de l'appliquée, & du parametre. Il faut donc trouver une équation qui renferme l'expression de $IB(u)$ & celle de OP , afin de faire évanouir u de l'équation réduite, & introduire en sa place l'expression de OP . Pour ce sujet, je nomme la donnée OA , c ; & l'indéterminée OP , f ; & les triangles semblables AIO , ABP donneront $AI . AB :: AO . AP$: & componendo $AI . IB :: AO . OP$, ce qui est en termes algebriques $b . u :: c . f$; donc $uc = bf$, & partant $u = \frac{bf}{c}$, & mettant cette valeur de u dans l'équation réduite $zz = bu$, l'on aura $zz = \frac{bbf}{c}$, & si l'on fait $\frac{bb}{c} = f$, l'on aura $zz = ff$, & l'on décrira par l'article 10 n° 11, ou par l'article 11 n° 11, selon que l'angle OPM est droit ou oblique, la parabole OM qui satisfera au Problème.

D E M O N S T R A T I O N .

Ayant mené d'un point quelconque M la droite MP parallele à AG ; OP étant f ; PM , z ; & le parametre f ; l'on aura par la propriété de la parabole $zz = ff$, ou $zz = bu$, en remettant pour f & pour f , leurs valeurs $\frac{bb}{c}$ & $\frac{cu}{b}$, & remettant encore pour zz , & pour u , leurs valeurs $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{a^2yy}{bb}$, & $y + b$, l'on aura $xx + \frac{2axy}{b} + \frac{a^2yy}{bb} = by + bb$, qui est l'équation que l'on a construite. C. Q. F. D.

REMARQUE

7. IL n'y a que la portion de la parabole qui commence en G , & va vers M qui résout le Problème, puisque x & y commencent au point A .

CONSTRUCTION.

Des Equations, ou des lieux à l'Ellipse.

PROBLÈME INDETERMINE.

FIG. 79. XX. UN triangle ABC étant donné, il faut trouver un point M hors de ce triangle, en sorte qu'ayant mené MPF parallèle à AB qui rencontre AC en P , & BC en F , le carré de PM , & le carré de FP soient ensemble égaux au carré de AB .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé les données AC, a ; AB, b ; & les indéterminées AP, x ; PM, y ; CP sera $a - x$, & les triangles semblables CAB, CPF donneront $CA(a) \cdot AB(b) :: CP(a-x) \cdot PF$

$= \frac{ab - bx}{a}$, donc par les qualitez du Problème

$$\frac{aabb - 2abbx + bbxx}{aa} + yy = bb, \text{ ou } xx - 2ax + \frac{aayy}{bb} = 0, \text{ qui}$$

est une équation à l'Ellipse dont le point A qui est l'origine des inconnues x & y , n'est point le centre, à cause qu'il y a dans l'équation un second terme.

Je fais donc pour la réduire $x - a = z$, & l'équation devient par ce moyen $zz - aa + \frac{aayy}{bb} = 0$, ou $\frac{aayy}{bb} = aa - zz$, d'où suit cette construction.

La réduction $x - a = z$, montre que le point C est le centre de l'Ellipse, puisqu'il n'y a point de réduction pour y ; & l'équation réduite, en faisant $y = 0$, donne $z = \pm a$; ce qui fait voir que z va vers A & vers D , & se termine en ces deux points, & que par conséquent AD est un des diamètres: ce que le terme connu aa de l'é-

quation réduite fait aussi connoître : mais parceque le quarré connu aa se trouve encore avec yy ; il suit (art. 12 n°. 9) que bb est le quarré du diametre conjugué au diametre AD ; c'est pourquoi si l'on mene par le centre C la ligne GCH parallele à AB , & qu'on fasse CG , & CH chacune $= AB = b$; GH sera le diametre conjugué au diametre AD , & l'on décrira par l'art. 12 n°. 21, ou art. 13 n°. 37, selon que l'angle BAC , ou ACH est droit, ou oblique, l'Ellipse $AGDH$, qui satisfera au Problème.

DEMONSTRATION.

AYANT mené librement la droite PM parallele à CH , par la propriété de l'Ellipse $AP \times PD. PM^2 :: CA^2 . CG^2$, ce qui est en termes algebriques $2ax - xx . yy :: aa . bb$, d'où l'on tire $xx - 2ax + \frac{aayy}{bb} = 0$. C. Q. F. D.

PROBLÈME INDE'TERMINE'.

1. UN triangle ABC dont les côtez AC , BC sont prolongez vers H & vers G étant donné. Si d'un point quelconque P pris sur la base AB , on élève PEF perpendiculaire à AB , ou parallele à quelque ligne donnée de position. Il faut trouver quelle est la courbe qui divise EF , & ses semblables en M , de maniere que $PE . PM :: PM . PF$. FIG. 80.

Ayant supposé le Problème résolu, mené CD parallele à PM , & nommé les données AB , a ; AD , b ; DC , c ; DB , d ; & les indéterminées AP , x , PE , z , PM , y ; PF , u ; PB sera $a - x$; & les triangles semblables APE , ADC & BDC , BPF donneront $x (AP) . z (PE) :: b (AD) . c (DC)$, d'où l'on tire $bz = cx$; & $d (BD) . c (DC) :: a - x (BP) . u (PF)$, d'où l'on tire $du = ac - cx$; & par les qualitez du Problème, $z (PE) . y (PM) :: y (PM) . u (PF)$, d'où l'on tire $zu = yy$; l'on a donc trois équations, que l'on réduira à une seule, en faisant évanouir z & u : (car il ne faut pas faire évanouir

x & y ; parcequ'elles ont les qualitez requises par la premiere & huitième observation de l'art. 4 qui sont celles qu'il faut le plus exactement suivre dans les Problèmes indéterminez) qui sera $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$; ou $xx - ax + \frac{bdyy}{cc} = 0$, qui est une équation à l'Ellipse, que l'on construira en cette sorte.

Ayant fait $x - \frac{1}{2}a = z$, l'équation se réduira à celle-ci $zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bdyy}{cc} = 0$, ou $\frac{bdyy}{cc} = \frac{1}{4}aa - zz$. Or à cause de la réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, si l'on divise AB par le milieu en O , le point O sera le centre de l'Ellipse, & l'origine des inconnues z qui va vers B & vers A , & se termine en ces deux points (car si dans l'équation réduite on fait $y = 0$, l'on aura $z = \pm \frac{1}{2}a$) & y qui va parallele à BC . Pour avoir l'expression du demi diametre conjugué au diametre AB , on fera $bd \cdot cc :: \frac{1}{4}aa \cdot \frac{acc}{4bd}$, & $\frac{ac}{2\sqrt{bd}}$ fera (art. 12 n°. 11) l'expression cherchée ; prenant donc sur KOL parallele à DC , OK & OL chacune égale à $\frac{ac}{2\sqrt{bd}}$, KL sera le diametre conjugué au diametre AB . L'on décrira l'Ellipse $AMBL$ par l'art. 12 n°. 21, ou art. 13 n°. 37.

DEMONSTRATION.

Ayant mené d'un point quelconque M pris sur l'Ellipse la droite MP parallele à CD , l'on aura par la propriété de l'Ellipse $AP \times PB, PM^2 :: AB^2 \cdot KL^2$. Ce qui est en termes algebriques $aa - xx \cdot yy :: aa \cdot \frac{nacc}{bd}$, d'où l'on tire $xx - ax + \frac{bdyy}{cc} = 0$. C. Q. F. D.

REMARQUES.

2. Si le point *B* étoit infiniment éloigné du point *A*, la ligne *FCB* seroit parallèle à *AB*, & dans l'équation précédente $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$, *a* & *d* deviendroient infiniment grandes par rapport aux autres lettres; de sorte que le terme *xx* seroit nul par rapport à *ax*, *a* seroit = *d*, & l'on auroit cette équation $\frac{ccx}{b} = yy$ qui montre que la courbe *AMC* seroit une parabole.

3. Si le point *B* étoit de l'autre côté de *A* sur le prolongement de *AD*, dans l'équation $ax - xx = \frac{bdyy}{cc}$, *a* & *x* deviendroient négatives, & il faudroit changer les signes des termes où *a*, *d* & *x* ne sont multipliées ni par elles mêmes ni entr'elles, & l'on auroit $ax - xx = -\frac{bdyy}{cc}$, ou $xx - ax = \frac{bdyy}{cc}$, qui montre que la courbe *AMC* seroit alors une Hyperbole.

PROBLÈME INDE'TERMINE.

4. Soit l'équation $xx - \frac{bxy}{a} + cx + \frac{bdyy}{2aa} = 0$, en faisant $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$, l'équation à réduire devient $z^2 - \frac{1}{4}cc + \frac{bcy}{2a} + \frac{bdyy}{4aa} = 0$, ou $yy + \frac{2acy}{b} - \frac{aacc + 4aazx}{bb} = 0$, & faisant encore $y + \frac{ac}{b} = u$, l'on a l'équation réduite $uu - \frac{2aacc + 4aazx}{bb} = 0$, ou $\frac{4aazx}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - uu$ qui est une équation à l'Ellipse.

Pour la construire, soit le point *A* l'origine des incon- nues *y* qui va vers *H*, & *x* qui va vers *G*, & qui font

FIG. 31.

l'angle GAH tel que le demande le Problème d'où l'on suppose que l'équation que l'on construit a été tirée. A cause de la seconde réduction $y + \frac{ac}{b} = u$, l'on prolongera

AH du côté de A , & l'on fera $AI = \frac{ac}{b}$; & le point I

fera l'origine de u qui va toujours vers H , & de x qui demeure parallèle à AG . A cause de la première ré-

duction $x - \frac{by}{2a} + \frac{x}{2}c = z$, l'on menera par I la droi-

te IK parallèle à AG , & ayant fait $IK = \frac{AI \times b}{2a} = \frac{x}{2}c$,

puisque $AI = \frac{ac}{b}$, l'on menera KA indéfiniment prolongée: & parcequ'il y a encore dans la réduction $+$

$\frac{x}{2}c$, ayant pris sur la ligne IK prolongée $KO = \frac{x}{2}c$,

l'on menera OD parallèle à KA , qui rencontrera AH en R ; & le point O sera le centre de l'Ellipse & l'o-

rigine des inconnues u qui est parallèle à AH , & z parallèle à AG : car ayant mené par quelque point B de la ligne AH , la droite $PBCM$ qui rencontre OR en P ,

& KA en C : BC sera $= \frac{by}{2a}$: car $AI : IK :: 2a : b :: AB$

$(y) \cdot BC = \frac{by}{2a}$: & partant $PM(z) = BM - BC +$

$CP = x - \frac{by}{2a} + \frac{x}{2}c$.

Mais parceque les coordonnées de l'Ellipse sont OP & PM , en supposant l'Ellipse décrite, l'expression de OP doit se trouver dans l'équation réduite aussi bien que celle de PM qui est z . Au contraire celle de IB qui est u ne doit plus s'y rencontrer. Il faut donc trouver une équation qui renferme l'expression de IB (u), & celle de OP , afin de faire évanouir u de l'équation réduite, & d'introduire en sa place l'expression de OP . Pour ce sujet; ayant prolongé AG en F , & nommé les données

'AI (Const.) $\frac{ac}{b}$; KA, ou OF, g; & l'inconnue OP, ou KC, f; les triangles semblables AIK, ABC donneront AI . AB :: AK . AC, & componendo IB . AI :: KC, ou OP . KA, ou OF: ce qui est en termes analytiques u .

$\frac{ac}{b} :: f . g$, d'où l'on tire $u = \frac{acf}{bg}$, ou $uu = \frac{aaccff}{bbgg}$, & mettant cette valeur de uu dans l'équation réduite, l'on aura $\frac{4aaxz}{bb} = \frac{2aacc}{bb} - \frac{aaccff}{bbgg}$, ou $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, d'où l'on tire cette Construction. Soit faite OD = $\sqrt{2gg}$; OD fera le demi diamètre de l'Ellipse, & ayant fait $4gg . cc :: 2gg . \frac{2ggcc}{4gg} = \frac{1}{2} cc$, soit prise OQ = $\sqrt{\frac{1}{2} cc}$; OQ fera le demi diamètre conjugué à OD, & l'on décrira (art. 13. n°. 37) l'Ellipse QSD qui rencontrera KA en S, & qui satisfera au Problème.

DEMONSTRATION.

Ayant mené d'un point quelconque M pris sur l'Ellipse entre G & S l'appliquée MP parallèle à OQ. Par la propriété de l'Ellipse $OD^2 - OP^2 . PM^2 :: OD^2 . OQ^2$; ce qui est en termes algebriques $2gg - ff . zz :: 2gg . \frac{1}{2} cc$::

$4gg . cc$, d'où l'on tire $\frac{4ggzz}{cc} = 2gg - ff$, ou $\frac{4aaxz}{bb} =$

$\frac{2aacc}{bb} - uu$, en mettant pour ff sa valeur $\frac{bbgguu}{aacc}$, & rédui-

sant: mais par les deux réductions précédentes l'on a les valeurs de zz & de uu; c'est pourquoi en mettant ces valeurs de zz & de uu dans l'équation précédente, l'on aura, après avoir ôté les fractions, & ce qui se détruit,

$4aaxx - 4abxy + 2bbyy + 4aacx = 0$, ou $xx - \frac{bxy}{a} +$

$cx + \frac{bbyy}{2aa} = 0$, qui est l'équation que l'on a à construire

C. Q. F. D.

REMARQUE.

5. SI l'on mène RN parallèle à AG , la portion GN de l'Ellipse résoudra le Problème si le point N tombe entre G & S : mais s'il tombe entre S & D , ce sera la portion GS : car les inconnues x & y qui sont celles du Problème qu'on vient de construire ont leur origine en A . Et $x - \frac{by}{2a} + \frac{1}{2}c = z$ ne seroit point l'expression de RN , si le point N tomboit entre S & D .

6. Si dans la Construction l'angle OPM s'étoit trouvé droit, & que dans l'équation $\frac{4ggzx}{c^2} = 2gg - \int\int, 2g = c$, le lieu auroit été au cercle. Ce qui est évident; car cette équation seroit devenue $zx = 2gg - \int\int$.

CONSTRUCTION.

Des Equations, ou des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses diametres.

PROBLÈME INDETERMINE.

FIG. 82. XXI. UN angle droit HAG , & un point fixe B étant donné de position sur un Plan. Il faut trouver le point M dans cet angle, d'où ayant mené MF parallèle à AB & MB du point M au point fixe B , MF soit à MB dans la raison donnée de m à n .

Ayant supposé le Problème résolu, l'on menera MP parallèle à AH , & en nommant la donnée AB , a ; & les indéterminées AP , ou FM , x ; PM , ou AF , y ; BP sera $x - a$; & les qualitez du problème donneront $m.n$:

$FM.(x).MB = \frac{nx}{m}$ & à cause du triangle rectangle

BPM , l'on aura $xx - 2ax + aa + yy = \frac{nx}{m}$, ou $mmxx -$

$2mmx + mma + mmy = nmx$, qui est encore une équation générale pour les trois Sections coniques, comme

celle

celle de l'art. 19 n°. 3: car si l'on fait $m = n$, l'on aura $aa - 2ax + yy = 0$, qui est une équation à la parabole; si l'on suppose que m surpasse n , l'on aura $xx - \frac{2mmx + mma + mmy}{nn - mm} = 0$.

Et enfin si l'on suppose que m soit moindre que n , l'on aura $xx + \frac{2mmx - mma - mmy}{nn - mm} = 0$ qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses axes, à cause de l'angle droit BPM , mais parceque xx a un second terme; l'origine des indéterminées x & y n'est point au centre. Pour la ramener à l'état de celle de l'art. 14 n°. 12, l'on fera évanouir le second terme en faisant

$$x + \frac{mma}{nn - mm} = z, \text{ \& l'on aura } zz - \frac{m^2aa}{n^2 - 2mmn + m^2} - \frac{mma - mmy}{nn - mm} = 0, \text{ \& en multipliant le numerateur \&}$$

le dénominateur du terme $-\frac{mma}{nn - mm}$ par $nn - mm$ pour lui donner le même dénominateur que celui de la fraction qui le précède, & ôtant ce qui se détruit l'on aura zz

$$-\frac{mmnna}{n^2 - 2mmn + m^2} = \frac{mmy}{nn + mm}, \text{ où les inconnues } z \text{ \& } y \text{ ont à présent leur origine au centre de l'Hyperbole. Pour le trouver, soit prolongée } AB \text{ du côté de } A \text{ en } C \text{ en sorte que } AC = \frac{mma}{nn - mm} \text{ le point } C \text{ sera le centre cherché. Et ayant fait } CD = \frac{mna}{nn - mm}, \text{ qui est la racine du}$$

terme connu de l'équation, CD sera le demi axe de l'Hyperbole, & D son sommet. Si l'on fait présentement mm .

$$nn - mm :: \frac{mmnna}{n^2 - 2mmn + m^2} \cdot \frac{nna}{nn - mm}; \sqrt{\frac{na}{nn - mm}} \text{ exprimera le demi diametre conjugué au demi diametre } CD; \text{ soit donc menée par le centre } C \text{ la ligne } CK \text{ parallele à } PM \text{ \& égale } \frac{na}{\sqrt{nn - mm}}, \text{ elle sera le demi axe conjugué à } CD. \text{ Il est aisé d'achever (art. 14 n°. 30), \& de décri-}$$

Y

170 APPLICATION DE L'ALGÈBRE
 re par la première Proposition du même article, l'Hyperbole AM qui satisfera au Problème.

DEMONSTRATION.

Ayant mené d'un point quelconque M pris sur l'Hyperbole la droite MP perpendiculaire à CG , l'on aura (art. 14 n°. 13) $CP^2 - CD^2 . PM^2 :: CD^2 . CK^2$: ce qui est en termes algébriques $zz - \frac{mmnnaa}{n^2 - 2mmn + m^2} . yy ::$

$$\frac{mmnnaa}{n^2 - 2mmn + m^2} . \frac{nnaa}{nn - mm} :: \frac{mm}{nn - mm} . 1, \text{ d'où l'on tire après}$$

les réductions $nnzz - mmzz - \frac{mmnnaa}{nn - mm} = mmyy$, ou

$$xx + \frac{2mmx - mma - mmy}{nn - mm} = 0, \text{ en mettant pour } zz \text{ la va-}$$

leur tirée de la réduction $x + \frac{mma}{nn - mm} = z$, & en réduisant l'équation. C. Q. F. D.

PROBLÈME INDE'TERMINE'.

FIG. 83. 1. DEUX lignes AH , BG dont les extrémités A & B sont fixes, étant données; il faut trouver entre ces deux lignes un point M , par où & par le point A , ayant mené la ligne AMD , qui rencontre BG en D ; & la ligne PME parallèle à AB , qui joint les points A & B ; PM soit à ED dans la raison donnée de m à n .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AB , ou PE , a ; & les inconnues AP , x ; & PM , y ; ME sera $a - y$, & les triangles semblables MPA , MED donneront $MP(y) . PA(x) :: ME(a - y) . ED = \frac{ax - xy}{y}$, & les qualitez du Problème donnent $y . \frac{ax - xy}{y}$

:: $m . n$, d'où l'on tire $yy + \frac{mxy - max}{n} = 0$, qui est une équation à l'Hyperbole.

Pour la réduire & pour la construire, je fais $y + \frac{mx}{2n}$
 $= u$, & l'équation devient $uu - \frac{mxx}{4nn} - \frac{max}{n} = 0$, &
 comme cette réduction a fait naître un premier terme
 $\frac{mxx}{4nn}$ dont le second est $\frac{max}{n}$, il faut encore faire évanouir
 $\frac{max}{n}$. Pour ce sujet afin d'avoir xx délivré de toute quan-
 tité donnée, je multiplie toute l'équation par $4nn$, & je
 la divise par mm , ce qui la change en celle-ci $\frac{4nnuu}{mm} =$
 $xx + \frac{4nax}{m}$; & faisant $x + \frac{2na}{m} = z$, l'on a l'équation
 réduite $\frac{4nnuu}{mm} = zz - \frac{4nnaa}{mm}$, d'où l'on tire cette Con-
 struction.

Le point A étant l'origine des inconnues x qui va vers
 H , & y qui va vers B ; à cause de la seconde réduc-
 tion $x + \frac{2na}{m} = z$, soit prolongée PA en K , en sorte que
 $AK = \frac{2na}{m}$; le point K sera l'origine de z qui va toujours
 vers H , & de y qui, ayant mené KO parallèle à AB ,
 va vers O : & à cause de la première réduction $y + \frac{mx}{2n}$
 $= u$; soit prise $KO = \frac{mAK}{2n} = a$, en mettant pour AK
 la valeur $\frac{2na}{m}$, & du point O par A ayant mené OAC
 qui rencontrera MP prolongée en C , MC sera $= y +$
 $\frac{mx}{2n} = z$: car à cause des triangles semblables AKO ,
 APC , l'on aura $AK \left(\frac{2na}{m} \right) \cdot KO (a) :: AP (x) \cdot PC =$
 $\frac{mx}{2n}$; & partant $PM + PC = y + \frac{mx}{2n}$; de sorte que O
 Y ij

est le centre de l'Hyperbole, & l'origine des inconnues z , qui va vers G (car le point O est dans le prolongement de GB à cause de $KO = AB$) & y qui demeure toujours parallèle à AB : Mais les coordonnées de l'Hyperbole sont présentement OC , & CM en supposant l'Hyperbole décrite; c'est pourquoi l'expression de OC se doit trouver dans l'équation réduite aussi-bien que celle de $CM (u)$: au contraire celle de $KP (z)$ ne doit plus s'y rencontrer; il faut donc trouver une équation qui renferme l'expression de $KP (z)$ & de OC , afin de faire évanouir z de l'équation réduite, & d'introduire en sa place celle de OC .

Pour ce sujet, ayant nommé les données AK (Const.) $\frac{2na}{m}$; AO , d ; & l'indéterminée OC , f ; l'on aura à cause des triangles semblables $KAO, PAC, AK.AO :: KP.OC$, ou en termes algébriques $\frac{2na}{m} . d :: z . f$; donc $dz = \frac{2naf}{m}$, ou

$z = \frac{2naf}{md}$, ou $zz = \frac{4nnaaff}{mmda}$; mettant donc dans l'équation réduite en la place de zz sa valeur que l'on vient de

trouver, l'on aura $\frac{4nnuu}{mm} = \frac{4nnaaff}{mmda} - \frac{4nnaa}{mm}$, ou en rédui-

sant, $\frac{dduu}{aa} = ff - dd$, & l'on décrira (art. 14 n^o. 30) par le moyen de cette équation, l'Hyperbole AM qui resoudra le Problème.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque M pris sur l'Hyperbole la ligne MPC parallèle à BA , l'on aura par la propriété de l'Hyperb. $AK^2.KO :: OC^2 - OA^2.CM^2$, ou $dd . aa :: ff - dd . uu$, d'où l'on tire $\frac{dduu}{aa} = ff - dd$, ou $yy +$

$\frac{mxy - max}{n} = 0$, & remettant pour ff , pour uu & pour zz leurs valeurs tirées des équations précédentes, & réduisant. C. Q. F. D.

PROBLÈME INDE'TERMINE'.

2. Il faut trouver dans un triangle donné ABC un point M, Fig. 84, par où ayant mené une ligne DME parallèle à un des côtez AC, & du point A par le même point M, la ligne AMF, qui rencontre BC en F; BF soit à BD dans la raison donnée de m à n .

Ayant supposé le Problème résolu, soit menée MG parallèle à BC, & nommé les données AB, a ; BC, b ; & les inconnues AG, x ; GM, y ; GB sera, $a - x$; & les triangles semblables AGM & ABF, CBA & MGD, donneront $AG(x) \cdot GM(y) :: AB(a) \cdot BF = \frac{ay}{x}$, &

$CB(b) \cdot BA(a) :: MG(y) \cdot GD = \frac{ay}{b}$; donc $BD = a$

$- x + \frac{ay}{b}$, & par les qualitez du Problème, l'on a m .

$n :: \frac{ay}{x} (BF) \cdot a - x + \frac{ay}{b} (BD)$, d'où l'on tire $xx - \frac{axy}{b}$

$- ax + \frac{nay}{m} = 0$, qui est une équation à l'Hyperbole, &

qui montre que la même Hyperbole doit passer par les points A & B: car si l'on fait $x = 0$, l'on aura aussi $y = 0$; d'où il suit que les points G & M se confondent avec le point A, qui par conséquent est un des points de l'Hyperbole; & si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = a$ qui fait connoître que le point G tombant en B, le point M y tombe aussi; & par conséquent le point B est un des points de l'Hyperbole. Pour réduire cette équation, on

fera $x - \frac{ay}{2b} - \frac{1}{2}a = z$, & l'on en tirera $\frac{4bbzx}{aa} = yy +$

$2by - \frac{4nby}{ma} + bb$, & faisant encore $y + b - \frac{2nbb}{mz} = u$,

l'on aura l'équation toute réduite $\frac{4bbzx}{aa} = uu +$

$\frac{4mmab^2 - 4nmb^2}{mmaa}$, qui avec les réductions donnent cette

construction.

Y iij

Ayant mené AK parallèle à BC , A étant l'origine des inconnues x qui va vers B & y qui va vers K ; à cause de la seconde réduction $y + b - \frac{2nbb}{ma} = u$, soit prise AK

$= b - \frac{2nbb}{ma}$; K sera l'origine des inconnues u qui va sur

AK de côté d'autre de K , & x parallèle à AB . Et ayant divisé AB par le milieu en I , & mené IC ; à cause de la première réduction $x - \frac{ay}{2b} - \frac{1}{2}a = z$, soit menée KO

parallèle à AB qui rencontrera IC prolongée s'il est nécessaire en O , le point O sera l'origine des inconnues z qui va de part & d'autre du point O parallèle à AB , & u , qui va de part & d'autre du point O parallèle à BC , ou à AK : car ayant mené AL parallèle à IO qui rencontre KO en L ;

LO sera égale à $AI = \frac{1}{2}a$; & à cause des triangles sem-

blables CBI , AKL , l'on a $CB (b) . BI \left(\frac{1}{2}a \right) :: AK$

$(y) KL = \frac{ay}{2b}$, & partant $KO = \frac{ay}{2b} + \frac{1}{2}a$.

Mais parceque ayant mené MP parallèle à AB , & prolongé GM en S , les coordonnées de l'Hyperbole qui doit être le lieu où se doivent trouver tous les points M , sont presentement OP & PM ; c'est pourquoi il faut introduire dans l'équation réduite l'expression de OP que je nomme f , & faire évanouir celle de SM qui est u . Pour y parvenir, je nomme la donnée CI , d ; & à cause des parallèles BI, PM & OS , l'on a $CB . IC :: MS . OP$ ou $b . d ::$

$u . f$; & partant $u = \frac{bf}{d}$ & $uu = \frac{bbff}{dd}$; mettant donc dans l'é-

quation réduite en la place de uu sa valeur $\frac{bbff}{dd}$ que l'on vient

de trouver, l'on aura $\frac{addxz}{aa} = ff + \frac{mnabdd - annbbdd}{mmaa}$, qui

servira à déterminer les demi diametres conjuguez OR , & OT sur OP & OK , & l'on décrira (art. 14 n°. 30) l'Hy-

perbole *AMB* qui résoudra le Problème.

DÉMONSTRATION.

ELLE est semblable à celle des Propositions précédentes.

CONSTRUCTION.

Des Equations ou des lieux à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

PROBLÈME INDETERMINE'.

XXII. DEUX lignes parallèles *AH, BG*, dont les extrémités *A & B* sont fixes, étant données de position sur un Plan; soit une autre ligne *CD* menée librement perpendiculaire aux parallèles. Il faut trouver sur *CD* le point *M*, en sorte que ayant mené des points *A & B* les droites *AM, & BM*, l'angle *AMC* soit égal à l'angle *BMD* dans toutes les positions de *CD* parallèle à elle-même. FIG. 85.

Ayant supposé le Problème résolu, soit menée *BE* parallèle à *CD*, & nommé les données *BE*, ou *DC*, *a*; *AE*, *b*; & les indéterminées *BD*, ou *EC*, *x*; *DM*, *y*; *AC* sera *b + x*; & *CM*, *a - y*. Puisque par la construction les angles *ACM, BDM* sont droits, & par l'Hypothèse, l'angle *AMC* égal à l'angle *BMD*, les triangles *ACM, BDM* seront semblables; c'est pourquoi l'on aura $AC \cdot CM :: BD \cdot DM$, ou en termes algébriques,

$$b + x \cdot a - y :: x \cdot y; \text{ donc } by + xy = ax - xy, \text{ ou } \frac{1}{2}by +$$

$xy = \frac{1}{2}ax$ (en divisant par 2. pour délivrer le produit des inconnues de toute quantité connue) qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes, puisque aucune des deux inconnues, n'est élevée au carré, & qu'elles sont multipliées l'une par l'autre comme dans celle de l'art. 14 n° 4. Mais parceque cette équation contient trois termes, il suit (art. 14 n° 4) que le point *B*

qui est l'origine des inconnues x & y , n'est point le sommet de l'angle des asymptotes. Pour le trouver & déterminer la position des asymptotes, il faut réduire l'équation en changeant les produits composez en produits

simples. Faisant donc $\frac{x}{2} b + x = z$, l'on aura $x = z -$

$\frac{x}{2} b$, & mettant dans l'équation en la place de x sa va-

leur $z - \frac{x}{2} b$, l'on en tirera $\frac{x}{2} az - yz = \frac{1}{4} ab$, & fai-

sant encore $\frac{x}{2} a - y = \frac{1}{2} z$, l'on aura $y = \frac{x}{2} a - \frac{1}{2} z$, &

mettant cette valeur de y dans l'équation précédente,

l'on aura $uz = \frac{1}{4} ab$, où les inconnues u & z , ont (art.

14) leur origine au sommet de l'angle des asymptotes.

Les deux réductions précédentes, & l'équation réduite fournissent cette construction.

A cause de la première réduction $x + \frac{x}{2} b = z$, on

prolongera DB en I en sorte que $BI = \frac{x}{2} AE = \frac{x}{2} b$,

& ayant mené IK parallèle à BE , le point I fera l'origine des inconnues z qui va (art. 16 n° 1) vers G , & y

qui va vers K . A cause de la seconde réduction $\frac{x}{2} a - y$

$= u$, on prendra $AK = \frac{x}{2} BE = \frac{x}{2} a$, & ayant mené

KO parallèle à AH , ou à BG , le point K fera l'origine

des inconnues z qui va vers O , & u qui va (art. 16 n° 4)

vers I , & le sommet de l'angle des asymptotes KI &

KO , puisque l'équation $uz = \frac{1}{4} ab$ n'a que deux ter-

mes; comme celle de l'art. 14. On voit par l'équation

$uz = \frac{1}{4} ab$, que l'Hyperbole doit passer par le point B ,

puisque

puisque $\frac{1}{4} ab \Rightarrow \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b = KI \times IB$. On décrira donc (art. 14) par le point B , entre les asymptotes KO , KI , l'Hyperbole BM qui satisfera au Problème.

DEMONSTRATION.

AYANT mené par un point quelconque M pris sur l'Hyperbole, les lignes CMD & MP parallèles à BE & à KO ; l'on aura (art. 14) . $KI \times IB = KP \times PM$, ou en termes algebriques, $uz = \frac{1}{4} ab$, ou $\frac{1}{2} by + xy = \frac{1}{2} ax$, en remettant pour z & pour u leurs valeurs tirées des réductions. *C. Q. F. D.*

1. Si dans cette équation on fait $b = 0$, le point A se confondra avec le point E , & l'on aura $y = \frac{1}{2} a$, qui est une équation à la ligne droite, & qui montre que le point M se trouvera sur la ligne KO qui partage EB , & CD par le milieu.

PROBLÈME INDE'TERMINE'.

3. UN angle GAH , & un point C , étant donnez de position sur un Plan. Si l'on mene du point C une infinité de lignes droites comme CDB , qui rencontrent les lignes AG , AH aux points D & B , & que l'on prenne sur chaque CDB un point M , en sorte que CM soit toujours à DB dans la raison donnée de m à n . Il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe qui passe par tous les points M . FIG. 86.

Ayant supposé le Problème résolu, on menera par le point donné C & par le cherché M , les lignes CI , MK parallèles à AH , qui rencontreront GA prolongée en I & en K : & ayant nommé les données AI , a ; IC , b ; & les inconnues IK , x ; KM , y ; AK sera $x - a$ & les qualitez du Problème donneront $m . n :: IK (x) . AB = \frac{nx}{m}$; car à cause des paralleles, $IK . AB :: CM . DB$;

Z

donc $KB = x - a + \frac{nx}{m}$, & $IB = a + \frac{nx}{m}$; & à cause des triangles semblables CIB , MKB , l'on aura $b(IC) \cdot a + \frac{nx}{m}(IB) :: y(KM) \cdot x - a + \frac{nx}{m}(KB)$; d'où l'on tire

$$- \frac{mab + mbx + nbx}{n} = \frac{may}{n} + xy, \text{ qui est une équation à l'Hyperbole entre ses asymptotes, qu'il faut réduire pour en déterminer la position. Faisant donc } \frac{ma}{n} + x = z, \text{ l'on a}$$

$$x = z - \frac{ma}{n}; \text{ \& mettant cette valeur de } x \text{ dans l'équation, l'on aura, après avoir ôté ce qui se détruit, en transposant, } \frac{mmab}{nn} = zy + \frac{mbz}{n} - bz;$$

& faisant encore $y + \frac{mb}{n} - b = u$, l'on aura $\frac{mmab}{nn} = zu$, où les inconnues u & z ont leur origine au sommet de l'angle des asymptotes. L'équation réduite & les réductions fournissent la construction suivante.

A cause de la première réduction $\frac{ma}{n} + x = z$, l'on prolongera AI en O , en sorte que $IO = \frac{ma}{n}$, & l'on mènera OQ parallèle à IC ; à cause de la seconde réduction $y + \frac{mb}{n} - b = u$, en supposant que m surpasse n , l'on prolongera OQ du côté de O en R , en sorte que $OR = \frac{mb}{n} - b$; & ayant mené RS parallèle à IB , les lignes RQ , RS seront les asymptotes, & R , l'origine des inconnues z qui va vers S , & u qui va vers Q . Si l'on prolonge CI en F , FC fera (const.) $\frac{mb}{n} - b + b = \frac{mb}{n}$, & OI ou RF étant (const.) $= \frac{ma}{n}$; l'on aura $RF \times FC = \frac{mmab}{nn}$; c'est pourquoi l'Hyperbole qui satisfait au Problème passera par le

point C. On la décrira par l'article 14.

DEMONSTRATION.

AYANT mené d'un point quelconque *M* pris sur l'Hyperbole, la ligne *MKP* parallèle à *KQ*, l'on aura par la propriété de l'Hyperbole $RP \times PM = RF \times FC$, ce qui est en termes algebriques $uz = \frac{mmab}{nn}$, ou $\frac{mab - mbx + nbx}{n}$

$= \frac{may}{n} + xy$, en remettant pour *z* & pour *u* leurs valeurs tirées des réductions. *C. Q. F. D.*

3. Si $m = n$, la ligne *RS* se confondroit avec *OB*, & *IO* seroit égale à *IA*; car l'équation à réduire deviendroit $ab = ay + xy$, & la premiere réduction seroit $a + x = z$, & il n'y en auroit point de seconde.

PROBLÈME INDETERMINE.

4. DEUX lignes droites *AG, BH*, dont les extremités *A* & *B* sont fixes, & qui étant prolongées concourent en un point *C*, étant données de position. Soit une autre ligne *DE* menée librement de l'une à l'autre parallèle à une ligne donnée de position. Il faut déterminer sur *DE*, le point *M*, en sorte qu'ayant mené *AM* & *BM*, l'angle *DAM* soit toujours égal à l'angle *EBM*. FIG. 37;

Ayant supposé le Problème résolu, on menera *BK* parallèle à *DE*, & ayant divisé l'angle *ACB* en deux également par la ligne *CO*, on menera par les points *A* & *B* les lignes *AF* & *BI* parallèles à *CO*, qui rencontreront *DE* en *F* & en *I*, & *KB* en *L*. Ces parallèles seront données de position, & *KL, LB* ou *FI* & *AL* seront données de grandeur. Or puisque par la const. les angles *DAF, EBI* sont égaux, le Problème se réduit à trouver sur *FI* le point *M*, en sorte que l'angle *FAM* soit égal à l'angle *IBM*. Pour en venir à bout, soient menées *FP* qui fasse avec *AF* l'angle $AFP = AFD$, ou *BIM*, & qui rencontre *BI* en *P*, & *MN* parallèle à *FB*. Il est clair que les triangles *FIP, MNI* seront isosceles :

Z ij

car les angles $AFD + AFM = 2$ droits $=$ (const.) $AFP + AFM = AFM + MFP + FIP = MFP + FIP + IPF$ donc $AFM = IPF = FIP$. Et parceque le triangle FIP demeure toujours le même, puisque la ligne FI demeure toujours parallele à elle-même, ses côtes seront donnez de grandeur; & les triangles AFM , BNM seront semblables.

Nommant donc les données LB , ou FI , a ; AL , b ; IP , c ; & les inconnues FM , x ; LF , ou BI , y ; MI ou MN sera $a - x$, & AF , $b + y$; & les triangles semblables FIP , MIN donneront $FI (a) \cdot IP (c) :: MI$.

$(a - x) \cdot IN = \frac{ac - cx}{a}$; donc $BN = y + \frac{ac - cx}{a}$; & à cause des triangles semblables, $AF \cdot FM :: BN \cdot NM$,

ou en termes algebriques, $b + y \cdot x :: y + \frac{ac - cx}{a} \cdot a - x$;

d'où l'on tire $aab + aay - abx - 2axy = acx - cxx$, qui est une équation à l'Hyperbole, que l'on peut regarder, ou par rapport à ses diametres, ou par rapport à ses asymptotes: mais comme on en a construit de semblables dans l'article précédent, en réduisant les équations aux diametres, on construira celle-ci en la réduisant aux asymptotes selon l'article 15 n°. 14. L'on a en transposant

& divisant par $2a$, $\frac{aab + cxx - abx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2}ay$, &

faisant $x - \frac{1}{2}a = z$, l'équation se réduit à celle-ci

$\frac{1}{2}aab + czx - \frac{1}{4}aac - abz = yz$, ou $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac =$

$yz + \frac{1}{2}bz - \frac{czx}{2a}$, en supposant que b surpasse $\frac{1}{2}c$; &

faisant encore $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$, l'on aura l'équation ré-

duite $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = uz$, qui appartient à l'Hyperbole

par rapport à ses asymptotes, & où les inconnues u & z ont leur origine au sommet de leur angle. Les réductions

& l'équation réduite donnent cette construction.

Le point Z étant l'origine des inconnus x qui va vers B , & y qui va vers F ; à cause de la première réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, on divisera ZB par le milieu en R , & le point R fera l'origine de z qui va vers B , & y qui va vers Q , ayant mené RQ parallèle à BP ; à cause de la seconde réduction $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$, on prolongera RQ en S , en sorte que $RS = \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}LA$, & ayant mené ST parallèle à RB , le point S fera l'origine des inconnues z qui va vers T , & u qui va vers Q , & le sommet de l'angle des asymptotes qui seroient SQ & ST , si la seconde réduction étoit $y + \frac{1}{2}b = u$: mais elle est $y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a} = u$; c'est pourquoi soit prolongée ZB du côté de B , qui rencontrera ST en V , & ayant fait $VY = \frac{1}{4}c = \frac{1}{4}IP$, soit menée ZY , & du point M la ligne MX parallèle à ZB , qui rencontrera ST en X , & ZY en Z , & ZX fera $\frac{cz}{2a}$: car $ZV \left(\frac{1}{2}a \right) VY \left(\frac{1}{4}c \right) :: ZX(z) \cdot XZ = \frac{cz}{2a}$; & partant $MZ(u) = y + \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a}$, & $ZY = \frac{1}{2}b - \frac{cz}{2a}$, & alors les lignes SQ & ZY seront les asymptotes; & par conséquent SZ & ZM , les coordonnées.

Il n'est pas cependant nécessaire de faire évanouir l'expression de $ZX = z$ de l'équation réduite, pour introduire en sa place celle de SZ : car 1^o, Soit qu'on le fasse ou non, on trouvera par le moyen de l'équation réduite, que l'Hyperbole doit toujours passer par le même point: comme en ce cas, où l'équation réduite est $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac$

$= uz$; le terme connu $\frac{1}{4}ab - \frac{1}{8}ac = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c$

Z. iij

$\times \frac{1}{2} a = BY \times SV$, fait connoître (art. 14. n^o. 12)
 que l'Hyperbole doit passer par le point B ; & si l'on nom-
 me SY , d ; & SZ , f ; pour introduire l'expression SZ dans
 l'équation réduite en la place de celle de SX , l'on aura
 à cause des triangles semblables SVY , SXZ , $SV \cdot SY ::$
 $SX \cdot SZ$, ou en termes algebriques $\frac{1}{2} a \cdot d :: z \cdot f$, d'ou
 l'on tire $z = \frac{af}{2d}$, & mettant dans l'équation réduite $\frac{1}{4} ab$
 $-\frac{1}{8} ac = uz$, en la place de z sa valeur $\frac{af}{2d}$, l'on aura
 $\frac{1}{2} bd - \frac{1}{4} cd = fu$, dont le terme connu $\frac{1}{2} bd - \frac{1}{4} cd$
 $= \frac{1}{2} b - \frac{1}{4} c \times d = BY \times SY$, montre comme aupa-
 ravant, que l'Hyperbole doit passer par le point B . Ce
 que l'on connoît aussi par l'équation à réduire $aab + aay$
 $- abx - 2axy = acx - cxx$: car faisant $x = a$, afin
 que le point M tombe en B , l'on aura $aab + aay - aab$
 $- 2aay = aac - aac$, d'où l'on tire $y = 0$; d'où il
 suit que l'Hyperbole passe par le point B , puisque BI s'y
 anéantit.

2^o. Le rectangle $SV \times BY$, ou $RB \times BY$ étant égal à SQ
 $\times SX$, le rectangle $SY \times BY$ fera (art. 14 n^o 6) égal
 au rectangle $SQ \times SZ$; d'où l'on voit qu'il est en quelque
 façon plus simple de réduire ces sortes d'équations aux
 asymptotes de l'Hyperbole que de les réduire aux dia-
 metres. Si donc l'on décrit par le point B entre les
 asymptotes SQ , SY l'Hyperbole BM , elle satisfera au
 Problème.

DÉMONSTRATION.

A Y A N T mené d'un point quelconque M pris sur l'Hy-
 perbole la droite MZ parallèle à QS ; par la propriété
 de l'Hyperbole (art. 14 n^o 6), l'on a $SV \times BY = SX$
 $\times MZ$, ou en termes algebriques $\frac{1}{4} ab - \frac{1}{8} ac =$

z , d'où l'on tire $aab + cxx - acx - abx = 2axy - aay$, en remettant pour u & pour z , leurs valeurs. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

5. Si les paralleles AF , BI étoient perpendiculaires à DE , les points P & N se confondroient avec le point I , & $IP = c$ deviendrait nulle ou $= 0$; c'est pourquoi il faudroit effacer tous les termes où c se trouve dans l'équation à réduire $aab + cxx - acx - abx = 2axy - aay$, & l'on auroit, $ab - bx = 2xy - ay$, que l'on construïroit comme celle du premier Problème de cet article.

COROLLAIRE II.

6. Si outre cela le point A tomboit en K , $AL = b$ deviendrait nulle, & l'on auroit $x = \frac{1}{2} a$, en effaçant tous les termes où b se rencontre dans l'équation $ab - bx = 2xy - ay$, & le point M se trouveroit dans la ligne droite RQ menée par le milieu de KB parallele à IB .

COROLLAIRE III.

7. Les choses étant supposées comme dans l'énoncé du Problème n°. 4. Si $2AL = IP$, ou $2b = c$ dans l'équation réduite $\frac{1}{4} ab - \frac{1}{8} ac = zu$, l'on aura $\frac{1}{4} ab = \frac{1}{8} ac$, & partant $zu = 0$; d'où il suit qu'en ce cas l'Hyperbole se confond avec ses asymptotes, & que par conséquent le point M se trouvera dans la ligne RQ qui est une des asymptotes. En effet, en ce cas l'équation à réduire devient $aab + 2bxx - 3abx - 2axy + aay = 0$, en mettant $2b$ en la place de c , qui étant divisée par $2x - a = 0$, il vient $bx - ab - ay = 0$, & l'équation $2x - a = 0$, donne $x = \frac{1}{2} a$, qui montre que le point

M se trouve dans la ligne RQ menée par le milieu de LB parallèle à AL .

COROLLAIRE IV.

8. ENFIN si $2AL$ est moindre que IP , ou que le point A , se confonde avec le point K , ou qu'il se trouve au dessous de K , l'Hyperbole se trouvera de l'autre côté de RQ , & passera par le point A : car dans l'équation réduite $\frac{x}{4} ab - \frac{x}{8} ac = ux$, $\frac{x}{8} ac$ surpassera $\frac{x}{4} ab$ dans le premier cas; $\frac{x}{4} ab$ sera nulle ou $= 0$ dans le second; & dans le troisième, b deviendra négative de positive qu'elle étoit. Ainsi la quantité $\frac{x}{4} ab - \frac{x}{8} ac$ sera toujours négative, & partant l'Hyperbole se trouvera de l'autre côté de RQ .

REMARQUES.

9. LORSQU'ON veut réduire ces sortes d'équations à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes, il faut observer 1°. Que si la lettre inconnue qui n'est point quarrée dans l'équation, se trouve multipliée par une quantité connue dans quelqu'un de ses termes, autre que dans celui où elle se trouve multipliée par l'inconnue qui est quarrée, il faut mettre tous les termes où l'inconnue qui n'est point quarrée se trouve dans un des membres de l'équation, & tous les autres termes dans l'autre, & faire la première réduction sur le membre où l'inconnue qui n'est point quarrée se trouve.

2°. Dans la seconde réduction (qui seroit la seule, si la lettre inconnue qui n'est point quarrée ne se trouvoit point seule dans quelque terme de l'équation) la lettre inconnue qui n'est point quarrée doit toujours être positive.

3°. Dans l'une & l'autre réduction, l'inconnue qui n'est point quarrée, doit toujours être délivrée de toute quantité connue.

4°.

4^o. Quand on ne veut point se donner la peine de faire toutes ces réflexions, il n'y a qu'à réduire ces équations à l'Hyperbole, en les regardant par rapport à ses diametres, où il n'y a aucune précaution à prendre. Il faut éclaircir ceci par un exemple.

E X E M P L E

10. S O I T l'équation $\frac{aab + cxx - abx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2} ay$,

qui est celle que l'on vient de construire. Si on suppose que le point *A* tombe en *K*, $AL = b$ deviendra nulle ou $= 0$; c'est pourquoi en effaçant tous les termes où *b*

se rencontre, l'on aura $\frac{cxx - acx}{2a} = xy - \frac{1}{2} ay$ que l'on

se propose de réduire à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes, & dont les termes sont disposez dans l'un & l'autre membre de l'équation selon ce qui est dit dans le premier cas de la remarque précédente.

Faisant donc $x - \frac{1}{2} a = z$, l'on réduira l'équation à

celle-ci $czx - 2ayz = \frac{1}{4} aac$, ou $\frac{czx}{2a} - yz = \frac{1}{8} ac$. Il

faudroit pour faire la seconde réduction prendre $\frac{cx}{2a} - y$

$= u$; mais parceque l'inconnue *y* qui n'est point quar-
rée dans l'équation à réduire se trouve negative dans cette seconde réduction, & qu'elle y doit être positive, les réductions que l'on vient de faire ne serviront de rien. Il faut donc changer les signes de tous les termes de l'é-

quation pour la réduire de nouveau, & l'on aura $\frac{acx - cxx}{2a}$

$= \frac{1}{2} ay - xy$; & en faisant $\frac{1}{2} a - x = z$, l'on rédui-

ra l'équation à celle-ci $\frac{1}{8} ac = zy + \frac{czz}{2a}$, & faisant *y*

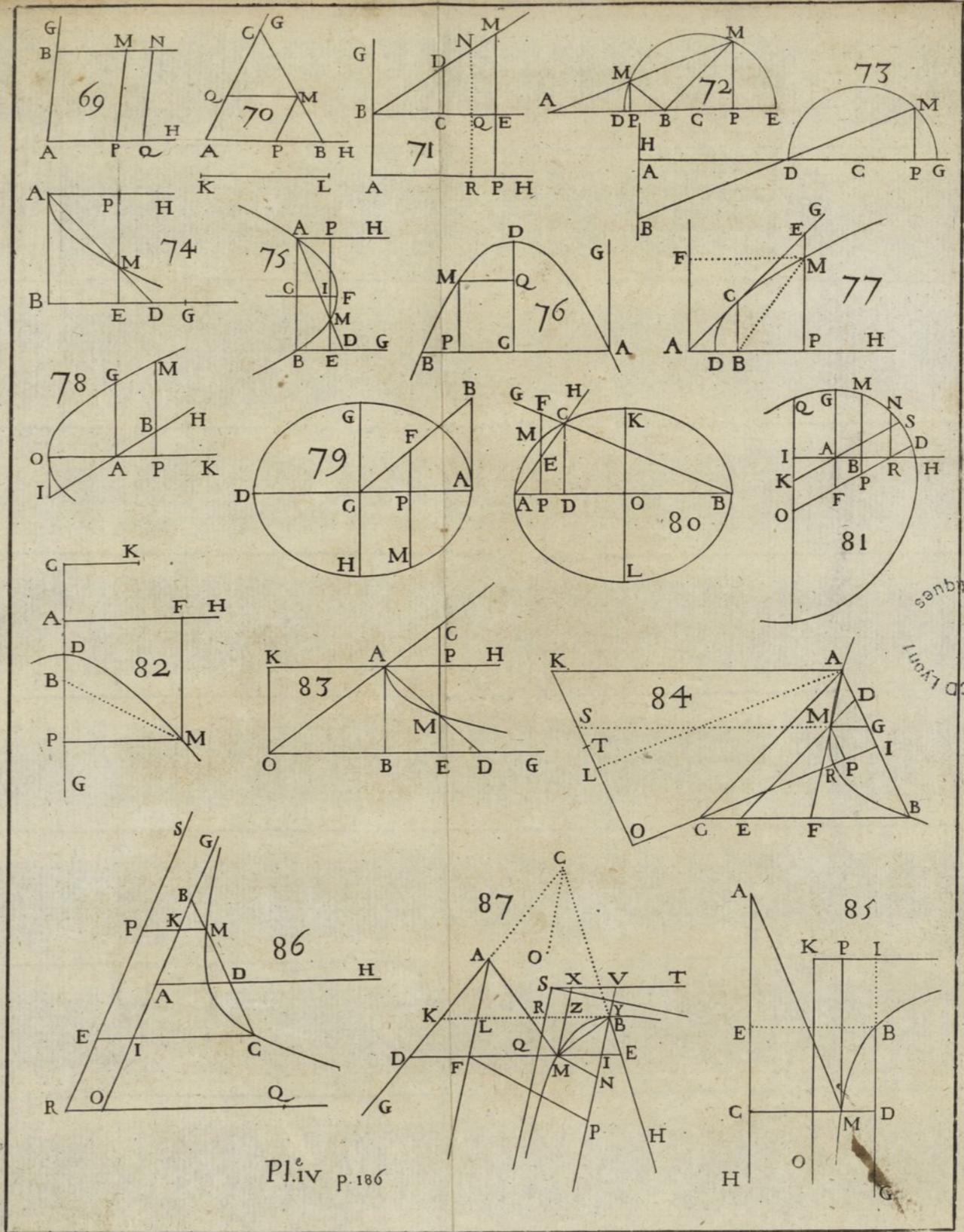
$+ \frac{cz}{2a} = u$, l'on aura $\frac{1}{8} ac = zu$. Les réductions & l'é-

quation réduite serviront à décrire l'Hyperbole, qui passe-

A a

ra par le point K ou A qui (Hyp.) ne font qu'un même point. On voit encore par l'équation à réduire que l'Hyp. doit passer par le point K : car si l'on fait $x = 0$, l'on aura aussi $y = 0$, d'où il suit que les coordonnées s'aneantissent au point K .





Pl. iv p. 186

SCD LYON 1



Faint, illegible text or markings in the upper right corner of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

Faint, illegible text or markings located near the bottom center of the page.

SECTION IX.

Où l'on donne la Méthode de construire les Problèmes Solides déterminez, par le moyen de deux équations locales, ou indéterminées, lorsque l'une des deux se rapporte au cercle, ou y peut être ramenée.

METHODE.

XXIII. **L**es inconnues de ces deux équations étant les mêmes, elles auront leur origine en un même point; & ayant construit ces deux équations l'une après l'autre par les regles de la Section précédente, les points où les courbes auxquelles elles appartiennent se couperont, résoudront les Problèmes, comme on va voir par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Problème Solide.

I. **U**N demi cercle AMB dont le diamètre est AB , & le centre C , & une ligne GH perpendiculaire à AB , étant donnez de position. Il faut trouver sur la circonférence le point M , par où ayant mené du centre C , la droite CME , qui rencontre GH en E , & par le même point M , la droite MH parallèle à AB , qui rencontre la même GH en H ; HE soit égale au demi diamètre CB du cercle donné, ou à une autre ligne donnée. FIG. 88.

Ayant supposé le Problème résolu, on abaissera du point M sur AB la perpendiculaire MP ; & ayant nommé les données CB , ou CM , ou (Hyp.) HE , a ;

A a ij

BG, b ; & les indéterminées CP, x ; PM, y ; PG , ou MH fera $a + b - x$, & les triangles semblables CPM, MHE , donneront $x, (CP) \cdot y (PM) :: a + b - x (MH) \cdot (HE)$, d'où l'on tire $ax = ay + by - xy$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes. Et à cause du triangle rectangle CPM , l'on aura $xx + yy = aa$ qui est une équation au cercle.

Si l'on fait présentement évanouir l'inconnue y , l'on aura après avoir ordonné l'équation,

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + aaxx + 2a^3x - a^4 \\ - 2b^2 + 2ab + 2aab - 2a^3b = 0 \\ + bb^2 \qquad \qquad - aabb \end{aligned}$$

Et si l'on fait évanouir x , (car il est à propos de faire évanouir les deux inconnues l'une après l'autre, pour voir si d'une manière l'équation qui en résulte n'est pas plus simple que celle qui résulte de l'autre) l'on aura.

$$\begin{aligned} y^4 + 2ay^3 + aayy - 2a^3y - a^4 = 0 \\ + 2ab \\ + bb^2 \end{aligned}$$

qui paroît plus simple que la précédente. Mais comme ces deux équations sont du quatrième degré, & qu'on ne peut, ni par la division, ni par la transformation, les réduire à une équation du second; il suit que le Problème est solide, & parceque l'une des deux équations indéterminées appartient au cercle, on le construira par leur moyen en cette sorte.

Il est clair que l'équation $xx + yy = aa$, appartient au cercle donné AMB ; c'est pourquoi il n'y a qu'à construire l'équation à l'Hyperbole $ax = ay + by - xy$; faisant donc pour la réduire $a + b - x = z$, l'on aura $x = a + b - z$; & mettant cette valeur de x dans l'équation, elle deviendra $aa + ab - az = yz$, ou $aa + ab = yz + az$; & faisant encore $y + a = u$, l'on aura l'équation réduite $aa + ab = uz$, qui fournit avec les réductions cette construction.

Le point C étant l'origine des inconnues x qui va vers G , & y parallèle à GH ; à cause de la première rédu-

tion $a + b - x = z$, le point G sera (art. 16 n° 4) l'origine de z qui revient vers C . A cause de la seconde réduction $y + a = u$, on prolongera HG , en O , & ayant fait $GO = a = CB$; le point O sera l'origine des inconnues z qui va vers L parallèle à GC , & u qui va vers H , & le sommet de l'angle des asymptotes, qui seront OL & OH . Et à cause de l'équation réduite $aa + ab = uz$, dont la quantité connue $aa + ab = a + b \times a = CG \times CB = (\text{Const.}) CG \times GO$, l'on décrira (art. 14) par le centre C du cercle AMB , l'Hyperbole CM qui coupera le cercle au point cherché M .

DÉMONSTRATION.

AVANT prolongé MP jusqu'à l'asymptote OL en K , & mené CL parallèle à PK . Par la propriété des asymptotes (art. 14 n° 1) $OL \times LC = OH \times HM$; donc $CP \times PK = PM \times MH$; donc $CP \cdot PM :: MH \cdot PK$. Mais à cause des triangles semblables CPM , MHE , $CP \cdot PM :: MH \cdot HE$; donc $MH \cdot PK :: MH \cdot HE$; & partant $PK (= GO = (\text{Const.}) CB) = HE$. C. Q. F. D.

EXEMPLE II.

Problème Solide.

2. DIVISER un arc de cercle donné BDC , dont le centre est A , & la corde BC , en trois parties égales BD , DF , FC . FIG. 39.

Ayant supposé le Problème résolu, les cordes BD , DF , FC seront égales; celle du milieu DF sera parallèle à DC ; le rayon AE , perpendiculaire à BC sera aussi perpendiculaire à DE , & les coupera toutes deux par le milieu en H & en G , & la partie AH comprise entre le centre A , & la corde BC , sera donnée de grandeur, & de position: mais AG & GD ou GF seront indéterminées. Si l'on mène encore les deux rayons AD , AF , qui rencontrent BC en I & en K ; HI sera $= HK$, & les triangles BDI , CFK seront égaux, semblables, & isof-

celes ; puisque par l'Hypothese l'angle $IDB = IDF = AIK = BID$. Par la même raison l'angle $KFC = KFD = IDF = AKI = CKF$; & qu'outre cela $BD = CF$.

Nommant donc les données AE , ou AD , ou AF , a ; HB , ou HC , b ; AH , c ; & les inconnues AG , x ; GD ou GF , y ; DF , ou DB , ou BI sera, $2y$; & partant HI , $b - 2y$.

A cause des triangles semblables $AGD . AHI$, l'on aura $x (AG) . y (GD) :: c (AH) . b - 2y (HI)$, d'où l'on tire $bx - 2xy = cy$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes ; & à cause du triangle rectangle AGD , l'on aura $xx + yy = aa$, qui est une équation au cercle du Problème BDC .

Si l'on fait presentement évanouir une des deux inconnues renfermées dans les deux équations indéterminées que l'on vient de trouver, l'on aura une équation du quatrième degré qui ne peut être réduite à une équation du second, d'où l'on doit conclure que le Problème est solide ; ainsi on le peut construire par le moyen des deux mêmes équations indéterminées. Mais l'équation au cercle se trouve construite, puisqu'elle se rapporte au cercle du Problème BDC . c'est pourquoi il n'y a qu'à construire l'équation à l'Hyperbole, qui étant réduite donne avec ses réductions cette construction.

Soit prolongée AH en L , en sorte que $AL = \frac{1}{2}AH$, & menée par L une parallèle à BC , sur laquelle ayant pris $LO = \frac{1}{2}HB$, l'on menera par O la droite OM parallèle à AG , qui rencontrera HB en X . L'Hyperbole AD décrite par le centre A entre les asymptotes OL , OM , coupera l'arc BDC au point cherché D ; de sorte que si l'on mene DF parallèle à BC , les points D & F diviseront l'arc BDC en trois parties égales BD , DF , FC .

DÉMONSTRATION.

AYANT mené par le point D , où l'Hyperbole AD coupe l'arc BDC , la droite DN parallèle à l'asymptote OM , qui rencontrera HB en V , & LO en N , & par le centre A , le diametre gAf parallèle à l'asymptote OL , qui rencontrera OM en P , & ND en S . L'on aura à cause des asymptotes OL, OD ; $DN \times NO = AL \times LO$; donc $SP \times SD = SA \times AL$; donc $DS . SA :: AL . SP$: mais les triangles semblables DSA, AHI donnent $DS . SA :: AH, HI$; donc $AL . SP :: AH . HI$. Or (const.) $AH = 2AL$; donc $HI = 2SP$; & partant HV , ou $GD = 2SP + IV$, & $DF = 4SP + 2IV$: mais $HX (= HV + SP) = 3SP + IV$; c'est pourquoi $BX = (\text{const.}) HX = 3SP + IV$; & par conséquent $BX + XI$, ou $BI = 4SP + 2IV$; donc $BI = DF = KC$. Mais les triangles semblables AKI, AFD donnent $AK . KI :: AF . FD$, ou (ayant mené AB, AC) $AK . KI :: AB . BI$; d'où il suit que l'angle $BAD = CAF = DAF$. C. Q. F. D.

Si la corde BC passoit par le centre A , & étoit confondue avec le diametre gAf , l'arc BC seroit un demi cercle, & la perpendiculaire $AH = c$, seroit nulle ou $= 0$; c'est pourquoi, en effaçant dans l'équation à l'Hyperbole, les termes où c se rencontre, l'on auroit $y = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} Ag$; d'où il suit qu'ayant divisé Ag par le milieu en R , mené RT perpendiculaire à Ag qui coupera le demi cercle en T , & TZ parallèle à gf , les arcs gT, TZ , & Zf seront égaux. Ce qui est évident.

E X E M P L E III

Problème Solide.

3. TROUVER deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données KL, MN . FIG. 90.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé les don-

nées KL , a ; MN , b ; & les inconnues x & y ; l'on aura suivant les termes de la question $a \cdot x :: x \cdot y$, & $x \cdot y :: y \cdot b$, d'où l'on tire $ay = xx$, & $bx = yy$, qui sont deux équations à la parabole; & faisant évanouir l'inconnue y , l'on aura $x^3 = aab$, qui est une équation du troisième degré, montre que le Problème est Solide.

Mais parceque deux équations à la parabole étant combinées par addition ou soustraction, peuvent toujours donner une équation au cercle, attendu que l'équation à la parabole ne renferme qu'un carré inconnu qui peut toujours être delivré de toute quantité connue; il suit qu'on peut construire ce Problème par le moyen de l'une des deux équations précédentes, & de l'équation au cercle qui résulte de la combinaison des deux mêmes équations par addition, qui est $ay + bx = xx + yy$.

Et parceque les deux premières équations $ay = xx$, & $bx = yy$ sont également simples, on peut indifféremment se servir de celle qu'on voudra. Prenons donc la première $ay = xx$. Pour la construire, soit A l'origine des inconnues x qui va vers G , & y , qui va vers H perpendiculaire à AG ; le même point A sera aussi le sommet de l'axe AG de la parabole qu'il faut décrire, puisque l'équation $ay = xx$, n'a point besoin de réduction; il n'y a donc qu'à décrire (art. 10. n°. 11) sur l'axe AG une parabole dont le paramètre soit la ligne donnée $KL = a$.

Pour construire présentement l'équation au cercle $ay + bx = xx + yy$; soit fait pour la réduire $y - \frac{x}{2}a = u$, & $x - \frac{x}{2}b = z$; & l'on aura l'équation réduite $\frac{x}{4}aa + \frac{x}{4}bb - uu = zz$, qui avec les réductions donne cette construction.

Le point A étant toujours l'origine des inconnues y & x ; à cause de la première réduction $y - \frac{x}{2}a = u$, l'on prendra

prendra $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} KL$, & ayant mené CO parallele à AD ; à cause de la seconde réduction $x = \frac{1}{2} b = z$, on prendra sur CO , $CE = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} MN$, & le point E sera l'origine des inconnues z , qui va vers O , & u , parallele à AG , & le centre du cercle qu'il faut décrire: mais $\sqrt{\frac{1}{4} aa + \frac{1}{4} bb}$, qui est la racine du terme connu de l'équation réduite, est le demi diametre du même cercle; c'est pourquoi si du centre E par A , on décrit un cercle, il coupera la parabole en un point Q , par où ayant mené QP parallele AH ; PQ & PA seront les deux moyennes proportionnelles qu'il falloit trouver.

DÉMONSTRATION.

IL est clair que le cercle coupe AG & AH en I & en D , de maniere que $AI = 2AC = KL = a$, & $AD = 2CE = MN = b$. Ainsi $PI = PA - AI = y - a$, & $PF = AD - PQ = b - x$. Or par la propriété du cercle $AP \times PI = PM \times PF$, ou en termes algebriques, $yy - ay = bx - xx$, ou $yy - bx = ay - xx$: mais (art. 10) $ay = xx$; donc $yy - bx = 0$, ou $yy = bx$. Or $ay = xx$ donne AI , ou KL . $PQ :: PQ \cdot PA$, & $yy = bx$ donne $PQ \cdot PA :: PA \cdot AD$, ou MN ; donc KL , PQ , PA , & MN sont continuellement proportionnelles. C. Q. F. D.

EXEMPLE III.

Problème Solide.

FIG. 91. 4. **U**NE courbe AM , dont l'axe est AP , son sommet A , & un point D au dedans ou au dehors de cette courbe, étant donnez de position sur un Plan. Il faut mener du point D une ligne droite DMC , qui coupe la courbe AM , ou sa tangente au point M à angles droits.

Ayant supposé le Problème résolu, soient menées les droites DB & MP perpendiculaires à AC ; du point M la droite ME parallèle à AC , qui rencontrera DB en E ; & par le point M la tangente MT . Nommant presentement les données AB, b ; DB, c ; & les indéterminées AP, x ; PM, y ; & PT, t ; BP ou ME sera $b + x$, si le point B est hors de la courbe, & $DE, c - y$.

L'angle CMT étant droit par l'Hypotèse, les triangles MPT , CPM & MED seront semblables; c'est pourquoi l'on aura $y(MP) \cdot t(PT) :: x + b(EM) \cdot c - y(ED)$; donc $cy - yy = tx + bt$, qui est une équation generale pour toutes les courbes AM , & que l'on déterminera à telle courbe que l'on voudra, en y substituant en la place de t , l'expression de la soutangente PT .

Si l'on veut par exemple que la courbe AM soit une parabole; PT sera (art. 11 n°. 6) $= 2x = t$; c'est pourquoi en mettant pour t sa valeur $2x$, l'on aura $cy - yy = 2xx + 2bx$, qui est une équation à l'Ellipse; & nommant le parametre de la parabole a , l'on aura (art. 10) $ax = yy$, qui est l'équation à la parabole AM .

Si l'on fait évanouir x , l'on aura une équation du troisième degré, qui ne peut être réduite; & par conséquent le Problème proposé est solide. Mais lorsqu'on a une équation à la Parabole, & une à l'Ellipse, ou à l'Hyperbole par rapport à ses diametres où les inconnues ne se multiplient point, on peut toujours par leur moyen trouver une équation au cercle en cette sorte.

Après avoir délivré dans l'équation à l'Ellipse, ou à l'Hyperbole, le quarré de l'inconnue qui n'est point quarrée dans l'équation à la parabole, de toute quantité connue, l'on fera évanouir le quarré de l'autre inconnue, & l'équation qui en resultera fera une équation à la parabole, qui étant combinée avec la premiere par addition, ou soustraction, donnera une équation au cercle.

Ainsi en divisant par 2 l'équation précédente $cy - yy = 2xx + 2bx$, l'on a $\frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}yy = xx + bx$, & mettant pour yy sa valeur ax , prise dans l'équation à la parabole $ax = yy$; l'on aura $\frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ax = xx + bx$, qui est une autre équation à la parabole; & en combinant par addition ces deux équations à la parabole, l'on aura $\frac{1}{2}cy - \frac{1}{2}ax + ax = xx + bx + yy$, ou $\frac{1}{2}cy + \frac{1}{2}ax = xx + bx + yy$, qui est une équation au cercle.

Quoique l'on pût construire le Problème par le moyen de l'équation au cercle, & de la seconde équation à la parabole; il est néanmoins à propos de se servir de la premiere $ax = yy$, parcequ'elle appartient à la parabole donnée AM qui se trouve toute construite; c'est pourquoi il ne reste qu'à construire l'équation au cercle, afin que le Problème soit entierement résolu.

L'équation au cercle étant réduite, donne avec les réductions, cette construction.

Ayant pris $AF = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a$, on menera FG parallele BD & $= \frac{1}{4}c$, & du centre G par A , l'on décrira un cercle qui coupera la parabole au point cherché M .

DEMONSTRATION.

AYANT joint GA , & mené GI parallele à AP , qui rencontrera PM en H , & la circonference du cercle

Bb ij

en I , l'on aura par la propriété du cercle, GA^2 ou GI^2
 $- GH^2 = HM^2$, ou en termes algebriques $\frac{1}{4} bb -$
 $\frac{1}{4} ab + \frac{1}{16} aa + \frac{1}{16} cc - xx - bx - \frac{1}{4} bb + \frac{1}{2} ax +$
 $\frac{1}{4} ab - \frac{1}{16} aa = yy - \frac{1}{2} cy + \frac{1}{16} cc$, qui se réduit à
 $xx + bx - \frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} cy - yy$. L'on a aussi par la pro-
 priété de la parabole $ax = yy$, qui étant combinée par
 addition avec l'équation précédente donne $xx + bx$
 $+ \frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} cy$, ou $2xx + 2bx = cy - yy$ (en mettant
 pour ax sa valeur yy , en multipliant par 2, & transpo-
 sant) qui est l'équation que l'on a construite. *C. Q. F. D.*

E X E M P L E V.

Problème Solide.

FIG. 92. 5. **I**L faut décrire un triangle CBD rectangle en B , dont on connoît le plus grand ED des deux segmens de la base faits par la perpendiculaire BE , qui tombe de l'angle droit B sur la base CD , & la difference DF des côtes.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé les données ED , a ; DF , b ; & les inconnues EC , x ; CB , ou BF , y ; CD fera $x + a$; & BD , $y + b$; l'on aura à cause des triangles rectangles CEB , BED , $CB^2 - CE^2 = DB^2 - DE^2$, & en termes algebriques $yy - xx = yy + 2by + bb - aa$, ou $xx = aa - 2by - bb$, qui est une équation à la parabole.

A cause des triangles semblables DCB , BCE , l'on aura $a + x (DC) \cdot y (CB) :: y \cdot x (CE)$; donc $yy = ax + xx$, qui est une équation à l'Hyperbole équilatère.

Si l'on fait presentement évanouir l'une des deux inconnues, on aura une équation du quatrièmedegré, qui ne pouvant être réduite à une équation du second, montre que le Problème est solide.

Or quoique les lignes exprimées par les deux inconnues x & y , n'ayent point les qualitez dont il est parlé dans la premiere Observation de l'article 4. Neanmoins, parceque l'on peut toujours trouver une équation au cercle quand on a deux équations indéterminées du second degré où les deux inconnues ne sont point multipliées entr'elles, quoiqu'il n'y en ait aucune des deux à la parabole, on peut par leur moyen construire le Problème, comme on va voir par cet exemple.

La seconde équation $yy = ax + xx$ donne $xx = yy - ax$, & mettant cette valeur de xx dans la premiere équation $xx = aa - 2by - bb$, qui est à la parabole, l'on aura $yy - ax = aa - 2by - bb$, qui est une autre équation à la parabole; & en ajoutant les deux premiers & les deux seconds membres de ces deux équations à la parabole, l'on aura $xx + yy - ax = 2aa - 4by - 2bb$, ou $xx - ax + yy + 4by = 2aa - 2bb$, qui est une équation au cercle.

Pour réduire cette équation, soit fait $x - \frac{1}{2}a = z$ & $y + 2b = u$; l'on aura $zz = \frac{2}{4}aa + 2bb - uu$, qui avec les réductions fournit cette construction.

Soit le point A l'origine des inconnues x , qui va vers G , & y qu'on suppose perpendiculaire à AG ; & qui va en haut. A cause de la premiere réduction $x - \frac{1}{2}a = z$, on prendra $AR = \frac{1}{2}a$, & ayant mené par R la perpendiculaire RO ; à cause de la seconde réduction $y + 2b = u$, l'on prendra $RO = 2b$; & le point O sera le centre du cercle qu'il faut décrire; à cause de $2bb$, on prendra RI moyenne proportionnelle entre $2b$, & b ; & du centre O , & du rayon IA , l'on décrira un cercle.

Pour construire présentement l'une des deux équations à la parabole, par exemple la seconde $yy - ax = aa - 2by - bb$, ou $yy + 2by = ax + aa - bb$; soit fait

Bb iij

pour la réduire $y + b = f$, & $x + a = t$, & l'on aura $ff = at$, qui donne avec ses réductions cette construction, A cause de la seconde réduction $x + a = t$, l'on prolongera AG du côté de A en H , en sorte que $AH = a$, & ayant mené HK perpendiculaire à AH ; à cause de la première réduction $y + b = f$; on prendra $HK = b$, l'on menera KS parallèle à AG , & l'on décrira (art. 10 n°. 11) sur l'axe KS , dont le sommet est K , une parabole par le moyen de l'équation réduite $ff = at$. Cette parabole coupera le cercle en deux points M & N , de manière qu'ayant abaissé des points M & N les perpendiculaires MP , NQ ; PM sera la valeur positive de $y = CB$; NQ , sa valeur négative; & AP , la valeur de $x = EC$. De sorte que si l'on fait $EC = AP$, & qu'on décrive sur le diamètre DC un demi cercle dans lequel ayant ajusté $CB = PM$, & mené BD , le triangle CBD sera celui qu'il falloit décrire.

DÉMONSTRATION.

AYANT joint IH & mené par le centre O le diamètre VOT parallèle à AG qui rencontrera MP prolongée en X de part ou d'autre du point O . Par la construction, & par la propriété du cercle, l'on aura IH^2 , ou OV^2 , ou $OT^2 - OX^2 = XM^2$, ou en termes algébriques $\frac{9}{4}aa$

$$+ 2bb - xx + ax - \frac{x}{4}aa = yy + 4by + 4bb, \text{ ou } 2aa - xx + ax = yy + 4by + 2bb.$$

Par la propriété de la parabole KM dont le paramètre est a , l'on aura $a \times KL = LM^2$, ou $ax + aa = yy + 2by + bb$, ou en soustrayant la seconde équation de la première, le premier membre du premier; & le second du second, l'on aura $aa - xx = 2by + bb$, qui est la première équation du Problème, & en soustrayant cette équation de la précédente, chaque membre de chaque membre, l'on aura $ax + xx = yy$, qui est la seconde équation du Problème. C. Q. F. D.

SECTION X.

Où l'on donne la Méthode de construire les Problèmes Solides par le moyen de leurs équations déterminées ; ou ce qui est la même chose , de construire les équations déterminées du troisième, & du quatrième degré.

METHODE.

XXIV. **S**OIT qu'on ait employé deux ou plusieurs lettres inconnues , ou qu'on n'en ait employé qu'une pour résoudre un Problème , quand on est venu à une équation déterminée du troisième ou du quatrième degré , qui ne peut être réduite à une équation du second , le Problème est nécessairement Solide , comme on a déjà dit ailleurs , & on le pourra toujours construire par le moyen de cette équation , en observant les règles qui suivent.

1. Si l'équation a un second terme , on le fera premierement évanouir. Cela fait.

2. Si l'équation est du troisième degré , on la multipliera par l'inconnue qu'elle renferme pour la rendre du quatrième.

3. On trouvera une équation à la parabole dont un des membres sera le carré de la lettre inconnue de l'équation que l'on veut construire , & l'autre membre sera le produit d'une autre lettre inconnue par une lettre connue quelconque , ou plutôt par une des lettres connues qui se trouve le plus fréquemment dans l'équation à construire : car par ce moyen on rend la construction un peu plus simple.

SCD LYON 1
MATHÉMATIQUES

4. On fera évanouir l'inconnue de l'équation à construire dans le premier & dans le troisième terme: (car on suppose qu'elle n'en a point de second) en substituant en sa place, sa valeur prise dans l'équation à la parabole que l'on a formée, & l'équation qui en résultera sera une autre équation à la parabole.

5. On combinera par addition ou soustraction ces deux équations à la parabole, de manière que l'équation qui en résulte soit une équation au cercle.

6. On construira l'équation au cercle, & la plus simple des deux équations à la parabole, comme dans la Section précédente, en supposant que les lignes exprimées par les deux inconnues font un angle droit, & les Intersections de ces deux courbes donneront les racines, ou valeurs tant positives que négatives de l'inconnue de l'équation à construire. Tout ceci sera éclairci par les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Problème Solide.

7. **TROUVER** une ligne dont le cube soit au cube d'une ligne donnée CD , dans la raison donnée de m à n .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AB , a ; & l'inconnue x , l'on aura par la condition du Problème $x^3 . a^3 :: m . n$, d'où l'on tire $x^3 = \frac{ma^3}{n}$, qui est une équation du troisième degré, qui ne pouvant être réduite à une équation du second; il suit que le Problème est Solide.

En multipliant cette équation par x , l'on aura $x^4 = \frac{ma^3x}{n}$, & faisant (n° 3) $ay = xx$, qui est une équation à la parabole, l'on a $aayy = x^4$; & mettant dans l'équation à construire pour x^4 sa valeur $aayy$, l'on aura $aayy = \frac{ma^3x}{n}$, ou $yy = \frac{max}{n}$, qui est une autre équation

tion

tion à la parabole. Et combinant ces deux équations à la parabole par addition ou soustraction, l'on aura $yy - ay = \frac{max}{n} - xx$, qui est une équation au cercle dont la construction jointe avec celle de l'équation à la parabole $ay = xx$, résoudra le Problème.

Soit le point A l'origine des inconnues y qui va vers G , & x qui lui est perpendiculaire. Et soit décrite (art. 10 n^o.11) sur l'axe AG dont le sommet est A la parabole AH , dont le parametre soit $a = AB$. Cette parabole sera celle dont l'équation est $ay = xx$. FIG. 94.

L'équation au cercle étant réduite donnera avec les réductions cette construction.

Ayant pris sur AG , $AI = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} CD$, on élèvera au point I la ligne IK perpendiculaire à AG & égale $\frac{ma}{2n}$, & du centre K par A , l'on décrira un cercle qui coupera la parabole AH au point M , par où l'on mènera la droite MP parallèle à IK ; je dis que MP exprimée par x qui est l'inconnue de l'équation $x^3 = \frac{ma^3}{n}$ que l'on vient de construire, est le côté du cube qu'il falloit trouver.

DEMONSTRATION.

AYANT joint AK , & mené KOR parallèle à AP qui rencontrera le cercle en R , & PM en O . L'on a par la propriété du cercle, KA^2 , ou $KR^2 - KO^2 = OM^2$, ce qui est en termes algebriques $\frac{1}{4} aa + \frac{mmaa}{4nn} - yy + ay -$

$\frac{1}{4} aa = xx - \frac{max}{n} + \frac{mmaa}{4nn}$, qui devient $ay - yy = xx - \frac{max}{n}$. Mais à cause de la parabole l'on a (art. 10)

$ay = xx$; donc $yy = \frac{x^2}{n}$; mettant donc dans l'équa-

tion précédente pour ay , la valeur xx , & pour yy , la valeur $\frac{x^4}{aa}$, l'on aura après les réductions ordinaires $x^3 =$

$$\frac{ma^3}{z}. C. Q. F. D.$$

E X E M P L E I I.

Problème Solide.

FIG. 95. 8. **DIVISER** un arc de cercle $BDEC$ en trois parties égales BD , DF , FC .

Ayant supposé le Problème résolu; puisque par l'Hypothèse les arcs BD , DF , FC sont égaux, les cordes BD , FD , FC seront aussi égales, & DF sera parallèle à BC . Ayant mené les rayons AB , AD , AF , AC , & outre cela la ligne FI parallèle à AD ; les triangles ADB , ADF , AFC seront égaux, semblables & isocèles, comme aussi les triangles BHD , CKF : car l'angle $CFK (= KFD = AKH) = CKF$. Par la même raison l'angle $BDH =$ l'angle BHD ; c'est pourquoi, puisque (Hyp.) $CF = DB$; CK sera $= BH$. Mais les triangles ACF , CFK , FKI , sont aussi semblables & isocèles: car à cause des parallèles AD , IF , l'angle $KIF (= BHD) = IKF = KFC = FCA$.

En nommant présentement le rayon AC , a ; la donnée BC , b ; & l'inconnue CF , ou CK , ou IH , ou HB , x ;

l'on aura $AC(a) \cdot CF(x) :: CF(x) \cdot FK = \frac{xx}{a}$, & $CF(x) \cdot FK \left(\frac{xx}{a}\right) :: FK \left(\frac{xx}{a}\right) \cdot KI = \frac{x^3}{aa}$, donc $CI =$

$x - \frac{x^3}{aa}$; & partant $CB = IB + CI = 2x + x - \frac{x^3}{aa} = b$; d'où l'on tire $x^3 = 3aax - aab$, qui est une équation du troisième degré, & qui ne pouvant être réduite à une équation du second, fait connoître que le Problème est solide.

Pour le construire, soit premièrement l'équation précédente multipliée par son inconnue x , & l'on aura $x^4 = 3aaxx - aabx$; & ayant fait $ay = xx$, l'on aura $aayy$

$=x^4$. Mettant donc dans l'équation du Problème, pour x^4 , & pour xx , leurs valeurs ayy , & ay ; l'on aura après avoir divisé par aa , $yy = 3ay - bx$, qui est une autre équation à la parabole. Et en combinant par addition ou soustraction, ces deux équations à la parabole, l'on aura après la réduction $yy - 4ay = -xx - bx$, qui est une équation au cercle, dont la construction jointe avec celle de l'équation à la parabole $ay = xx$, résoudra le Problème.

Soit donc le point A l'origine des inconnues y qui va vers G , & x perpendiculaire à AG qui va vers B , & soit décrite (art. 10 n° 11) sur l'axe AG , dont le sommet soit A , la parabole AH dont le paramètre soit $a =$ (Fig. 95) AC . Cette parabole sera celle dont l'équation est $ay = xx$.

L'équation au cercle étant réduite, donnera, avec les réductions, cette construction.

Soit prisé $AI = 2a =$ (Fig. 95) $2AC$, & ayant élevé IK perpendiculaire à AG & $= \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} BC$, l'on décrira du centre K par A , un cercle $AMNF$ qui coupera la parabole aux points A, M, N, F , parmi lesquels il y en a trois M, N , & F dont on peut tirer des perpendiculaires MP, NQ, FE sur l'axe AG de la parabole, qui sont les trois racines de l'inconnue x de l'équation du Problème, deux desquelles PM , & QN sont positives, & la troisième EF , négative, de sorte que PM sera la corde du tiers de l'arc $BDFC$ qu'il falloit diviser; & QN , la corde du tiers du reste du cercle BVC .

DÉMONSTRATION.

PAR la propriété de la parabole l'on a (art. 10) $ay = xx$. Ayant joint KA , & mené le diamètre ZKR parallèle à AG ; l'on aura par la propriété du cercle KA^2 , ou $KR^2 - KT^2 = TN^2$, ou $KZ^2 - KX^2 = XM^2$, ou en termes algébriques, $4aa + \frac{1}{4}bb - yy + 4ay - 4aa =$

C c ij

$xx + bx + \frac{1}{4} bb$, ou $4ay - yy = xx + bx$; & en remettant pour ay , & pour yy leurs valeurs xx , & $\frac{x^2}{aa}$ prises dans l'équation à la parabole $ay = xx$, l'on aura, après les réductions, $x^3 = 3aax - aab.C. Q. F. D.$

REMARQUE I.

9. S'IL y avoit un second terme dans l'équation que l'on vient de construire, il auroit fallu avant toutes choses le faire évanouir; & alors l'inconnue x , qui exprime la corde CF (Fig. 95), ne se seroit plus trouvée dans l'équation à construire; c'est pourquoi les perpendiculaires PM, QN , ne seroient égales aux cordes du tiers des arcs BFC, BVC , qu'après les avoir augmentées ou diminuées de la quantité connue de l'équation qui auroit servi à faire évanouir le second terme; ce qui n'auroit apporté aucune difficulté.

REMARQUE II.

FIG. 96. 10. LES valeurs positives de x, PM & QN sont ensemble égales à la négative EF . Ce que je démontre en cette sorte. On les prolongera en sorte qu'elles rencontrent le cercle en L, S & H , & le diamètre ZR en X, T & O . Ayant nommé le parametre AB de la parabole AM, a ; la corde AG , qui est l'axe de la même parabole, b ; IK , ou PX , ou EO, c ; PM, x ; QN, y ; & FE, z ; PL sera, $2c + z$; $QS, 2c + y$; & $EH, z - 2c$. AP sera (art. 10) $\frac{xx}{a}$; $AQ, \frac{yy}{a}$; $AE, \frac{zx}{a}$; & partant $PG, b - \frac{xx}{a}$; $QG, b - \frac{yy}{a}$; $EG, b - \frac{zz}{a}$.

DEMONSTRATION.

L'ON a par la propriété du cercle.

$$1. AP \times PG = \frac{abxx - x^2}{aa} = 2cx + xx = MP \times PL.$$

$$2. AQ \times QG = \frac{abyy - y^2}{aa} = 2cy + yy = NQ \times QS.$$

$$3. AE \times EG = \frac{abxz - x^2}{aa} = zz - 2cz = HE \times EF.$$

On tire de la premiere équation,

$$ab = \frac{x^2 + 2aac + aax}{x}, \text{ \& substituant cette valeur de } ab$$

dans la seconde & troisieme, l'on aura après les réductions $xy + 2aacy = y^2x + 2aacx$, & $x^2z + 2aacz = z^2x - 2aacx$, d'où l'on tire $2aac = xyy + xxy$, & $2aac = xzz - xxx$; donc $yy + xy = zz - xz$, d'où l'on tire $x = z - y$, donc $x + y = z$. C. Q. F. D.

On démontreroit de même que, si le cercle coupoit la parabole en quatre points, les ordonnées qui partiroient des points d'Interfection d'un côté de l'axe seroient ensemble égales aux ordonnées qui partiroient des points d'Interfection de l'autre côté de l'axe. Soit qu'il en eût deux d'un côté, & deux de l'autre, ou trois d'un côté, & une de l'autre.

Ce seroit encore la même chose, si le cercle touchoit la parabole d'un côté de l'axe, & la coupoit en deux points de l'autre côté: car le point touchant doit être regardé comme deux points d'Interfection infiniment proches. Ainsi, le double de l'ordonnée qui partiroit du point touchant, seroit égal à la somme des deux ordonnées qui partiroient des deux points d'Interfection qui seroient de l'autre côté de l'axe.

E X E M P L E III.

Problème Solide.

II. SOIT encore le Problème proposé dans la Section précédente, Exemple 5, où l'on a trouvé ces deux équations $xx = aa - 2by - bb$, & $yy = ax + xx$.

Si l'on fait évanouir y , l'on aura

$$\begin{array}{r} A. x^4 - 2aaxx + 4abbx + a^4, \\ \quad - 2bbxx \qquad \qquad - 2aabb = 0; \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + b^4 \end{array}$$

qui n'a point de second terme.

Cc iij

Si au lieu de faire évanouir y , l'on fait évanouir x , l'on aura.

$$B. y^4 + 4by^3 + 6bbyy + 4b^3y + b^4 = 0.$$

$$- 2aayy - 2aaby - aabb$$

d'où faisant évanouir le second terme, en faisant $y + b = z$, l'on aura

$$C. z^4 - 2aazx + 2aabbz - aabb = 0.$$

Et comme cette équation est plus simple que l'équation A , il vaut mieux s'en servir pour construire le Problème, que de l'équation A . Faisant donc

$D. au = zx$, l'on aura $aaau = z^4$, & mettant les valeurs de zx & de z^4 dans l'équation C , l'on aura après avoir divisé par aa ,

$$E. uu - 2au + 2bz - bb = 0, \text{ qui est une équation à la Parabole.}$$

Si l'on ajoute le second membre de l'équation D au premier de l'équation E ; & le premier au second, l'on aura $uu - 2au + zx + 2bz - bb = au$, ou

$$F. uu - 3au + zx + 2bz - bb = 0, \text{ qui est une équation au cercle.}$$

Si l'on réduit l'équation F , & qu'on la construise avec **FIG. 93.** l'équation D . En prenant le point K pour l'origine des inconnues u qui va vers S , & z qui lui est perpendiculaire, & va en haut, on retombera dans la construction de la Section précédente n°. 5.

DÉMONSTRATION.

PAR la construction du Problème 5 (Sect. préc.) KL , ou $HP = x + a$; & $LM = y + b$; & par cette construction $KL = u$, & $LM = z = y + b$; mettant donc dans ces deux équations D & F pour u , sa valeur $x + a$, & pour z sa valeur $y + b$, l'on aura ces deux équations.

$$G. aa + ax = yy + 2by - bb, \text{ \&}$$

$H. xx = aa - 2by - bb$, qui est la première équation de l'exemple 5, Sect. préc. & en ajoutant les deux équations G & H , le premier membre au premier, & le second au second, l'on aura, après les réductions,

$K. xx + ax = yy$, qui est la seconde équation du même Exemple. *C. Q. F. D.*

REMARQUE.

12. PAR le moyen de cette construction, l'on ne détermine que la grandeur du côté $CB = PM$, au lieu que par la construction de la Section précédente, l'on a aussi déterminé la grandeur de $CE = AP$, d'où l'on voit que lorsqu'on construit un Problème solide par le moyen de son équation déterminée, il n'est pas entièrement résolu. Il faut encore pour cela résoudre & construire un autre Problème simple ou Plan; au lieu que lorsqu'on le construit par le moyen de ses deux équations indéterminées, il est entièrement résolu: car les valeurs des deux inconnues se trouvent toujours déterminées.

FIG. 92.

93.

Ainsi pour achever de résoudre le Problème, en supposant qu'on n'a déterminé que le côté CB par la construction précédente. Soit encore CE nommé x ; & BD, c ; l'on aura par la propriété du triangle rectangle $x + a$ (CD). c (BD) :: c . a (DE), d'où l'on tire $x = \frac{bb}{a} - a$, qui servira à déterminer la grandeur CE , & le Problème sera entièrement résolu.

REMARQUES GÉNÉRALES

Sur la construction des Problèmes Solides.

13. LES constructions du deuxième & cinquième exemples de la Section précédente, comparées avec les constructions du second & du troisième de cette Section, font voir qu'il est plus à propos de construire les Problèmes solides avec deux équations indéterminées, qu'avec une équation déterminée, lorsqu'on le peut. Or on le peut toujours lorsque l'une des équations indéterminées se rapporte au cercle, ou bien lorsque les deux lettres inconnues ne se multiplient point dans les deux mêmes équations indéterminées: car en ce cas on trouvera toujours une équation au cercle, comme on a fait dans cet exemple.

On voit aussi qu'il n'est pas absolument nécessaire que les deux lettres inconnues aient les qualitez marquées dans la premiere Observation de l'article 4. On peut même les placer de différentes manieres, & chercher à chaque fois deux équations: car on trouve souvent des équations plus simples en les plaçant d'une maniere, qu'en les plaçant d'une autre.

14. Quoiqu'on n'ait employé dans cette Section que le cercle & la parabole pour la construction des Problèmes solides, cela n'empêche pas qu'on ne puisse les construire avec celle qu'on voudra des Sections coniques: car on peut tirer d'une équation déterminée du troisième & du quatrième degré des équations à l'Ellipse, & à l'Hyperbole comme on en a tiré une équation au cercle, avec cette différence seule qu'on ne peut tirer d'une équation du quatrième degré, une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes, & qu'on la peut tirer d'une équation du troisième.

Soit par exemple $A. x^3 = 3axx - aab$, qui est l'équation de l'exemple 2.

En supposant $B. ay = xx$, & mettant en la place de xx sa valeur ay , l'on aura $C. xy = 3ax - b$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes. Et multipliant l'équation C par x , & mettant ensuite pour xx , sa valeur ay dans le premier terme, l'on aura $D. yy = 3xx - bx$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses diametres, comme celle de l'art. 14 n° 13; & mettant encore pour xx sa valeur ay dans l'équation D ; il viendra $E. yy = 3ay - bx$, qui est une équation à la parabole. En ajoutant les deux membres des deux équations B & E , le premier au premier, & le second au second, l'on aura $yy = xx + 2ay - bx$, qui est une équation à l'Hyperbole équilatere. Si l'on ajoute le second membre de l'équation B au premier de l'équation E , & le premier au second, l'on aura $yy + xx = 4ay - bx$, qui est une équation au cercle. Si on multiplie l'équation B par un nombre quelconque entier ou rompu, ou

par

par une fraction litterale, comme $\frac{a}{b}$, avant que de la combiner avec l'équation F , comme on vient de faire; l'on aura une équation à l'Hyperbole, & une à l'Ellipfe.

On peut de même combiner deux des équations précédentes prises à volonté, & ensuite celles qui résultent de ces combinaisons, ce qui donnera une infinité d'équations aux Sections coniques, de l'une desquelles on pourra se servir avec l'équation au cercle.

15. On tirera de la même maniere d'une équation du quatrième degré qui n'a point de second terme, des équations aux Sections coniques, & une au cercle: mais on n'en trouvera point à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes: où l'on remarquera que si l'on tiroit deux équations au cercle d'une équation du troisième ou du quatrième degré, le Problème seroit plan, & l'équation se pourroit réduire à une équation du second degré.

16. On peut encore construire les Problèmes solides avec l'équation au cercle, & telle Section conique qu'on voudra, comme on peut voir dans le Traité de la Construction des Equations de M^r de la Hire, dont on a suivi ici la Méthode.

17. On multiplie les équations du troisième degré par leur inconnue, pour en tirer une équation à la parabole, différente de celle que l'on forme arbitrairement pour introduire dans l'équation déterminée afin d'en tirer des équations indéterminées: mais cela n'y apporte aucun changement: car les Problèmes du troisième & du quatrième degré sont de même nature; & même leurs constructions ne diffèrent qu'en ce que les deux Courbes qu'on y employe passent par l'origine de l'inconnue de l'équation, quand elle est du troisième degré, & qu'elles n'y passent pas quand elle est du quatrième.

SECTION XI.

Où l'on donne la Méthode de résoudre & de construire les Problèmes indéterminez, dont les Equations excèdent le second degré : ou ce qui est la même chose, de décrire les courbes dont ces Equations expriment la nature ; & de résoudre & de construire les Problèmes déterminez, dont les Equations excèdent le quatrième degré.

MÉTHODE.

XXV. **O**N a donné des règles dans la cinquième, sixième & septième Section pour décrire les courbes du premier genre d'une manière plus simple que celles qu'on tireroit naturellement de leurs équations : mais on n'en peut pas donner pour décrire celles des genres plus composés. Il faudroit pour cela les avoir examinées les unes après les autres ; ce qui iroit à l'infini : car chaque genre en contient un nombre d'autant plus grand qu'il est plus composé, & il y a une infinité de genres.

1. On dira seulement en general qu'après avoir trouvé une équation pour chaque Problème (en observant pour nommer les lignes inconnues, ce qui est prescrit dans la première ou septième Observation de l'art. 4), qui exprime la nature de la Courbe qui doit servir à le résoudre, qui en détermine le genre, & qui soit réduite à son expression la plus simple ; il faut examiner par l'inspection des termes de l'équation, celle des deux inconnues dont on peut plus facilement trouver les valeurs en suivant les règles de la construction des équations déterminées, trouver par les mêmes règles les valeurs de cette inconnue, en assignant à l'autre inconnue une va-

leur déterminée , & arbitraire ; & l'on aura à chaque fois qu'on assignera à cette inconnue des valeurs arbitraires , autant de points de la courbe qu'on veut décrire , que l'autre inconnue aura de valeurs réelles , positives , & négatives. De sorte que si l'inconnue la moins élevée de l'équation , si elles ne le sont pas toutes deux également , à une ou deux dimensions , on en trouvera les valeurs par les regles de la Section II, en assignant à l'autre inconnue des valeurs arbitraires , & la regardant ensuite comme déterminée. Si elle a trois ou quatre dimensions , on en trouvera les valeurs par les regles de la Section précédente ; & si elle a un plus grand nombre de dimensions , on en trouvera les valeurs comme on expliquera dans la suite : mais comme l'on en pourra plus tirer l'équation au cercle , il ne sera point nécessaire d'en faire évanouir le second terme , s'il s'y rencontre : où l'on remarquera qu'il faut réitérer la construction autant de fois qu'on assignera des valeurs différentes à l'inconnue que l'on prend pour constante.

2. On peut aussi , après avoir trouvé une équation comme on vient de dire , abandonner la première & septième Observation de l'art. 4 , & nommer d'autres lignes par des lettres inconnues , & chercher par ce moyen d'autres équations , qui n'exprimeront pas effectivement la nature de la courbe qui doit résoudre le Problème , & qui n'en détermineront pas le genre : mais qui pourront servir à décrire plus simplement la même courbe , soit par elles-mêmes , ou en faisant évanouir par leur moyen les inconnues de la première équation , afin de la rendre plus simple , & d'en tirer plus facilement la manière de décrire la même courbe.

3. On peut encore tirer de l'équation qui exprime la nature de la courbe qui doit résoudre un Problème , des équations à quelqu'une des quatre courbes du premier genre , lorsqu'on y trouve l'expression de l'appliquée de quelqu'une des quatre mêmes courbes , en égalant cette expression à une troisième lettre inconnue , ou à son carré , & la construction de ces équations facilitera

la description de la courbe qu'on veut décrire. Tout ce-ci se trouvera pratiqué dans les exemples qui suivent.

EXEMPLE I.

Problème indéterminé.

FIG 97. 4. **U**N demi cercle AFB, dont le diamètre est AB, & le centre C, étant donné, ayant mené par un point quelconque P du diamètre AB, la droite PK perpendiculaire à AB, qui rencontre la circonférence AFB en K. Il faut trouver sur PK le point M, qui la divise en sorte que $AP \cdot PM :: PB \cdot PK$. Et comme il y a une infinité de points comme M, il faut trouver la courbe sur laquelle ils se trouvent tous.

Ayant supposé le Problème résolu; & nommé le diamètre AB, a ; & les indéterminées AP, x ; PM, y ; PB sera, $a - x$; & par la propriété du cercle PK sera $\sqrt{ax - xx}$, & l'on aura par les qualitez du Problème,

$$AP(x) \cdot PM(y) :: PB(a - x) \cdot PK = \frac{ay - xy}{x} =$$

$\sqrt{ax - xx}$, & en quarrant chaque membre, multipliant ensuite par xx , & divisant par $a - x$; l'on aura $x^3 = ayy - xyy$, qui est une équation du troisième degré, qui montre que la courbe cherchée dont elle exprime la nature est du second genre. On tire de l'équation que

$$\text{l'on vient de trouver, } y = \pm \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}, \text{ ou } y = \pm \frac{xx}{\sqrt{ax-xx}},$$

en multipliant les deux termes de la fraction par \sqrt{x} , ce qui ne change ni le degré de l'équation, ni le genre de la courbe, d'où l'on voit que la courbe passe des deux côtes de l'axe AB par les points M, & m, & que la partie Am est égale & semblable à la partie AM, puisque $Pm = PM$.

Si l'on fait $x = 0$, le point P tombera en A, les termes où x se rencontrent seront nuls, & l'on aura par conséquent $y = 0$, d'où l'on connoît que la courbe ren-

contre son axe au point A , puisque AP & PM s'y aneantissent, & qu'elle ne rencontre qu'en A la parallele à PK menée par A : car si elle la rencontroit encore en quelqu'autre point, l'on trouveroit une valeur de y qui le determineroit.

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura aussi $x = 0$, qui montre que la courbe ne rencontre son axe AB qu'au seul point A ; & comme elle ne rencontre aussi la parallele à PK , menée par A qu'au seul point A ; il suit qu'elle est toute du côté de B par rapport à cette parallele.

Puisque par l'Hypothese $PB \cdot PK :: AP \cdot PM$, il est clair que la courbe AM touche son axe au point A : car le point P étant infiniment proche de A , les points K & M en seront aussi infiniment proches; & parcequ'alors PB surpassera pour ainsi dire infiniment PK ; AP surpassera aussi pour ainsi dire infiniment PM ; d'où il suit que la petite partie AM de la courbe sera pour ainsi dire dans la direction de son axe AB , qu'elle touche & coupe par consequent au point A .

L'on voit encore par la même équation que x croissant, y croît aussi, même en deux manieres: car le numerateur xx du membre fractionnaire croissant, le denominateur $\sqrt{ax - xx}$ diminue.

Si l'on augmente x jusqu'à ce qu'elle devienne $= a$, le point P tombera en B , & l'équation deviendra $y = \frac{ax}{0}$, & comme ce rapport $\frac{ax}{0}$, est plus grand que tout rapport donné, c'est à dire, infiniment grand; il suit que si l'on mene par B une ligne BH parallele à PM , cette parallele ne rencontrera la courbe qu'à une distance infinie, ou, ce qui est la même chose, qu'elle lui sera asymptote. L'on voit aussi qu'on ne peut pas augmenter x en sorte qu'elle surpassé AB : car le denominateur de la fraction deviendrait une quantité imaginaire; & par consequent aussi les valeurs de y : ce qui fait voir que la courbe ne passe point au-delà BH menée par B parallele à PK . Il suit de tout ce qu'on vient de dire que

D d iij

la courbe est toute renfermée entre les deux parallèles à PM , menées par A & par B .

Puisque BH est asymptote à la courbe AM , il suit qu'elle coupe la circonférence du cercle en quelque point F , qu'il est aisé de déterminer: car faisant $PM = PK$, ou $y = \sqrt{ax - xx}$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précédente, elle deviendra $ax - xx = xx$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a$, qui fait voir que le point F divisera par le milieu le demi cercle AFB : ce que l'on peut aussi remarquer par l'Hypothèse: car le point P tombant en C , l'on aura $AC \cdot CM :: CB \cdot CK$; & partant $CM = CK = AC$.

La qualité du Problème fournit une manière assez simple pour décrire la courbe: mais il faut examiner si l'on n'en peut pas tirer une plus simple de son équation $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$, en cherchant les valeurs de y dans toutes les positions du point P . On trouve que cette équation donne cette construction qui est presque la même que celle que fournit le Problème. Soit prise PM troisième proportionnelle à PK & à AP , & le point M sera à la courbe cherchée.

D E M O N S T R A T I O N .

PAR la construction, & par la propriété du cercle $\sqrt{ax - xx} \cdot (PK) \cdot x (AP) :: x \cdot y (PM)$, d'où l'on tire $y = \frac{xx}{\sqrt{ax - xx}}$. C. Q. F. D.

Quoique ces constructions soient assez simples, il est néanmoins à propos de voir si l'on n'en peut pas trouver une encore plus simple. Soit pour ce sujet menée par les points A & M la droite AMG qui rencontre la circonférence AKB en E , & l'asymptote AH en G , & ayant mené ED parallèle à PK , & nommé DB, z ; AD sera $a - z$, & les triangles semblables APM, ADE ,

donneront $AP(x) \cdot PM(y) :: AD(a-z) \cdot DE = \frac{ay - zy}{x}$. Mais par la propriété du cercle $DE = \sqrt{az - zz}$

donc $az - zz = \frac{aay - 2azy + zzy}{xx}$, ou $z = \frac{ay - zyy}{xx}$, en divisant chaque membre par $a - z$. L'on a aussi l'équation du Problème $yy = \frac{x^3}{a-x}$; donc en mettant cette valeur de yy dans l'équation précédente, l'on aura $z = \frac{ax - zx}{a-x}$; d'où l'on tire $z = x$, ou $AP = DB$; donc $AM = EG$, qui donne cette construction qui est la plus simple que l'on puisse trouver.

Soit menée du point A une ligne droite quelconque AG qui rencontrera la circonférence du demi cercle en E ; & ayant pris sur AG , $AM = EG$; le point M sera à la courbe cherchée.

DEMONSTRATION.

PUISQUE (Const.) $AP = DB$, AP étant x ; DB fera aussi, x ; AD , $a - x$; & l'on aura, à cause des triangles semblables APM , ADE , $AP(x) \cdot PM(y) :: AD(a-x) \cdot DE = \frac{ay - zy}{x}$ (par la Prop. du cercle) $\sqrt{ax - xx}$, d'où l'on tire l'équation du Problème. C. Q. F. D.

Diocles Inventeur de cette courbe, l'a nommée *Cysoïde*.

EXEMPLE II.

Problème indéterminé.

FIG. 98. 5. **U**N angle droit ABH , & un point fixe A sur un de ses côtés, étant donné de position sur un Plan. Si l'on mène du point fixe A une ligne quelconque AG , qui rencontre le côté BH en G , & qu'on prenne $GM = GB$. Il faut trouver une équation qui exprime la nature de la courbe sur laquelle se trouve le point M , & tous ceux que l'on trouvera de la même manière.

Ayant supposé le Problème résolu, on abaissera du point M sur AB la perpendiculaire MP ; & ayant nommé la donnée AB, a , & les indéterminées $AP, x; PM, y; PB$ sera, $a - x$; & $AM, \sqrt{xx + yy}$, & les triangles semblables APM , ABG donneront $AP(x) \cdot PM(y) :: AB(a) \cdot BG = \frac{ay}{x} = (\text{Hyp.}) GM$, & à cause des parallèles PM, BG , l'on aura $x(AP) \cdot a - x(PB) :: \sqrt{xx + yy}(AM) \cdot \frac{ay}{x}$ (GM , ou GB). d'où l'on tire $y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, qui est une équation du troisième degré: car on avroit pu la diviser par x avant que d'extraire la racine, & la courbe par conséquent est du second genre.

Il seroit inutile de chercher une construction plus simple que celle qui est renfermée dans l'énoncé du Problème: car il est impossible d'en trouver de plus simples. Voici celle que l'équation donne.

Soit prolongée AB en D , en sorte que $BD = AB$, & décrit un demi cercle AKD sur le diamètre AD . Ayant mené par un point quelconque P la droite PK parallèle BH , qui rencontrera le demi cercle en K , on prendra sur PK , PM quatrième proportionnelle à PK , AP , & PB , & le point M sera à la courbe cherchée.

DEMONSTRATION.

DÉMONSTRATION.

PAR la construction, & à cause du demi cercle, $\sqrt{2ax - xx}$ (PK). x (AP) :: $a - x$ (PB). y (PM), d'où l'on tire $y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$. C. Q. F. D.

On voit par cette équation que la courbe passe des deux côtes de son axe AB , & que les parties qui sont de part & d'autre sont égales & semblables.

Si l'on fait $x = 0$, l'on aura aussi $y = 0$, ce qui montre que la courbe passe au point A , qui est par conséquent le sommet de son axe; & la construction précédente aussi bien que l'énoncé du Problème, font connoître qu'elle coupe au point A son axe AB à angles droits: car si l'on suppose le point P infiniment proche de A , les points K & M en seront aussi infiniment proches. Or puisque (const.) $PK \cdot AP :: PB \cdot PM$, & que PM est pour ainsi dire nulle rapport PB ; AP sera par conséquent nulle par rapport à PK ; & partant le point M est pour ainsi dire dans la perpendiculaire à AB menée par A .

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = a$; d'où il suit que la courbe rencontre encore son axe au point B , puisque y est nulle. Mais outre cela, je dis qu'elle le coupe en faisant avec lui un angle de 45 degrez: car si l'on suppose que le point P soit infiniment proche de B , le point K fera infiniment proche du point H milieu de la circonférence du cercle AKD ; c'est pourquoi PK sera égale à PA , & par conséquent $PB = PM$ à cause de l'Analogie précédente $PK \cdot AP :: PB \cdot PM$; ainsi le petit triangle KPB sera rectangle & isoscele, & partant l'angle PBM sera demi droit.

La même équation $y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, fait voir que $AP = x$ peut devenir plus grande que $AB = a$, sans que les valeurs de y deviennent imaginaires, ce qui fait voir que la courbe passe au-delà de BH par rapport à A , de sorte que la partie MB se continue vers I , & l'autre vers E .

Ee

Mais parcequ'alors y devient negative de positive qu'elle

étoit, l'équation deviendra $-y = \pm \frac{ax - xx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ou y

$= \pm \frac{xx - ax}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ainsi pour décrire les parties de la

courbe qui sont au-delà de BH par rapport à A , ayant mené par un point quelconque p , la droite pk parallèle à BH , l'on prendra pm quatrième proportionnelle à pk , pA , & pB , & le point m sera à la courbe cherchée.

Si l'on augmente x (AP) jusqu'à ce qu'elle devienne

$= AD = 2a$, l'équation deviendra $y = \pm \frac{2aa}{0}$, qui fait

voir DF menée par D parallèle à BH , & prolongée de part & d'autre à l'infini, ne rencontrera jamais la courbe, & lui fera par conséquent asymptote.

Si l'on veut déterminer le point E , où la courbe coupe la circonférence du demi cercle, il n'y a qu'à faire $pm = pk$, c'est-à-dire, $y = \sqrt{2ax - xx}$, & mettant cette valeur de y dans l'équation précédente, l'on en tirera

$x = \frac{3}{2}a$, c'est-à-dire que le point E est vis-à-vis le milieu de BD ; & que par conséquent l'arc ED , est de 60 degrez.

E X E M P L E III.

Problème indéterminé.

FIG. 99. 6. **U**NE ligne droite GH indéterminée de part & d'autre, & un point D hors de cette ligne, étant donné de position sur un Plan. Si l'on ajuste l'axe AE d'une courbe quelconque FAM sur la ligne GH , & qu'on applique au point fixe D une règle DMF , indéfinie de part & d'autre du point D , qui en tournant fasse mouvoir la courbe FAM en poussant de côté ou d'autre un point déterminé C de son axe; le long de la ligne GH , les intersections F & M de la règle DMF , avec la courbe FAM , décriront par ce mouvement deux autres courbes, ou deux parties d'une courbe KF & IM . L'on propose de trouver des équations qui en expriment la nature.

Ayant supposé le Problème résolu, l'on menera du point D la ligne DE perpendiculaire à GH , ou à l'axe de la courbe FAM , & du point d'intersection M les lignes MP , MQ parallèles à DE & à AE : & ayant nommé les données DE , a ; AC , b ; & les indéterminées EP , ou QM , x ; EQ , ou PM , y ; AP , z ; CP fera, $z - b$; DQ , $a - y$; & les triangles semblables DQM , MPC donneront $a - y (DQ) \cdot x (QM) :: y (MP) \cdot z - b (PC)$, d'où l'on tire cette équation.

$A. xy = az - yz - ab + by$, qui est une équation générale pour la courbe IM , telle que puisse être la courbe FAM .

Si l'on change les signes des termes de l'équation A , où y se rencontre, l'on aura $-xy = az + yz - ab - by$, ou

$B. xy = -az - yz + ab + by$, qui est une équation générale pour la courbe KF : car l'inconnue $PM = y$, de positive qu'elle étoit, devient négative FO , $EP = x$, devient EO , & $AP = z$ devient AO . Ce qu'on peut aisément prouver en cherchant une équation dans cette supposition: car CO étant à présent, $b - z$; EC fera $x + z - b$; & les triangles semblables DEC , FOC donneront $a (DE) \cdot x + z - b (EC) :: y (FO) \cdot b - z (CO)$, d'où l'on tire $xy = -az - yz + ab + by$, qui est l'équation B .

La nature de la courbe FAM étant donnée, l'on aura une équation qui exprimera la relation de ses coordonnées AP , ou $AO (z)$ & PM , ou $OF (y)$, d'où l'on tirera une valeur de z que l'on substituera dans l'équation A , ou B ; & l'équation qui en resultera exprimera le nature de la courbe IM , ou KF , & en déterminera le genre.

Soit par exemple la courbe FAM une parabole du premier genre dont le paramètre soit p , l'on aura (art. 10) $p \times AO$, ou $p \times AP = FO^2$, ou PM^2 , ce qui est en termes algébriques $pz = y^2$, d'où l'on tire $z = \frac{y^2}{p}$, &

Ec ij

mettant en la place de x dans les équations A & B la valeur $\frac{yy}{p}$, l'on aura après avoir divisé par y

$$C. x = \frac{ay - yy}{p} + \frac{by - ab}{y}, \text{ \&}$$

$$D. x = \frac{-ay - yy}{p} + \frac{by + ab}{y}.$$

L'équation C donne cette construction. Soit menée par un point quelconque Q pris sur DE la droite QM parallèle à GH . Soit fait $p \cdot DQ :: QE \cdot \frac{DQ \times QE}{p}$; & $QE \cdot DQ ::$

$AC \cdot \frac{DQ \times AC}{QE}$, & ayant fait $QM = \frac{DQ \times QE}{p} - \frac{DQ \times AC}{QE}$ le point M fera à la courbe cherchée IM .

Ayant prolongé DE du côté de E vers S , & mené par un point quelconque R pris sur ES la droite RF parallèle GH ; l'équation D donnera $RF = \frac{DR \times CA}{OF} - \frac{DR \times OF}{p}$, & le point F fera à la courbe KF . Tout ceci est évident par la seule inspection des équations C & D .

Si l'on fait $y = a$, l'équation C deviendra $x = 0$, ce qui fait voir que la courbe IM passe par le point D ; & si l'on fait $y = 0$, l'équation C donnera $x = -\frac{ab}{0} + \frac{0}{p}$

$= -\frac{ab}{0}$, qui montre que HG prolongée à l'infini du côté de G , est asymptote à la courbe IM , & s'en approche de plus en plus à l'infini; & l'équation D donne

$x = \frac{ab}{0} - \frac{0}{p} = \frac{ab}{0}$, qui montre que HG prolongée à l'infini du côté de H , est asymptote à la courbe KF .

L'on a construit ces équations en regardant y comme donnée, parceque si on l'avoit regardée comme inconnue, & x comme donnée, la construction auroit été plus composée, & auroit dépendu de la Geometrie solide: car l'équation auroit été du troisième degré.

M^r Descartes a nommé * dans cette supposition, les courbes *IM* & *KF* paraboloides. * Geom. Liv. 3.

7. Si la courbe *FAM* devient un angle rectiligne dont le sommet soit en *A*, la raison de *AP* à *PM*, ou de *AO* à *OF* sera constante; qu'elle soit donc comme *b* à *c* (si *b* exprime *AC*, *c* exprimera la parallele à *DE* menée de *C* jusqu'à une des droites *AM*, ou *AF*), & l'on aura $y :: b . c$; d'où l'on tire $z = \frac{by}{c}$: & mettant cette valeur de z dans les équations *A* & *B*, l'on aura les deux suivantes,

$$cxy = aby - byy - abc + bcy, \&$$

$cxy = - aby - byy + abc + bcy$, qui sont deux équations à l'Hyperbole que l'on construira par les règles de l'article 21, ou 22.

8. Mais en ce cas on peut avoir des équations bien plus simples en suivant les Observations de l'art. 4. Soient menées du point fixe *D* les droites *DE* paralleles à *AM*, qui rencontrera *GH* en *E*; *DP* parallele à *AF*, qui rencontrera *GH* en *O*; & des points d'interfection *M* & *F*, les droites *MQ* & *FP* paralleles à *GH*, qui rencontreront *DE* & *DP* en *Q* & en *P*; & ayant nommé les données *DE*, *a*; *AC*, *b*; *DO*, *c*; & les inconnues *AE*, ou *MQ*, *x*; *AM* ou *EQ*, *y*; *AO* ou *FP*, *z*; *AF*, ou *OP*, *u*; *CE* sera, $b + x$; *DQ*, $a - y$; *CO*, $z - b$; *DP*, $c + u$; & les triangles semblables *DEC*, *DQM* & *DOC*, *DPF* donneront, $a (DE) . b + x (EC) :: a - y (DQ) x (QM)$, & $c (DO) . z - b (OC) :: c + u (DP) . z (PF)$, d'où l'on tire ces deux équations $by + xy = ab$, & $zu - bu = bc$, qui sont à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes; & que l'on construira par les règles de l'article 22.

9. Si la courbe *FAM* est un cercle dont le centre soit *C*, l'on aura en nommant les lignes comme on les a nommées n^o. 6, $2bz - zz = yy$, d'où l'on tire $z = b + \sqrt{bb - yy}$; & mettant cette valeur de z dans les deux équations generales, l'on en aura deux autres, dont l'on tirera les deux qui suivent.

Ee iij

$$E. x = \pm \frac{a - y \times \sqrt{bb - yy}}{y}, \text{ \&}$$

$$F. x = \pm \frac{a + y \times \sqrt{bb - yy}}{y}, \text{ qui sont du quatrième degré;}$$

\& par conséquent les courbes IM, KF , dont elles expriment la nature, sont du troisième genre.

Ces deux équations présentent une construction assez simple pour décrire par des points les deux courbes IM , \& KF : mais les intersections $M \& F$ du cercle FAM avec la règle mobile DMF , en donnent une encore plus simple: car ayant mené du point D une ligne quelconque DC , qui coupe GH en C , si l'on fait $CM \& CF$ chacune égale à la donnée b ; les points $M \& F$ seront aux deux courbes $IM \& KF$.

D E' M O N S T R A T I O N.

A Y A N T mené des points $M \& F$ les droites $MP, MQ, FO \& FR$ paralleles à $DE \& à GH$, les triangles semblables $MPC, DQM, \& FOC, DRF$ donnent,

$$y(MP) \cdot \sqrt{bb - yy}(PC) :: a - y(DQ) \cdot x(QM), \text{ \&}$$

$$y(FO) \cdot \sqrt{bb - yy}(OC) :: a + y(DR) \cdot x(RF),$$

d'où l'on tire les équations $E \& F. C. Q. F. D.$

Les deux équations $E \& F$ font voir que les courbes $IM \& KF$ passent de l'autre côté de leur axe DE par rapport à C , \& que leurs parties qui sont des deux côtés de DE , sont égales \& semblables.

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = \pm \frac{ab}{0}$, d'où l'on voit que GH prolongée de part \& d'autre à l'infini, est asymptote aux deux courbes $IM \& KF$.

Si l'on fait $x = 0$, l'équation E se changera en ces deux suivantes $yy - 2ay + aa = 0$, \& $bb - yy = 0$, d'où l'on tire $y = a$, \& $y = \pm b$; il suit de la seconde $y = \pm b$, que les deux courbes $IM \& KF$ coupent l'axe DE en deux points $I \& K$, qui sont éloignés du point E de la grandeur du demi diamètre CM . Il suit de la première

$y = a$, que la courbe IM peut passer par le point fixe D , ce qui arrive lorsque $b = a$, & lorsque b surpasse a avec cette différence, que lorsque $b = a$, elle coupe l'axe DE au seul point D ; & lorsque b surpasse a , elle le coupe au point D , & en un autre point plus éloigné de E que le point D , de sorte qu'elle fait en ce cas une espece de nœu, & est semblable à la courbe du Problème précédent. L'on auroit connu la même chose par le moyen de l'équation F .

Nicomede auteur de cette courbe l'a nommée *Coucoïde*, & le point D , le pole de la Coucoïde.

E X E M P L E IV.

Problème indéterminé.

10. **U**N angle droit ABH , & un point fixe A , sur un de ses côtés AB étant donnez. Il faut trouver dans cet angle le point M , en sorte qu'ayant mené du point A par M , la ligne AMG qui rencontre l'autre côté BH en G , & du même point M , la ligne MP parallèle à BH , MG soit égale à AP . FIG. 102.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AB , a ; & les inconnues AP , ou (Hyp.) MG , x ; PM , y ; BP sera, $a - x$; $AM \sqrt{xx + yy}$; & l'on aura à cause des paralleles BG , PM . $x (AP) \cdot \sqrt{xx + yy} (AM) :: a - x (PB) \cdot x (MG)$, d'où l'on tire après les réductions ordinaires, $y = \pm \frac{x\sqrt{2ax - as}}{a - x}$, qui est une équation du quatrième degré; & par conséquent la courbe dont elle exprime la nature, est du troisième genre.

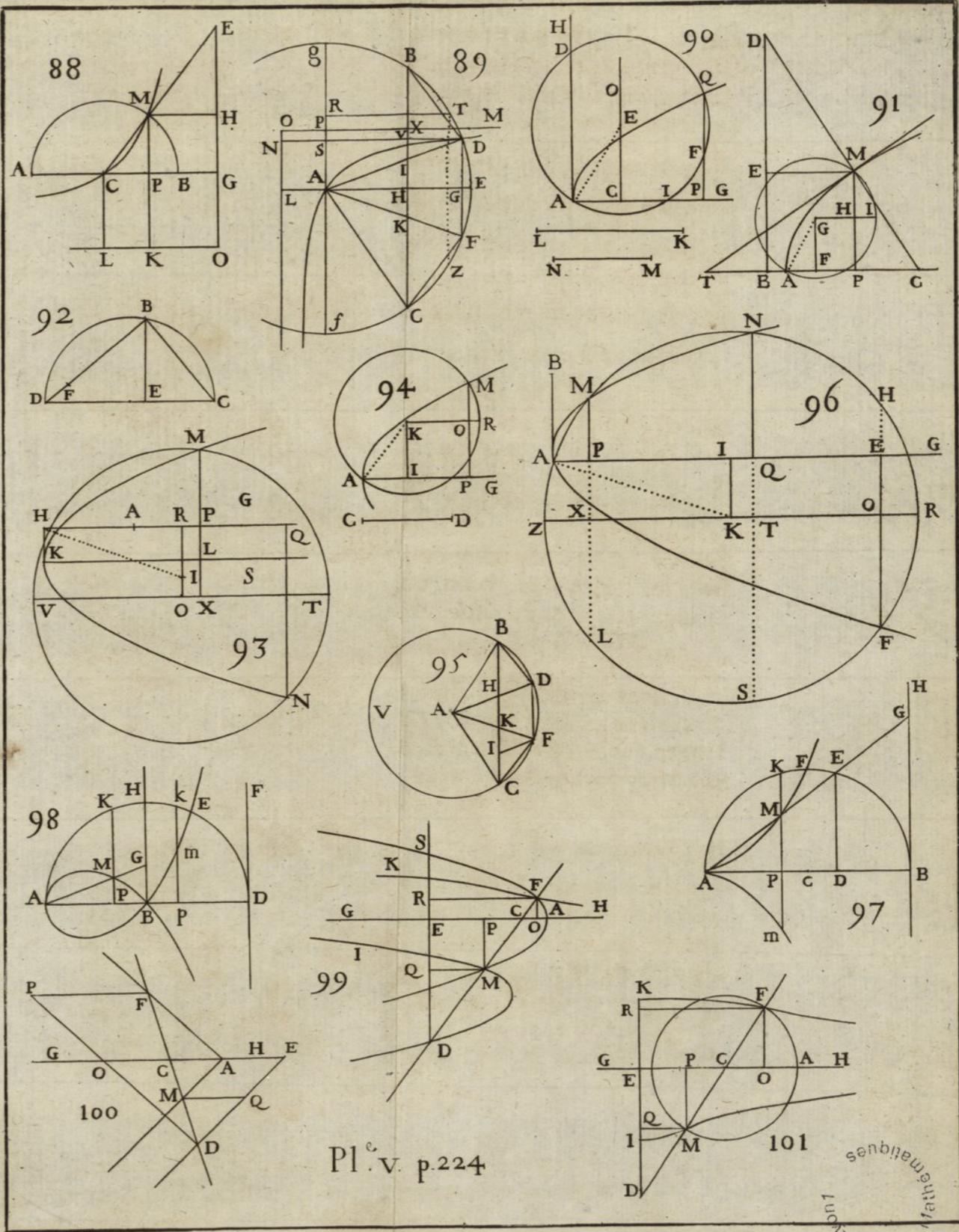
On voit par cette équation que la courbe a deux parties égales & semblables, l'une d'un côté de son axe AB , & l'autre de l'autre.

Si l'on fait $y = 0$, l'on aura $x = \frac{1}{2} a$, d'où il suit que

la courbe coupe AB par le milieu en C , & qu'elle ne la rencontre en aucun autre point; puisqu'on ne trouve qu'une seule valeur pour x . Si l'on fait $x = 0$, l'on aura $y = \frac{0}{a}$ qui pourroit faire penser que la courbe passe aussi au point A , puisque y devient nulle: mais on en est abusé, lorsqu'on fait x moindre qu'un $\frac{1}{2} a$, ou négative: car alors les valeurs de y deviennent imaginaires; c'est pourquoi la courbe ne rencontre AB qu'au seul point C .

Si l'on fait $x = a$, l'on aura $y = \pm \frac{aa}{0}$, ce qui fait voir que la ligne BH prolongée de part & d'autre à l'infini, est asymptote à la courbe.

Si l'on suppose que x surpasse a , ce qui est possible; le dénominateur $a - x$ du membre fractionnaire de l'équation, deviendra une quantité négative; c'est pourquoi les valeurs positives de y deviendront négatives, & les négatives deviendront positives; mais pour les laisser dans l'état où elles sont, il n'y a qu'à changer les signes du dénominateur $a - x$, & l'on aura $y = \pm \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{x - a}$, d'où l'on voit que la courbe a encore deux parties qui sont au-delà de l'asymptote BH , dans les deux angles HBD , IBD faits par le prolongement BD de l'axe AB , & par la ligne HBI ; que ces deux parties ont encore pour asymptote la ligne HBI : car si l'on fait dans la dernière équation $x = a$, l'on aura $y = \pm \frac{aa}{0}$, & que ces deux mêmes parties ne rencontrent point la ligne BD prolongée: car rien n'empêche d'augmenter x à l'infini, sans que les racines de y deviennent nulles ou imaginaires, ce qu'on a déjà remarqué en faisant $y = 0$. Les deux équations précédentes $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{a - x}$, & $y = \frac{x\sqrt{2ax - aa}}{x - a}$ fournissent cette construction. Soit $2ax - aa = zz$, qui est une équation à



Pl. V. p. 224

SC Lyon 1
mathématiques



à la parabole, qui étant construit suivant les règles de l'art. 19, aura pour sommet le point C , & pour axe la ligne CD . Ayant mené d'un point quelconque P pris sur CD , une ligne PK parallèle à BH , qui rencontrera la parabole en K , soit prise PM quatrième proportionnelle à BP , PA , & PK , & le point M fera à la courbe cherchée.

DEMONSTRATION.

ELLE est claire par l'équation précédente.

Cette construction, & l'équation à la courbe, font voir que les deux parties de la courbe qui sont dans les angles HBD , IBD ne rencontrent point la parabole CK : car lorsque le point P se trouve au-delà de B par rapport à A , BP est toujours moindre que PA ; & par conséquent PK moindre que PM . On voit la même chose par l'équation: car si l'on fait l'appliquée PK de la parabole égale à l'appliquée PM de la courbe, c'est-à-dire $\sqrt{2ax - aa} = y$, en mettant cette valeur de y dans l'équation à la courbe, l'on en tirera $x = \frac{1}{2} a$, qui marque que ces deux appliquées ne peuvent être égales qu'en un seul point C , ou elles sont nulles, ou $= 0$, & que par conséquent la courbe ne rencontre la parabole qu'au seul point C .

On voit aussi de ce que $PB \cdot PA :: PK \cdot PM$ que plus le point P s'éloigne de B , allant vers D , plus les points K & M s'approchent l'un de l'autre; de sorte que si l'on suppose le point P infiniment éloigné de B , PB sera pour ainsi dire égale à PA ; & partant aussi $PK = PM$, d'où il suit que la Parabole CK , & la courbe CMM , sont asymptotes l'une à l'autre.

E X E M P L E V.

Problème indéterminé.

II. **D**E' *C*RIRE la Courbe dont la nature est exprimée par l'équation suivante, qui est du quatrième degré, & où les deux inconnues x & y , sont élevées au-dessus du second $x^4 - ayxx + byyx + cy^3 = 0$.

En assignant à y une valeur arbitraire, on regardera cette équation comme une équation déterminée du quatrième degré, & formant, selon les règles de la Section précédente, une équation à la parabole, par exemple $ax = xx$; & mettant dans l'équation précédente pour xx sa valeur ax , l'on aura $aaxx - aayx + byyx + cy^3 = 0$, ou $ax - yx + \frac{byyx + cy^3}{aa} = 0$, qui est une autre équation à la parabole; on combinera ces deux équations à la parabole pour avoir une équation au cercle; on constituera cette équation au cercle avec la première équation à la parabole, qui est la plus simple, & les points d'intersection détermineront les valeurs de x correspondantes à celles que l'on aura assignées à y , que l'on prend pour l'axe de courbe qu'on veut décrire, & ayant appliqué ces valeurs de x , à l'endroit de l'axe où se termine la valeur assignée à y , l'on aura autant de points de la courbe cherchée que l'on aura trouvé de valeurs pour x positives & négatives; & de cette manière, en assignant successivement différentes valeurs à y , l'on aura différens points de la même courbe. Où l'on remarquera que l'équation à la parabole $ax = xx$, ne renfermant point l'indéterminée y , la même parabole servira toujours dans tous les changemens de valeurs que l'on assignera à y . Il n'y aura donc que le cercle dont la grandeur variera selon que l'on augmentera, ou que l'on diminuera la valeur de y .

L'on s'est déterminé à prendre y pour donnée, quoique ces dimensions soient moindres que celles de x , par-

ce que y a un second terme dans l'équation, & x n'en a point, outre que la construction est la même, soit que l'inconnue ait quatre dimensions, ou qu'elle n'en ait que trois.

Si les deux inconnues x & y avoient eu chacune un second terme, l'on auroit pris indifferemment l'une ou l'autre pour constante, & l'on auroit fait évanouir le second terme de celle que l'on auroit prise pour inconnue, afin de faire toujours servir le cercle dans la construction.

Si l'une des deux inconnues étoit élevée au-dessus du quatrième degré, on décrirait encore la courbe par le moyen de la parabole & du cercle, si l'autre inconnue étoit du troisième ou du quatrième : mais on la décrirait par le moyen du cercle seul, selon les regles de Section seconde, si elle n'avoit qu'une ou deux dimensions, en prenant dans l'un & l'autre cas celle qui excède le quatrième degré pour constante.

Si dans une équation indéterminée, les deux inconnues excèdent le quatrième degré, le cercle ne pourra plus servir pour décrire la courbe ; il faudra alors former une équation à la première parabole cubique, par le moyen d'une nouvelle inconnue, & de celle de l'équation dont on veut trouver les valeurs, c'est-à-dire, de celle que l'on ne prend point pour constante.

On substituera dans l'équation proposée, en la place des troisième, sixième, neuvième, &c. puissances de l'inconnue que l'on ne prend point pour constante, leurs valeurs tirées de l'équation à la parabole cubique ; ce qui donnera une équation à une courbe qui servira avec l'équation à la parabole cubique, à décrire la courbe dont l'équation proposée exprime la nature, comme on va voir par l'exemple qui suit.

EXEMPLE VI.

Problème indéterminé.

12. **D**ÉCRIRE la courbe dont la nature est exprimée par l'équation suivante, qui est du sixième degré, & où les inconnues x & y sont toutes deux élevées au-dessus du quatrième,

$$x^6 + ayx^4 - byyxi + bcyx + y^6 = 0,$$

Ff ij

En prenant y pour constante, & la ligne qu'elle exprime pour l'axe de la courbe qu'on veut décrire, l'on fera $aa z = x^3$; donc $a^4 z z = x^6$, & substituant dans l'équation proposée en la place de x^6 , & de x^3 leurs valeurs $a^4 z z$, & $aa z$, l'on aura celle qui suit.

$a^4 z z + a^3 z y x - aab z y y + bcy^3 x + y^6 = 0$, qui est une équation ou l'inconnue x , n'a qu'une dimension; & que l'on construira par conséquent par les règles de la Section seconde, & les Intersections avec la parabole cubique, que l'on décrira aussi par les mêmes règles puisque l'inconnue z , n'a aussi qu'une dimension, donneront les valeurs de x correspondantes à celles que l'on aura assignées à y . Il en est ainsi des autres équations plus composées.

Mais au reste de quelque genre que puisse être une courbe, il est rare que l'on ne puisse pas trouver une manière de la décrire, plus simple que celle qu'on tire de son équation, en suivant les règles prescrites n° 2 & 3, ou autrement.

COROLLAIRE.

13. IL est clair qu'on peut construire les équations déterminées où l'inconnue est élevée au-dessus du quatrième degré comme on vient de dire, en formant une équation à la parabole cubique avec une nouvelle inconnue, & celle de l'équation: car après les substitutions l'on pourra toujours avoir une équation à une courbe où l'inconnue de l'équation proposée n'excedera pas le second degré; & la courbe dont cette équation exprime la nature, & la parabole cubique étant décrites, leurs intersections détermineront les valeurs ou racines de l'inconnue de l'équation proposée. Il est pourtant certain qu'un Problème de cette nature sera toujours construit plus élégamment, lorsqu'ayant employé deux inconnues pour le résoudre, on le construira avec les deux premières équations dans lesquelles on sera tombé à la manière de ceux de la Section neuvième, comme on va voir par l'exemple qui suit.

E X E M P L E

De la construction des Problèmes dont les équations déterminées excèdent le quatrième degré.

Problème.

14. **U**N angle droit ABH , & un point fixe A sur un de ses côtés, étant donné; il faut trouver au-dedans un point M , d'où ayant abaissé sur AB la perpendiculaire MP , le rectangle $AP \times PM$, soit égal à AB^2 ; & qu'ayant mené du point A par le même point M la droite AMC qui rencontre BH en C , AM soit égale à BC . FIG. 103.

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AB, a ; & les inconnues AP, x ; PM, y ; AM sera $\sqrt{xx+yy}$; & l'on aura par la première condition du Problème $xy = aa$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

À cause des triangles semblables APM, ABC , l'on a, $AP(x) \cdot PM(y) :: AB(a) \cdot BC = \frac{ay}{x} = (\text{Hyp.})$

$\sqrt{xx+yy} = AM$, ou en quarant les deux membres, & multipliant par xx , $aayy = x^4 + xxyy$, qui est une équation à une courbe du troisième genre, d'où faisant évanouir y par le moyen de l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, l'on aura $a^6 = x^6 + a^4xx$, qui est une équation déterminée du sixième degré.

Pour la construire par le moyen de l'équation déterminée $a^6 = x^6 + a^4xx$, soit fait $aa z = x^3$, qui est une équation à la première parabole cubique; & mettant dans l'équation $a^6 = x^6 + a^4xx$, en la place de x^3 sa valeur $aa z$, elle deviendra $aa = zz + xx$, qui est une équation au cercle.

Soit présentement F l'origine des inconnues des deux FIG. 104.
équations au cercle, & à la parabole cubique z ; qui va vers G , & x qui lui est perpendiculaire, & va en haut. Si du point F pour centre & pour rayon $AB = a$, l'on dé-

F f iij

crit un cercle ; & sur la même FG pour axe , dont le sommet est F , & le parametre a , la parabole cubique KFN ; elle coupera le cercle en deux points K & N , & la perpendiculaire NQ sera la valeur positive de x , & KL la valeur negative qui sera égale à la positive , de sorte qu'ayant fait $AP = NQ$, le point P sera un des

FIG. 103.
104. points cherchez.

DÉMONSTRATION.

PAR la propriété de la parabole cubique (art. 9 n° 18) $FQ \times aa = QN^3$, ou en termes algebriques $aa z = x^3$, qui montre que cette parabole , n'est pas semblable à la parabole ordinaire , & que ses deux parties vont l'une d'un côté , & l'autre de l'autre de l'axe FG d'un sens

contraire : car l'on tire de son équation $x = \sqrt{aa z}$, qui fait voir que x , n'a qu'une seule valeur qui est positive : mais si l'on fait z negative , l'on aura $x^3 = -aa z$, où x n'a qu'une seule valeur qui est negative. Maintenant par la propriété du cercle , l'on a $FI^2 - FQ^2 = QN^2$, ou en termes algebriques $aa - zz = xx$, ou $a^2 - x^2 = a^4 xx$, qui est l'équation que l'on a construite. C. Q. F. D.

Mais pour résoudre entièrement le Problème , il faut encore déterminer la grandeur de $PM = y$; c'est pourquoy reprenant l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, qui est la plus simple des deux premières qu'on a trouvées ,

l'on en tirera $y = \frac{aa}{x}$, qui est une équation déterminée du premier degré à cause de x dont la valeur vient d'être trouvée ; c'est pourquoy si l'on prend PM troisième proportionnelle à AP & à AB , le point M sera celui que l'on cherche.

On pourra aussi construire cette équation $a^6 = x^6 + a^4 xx$ par le moyen du cercle & de la parabole ordinaire : car ayant fait $af = xx$, l'équation déterminée deviendra $a^3 = f^3 + aaf$, en mettant pour xx sa valeur af , qui est une

équation du troisième degré, que l'on construira par les règles de la Section neuvième; & après avoir trouvé par ce moyen la valeur de f , l'on aura celle de $x = AP$ qui est une moyenne proportionnelle entre a & f : cela fait, il faudra encore déterminer la grandeur de $PM = y$ comme on vient de faire.

Pour construire présentement le Problème avec les deux premières équations $xy = aa$, & $aaay = x^4 + xxyy$; l'origine des inconnues x & y , dans l'une & dans l'autre, étant au point A , x allant vers B , & y parallèle à BH ; ayant fait $BH = AB = a$, & mené AS parallèle à BH , l'on décrira par A entre les asymptotes AB , AS l'Hyperbole HM . FIG. 103.

L'énoncé du Problème donne une description très-simple de la courbe AM dont l'équation $aaay = x^4 + xxyy$ exprime la nature, & cette courbe coupera l'Hyperbole HM au point cherché M . La Démonstration en est claire, & l'on voit que cette construction résout pleinement, naturellement, & très-élegamment le Problème.

On pourroit regarder ce Problème, comme un Problème solide, puisqu'on la construit avec le cercle, & la parabole ordinaire: mais on a jugé à propos de le faire servir d'exemple pour la construction des Problèmes dont les équations excèdent le quatrième degré.

Si on examine la nature de la courbe AM par le moyen de son équation, l'on en tirera une description assez simple, & l'on trouvera qu'elle touche son axe AB au point A , & qu'elle a pour asymptote la droite BH , &c.

REMARQUES GENERALES.

Sur la construction des Problèmes déterminés & indéterminés.

15. **L**ES Problèmes déterminés tels qu'ils puissent être, ont toujours autant de solutions que les deux lignes, droites ou courbes, qui servent à les résoudre, ont de points communs ou d'intersections; & si ces deux lignes ne se ren-

contrent point, le Problème sera impossible.

On pourroit aussi se servir de l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, au lieu de l'équation à la parabole $ay = xx$, pour tirer des équations indéterminées des équations déterminées, du troisième & du quatrième degré, & de l'équation à l'Hyperbole cubique $xy = a^3$, au lieu de l'équation à la parabole cubique $ay = x^3$, pour construire les Problèmes déterminez dont les équations excèdent le quatrième degré. Enfin les Problèmes déterminez construits de la manière que nous avons proposée, seront toujours construits avec les courbes les plus simples qu'ils le puissent être.

16. Pour décrire les courbes du premier genre, on a réduit leurs équations à un certain état: on n'a point fait la même chose pour décrire celles des genres plus composez, parcequ'il y en a une trop grande quantité dans chaque genre. Il peut néanmoins arriver qu'en changeant l'origine, ou la position de leurs axes, ou ce qui revient au même, de leurs coordonnées, les équations en deviendront plus simples; & par conséquent aussi leur construction. Or ces changemens se font de la même manière que ceux qui se font par les réductions, comme on a vu dans toute l'étendue de la Section huitième, en égalant une de leurs inconnues $+$ ou $-$ une quantité connue à une nouvelle inconnue, & substituant dans l'équation la valeur de l'inconnue que l'on en veut faire évanouir, ce qui donnera une équation dont la forme sera différente de la première. On peut faire la même chose sur l'autre inconnue.

On peut encore non-seulement changer l'origine des coordonnées: mais on peut aussi changer l'angle qu'elles font entr'elles, & leur faire faire tel angle qu'on voudra, comme l'on a fait en plusieurs endroits de la même Section huitième.

SECTION

SECTION XII.

Des Courbes mécaniques, ou transcendentes, de leur description, & des Problèmes qu'on peut construire par leur moyen.

XXVI. **T**OUTES les Courbes geometriques rentrent en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini; de maniere que leurs axes, ou leurs coordonnées les rencontrent en un nombre déterminé de points, ce qui fait que les lettres indéterminées des équations qui en expriment la nature, ou, ce qui est la même chose, qui expriment la relation que leurs coordonnées ont entr'elles, ont un nombre déterminé de dimensions, & qu'on peut par conséquent trouver tous les points de ces Courbes geometriquement, c'est-à-dire, par l'interfection de deux lignes geometriques droites, ou courbes.

Toutes les Courbes mécaniques rentrent aussi en elles-mêmes, ou s'étendent à l'infini; mais on ne peut point trouver d'équations qui expriment geometriquement la relation de leurs coordonnées: car il y a des Courbes mécaniques dont une des coordonnées est une ligne droite, & l'autre une ligne courbe dont la rectification est geometriquement impossible. Il y en a d'autres dont les coordonnées sont deux lignes courbes; d'autres dont les appliquées partent toutes d'un même point, & d'autres qui sont figurées de maniere que leurs axes les rencontrent en une infinité de points; d'où il suit qu'afin qu'une équation en pût exprimer la nature; il faudroit qu'au moins une de ses inconnues eût une infinité de dimensions, ce qui est impossible; & c'est pour cela que ces Courbes sont aussi nommées transcendentes.

Il suit de tout ceci que l'on ne peut geometriquement trouver tous les points des Courbes mécaniques, puis-

Gg

que leurs équations n'en expriment que mécaniquement la nature.

Il y a même des Courbes mécaniques dont on ne connoît que certaines propriétés, d'où l'on ne peut tirer d'équations en termes finis. Il faut alors avoir recours à l'infini, en regardant les Courbes comme des Polygones d'une infinité de côtés, & en comparant les côtés d'un triangle infiniment petit, formé par une petite portion de la Courbe comprise entre deux appliquées infiniment proches, par la différence de ces deux appliquées; & par la distance de l'une à l'autre, & que l'on regarde comme un triangle rectiligne, aux côtés d'un grand triangle formé par la tangente, ou la perpendiculaire, par l'appliquée, & par la soutangente, ou par la souperpendiculaire, & les équations que l'on tire de la comparaison des côtés de ces deux triangles, sont nommées *équations différentielles*; parce que les côtés du petit triangle sont les différences de la Courbe, des deux appliquées infiniment proches, & des deux abscisses qui correspondent à ces deux appliquées.

On n'entreprend point ici de donner une Théorie complète des Courbes mécaniques; mais plutôt une simple explication de celles qui se rencontrent le plus ordinairement dans les Ouvrages des Geometres, & particulièrement dans l'excellent Livre de l'Analise des Infiniment Petits de feu *Monsieur le Marquis de l'Hôpital*, où il suppose que son Lecteur connoisse toutes les Courbes dont il explique les plus belles propriétés.

PROPOSITION I.

FIG. 105. I. SOIT un cercle ABP , dont le centre est C , & un rayon CA . Si l'on conçoit que le rayon CA fasse un tour entier autour de son extrémité immobile C , de manière que le point A se meuve uniformément sur la circonférence de A par B en A , pendant qu'un point mobile parcourra aussi d'un mouvement uniforme, le rayon CA allant de C en A ; ce point décrira par la composition de

ces deux mouvemens, une Courbe $CDMA$, qui aura cette propriété dans toutes les situations de AC , par exemple en celle de CP , que la circonférence entière ABA fera à sa partie ABP : comme CA ou CP à CM , ou (ayant nommé CA , a ; ABA , c ; ABP , x ; CM , y ;) $c \cdot x :: a \cdot y$, d'où l'on tire $ax = cy$.

Si l'on suppose que le rayon CA fasse encore un, ou plusieurs tours, le point décrivant parcourera pendant chaque tour, sur CA prolongée, des parties comme AE égales à CA , & la courbe fera autant de tours autour d'elle-même, que CA en aura fait; & comme on peut supposer que le rayon CA fasse une infinité de tours; il suit que la Courbe peut le rencontrer en une infinité de points; & que par conséquent elle est mécanique, ou transcendente.

Archimede Auteur de cette Courbe l'a nommée *Spirale*.

Pour la décrire, ayant divisé la circonférence ABA , & le demi diamètre CA en un nombre égal de parties égales, & mené CP à quelqu'une des divisions, on portera de C en M autant de parties de CA , que ABP en contient, ou de P en M , autant de parties de CA que AFP en contient; & de l'une ou de l'autre manière le point M fera à la Courbe CDM : car l'on aura toujours $ABA \cdot ABP :: CA \cdot CM$, ou $ABA \cdot AFP :: CA \cdot PM$.

On décrira de même le 2.^e tour, en portant sur le prolongement de CP autant de parties de CA que ABP en contient, & ainsi des autres, en décrivant pour chaque tour un cercle dont le rayon soit double, triple, &c. du rayon CA .

Si l'on suppose que le rayon CA , & le point décrivant, se meuvent avec des vitesses qui soient en telle raison qu'on voudra, c'est-à-dire, que ces vitesses soient telles que l'on ait toujours $ABA^m \cdot ABP^m :: CA^n \cdot CP^n$, ou $c^m \cdot x^m :: a^n \cdot y^n$, d'où l'on tirera $a^n x^m = c^m y^n$, qui est une équation pour toutes les Spirales à l'infini.

Ce seroit la même chose si le rayon AC tournoit autour du point C d'un sens contraire, de A par F vers P ,

Gg ij

pendant que le point mobile descendroit de A vers C , en supposant les vitesses telles qu'on les vient de supposer : car nommant AFP, x , & PM, y , l'on auroit encore $c^m \cdot x^m :: a^n \cdot y^n$, ou $a^n x^m = c^m y^n$, qui est l'équation précédente.

Si m & n signifient des nombres positifs, les spirales seront nommées *paraboliques* ; & si l'une des deux signifie un nombre négatif, elles seront nommées *hyperboliques* ; parceque si c & x exprimoient des lignes droites aussi-bien que a & y , ces équations appartiendroient à la parabole dans le premier cas, à l'hyperbole dans le second. Par exemple, si $m = 1$, & $n = 2$, l'on aura $ax = cy^2$. Si $m = 1$, & $n = -1$, l'on aura $xy = ac$. Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura $xy^2 = acc$, &c. L'on décrira ces Courbes comme si elles étoient géométriques, en supposant la quadrature du cercle.

PROPOSITION II.

FIG. 106. 2. SOIT un quart du cercle ADB , dont le centre est C , & les rayons CA & CB . Si l'on conçoit que le rayon CA se meuve uniformément autour du centre C , jusqu'à ce qu'il arrive en CB , & que pendant ce temps-là une perpendiculaire PM au rayon CA , partant du point A , parcourre aussi uniformément le rayon AC , en demeurant parallèle à CB ; l'intersection M du rayon CA qui devient CD , & de la perpendiculaire PM , décrira une courbe AME , qui sera telle que $ADB \cdot AD :: AC \cdot AP$. *Diocles*, son Auteur, l'a nommée *Quadratrice*.

FIG. 107. 3. Si le rayon AC au lieu de se mouvoir autour du centre C , se mouvoit parallèle à lui-même, de sorte qu'étant parvenu dans une situation quelconque DF , l'on ait toujours $ADB \cdot AD :: AC \cdot AP$; l'intersection M de la parallèle DF avec la perpendiculaire PM , décriroit la Courbe AMB , que *Monsieur Tchimhausen* a aussi nommée *Quadratrice*.

FIG. 106. Si l'on nomme AC, a ; ADB, c ; AD, x ; AP, y , l'on
107. aura $c \cdot x :: a \cdot y$, donc $ax = cy$, pour l'équation commune à ces deux courbes.

PROPOSITION III.

4. SOIENT deux cercles AFB , ALI égaux ou inégaux, FIG. 108. qui se touchent en A , dont les centres soient C & H , & les rayons CA , ou CB & HA : soit de plus un point fixe D , pris sur le rayon CB prolongé, ou non prolongé.

Si l'on suppose presentement que le cercle AFB roule sur le cercle ALI , jusqu'à ce que le point B soit parvenu en T , le point D décrira par ce mouvement une portion de Courbe DMS , que l'on appelle *demi Epicycloïde*, ou *demi Roulette*.

Pour trouver une équation qui renferme quelque propriété de cette courbe, supposons que le demi cercle mobile AFB , soit parvenu en roulant dans la situation KLP dont le centre soit O , le point D fera alors en M , qui est un des points de la courbe, & le point B sera en P . Ayant décrit du centre C par D le demi cercle DGE , du centre H par M l'arc MG , qui rencontrera la demi circonference DGE en G , l'on menera du centre H du cercle immobile ALI , les droites HM , qui coupera en I le cercle ALI , HLO qui passera par le point touchant L , & HG qui coupera l'arc ALI en R , & du centre C du demi cercle mobile AFB , la droite CG qui coupera AFB en F .

Il est clair que les triangles HCG , HOM sont égaux, & équiangles: car $HC = HO$, $HG = HM$, & $CG = OM$: c'est pourquoi les angles CHG , OHM seront égaux, & partant l'arc $RI =$ l'arc $AL =$ (Hyp.) l'arc $LK =$ (à cause de l'angle $HOM = HCG$) l'arc FB .

Nommant donc les données CB , ou CF , ou LO , &c. a ; BD , ou MP , ou AE , b ; HA , ou HI , &c. c ; l'arc DG , x ; l'arc MG , y ; & l'appliquée HM , z ; CD sera, $a + b$; & les secteurs semblables CDG , CBF , donneront

$$CD(a+b) \cdot CB(a) :: DG(x) \cdot BF = \frac{ax}{a+b} = RI;$$

& à cause des secteurs semblables HMG , HIR , l'on a

Gg iij

$z(HM) \cdot c(HI) :: y(HG) \cdot \frac{ax}{a+b} (IR)$, d'où l'on

tire $cy = \frac{axz}{a+b}$, ou $acy + bcy = axz$.

COROLLAIRE I.

5. IL est clair que lorsque le point B , ou P touchera le cercle ALI en un point T , l'arc ALT sera égal à la demi circonférence AFB , & le point décrivant D ou M sera sur le rayon HT en S , de sorte que $ST = BD$.

COROLLAIRE II.

6. SI le point décrivant D étoit entre C & B , le cercle DGE seroit intérieur au cercle AFB , & lorsque le point B , ou P seroit parvenu en T , le point décrivant D , ou M , ou, ce qui est la même chose, le point S de la Courbe seroit sur le rayon HT prolongé au-delà de T de la longueur de BD , & l'équation précédente deviendroit $acy - bcy = axz$: car $BD = b$ deviendroit négative de positive qu'on l'a supposée.

COROLLAIRE III.

7. SI le point D étoit en B , ou ce qui est la même chose, si B devenoit le point décrivant, le cercle DGE se confondroit avec le cercle AFB , & le point S de la Courbe tomberoit en T , ou le point B toucheroit le cercle ALI ; & en ce cas $DB = b$ devenant nulle, ou $= 0$, l'équation deviendroit $cy = xz$.

COROLLAIRE IV.

8. SI l'on suppose que le point H s'éloigne infiniment de A dans la ligne AB , le cercle ALI deviendra une ligne droite perpendiculaire sur AB au point A ; l'arc GM , une autre droite parallèle à ALI ; & les rayons AH & MH , deviendront infinis, & par conséquent parallèles & égaux; c'est pourquoi c sera égale à z , & l'équation précédente (n°. 4) se changera en celle-ci $ay + by = ax$,

en la divisant par les quantitez égales c & z , & faisant de nouveau les mêmes raisonnemens que l'on vient de faire dans les trois premiers Corollaires, l'équation du second deviendra $ay - by = ax$; celle du troisième deviendra $y = x$.

La Courbe DMS , est en ce cas nommée, *demi Cycloïde* ou *demi Roulette à Base droite*.

COROLLAIRE V.

9. **S**I le cercle AFB au lieu de rouler, glissoit sur la ligne AL droite, ou circulaire, en sorte que le point touchant A parcourût d'un mouvement uniforme la ligne $ALT = AFB$, pendant que le point décrivant D parcoureroit aussi d'un mouvement uniforme la demi circonférence DGE $>$, $<$, ou $= AFB$, & en lui demeurant concentrique. Il est clair que la demi roulette décrite par ces mouvemens, seroit la même que si le cercle AF rouloit sur la ligne ALT .

COROLLAIRE VI.

10. **M**AIS si le point décrivant D employe plus de temps à parcourir uniformément la demi circonférence DGE , que le point touchant A n'en employe à parcourir aussi uniformément $ALT = AFB$, la demi roulette sera nommée *Alongée*.

Si au contraire le point D employe moins de temps à parcourir DGE , que le point A n'en employe à parcourir $ALT = AFB$; la demi roulette sera nommée *Accourcie*.

COROLLAIRE VII.

11. **S**I le point touchant A , & le point décrivant D se mouvoient avec des vitesses qui fussent telles que les puissances m des parties parcourues par le point A sur AL , & les puissances n des parties parcourues dans des temps égaux par le point D sur la demi circonférence DEG $>$, $<$, ou $= AFB$, gardassent entr'elles un rapport constant, l'on pourroit avoir par ces mouvemens non seulement

240 APPLICATION DE L'ALGÈRE
toutes les roulettes dont on vient de parler : mais encore,
une infinité d'autres de differens genres.

R E M A R Q U E.

12. **L**ES Roulettes & bases droites, sont toutes mécaniques : car une ligne droite se pouvant entendre à l'infini, le cercle mobile AFB , pourra faire une infinité de tours, ou glisser sur cette ligne infinie AL pendant que le point décrivant D , parcourera une infinité de fois la circonférence du cercle concentrique DGE : mais la roulette décrite par le point D rencontrera à chaque tour, ou la ligne AL , ou une autre qui lui sera parallèle ; c'est pourquoi la ligne AL prolongée à l'infini, ou sa parallèle, rencontrera en une infinité de points la Roulette DMS qui sera par conséquent mécanique.

Mais les Roulettes à bases circulaires, ne sont pas de même : car lorsque les diamètres du cercle immobile ALT , & du mobile ABF seront entr'eux, comme nombre à nombre, leurs circonférences seront aussi comme nombre à nombre ; c'est pourquoi le point décrivant D , retombera au même point S après une ou plusieurs révolutions, & si le cercle mobile continue de rouler, ou de glisser après ce tour au point S , le point D recommencera à décrire la même Roulette & partant un rayon HM tiré du centre H , la rencontrera en un certain nombre déterminé de points, alors la Roulette sera géométrique, & l'on pourra trouver une équation qui servira à en déterminer tous les points géométriquement, comme on pourra voir dans un livre que *Monsieur Nicole* va donner au public sur toutes les espèces de Roulettes, où il en expliquera très-sçavamment toutes les propriétés.

Mais lorsque les diamètres du cercle mobile, & du cercle immobile seront incommensurables, le point décrivant ne retombera jamais dans un même point ; & en faisant une infinité de tours autour du cercle immobile, décrira une infinité de Roulettes qui ne seront néanmoins qu'une même Courbe ; & partant un rayon tiré du centre

tre du cercle immobile rencontrera cette Courbe en une infinité de points, & elle sera par conséquent mécanique.

PROPOSITION IV.

PROBLÈME.

13. **I**L faut décrire la courbe BM dont l'axe est AP ; une appliquée PM , & dont une des propriétés est que la soûtangente PT est toujours égale à une ligne donnée KL . FIG. 109.

Ayant supposé le Problème résolu, & mené l'appliquée pm infiniment proche de PM ; la ligne MmT , menée par les points M, m infiniment proches, sera une tangente: car la courbe BM , étant regardée comme un polygone d'une infinité de côtez, Mm sera un de ces côtez. Or il est clair que si la courbe BM est toujours convexe d'un même côté, le petit côté Mm étant prolongé, ne la coupera point, & le prolongement MT sera par conséquent une tangente.

Ayant mené mR parallèle à AP , RM sera la différence des deux appliquées infiniment proches PM & pm ; c'est pourquoi on lui donnera le même nom qu'à PM , précédé de la lettre d , qui signifiera *différence*, & l'on n'emploiera point dans la suite la lettre d à d'autres usages. Ainsi nommant l'appliquée PM, y ; RM sera dy , c'est-à-dire, différence de y ; de sorte que la lettre d ne fait que caractériser y , & n'est l'expression d'aucune quantité: mais parce qu'il n'y a aucun point fixe sur AP , pour pouvoir nommer l'intervalle qui se trouveroit entre ce point fixe, & le point P par une autre inconnue, x ; on se contentera de nommer Pp , ou Rm , dx ; on nommera aussi la donnée KL , ou (Hyp.) PT, a : or le petit triangle MRm étant regardé comme rectiligne à cause de l'infinie petitesse du petit côté Mm , sera semblable au triangle MPT ; c'est pourquoi l'on aura $dy (MR) \cdot dx (Rm) :: y (MP) \cdot a (PT)$, d'où l'on tire $ydx = ady$, qui est une équation différentielle.

14. Pour construire les courbes qui ont de telles équations.

H h

tions, il faut 1°. Que l'une des différences avec son inconnue, si elle s'y rencontre, soit dans un des membres de l'équation, & l'autre dans l'autre, & que les deux différences soient dans le numérateur, si l'équation est fractionnaire; selon cette règle l'équation précédente devient $dx = \frac{ady}{y}$.

2°. Qu'en multipliant ou divisant l'équation, s'il est nécessaire, par une quantité constante, chaque membre soit un plan dont chaque différence soit un côté. Ainsi l'équation $dx = \frac{ady}{y}$ deviendra $adx = \frac{andy}{y}$, en multipliant chaque membre par a .

3°. On égalera chaque membre à une nouvelle inconnue, après l'avoir divisé par la différence qu'il renferme, & l'on aura par ce moyen deux équations à deux courbes géométriques, ou une équation à la ligne droite & l'autre à une courbe. Ainsi de l'équation précédente, on tire $a = z$, qui est une équation à la ligne droite, & $\frac{aa}{y} = f$, ou $aa = yf$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

FIG. 110. 4°. Ayant mené deux lignes DQ, FP qui se coupent à angles droits en A ; on supposera que les quatre inconnues qui se trouvent dans l'équation différentielle, & dans les deux équations que l'on en a tirées, ont leur origine commune au point d'intersection A , de manière que les deux inconnues de chaque équation se trouvent sur les deux lignes qui forment un même angle droit, c'est-à-dire, que si l'on nomme AP, x ; & AQ, y ; qui sont les deux inconnues de l'équation différentielle précédente, il faudra nécessairement nommer AF, f ; & AD, z ; afin que les inconnues y & f de l'équation à l'Hyperbole, forment un même angle droit FAQ , &c.

5°. On décrira par les règles des Sections 8, ou 11 les deux courbes géométriques, chacune dans l'angle, dont les côtés sont exprimés par les inconnues de son équation.

Ainsi dans cet Exemple, à cause de l'équation $aa = sy$ l'on décrira une Hyperbole NN dans l'angle FAQ , dont les côtes AQ , AF sont nommez y & s , & à cause de l'équation $z = a$; ayant fait $AD = a = z$, l'on mènera DS parallèle à AP .

Avant que de venir à la construction des équations différentielles, l'on remarquera, 1°. Qu'elles n'appartiennent pas toutes à des courbes mécaniques; il y en a qui appartiennent à des courbes géométriques: mais l'art de les distinguer dépend du calcul inégal que nous ne pouvons pas expliquer ici. 2°. Que les inconnues dont les différences se trouvent dans une équation différentielle, expriment ou deux lignes droites, ou l'une exprime une ligne droite, & l'autre une ligne courbe, ce qui fait deux cas. La construction de l'équation de ce Problème, & celle de l'équation du Problème qui suit, où toutes ces deux courbes sont mécaniques, serviront d'Exemples pour l'un & pour l'autre cas.

15. Pour construire l'équation $adx = \frac{aady}{y}$, l'on prendra sur $AQ = y$ un point quelconque B , & l'on mènera par B la droite BC parallèle à AF qui rencontrera l'Hyperbole en C , & le point B sera l'origine de la courbe qu'il faut décrire; & ayant pris sur AQ un autre point quelconque Q , l'on mènera par Q la droite QN parallèle à AF qui rencontrera l'Hyperbole en N . Cela fait, on prendra sur DS le point V , tel qu'ayant mené VP parallèle à AD , l'espace ADV soit égal à l'espace hyperbolique $BCNQ$; & le point M où les droites NQ , VP , étant prolongées, se couperont, sera à la courbe cherchée.

DÉMONSTRATION.

AYANT mené du point m pris sur la courbe BM infiniment proche de M , les droites mqn , mpu , & du point N , la petite droite NI parallèle à AQ ; QN étant, s ; AQ, y ; Qq , ou NI sera dy , & partant le petit rectan-

H h ij

gle $QNIq = fdy$: mais comme le petit triangle NIa tous ses côtez infiniment petits, il doit être nul par rapport au petit rectangle $QNIq$; c'est pourquoi $QNIq = QNnq = fdy = \frac{aady}{y}$, en remettant pour f la valeur

$\frac{aa}{y}$. De même AD , ou PV étant, a ; & AP , x ; Pp fera, dx ; & partant le petit rectangle $PVup = adx$. Mais (Coust.) $BCNq = ADVp$, & $BCnq = ADup$; donc $QNnq = PVup$, ou en termes algebriques $\frac{aady}{y} = adx$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

16. IL est clair que la courbe BMm a pour asymptote son axe AP : car l'espace Hyperbolique $BAFGC$ étant infini, le rectangle $ADVP$ ne lui peut jamais être égal, à moins qu'on ne suppose le point P infiniment éloigné de A .

COROLLAIRE II.

17. L'E'QUATION $ydx = ady$, où l'Hypotese donne $dy . dx :: y . a$, d'où l'on voit que si l'on suppose que dx exprime une quantité constante, le rapport de dx à a sera un rapport constant; & partant celui de dy à y le sera aussi; c'est pourquoi si l'on prend sur l'axe AP tant de parties égales qu'on voudra $PC, CD, DE, &c.$ chacune $= dx$, & qu'on mene par les points $P, C, D, E, &c.$ des perpendiculaires $PM, CF, DG, EH, &c.$ ces perpendiculaires seront continuellement proportionnelles: car ayant mené par les points $M, F, G, &c.$ Les droites $MI, FK, GL, &c.$ l'on aura par l'Hypothese $PM(y) . IF(dy) :: CF . KG$; donc *componendo*, $PM . PM + IF :: CF . CF + KG$, c'est-à-dire, $PM . CF :: CF . DG$. Par la même raison $CF, DG :: DG . EH, &c.$ De sorte que si les parties de l'axe $PC, PD, PE, &c.$ ou $PN, PO, PQ, &c.$ prises sur l'axe AP en commençant d'un point quelconque P , croissent ou diminuent en proportion arithmeti-

FIG. III.

que, les perpendiculaires correspondantes $CF, DF, EH,$
 &c. ou $NR, OS, QV,$ &c. croîtront, ou diminueront
 en proportion geometrique; c'est pourquoi si l'on prend
 PC pour l'unité de la progression arithmetique $PC, PD,$
 $PE,$ &c. & PM pour l'unité de la progression geometri-
 que $PM, CF, DG, EH,$ les termes $PC(1), PD(2),$
 $PE(3),$ &c. de la progression arithmetique, seront les
 logarithmes des termes correspondans $CF, DG, EH,$
 &c. de la progression geometrique, qu'on appelle *Nom-*
bres, & 0, le Logarithme de l'unité PM . C'est à cause
 de cette propriété que la courbe BM a été nommée *Lo-*
garithmique.

COROLLAIRE III.

18. LA perpendiculaire PM étant nommée 1, si l'on
 nomme $CF, x; DG$ sera, $x^2; EH, x^3;$ &c. car à cause
 de la progression geometrique, l'on a $PM(1).CF(x)$
 $:: CF(x).DG = \frac{x^3}{1} = x^2; CF(x).DG(x^2) :: DG$
 $(x^2).EH = x^3,$ &c. Par la même raison NR sera,
 $\frac{1}{x}; OS, \frac{1}{x^2}; QV, \frac{1}{x^3};$ &c. car $CF(x).PM(1) :: PM$
 $(1).NR = \frac{1}{x}; PM(1).NR\left(\frac{1}{x}\right) :: NR\left(\frac{1}{x}\right).OS =$
 $\frac{1}{x^2}; NR\left(\frac{1}{x}\right).OS\left(\frac{1}{x^2}\right) :: OS\left(\frac{1}{x^2}\right).QV = \frac{1}{x^3};$ &c. Or
 puisque $PC = 1, PD = 2, PE = 3,$ &c. PN sera =
 $-1, PO = -2, PQ = -3,$ &c. donc en regeant ces
 expressions des perpendiculaires, & celles des parties de
 l'axe $AP,$ de maniere que l'expression de PQ répon-
 de à celle de $QV;$ celle de $PO,$ à celle de $OS,$ &c.
 l'on aura les deux progressions suivantes, qui se répondront
 terme à terme, & chaque terme de la progression arith-
 metique, sera le logarithme de celui qui lui répond dans
 la progression geometrique.

Prog. geom. $\frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot x^1 \cdot x^2 \cdot x^3$, &c.

ou $x^{-3} x^{-2} x^{-1} 1 \cdot x^1 x^2 x^3$, &c.

Prog. arith. $-3 \cdot -2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$, &c.

COROLLAIRE IV.

19. **D**où l'on voit, 1°. Que les exposans des puissances en font les logarithmes. 2°. Que la somme de deux logarithmes, est le logarithme du produit des deux nombres qui leur répondent. Ainsi 5 ($= 3 + 2$) est le logar. de x^5 ($= x^3 \times x^2 = x^{3+2}$). 3°. Que la différence de deux logarithmes, est le logarithme du quotient des deux nombres qui leur répondent. Ainsi 2 ($= 5 - 3$) est le logarithme de x^2 ($= \frac{x^5}{x^3} = x^{5-3}$). 4°. Que le double, le triple, &c. d'un logarithme, est le logarithme du carré du cube, &c. du nombre correspondant. Ainsi 4 ($= 2 + 2$, est le logarithme de $x^4 = x^2 \times x^2 = x^{2+2}$). 5°. Que la moitié, le tiers, &c. d'un logarithme, est le logarithme de la racine quarrée, cube, &c. Ainsi 3 (égal à la moitié de 6,) est le logarithme de $x^3 = \sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}}$.

COROLLAIRE V.

20. **I**L suit aussi des deux Corollaires précédens que le logarithme de la racine d'une puissance multipliée par l'exposant de cette puissance sera le logarithme de la même puissance, & qu'on peut par consequent changer une puissance, ou une autre quantité quelconque en son logarithme, & au contraire: car en supposant les mêmes choses que dans les Corollaires précédens $PC = 1$, étant le logarithme de $CF = x$; $PD = 2$ ($= 2PC = 2$ fois le Logarithme de $CF = x$), sera le Logarithme de $DG = x^2$; $PE = 3$ ($3PC =$ trois fois le Logarithme de $PC = x$), sera le Logarithme de x^3 : ce qu'on exprime en cette sorte: $L : DG$ (L signifie Logarithme) $= 2LCF$, ou $L : x^2 = 2Lx$; $L : EH = 3LCF$, ou $L : x^3 = 3Lx$. De même, $L : OS$ ($= -2PC$) $= -2LCF$, ou

$L: \frac{1}{x^2}$, ou $L: x^{-2} = -2Lx$; & en general $L: x^m = mLx$.

De même $L: ax = La + Lx$; $L: \frac{ax}{y} = La + Lx - Ly$;

$L: ax - xx = La + x + Lx$; $L: aa - xx = La + x + La - x$; $L: axx - x^3 = 2Lx + La - x$.

Il n'est pas plus difficile de changer les quantitez logarithmiques en leurs nombres correspondans: car il n'y a qu'à les élever à la puissance exprimée par leurs logarithmes, & multiplier celles qui sont jointes par le signe +, & diviser par celles qui ont le signe -. Ainsi $N: 3Lx$ (N . signifie Nombre) $= x^3$; $N: mLx = x^m$; $N: La + Lx - Ly = \frac{ax}{y}$; $N: 2Lx + La + x - 2La = \frac{axx + x^2}{aa}$.

Il en est ainsi des autres.

Parce que les logarithmes des quantitez égales, sont aussi égaux; il suit qu'on peut changer les équations ordinaires en équations logarithmiques, & au contraire. Ainsi $yy = aa - xx$, qui est une équation au cercle, se change en celle-ci, $2Ly = La + x + La - x$, qui est une équation logarithmique. De même $2Ly = La + Lx$, qui est une équation logarithmique, se change en celle-ci $yy = ax$ qui est une équation à la parabole. Il en est ainsi des autres.

PROPOSITION V.

A
PROBLEME.

18. **U**N cercle APB, dont le centre est C, étant donné, il faut FIG. 112. décrire la courbe AMD qui fait avec tous les rayons CMP, Cmp, un angle égal à un angle donné.

Il est clair que si l'on suppose que le rayon Cp soit infiniment proche de CP, & que l'on décrive du centre C, par m le petit arc mR, le petit triangle MKm pourra être regardé comme rectiligne; c'est pourquoi ayant mené du centre C, la droite CT perpendiculaire à CP, & prolongé le petit côté Mm jusqu'à ce que le prolongement rencontre CT en T: la droite MmT, qui sera une tangen-

te au point M , la perpendiculaire CT , qui sera la soû-tangente, & la partie CM du rayon CP formeront le triangle rectangle MCT semblable au petit triangle MRm , & qui sera toujours semblable à lui-même, à cause de l'angle CMm , ou CMT égal à un angle donné. Supposons donc que le rapport constant de MC à CT soit comme m à n .

Ayant nommé la donnée CA , ou CP , a ; l'arc indéterminé AP , x ; PM , y ; Pp sera dx ; MR , dy , & CM , $a - y$. Or à cause des sécateurs semblables CPp , CRm , l'on aura $CP(a) \cdot CM(a - y) :: Pp(dx) \cdot MR$
 $= \frac{adx - ydx}{a}$; & à cause des triangles semblables MRm ,

MCT , l'on a $MR(dy) \cdot RM\left(\frac{adx - ydx}{a}\right) :: MC(a - y)$

$CT = \frac{aadx - 2aydx + yydx}{ady}$: mais $m \cdot n :: a - y (MC)$.

$\frac{aadx - 2aydx + yydx}{ady} (CT)$; donc $n \times a - y = m \times$

$\frac{aadx - 2aydx + yydx}{ady}$, ou $n = m \times \frac{aax - ydx}{ady}$, en divisant chaque

membre par $a - y$, ou (n°. 14.) $\frac{na dy}{a - y} = m dx$, qui donne cette construction.

Ayant supposé $m = z$, qui est une équation à la ligne droite, & $\frac{nz}{a - y} = u$, qui est une équation à l'Hyperbole, on prolongera CA en F , en sorte que $AF = m = z$, l'on menera par A la droite GH perpendiculaire à CA , & ayant nommé AG , x , & AH , u ; l'on construira l'Hyperbole HOS entre les asymptotes CA & CB parallèle à AH . D'un point quelconque O pris sur l'Hyperbole, ayant mené OI parallèle à AH , l'on prendra sur AG le point G , en sorte qu'ayant mené GK parallèle à AF , le rectangle $AGKF$ soit égal à l'espace Hyperbolique $AIOH$, & ayant fait l'arc $AP = AG$, & mené le rayon GP , l'on décrira du centre C par I l'arc IM , qui coupera
 CP

CP au point M qui fera à la courbe cherchée.

DEMONSTRATION.

AYANT mené un rayon Cp infiniment proche de CP, qui coupera la courbe au point m décrit du centre C par m l'arc mL; mené LQ parallèle à IO, fait Ag = Ap, & mené gk parallèle à GK. Par la construction, l'espace AgkF est égal à l'espace Hyperbolique ALQH, & AGKF = AIOH; donc GgkK = ILQO: mais GgkK = zdx = mdx, & ILQO = udy = $\frac{nady}{a-y}$; donc mdx = $\frac{nady}{a-y}$ C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

19. IL est clair 1°. Que la courbe AMD ne passera point au centre C du cercle, puisqu'elle coupe tous les rayons à angles égaux. 2°. Qu'elle fera une infinité de tours autour du même centre: car lorsque AG sera égale à la circonférence APBA, le point M de la courbe sera sur le rayon CA: & comme l'espace Hyperbolique HACBS est infini, avant que de l'avoir épuisé, il faudra prendre sur AG prolongée à l'infini, une infinité de fois APBA; c'est pourquoi la courbe AMD rencontrera une infinité de fois le rayon CA, & fera par conséquent une infinité de tours autour du centre C.

COROLLAIRE II.

20. ON tire de l'équation que l'on vient de construire $mdx \cdot ndy :: a \cdot a - y$; d'où il suit que si l'on prend dx pour constante, ou ce qui revient au même, si les parties AP croissent également en devenant Ap, ou, croissent en proportion arithmétique, les appliquées PM, ou CM, seront (n°. 17.) en proportion géométrique; c'est pourquoi cette courbe est nommée *Logarithmique Spirale*.

REMARQUE.

21. SI l'on changeoit l'équation précédente $mdx = \frac{nady}{a-y}$ en celle-ci $adx = \frac{naady}{ma-my}$, en divisant par m, & en multi-

pliant par a , ou $adx = \frac{aady}{a-y}$, en supposant $m=n$; après avoir construit l'Hyperbole selon l'une de ces deux dernières équations, on construira la courbe AMD en prenant le secteur ACP égal à la moitié de l'espace hyperbolique $HAI O$, & le cercle décrit de C par I , couperoit CP au point M qui seroit à la courbe AMD ; & cette courbe seroit encore une Spirale logarithmique, qui auroit les mêmes propriétés que la précédente: car (Const.) le secteur $ACP = \frac{1}{2} AIOH$, & $ACp = \frac{1}{2} \times ALQH$; donc $PCp = \frac{1}{2} ILQO$: mais $PCp = \frac{1}{2} adx$, & $\frac{1}{2} ILQO = \frac{1}{2} \times \frac{naady}{ma-my}$, ou $\frac{1}{2} \times \frac{aady}{a-y}$; donc $adx = \frac{naady}{ma-my}$, ou $\frac{aady}{a-y}$.

La construction de la courbe du Problème précédent ne dépend que de la quadrature de l'Hyperbole: mais celles des courbes de celui-ci dépend de la quadrature de l'Hyperbole, & de celle du cercle tout ensemble.

PROPOSITION VI.

PROBLÈME.

22. **U**N demi cercle ADB , dont le diamètre est AB , & le centre C , étant donné; il faut trouver un point M hors du demi cercle, d'où ayant abaissé sur AB la perpendiculaire MP qui rencontrera la circonférence ADB en D ; la partie MD de la perpendiculaire MP soit égale à l'arc BD , & que le rectangle $BP \times PM$ soit égal au carré du demi diamètre BC .

Ayant supposé le Problème résolu, & nommé la donnée AC , ou CB , a ; & les indéterminées BP , x ; PM , y ; MD , f ; l'arc BD , u ; AP sera, $2a - x$; l'on aura par la première condition du Problème, $f = u$, qui est (n°. 8.) une équation à la roulette à base droite, dont le point décrivant est sur la circonférence du cercle générateur; & par la seconde condition, l'on aura $xy = aa$, qui est une équation à l'Hyperbole par rapport à ses asymptotes.

Pour construire l'équation à la roulette $f = u$; ayant supposé que le point B de la circonférence BDA , soit le point generateur, & mené AT perpendiculaire à AB , on fera rouler le demi cercle BDA sur la droite AT qui le touche en A , & le point B décrira par son mouvement la roulette BMT .

Pour construire l'équation à l'Hyperbole $xy = aa$, on menera le rayon CF parallèle à AT , & l'on décrira (art. 14.) par le point F , l'Hyperbole FM qui coupera la roulette BMT au point cherché M .

DÉMONSTRATION.

AYANT mené par le point M la droite MP perpendiculaire à AB , sa partie MD , comprise entre le point M , & la circonférence BDA , sera par la propriété de la roulette égale à l'arc BD , ce qui est en termes algebriques $f = u$.

Et par la propriété de l'Hyperbole (art. 14.) le rectangle $BP \times PM = BC^2$, ce qui est en termes algebriques $xy = aa$. C. Q. F. D.

REMARQUE.

PARCE QUE la roulette BMT est (n°. 12) une courbe mécanique ; il suit que la construction de ce Problème est aussi mécanique, quoique l'Hyperbole FM soit une courbe geometrique.

L'on remarquera aussi que la construction des Problèmes mécaniques ne diffère point de celle des Problèmes geometriques, lorsqu'on les construit par le moyen de deux équations indéterminées.

L'on pourroit trouver une équation differentielle pour la roulette, & la décrire par les règles expliquées dans la Proposition quatrième : car ayant mené par le point p , pris infiniment proche de P , la droite pSm parallèle à PDM ; par les points D & M les petites droites DR , MI parallèles à AB ; MK parallèle à DS , ou à la touchante en D du cercle BDA ; & le rayon CD . En

nommant encore BP, x ; PM, y ; PD, z ; & DM, f ; BD, u ; Pp , ou DR , ou MI sera dx ; RS, dz ; IM, dy ; KM, df ; or puisque l'arc $BD = DM$, & $BS = Sm$, l'on aura $DS = Km$, ou $df = du$.

A cause des parallèles DR, MI & DS, MK , les petits triangles DRS, MIK seront semblables & égaux; & partant $RS = dz = IK$; donc $dy (= IM = IK + Km = dz + df) = dz + du$, en mettant pour df sa valeur du .

Mais les triangles rectangles DRS, DPC étant semblables, puisque les angles RDS, PDC sont tous deux le complément de l'angle RDC ; l'on aura $DP (z) . PC$

$$(a - x) :: DR (dx) . RS = \frac{adx - xdx}{z} = dz, \text{ \& } DP (z) .$$

$$DC (a) :: DR (dx) . DS = \frac{adx}{z} = du; \text{ mettant donc}$$

dans l'équation précédente $dy = dz + du$, en la place de dz & du , leurs valeurs $\frac{adx - xdx}{z}$, & $\frac{adx}{z}$, l'on aura $dy =$

$$\frac{2adx - xdx}{z}$$

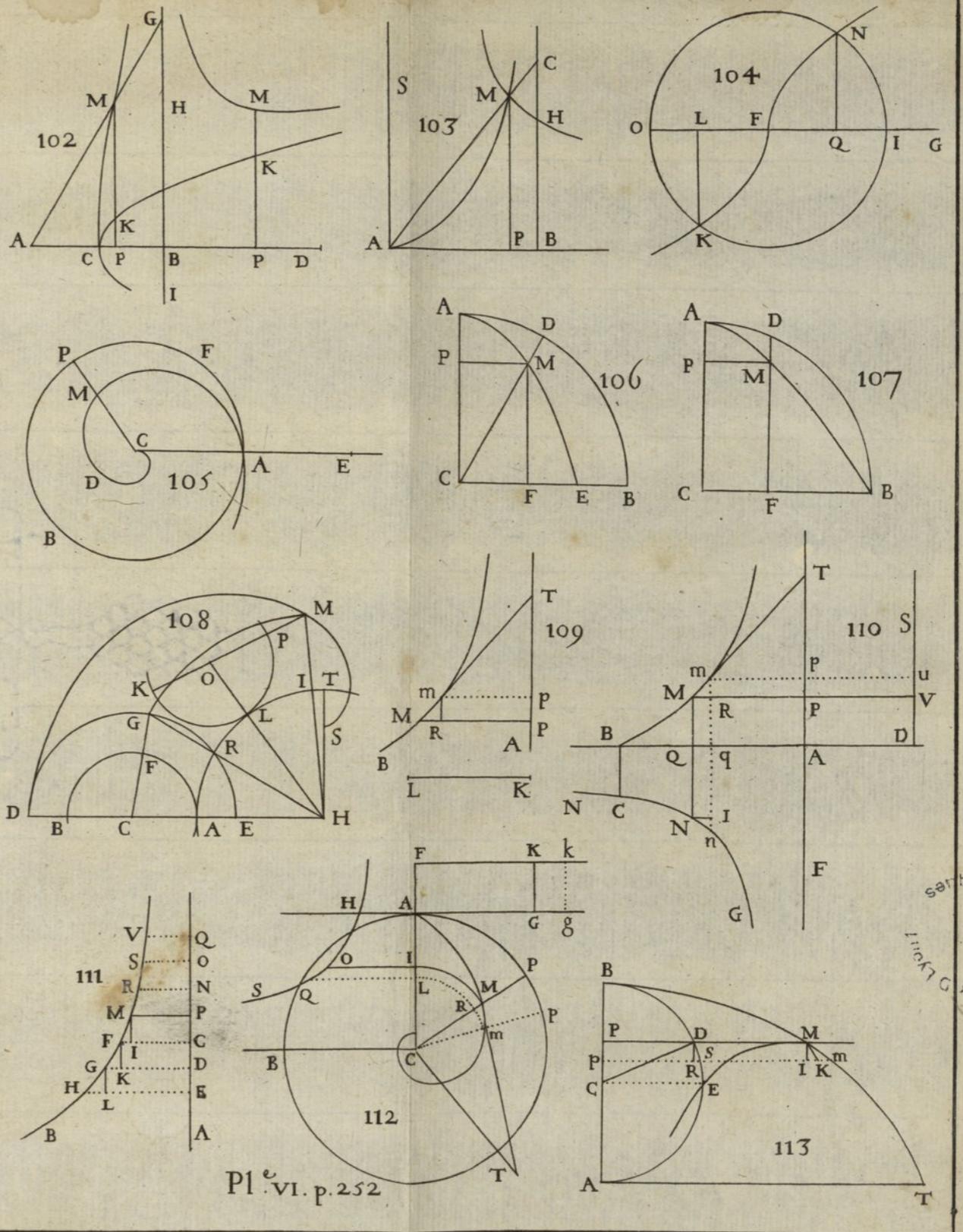
Enfin par la propriété du cercle, l'on a $AP \times PB = PD^2$, ou en termes algébriques $2ax - xx = zz$; donc $z = \sqrt{2ax - xx}$, & mettant cette valeur de z dans l'équation

$$dy = \frac{2adx - xdx}{z}, \text{ elle se changera en celle-ci } dy =$$

$$\frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}, \text{ qui est une équation différentielle, où il n'y a que deux indéterminées, \& leurs différences.}$$

L'on décrira (n°. 14 & 15.) par le moyen de cette équation, la roulette BMT , dont l'intersection M avec l'Hyperbole FM résoudra le problème proposé.

F I N.



Pl^e.vi. p.252.

Bibliothèque
 de la Ville de Lyon



Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page. The text is arranged in several lines and appears to be a list or a set of instructions, but the characters are too light to read accurately.

A P P R O B A T I O N.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, le present Manuscrit, & j'ai crû que la méthode & la clarté de cet Ouvrage, le rendroient fort utile. Fait à Paris ce 15 Juillet 1704.

Signé, FONTENELLE.

P R I V I L E G E D U R O Y.

L O U I S par la grace de Dieu, Roi de France, & de Navarre; à nos Amez & Feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, S A L U T; le sieur G U I S N E' E, de notre Academie Royale des Sciences, notre Professeur de Mathematique au College Royal de Maître Gervais, & ancien Ingenieur, Nous ayant fait exposer qu'il desireroit faire part au Public d'un Ouvrage de sa composition, intitulé *Application de l'Algebre à la Geometrie, ou les Lieux Geometriques, & la Construction des Equations déterminées*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce necessaires: Nous avons permis, & permettons par ces Presentes audit sieur G U I S N E' E, de faire imprimer ledit Livre en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre par tout notre Royaume, pendant le temps de six années consecutives, à compter du jour de la date desdites Presentes; Faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles puissent être, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, & à tous Imprimeurs, Libraires & autres, d'imprimer, faire imprimer & contrefaire ledit Livre en tout ni en partie, sans la permission expresse par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende

contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposéant, & de tous dépens, dommages & intérêts: A la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris; & ce dans trois mois de la date d'icelles: Que l'Impression dudit Livre sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs; & ce en bon papier, & en beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie; & qu'avant que de l'exposer en vente, il en sera mis deux Exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre tres-cher & Feal Chevalier Chancelier de France le sieur P H E L Y P E A U X, Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Presentes: du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit l'Exposéant, ou ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: voulons que la copie desdites Presentes, qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos Amez & Feaux Conseillers & Secretaires, soit ajoutée comme à l'Original: Commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans aucune permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & Lettres à ce contraires: Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-quatrième jour d'Aoust, l'an de grace mil sept cens quatre, & de notre Regne le soixante-deuxième. Par le Roy en son Conseil.

Signé, LE COMTE.

Registré sur le Livre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, numero 228. page 321. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du 13 Aoust 1703. A Paris ce 2 Septembre 1704. Signé PIERRE EMERY, Syndic.

Fautes à corriger dans l'Introduction.

Page v. ligne 13 & 14, $2a - 3b$, lisez $2a + 3b$. Page xlix ligne 4, de, lisez des. Page liij ligne 22, que lisez qui. Page liij ligne 8, ces, lisez les. Page liv ligne 7, lisez $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Page lvj ligne 15, $\frac{ab}{x}$, lisez $\frac{ab}{c}$. Ibid. ligne 17, feront, lisez font.

Dans l'Application de l'Algebre à la Geometrie.

Page 3 ligne 25, dénombrer, lisez démontrer. Page 4 ligne 7, à ces, lisez assez. Page 12 ligne 5 $ax =$, ou $x = 0 \frac{0}{a} = 0$, lisez $ax = 0$, ou $x = \frac{0}{a} = 0$. Ibid. ligne 27 Lieu, lisez le Lieu. Page 52, ligne 18, ajoutez $- a^4yy$. Page 104 ligne 17, $\frac{aa - yy}{y}$, lisez $\frac{bb - yy}{y}$. Page 110 ligne 24, $\frac{2a}{p}$, lisez $\frac{2d}{p}$. Page 128 les asymptotes, lisez les asymptotes, étant donnée. Page 149 ligne 5, $\frac{m - n}{ma}$, lisez $\frac{ma}{m - n}$. Ibid. ligne 20 $\frac{maa}{mn - 2mn + nn}$, lisez $\frac{mnaa}{mm - 2mn + nn}$. Page 141, à la marge, lisez V. art. 22. n°. 9. Page 160, ligne 23 $\frac{ay}{a}$, lisez $\frac{ay}{b}$. Page 189, ligne 26, DC, lisez BC, Ibid. ligne 27, DE, lisez DF. Page 192, G, lisez H, & H, lisez G. Page 197, ligne 30, & du rayon IA, lisez & du rayon IH, que l'on déterminera en prolongeant RA en H, en sorte que $AH = a$. Page 199 ligne 23, on trouvera, lisez on formera. Page 220 ligne 23, AB lisez CD. Page 201 ligne 9, AB, lisez CD. Page 202 ligne 6, BDEC, lisez BDFC. Page 203 ligne 13, AH, lisez FAN. Page 223, ligne 11, Coucoïde, lisez Concoïde. Page 225, ligne 23 uuit, lisez voit. Page 231, ligne 12, par A, lisez par H. Page 240, ligne penultième décrira, lisez il décrira. Page 248, ligne dernière GP, lisez CP.

203^{tt}

Vol 75

