TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE MÉCHANIQUE
STATIQUE.

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE MÉCHANIQUE
STATIQUE.

AVEC des Notes sur quelques endroits.

Par M. l'Abbé BOSSUT, *de l'Académie Royale des Sciences, Examinateur des Ingénieurs, &c.*

A PARIS,

Chez CLAUDE-ANTOINE JOMBERT, Fils aîné, Libraire, rue Dauphine, près le Pont-Neuf.

M. DCC. LXXII.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

22-9-40

DISCOURS

*PRÉLIMINAIRE**.

LES connoissances des Anciens dans la théorie de la méchanique des corps solides ou fluides n'étoient pas aussi bornées qu'on le croit ordinairement. Archimède qui vivoit 250 ans avant J. C. trouva la propriété du centre de gravité & la loi fondamentale de l'équilibre du levier ; ce qui compose tout le fond de la Statique élémentaire. On lui doit encore les principes généraux de l'Hydrostatique. Dans son Livre *de humido Insidentibus*, il établit qu'un point quelconque d'une masse fluide en équilibre est également pressé en toutes sortes de sens ; & il examine en conséquence les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'un corps solide flottant sur un fluide prenne & conserve la situation d'équilibre. Il applique à des exemples, compliqués pour la Géométrie de ce temps-là, cette théorie générale

* Ce Discours a été lû en partie à l'Assemblée publique de l'Académie Royale des Sciences, du 12 Novembre 1768.

qu'on doit regarder comme un précieux monument de ſon génie.

Environ cent trente ans après lui, deux Mathématiciens d'Alexandrie, Cteſibius & Heron, inventèrent pluſieurs machines Hydrauliques très-ingénieuſes, parmi leſquelles il ſuffit de citer la fontaine de compreſſion & le ſyphon recourbé qui ſert à vuider facilement la liqueur d'un tonneau. Sans connoître diſtinctement le reſſort & le poids de l'air, ils employèrent ces deux agens avec ſuccès. Mais ils n'ajoutèrent rien dans le fond aux découvertes Hydroſtatiques d'Archimède.

La ſcience du mouvement des fluides étoit toujours à naître. Sextus-Julius Frontinus, plus connu ſous le nom de *Frontin*, paroît être le premier qui en ait donné quelques idées. Inſpecteur des Fontaines publiques à Rome, ſous les Empereurs Nerva & Trajan, il a laiſſé à ce ſujet un Ouvrage intitulé: *De Aquæductibus urbis Romæ Commentarius*. Il y conſidère le mouvement des eaux qui coulent dans des canaux, ou qui s'échappent, par des ouvertures, des vaſes où elles ſont contenues. Il décrit d'abord les aqueducs de Rome, cite les noms de ceux qui les ont fait conſtruire, & les époques de leurs conſtructions. Enſuite il fixe & compare enſemble les meſures ou modules dont on ſe ſervoit alors à Rome pour déterminer les dépenſes des ajutages. De-là il paſſe aux moyens de diſtribuer les eaux d'un aqueduc ou d'une fontaine. Il fait des obſervations vraies ſur ces différens objets. Par exemple, il a vu que le produit d'un ajutage ne doit pas ſeulement s'évaluer par la grandeur de cet ajutage, & qu'il faut encore tenir compte de la hauteur du réſervoir; conſidération très-ſimple, & cependant négligée par quelques Fontainiers modernes. Il a ſenti pareillement qu'un tuyau deſtiné à dériver en partie l'eau d'un aqueduc, doit avoir, ſelon les circonſtances, une poſition plus ou moins oblique par rapport au cours du fluide, &c. Mais on ne trouve d'ailleurs aucune préciſion géométrique dans ſes réſultats; il n'a point connu la vraie loi des vîteſſes, relativement aux hauteurs des réſervoirs.

Les Lettres & les Arts étoient déja dans la décadence au temps de Frontin; & bientôt l'Europe fut plongée dans la plus affreuſe barbarie. Cette nuit profonde dura près de

1300 ans. La Poëſie & l'Eloquence y jettèrent par intervalles quelques éclairs, trop foibles pour en diſſiper l'obſcurité. L'eſprit humain ne ſortit de cet engourdiſſement qu'au ſiécle des Médicis. On vit alors la foule des Arts agréables, encouragés & protégés par de ſimples particuliers, renaître en Italie, & y briller avec le même éclat qu'ils avoient eu autrefois dans les beaux jours de la Grèce & de Rome. Peu-à-peu ils pénétrèrent chez les peuples voiſins. La Philoſophie eut une marche plus tardive. Je parle ſur-tout de cette branche qui, à l'aide du calcul & de la Géométrie, ſe propoſe d'expliquer avec certitude & avec évidence les phénomènes de la nature. Ennemie des ornemens, cherchant le vrai dans toute ſa ſimplicité, elle avoit peu d'attraits pour des eſprits trop ſenſibles, peut-être, aux charmes de la Poëſie & de la Peinture, & accoutumés à ne cueillir, pour ainſi dire, que les fleurs de l'imagination. L'Italie en fut encore le berceau. Galilée qui floriſſoit il y a 160 ans, mérita d'en être appellé le pere, parmi les modernes. Il dut également ce titre à ſes découvertes Aſtronomiques, & à ſa théorie de l'accélération des graves. Il ne trouva pas les loix du mouvement des Fluides ; mais il facilita cette recherche aux Philosophes qui le suivirent.

Castelli, plein de sa doctrine, & l'un de ses premiers disciples, publia en 1628 un petit Traité où il explique très-bien quelques phénomènes du mouvement des eaux courantes. Mais il se trompe dans la mesure des vîtesses qu'il fait proportionnelles aux hauteurs des réservoirs.

Torricelli, autre disciple de Galilée, considérant que l'eau d'un jet qui sort par un petit ajutage s'élance verticalement presqu'à la hauteur du réservoir, pensa qu'elle devoit avoir la même vîtesse que si elle étoit tombée, par sa gravité, de cette hauteur. D'où il conclut, conformément à la théorie de son Maître, qu'abstraction faite de la résistance des obstacles, les vîtesses des écoulemens suivoient la raison sous-doublée des pressions. Cette idée fut confirmée par des expériences que Raphael Magiotti fit dans ce temps-là sur les produits de différens ajutages sous différentes charges d'eau. Torricelli publia sa découverte en 1643 à la suite d'un petit Traité intitulé : *De Motu gravium naturaliter accelerato.* Elle fit de l'Hydraulique une Science toute nouvelle. Néanmoins elle n'a lieu en rigueur que pour les fluides qui s'écoulent, comme cela arrive ordinairement, par de petits orifices. Lorſque l'orifice eſt fort grand, le mouvement du fluide ſuit une autre loi beaucoup plus composée.

Parmi la foule d'écrivains en ce genre, qui ſuccédèrent à Torricelli, & qui mirent ſon théorême en uſage, M. Mariotte mérite d'être cité avec diſtinction. Né avec un talent rare pour imaginer & exécuter des expériences, ayant eu l'occaſion d'en faire un grand nombre ſur le mouvement des eaux à Verſailles, à Chantilly & dans pluſieurs autres endroits, il compoſa ſur cette matière un Traité qui ne fut imprimé qu'après ſa mort, arrivée en 1686. Il s'y eſt trompé en quelques endroits; il n'a fait qu'effleurer pluſieurs queſtions; il n'a pas connu le déchet occaſionné dans le produit d'un ajutage, par la contraction à laquelle la veine fluide eſt ſujette, lorſque cet ajutage eſt percé dans une mince paroi. Malgré ces défauts, ſon Ouvrage a été fort utile, & il a beaucoup ſervi au progrès de l'Hydraulique pratique.

En 1687, Newton publia ſes *Principes Mathématiques*, & y traita, entr'autres objets, le problême du mouvement des Fluides, par une méthode nouvelle. Pour nous en faire quelqu'idée, repréſentons-nous avec l'Auteur un vaſe cylindrique vertical, percé à ſon fond d'une ouverture par laquelle l'eau s'échappe ; concevons que ce vaſe reçoive par en-haut autant d'eau qu'il en dépenſe, & que par conſéquent il demeure toujours plein à même hauteur. Cela poſé, Newton partage la maſſe entière de l'eau en deux parties. L'une a la figure d'un ſolide produit par la révolution d'une hyperbole du cinquième degré autour de la droite verticale qui paſſe par le centre du trou ; & ce ſolide a pour deux de ſes élémens le trou même & la ſurface ſupérieure du fluide : l'autre partie eſt le reſte de l'eau contenue dans le cylindre. L'Auteur imagine enſuite que les tranches horiſontales de l'hyperboloïde ſont ſeules en mouvement, & que le reſte de la maſſe demeure en repos. Il y a donc ainſi au milieu du fluide une eſpèce de *cataracte* qui ſe renouvelle ſans ceſſe, tandis que l'eau latérale reſte en repos. En comparant le réſultat de cette théorie avec la quantité de l'écoulement, déterminée par l'expérience, Newton conclût que la vîteſſe au ſortir de l'orifice n'étoit dûe qu'à la moitié de la hauteur de l'eau dans le réſervoir. Mais il ſentit lui-même dans la ſuite que cette conſéquence ne pouvoit pas ſe concilier avec la hauteur à laquelle les jets d'eau s'élèvent naturellement. Il n'avoit pas vu d'abord l'effet de la contraction; il le vit dans ſa ſeconde édition qui parut en 1714. Sans abandonner le fond de ſa théorie, il regarda la ſection de la veine contractée comme le vrai orifice par lequel l'écoulement doit être cenſé ſe faire, & la vîteſſe en cet endroit comme dûe à la hauteur correſpondante de l'eau dans le réſervoir. Par ce moyen, la théorie devint plus conforme à l'expérience. Mais elle n'en parut pas pour cela établie aſſez ſolidement. Elle porte en effet ſur des principes arbitraires & nullement démontrés. La formation de la cataracte eſt contraire aux loix de l'Hydroſtatique, & à l'expérience, qui concourent à faire voir que lorſqu'un vaſe donne de l'eau par une ouverture, toutes les particules ſe dirigent vers cette ouverture.

Dans cette Hiſtoire abrégée des Inventeurs; je ne compte ni M. Varignon qui n'a déterminé que d'une manière très-imparfaite la vîteſſe des écoulemens, ni M. Guglielmini qui dans ſa *meſure des eaux courantes*, & dans ſon Traité *ſur la nature des Fleuves*, excellent quant à la partie phyſique & pratique, n'a employé d'autre théorie que celle de Torricelli. Je n'ai pas parlé non plus du Traité de l'équilibre des Liqueurs de M. Paſcal, parce que cet Ouvrage, parfait dans ſon eſpèce, ne contient au fond que des preuves expérimentales de la preſſion égale des fluides en toutes ſortes de ſens.

Tel étoit à-peu-près l'état de l'Hydraulique, lorſque le célèbre M. Daniel Bernoulli, après avoir donné ſur ce ſujet quelques eſſais, imprimés parmi les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, mit au jour ſon *Hydrodynamique*, en 1738. Comme on ne connoît ni le nombre ni la figure des molécules fluides, & qu'il n'eſt par conſéquent pas poſſible de déterminer rigoureuſement le mouvement de chacune d'elles en particulier, M. Bernoulli partage le fluide par maſſes qui ſe meuvent ſuivant la même loi. Il fait deux ſuppoſitions qui lui paroiſſent conformes à l'expérience, & propres à fonder une théorie générale & ſuffiſamment exacte du mouvement des Fluides ; la première, que la ſurface d'un Fluide contenu dans un vaſe qui ſe vuide par une ouverture, demeure toujours horiſontale ; la ſeconde, qu'en imaginant toute la maſſe fluide partagée en une infinité de tranches horiſontales de même volume, ces tranches demeurent contigues les unes aux autres, & que tous leurs points s'abaiſſent verticalement avec des vîteſſes qui ſuivent la raiſon inverſe de leurs largeurs ou des ſections horiſontales du réſervoir. Enſuite pour déterminer le mouvement d'une tranche quelconque, il employe le principe de la conſervation des forces vives ; ce qui eſt permis. Car les tranches fluides agiſſent les unes ſur les autres ſans ſe choquer, & par degrés inſenſibles, à-peu-près comme des corps ſolides formant un même ſyſtême, & agiſſant les uns ſur les autres par des fils ou des leviers, ſe partagent une quantité déterminée de mouvement. Or on ſçait, quoiqu'on n'en ait pas cependant de démonſtration générale, que le principe en queſtion a lieu dans ces ſortes de cas. M. Bernoulli parvient ainſi à des ſolutions très-élégantes par la marche du calcul & par la ſimplicité des réſultats. Il applique les théorêmes généraux à des exemples choiſis; par-tout une profonde Science de l'analyſe; une Phyſique ſûre, puiſée dans la nature des choſes, employant le calcul au beſoin & jamais pour la pompe. En un mot, cet Ouvrage eſt une des plus belles & des plus ſages productions du génie Mathématique.

M. Maclaurin & M. Jean Bernoulli, trouvant que le principe de la conſervation des forces vives n'étoit pas aſſez direct pour ſervir de baſe à la théorie du mouvement des Fluides, réſolurent le problême par d'autres méthodes qu'ils crurent dériver plus naturellement des premières loix de la Méchanique. Ils parvinrent d'ailleurs aux mêmes réſultats que M. Daniel Bernoulli. Peut-être leurs méthodes ſont-elles même ſujettes à des difficultés aſſez graves. Mais cette diſcuſſion nous méneroit trop loin. Les recherches de

M. Maclaurin ſur ce ſujet parurent en 1742 dans ſon Traité des Fluxions ; & *l'Hydraulique* de M. Jean Bernoulli parut en 1743 dans le Recueil de ſes Ouvrages.

Il étoit réſervé à M. d'Alembert de porter dans la théorie de l'Hydrodynamique la même lumière dont il avoit éclairé la Méchanique des corps ſolides. Le principe général qu'il venoit de découvrir pour trouver le mouvement des corps ſolides qui agiſſent les uns ſur les autres, lui ſervit auſſi en 1744, dans ſon *Traité des Fluides*, à réſoudre de la manière la plus ſimple & la plus élégante, les problêmes qui concernent l'équilibre & le mouvement des Fluides. L'Auteur fait les mêmes ſuppoſitions que M. Daniel Bernoulli. A cela près, il établit ſon calcul tout autrement. Il conſidère à chaque inſtant le mouvement actuel d'une tranche, comme compoſé du mouvement qu'elle avoit dans l'inſtant précédent, & d'un mouvement qu'elle a perdu : les loix de l'équilibre entre les mouvemens perdus, lui donnent les équations qui repréſentent le mouvement du fluide. M. d'Alembert réſoud par-là avec facilité, non-ſeulement les problêmes des Auteurs qui l'ont précédé, mais il en donne un grand nombre d'autres qui ſont entièrement nouveaux & très-difficiles. Son Ouvrage eſt donc original à pluſieurs égards par le fond des choſes mêmes : il l'eſt du moins d'un bout à l'autre par la méthode que l'Auteur a employée ; méthode qui fera à jamais époque dans la ſcience du mouvement, dont elle réduit toutes les loix à celles de l'équilibre.

Quoique l'Hydrodynamique eût ainſi acquis un haut degré de perfection, elle étoit néanmoins aſtreinte à l'hypothèſe que les tranches du fluide conſervent leur parallélisme, ou que tous les points d'une même tranche ſe meuvent ſuivant une ſeule & même direction. Il étoit à déſirer qu'on pût exprimer par des équations le mouvement d'un point du fluide dans un ſens quelconque. M. d'Alembert trouva ces équations d'après ces deux principes ; qu'un canal rectangulaire, pris dans une maſſe fluide en équilibre, eſt lui-même en équilibre ; & qu'une portion du fluide, en paſſant d'un endroit à l'autre, conſerve le même volume lorſque le fluide eſt incompreſſible, ou ſe dilate ſuivant une loi donnée lorſque le fluide eſt élaſtique. Il publia cette méthode très-profonde & très-ingénieuſe, dans ſon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, imprimé en 1752. Il l'a encore perfectionnée depuis dans ſes Opuſcules Mathématiques. Elle a été adoptée, à quelque choſe près, par M. Euler, (Mém. de l'Académie de Berlin, an. 1755, & Mém. de l'Académie de Pétersbourg, an. 1756). Ces deux illuſtres Géomètres ſemblent avoir épuiſé toutes les reſſources qu'on peut tirer de l'analyſe pour déterminer le mouvement des fluides. Malheureuſement leurs formules ſont ſi compoſées, par la nature de la choſe, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités Géométriques, très-précieuſes en elles-mêmes ; & non comme des ſymboles propres à peindre l'image ſenſible du mouvement actuel & phyſique d'un fluide.

Il y a des ſciences qui, par leur objet, ne ſont deſtinées qu'à ſervir d'aliment à la curioſité ou à l'inquiétude de l'eſprit humain. Il en eſt d'autres qui doivent ſortir de cet ordre purement intellectuel pour s'appliquer aux beſoins de la Société. Telle eſt en particulier l'Hydrodynamique. La détermina-

tion

tion de la quantité de liqueur, qui s'écoule par une ouverture proposée, la recherche du mouvement des eaux dans des canaux creusés par l'art ou par la nature, la connoissance des forces que les fluides exercent par leur poids ou par leur choc, &c, sont des objets d'une utilité continuelle dans la pratique. Il est donc indispensable de perfectionner la science dont il s'agit; & s'il y a des questions où la Géométrie n'offre pour cela que des secours trop pénibles ou même impuissans, il faut tâcher de suppléer à son défaut par la voie de l'expérience. La chose n'est pas impossible. Des faits multipliés, analysés avec attention, & ramenés autant qu'il est possible à des loix générales, peuvent composer une espèce de théorie dépourvue, à la vérité, de la rigueur Géométrique, mais simple, lumineuse & usuelle. C'est dans cette vûe que j'ai entrepris le traité qu'on va lire. J'en avois formé le projet depuis plusieurs années. La place que j'occupois alors à l'Ecole du Génie m'imposoit le devoir d'enseigner aux jeunes Ingénieurs la méchanique des Fluides, qui est essentielle à leur état. Je leur dictois quelques essais qui n'étoient pas destinés à devenir publics ; je sentois l'insuffisance de la théorie en plusieurs points ; & je voulois consulter l'expérience avant que de commencer un corps d'Ouvrage. Mes idées sur cet important objet furent goûtées par les hommes éclairés & zélés pour le bien, qui ont l'administration de l'Ecole du Génie. M. le Duc de Choiseul accorda des fonds pour faire des expériences. J'en fis, je méditai ; voici le fruit de ce travail.

Mon Ouvrage embrasse l'Hydrostatique & l'Hydraulique. J'ai cru devoir reprendre ainsi toute la matière par les premiers principes, afin de donner plus de clarté & de méthode à ce Traité, & afin de l'adapter plus spécialement aux besoins des Lecteurs que je cherche à instruire. Les notes qu'on trouvera à la suite de plusieurs Chapitres, sont destinées à approfondir certaines théories. J'en dirai quelque chose de plus ci-dessous. Commençons par rendre compte du texte.

Les loix primordiales de l'Hydrostatique, étant fort simples, fort connues, & ayant été confirmées d'ailleurs par une infinité d'expériences, il ne me restoit qu'à les développer nettement, & avec un détail suffisant pour en faciliter l'usage. C'est à quoi je me suis attaché. La théorie que j'établis est fondée toute entière sur ce principe, qu'une particule quelconque d'un fluide en équilibre est également pressée dans tous les sens. Je considère d'abord l'équilibre des fluides incompressibles. J'examine la position que doit prendre la surface de ces fluides dans des vases solides ou flexibles, & la pression qu'ils exercent contre les fonds & les parois des mêmes vases. J'expose la méthode générale pour trouver la figure que forme un vase flexible rempli d'une liqueur pesante, lorsque cette liqueur est parvenue à l'état d'équilibre. La même méthode, simplifiée par la nature du problême, me sert à déterminer les épaisseurs qu'il convient de donner aux tuyaux de conduite, pour qu'ils puissent résister à la pression des fluides stagnans. De-là je passe à l'équilibre des fluides élastiques. Après en avoir exposé les propriétés générales, je considère celui de l'air en particulier. Je démontre la pesanteur & l'élasticité de ce fluide; je cherche la loi suivant laquelle il se comprime ou se dilate à raiſon des poids dont il eſt chargé. Viennent enſuite différentes applications de la théorie à la machine Pneumatique, au Baromètre, au Thermomètre, à l'aſcenſion de l'eau dans les Pompes, à la machine à Feu, &c. Je traite avec le même ſoin une autre théorie qui a pour objet l'équilibre des corps flottans, & qui appartient tout-à-la-fois à la Statique des corps ſolides, & à celle des fluides. L'équilibre dont il s'agit a lieu, lorſque le corps flottant & le fluide déplacé ont même poids, & que leurs centres de gravité ſont ſitués dans une même ligne verticale. Mais il peut avoir plus ou moins de conſiſtance, c'eſt-à-dire, être plus ou moins ſtable dans ſon état, ſelon la poſition reſpective que les deux centres de gravité propoſés occupent ſur la verticale. J'analyſe donc les cas où un corps dérangé de cette ſituation d'équilibre y retournera de lui-même, ou continuera à s'en éloigner. Les principes généraux ſont éclaircis par pluſieurs exemples. J'en fais l'application aux mouvemens de roulis & de tangage des vaiſſeaux.

L'Hydraulique ſe partage en différentes branches que je parcours ſucceſſivement, comme j'ai fait pour l'Hydroſtatique. Ici l'expérience marche preſque par-tout à la ſuite de la théorie ; elle la confirme, l'éclaire, ou même la ſupplée en certains cas où le mouvement du fluide, par ſes irrégularités, ne donne aucune priſe à la Géométrie.

Je commence par examiner le mouvement de l'eau qui ſort d'un vaſe par une ouverture. Ce problême pris dans toute ſa généralité eſt très-difficile. Mais dans la pratique il eſt aſſez ordinaire que l'ouverture ſoit fort petite en comparaiſon de la largeur du réſervoir. Alors je prouve par le ſeul ſecours de la théorie, que la vîteſſe au ſortir de l'orifice eſt dûe à la hauteur du fluide dans le réſervoir au-deſſus du trou. D'après ce principe, je donne pour un vaſe entretenu conſtamment plein, & pour un petit orifice horiſontal, une équation ou formule générale qui contient la relation entre la quantité d'eau écoulée, le temps de l'écoulement, l'aire de l'orifice & la hauteur du réſervoir ; de manière que trois de ces choſes étant données, il eſt facile d'en conclure la quatrième. On trouve des réſultats analogues pour les écoulemens des vaſes qui ſe vuident ſans recevoir de nouvelle eau. Souvent le fluide ſort par une ouverture latérale, comme par une vanne de moulin, une porte d'écluſe, &c. En ce cas, toutes les molécules au ſortir de l'orifice, n'ont pas la même vîteſſe ; & le mouvement général du fluide eſt comme indéterminable à la rigueur. Mais ſi le trou n'eſt pas fort grand, on peut ſuppoſer, ſans craindre d'erreur ſenſible, que la vîteſſe de chaque particule eſt dûe à la hauteur de réſervoir, qui lui répond. J'adopte cette hypothèſe comme ſuffiſante dans la plûpart des problêmes de pratique. Elle me ſert à réſoudre pluſieurs queſtions concernant le mouvement des eaux qui ſortent par des ouvertures latérales. Voilà pour les écoulemens qui ſe font avec une entière liberté, & ſans que le mouvement du fluide dans l'intérieur du vaſe éprouve aucun obſtacle. Mais quelquefois les réſervoirs ſont étranglés en certains endroits de la hauteur, ou bien ils ſont traverſés de diaphragmes percés de petits trous par leſquels le fluide eſt obligé de paſſer. Le mouvement du fluide eſt alors gêné, rallenti, & ne ſuit plus les loix que nous venons d'exposer. Je donne encore des formules pour déterminer ces sortes d'écoulemens. Elles font voir combien il est essentiel d'éviter les étranglemens dans les pompes & dans les tuyaux de conduite. Je termine ces différentes recherches par la solution de quelques problêmes sur le mouvement des eaux qui s'échappent par de petites ouvertures, de vases mobiles entretenus constamment pleins ; problêmes qui peuvent avoir leur utilité, & propres d'ailleurs à exercer les Commençans.

A la théorie des écoulemens, je fais succéder celle des oscillations d'un fluide qui se balance dans un syphon quelconque. Je démontre que le syphon étant supposé cylindrique, ces oscillations sont isochrones entr'elles ; & j'assigne la longueur du pendule simple qui fait ses battemens dans le même temps.

Il reste maintenant à sçavoir si les fluides se meuvent réellement d'une manière conforme à la théorie. Le premier objet qui se présente à examiner, est le mouvement que les particules d'un fluide qui sort d'un vase par une ouverture, prennent dans l'intérieur même du vaſe. Par le moyen d'un cylindre de verre, au fond duquel j'adaptois différens ajutages, j'ai vu que toutes les particules deſcendent d'abord verticalement, mais qu'à une certaine diſtance du trou, elles ſe détournent de leur première direction pour tendre vers lui de tous côtés. Elles ont donc néceſſairement vers ſes bords des mouvemens obliques qui ſubſiſtent pendant quelque temps. En conſéquence de ces mouvemens, la veine fluide doit s'amincir & former une eſpèce de conoïde tronqué, dont la plus grande baſe eſt l'orifice même, & la plus petite en eſt diſtante extérieurement, d'une certaine quantité. J'ai meſuré les dimenſions de ce conoïde avec le plus d'exactitude qu'il m'a été poſſible; il m'a paru que ſa hauteur eſt égale environ au raïon de l'orifice, & que ſes baſes ſont entr'elles environ dans le rapport de 3 à 2. En-delà du point de contraction, la veine prend la forme cylindrique ou priſmatique, & la conſerveroit ſi la peſanteur & la réſiſtance de l'air ne tendoient pas à la dénaturer. Je croyois d'abord, avec quelques Auteurs, que la meſure immédiate de la contraction pouvoit servir à déterminer avec une précision suffisante la quantité de l'écoulement. Mais l'expérience m'a convaincu du contraire. On sent en effet qu'une telle mesure est nécessairement incertaine. Car outre qu'on ne peut jamais répondre qu'on ait pris bien juste le diamètre de la veine, comment s'assurer qu'on l'a pris précisément à l'endroit où la veine cesse de se resserrer pour devenir cylindrique? Cet endroit est-il toujours fixe pour toutes sortes de hauteurs de réservoir & de grandeurs d'orifice? Le diamètre de la veine ne varie-t-il pas lui-même par ces deux causes? La contraction n'a-t-elle lieu que pour des orifices percés dans de minces parois, & n'affecte-t-elle pas, du moins avec quelques modifications, les écoulemens qui se font par des tuyaux? Enfin les effets des contractions ne doivent-ils pas être altérés par le frottement, qui est plus sensible vers les bords que vers le centre de l'orifice? Ces considérations m'ont déterminé à chercher directement par l'expérience les quantités d'eaux écoulées par des orifices quelconques.

M. Mariotte a fait en ce genre plusieurs expériences rapportées dans ſon Traité du mouvement des Eaux, auquel j'ai déja payé le tribut d'éloges qu'il mérite. Mais je ne les ai point employées. Pour mettre de l'uniformité dans mon travail, & pour me délivrer de tout ſcrupule ſur l'exactitude des réſultats, j'ai voulu opérer moi-même, & voir par mes yeux. J'ai déterminé les écoulemens par des orifices percés dans de minces parois, & par des tuyaux additionnels. La théorie avoit appris que les dépenſes d'un vaſe entretenu conſtamment plein, ſont comme le produit du temps par l'orifice & par la racine quarrée de la hauteur du réſervoir. L'expérience m'a fait voir que cette loi eſt ſenſiblement vraie, & qu'on peut l'employer ſans reſtriction dans la pratique ordinaire. Lorſque l'écoulement ſe fait par un orifice percé dans une mince paroi, la contraction diminue la dépenſe naturelle & théorique, à-peu-près dans le rapport de 16 à 10, ou de 8 à 5; & lorſque le fluide ſort par un tuyau additionnel de 2 ou 3 pouces de longueur, & ſuit les parois de ce tuyau, la dépenſe eſt diminuée dans le rapport de 16 à 13 environ. Les formules de la théorie s'appliqueront donc à la pratique, en y faisant les corrections relatives à ces rapports. Si on veut mettre dans ces recherches toute l'exactitude possible, il faudra faire attention à deux phénomènes que j'ai observés. En analysant les effets du frottement & de la contraction, j'ai trouvé, 1°. qu'à cause du frottement les petits orifices donnent moins d'eau à proportion que les grands; 2°. que la hauteur du réservoir augmentant, la contraction augmente, ce qui diminue la dépense; tandis qu'au contraire, suivant la théorie la plus naturelle qu'on puisse se faire sur l'action du frottement, le déchet occasionné dans la dépense par cette résistance, devroit se sentir de moins en moins à mesure que la hauteur du réservoir augmente. Ces deux loix combinées ensemble me donnent le moyen de déterminer les écoulemens avec toute la précision qu'on peut desirer, soit pour des vases entretenus constamment pleins, soit pour des vases qui se vuident sans recevoir de nouvelle eau.

De-là je passe au mouvement des eaux jaillissantes. J'établis la meilleure figure des ajutages, & la meilleure proportion entre le diamètre de l'ajutage & celui du tuyau qui doit fournir à sa dépense. Il est aisé, avec ces principes, de former un jet d'eau qui s'élève à toute la hauteur qu'on peut espérer. L'utilité de cette matière pour la décoration des jardins & des édifices, est suffisamment connue.

Il arrive souvent qu'on a besoin de conduire de l'eau d'un point à un autre qui en est très-éloigné, & qui en est quelquefois séparé par des montagnes & des vallées. Alors on fait cheminer l'eau dans des tuyaux de fer, de bois, de grès, ou de plomb. On commettroit des erreurs souvent énormes, si après s'être assuré par le nivellement que le point de départ est plus élevé que celui d'arrivée, on déterminoit le diamètre du tuyau par les principes qui servent à déterminer l'écoulement d'un fluide qui sort d'un vase par une ouverture ordinaire, & qu'on négligeât la résistance du frottement. Cette résistance répandue sur un long espace, rallentit d'une manière très-sensible le mouvement de l'eau. Le déchet qu'elle occasionne dans la dépense, peut excéder 20 ou 30 fois la dépenſe même, quand la conduite eſt fort longue, & qu'elle a pluſieurs ſinuoſités. J'ai fait ſur cette matière un grand nombre d'expériences qui paroîtront intéreſſantes, ſi je ne me trompe, & dont j'eſpère que la pratique retirera pluſieurs avantages. Elles montrent que toutes choſes d'ailleurs égales, plus la hauteur du réſervoir eſt grande, moins le déchet occaſionné dans la dépenſe d'une longue conduite eſt ſenſible; ce qui eſt conforme à la ſaine théorie ſur la nature du frottement. Elles font connoître, du moins à-peu-près, la loi ſuivant laquelle les dépenſes diminuent à meſure qu'un tuyau devient plus long ou plus tortueux, ou l'un & l'autre tout-à-la-fois. On peut ſe faire par leur moyen une idée de la pente qu'il convient de donner à un tuyau rectiligne, pour que cette pente répare la perte de viteſſe occaſionnée par le frottement. Elles fourniſſent la réponſe à cette queſtion, ſi lorſqu'on a de l'eau à conduire d'un point à un autre qui en eſt ſéparé par des montagnes & des vallées, il faut ou franchir directement les montagnes & les vallées, ou les contourner, en ſuppoſant que le développement de l'eſpace parcouru par l'eau ſoit le même dans les deux cas? &c. Je ne puis qu'indiquer ici en gros tous ces objets qui demandent à être ſuivis dans l'Ouvrage même.

Le mouvement des eaux dans des canaux, offre un nouveau champ de recherches curieuſes par elles-mêmes, & utiles dans la pratique. Je conſidère d'abord le mouvement de l'eau dans un canal rectangulaire. J'examine la loi ſuivant laquelle le frottement diminue la vîteſſe du courant. Il y a une différence ſenſible entre le mouvement de l'eau dans un tuyau fermé de tous côtés & celui de l'eau dans un canal. Sous une même hauteur de réſervoir, il paſſe toujours la même quantité d'eau dans un canal, quelles que ſoient ſa pente & ſa longueur; au lieu que dans un tuyau la pente & la longueur font varier la dépenſe. Mes expériences prouvent que les vîteſſes ne ſuivent point la raiſon des racines des pentes, comme quelques Auteurs l'ont avancé. Elles réfutent auſſi l'opinion de ceux qui penſent qu'à égale pente & à égale longueur de canal, les vîteſſes ſont entr'elles comme les quantités d'eaux écoulées. J'expoſe à la ſuite de ces recherches les moyens que divers Auteurs ont imaginés pour déterminer la vîteſſe des eaux dans des canaux de figure quelconque, comme des rivières, des ruiſſeaux, &c.

L'enchaînement & l'analogie des choſes me conduiſent ici naturellement à ſuivre en particulier & avec quelque détail le cours des fleuves. Je donne d'abord toute la théorie élémentaire dont le ſujet eſt ſuſceptible. On ſçait que quand on retrecit le lit d'une rivière par les arches d'un pont, par des murs de quai, ou de toute autre manière qu'on voudra imaginer, la profondeur de l'eau augmente néceſſairement. Je détermine cette nouvelle profondeur. La même méthode me ſert à réſoudre un autre problême qui eſt en quelque ſorte l'inverſe du précédent, & qui conſiſte à trouver la quantité dont le niveau d'une rivière baiſſe, lorſqu'on y fait une ſaignée par un canal de dérivation. J'entre dans pluſieurs détails phyſiques & géométriques ſur la manière dont les rivières creuſent & établiſſent leurs lits. Cela me donne lieu de dire un mot ſur la formation des *barres*, & ſur les moyens d'empêcher qu'elles ne deviennent trop nuisibles à la navigation. Je diſcute en quel cas il eſt avantageux ou non de faire des saignées à une rivière, pour diminuer les inondations dans les campagnes voiſines, lorſqu'elle vient à augmenter, ou par les pluies, ou par la fonte des neiges, ou par l'affluence de quelque torrent. Des Auteurs modernes ſont tombés à ce ſujet dans des erreurs que je relève.

Après avoir conſidéré le mouvement des eaux en lui-même, je cherche la force dont il peut être capable, quand un fluide va choquer quelque corps, quelqu'obſtacle oppoſé à ſon courant. Cette matière eſt hériſſée de difficultés. J'explique d'abord la théorie ordinaire qu'on employe pour la traiter, & j'en fais l'application à des exemples variés. Suivant cette théorie, la percuſſion perpendiculaire d'un fluide contre un plan, eſt comme le produit de la ſurface choquée, par le quarré de la vîteſſe du fluide; & la percuſſion oblique eſt comme le produit de la ſurface choquée, par le quarré de la vîteſſe du fluide, & par le quarré du ſinus de l'angle d'incidence. L'expérience m'a appris

que

que la première propoſition eſt ſenſiblement vraie ; mais que la ſeconde s'éloigne de plus en plus de la vérité à meſure que la percuſſion devient plus oblique. J'expoſe les réſultats des expériences faites ſur ce ſujet, par de ſçavans Géomètres, & leurs tentatives pour ſoumettre le problême à une théorie plus rigoureuſe & plus exacte que la précédente.

On doit regarder comme une partie eſſentielle de la Science qui nous occupe, la recherche des meilleurs moyens d'employer l'action d'un fluide pour mouvoir une machine. Ces moyens conſiſtent à tranſmettre la force de l'eau à la machine, avec des roues qui ſont mues par le choc ou par le poids de l'eau, quelquefois par ces deux agens réunis. Je traite donc en premier lieu des roues mues par le choc de l'eau. Je cherche le nombre d'aîles qu'il convient de donner à une roue relativement à ſon diamètre, à la quantité dont elle trempe dans l'eau & à la vîteſſe du courant. Pluſieurs Auteurs ſe ſont trompés ſur cette matière. Les uns négligeant dans leur calcul des élémens eſſentiels à la queſtion, ont trop limité le nombre des aîles ; les autres en voulant réfuter cette détermination, & mefurant mal eux-mêmes l'impulfion du fluide, font tombés dans l'extrémité oppofée. On trouvera ici, ce me femble, les vrais principes qui doivent fervir à réfoudre le problême dans chaque cas particulier. Je les confirme par un grand nombre d'expériences. Il eft quelquefois néceffaire de connoître la meilleure proportion entre la hauteur & la largeur d'une aîle. J'indique la manière de trouver cette proportion. On croit depuis long-temps, que pour rendre l'effet de la machine le plus grand qu'il eft poffible, la roue doit prendre le tiers de la vîteffe du courant. Mais on n'a jamais confidéré, dans la folution de ce problême, que l'impulfion du fluide contre une feule aîle, quoiqu'il puiffe y avoir, & qu'il y ait ordinairement plufieurs aîles choquées à-la-fois. L'expérience m'a fait voir que les deux vîteffes doivent être entr'elles dans le rapport de 2 à 5 environ. Je paffe enfuite aux roues mues par le poids de l'eau. Ces roues font garnies, comme on fçait, de pots ou augets qui après avoir reçu une certaine quantité d'eau, la conſervent dans la ſuite, parce qu'il en entre ſans ceſſe autant par en-haut qu'il s'en perd par en bas. La vîteſſe de la roue étant parvenue à l'uniformité, & étant ſuppoſée la même que celle de l'eau du canal, de manière que l'eau agiſſe ſimplement par le poids & nullement par le choc, je fais voir que la roue produit d'autant plus d'effet qu'elle tourne plus lentement. La même concluſion a lieu encore quand la roue eſt mue tout-à-la-fois par le choc & par le poids de l'eau. Je rapporte quelques expériences qui viennent à l'appui de cette théorie.

Il n'a été queſtion juſqu'ici que du mouvement des fluides incompreſſibles, & ſurtout de l'eau. Je conſidère à part le mouvement des fluides élaſtiques. Je détermine la vîteſſe avec laquelle l'air ſort d'un vaſe par une ouverture, & paſſe dans le vuide ou dans un air plus rare. Ces problêmes s'appliquent à la machine Pneumatique & aux Pompes.

Telles ſont en abrégé les principales matières que j'ai traitées dans la partie élémentaire de mon Ouvrage. Mais comme pluſieurs queſtions m'ont paru mériter d'être approfondies par la théorie, je remplis cet objet dans des notes que l'ordre & la clarté m'ont obligé de renvoyer à la fin des Chapitres auxquels elles répondent. Les notes dont l'Hydroſtatique eſt ſemée, concernent la figure des planetes en tant qu'originairement fluides, celle des vaſes flexibles, les oſcillations des corps flottans, que je détermine avec toute la généralité que le problême admet, & dont je fais l'application aux mouvemens de roulis & de tangage des vaiſſeaux, ſoit que ces mouvemens exiſtent ſéparément, ſoit qu'ils ſe combinent entr'eux & avec un mouvement de rotation horiſontale. Dans les notes ſur l'Hydraulique, je donne la théorie du mouvement des fluides avec le même degré de préciſion auquel les Géometres ont pu atteindre juſqu'ici; & je n'oublie rien pour mettre de la ſimplicité & de l'uniformité dans mes calculs. Je crois que cette branche de mon Livre paroîtra nouvelle à quelques égards. On y trouvera, par exemple, la détermination générale de l'effet des roues à aîles; problême épineux, qui n'avoit encore été réſolu que dans un cas très-particulier.

Il ne m'appartient pas d'apprécier moi-même mon travail. Le Public me jugera. Quel que ſoit ſon arrêt, il verra du moins qu'en préſentant mes propres recherches, je n'ai laiſſé échapper aucune occaſion de rendre juſtice aux découvertes des Auteurs qui m'ont précédé dans la même carrière.

EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 4 Février 1767.

MESSIEURS D'ALEMBERT & l'Abbé NOLLET, qui avoient été nommés pour examiner un Traité *d'Hydrodynamique*, par M. l'Abbé BOSSUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris ce 24 Novembre 1770.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

Le Privilége eſt aux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences.

TRAITÉ

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE MÉCHANIQUE.

Définitions & Notions générales.

1. LA Méchanique, dans la ſignification la plus étendue du mot, eſt une Science qui a pour objet les loix de l'équilibre & du mouvement des corps. D'où l'on voit qu'elle ſe partage en deux branches. Celle qui traite de l'équilibre ſe nomme *Statique*; celle qui conſidére le mouvement, ſe nomme *Mechanique proprement dite*, ou *Dynamique*.

2. On appelle *corps*, l'aſſemblage de pluſieurs parties de matière, regardées comme impénétrables; c'eſt-à-dire, comme exiſtantes toujours chacune dans un lieu particulier, ſans pouvoir jamais être réduites à n'occuper qu'un ſeul & même eſpace indiviſible.

Cette impénétrabilité mutuelle des parties des corps eſt la propriété caractériſtique qui diſtingue la matière d'avec l'eſpace qui eſt pénétrable & perméable en toutes ſortes de ſens. La Méchanique ne conſidére les corps que ſous ce ſeul aſpect. Elle fait abſtraction de toutes les qualités qu'ils peuvent avoir d'ailleurs, comme la couleur, l'odeur, la figure, &c. L'examen de ces qualités & de leurs effets appartient à d'autres parties des Mathématiques.

Il y a des corps qu'on oblige à occuper un moindre volume, en les comprimant. Mais cela vient de ce qu'ils ont des *pores* ou eſpaces vuides, qui permettent aux parties de matiere de ſe rapprocher les unes des autres; quand elles ſe touchent, il ne peut plus y avoir de condenſation.

3. Lorſque les parties d'un corps ſont adhérentes les unes aux autres, & ne cédent qu'avec peine à leur ſéparation mutuelle, le corps eſt appellé *ſolide*; & il a plus ou moins de ſolidité, ſelon que cette adhérence eſt plus ou moins forte. Mais ſi les parties ſont détachées les unes des autres, & ont la liberté de changer de place, le corps eſt appellé *fluide* ou *liquide*. Il ne ſera queſtion dans cet Ouvrage que de la Méchanique des corps ſolides; celle des fluides eſt la matière d'un Traité à part.

Tout corps, ſoit ſolide, ſoit fluide, eſt peſant; c'eſt-à-dire, tend à deſcendre, ou deſcend en effet, ſi rien ne l'en empêche, vers la ſurface de la terre, ſuivant une ligne dirigée au centre de ce globe. Mais il ne faut pas pour cela regarder la peſanteur comme eſſentielle à la matière ; elle ne lui appartient qu'accidentellement, & a ſa cauſe particulière. Pourquoi, en effet, les corps tendroient-ils par eux-mêmes vers un point de l'eſpace plutôt que vers un autre, & quelle vertu fondée ſur leur nature pourroit leur donner une telle tendance vers le centre de la terre ? On doit donc s'accoutumer à dépouiller, par la penſée, les corps de la peſanteur, & à n'y voir que de la matière étendue & impénétrable. Quand nous ne les enviſagerons ſimplement que ſous ce point de vûe, nous les déſignerons par le ſimple mot *corps* ; mais quand nous les regarderons comme ſoumis à l'action de la peſanteur, nous les appellerons *corps peſans* ou *poids*.

4. Comme un corps peut être plus ou moins poreux ; ou que les parties dont il eſt compoſé peuvent être plus ou moins voiſines les unes des autres, il faut diſtinguer ſa *maſſe* d'avec ſon *volume*.

5. Par la maſſe d'un corps, on entend la quantité de matière propre dont il eſt compoſé ; le volume eſt l'eſpace apparent qu'il occupe, ou l'extenſion du corps ſuivant les trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur. La Géométrie toiſe les volumes, la Méchanique ne conſidére que les maſſes. Ainſi dans la ſuite de ce Traité, par le mot *corps*, on déſignera toujours la maſſe.

6. Le rapport de la maſſe au volume, c'eſt-à-dire, la quantité de matière que contient un corps ſous un volume *donné*, eſt ce qui en forme la *denſité*. On voit aſſez qu'un corps n'eſt appellé plus ou moins

dense que par comparaison à un autre corps. Or, pour faire une telle comparaison, il faut diviser les masses par le nombre de mesures de leurs volumes; c'est-à-dire, par le nombre de toises cubes, de pieds cubes, &c, qu'elles contiennent : les quotiens qui sont des masses comprises sous *l'unité de volume*, expriment les densités. Ainsi, si l'on a deux corps A & B, & qu'on nomme G & γ leurs volumes ou grandeurs, D & δ leurs densités, on aura la proportion $D : \delta :: \frac{A}{G} : \frac{B}{\gamma}$; donc aussi $A : B :: GD : \gamma\delta$; c'est-à-dire, que les *masses sont en raison composée des volumes & des densités.*

7. Les Métaphysiciens ont beaucoup écrit sur la nature de l'*espace*, sans pouvoir parvenir à s'accorder entr'eux, & à la faire mieux connoître. Il seroit trop long, & d'ailleurs parfaitement inutile, de rapporter ici ces disputes. Contentons-nous, pour notre objet, de regarder l'espace comme étendu, capable de recevoir les corps, & de leur donner un libre passage en toutes sortes de sens. Lorsqu'un corps demeure constamment dans un même endroit de l'espace, il est en *repos;* quand il change de place ou qu'il répond successivement à différens points de l'espace, il est en *mouvement*. Le repos ou le mouvement est *absolu* ou *relatif*, selon que l'espace est absolu ou relatif.

L'espace absolu existe, ou peut être conçu exister en lui-même, sans relation aux choses externes; ensorte que si tous les corps étoient anéantis, il subsisteroit toujours. L'eſpace relatif eſt déterminé, & tombe ſous nos ſens par ſa relation aux corps. Ainſi, par exemple, une chambre qui eſt terminée par les quatre murailles, le plancher & le plafond, eſt un eſpace relatif.

8. Rien ne paroît plus clair que l'idée du *temps*; mais il n'a pas tenu encore aux Métaphyſiciens de la rendre obſcure à force de vouloir l'éclaircir davantage. Il ſuffit ici de conſidérer le temps comme produit par l'écoulement ſucceſſif & uniforme de l'inſtant qui en eſt l'origine ou l'élément, de même qu'en Géomètrie on regarde la ligne comme produite par le mouvement du point qui eſt l'une de ſes extrémités. Ainſi ſans rechercher ce qu'il eſt en ſoi & indépendamment de toute relation aux choſes extérieures, on peut le meſurer, du moins par parties, d'une maniere très-naturelle, en le rapportant à un mouvement toujours égal, ou toujours ſemblable à lui-même. Cette meſure n'eſt pas la même chez tous les Peuples. Les uns la règlent ſur le cours du Soleil, d'autres ſur celui de la Lune ou des Etoiles. Nous ſuivons le premier uſage; notre *année* eſt l'eſpace de temps que le Soleil, partant d'un point du Ciel, ſuppoſé fixe, employe à revenir, par ſon mouvement circulaire, au même point. De-là naiſſent les diviſions connues de l'année en *mois*, *jours*, *heures*, *minutes*, *ſecondes*, &c.

9. On conçoit ſans peine qu'un corps peut être en mouvement dans l'eſpace abſolu, tandis qu'il eſt en repos dans l'eſpace relatif; & qu'au contraire il peut

être en repos dans l'eſpace abſolu, tandis qu'il eſt en mouvement dans l'eſpace relatif. En effet, ſuppoſons, par exemple, le globe de la terre dans une immobilité abſolue. Il eſt clair qu'un homme aſſis dans un batteau emporté par le courant d'une rivière, eſt en mouvement par rapport aux objets ſitués ſur le rivage, puiſqu'il participe au mouvement du batteau qui change continuellement de place par rapport à ces objets : il eſt donc en mouvement dans l'eſpace abſolu ; mais il eſt en repos dans le batteau qui eſt l'eſpace relatif, puiſqu'il y conſerve toujours la même place. Mais ſi tandis que le batteau eſt emporté par l'eau, l'homme étoit emporté par quelque cauſe extérieure avec la même rapidité en ſens directement contraire, cet homme répondroit toujours aux mêmes points de l'eſpace abſolu ; il changeroit ſeulement de place par rapport aux points du batteau ou de l'eſpace relatif : il ſeroit donc en repos dans l'eſpace abſolu, & en mouvement dans l'eſpace relatif.

10. Un corps ſe meut plus ou moins *vîte*, ſelon qu'il parcourt plus ou moins d'eſpace en un tems *donné*. La vîteſſe eſt donc le rapport de l'eſpace parcouru au tems employé à le parcourir, ou *le quotient de l'eſpace parcouru, diviſé par le nombre des meſures du tems.*

On ne peut, en effet, ſe faire une idée de la vîteſſe, qu'en y faiſant entrer celles de l'eſpace & du tems. Car, par exemple, ſi on me dit que deux voyageurs partans de Paris, ſont allés l'un à Fontainebleau, l'autre à Verſailles, j'aurois tort d'affirmer, d'après ce ſimple expoſé, que le premier voyageur a marché plus vîte que le ſecond, quoiqu'il ait parcouru un plus grand eſpace. Pour me mettre en état de comparer les deux marches, il faut qu'on me diſe les tems dans leſquels elles ont été faites. Suppoſons la diſtance de Paris à Fontainebleau = 14 lieues, celle de Paris à Verſailles = 4 lieues; ſuppoſons de plus que le premier voyageur ait employé 14 heures, le ſecond 3 heures. Je vois que le premier voyageur, loin d'avoir marché plus vîte, a marché plus lentement que le ſecond; car en 1 heure le premier a fait $\frac{14}{14}$ de lieue, ou 1 lieue; & le ſecond, auſſi en 1 heure, a fait $\frac{4}{3}$ de lieue, ou 1 $\frac{1}{3}$ lieue. Les deux vîteſſes ſont entr'elles comme les nombres 1 & 1 $\frac{1}{3}$, quotients des eſpaces parcourus diviſés par les tems reſpectifs pendant leſquels ils ont été parcourus.

Il n'y a dans ces diviſions rien qui répugne à leur nature arithmétique; car elles ſe réduiſent à diviſer des eſpaces qu'on peut regarder comme des nombres concrets, par les nombres (abſtraits) des meſures des tems; ce qui donne pour quotients des eſpaces parcourus pendant l'unité de tems. Les eſpaces doivent être évalués en meſure de même eſpéce, comme en toiſes, pieds, pouces, &c; & de même il faut réduire les tems en meſures de même genre, comme en heures, minutes, ſecondes, &c.

11. Il eſt évident que ſi un corps eſt en repos, il ne peut pas de lui-même ſe donner du mouvement; il a beſoin d'être excité par un agent exté-

rieur qu'on nomme *puiſſance* ou *force*. Ainſi la puiſſance ou force, appliquée à un corps, lui imprime ou tend à lui imprimer du mouvement.

Je dis *imprime* ou *tend à imprimer ;* car ces deux cas ſont différens, & donnent lieu de diſtinguer deux ſortes de forces, les *forces motrices* qui produiſent un mouvement réel & actuel, les *forces de preſſion* qui tendent ſeulement à imprimer du mouvement, & qui n'en produiſent pas, parce que leur effet eſt détruit par la réſiſtance de quelqu'obſtacle, ou par d'autres forces oppoſées. Les vîteſſes qui réſultent des premières, s'appellent *vîteſſes réelles* ; les vîteſſes que les ſecondes tendent à produire, s'appellent *vîteſſes virtuelles*.

12. Toute force, quelle que ſoit ſa nature, ne peut être meſurée que par ſon effet. Or que fait la force ? Elle tranſporte ou tend à tranſporter une certaine quantité de matière, d'un endroit de l'eſpace dans un autre endroit, pendant un certain tems. Il y a donc deux choſes à conſidérer dans l'effet de la force ; ſçavoir, 1°. la maſſe tranſportée réellement ou virtuellement. 2°. La vîteſſe réelle ou virtuelle avec laquelle cette maſſe eſt tranſportée. Ainſi l'effet réſultant eſt la vîteſſe communiquée à tous les points de la maſſe, ou répétée autant de fois qu'il y a de points dans la maſſe ; ou, ce qui eſt encore la même choſe, *le produit de la maſſe par la vîteſſe*. Ce produit conſtitue *la quantité de mouvement* qui eſt réelle ou virtuelle, ſelon que la vîteſſe eſt réelle ou virtuelle.

13. Telle eſt donc l'idée claire & préciſe qu'il faut

ſe faire des forces que la Méchanique conſidére. *La force de preſſion eſt repréſentée par le produit d'une certaine maſſe, par la vîteſſe qu'elle tend à lui communiquer.* Toutes les fois que des produits de cette nature ſeront égaux, ils indiqueront des forces égales. *La force motrice eſt repréſentée par le produit de la maſſe par la vîteſſe qu'elle lui communique réellement.*

14. Lorſque pluſieurs forces appliquées à un corps ou à un *ſyſtême* * de corps, ſe détruiſent, de manière qu'il n'en réſulte aucun mouvement, elles ſont en *équilibre*. L'équilibre ſuppoſe donc l'exercice virtuel de pluſieurs forces qui ſe combattent : il diffère du ſimple repos qui a lieu en l'abſence de toutes forces. Quelques Auteurs appellent le repos un *équilibre oiſif*.

15. Il ne reſte plus maintenant d'obſcurité dans la notion que nous avons donnée (1) de la Méchanique. On voit que l'objet de la Statique eſt de déterminer le rapport d'un nombre quelconque de forces qui ſe font équilibre ; elle eſt appellée par pluſieurs Auteurs *la ſcience des forces de preſſion ;* elle conſidère ſur-tout l'équilibre dans les machines, inſtrumens deſtinés à varier les élémens d'un effet, toujours conſtant en quantité, & à procurer la combinaiſon la plus avantageuſe relativement à un certain but, com-

---

* C'eſt ainſi qu'on appelle un aſſemblage de corps liés enſemble par des verges, par des fils, ou de telle autre manière qu'on voudra, & aſſujettis par-là à ne former qu'un même tout. On dit auſſi *ſyſtême de forces*, pour déſigner pluſieurs forces qui agiſſent à-la-fois, ſoit en s'aidant ou en ſe combattant.

me nous l'expliquerons ci-deſſous en détail. La Dynamique détermine les propriétés du mouvement & les effets qui réſultent de l'action & de la réaction de pluſieurs corps les uns ſur les autres, lorſque les forces auxquelles ces corps ſont ſoumis, ne ſont pas en équilibre. Nous traiterons ſucceſſivement de l'une & l'autre partie.

PREMIERE PARTIE.

ÉLÉMENS DE STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de l'équilibre.

16. LES forces ſe comparent entr'elles, comme toutes les grandeurs de même nature. Elles peuvent être repréſentées par des lignes ; & cette manière de les exprimer a l'avantage de peindre aux yeux, non-ſeulement leur quantité d'action, mais encore le ſens ſuivant lequel cette action s'exerce. Ainſi, par exemple, ſi deux puiſſances P & Q (Fig. 1) Fig. 1. tirent un corps A par le moyen de deux fils ou de deux verges dans les ſens AP, AQ, & que la puiſſance P ſoit double de la puiſſance Q, je prendrai à volonté ſur AQ la partie AC pour repréſenter la puiſſance Q, & enſuite ſur AP la partie AB double de AC, pour repréſenter la puiſſance P. On aura ainſi la proportion, $P : Q :: AB : AC$.

Souvent, au lieu de dire qu'une force eſt repréſentée par une certaine partie de ſa direction, on désigne, pour abréger, la force par cette partie même. Ainsi, pour désigner la force P représentée par AB, on peut dire simplement la force AB.

17. Il est permis de regarder une puissance comme appliquée à tel point qu'on voudra de sa direction; car l'action est toujours la même, & s'exerce toujours dans le même sens. Ainsi quand deux puissances P & Q (Fig. 2) tirent un corps A, on peut supposer que ces deux puissances, au lieu d'être appliquées en P & Q, le sont au point A, en agissant toujours dans les sens AP, AQ. On peut même supposer qu'elles sont appliquées en P' & Q', & qu'elles poussent le corps A par le moyen de verges inflexibles $P'A$, $Q'A$. Il en est de même pour tous les autres points de leurs directions.

Fig. 2.

Loi fondamentale de l'équilibre.

18. *Deux forces égales & directement opposées se détruisent, & se font par conséquent équilibre.* Car il n'y a pas de raison pour que l'une l'emporte sur l'autre. Et réciproquement, *quand deux forces se détruisent, elles sont nécessairement égales, & directement opposées*; car il est visible qu'une force ne peut être détruite que par un obstacle placé sur sa direction.

Ce principe, si simple, renferme toute la théorie de l'équilibre. Il s'applique à toutes sortes de systêmes de forces. Si plusieurs puissances en équilibre agissent dans un même plan, suivant telles directions qu'on voudra d'ailleurs, elles doivent être néceſſairement réductibles à deux forces égales & directement oppoſées ; & par la raiſon inverſe, ſi des puiſſances qui agiſſent dans un même plan, ſont réductibles à deux forces égales & directement oppoſées, on peut affirmer qu'elles ſeront en équilibre. Quand les puiſſances en équilibre ne ſont pas dans un même plan, elles doivent être réductibles dans toutes ſortes de plans à deux forces égales & directement oppoſées ; ou bien quand réciproquement cette ſeconde condition a lieu, les forces ſont en équilibre. Il ne s'agit donc ici que de déduire toutes les propriétés de l'équilibre, du principe en queſtion, dans les différentes combinaiſons de forces qui peuvent ſe préſenter. C'eſt ce que nous allons faire, en allant des cas les plus ſimples aux plus compoſés. On verra dans la ſuite de cette première Partie, avec quelle facilité ces propoſitions générales s'appliquent à l'équilibre des Machines.

PROPOSITION I. THÉOREME.

19. *Si deux puiſſances* P & Q (Fig. 3) *tirent un corps* A *dans le même ſens* AQ, *il en réſultera ſur ce corps la même action que s'il étoit tiré dans le même ſens par une force unique égale à la ſomme des deux puiſſances* P & Q. Fig. 3.

Cela eſt évident, puiſque les puiſſances P & Q peuvent être cenſées réunies toutes les deux en un même point (17), & qu'alors la puiſſance appliquée à ce point eſt $P+Q$.

COROLLAIRE I.

20. Donc, pour faire équilibre aux deux puissances P & Q, il faut leur opposer dans la direction AS une force $S = P + Q$.

COROLLAIRE II.

21. Si un nombre quelconque de forces tirent un corps suivant la même direction, il faudra pour leur faire équilibre, leur opposer dans le sens contraire une force égale à leur somme. Car en prenant d'abord deux de ces forces, elles se réduisent à une seule, égale à leur somme; combinant cette force avec une troisiéme, on aura encore une force égale à leur somme; ainsi de suite. Donc, &c.

PROPOSITION II. THÉOREME.

Fig. 4. 22. *Si deux puissances* P *&* Q (Fig. 4) *tirent en sens directement contraires* AP, AQ *un corps* A, *il en résultera à ce corps, dans le sens de la plus forte* P, *la même action que s'il étoit tiré dans ce sens par une force unique, égale à la différence des deux forces* P *&* Q.

Car en représentant par AB & par AC les deux puissances P & Q, & regardant la puissance P comme partagée en deux autres forces exprimées par AD & par DB, dont la premiere AD est égale & directement contraire à AC, il est évident (18) que les deux forces AD, AC se détruisent, & qu'il ne reste pour mouvoir le corps A, que la seule force

DB égale à la différence des deux forces *AB*, *AC*, c'eſt-à-dire, de *P* & *Q*.

COROLLAIRE I.

23. Donc, pour faire équilibre aux deux forces *P* & *Q*, il faut employer dans le ſens *AS* une force $S = P - Q$.

COROLLAIRE II.

24. Si l'on a un nombre quelconque de forces appliquées à un corps, dont les unes tirent dans un ſens, les autres dans le ſens directement oppoſé, & que la ſomme des premieres ſoit égale à la ſomme des ſecondes, il y aura équilibre dans le ſyſtême. Mais ſi l'une des ſommes ſurpaſſe l'autre, il faudra, pour l'équilibre, joindre à la plus petite ſomme une force égale à la différence des deux ſommes propoſées.

PROPOSITION III. LEMME.

25. *Si une force* P (Fig. 5) *tire un corps* A *perpendiculairement à la droite* EG, *elle lui imprimera du mouvement ſeulement dans le ſens* AP, *& ne lui en donnera aucun ni dans le ſens* AE, *ni dans le ſens* AG. *Mais ſi la puiſſance* P (Fig. 6) *tire obliquement par rapport à* EG, *elle éloignera le corps non-ſeulement du point* A, *mais encore de la perpendiculaire* AZ; *& par rapport à ce dernier éloignement, le corps ſera dans le même cas que s'il étoit pouſſé ſuivant la direction* AE *par une force qui produisît le même éloignement.* Fig. 5. Fig. 6.

Tout cela est clair, & n'a besoin que d'être énoncé pour être senti.

PROPOSITION IV. THÉOREME.

Fig. 7 & 8. 26. *Si deux puissances* P *&* Q (Fig. 7 & 8) *tirent un corps* A *suivant les directions* AP, AQ, *qui forment un angle* PAQ, *& sont représentées par les parties* AB, AC *de leurs directions, il en résultera à ce corps la même action que s'il étoit poussé par une force unique représentée par la diagonale* AD *du parallélogramme* ABDC.

DÉMONSTRATION.

Il peut arriver que chacun des angles *PAD*, *QAD* formés par les directions des puissances avec la diagonale soit aigu, ou que l'un, par exemple *QAD*, soit obtus, l'autre étant nécessairement aigu; ce qui fait deux cas. On peut rapporter indifféremment à l'un ou à l'autre la supposition où l'un des deux angles proposés seroit droit; car le point de 90 degrés peut être regardé comme la limite qui sépare l'angle obtus d'avec l'angle aigu.

PREMIER CAS, *lorsque chacun des angles* PAD, QAD, *est aigu.* (Fig. 7).

Fig. 7. Il est clair que les deux forces *P* & *Q* n'agissant ni dans le même sens, ni dans des sens directement contraires, doivent (22 & 19) en partie se détruire, en partie s'ajouter. Ainsi l'effet qu'elles produisent est le même que si à leur place on substitue quatre forces,

forces, dont deux soient directement opposées, & les deux autres conspirantes.

Or le corps ne peut aller que par un seul chemin; & le chemin qu'il prendra est évidemment celui des forces conspirantes, puisqu'elles le poussent l'une & l'autre dans le même sens, sans que rien s'oppose à ce mouvement.

Donc, 1°. les deux forces opposées doivent se détruire; autrement le corps auroit du mouvement dans le sens de la plus grande, & iroit par deux chemins; ce qui est impossible. 2°. Les deux forces conspirantes doivent être perpendiculaires aux deux autres; car si cette perpendicularité n'avoit pas lieu; les forces conspirantes formeroient un angle aigu avec l'une des forces opposées; donc (25) elles ajouteroient quelque chose à cette force; ce qui est contraire à l'hypothèse. Telles sont les deux conditions essentielles auxquelles on doit satisfaire dans la recherche de la résultante demandée. Or, si après avoir mené par le point A, & perpendiculairement à la diagonale AD, la droite EG, on acheve les rectangles $AEBF$, $AGCH$, & qu'on prenne à la place de la force AB, les deux forces AE, AF, & à la place de la force AC, les deux forces AG, AH, je dis que les deux conditions proposées seront remplies. Car, 1°. les deux triangles rectangles ABF, DCH, qui ont des hypothénuses AB, DC égales, & tous les angles égaux chacun à chacun, sont parfaitement égaux. Donc $BF = CH$; mais $BF = AE$, & $CH = AG$; donc $AE = AG$. Ainsi les deux forces opposées AE, AG sont égales, & par conséquent se détruisent. 2°. Les deux forces conspirantes AF, AH, sont perpendiculaires aux deux forces opposées AE, AG; & de plus elles expriment les quantités dont le corps doit s'éloigner de la droite EG, de la même maniere que les deux forces AE, AG expriment les quantités dont il se seroit éloigné de la droite AD, si chacune de ces deux dernieres forces avoit agi séparément & librement. Donc le corps A est mû exactement de même que s'il étoit soumis simplement à l'action des deux forces AF, AH. Or la résultante de ces deux forces est (19) $AF + AH$; & comme $AF = HD$, cette résultante est $AH + HD$, ou AD. Concluons donc enfin que la résultante des deux puissances P & Q, exprimées par les côtés AB, AC du parallélogramme $ABDC$, est exprimée par la diagonale AD du même parallélogramme. C. Q. F. 1°. D.

SECOND CAS, *lorsque l'angle* QAD *est obtus* (Fig. 8).

Fig. 8. Soit menée par le point A, & perpendiculairement à la diagonale AD, la droite EG; & soient achevés les parallélogrammes rectangles $AEBF$, $AGCH$. A la place de la force AB, on pourra prendre (1er cas) les deux forces AE, AF; & à la place de la force AC, les deux forces AG, AH. Or les deux forces AE, AG sont directement opposées, & de plus sont égales; donc elles se détruisent. Il ne reste donc que les deux forces AF, AH;

& comme elles agiſſent en ſens contraires, leur réſultante eſt égale (22) à leur différence; elle eſt par conſéquent $AF-AH$, ou bien (à cauſe de $AH=DF$), $AF-DF$ ou la diagonale AD. C.Q.F. 2°.D.

COROLLAIRE I.

27. Il ſuit des deux cas que ſi en général deux forces ſont repréſentées par les côtés contigus à un même angle, d'un parallélogramme quelconque, on peut leur ſubſtituer une force unique repréſentée par la diagonale correſpondante du même parallélogramme; & que réciproquement à la place d'une force exprimée par la diagonale d'un parallélogramme, on peut prendre deux forces exprimées par les côtés du même parallélogramme, adjacens à cette diagonale.

On appelle *force compoſée*, *force réſultante*, la force AD, qui produit le même effet que les deux forces AB, AC, & celles-ci s'appellent *forces compoſantes*. L'art de trouver la force compoſée quand on connoît les forces compoſantes, s'appelle *compoſition des forces*; & l'art de trouver les forces compoſantes, quand on connoît la force compoſée, s'appelle *décompoſition des forces*.

Il n'eſt pas beſoin de faire obſerver que deux forces compoſantes & leur réſultante ſont dans un même plan; cela eſt clair, puiſqu'elles ſont exprimées par les côtés & la diagonale d'un même parallélogramme, qui ſont toujours dans un même plan.

COROLLAIRE II.

28. Donc, pour trouver une puissance qui fasse
Fig. 9. équilibre aux deux puissances P & Q (Fig. 9), dont les directions concourent au point A, & qui sont exprimées par les parties AB & AC de ces directions, il faut achever le parallélogramme $ABDC$; & ayant prolongé la diagonale DA au-delà du point A, on appliquera suivant cette direction AK une puissance S, exprimée par une partie AK égale à AD; cette puissance (18) fera équilibre aux deux autres P & Q, puisqu'elle sera égale & directement opposée à leur résultante R.

COROLLAIRE III.

29. Les deux puissances P, Q, & leur résultante R étant exprimées par les côtés AB, AC, & la diagonale AD du parallélogramme $ADBC$, on a cette suite de rapports égaux, $P:Q:R::AB:AC$ ou $BD:AD$. Or si l'on forme un triangle MON dont les côtés MO, ON, MN soient parallèles ou perpendiculaires chacun à chacun des côtés AB, BD, AD du triangle ABD; ces deux triangles seront semblables. On aura donc $AB:BD:AD::MO:ON:MN$. Donc aussi $P:Q:R::MO:ON:MN$. Et comme, pour l'équilibre, il faut opposer à la résultante R, une force S qui lui soit égale, on aura encore $P:Q:S::MO:ON:MN$.

COROLLAIRE IV.

Fig. 10. 30. Si d'un point quelconque D (Fig. 10) de

la direction de la résultante R de deux puissances P & Q, on abbaisse les perpendiculaires DE, DF sur les directions de ces puissances, & qu'on mène la droite EF, on aura cette suite de rapports égaux, $P:Q:R::DF:DE:EF$. Car ayant achevé le parallélogramme $ABDC$, on a $P:Q:R::AB:AC$, ou $BD:AD$. Or les angles AED, AFD étant droits, le cercle décrit sur AD comme diamètre, passe par les points E & F. Donc, 1°. l'angle BAD est égal à l'angle EFD, puisque ces deux angles ont le sommet à la circonférence, & s'appuyent sur un même arc. 2°. Par la même raison, l'angle CAD, ou son égal ADB, est égal à l'angle FED. Ainsi les deux triangles ABD, FDE, sont semblables, & donnent $AB:BD:AD::DF:DE:EF$. Donc aussi $P:Q:R::DF:DE:EF$. Mettant dans cette suite de proportionnelles à la place de la résultante R, la force S qui lui est égale & contraire, on aura $P:Q:S::DF:DE:EF$.

COROLLAIRE V.

31. La même construction subsistant, si on ne demandoit que le rapport de P à Q, on auroit $P:Q::DF:DE$. D'où l'on voit que *les deux puissances* P *&* Q *sont en raison réciproque des perpendiculaires abbaissées d'un même point de la direction de leur résultante sur leurs propres directions.*

Si on veut avoir, d'une manière analogue, les rapports des puissances P & Q à la résultante R, ou à la force S ; d'un point quelconque F de la direction de la puissance Q, on abaissera les perpendiculaires Fa, Fb sur les directions des puissances P & R; on joindra les points a & b par la droite ab: de même, d'un point quelconque E de la direction de la puissance P, on menera les perpendiculaires Eg, Ef sur les directions des puissances Q & R; on tirera gf. Par ces constructions, on formera deux triangles Fab, Egf semblables chacun au triangle ADB. D'où il suit qu'on aura $P:R$ ou $S::Fb:Fa$, & $Q:R$ ou $S::Ef:Eg$.

Ainsi en général *deux quelconques des trois puissances* P, Q, S *qui se font équilibre, sont entr'elles en raison réciproque des perpendiculaires abaissées d'un même point de la direction de la troisième sur leurs directions.*

COROLLAIRE VI.

32. Cette même propriété peut être présentée sous une autre forme. Puisqu'on a les proportions $P:Q::DF:DE$, $P:S::Fb:Fa$, $Q:S::Ef:Eg$; on aura les équations $P\times DE=Q\times DF$, $P\times Fa=S\times Fb$, $Q\times Eg=S\times Ef$. D'où l'on voit que *trois puissances* P, Q, S *étant en équilibre, les produits de deux d'entr'elles, multipliées chacune par la distance de sa direction à un même point de la direction de la troisième, sont égaux entr'eux.*

On appelle *momens des puissances*, ces sortes de produits des puissances par les distances de leurs directions à un point, à une ligne, à un plan. Les points, lignes, plans, par rapport auxquels on conſidére les momens, s'appellent *centres de momens, axes de momens, plans de momens.*

COROLLAIRE VII.

33. On ſait, par la Trigonométrie, que dans tout triangle les côtés ſont entr'eux comme les ſinus des angles qui leur ſont oppoſés. On a donc $AB:BD:AD::$ ſin. ADB ou ſin. QAR : ſin. PAR : ſin. ABD ou ſin. PAQ, (les deux angles ABD, PAQ étant ſupplémens l'un de l'autre, & ayant par conſéquent le même ſinus). Ainſi puiſqu'on a toujours $P:Q:R$ ou $S::AB:BD:AD$, on aura auſſi $P:Q:R$ ou $S::$ ſin. QAR : ſin. PAR : ſin. PAQ. D'où l'on voit *que chacune des trois puiſſances* P, Q, R *ou* S *eſt repréſentée par le ſinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

PROPOSITION V. PROBLEME.

34. *Déterminer la réſultante d'un nombre quelconque de puiſſances* P, Q, R, S, T (Fig. 11) *concourantes au même point* A, *& repréſentées par les parties* AB, AC, AE, AG, AK *de leurs directions?* Fig. 11.

SOLUTION.

En achevant le parallélogramme $ABDC$, la réſultante des deux forces AB, AC eſt exprimée par la diagonale AD. Je prens donc, à la place des deux forces AB, AC, la force AD. Sur AD & AE, comme côtés contigus au même angle A, je fais le ſecond parallélogramme $ADFE$; je tire ſa diagonale *AF*; & la résultante des deux forces *AD*, *AE* est la force *AF*: cette même force est donc la résultante des trois forces *AB*, *AC*, *AE*. Sur *AF* & *AG*, comme côtés contigus au même angle *A*, je construis le troisième parallélogramme *AFHG*; je tire sa diagonale *AH*, & la résultante des deux forces *AF*, *AG*, ou des quatre forces *AB*, *AC*, *AE*, *AG*, est la force *AH*. Continuant de même, sur *AH* & *AK*, comme côtés contigus à l'angle *A*, je fais le quatrième parallélogramme *AHLK*; je tire sa diagonale *AL*, & la résultante des deux forces *AH*, *AK*, ou des cinq forces *AB*, *AC*, *AE*, *AG*, *AK* est la force *AL*. C. Q. F. T.

On voit qu'il est indifférent que les forces *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* soient dirigées ou non dans un même plan. Il suffit, pour trouver leur résultante comme nous venons de le faire, qu'elles concourent à un même point A.

COROLLAIRE.

35. Donc, pour faire équilibre à toutes les forces *AB*, *AC*, *AE*, *AG*, *AK*, il faudra prolonger *LA* indéfiniment vers *M*, & appliquer dans cette direction une force *M* représentée par la partie *AM* égale à *AL*.

PROPOSITION VI. THÉOREME.

36. *Deux puissances* P, Q, *& leur résultante* R,
Fig. 12. (Fig. 12) *concourant au point* A; *si l'on mene une droite quelconque* FE *qui rencontre en* F, E, D *leurs*

directions AP, AQ, AR; *je dis que chaque force pourra être représentée par le produit de la partie de sa direction comprise entre le point* A *&* *la sécante, multipliée par la partie de la sécante, comprise entre les directions des deux autres; c'est-à-dire, qu'on aura* P : Q : R :: AF × DE : AE × DF : AD × FE.

DÉMONSTRATION.

Du point D soient menées parallèlement aux directions des puissances P & Q, les droites DC, DB, pour avoir le parallélograme $ABDC$. On aura $P : Q : R :: AB$ ou $DC : AC$ ou $BD : AD$. Or les triangles semblables EAF, ECD donnent $EF : AF ::$ $ED : DC = \frac{AF \times ED}{EF}$; & les triangles semblables FEA, FDB donnent $FE : AE :: FD : DB = \frac{AE \times FD}{FE}$. Ainsi on aura $P : Q : R :: \frac{AF \times ED}{FE} : \frac{AE \times FD}{FE} : AD$. Multipliant la suite des conséquens par la même quantité FE, on aura $P : Q : R :: AF \times ED : AE \times FD : AD \times FE$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

37. Qu'on mene parallèlement à la sécante FE une autre sécante KG. On aura $AF : AE : AD :: KF : GE : HD$. Multipliant cette suite par la suite identique $DE : DF : FE :: DE : DF : FE$, on aura $AF \times DE : AE \times DF : AD \times FE :: KF \times DE : GE \times$

$DF : HD \times FE$. Donc $P : Q : R :: KF \times DE : GE \times DF : HD \times FE$.

COROLLAIRE II.

38. La même hypothèse & la même construction subsistant toujours, il est clair qu'à mesure que le point A s'éloigne de FE, ou que l'angle PAQ devient plus aigu, les parties KF, GE, HD tendent à l'égalité; ensorte que quand le point A est infiniment éloigné, la raison derniere des lignes KF, GE, HD est une raison d'égalité, & que les directions des trois puissances deviennent parallèles,
Fig. 13. comme dans la Figure 13. Ainsi la suite de proportionnelles $P : Q : R :: KF \times DE : GE \times DF : HD \times FE$ devient (en divisant la suite des conséquens par les lignes égales KF, GE, HD), $P : Q : R :: DE : DF : FE$.

COROLLAIRE III.

39. Il suit de-là, 1°. que la résultante des deux puissances parallèles P & Q, qui agissent dans le même sens, leur est parallèle, comme on voit, & de plus est égale à leur somme, puisque $FE = FD + DE$.

2°. Que la direction de cette résultante passe par un point D dont la propriété est de rendre les deux puissances P & Q réciproquement proportionnelles aux distances perpendiculaires ou obliques du point D à leurs directions, puisqu'on a la proportion $P : Q :: DE : DF$.

COROLLAIRE IV.

40. Donc, si l'on suppose que deux puissances parallèles P & Q (Fig. 14) sont appliquées aux extrémités d'une verge inflexible FE sans pesanteur, & qu'on veuille déterminer le point par lequel la verge doit être suspendue pour qu'il y ait équilibre, & l'effort que supporte le point de suspension, on n'aura qu'à diviser la droite FE au point D, de manière que l'on ait $P : Q :: ED : FD$, ou bien $P+Q : P : Q :: FE : ED : FD$, & qu'à appliquer ensuite dans la direction DS parallèle aux deux puissances P & Q, un appui ou une résistance $S = P + Q$. Fig. 14.

COROLLAIRE V.

41. Les trois forces P, Q, S de l'article précédent étant en équilibre, chacune d'elles indifféremment peut être regardée comme faisant équilibre aux deux autres, ou comme étant égale & directement contraire à la résultante des deux autres. Considérons, par exemple, la puissance Q sous ce point de vûe. Il est clair que cette puissance est parallèle aux deux forces composantes P & S; qu'elle est placée au-delà du point D, du côté de la plus grande force S; qu'elle agit dans le même sens que la plus foible P des deux forces composantes, & qu'elle est égale à leur différence, puisqu'on a $FD = FE - DE$. On trouvera la position du point E, en considérant qu'on a la proportion $S : P :: FE : DE$, qui donne celle-ci $S - P : P :: FE - DE$ ou $FD : DE$, dans laquelle les trois premiers termes sont connus.

PROPOSITION VII. PROBLEME.

42. *Déterminer la réſultante de pluſieurs forces parallèles qui agiſſent dans un même ſens?*

SOLUTION.

Fig. 15. Soit un nombre quelconque de corps A, B, C, D, (Fig. 15), ſitués ou non dans un même plan, & ſoumis à l'action des forces parallèles P, Q, R, S, qui agiſſent dans le même ſens. Imaginons que tous ces corps ſoient liés entr'eux par des verges inflexibles AB, C, CD, DA, ſans peſanteur, & ne forment qu'un même ſyſtême. Cela poſé, les deux forces P & Q ont pour réſultante (39) une force X qui leur eſt parallèle, dont la quantité eſt $P+Q$, & dont la direction paſſe par le point E, tel que $P:Q::BE:AE$. Subſtituons à la place des deux forces P & Q la force X, & menons la droite EC; les deux forces X & R auront pour réſultante la force $Y=X+R=P+Q+R$, & le point G où elle coupe EC, ſera tel que X ou $P+Q:R::CG:EG$. Prenons à la place des deux forces X & R, ou des trois forces P, Q, R, la force Y; & ayant mené la droite GD, nous verrons que les deux forces Y & S ont pour réſultante la force $Z=Y+S=P+Q+R+S$, & que le point F, par où paſſe la direction de la force Z, eſt tel que Y ou $P+Q+R:S::DF:GF$. Ainſi de ſuite, s'il y avoit un plus grand nombre de forces. C. Q. F. T.

Corollaire I.

43. Donc, pour faire équilibre à toutes les forces P, Q, R, S, il faut appliquer dans la direction ZF une force $V = P + Q + R + S$.

Corollaire II.

44. Si toutes les forces parallèles P, Q, R, S n'agissoient pas dans le même sens, on commenceroit par déterminer séparément chaque résultante des forces qui agissent dans le même sens. Par-là, on auroit deux résultantes dirigées en sens contraires, & on trouveroit la force qui peut leur faire équilibre, par le moyen de l'article 41.

Remarque I.

45. Au lieu de supposer, comme nous avons fait, que les forces P, Q, R, S sont appliquées aux points A, B, C, D, nous pouvons (17) les supposer appliquées aux points quelconques a, b, c, d de leurs directions; & alors nous trouverons que les nouvelles résultantes X, Y, Z, qui sont toujours parallèles aux forces composantes, passent par les points e, g, f, intersections des droites ab, ec, gd avec les droites EX, GY, FZ premièrement déterminées. Car (39) dans le second cas, le point e par où passe la résultante des deux puissances P & Q, est tel que $P : Q :: be : ae$. Or à cause des parallèles AP, BQ, EX, on a $be : ae :: BE : AE$. Donc le point e est l'intersection des droites ab, EX. Même raisonnement pour les autres ré-

ſultantes. De plus les quantités de force des réſultantes ſont toujours les mêmes. Ainſi la direction & la quantité de la réſultante finale Z ſont toujours les mêmes, en quelques points de leurs directions qu'on ſuppoſe que les forces compoſantes ſoient appliquées.

Cela eſt également vrai, avec les changemens convenables, pour le cas où les forces n'agiroient pas dans le même ſens.

Remarque II.

46. Remarquons encore que ſi les forces appliquées aux corps A, B, C, D, demeurant toujours les mêmes en quantités, & toujours parallèles entr'elles, avoient les directions Ap, Bq, Cr, Ds, & qu'on appellât x, y, z les réſultantes analogues à X, Y, Z, remarquons, dis-je, que la réſultante x paſſeroit par le point E; la réſultante y par le point G; la réſultante z par le point F. Il y a donc toujours dans la direction de la réſultante finale d'un nombre quelconque de forces parallèles, agiſſantes ou non dans un même ſens, un point F qui eſt tel que ſi les forces, ſans changer de quantités, & ſans ceſſer d'être parallèles, & d'être appliquées aux mêmes endroits d'un ſyſtême de corps, changent d'ailleurs *ſemblablement* de directions de toutes les manières poſſibles, toutes les réſultantes finales (qui ont la même valeur) ſe couperont en ce point.

Ce point remarquable, peut, à cauſe de ſa propriété, s'appeller *centre des forces parallèles*.

PROPOSITION VIII. THÉOREME.

47. *Deux puissances* P *&* Q, *& leur résultante* R, (Fig. 16 & 17), *concourant au point* A; *si d'un point quelconque* E, *pris dans le plan de ces puissances on abaisse les perpendiculaires* EF, EG, EH *sur leurs directions* AP, AQ, AR, *on aura* Fig. 16 & 17.

$$P \times EF + Q \times EG = R \times EH, \quad \text{(Fig. 16)};$$
$$Q \times EG - P \times EF = R \times EH, \quad \text{(Fig. 17)};$$

Ensorte que la somme ou la différence des momens des forces P *&* Q, *par rapport au point* E, *est égale au moment de la résultante* R, *par rapport au même point.*

DÉMONSTRATION.

Soit construit le parallélogramme $ABDC$ sur les directions des trois puissances; on aura $P:Q:R::AB:BD:AD$. Qu'on joigne les points A & E par la droite AE; & sur cette ligne comme diamètre soit décrit le cercle $AMEG$ qui passera évidemment par les points F, G, H, puisque les angles EFA, EGA, EHA sont droits. Ayant mené les cordes FH, HG, du point B soit tirée la droite BK, qui fasse avec AB l'angle $ABK =$ l'angle EHF. Le point K tombe entre les points A & D (Fig. 16), & au-delà du point A (Fig. 17). Il est aisé de voir que les deux triangles ABK, EHF sont semblables; car outre les angles égaux B & H, les angles A & E qui ont chacun pour mesure la moitié de l'arc FH (Fig. 16), ou de l'arc FAH (Fig. 17), ſont auſſi égaux. Ainſi on aura $AB:EH::AK:EF$, & par conſéquent

$$AB \times EF = EH \times AK.$$

Les deux triangles DBK, EHG ſont auſſi ſemblables ; car les angles D & E ont chacun pour meſure la moitié de l'arc GH, & les angles B & H ont chacun pour meſure la moitié de l'arc $EMAG$. On aura donc $DB:EH::DK:EG$, &

$$DB \times EG = EH \times DK.$$

Ajoutant enſemble les deux égalités (Fig. 16), ou retranchant la premiere de la ſeconde (Fig. 17), on aura

$$AB \times EF + DB \times EG = AD \times EH \quad \text{(Fig. 16)},$$
$$DB \times EG - AB \times EF = AD \times EH \quad \text{(Fig. 17)}.$$

Or puiſque $P:Q:R::AB:DB:AD$, ſi l'on multiplie terme à terme cette ſuite par la ſuite identique $EF:EG:EH::EF:EG:EH$, on aura $P \times EF : Q \times EG : R \times EH :: AB \times EF : DB \times EG : AD \times EH$; d'où l'on tire, par la théorie des proportions, $Q \times EG \pm P \times EF : R \times EH :: DB \times EG \pm AB \times EF : AD \times EH$. Donc, puiſque les deux derniers termes de cette proportion ſont égaux, on aura auſſi

$$Q \times EG \pm P \times EF = R \times EH. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Je n'ai pas beſoin de faire obſerver que ſi le point E tomboit dans l'angle QAR (Fig. 17), on auroit $P \times EF - Q \times EG = R \times EH$.

COROLLAIRE I.

48. Pour l'équilibre, il faut oppoſer à la réſultante

R une force S qui lui ſoit égale, & qui agiſſe dans le ſens AS directement contraire. Subſtituant donc S à la place de R dans l'équation $Q \times EG \pm P \times EF = R \times EH$, on aura

$$Q \times EG \pm P \times EF = S \times EH.$$

COROLLAIRE II.

49. Il ſuit de-là que chacune des trois forces P, Q, S, en équilibre pouvant être regardée comme égale à la réſultante des deux autres, le moment de cette même force, par rapport au point E, eſt égal à la ſomme ou à la différence des momens des deux forces compoſantes, par rapport au même point, ſelon qu'il tombe au-dehors ou au-dedans de l'angle formé par les directions ou les prolongemens des directions des deux dernieres forces. D'abord notre équation voit la choſe pour le cas où la force S eſt regardée comme égale à la réſultante des deux autres P & Q.

Conſidérons en ſecond lieu P & S comme les forces compoſantes: en vertu de l'équation $Q \times EG \pm P \times EF = S \times EH$, nous aurons $S \times EH \mp P \times EF = Q \times EG$; le point E eſt dans l'angle PAS (Fig. 16); & hors de cet angle & de ſon oppoſé au ſommet (Fig. 17).

En troiſiéme lieu, conſidérons S & Q comme les forces compoſantes: nous aurons (Fig. 16) $S \times EH - Q \times EG = P \times EF$, & (Fig. 17) $Q \times EG - S \times EH = P \times EF$; le point E tombe, pour l'une & l'autre Figure, dans l'angle RAQ' oppoſé par le ſommet à l'angle QAS.

On voit dans tous les cas que quand il faut prendre la différence des momens des forces composantes; celle de ces deux forces qui laisse le point E dans l'angle formé par les directions ou par les prolongemens des directions des deux autres, a le plus grand moment.

COROLLAIRE III.

50. Supposons que le point de concours A s'éloigne de plus en plus jusqu'à l'infini, ensorte qu'à la fin les directions des trois puissances P, Q, S deviennent parallèles (Fig. 18 & 19). Il est clair que nos équations subsisteront toujours, & que les points F, G, H seront maintenant placés sur une même ligne droite, perpendiculaire aux directions des trois forces. De plus on aura (39) $S = R = P + Q$. Donc (Fig. 18), $P \times FE + Q \times GE = (P + Q) \times HE$, & (Fig. 19), $Q \times GE - P \times EF = (P + Q) \times HE$.

Fig. 18 & 19.

COROLLAIRE IV.

51. Les puissances P, Q, S, étant toujours parallèles, si par le point E on mene une droite quelconque EX, & des points F, G, H les parallèles FV, GX, HT vers cette ligne; on aura (Fig. 18 & 19)

$$Q \times GX \pm P \times FV = (P + Q) \times HT.$$

Car à cause des triangles semblables EFV, EGX, EHT, on a $EF : EG : EH :: FV : GX : HT$. Donc, $P \times EF : Q \times EG : (P + Q) \times EH :: P \times FV : Q \times GX : (P + Q) \times HT$, & $Q \times EG \pm P \times EF : (P + Q) \times EH :: Q \times GX \pm P \times FV : (P + Q) \times HT$. Or $Q \times EG \pm P \times EF = (P + Q) \times EH$; donc aussi $Q \times GX \pm P \times FV = (P + Q) \times HT$.

D'où l'on voit que *la ſomme ou la différence des momens des forces* P & Q, *par rapport à l'axe* EX, *eſt égale au moment de leur réſultante par rapport au même axe.*

Il eſt indifférent que les diſtances FV, GX, HT, ſoient perpendiculaires ou obliques à l'axe EX.

COROLLAIRE V.

52. De l'équation $Q\times GX \pm P\times FV = (P+Q)\times HT$, on tire

$$HT = \frac{Q\times GX \pm P\times FV}{P+Q}.$$

Ainſi connoiſſant la poſition de l'axe EX, & les diſtances perpendiculaires ou obliques GX, FV, on connoîtra la diſtance perpendiculaire ou oblique du centre H des forces P & Q à l'axe EX. On pourra donc fixer la poſition de ce centre, en prenant ſur l'une GX des diſtances, une partie Xa égale à la valeur qu'on a trouvée pour HT, & menant la droite aH parallèle à XE.

COROLLAIRE VI.

53. Lorſque le point E tombe ſur le centre H, (Fig. 20), la diſtance HT s'évanouit, & on a $Q\times GX - P\times FV = 0$, ou $Q\times GX = P\times FV$. D'où l'on voit que *les momens des deux forces* P & Q, *par rapport à tout axe qui paſſe par leur centre, ſont égaux.* Fig. 20.

COROLLAIRE VII.

54. Qu'on mene (Fig. 21 & 22) la droite quel- Fig. 21 & 22.

conque fg qui rencontre obliquement en f, g, h; les directions de nos trois puissances parallèles P, Q, S; & des points f, g, h, soient tirées les parallèles fu, gx, ht vers l'axe Ex qui coupe au point quelconque E, la droite fg, & qui a une position quelconque. De plus, soit menée, par le point E, la droite EG perpendiculaire aux directions des trois puissances. On aura ces équations,

$$Q \times gE \pm P \times fE = (P + Q) \times hE,$$
$$Q \times gx \pm P \times fu = (P + Q) \times ht,$$
$$Q \times Gg \pm P \times Ff = (P + Q) \times Hh.$$

Car il est clair qu'on a cette suite de proportionnelles, $EF : EG : EH :: Ef : Eg : Eh :: fu : gx : ht :: Ff : Gg : Hh$. Ainsi on aura $P \times EF : Q \times EG : (P + Q) \times EH :: P \times fE : Q \times gE : (P + Q) \times hE :: P \times fu : Q \times gx : (P + Q) \times ht :: P \times Ff : Q \times Gg : (P + Q) \times Hh$. D'où l'on tire $Q \times EG \pm P \times EF : (P + Q) \times HE :: Q \times Eg \pm P \times Ef : (P + Q) \times hE :: Q \times gx \pm P \times fu : (P + Q) \times ht :: Q \times Gg \pm P \times Ff : (P + Q) \times Hh$. Donc, à cause de $Q \times EG \pm P \times EF = (P + Q) \times HE$ (50), on aura aussi les équations précédentes.

En divisant chacune de ces équations par $P + Q$, on aura les valeurs des lignes hE, ht, Hh.

Il est clair que lorsque l'axe Ex passe par le point h (Fig. 22), les deux lignes Eh, ht s'évanouissent, & qu'alors on a

$$Q \times gE = P \times fE,$$
$$Q \times gx = P \times fu.$$

COROLLAIRE VIII.

55. Dans les articles 50, 51, 54, les forces composantes agissent dans le même sens. Regardons maintenant les deux forces P & S qui agissent en sens contraires, comme les forces composantes, & par conséquent la force Q comme égale & directement contraire à leur résultante. Les équations (Fig. 18, 19, 21, 22),

$$Q \times GE \pm P \times EF = (P+Q) \times HE,$$
$$Q \times GX \pm P \times FV = (P+Q) \times HT,$$
$$Q \times gE \pm P \times fE = (P+Q) \times hE,$$
$$Q \times gx \pm P \times fu = (P+Q) \times ht,$$
$$Q \times Gg \pm P \times Ff = (P+Q) \times Hh,$$

deviendront (en observant (41) que la résultante $= S - P$, & chassant Q),

$$S \times HE \mp P \times FE = (S-P) \times GE,$$
$$S \times HT \mp P \times FV = (S-P) \times GX,$$
$$S \times hE \mp P \times fE = (S-P) \times gE,$$
$$S \times ht \mp P \times fu = (S-P) \times gx,$$
$$S \times Hh \mp P \times Ff = (S-P) \times Gg.$$

On trouveroit des équations analogues, en regardant P comme égale à la résultante des forces Q & S.

Ces équations font voir que la différence ou la somme des momens des forces composantes est égale au moment de la résultante.

COROLLAIRE IX.

56. Soient (Fig. 23 & 24) un nombre quelconque de corps A, B, C, D, disposés comme on Fig. 23 & 24.

voudra, liés entr'eux par des verges AB, BC, CD, AD ſans peſanteur, & ſoumis à l'action des forces parallèles P, Q, R, S, qui agiſſent dans le même ſens. Suppoſons qu'après avoir déterminé (42) le centre F de toutes les forces, on mene vers un même plan YZ de poſition quelconque, les parallèles Aa, Bb, Cc, Dd, Ff:

1°. Dans le cas où tous les corps ſont placés d'un même côté par rapport au plan ZY (Fig. 23), on aura $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$; c'eſt-à-dire que *la ſomme des momens des forces eſt égale au moment de leur réſultante.* Car en ſuppoſant que le point E ſoit le centre des deux forces P & Q, & menant la droite Ee parallèle aux droites Aa, Bb, &c, on aura (51, 1er cas) $P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee$. Joignons les points E & C par la droite EC; ſoit G le centre des trois forces P, Q, R, & ſoit menée la droite Gg parallèle à Aa, Bb, &c. La force $P + Q$ étant regardée comme appliquée en E, on aura, toujours par le même article 51, $(P + Q) \times Ee + R \times Cc = (P + Q + R) \times Gg$, ou bien $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc = (P + Q + R) \times Gg$. Continuant à raiſonner de même, on aura $(P + Q + R) \times Gg + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$, ou bien $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$.

2°. Lorſque le plan YZ paſſe entre les corps, comme dans la Figure 24 où les deux corps A, B ſont placés à gauche, & les deux corps C, D à droite du plan YZ, on aura $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = (P + Q + R + S) \times Ff$, c'eſt-à-dire, que *la différence entre la ſomme des momens des forces qui ſont d'un côté du plan, & la ſomme des momens des forces qui ſont de l'autre côté, eſt égale au moment de la réſultante.* Car, ſuivant ce qui vient d'être démontré pour le premier cas, on aura $P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee$, & en nommant x la diſtance (parallèle aux autres Aa, Bb, &c) du centre particulier des deux forces R, S au plan YZ, $R \times Cc + S \times Dd = (R + S) \times x$. Or (51, 2^e^ cas), $(R + S) \times x - (P + Q) \times Ee = (P + Q + R + S) \times Ff$. Donc, $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = (P + Q + R + S) \times Ff$.

COROLLAIRE X.

57. L'équation (Fig. 23 & 24), $(P + Q + R + S) \times Ff = R \times Cc + S \times Dd \pm P \times Aa \pm Q \times Bb$, donne

$$Ff = \frac{R \times Cc + S \times Dd \pm P \times Aa \pm Q \times Bb}{P + Q + R + S}.$$

D'où l'on voit que connoiſſant toutes les parties du ſecond membre, on connoîtra Ff; c'eſt-à-dire, la diſtance perpendiculaire ou oblique du centre des forces au plan YZ.

COROLLAIRE XI.

58. Lorſque le plan YZ (Fig. 25) paſſe par le centre F de toutes les forces, la diſtance Ff s'évanouit, & alors on a $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = 0$, ou bien, $P \times Aa + Q \times Bb = R \times$ Fig. 25.

$Cc + S \times Dd$. D'où il suit que *la somme des momens des forces qui sont d'un même côté par rapport à un plan de position quelconque qui passe par le centre des forces, est égale à la somme des momens des forces qui sont placées de l'autre côté, par rapport au même plan.*

COROLLAIRE XII.

Fig. 23. & 24. 59. Reprenons les Figures 23, 24, & supposons que les forces P, Q, R, S, toujours parallèles, n'agissent pas dans le même sens; que, par exemple, les deux forces P & Q agissent de haut en bas, & les deux forces R & S de bas en haut. Je nomme x la distance (parallèle aux droites Aa, Bb, &c.) du centre des forces R & S au plan YZ; z la distance semblable du centre de toutes les forces P, Q, R, S au même plan. On aura (56, 1er cas), $P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee$, $R \times Cc + S \times Dd = (R + S) \times x$. Or on a (55), pour la Figure 23, $(R+S) \times x - (P+Q) \times Ee = (R+S-P-Q) \times z$, & pour la Figure 24, $(P+Q) \times Ee + (R+S) \times x = (R+S-P-Q) \times z$. Ainsi en réunissant les deux cas, & mettant pour $(P+Q) \times Ee$, $(R+S) \times x$, leurs valeurs, on aura $R \times Cc + S \times Dd \mp P \times Aa \mp Q \times Bb = (R+S-P-Q) \times z$, c'est-à-dire, que la différence ou la somme des momens des forces composantes est égale au moment de la résultante $R + S - P - Q$.

Si z devient $= 0$, on aura $P \times Aa + Q \times Bb = R \times Cc + S \times Dd$.

COROLLAIRE XIII.

60. Lorſque toutes les forces P, Q, R, S ſont ſituées dans un même plan, & que de plus les diſtances parallèles Aa, Bb, &c, ſont menées dans ce plan, tous les points a, b, c, &c, ſont placés ſur une même ligne ou axe de momens ; & alors on peut concevoir que le plan YZ, devenant infiniment étroit, ſe réduit à cet axe. Ainſi tout ce qu'on a dit dans les quatre derniers articles, s'appliquera à ce cas, en ſubſtituant ſimplement dans le diſcours le mot *axe* YZ au mot *plan* YZ.

PROPOSITION IX. PROBLEME.

61. *Déterminer, par le moyen des momens, la poſition de la réſultante de pluſieurs forces parallèles, agiſſantes dans le même ſens, ſituées ou non dans un même plan, ainſi que la place du centre des forces?*

SOLUTION.

1°. Supposons que les forces propoſées P, Q, R, S (Fig. 26), ſoient dirigées dans un même plan. Fig. 26.
Qu'on mene à volonté dans ce plan les deux axes OE, OI, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire aux directions des forces. On pourroit donner toute autre poſition aux deux axes OE, OI, & les faire obliques entr'eux ; mais nous choiſiſſons la poſition précédente, pour plus de ſimplicité, & pour fixer les idées. Des points A, B, C, D, où les forces ſont cenſées appliquées, ſoient menées vers l'axe OE, & parallèlement à l'axe OI, les droites Aa, Bb,

Cc, Dd; de même ſoient menées vers l'axe OI & parallèlement à OE, les droites Aa', Bb', Cc', Dd'. Concevons que le point F ſoit le centre inconnu des forces, & qu'on mène parallèlement à nos deux axes les droites Ff, Ff'. On aura, d'après tout ce qui vient d'être démontré,

$$Ff = \frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd}{P + Q + R + S}.$$

Connoiſſant toutes les parties du ſecond membre, on connoîtra la diſtance de la direction de la réſultante à l'axe OE, & par conſéquent la poſition de cette réſultante.

On aura de même, relativement à l'axe OI,

$$Ff' = \frac{P \times Aa' + Q \times Bb' + R \times Cc' + S \times Dd'}{P + Q + R + S}.$$

On connoîtra donc la diſtance du centre des forces à cet axe. Ainſi en prenant ſur OI la partie $Of' = Ff$, & ſur $f'F$ parallèle à OE, la partie $f'F$ égale à la valeur qu'on vient de trouver, le point F ſera le centre des forces.

On voit (60, 2e cas) que ſi l'un des axes OE, OI, ou tous les deux paſſoient entre les corps, il y auroit dans les expreſſions de Ff & de Ff', des momens négatifs. On voit de même que ſi les axes paſſent par quelques-uns des points A, B, C, D, où les forces ſont cenſées appliquées, les momens correſpondans deviennent zero; par exemple, ſi l'axe OE paſſoit par le point A, la diſtance Aa s'évanouiroit, & par conſéquent le moment $P \times Aa$ deviendroit nul.

2°. Lorsque les forces P, Q, R, S (Fig. 27), toujours censées appliquées aux points A, B, C, D, ne sont pas dans un même plan, on imaginera trois plans $OEXV$, $OEYI$, $OVZI$ perpendiculaires entr'eux, & dont les deux premiers sont parallèles aux directions des forces, tandis que le troisiéme leur est perpendiculaire. Des points A, B, C, D, & du centre F des forces, soient menées perpendiculairement aux trois plans proposés les droites Aa, Aa', Aa''; Bb, Bb', Bb''; Cc, Cc', Cc''; Dd, Dd', Dd''; Ff, Ff', Ff''. On aura (57) (en supposant que toutes les forces sont placées d'un même côté par rapport à chaque plan), ces trois équations : Fig. 27.

$$Ff = \frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd}{P + Q + R + S},$$

$$Ff' = \frac{P \times Aa' + Q \times Bb' + R \times Cc' + S \times Dd'}{P + Q + R + S},$$

$$Ff'' = \frac{P \times Aa'' + Q \times Bb'' + R \times Cc'' + S \times Dd''}{P + Q + R + S};$$

qui feront connoître la position de la résultante, & la place du centre des forces. Car si l'on prend sur la section commune OI des deux plans $OEYI$, $OVZI$ la partie $Oh = Ff$; qu'on mène, parallèlement à la section commune OV des deux plans $OEXV$, $OVZI$, la droite $hf'' = Ff'$; qu'enfin par le point f'', on mène parallèlement à la section commune OE des deux plans $OEXV$, $OEYI$, la droite $f''F = Ff''$; il est clair que la résultante sera dirigée suivant cette ligne $f''F$, & que le point F sera le centre des forces. C. Q. F. T.

Il ſeroit également facile (59, 60) de réſoudre le problême, ſi toutes les forces n'agiſſoient pas dans le même ſens. J'abandonne ce cas au Lecteur.

COROLLAIRE.

62. Connoiſſant la poſition de la réſultante de pluſieurs forces parallèles qui agiſſent dans le même ſens, & ſçachant d'un autre côté (42) que cette réſultante eſt égale à la ſomme des forces compoſantes, on fera équilibre à toutes ces forces, en oppoſant directement à leur réſultante une force égale à leur ſomme.

REMARQUE.

63. Je ferai ici une remarque, qui, toute ſimple qu'elle eſt, ne doit pas être omiſe, parce qu'elle peut être utile en certains cas. La direction & la quantité de la réſultante de pluſieurs forces parallèles demeurent toujours les mêmes, quels que ſoient les points des directions de ces forces, où l'on conçoit qu'elles ſont appliquées. Mais la poſition du centre des forces eſt ſubordonnée à celle des points dont je viens de

Fig. 26. parler. Par exemple, dans la Figure 26, les forces P, Q, R, S étant ſuppoſées appliquées aux points A, B, C, D, leur centre eſt en F; mais ſi on ſuppoſoit les forces appliquées en d'autres points de leurs directions, comme a', b', c', d', leur centre ſeroit en f'. Il eſt entièrement indifférent, quant à leur effet, que les forces agiſſent aux points A, B, C, D ou aux points a', b', c', d'. Mais quand on a une fois

fixé leurs points d'application, & conſéquemment la place de leur centre, par rapport à un objet particulier, il faut raiſonner toujours d'après la même ſuppoſition dans les autres uſages qu'on peut faire du centre des forces, relativement au même objet; autrement on tomberoit dans l'erreur.

PROPOSITION X. PROBLEME.

64. *Déterminer la relation que doivent avoir quatre forces* P, Q, S, T, (Fig. 28) *en équilibre, & appliquées dans un même plan à une verge inflexible* AF *ſans peſanteur, ſuivant des directions* AP, AQ, FS, FT *contraires deux à deux, & parallèles aux droites* OI, OE *données de poſition?* Fig. 28.

SOLUTION.

L'équilibre demande que la réſultante des deux forces P & Q ſoit égale & directement oppoſée à la réſultante des deux forces S & T. Ainſi faiſant les deux parallélogrammes $ABDC$, $FHKG$ dont les diagonales AD, FK ſont égales & parallèles, il eſt clair qu'à cauſe de AP parallèle à FS, & de AQ parallèle à FT, on aura $P=S$, $Q=T$. D'où l'on voit d'abord que les forces oppoſées doivent être égales. Mais cela ne ſuffit pas encore; car cette condition pourroit être remplie, en ſuppoſant ſimplement que les diagonales égales AD, FK ſont parallèles, ſans être placées pour cela ſur une même ligne droite. Or comme il faut néceſſairement, pour l'équilibre, qu'elles ſoient placées en ligne droite (18), nous ſatisferons à cette condition, en supposant que les prolongemens de leurs directions coupent la droite OE au même point V. Par-là, nous aurons les deux proportions, $P : Q :: AE$ ou $OI : EV$ ou $OE - OV$, & $S : T :: FL$ ou $OM : LV$ ou $OL - OV$. Ces proportions donnent

$$P \times OE - Q \times OI = P \times OV,$$
$$S \times OL - T \times OM = S \times OV.$$

Donc, à cause de $P \times OV = S \times OV$, on aura encore

$$P \times OE - Q \times OI = S \times OL - T \times OM,$$

ou $P \times OE + T \times OM = Q \times OI + S \times OL$.

Ainsi, 1°. *les forces opposées doivent être égales chacune à chacune.* 2°. *La somme des momens des forces qui tendent à faire tourner la verge* AF *dans un sens autour du point* O, *doit être égale à la somme des momens des forces qui tendent à la faire tourner en sens contraire autour du même point.* C. Q. F. T.

REMARQUE.

65. Les droites OI, OE peuvent être perpendiculaires ou obliques l'une à l'autre ; mais il est plus commode dans la pratique de les supposer perpendiculaires entr'elles. Quelles que puissent être la direction & la quantité d'une force située d'ailleurs dans le plan IOE (Fig. 29), cette force peut toujours être décomposée en deux autres, parallèles aux droites OI, OE. Car soit, par exemple, la force X représentée par HN. Je mène, par le point H, les droites HZ, HY parallèles à OI & à OE ; & j'acheve le parallélogramme $HZNY$. Alors à la place de la force HN, on peut prendre les deux forces HZ, HY.

Fig. 29.

COROLLAIRE.

66. Il ſuit de-là que ſi l'on a un nombre quelconque de forces en équilibre, dirigées comme on voudra dans un même plan, elles ſeront néceſſairement réductibles aux quatre forces *P*, *Q*, *S*, *T*, (Fig. 28). Car chaque force en particulier peut être décompoſée en deux autres, l'une parallèle à *OI*, l'autre parallèle à *OE*. Enſuite toutes les forces parallèles qui agiſſent dans le même ſens, ſe réduiront à une ſeule égale à leur ſomme (42). Quand toutes ces réductions auront été faites, on aura néceſſairement quatre forces analogues aux forces *P*, *Q*, *S*, *T*, ſans quoi il ne pourroit pas y avoir équilibre. Fig. 28.

Il s'agit, comme on voit, de forces qui agiſſent librement, ſans être empêchées ou altérées par la réſiſtance d'aucun obſtacle.

PROPOSITION XI. PROBLEME.

67. *Suppoſons maintenant que les forces* P, Q, S, T, (Fig. 30), *toujours parallèles à deux lignes* OI, OE *données de poſition, & perpendiculaires entr'elles, ſoient appliquées à une verge inflexible* AFO *ſans peſanteur, traverſée par un boulon fixe* O *qui lui permet ſeulement de tourner dans le plan* EOI; *on demande la relation que ces forces doivent avoir, pour qu'il y ait équilibre?* Fig. 30.

SOLUTION.

Il n'eſt pas néceſſaire, pour l'équilibre, que la réſultante des deux puiſſances *P* & *Q* ſoit égale &

directement opposée à la résultante des deux puissances S & T, comme dans l'article 64 : il suffit que la résultante des quatre forces passe par le point fixe O, & y trouve par conséquent sa destruction.

Soient BA la direction de la résultante des deux forces P & Q, & nommons R cette résultante ; FH la direction de la résultante des deux forces S & T, & nommons R' cette résultante. Du point O soient abaissées les perpendiculaires OB, OH sur les droites AB, FH. On aura (47, 2^e cas), $P \times OE - Q \times OI = R \times OB$, & $S \times OL - T \times OM = R' \times OH$. Or puisque la résultante des deux forces R & R' passe par le point O, on a (32), $R \times OB = R' \times OH$. Ainsi on aura

$$P \times OE - Q \times OI = S \times OL - T \times OM,$$

$$\text{ou } P \times OE + T \times OM = Q \times OI + S \times OL,$$

qui est l'équation simplement requise pour qu'il y ait équilibre. Cette équation fait voir que *la somme des momens des forces* P & T, *qui tendent à faire tourner la verge dans un sens autour du point fixe* O, *doit être égale à la somme des momens des forces* Q & S *qui tendent à la faire tourner en sens contraire autour du même point.* C. Q. F. T.

REMARQUE.

68. C'est pour conserver l'analogie avec le problême précédent que j'ai supposé ici simplement quatre forces parallèles à deux lignes données de position. Mais il seroit facile de démontrer en général, par les mêmes principes, que si l'on a un nombre quelconque

conque de forces dirigées, comme on voudra, dans un même plan, & appliquées à une verge qui a ſeulement la liberté de tourner dans ce plan autour d'un point fixe, la ſomme des momens des forces qui tendent à faire tourner la verge dans un ſens, doit être égale à la ſomme des momens des forces qui tendent à la faire tourner dans le ſens oppoſé, ſi l'on veut qu'il y ait équilibre. Je reviendrai ſur ce problême, en parlant du levier.

PROPOSITION XII. PROBLEME.

69. *Déterminer la relation que doivent avoir ſix forces* P, Q, S, T, X, Y (Fig. 31), *en équilibre & appliquées dans des plans différens à un ſyſtême de corps liés entr'eux par des verges inflexibles & ſans peſanteur, en ſuppoſant que ces forces agiſſent deux à deux en ſens contraires, parallèlement à trois lignes* OI, OE, OH *données de poſition, & qui ſe croiſent au point* O? Fig. 31.

SOLUTION.

Suppoſons, pour fixer les idées, & pour plus de clarté, que les trois axes OI, OE, OH ſoient perpendiculaires entr'eux; que OE & OI ſoient dans le plan même de la planche, & que OH ſoit perpendiculaire à ce plan.

Il eſt évident que les forces propoſées, pour ſe faire équilibre, doivent être telles qu'elles ne puiſſent imprimer au ſyſtême de corps aucun mouvement, ni dans des plans perpendiculaires à l'axe OE, ni dans des plans perpendiculaires à l'axe OI, ni dans des plans perpendiculaires à l'axe OH.

Soient A & F les points où les deux forces P & S contraires, & parallèles à l'axe OI, rencontrent le plan HOE; & de ces points ſoient menées parallèlement aux axes OE, OH les droites AC, AB, FH, FE. De même, ſoient Δ & Z les points où les forces Q & T contraires, & parallèles à l'axe OE, rencontrent le plan HOI; & de ces points ſoient menées parallèlement aux axes OI, OH les droites ΔD, ΔV, Z&, ZI. Enfin, ſoient L & N les points où les deux forces X & Y contraires, & parallèles à l'axe OH, rencontrent le plan EOI; & de ces points ſoient menées parallèlement aux axes OI, OE, les droites LK, LM, NG, NR. Cela poſé,

1°. Par deux points λ & π, pris arbitrairement ſur l'axe OE, concevons deux plans $\lambda\mu$, $\pi\varsigma$ perpendiculaires à cet axe. Menons, par les points A, F, L, N, des droites parallèles à $\lambda\pi$, & qui rencontrent nos deux plans $\lambda\mu$, $\pi\varsigma$ aux points a, a'; f, f'; l, l'; n, n'. Je décompoſe chacune des quatre forces P, S, X, Y en deux autres qui lui ſont parallèles, & qui ſont ſituées dans les plans $\lambda\mu$, $\pi\varsigma$. Par ce moyen, on aura, à la place de la force P les deux forces p & p' appliquées aux points a & a'; à la place de la force S, les deux forces s & s' appliquées aux points f & f'; à la place de la force X, les deux forces x & x' appliquées aux points l & l'; à la place de la force Y, les deux forces y & y' appliquées aux points n & n'. Il eſt viſible que les forces p, p', s, s', x, x', y, y', ſont les ſeules qui puiſſent produire du mouvement dans les plans $\lambda\mu$, $\pi\mathcal{C}$. Les deux forces Q & T, qui ſont perpendiculaires à ces plans, ne peuvent imprimer aucun mouvement dans le ſens de ces mêmes plans ; car une force perpendiculaire à un plan ne peut mouvoir un corps ſur ce plan en aucun ſens, puiſqu'il n'y a pas de raiſon pour que le corps prît une direction plutôt qu'une autre.

Maintenant, ſi l'on veut qu'il y ait équilibre dans les deux plans $\lambda\mu$, $\pi\mathcal{C}$, il faut (64) qu'on ait pour le plan $\lambda\mu$, $p=s$, $x=y$, $p\times AB$* $-x\times LK=s\times FE-y\times NG$; & pour le plan $\pi\mathcal{C}$, $p'=s'$, $x'=y'$, $p'\times AB-x'\times LK=s'\times FE-y'\times NG$. On aura donc, en ajoutant enſemble les équations ſemblables, $p+p'=s+s'$; ou bien (39), $P=S$, $x+x'=y+y'$, ou bien $X=Y$, $(p+p')\times AB-(x+x')\times LK=(s+s')\times FE-(y+y')\times NG$, ou bien $P\times AB-X\times LK=S\times FE-Y\times NG$.

2°. On démontrera de la même manière, en menant deux plans perpendiculaires à l'axe OI, que

---

* On doit ſe repréſenter qu'aux deux points a, a' répondent deux lignes parallèles & égales chacune à AB; aux deux points f, f', deux lignes parallèles & égales chacune à FE; aux deux points l, l', deux lignes parallèles & égales chacune à LK; enfin aux deux points n, n', deux lignes parallèles & égales chacune à NG. Je n'ai pas tracé ces lignes dans la Figure, pour éviter la confuſion ; j'employe, à leur place, les lignes AB, FE, &c.

pour avoir équilibre dans ces plans, il faut qu'on ait les équations, $Q=T$, $X=Y$, $Q\times\Delta V-X\times LM=T\times ZI-Y\times NR$.

3°. Pareillement, en menant deux plans perpendiculaires à l'axe OH, on aura équilibre dans ces deux plans, si l'on a les équations, $P=S$, $Q=T$, $P\times AC-Q\times\Delta D=S\times FH-T\times Z$ &.

Il suit de tout cela qu'on aura équilibre par rapport à tous les plans perpendiculaires à nos trois axes, & par conséquent équilibre absolu, pourvû que l'on ait les six équations,

$$P=S,$$
$$Q=T,$$
$$X=Y,$$
$$P\times AB-X\times LK=S\times FE-Y\times NG;$$
$$Q\times\Delta V-X\times LM=T\times ZI-Y\times NR,$$
$$P\times AC-Q\times\Delta D=S\times FH-T\times Z \text{ \&.}$$

Ces équations font voir, 1°. que *les forces contraires doivent être égales deux à deux*. 2°. *Que les momens des forces qui tendent à faire tourner le systême dans un sens autour de chacun de nos trois axes, doivent être égaux aux momens des forces qui tendent à faire tourner le systême dans le sens opposé autour de chacun des trois mêmes axes*. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

70. Si l'on a un nombre quelconque de forces appliquées à un systême de corps, dirigées comme on voudra, & en équilibre entr'elles, elles seront toujours réductibles aux six forces P, Q, X, S, T,

Y. Car quelle que ſoit la direction d'une force, nous pouvons d'abord décompoſer cette force en deux autres, dont la première ſoit, par exemple, parallèle à OI, & dont la ſeconde ſoit dans un plan perpendiculaire au plan EOI; cette ſeconde force peut elle-même être décompoſée en deux autres, l'une parallèle à OE, l'autre parallèle à OH. Par ce moyen, toutes les forces propoſées pourront être réduites à des forces parallèles aux trois axes OI, OE, OH. Celles qui agiſſent de gauche à droite, parallèlement à OI, pourront être réduites (42) à la force P, & celles qui agiſſent de droite à gauche parallèlement au même axe, pourront être réduites à la force S. Il en eſt de même pour les autres forces comparativement aux deux autres axes OE, OH. Ainſi les ſix équations de l'article précédent repréſentent généralement les conditions requiſes pour qu'il y ait équilibre entre des forces quelconques appliquées d'une manière quelconque à un ſyſtême de corps.

PROPOSITION XIII. PROBLEME.

71. *Les ſix forces* P, Q, X, S, T, Y *étant ſuppoſées maintenant appliquées à un ſyſtême de corps qui a ſimplement la liberté de pouvoir pirouetter en tous ſens autour du point fixe* O, *on demande les conditions de l'équilibre?*

SOLUTION.

Il y aura équilibre en tous ſens autour du point fixe O, pourvû qu'il n'y ait aucun mouvement de rotation, ni dans des plans perpendiculaires à l'axe OE, ni dans des plans perpendiculaires à l'axe OI, ni dans des plans perpendiculaires à l'axe OH. Or, pour empêcher tous ces mouvemens de rotation, il faut qu'on ait les trois équations

$$P \times AB - X \times LK = S \times FE - Y \times GN,$$
$$Q \times \Delta V - X \times LM = T \times ZI - Y \times NR,$$
$$P \times AC - Q \times \Delta D = S \times FH - T \times Z \&.$$

Par où l'on voit que *les momens des forces qui tendent à produire la rotation dans un sens, doivent être égaux aux momens des forces qui tendent à produire une rotation contraire*. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

72. De-là suit la manière générale de déterminer les conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de forces dirigées comme on voudra, & appliquées à un système de corps, ou à une verge inflexible qui a la liberté de pouvoir pirouetter en tous sens autour d'un point fixe. Car si l'on réduit toutes ces forces à trois autres espèces de forces parallèles aux trois axes OI, OE, OH, ces dernières forces devront être telles qu'on ait des équations analogues aux précédentes; autrement il ne pourroit pas y avoir équilibre.

CHAPITRE II.

Du centre de gravité.

73. NOUS avons déja remarqué (3) que tous les corps ſont peſans. Abandonnés à eux-mêmes, ils deſcendent ſuivant des directions qui tendent au centre du globe terreſtre. Les parties dont ils ſont compoſés, forment elles-mêmes de petits corps peſans. Tout poids fini & ſenſible peut donc être regardé comme l'aſſemblage ou le ſyſtême d'une infinité de petits poids liés entr'eux de manière qu'ils ne forment qu'un même tout. Et comme le point où vont concourir les directions de ces petits poids, c'eſt-à-dire, le centre de la terre, eſt placé à une diſtance très-grande relativement à l'étendue que leur ſyſtême occupe ſur la ſurface de notre globe, on peut regarder, ſans craindre aucune erreur ſenſible, toutes leurs directions comme parallèles entr'elles. En effet, on trouve que le raïon de la terre étant d'environ 1500 lieues, un eſpace de 16 toiſes, pris à ſa ſurface, ſoutend un angle qui eſt à peine de 1″.

Il eſt démontré, par les phénomènes aſtronomiques, qu'un même corps ne pèſe pas également à différentes diſtances du centre de la terre, & que la peſanteur d'un corps qui s'éloigne ou s'approche du centre de la terre, diminue ou augmente en même raiſon que le quarré de la diſtance augmente ou diminue. Mais cette variation de pesanteur ne peut pas être sensible dans les corps que la Statique ordinaire considére, parce que ces corps sont toujours placés à des distances du centre de la terre, qui ne diffèrent pas sensiblement les unes des autres.

On a encore observé que la pesanteur d'un même corps augmente en allant de l'équateur aux poles ; & cela, parce que la force centrifuge, qui diminue la pesanteur naturelle, devient plus petite elle-même en allant de l'équateur aux poles. Mais les parties d'un même corps ou d'un systême de corps, occupent trop peu d'étendue sur la surface de la terre, pour que d'une partie à l'autre on doive avoir égard à la différence de pesanteur, occasionnée par la cause qu'on vient d'indiquer.

74. D'après ces remarques, nous regarderons la pesanteur de chaque molécule de matière comme une force toujours constante, & les directions des pesanteurs de toutes les parties d'un même corps ou systême de corps, comme parallèles entr'elles. Ainsi la théorie que nous avons donnée dans le Chapitre précédent, sur la composition & décomposition des forces parallèles, s'appliquera aux corps pesans, en entendant par ces forces les pesanteurs des parties des corps mêmes.

On appelle *ligne verticale*, la direction suivant laquelle les corps tombent par la pesanteur; *ligne horisontale*, une ligne perpendiculaire à la verticale; *plan vertical*, un plan qui passe par une ligne verticale; *plan horisontal* ou *horison*, un plan auquel la direction de la pesanteur est perpendiculaire, ou qui contient deux lignes horisontales qui se coupent.

75. Cela posé, soient *A*, *B*, *C*, *D* (Fig. 15) les corps élémentaires qui composent un même systême, & supposons que les forces parallèles *P*, *Q*, *R*, *S* appliquées à ces corps, en soient les pesanteurs. Toutes ces forces agissent dans le même sens. Nous voyons, Fig. 15.

1°. Que le poids total du systême est égal (42) à la somme des poids élémentaires dont il est composé, puisque la résultante de toutes les forces *P*, *Q*, *R*, *S* est égale à $P + Q + R + S$.

2°. Dans quelque position qu'on mette le systême, son poids total demeure toujours le même; puisque chaque corps élémentaire est toujours également pesant, & qu'en vertu du même article 42 la résultante de toutes les pesanteurs qui ont des directions parallèles, est toujours égale à leur somme.

3°. Conséquemment à l'article 46, quelque situation qu'on puisse donner au systême, pourvû que les corps élémentaires conservent entr'eux les mêmes distances, les directions du poids de tout le systême se couperont toutes en un même point. Ce point que nous avons appellé en général *centre des forces parallèles*, s'appellera ici *centre de gravité;* les forces parallèles étant maintenant les pesanteurs des parties élémentaires d'un même systême de corps, ou d'un corps sensible qu'on peut regarder comme le systême des molécules de matière dont il est composé.

76. On voit par cette notion du centre de gravité, que si l'on suspend un corps par un cordon dont la

direction prolongée passe par ce point, le corps demeurera immobile dans toutes les situations possibles. Il existe un tel point dans tous les corps ou systêmes de corps; mais il ne falloit pas se contenter d'affirmer la chose, comme la plûpart des Auteurs de Méchanique l'ont fait ; elle avoit besoin d'être démontrée ; elle l'est par l'article 46 déja cité.

77. De-là suit une manière fort simple de déterminer, par l'expérience, le centre de gravité d'un corps de figure quelconque. Suspendez ce corps par un cordon qui le soutienne successivement par deux points différens; prolongez par la pensée les deux directions du cordon au-dedans du corps, le point où elles se couperont, sera le centre de gravité cherché.

Quand le corps est trop considérable pour pouvoir être ainsi suspendu, il faut en faire un autre plus petit qui lui soit semblable, & déterminer le centre de gravité de celui-ci, comme on vient de le dire. Ce centre fera connoître proportionnellement la position de celui du grand corps.

78. Toutes les propriétés qui ont été démontrées ci-dessus pour les momens des forces parallèles qui agissent dans le même sens, ont lieu pour un systême de corps soumis à l'action de la pesanteur. Résumons ici ces propriétés, en les appliquant au sujet présent.

79. Soient un nombre quelconque de poids P, Q, Fig. 32 & 33. R, S (Fig. 32 & 33) enfilés par une même verge inflexible sans pesanteur. Considérons leurs momens & celui de leur systême réuni au centre de gravité

G, par rapport au point E de la verge ; on aura $R \times RE + S \times SE \pm P \times PE \pm Q \times QE = (P + Q + R + S) \times GE$.

Cela eſt clair (56), en imaginant que tous les corps A, B, C, D, (Fig. 15) ſont placés ſur une même ligne; que les forces P, Q, R, S ſont leurs poids ; & que l'on rapporte les momens à un point de la ligne qui les enfile.

Si (Fig. 33) le point E tombe ſur le point G, on aura

$$P \times GE + Q \times GQ = R \times GR + S \times GS;$$

c'eſt-à-dire, que par rapport au centre de gravité, la ſomme des momens des corps qui ſont d'un côté eſt égale à la ſomme des momens des corps qui ſont de l'autre côté.

80. Il eſt également clair que ſi l'on mène l'axe quelconque Es (Fig. 32 & 33), & les parallèles Pp, Qq, &c, on aura

$R \times Rr + S \times Ss \pm P \times Pp \pm Q \times Qq = (P + Q + R + S) \times Gg$,

puiſqu'on a cette ſuite de proportionnelles, $PE : QE : RE : SE : GE :: Pp : Qq : Rr : Ss : Gg$, & qu'on peut par conſéquent, dans l'équation de l'article précédent, ſubſtituer à la place des lignes PE, QE, &c, leurs proportionnelles Pp, Qq, &c.

Lorſque l'axe Es (Fig. 33) paſſe par le centre de gravité G, on a

$$P \times Pp + Q \times Qq = R \times Rr + S \times Ss.$$

81. Les articles 56, 57, 58, 60, 61, 62, s'ap-

pliquent ici littéralement, en ſuppoſant que les forces P, Q, R, S ſont les poids des corps A, B, C, D auxquels elles ſont appliquées. On voit que ſi l'on conſidère les momens de pluſieurs poids, & celui de leur ſyſtême réuni au centre de gravité, par rapport à un axe ou à un plan, la ſomme ou la différence des momens de ces poids, ſera égale au moment de leur ſyſtême. Et ſi l'axe ou le plan des momens paſſe par le centre de gravité, la ſomme des momens des poids qui ſont d'un côté, ſera égale à la ſomme des momens des poids qui ſont de l'autre côté. Par ces propriétés, on trouve dans tous les cas la poſition du centre de gravité du ſyſtême, comme nous l'avons expliqué.

Le Lecteur ſe ſouviendra que les diſtances des poids à l'axe ou au plan des momens, ſont toujours cenſées parallèles entr'elles.

82. On fait un grand uſage des centres de gravité dans la Méchanique. Il eſt donc eſſentiel de ſe rendre très-familières les méthodes que nous avons données pour les déterminer. Elles ſuppoſent, comme on voit, qu'un ſyſtême, ou un corps regardé comme un ſyſtême d'autres corps, eſt compoſé de parties iſolées, dont chacune eſt regardée comme ramaſſée ou *concentrée* en un ſeul même point qui en eſt le centre de gravité particulier. Mais, toujours vraies dans la théorie, ces méthodes ne ſont pas toujours ſuſceptibles de préciſion dans la pratique, parce que ſouvent les parties élémentaires du ſyſtême ayant des groſſeurs ſenſibles, ne peuvent pas être cenſées réunies cha-

cune en un même point ; & que d'un autre côté l'irrégularité fréquente de leurs figures, ou quelquefois de leurs poids quand elles ne ſont pas homogènes dans toute leur étendue, ne permet de déterminer leurs centres de gravité particuliers que par eſtime ou d'une manière approchée.

83. Il y a un grand nombre de cas dans leſquels on peut, à l'aide de la Géométrie, déterminer exactement & ſimplement le centre de gravité d'un corps. Ces cas embraſſent tous les corps homogènes dont la figure eſt aſſujettie à une loi *connue* de continuité. Je vais donner des exemples de ces ſortes de déterminations ; mais ce détail demande à être précédé de quelques remarques.

84. On ſçait, & nous l'avons déja obſervé (5), que la Géométrie ne conſidére que les volumes ; elle ne pourroit par conſéquent, toute ſeule, que déterminer le *centre de volume* d'un corps de figure donnée. Mais dans les corps homogènes, dont il s'agit ici, toutes les molécules élémentaires peuvent être regardées comme égales entr'elles, & comme également peſantes. Le centre de volume ſera donc le même que le centre de gravité ou de maſſe. Ainſi la Méchanique & la Géométrie peuvent ſe prêter un ſecours mutuel pour déterminer ce point.

85. Après avoir trouvé la place du centre de gravité d'un corps homogène, on pourra imaginer que toute la peſanteur du corps eſt réunie à ce point ; mais pour meſurer cette force, il faut avoir égard à l'eſpèce de matière dont le corps eſt formé. Par

exemple, deux ſphères, l'une d'or, l'autre d'argent, de même diamètre, ne pèſent pas également; leurs poids ſont entr'eux dans le rapport de 19 à 10 environ. Il eſt clair, en général, que le poids d'un corps homogène eſt d'autant plus grand que ſon volume eſt plus grand, & qu'il contient plus de parties peſantes, ou qu'il a plus de denſité. Par conſéquent, ſi l'on nomme G le volume de ce corps, p ſa denſité ou *peſanteur ſpécifique*, c'eſt-à-dire, le poids de l'une des parties égales (par exemple, d'un pouce cube) dans leſquelles le volume peut être cenſé partagé; le poids abſolu ou total du corps ſera repréſenté par le produit $G \times p$. Dans l'exemple de nos deux ſphères, les volumes G ſont les mêmes, les peſanteurs ſpécifiques p ſont entr'elles comme les nombres 19 & 10 environ. Je ſuppoſe qu'on ne perdra pas cette obſervation de vûe dans l'uſage qu'on pourra faire des centres de gravité; mon objet actuel eſt ſimplement de déterminer ces points dans quelques-uns des cas que j'ai indiqués (83).

EXEMPLE I.

86. *Trouver le centre de gravité d'une ligne droite, celui de l'aire ou du contour d'un parallèlogramme, d'un polygone régulier, d'un cercle, d'un parallélipipède, d'un priſme à baſes régulières, d'un cylindre, d'une ſphère, &c?*

On a déja obſervé (84) que le centre de gravité d'un corps homogène eſt le même que le centre de volume. Or, pour une ligne droite ſuppoſée uniformément peſante dans toute ſa longueur, ce centre commun eſt dans ſon milieu ; pour l'aire ou le contour d'un parallèlogramme, il eſt au point d'interſection de deux droites menées par les milieux des côtés oppoſés ; pour un polygone régulier, un cercle, un parallélipipède, &c, il eſt au centre même de figure. Tout cela eſt évident ; mais ſi on en demande une démonſtration rigoureuſe, la voici pour la ligne droite & l'aire du parallèlogramme. On raiſonnera d'une manière analogue, pour tous les autres cas.

87. Soit donc en premier lieu la droite *AB* (Fig. 34) chargée de petits poids égaux dans tous ſes points. Si on la ſuſpend par ſon milieu *C*, elle demeurera en équilibre ; car chaque paire de poids pris de part & d'autre, à égales diſtances du point *C*, a ſon centre de gravité en ce point (39). D'où il ſuit (42) que la réſultante de tous les poids qui forment la ligne *AB* eſt dirigée ſuivant la verticale *KC*. Qu'on incline la ligne en *ab*, la réſultante de tous les poids ſera encore dirigée ſuivant la verticale *KC*. Donc (76) le milieu *C* eſt le centre de gravité de la ligne. On voit ici comment la Méchanique & la Géométrie s'aident mutuellement pour la détermination du centre de gravité ; l'une fait voir que ce centre eſt placé au milieu de la ligne, & l'autre apprendra à trouver ce milieu. Fig. 34.

88. Conſidérons en ſecond lieu le parallélogramme *ABDE* (Fig. 35), & imaginons que ſa ſurface eſt compoſée d'une infinité de filets uniformément peſans, parallèles aux côtés *AB*, *ED*. Il eſt clair que chaque élément ayant ſon centre de gravité dans Fig. 35.

ſon milieu, ſi l'on ſuſpend le parallèlogramme par le moyen d'un cordon *KG* qui diviſe en deux parties égales aux points *F*, *G*, les côtés *AB*, *ED*, le parallèlogramme demeurera immobile. Par la même raiſon, ſi l'on imagine que la ſurface du parallèlogramme eſt compoſée d'une infinité d'élémens parallèles à *AE* & à *BD*, & qu'on le ſuſpende par un cordon *OI* qui diviſe en deux parties égales les côtés *AE*, *BD*, il demeurera encore immobile. Donc (76) le point *C*, interſection des droites *KG*, *OI*, eſt le centre de gravité du parallèlogramme. Cette interſection ſe trouve par la géométrie.

EXEMPLE II.

89. *Trouver le centre de gravité d'un triangle ABC,*
Fig. 36. *(Fig. 36)?*

Des angles *A* & *B* ſoient menées aux milieux *D* & *E* des côtés oppoſés *BC*, *AC*, les droites *AD*, *BE* qui ſe coupent en *E*; ce point *E* eſt le centre de gravité de l'aire du triangle. Car, 1°. en regardant l'aire du triangle comme compoſée d'une infinité d'élémens parallèles à *BC*, tous ces élémens auront leurs centres de gravité particuliers dans la droite *AD*. Donc ſi l'on ſuſpend le triangle au point *K* dans la direction *KAD*, il demeurera immobile. 2°. Par la même raiſon, en regardant l'aire du triangle comme compoſée d'une infinité d'élémens parallèles à *AC*, & ſuſpendant cette figure dans la direction *OBE* devenue verticale, elle demeurera immobile. Donc (76) le point *G*, interſection des droites *KAD*,

KAD, *OBE*, eſt ſon centre de gravité. C. Q. F. T.

90. Qu'on mène la droite DE; elle eſt parallèle à AB, puiſque les côtés CB, CA ſont coupés proportionnellement en D & E. Donc les deux triangles CDE, CBA ſont ſemblables, & les deux triangles DGE, AGB le ſont auſſi. Par conſéquent, on aura cette ſuite de rapports égaux, $CD : CB :: DE : AB :: DG : AG$. Or $CD = \frac{CB}{2}$; donç $DG = \frac{AG}{2}$, & $DG = \frac{AD}{3}$, $AG = \frac{2}{3} AD$. Le centre de gravité d'un triangle eſt donc placé *au tiers de la droite menée d'un angle au milieu du côté oppoſé, à compter de ce côté, ou aux deux tiers, à compter du ſommet.*

91. Par le moyen du centre de gravité du triangle, on peut trouver celui d'un polygone quelconque. Soit, par exemple, le pentagone $ABCDE$ (Fig. 37) dont il faille trouver le centre de gravité. Ayant tiré les diagonales AC, AD, je mène aux milieux F, H, Q des côtés BC, CD, DE, les droites AF, AH, AQ; je prens $AO = \frac{2}{3} AF$, $AI = \frac{2}{3} AH$, $AN = \frac{2}{3} AQ$; les points O, I, N ſont les centres de gravité des triangles ABC, ACD, ADE. En joignant les points O & I par la droite OI, le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$ ſera placé ſur cette ligne. Pour ſçavoir en quel endroit K il eſt placé, je fais cette proportion (42), le quadrilatère $ABCD$: au triangle $ACD :: OI : OK$. Du point K, au centre de gravité N du triangle ADE, je Fig. 37.

mène la droite KN, & je la divise en G, de manière qu'on ait la proportion, le pentagone $ABCDE$: au triangle $ADE :: KN : KG$; le point G sera (42) le centre de gravité du pentagone.

Fig. 38. 92. Quand on a une fois trouvé les centres de gravité O, I, N, (Fig. 38) des triangles ABC, ACD, ADE; la position du centre de gravité G de tout le polygone $ABCDE$ peut être déterminée d'une manière plus expéditive que la précédente, en employant les propriétés des momens. Pour cela, menons à volonté dans le plan du polygone les deux axes ST, SV; je suppose que l'un soit vertical, l'autre horisontal, pour plus de simplicité. Des points O, I, N, G soient tirées perpendiculairement à nos deux axes les droites Oo, Oo'; Ii, Ii'; Nn, Nn'; Gg, Gg'. On aura (81) ces équations

$$ABCDE \times Gg = ABC \times Oo + ACD \times Ii + ADE \times Nn;$$
$$ABCDE \times Gg' = ABC \times Oo' + ACD \times Ii' + ADE \times Nn',$$

& par conséquent

$$Gg = \frac{ABC \times Oo + ACD \times Ii + ADE \times Nn}{ABCDE},$$
$$Gg' = \frac{ABC \times Oo' + ACD \times Ii' + ADE \times Nn'}{ABCDE}.$$

Or dans ces deux dernieres équations toutes les parties des deux seconds membres sont connues, ou mesurables ; on connoîtra donc aussi Gg & Gg'. Prenant sur ST la partie $Sg = Gg'$, & menant par le point g la droite gG, parallèle à SV, & égale à la valeur qu'on a trouvée pour Gg; le point G sera le centre de gravité demandé.

93. On trouvera par les mêmes méthodes le centre de gravité du périmètre d'un triangle ou d'un polygone quelconque. Soit, par exemple, le triangle ABC (Fig. 39). Joignez les milieux M & N des côtés AB, AC, par la droite MN; & divisez cette ligne en O, de manière que l'on ait $AB+AC : AC :: MN : MO$; le point O sera le centre de gravité du systême des deux droites AB, AC. Du point O au point Q, milieu de BC, menez la droite OQ, & divisez-la en G, de manière que l'on ait $AB+AC+BC : BC :: OQ : OG$; le point G sera le centre de gravité du systême des trois droites AB, AC, BC, ou du contour du triangle ABC. Il est clair qu'on auroit pû trouver également la position du point G par le moyen des momens, en raisonnant d'une manière analogue à celle qui a été employée dans l'article précédent. Fig. 39.

On voit que le centre de gravité du périmètre du triangle ABC est placé hors de ce périmètre. Dans ces sortes de cas où le centre de gravité d'un corps est placé hors de ce corps, il faut concevoir que le centre est lié solidement avec le corps par le moyen de verges sans pesanteur.

EXEMPLE III.

94. *Trouver le centre de gravité d'une pyramide?*

En premier lieu, supposons que la pyramide proposée $SABC$ (Fig. 40) soit triangulaire. Des angles A & S soient menées au milieu D du côté BC, les droites AD, SD; & ayant fait $DE =$ Fig. 40.

$\frac{DA}{3}$, $DF = \frac{DS}{3}$, ſoient menées les droites SE, AF qui ſe couperont néceſſairement en G, puiſqu'elles ſont dans le même plan ASD. Le point E eſt le centre de gravité du triangle ABC, & le point F celui du triangle SBC. Donc ſi l'on regarde la pyramide comme compoſée d'une infinité de triangles parallèles à ABC, & ſi l'on conſidére que tous ces ttiangles étant ſemblables à ABC, la droite SE paſſe néceſſairement par leurs centres de gravité particuliers, on verra que la pyramide ſuſpendue au point K, dans la direction KSE, demeurera immobile. Par la même raiſon, en regardant la pyramide comme compoſée d'élémens parallèles au triangle SBC, ſi on la ſuſpend au point O, dans la direction OAF devenue verticale, elle demeurera encore immobile. Donc le point G eſt ſon centre de gravité. C. Q. F. 1°. T.

95. Qu'on joigne les points E & F par la droite EF; elle ſera parallèle à AS, puiſque les droites DA, DS ſont coupées proportionnellement en E & F. Donc les deux triangles DEF, DAS ſont ſemblables, de même que les deux triangles EGF, SGA. Ainſi on a cette ſuite de rapports égaux, $DE:DA::EF:AS::EG:GS$. Mais $DE = \frac{DA}{3}$; donc $EG = \frac{SG}{3} = \frac{SE}{4}$, & $SG = \frac{3}{4}SE$. Par conſéquent le centre de gravité d'une pyramide triangulaire eſt placé *aux trois quarts de la ligne menée de ſon ſommet au centre de gravité de ſa baſe, à compter du*

ſommet, ou au quart de la même ligne, à compter de la baſe.

96. Maintenant, ſoit la pyramide quelconque *SAB CDE* (Fig. 41). Partageons ſa baſe en triangles par les diagonales *AD*, *AC*; & concevons que ces triangles ſont les baſes d'autant de pyramides triangulaires. Du ſommet *S* au centre de gravité *F* du triangle *AED*, & au centre de gravité *Q* de tout le polygone *ABCDE*, ſoient menées les droites *SF*, *SQ*. Soit diviſée la droite *SF* au point *f*, de maniere que $Sf = \frac{3}{4} SF$; le point *f* ſera le centre de gravité de la pyramide triangulaire *SEAD*; & ſi par ce point on fait paſſer le plan *abcde*, parallèle à la baſe *ABCDE*, ce plan diviſera proportionnellement à *SF* & à *Sf* toutes les lignes qu'on pourra mener du ſommet de la pyramide à la baſe; il contiendra donc les centres de gravité de toutes les pyramides triangulaires dont la pyramide polygonale eſt compoſée, & par conſéquent auſſi le centre de gravité de cette derniere pyramide. Or, en regardant cette même pyramide comme compoſée d'une infinité d'élémens parallèles à ſa baſe *ABCDE*, & conſidérant que tous ces élémens ſont ſemblables à *ABCDE*, il eſt évident que la droite *SQ* paſſe par leurs centres de gravité particuliers, & qu'elle contient par conſéquent le centre de gravité de toute la pyramide. Donc ce centre eſt au point d'interſection *G* de la droite *SQ* avec le plan *abcde*. Or la droite *SQ* eſt diviſée en *G*, de manière que $SG = \frac{3}{4} SQ$. Ainſi le centre de gravité de toute pyramide *eſt aux trois quarts de la* Fig. 41.

ligne menée de son sommet au centre de gravité de sa base, à compter du sommet, ou au quart de la même ligne, à compter de la base. C. Q. F. 2°. T.

97. Tout cone étant une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, a son centre de gravité placé aux trois quarts de la ligne menée de son sommet au centre du cercle qui lui sert de base, à compter du sommet, ou au quart de la même ligne, à compter de la base.

98. Qu'il s'agisse de trouver le centre de gravité

Fig. 42. *r* d'un tronc *ABCDEMHIKL* (Fig. 42), à bases parallèles, de pyramide ou de cone. On voit d'abord qu'en supposant que *SABCDE* soit la pyramide entiere dont le tronc fait partie, *SHIKLM* la pyramide retranchée, & menant du sommet *S* au centre de gravité *Q* de la base *ABCDE*, la droite *SQ* qui passe nécessairement par le centre de gravité *q* du polygone *HIKLM* semblable à *ABCDE*; on voit, dis-je, que le tronc, supposé suspendu suivant la direction *SQ* demeurera immobile, & que par conséquent son centre de gravité *r* est placé sur la droite *SQ*. Comme il seroit embarrassant de trouver, d'une manière directe, une autre suspension d'équilibre, servons-nous des propriétés des momens pour achever la solution; c'est-à-dire, pour fixer sur la droite *SQ* la place *r* du centre de gravité cherché. Nommons *S* le solide de la pyramide entiere, *s* celui de la pyramide retranchée, & par conséquent *S*—*s* celui du tronc. En considérant les momens des trois solides *S*, *s*, *S*—*s* par rapport au

ſommet S, on aura (79) $S \times \frac{3}{4} SQ = s \times \frac{3}{4} Sq + (S - s) \times Sr$, ou bien $S \times \frac{3}{4} SQ - s \times \frac{3}{4} Sq = (S - s) \times Sr$, & par conſéquent

$$Sr = \frac{S \times \frac{3}{4} SQ - s \times \frac{3}{4} Sq}{S - s}.$$

Or toutes les quantités S, s, SQ, Sq ſont connues, ou déterminables par la Géométrie & par ce qui précéde; on connoîtra donc Sr.

EXEMPLE IV.

99. *Trouver le centre de gravité* G *d'un arc de cercle* AOB (Fig. 43)? Fig. 43.

Il eſt clair d'abord que le centre de gravité cherché eſt placé ſur le raïon CO qui diviſe l'arc AOB en deux parties égales. Fixons ſa place par le moyen des momens.

Je conçois que l'arc AOB eſt partagé en une infinité de parties mn qu'on peut regarder comme de petites lignes droites; & je conſidère leurs momens par rapport au diamètre HK parallèle à la corde AB. La ſomme de tous ces momens ſera égale (81) au moment du ſyſtême, c'eſt-à-dire, à $AOB \times CG$. Soit q le milieu ou centre de gravité de mn. Des points A, B, m, n, q ſoient abaiſſées les perpendiculaires AV, BZ, mx, ny, qz ſur HK; ſoit menée mr parallèle à la même ligne HK, & ſoit tiré le rayon Cq. Les deux triangles nrm, Cqz, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ſont ſemblables, & donnent $mn : mr$ ou $xy :: Cq$ ou $CO : qz$. Donc $mn \times qz = xy \times CO$. Le même raisonnement & la même conclusion ont lieu pour tous les autres élémens de l'arc AOB. D'où il suit évidemment que la somme de tous les momens $mn \times xy$ est égale au produit de la ligne finie VZ ou AB multipliée par CO. On a donc aussi $AOB \times GC = AB \times CO$, & par conséquent $GC = \frac{AB \times CO}{AOB}$.

La distance du centre de gravité d'un arc de cercle au centre du cercle est donc égale *au quotient du produit de la corde & du raïon, divisé par l'arc.* C.Q.F.T.

100. Si l'on mène un diamètre quelconque IL; qu'ensuite on lui abaisse des points A, B, G, les perpendiculaires AD, BE, GT; & qu'on lui mène la parallèle AN: les deux triangles ANB, CTG, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun seront semblables, & donneront $AB : CG :: AN$ ou $DE : GT = \frac{CG \times DE}{AB} = \frac{CO \times DE}{AOB}$, c'est-à-dire, que la distance du centre de gravité de l'arc AOB au diamètre IL est égale *au quotient du produit du raïon & de la partie du diamètre comprise entre les perpendiculaires abaissées des extrémités de l'arc, divisé par l'arc.*

EXEMPLE V.

101. *Trouver le centre de gravité* G *du secteur de* Fig. 44.
cercle ACBO (Fig. 44)?

Le centre de gravité G est placé sur le raïon CO qui divise le secteur en deux parties égales. Reste à sçavoir en quel endroit.

Imaginons que le secteur $ACBO$ est composé d'une infinité de triangles Cmn. Soit q le milieu de la base mn, & soit tiré le raïon Cq. Qu'on prenne sur ce raïon la partie $Ct = \frac{2}{3} Cq$; le point t sera le centre de gravité du triangle élémentaire Cmn. Des points A, B, m, n, q, t, soient menées les perpendiculaires AV, BZ, mx, ny, qz, tu au diamètre HK supposé parallèle à la corde AB; & soit tirée mr parallèle à la même corde. Le moment du triangle Cmn, par rapport à HK, sera exprimé par $\frac{mn \times Cq}{2} \times tu$, ou bien (en observant que $tu = \frac{2}{3} qz$, & mettant CO pour Cq), par $\frac{mn \times CO}{2} \times \frac{2}{3} qz$. Or à cause des triangles semblables nrm, Cqz, on a, $mn \times qz = xy \times CO$. Donc le moment proposé est $\frac{\overline{CO}^2}{2} \times \frac{2}{3} xy$. Donc la somme des momens de tous les triangles élémentaires dont le secteur entier $ACBO$ est composé, est $\frac{\overline{CO}^2}{2} \times \frac{2}{3} VZ$ ou $\frac{\overline{CO}^2 \times AB}{3}$. Or cette somme (81) est égale à $ACBO \times CG$, c'est-à-dire, à $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG$. On aura donc $\frac{AOB \times CO}{2} \times CG = \frac{\overline{CO}^2 \times AB}{3}$; d'où l'on tire $CG = \frac{2 CO \times AB}{3 AOB}$.

La position du point G sur le raïon CO est donc connue.

102. Connoiſſant le centre de gravité du ſecteur $ACBO$, & ſachant trouver (89) celui du triangle ACB, on déterminera ſans peine celui du ſegment ABO, en conſidérant que le moment du ſegment par rapport au centre, eſt égal à la différence des momens du ſecteur & du triangle. Ce calcul eſt ſi facile, qu'il ſuffit de l'indiquer.

Je ne multiplierai pas davantage ces exemples. On voit que chacun d'eux, traité ainſi par la méthode ſynthétique, a ſa difficulté particuliere, qui peut être très-grande en certains cas. Les Lecteurs verſés dans le calcul intégral, trouveront dans la note ſuivante une méthode générale & facile pour réſoudre ces ſortes de problêmes.

NOTES SUR LE CHAPITRE II.

Manière générale de trouver les centres de gravité des lignes, des ſuperficies, & des ſolides, dont la nature eſt exprimée par une équation.

Fig. 45. I. Soit une courbe quelconque AM (Fig. 45), rapportée aux coordonnées perpendiculaires AP, PM. Qu'on mène l'ordonnée pm infiniment proche de PM. Nous prendrons pour axes de momens les droites AP, AH, dont la premiere tombe ſur l'abſciſſe AP, la ſeconde lui eſt perpendiculaire, ou parallèle à l'ordonnée PM; & nous ſuppoſerons toujours $AP = x$, $PM = y$, $Pp = dx$, l'arc $AM = s$, $Mm = ds$, le rapport de la circonférence au raïon $= \pi$.

II. *Trouver le centre de gravité de l'arc quelconque* AM?

Soit le point G le centre cherché ; & menons les perpendiculaires GO, GQ à nos deux axes. Il est clair que le moment de l'arc élémentaire Mm, par rapport à AP, est yds, & que le moment du même arc, par rapport à AH, est xds. Ainsi on aura (81), $s \times GO = \int yds$, $s \times GQ = \int xds$, & par conséquent

$$GO = \frac{\int yds}{s},$$

$$GQ = \frac{\int xds}{s};$$

D'où l'on voit qu'en exprimant en fonctions d'une même variable, à l'aide de l'équation de la courbe, les quantités qui sont sous les signes d'intégration ; effectuant les intégrations, soit exactement, soit au moins par approximation : on connoîtra les droites GO, GQ, & par conséquent la position du centre de gravité G.

Par exemple, soit AM l'arc d'une parabole dont l'équation est $yy = px$. On aura $dx = \frac{2ydy}{p}$, $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$, $yds = \frac{ydy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$, $xds = \frac{yydy\sqrt{(pp+4yy)}}{pp}$.

Pour intégrer $\frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$, on observera que

$$\frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p} = \frac{pdy}{\sqrt{(pp+4yy})} + \frac{4yydy}{p\sqrt{(pp+4yy)}},$$

& par conséquent $\frac{4yydy}{p\sqrt{(pp+4yy)}} = \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$ $- \frac{pdy}{\sqrt{(pp+4yy)}}$. Mais d'un autre côté il est clair que $d\left(\frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{p}\right) = \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p} +$ $\frac{4yydy}{p\sqrt{(pp+4yy)}}$, ou bien $\frac{4yydy}{p\sqrt{(pp+4yy)}} =$ $d\left(\frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{p}\right) - \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$. On aura donc $\frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p} - \frac{pdy}{\sqrt{(pp+4yy)}} =$ $d\left(\frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{p}\right) - \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$, & par conséquent $\int \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{p} = \frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{2p}$ $+ \int \frac{pdy}{2\sqrt{(pp+4yy)}} + A$. Or on sçait, par des formules très-connues, que $\int \frac{pdy}{2\sqrt{(pp+4yy)}} =$ $\frac{p}{4}\,\mathrm{L.}(2y+\sqrt{(pp+4yy)})$. Et comme la constante A, ajoutée en intégrant, doit être telle que l'intégrale s'évanouisse, lorsque $y=0$, puisque l'arc AM commence au point A, il s'ensuit qu'on aura AM ou $s = \frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{2p} + \frac{p}{4}\,\mathrm{L.}\frac{2y+\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$.

L'intégrale de $\frac{ydy\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$ est $\frac{1}{12p}((pp+$ $4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3)$. Pour intégrer $\frac{yydy\sqrt{(pp+4yy)}}{pp}$, on obſervera que $\frac{d\left(y(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}\right)}{pp} = \frac{dy(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{pp}$ $+ \frac{12yydy(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}}{pp} = dy\sqrt{(pp+4yy)} +$ $\frac{16y^2dy\sqrt{(pp+4yy)}}{pp}$; & par conſéquent

$$\int \frac{yydy\sqrt{(pp+4yy)}}{pp} = \frac{y(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{16pp} - -$$

$$\int \frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{16} = \frac{y(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{16p^2} -$$

$$\frac{y\sqrt{(pp+4yy)}}{32} - \frac{pp}{64} \text{ L. } \frac{2y+\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$$

$$= \frac{(ppy+8y^3)\sqrt{(pp+4yy)}}{32p^2} - \frac{p^2}{64} \text{ L. }$$

$\frac{2y+\sqrt{(pp+4yy)}}{p}$. Subſtituant toutes ces valeurs de s, $\int yds$, $\int xds$ dans les expreſſions générales de GO & de GQ, on aura ces lignes en fonctions de y & de conſtantes ; & par conſéquent on connoîtra la place du centre de gravité de l'arc parabolique AM.

III. *Trouver le centre de gravité de l'aire curviligne quelconque* APM ?

Suppoſons que le point G ſoit le centre de gravité de l'aire APM ; & menons aux axes AP, AH les perpendiculaires GO, GQ. Le moment du trapèze élémentaire $PMmp$, par rapport à AP, ſera $\frac{yydx}{2}$; & par rapport à AH, le moment du même trapèze ſera $xydx$. Nous aurons donc $GO \times \int ydx =$

$\int \frac{yydx}{2}$, $GQ \times \int y\,dx = \int xy\,dx$, & par conſéquent

$$GO = \frac{\int yy\,dx}{2\int y\,dx},$$

$$GQ = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx},$$

quantités qu'on exprimera en fonctions d'une même variable, à l'aide de l'équation de la courbe.

Par exemple, ſoit AM une parabole. On aura $yy = px$, $dx = \frac{2y\,dy}{p}$, $\int y\,dx = \int \frac{2yy\,dy}{p} = \frac{2y^3}{3p}$, $\int \frac{yy\,dx}{2} = \int \frac{y^3\,dy}{p} = \frac{y^4}{4p}$, $\int xy\,dx = \int \frac{2y^4\,dy}{pp} = \frac{2y^5}{5p^2}$. D'où il ſuit qu'on aura

$$GO = \frac{3}{8}y,$$

$$GQ = \frac{3yy}{5p} = \tfrac{3}{5}x.$$

IV. *Trouver le centre de gravité de la ſuperficie produite par la révolution de la courbe quelconque* AM *autour de* AP?

Il eſt clair que le centre de gravité cherché eſt placé dans l'axe AP. La zone élémentaire décrite par Mm, dont la valeur eſt $\pi y\,ds$, peut être cenſée avoir ſon centre de gravité placé au point P de l'axe AP; ſon moment, par rapport au point A, eſt donc $\pi xy\,ds$. Ainſi en nommant D la diſtance du centre de gravité de la ſuperficie décrite par AM au point A, on aura $D \times \int \pi y\,ds = \int \pi xy\,ds$, &

$$D = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}.$$

Par exemple, soit AM un arc de cercle dont le raïon $=a$. On aura $y=\sqrt{(2ax-xx)}$, $ds=\frac{adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, $\int yds=ax$, $\int xyds=\frac{ax^2}{2}$; Donc $D=\frac{x}{2}$. Le *centre de gravité d'une zone sphérique quelconque est donc au milieu de la flèche.*

V. *Supposons que l'arc* AM (Fig. 46) *au lieu de faire une révolution entiere, comme dans l'article précédent, ne fasse que la* $\frac{1}{n}$ *partie d'une révolution: trouver le centre de gravité de la superficie* AMM′ *qu'il engendrera?* Fig. 46.

Qu'on mène suivant l'axe AP le plan $APSN$ qui divise la surface AMM' en deux parties égales & semblables; ce plan contiendra les centres de gravité de toutes les zones élémentaires $MSM'm'sm$ dont la surface AMM' est composée, & par conséquent aussi le centre de gravité de cette surface elle-même. Soient, dans ce plan, V le centre de gravité de l'arc MSM', G celui de la surface AMM'; & menons à l'axe AP, les perpendiculaires VP, GK. On aura (81) $AMM' \times GK = \int MSM' \times Mm \times VP$. Or, si l'on tire la corde MM', & qu'on nomme $\frac{m}{1}$ le rapport *connu* de cette corde au raïon PS ou PM; on aura (99) $MSM' \times VP = MM' \times PM = m \times \overline{PM}^2$. Donc $AMM' \times GK = m\int Mm \times \overline{PM}^2 = m\int yyds$; &

$$GK = \frac{m\int yyds}{AMM'}.$$

On connoîtra donc la distance du centre de gravité G à l'axe AP. Reste à trouver la position du point K. Or il est aisé de voir que ce point est le centre de gravité de la superficie qui seroit produite par une révolution entière de l'arc AM autour de AP; car si on imagine que cette superficie est partagée en une infinité de *pans* par des plans menés suivant l'axe AP, & faisant entr'eux des angles égaux, Fig. 14. tous ces pans égaux auront leurs centres de gravité placés sur la circonférence d'un cercle perpendiculaire à l'axe AP. Donc le centre de gravité de leur systême sera placé dans cet axe. Donc, réciproquement, si par le point K supposé le centre de gravité de la superficie produite par une révolution entiere de l'arc AM, on mène un plan circulaire perpendiculaire à AP, il contiendra le centre de gravité d'une partie quelconque AMM' de cette même superficie. Connoissant donc la position du point K par l'article précédent, on a tout ce qu'il faut pour trouver le centre de gravité G de la superficie AMM'.

Par exemple, soit AM un arc de cercle dont le raïon $= a$. On aura $AMM' = \frac{\pi a x x}{n}$, $\int yyds = \int adx\sqrt{(2ax - xx)}$ qui est l'expression de l'aire du segment APM multiplié par le raïon a. Donc $GK = \frac{m.n.APM}{\pi a x}$; d'un autre côté, on a par l'article précédent, $AK = \frac{x}{2}$.

Que APM soit un quart de cercle qui fasse un quart

quart de révolution. On aura $m=\sqrt{2}$, $n=4$, $x=a$, $APM=\frac{\pi aa}{8}$. Donc $GK=\frac{a}{\sqrt{2}}$, & $AK=\frac{a}{2}$.

VI. *Trouver le centre de gravité du ſolide, produit par la révolution de l'aire* APM (Fig. 45) *autour de* AP? Fig. 45.

Le centre de gravité cherché eſt placé dans l'axe AP. De plus le cylindre élémentaire produit par la révolution du petit trapèze $PMmp$ peut être cenſé avoir ſon centre de gravité placé en P. Or ce cylindre a pour valeur $\frac{\pi y^2 dx}{2}$; ſon moment, par rapport au point A, eſt donc $\frac{\pi xy^2 dx}{2}$. Soit D la diſtance du centre de gravité du ſolide fini, produit par APM, au point A: on aura $D\times\int\frac{\pi y^2 dx}{2}=\int\frac{\pi xy^2 dx}{2}$, & par conſéquent

$$D=\frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx}.$$

Par exemple, ſoit APM un ſegment de cercle dont le raïon $=a$. On aura $\int y^2 dx=\int dx(2ax-xx)=ax^2-\frac{x^3}{3}$, $\int xy^2 dx=\int x\,dx\,(2ax-xx)=\frac{2ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}$. Donc $D=\frac{8ax-3x^2}{4(3a-x)}$.

VII. *Suppoſons que le ſegment* APM (Fig. 46) Fig. 45.

ne fasse que la $\frac{1}{n}$ *partie d'une révolution autour de* AP: *trouver le centre de gravité de l'espèce d'onglet* APMSM'A *qu'il engendrera ?*

Ayant mené suivant l'axe AP le plan $APSN$ qui partage l'onglet en deux parties égales & semblables, & qui contient par conséquent son centre de gravité & celui de ses élémens $PMSM'm'smp$; nous supposerons que G soit le centre de gravité de l'onglet, V celui du petit prisme $PMSM'm'smp$; & nous menerons à l'axe AP les perpendiculaires VP, GK. De plus nous tirerons la corde MM'; & nous nommerons, comme ci-dessus, m le rapport de cette corde au raïon PM. Cela posé, on aura (en nommant O l'onglet), $O \times GK = \int \left(\frac{PM \times MSM'}{2} \times Pp \times VP\right)$. Or (101), $VP = \frac{2MM' \times PM}{3MSM'}$; donc $O \times GK = m \int \frac{\overline{PM}^3 \times Pp}{3}$, ou bien $GK \times \int \frac{\pi yy dx}{2n} = m \int \frac{y^3 dx}{3}$, &

$$GK = \frac{2mn}{3} \times \frac{\int y^3 dx}{\int \pi yy dx}.$$

Quant à la position du point K, elle se détermine par l'article précédent, en considérant que ce point est nécessairement le centre de gravité du solide produit par une révolution entière de l'aire APM autour de AP.

Par exemple, soit APM un segment de cercle dont le raïon $= a$. On aura $\int \pi yy\, dx = \int \pi (2ax -$

$xx)dx = \pi a x^2 - \frac{\pi x^3}{3}$; $\int y^3 dx = dx(2ax - xx)^{\frac{3}{2}} = -\frac{(a-x)(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3aa}{4}\int dx \sqrt{(2ax - xx)}$. Ainsi

$$GK = \frac{2mn}{3} \times \frac{9aa\int dx\sqrt{(2ax-xx)} - 3(a-x)(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}{4(3\pi a x^2 - \pi x^3)};$$

& en vertu de l'article précédent,

$$AK = \frac{8ax - 3x^2}{4(3a - x)}.$$

Que APM soit un quart de cercle qui fasse un quart de révolution. On aura $m = \sqrt{2}$, $n = 4$, $x = a$, $\int dx\sqrt{(2ax - xx)} = APM = \frac{\pi aa}{8}$; & par conséquent $GK = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, $AK = \frac{5}{8}a$.

VIII. *Trouver le centre de gravité de l'aire d'une courbe* AEBE′ (Fig. 47), *composée de deux parties symétriques* AEB, AE′B, *en supposant que cette courbe soit irréguliere, ou que du moins on n'en connoisse pas exactement la nature?* Fig. 47.

La courbe proposée peut représenter, par exemple, la section horisontale d'un vaisseau flottant à la mer, faite à fleur d'eau. Elle est divisée en deux parties égales par son axe AB qui représente la section d'un plan vertical mené suivant la quille, avec le plan de flottaison. On détermine ordinairement le centre de gravité de cette courbe, en partageant l'axe AB en plusieurs parties égales AM, ML, LK, &c;

menant les ordonnées DMD', ELE', FKF', &c; & regardant les trapèzes $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EFF'E'$, &c, comme des trapèzes rectilignes. Cela est suffisamment exact pour la pratique. Mais on peut parvenir au même but d'une manière encore plus exacte, en rapportant la courbe proposée à une courbe du genre parabolique, comme il suit.

IX. Supposons, par exemple, que l'axe AB soit divisé en cinq parties égales AM, ML, LK, &c. Que $AP(x)$, & $PN(y)$ soient les coordonnées pour un point indéterminé N de la courbe CEH. Imaginons que l'équation de cette courbe est $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$. Les coëfficiens a, b, c, d, e, f sont indéterminés; mais ils se trouvent, par six équations du premier degré, en considérant que les abscisses AM, AL, AK, &c, & les ordonnées correspondantes AC, MD, LE, &c, sont données; ensorte que faisant successivement $x = 0$, $y = AC$, $x = AM$, $y = MD$, &c, on aura six équations du premier degré entre a, b, c, &c. Je suppose donc que ces coëfficiens soient connus.

1°. On aura l'aire $APNC = \int dx(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5) = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4} + \frac{ex^5}{5} + \frac{fx^6}{6}$. Donc en faisant $x = AB = g$, & doublant l'intégrale, on aura l'aire $ACFHBH'F'C'A = 2ag + bg^2 + \frac{2cg^3}{3} + \frac{edg^4}{2} + \frac{2eg^5}{5} + \frac{2fg^6}{6}$. Nommons A cette aire.

2°. Le moment de l'aire $APNC$, par rapport à l'axe AT, est $\int x\,dx\,(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5) = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^4}{4} + \frac{dx^5}{5} + \frac{ex^6}{6} + \frac{fx^7}{7}$. Donc, en faisant $x = g$; doublant l'intégrale : le moment de l'aire A, par rapport au point A, sera $ag^2 + \frac{2bg^3}{3} + \frac{cg^4}{2} + \frac{2dg^5}{5} + \frac{eg^6}{3} + \frac{2fg^7}{7}$. Nommons B ce moment ; il est clair que le centre de gravité de l'aire A, qui est évidemment placé sur l'axe AB, est éloigné du point A d'une quantité représentée par $\frac{B}{A}$.

X. Il est facile de trouver, par la même méthode, le centre de gravité de la *carène* d'un vaisseau, c'est-à-dire, de la partie que ce vaisseau enfonce dans l'eau. Car imaginons que cette carène est partagée en plusieurs tranches d'égale épaisseur par des plans horisontaux ou parallèles au plan de flottaison. Nommons A, A', A'', A''', &c, les aires des sections, à commencer par $AEBE'$, & B, B', B'', B''', &c, leurs momens par rapport à un axe vertical qu'il faut concevoir passer par le point A. Je suppose que Ak (Fig. 48) représente cet axe, & que les parties égales Af, fg, gh, &c, marquent les intervalles des sections. Ayant mené à Ak les perpendiculaires Aa, fb, gc, &c, je construis deux courbes ace, xzt, telles que les ordonnées Aa, fb, gc, &c, de la premiere soient proportionnelles aux quantités A, A', A'', &c, & Fig. 48.

que les ordonnées Ax, fy, gz, &c, de la seconde, ſoient proportionnelles aux quantités B, B', B'', &c; je cherche les aires de ces deux courbes, comme dans l'article précédent, n°. 1. Il eſt clair qu'en diviſant la ſeconde aire par la premiere, le quotient ſera la diſtance du centre de gravité de la carène à l'axe vertical Ak. Enfin je conſtruis une troiſième courbe Asn dont les ordonnées fr, gs, hm, &c. ſoient proportionnelles aux produits $A' \times Af$, $A'' \times Ag$, $A''' \times Ah$, &c, c'eſt-à-dire, aux momens des aires A', A'', A''', &c, par rapport à l'axe horiſontal AB; enſuite je diviſe l'aire de cette courbe par l'aire de la première; le quotient eſt la diſtance du centre de gravité de la carène à l'axe horiſontal AB. On connoîtra donc la poſition du centre de gravité de la carène.

On étendra facilement l'uſage de toute cette théorie à d'autres problêmes concernant les centres de gravité. Je ne m'y arrêterai pas davantage.

CHAPITRE III.

Application des principes précédens à l'équilibre des Machines.

103. TOUT agent, de quelque nature qu'il ſoit, ne recèle en lui-même qu'une certaine meſure de force qu'il n'eſt jamais poſſible d'augmenter réellement. Mais on peut ſouvent répandre cette force ſur un temps plus ou moins long : alors à meſure que l'agent doit travailler plus de temps, il exerce moins d'action à chaque inſtant ; & réciproquement la force qu'il exerce à chaque inſtant eſt d'autant plus grande, qu'il doit être occupé moins de temps. Le réſultat eſt le même dans les deux cas. Il eſt clair par-là qu'on perd toujours d'un côté ce qu'on gagne de l'autre. Mais on ſent qu'il y a un avantage précieux de pouvoir ainſi combiner de différentes manières les élémens d'une même force, & d'être le maître d'économiſer les uns aux dépens des autres. C'eſt à quoi ſervent les Machines. Chaque Machine particulière a une diſpoſition dans laquelle l'effet eſt le plus grand qu'il eſt poſſible, relativement à un certain but ; mais, en conſéquence, l'effet eſt le moindre qu'il eſt poſſible, relativement au but oppoſé. Tout cela va s'éclaircir par les détails dans leſquels nous entrerons tout-à-l'heure. On y apprendra à déterminer le véritable produit qu'on doit attendre

d'une machine, & à ſe prémunir contre les promeſſes magnifiques & illuſoires de certains Machiniſtes qui, ignorant les loix de l'équilibre, non-ſeulement ne tiennent pas ce qu'ils annoncent, mais ſouvent même ne ſavent pas donner aux piéces de leurs propres machines, la combinaiſon la plus avantageuſe.

104. Il y a une infinité de Machines différentes, & tous les jours le nombre s'en accroît; mais elles ſe réduiſent toutes dans le fond à ſept eſpéces, ou n'en ſont que des combinaiſons plus ou moins ſimples. Ces ſept machines primordiales ſont la *Machine Funiculaire*, le *Levier*, la *Poulie*, le *Tour* ou *Cabeſtan*, le *Plan incliné*, la *Vis* & le *Coin*. Je me propoſe ici de donner la théorie mathématique de leur équilibre. Ainſi je fais abſtraction du frottement; je ſuppoſe que les piéces ſolides qui peuvent entrer dans une machine, ayent une inflexibilité abſolue qui ne leur permette pas de changer de figure. Les cordes, lorſqu'il y en a, ſont regardées comme des fils parfaitement flexibles, ou du moins leur action eſt ſuppoſée s'exercer librement ſuivant la direction de leur axe; & dans ce dernier cas, quand une corde s'enveloppe autour d'une roue, le raïon de la roue doit être cenſé augmenté de celui de la corde. Nous examinerons dans la ſuite les réſiſtances que les machines éprouvent, lorſqu'elles ſont prêtes à ſe mouvoir.

Lorſqu'un corps agit par ſa peſanteur ſur une machine, cette force doit être imaginée réunie toute entière au centre de gravité du corps, & s'exercer ſuivant la verticale qui paſſe par ce point.

SECTION I.

De la Machine Funiculaire.

105. On appelle *machine funiculaire*, celle où l'on n'employe que des cordes pour ſoutenir un poids, ou pour contrebalancer pluſieurs puiſſances.

Je négligerai le poids des cordes, lorſque je n'avertirai pas expreſſément qu'il faut y avoir égard.

106. En premier lieu, ſoient trois puiſſances P, Q, S (Fig. 49) appliquées aux trois cordons AP, Fig. 49.
AQ, AS concourans au point A, & en équilibre entr'elles. La premiere ſera, ſi l'on veut, un poids. Puiſqu'il y a équilibre, la réſultante R des deux puiſſances Q & S eſt néceſſairement égale & directement oppoſée (18) à la puiſſance P. Or les trois puiſſances Q, S, R ſont dans un même plan (27). Donc les trois puiſſances P, Q, S y ſont auſſi; & ſi ayant pris AD ſur PA prolongée, pour exprimer la puiſſance P ou la réſultante R, on acheve le parallèlogramme $ABDC$, on aura (29) cette ſuite de rapports égaux,

$$P : Q : S :: AD : AB : AC \text{ ou } BD.$$

Il eſt clair que les puiſſances P, Q, S expriment les tenſions des cordons auxquels elles ſont appliquées. Ainſi, par une puiſſance appliquée à un cordon, ou par la tenſion de ce cordon, nous entendrons la même choſe.

107. Les trois puiſſances P, Q, S peuvent être

représentées chacune (33) par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres : nous aurons donc encore,

$P : Q : S :: \text{ſin. } QAS : \text{ſin. } SAR : \text{ſin. } QAR.$

108. Si les deux cordons AQ, AS, au lieu d'être tirés par les deux puiſſances Q & S, étoient atta-
Fig. 50. chés aux deux points fixes Q & S (Fig. 50), alors dans les ſuites qui précédent, Q & S exprimeroient les preſſions que ſupportent les appuis Q & S dans les directions QA, SA.

109. De la ſuite de proportionnelles, $P : Q : S :: \text{ſin. } SAQ : \text{ſin. } SAR : \text{ſin. } QAR$, il réſulte que la cor-
Fig. 49. de QAS (Fig. 49) formera toujours un angle en A, quelles que ſoient les forces Q & S qui la tendent. Car tant que les trois puiſſances ont entr'elles un rapport fini, les deux angles SAR, QAR ſont finis, & il y a un coude en A. Ce coude ne peut diſparoître, à moins que la puiſſance P ne ſoit infiniment petite par rapport aux deux autres ; ou, ce qui revient au même, à moins que la puiſſance P étant finie, les deux puiſſances Q & S ne ſoient infinies. On voit par-là que ſi une corde eſt attachée
Fig. 51. par ſes extrémités à deux points fixes Q & S (Fig. 51), & que l'angle QAS ſoit fort obtus, une très-petite force P produira de très-grandes tenſions aux deux parties AQ, AS.

Fig. 49. 110. Dans trois cordons AP, AQ, AS (Fig. 49) ainſi aſſemblés à un même nœud A, & en équilibre, il y a ſix choſes à conſidérer, ſavoir, leurs trois tenſions, & les trois angles que leurs directions forment

entr'elles. Si parmi ces ſix choſes, on en connoît trois, on déterminera les trois autres, où par des opérations graphiques, ou par le calcul trigonométrique. Par exemple, ſi on donne la puiſſance P & les deux angles QAR, SAR qu'elle forme avec les deux puiſſances Q & S, il s'agira de conſtruire ou de réſoudre un triangle ABD, dans lequel on connoît le côté AD, l'angle BAD, & l'angle ADB égal à l'angle connu CAD. Si on donne les quantités des trois forces P, Q, S, il faudra faire ou calculer un triangle ABD dans lequel on connoît les trois côtés. Si on ne donne que les trois angles formés par les directions des trois puiſſances, on ne pourra déterminer que les rapports des trois puiſſances; quand ce rapport ſera trouvé, il faudra ſe donner la quantité de l'une des puiſſances pour trouver celles des deux autres, &c. On voit que tous ces problêmes ſe réduiſent à des recherches de pure Géométrie.

111. Il eſt à propos de remarquer que les *quantités* des trois forces P, Q, S doivent être, ou ſe trouvent toujours par le calcul, telles que chacune ſoit moindre que la ſomme, & plus grande que la différence des deux autres. Car elles ſont proportionnelles aux trois côtés du triangle ABD. Or il eſt clair qu'on a $AD < AB + BD$, $AD - BD < AB$, $AD - AB < BD$; $AB < AD + DB$, $AB - DB < AD$, $AB - AD < DB$; $BD < AB + AD$, $BD - AD < AB$, $BD - AB < AD$.

112. On doit remarquer encore que le nœud A étant ſuppoſé fixe, les angles QAR, QAS peuvent

être égaux ou inégaux; mais que si le nœud *A* étoit *coulant*, ces deux angles seroient nécessairement égaux. Car il est évident que dans ce dernier cas le nœud doit descendre jusqu'à ce que la puissance *P* soit dirigée de la même manière par rapport aux deux puissances *Q* & *S*, c'est-à-dire, jusqu'à ce que la direction *PAR* de la puissance *P* divise en deux parties égales l'angle *QAS*; & que les deux puissances *Q* & *S* deviennent égales.

113. Il se présente à ce sujet un problême qui peut avoir son application dans la pratique. *La corde* QAS
Fig. 52. (Fig. 52) *de longueur donnée étant attachée aux deux points fixes* Q *&* S *placés comme on voudra par rapport à l'horison, trouver la position que doit prendre la lanterne ou le poids donné* P *attaché à l'extrémité du cordon* AP, A *étant un nœud coulant ?*

Pour résoudre ce problême, nous menerons par le point *Q*, l'horisontale *QK*, & par le point *S* la verticale *OSH*; ensuite nous imaginerons que *QA* prolongée rencontre *OSH* en *H*, & que *AS* prolongée rencontre *QK* en *K*. Cela posé, puisque l'angle *QAR* doit être égal à l'angle *SAR*; & que d'un autre côté l'angle $AHS =$ l'angle QAR, l'angle $ASH =$ l'angle $KSO =$ l'angle SAR : il est visible que le triangle *SAH* est isoscèle; donc $AH = AS$. Ainsi $QH = QA + AS$, longueur donnée de la corde. Donc, dans le triangle rectangle *QOH*, on connoît l'hypothénuse *QH*; on connoît de plus le côté *QO*, puisque la position du point *S* est donnée. On trouvera donc, par la Trigonométrie, l'angle *QHO*, ou chacun des angles QAR, SAR. De plus, le poids P étant connu, on connoîtra aussi les tensions Q & S des cordons AQ, AS; puisqu'on a cette suite de rapports égaux, $P : Q : S ::$ sin. QAK : sin. SAR : sin. QAR, dans laquelle tout est connu, excepté Q & S, & qui fera par conséquent connoître aussi ces deux quantités.

La position du point A peut être déterminée par une construction graphique fort simple. Car si après avoir mené l'horisontale QK & la verticale OSH, on décrit du point Q, comme centre, avec un raïon $QH = QA + AS$, un arc qui coupe OSH au point H, qu'ensuite ayant fait l'angle $OSK =$ l'angle QHO, on prolonge la droite KS jusqu'à ce qu'elle rencontre QH au point A; ce point A sera celui qu'on demande.

114. Que le nœud A (Fig. 49) soit fixe ou coulant, on voit que P représentant le fardeau que les deux puissances Q & S soutiennent, ce fardeau est moindre que la somme des deux puissances Q & S. Cela arrivera toujours, tant que les directions des cordons concourront en un même point, ou formeront entr'elles des angles finis. Mais supposons que les deux cordons QA, SB (Fig. 53) deviennent parallèles. D'abord j'observe qu'ils seront nécessairement verticaux, ou parallèles à la direction du fardeau P, ou en général de la résistance à vaincre : car leurs tensions auront (39) une résultante qui leur sera parallèle; & comme d'un autre côté cette résultante doit être égale & directement opposée à la pesanteur du Fig. 49. Fig. 53.

fardeau (18), il eſt clair que les trois directions QA, SA, PX ſeront parallèles. Puiſqu'on a donc alors $P = Q + S$, il s'enſuit que le rapport du poids à la ſomme des deux puiſſances Q & S eſt le plus grand qu'il eſt poſſible. Ainſi la diſpoſition la plus avantageuſe qu'on puiſſe donner à deux cordons pour faire équilibre à la plus grande réſiſtance poſſible, eſt de rendre les directions de ces cordons, parallèles à celle de la réſiſtance.

115. S'il étoit ſimplement queſtion de ſoutenir le poids P, on pourroit attacher les deux cordons QA, SB à deux crochets fixement arrêtés aux points A & B du corps. Alors il ſeroit indifférent que la verticale PX diviſât ou non en deux parties égales l'horiſontale AB. Mais une telle diſpoſition ne peut pas avoir lieu dans la pratique. Car le véritable objet qu'on ſe propoſe en conſtruiſant la machine, eſt d'élever le poids P, de la manière la plus ſimple, & en s'aidant de la réſiſtance de quelque point fixe : en conſé-
Fig. 54. quence, on attache la corde au point fixe S (Fig. 54); elle paſſe ſur une roue ou *poulie* O qui ſoutient le poids P ſuivant la verticale OP dirigée par le centre O; la poulie eſt parfaitement mobile ſur le centre O; & la corde, en embraſſant l'arc BXA, obéit librement à l'effort de la puiſſance Q qui agit de bas en haut, ſuivant la verticale, de la même manière que ſi cette corde paſſoit dans un nœud coulant. Il eſt clair par-là que l'horiſontale AB étant diviſé en deux parties égales par la verticale OP, le poids P, dans le ſimple état d'équilibre, eſt double de la puiſſance Q;

ce rapport eſt le plus grand que le poids puiſſe avoir à la puiſſance. Mais qu'on faſſe paſſer la machine du repos au mouvement, enſorte que le poids *P* parcoure, en un temps donné, un eſpace égal à Op. Il eſt clair, en menant l'horiſontale ab, que les deux cordons SB, QA s'accourciſſent des quantités Bb, Aa, égales chacune à Op; & que par conſéquent le point *S* étant ſuppoſé fixe, la puiſſance *Q* parcourra un eſpace $= 2\,Op$, tandis que le poids parcourra le ſimple eſpace Op. Donc le poids marchera deux fois moins vîte que la puiſſance; ou, ce qui revient au même, le poids mettra deux fois plus de temps que la puiſſance à parcourir un certain eſpace. Si donc on gagne d'un côté, en ce que la puiſſance n'eſt que la moitié du poids; on perd d'un autre côté, en ce que le poids marche deux fois plus lentement ou conſume deux fois plus de temps que la puiſſance. On voit, par une raiſon contraire, qu'en regardant *P* comme la puiſſance, *Q* comme la réſiſtance à vaincre, on perdroit en force ce qu'on gagneroit en tems.

Lorſque les trois cordons concourent en un même point, on gagne moins en force, mais on perd moins en temps. Et réciproquement.

116. Les mêmes principes s'appliquent à l'équilibre d'une machine funiculaire, garnie d'un nombre quelconque de nœuds, dont chacun n'aſſembleroit que trois cordons. En effet, ſoit, par exemple, la corde *ABCDE* (Fig. 55) attachée à deux points fixes *A* & *E*, & garnie de tant de nœuds fixes *B*, *C*, *D* qu'on voudra. Suppoſons qu'à chaque nœud Fig. 55.

ſoient appliqués trois cordons, & que ces cordons BP, CQ, DS ſoient tirés par les puiſſances P, Q, S, dirigées dans le plan de la corde; de manière que tout le ſyſtême ſoit en équilibre.

1°. Il eſt clair que la réſultante des tenſions des deux cordons BA, BP doit être égale & directement oppoſée à la tenſion du cordon BC. Ainſi ayant prolongé CB vers c, & ayant fait le parallèlogramme $Bacp$ dont les côtés Ba, Bp tombent ſur BA & BP; ſi l'on nomme A & K les tenſions des cordons BA, BC, on aura (106) cette ſuite de rapports égaux,

$$K:A:P::BC:Ba:Bp \text{ ou } ac.$$

2°. La réſultante des tenſions des deux cordons CD; CQ doit être égale & directement oppoſée à la tenſion du cordon BC. Prolongeant donc BC vers c' de la quantité $Cc'=Bc$; faiſant le parallèlogramme $Cdc'q$, dont les côtés Cd, Cq tombent ſur CD & ſur CQ; nommant H la tenſion du cordon CD: on aura cette ſeconde ſuite de rapports égaux,

$$K:H:Q::Cc' \text{ ou } Bc:Cd:Cq \text{ ou } dc'.$$

3°. La réſultante des tenſions des deux cordons DE, DS doit être égale & directement oppoſée à la tenſion du cordon CD. Je prolonge donc CD vers d' de la quantité $Dd'=Cd$; je forme le parallèlogramme $Ded's$ dont les côtés De, Ds tombent ſur les côtés DE, DS; & je nomme E la tenſion du cordon DE. On aura cette troiſième ſuite de rapports égaux,

$$H:E:S::Dd' \text{ ou } Cd:De:Ds \text{ ou } ed'.$$

On

On continueroit de raiſonner de même, s'il y avoit un plus grand nombre de nœuds à la corde.

Cela poſé, on obſervera que dans les deux premières ſuites, la force K eſt exprimée par la même ligne Bc, & que dans la ſeconde & la troiſième ſuite la force H eſt exprimée par la même ligne Cd. Il règne donc le même rapport dans les trois ſuites; & on peut par conſéquent en tirer celle-ci,

$$A:K:H:E:P:Q:S::Ba:Bc:Cd:De:Bp:Cq:Ds.$$

117. Cette manière d'exprimer les rapports des forces A, K, H, E, P, Q, S ſuppoſe des conſtructions graphiques, toujours longues & ſujettes à erreur. Il eſt plus commode & plus exact dans la pratique d'exprimer ces rapports par le moyen de ſinus d'angles donnés immédiatement par la figure de la corde. Or il eſt clair, par ce qui précéde, qu'on a ces ſuites de proportionnelles,

$$K:A:P::\text{ſin. } ABP:\text{ſin. } CBP:\text{ſin. } ABC,$$
$$K:H:Q::\text{ſin. } DCQ:\text{ſin. } BCQ:\text{ſin. } BCD,$$
$$H:E:S::\text{ſin. } EDS:\text{ſin. } CDS:\text{ſin. } CDE.$$

Comme d'une ſuite à l'autre, il y a une quantité de commune, rien n'eſt plus facile que de comparer enſemble deux quelconques des forces propoſées. Par exemple, veut-on comparer A avec H? On formera ces deux proportions,

$$A:K::\text{ſin. } CBP:\text{ſin. } ABP;$$
$$K:H::\text{ſin. } DCQ:\text{ſin. } BCQ,$$

leſquelles étant multipliées par ordre, donnent

$$A:H::\text{ſin. } CBP \times \text{ſin. } DCQ:\text{ſin. } ABP \times \text{ſin. } BCQ.$$

Veut-on comparer A avec E? On multipliera la proportion qu'on vient de trouver, par celle-ci,

$$H : E :: \text{ſin.}\, EDS : \text{ſin.}\, CDS,$$

& on aura

$$A : E :: \text{ſin.}\, CBP \times \text{ſin.}\, DCQ \times \text{ſin.}\, EDS : \text{ſin.}\, ABP \times \text{ſin.}\, BCQ \times \text{ſin.}\, CDS.$$

Même procédé pour toutes les autres comparaiſons analogues.

118. Si les nœuds B, C, D étant toujours fixes, il arrivoit que les directions des puiſſances P, Q, S partageaſſent en deux parties égales chacun des angles ABC, BCD, CDE du polygone; ou bien ſi les nœuds étoient coulans, & qu'en conſéquence les directions des puiſſances partageaſſent *néceſſairement* en deux parties les mêmes angles : dans l'un & l'autre cas, toutes les parties AB, BC, CD, DE de la corde ſeroient également tendues. Car alors ſin. $CBP =$ ſin. ABP, ſin. $DCQ =$ ſin. BCQ, ſin. $EDS =$ ſin. DCS. Donc auſſi, $A = K = H = E$.

A l'égard des rapports des puiſſances P, Q, S à chacune de ces tenſions égales que je déſigne par la lettre A, ils ſe trouveroient par les proportions,

$$P : A :: \text{ſin.}\, ABP : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} ABP,$$
$$Q : A :: \text{ſin.}\, BCD : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} BCD,$$
$$S : A :: \text{ſin.}\, CDE : \text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} CDE.$$

119. L'équilibre général d'une machine funiculaire dont chaque nœud aſſemble trois cordons, peut être déterminé d'une autre manière qu'il eſt à propos d'expliquer ici, parce qu'elle eſt très-commode pour trou-

ver la figure d'une corde peſante, comme on le verra dans la ſuite.

Soit donc $ABCDE$ (Fig. 56) une corde ſans peſanteur, attachée aux points fixes A, E, garnie de nœuds fixes B, C, D, auxquels ſont appliquées les puiſſances P, Q, S, toutes dirigées dans un même plan qui eſt celui du polygone funiculaire. Il eſt évident que le cordon BC eſt également tendu dans le ſens CB & dans le ſens BC. Donc, la réſultante des tenſions des deux cordons BA, BP eſt égale & directement oppoſée à la réſultante des tenſions des deux cordons CD, CQ. Ainſi les tenſions des quatre cordons BA, BP, CD, CQ ſont quatre forces en équilibre. Or ces quatre forces étant en équilibre, nous pouvons les combiner autrement, & dire encore que la réſultante des tenſions des deux cordons BP, CQ, eſt égale & directement oppoſée à la réſultante des tenſions des deux cordons BA, CD. Mais la première de ces deux réſultantes paſſe par le point de concours T des deux cordons PB, QC prolongés ; & la ſeconde paſſe par le point de concours F des deux cordons AB, DC auſſi prolongés. Donc, ces deux réſultantes tombent ſur la ligne TF ; l'une tire dans le ſens TF, l'autre dans le ſens FT. Donc, en nommant Z chacune de ces réſultantes, A & H les tenſions des cordons BA, CD, on aura (107) ces deux ſuites de proportionnelles, Fig. 56.

$$Z : A : H :: \text{ſin.}\, AFD : \text{ſin.}\, DFT : \text{ſin.}\, AFT,$$

$$Z : P : Q :: \text{ſin.}\, PTQ : \text{ſin.}\, QTZ : \text{ſin.}\, PTZ.$$

Subſtituons à la place des deux puiſſances P & Q

leur résultante Z. Au lieu de la corde $ABCDE$, nous en aurons une seconde $ABFDE$ aux angles F & D, de laquelle seront appliquées les deux puissances Z & S; & en raisonnant pour cette corde comme pour la première, nous verrons que la résultante des tensions des deux cordons FZ, DS doit être égale & directement opposée à la résultante des tensions des deux cordons FA, DE. La première résultante passe par le point de concours V des deux cordons ZF, SD; la seconde passe par le point de concours O des deux cordons AF, ED. Ainsi elles tombent l'une & l'autre sur la ligne VO; l'une tire dans le sens VO, l'autre dans le sens OV. Nommons R chacune de ces résultantes, E la tension du cordon DE, & considérons que la tension du cordon AF est la même que celle de AB, que nous avons déja nommée A. On aura ces deux suites de proportionnelles,

$$R : A : E :: \text{sin.}\, AOE : \text{sin.}\, EOV : \text{sin.}\, AOV,$$

$$R : Z : S :: \text{sin.}\, ZVS : \text{sin.}\, SVR : \text{sin.}\, ZVR.$$

On continueroit à raisonner de même, s'il y avoit un plus grand nombre de nœuds. Quant à la tension du cordon BC, dont nous n'avons pas encore parlé: si on la nomme K, il est clair qu'on aura,

$$K : A : P :: \text{sin.}\, ABP : \text{sin.}\, CBP : \text{sin.}\, ABC.$$

Par le moyen de ces différentes suites de proportionnelles, on pourra comparer ensemble, deux à deux, les différentes forces $A, K, H, E, P, Q, S, Z, R$.

120. Supposons que tout restant d'ailleurs le même, Fig. 57. les puissances P, Q, S deviennent des poids (Fig. 57), & que par conséquent leurs directions soient verti-

cales & parallèles. La résultante R deviendra verticale, passera par le centre de gravité du systême des poids P, Q, S, & sera égale à leur somme $P+Q+S$. On aura donc,

$$P+Q+S : A : E :: \text{sin. } AOE : \text{sin. } EOV : \text{sin. } AOV.$$

C'est-à-dire que, *la somme des poids attachés à la corde, est à la tension de l'un des cordons extrêmes, comme le sinus de l'angle formé par ces deux cordons, est au sinus de l'angle formé par l'autre cordon & par la verticale.*

On a aussi $Z : A : H :: \text{sin. } AFD : \text{sin. } CFT : \text{sin. } AFT$. D'où il suit qu'en regardant la corde comme attachée fixement en D, & faisant abstraction de la puissance S & du cordon DE; cette suite de proportionnelles donne la même conclusion que la précédente.

121. La même hypothèse subsistant toujours, & considérant qu'on a en général,

$$A : K :: \text{sin. } CBP : \text{sin. } ABP,$$
$$A : H :: \text{sin. } CFT : \text{sin. } AFT,$$
$$A : E :: \text{sin. } EOV : \text{sin. } AOV:$$

Nous verrons d'abord que la tension A est à chacune des autres tensions K, H, E, comme le sinus de l'angle que l'un des cordons BC, CD, DE fait avec la verticale, est au sinus de l'angle que fait le cordon AB aussi avec la verticale.

Multipliant par ordre les deux proportions

$$K : A :: \text{sin. } ABP : \text{sin. } CBP,$$
$$A : H :: \text{sin. } CFT : \text{sin. } AFT,$$

& obſervant que ſin. $ABP =$ ſin. AFT, on aura

$$K : H :: \text{ſin.}\, CFT : \text{ſin.}\, CBP.$$

De même, multipliant par ordre les deux proportions

$$K : A :: \text{ſin.}\, ABP : \text{ſin.}\, CBP,$$
$$A : E :: \text{ſin.}\, EOV : \text{ſin.}\, AOV;$$

& obſervant que ſin. $ABP =$ ſin. AOV, on aura

$$K : E :: \text{ſin.}\, EOV : \text{ſin.}\, CBP.$$

Enfin, multipliant par ordre les deux proportions

$$H : A :: \text{ſin.}\, AFT : \text{ſin.}\, CFT,$$
$$A : E :: \text{ſin.}\, EOV : \text{ſin.}\, AOV,$$

& obſervant que ſin. $AFT =$ ſin. AOV, on aura

$$H : E :: \text{ſin.}\, EOV : \text{ſin.}\, CFT.$$

Il réſulte de toutes ces porportions que les *tenſions de deux côtés quelconques d'un polygone funiculaire* ABCDE *chargé de poids, ſont entr'elles en raiſon inverſe des ſinus des angles que ces côtés forment avec la verticale.*

Fig. 58. 122. Je ſuppoſe maintenant que $ABCDE$ (Fig. 58), ſoit une corde peſante uniformément ou non, attachée aux deux points fixes A & E, laquelle, en vertu de ſa ſeule peſanteur, prend une certaine courbure. Il eſt clair qu'on pourra regarder cette corde comme un polygone d'une infinité de côtés, chargé de poids dans tous ſes points. Par conſéquent, ſi l'on mène ſuivant les directions des côtés extrêmes de ce polygone les tangentes AO, EO qui ſe rencontrent en O; qu'enſuite ayant tiré les verticales OV, AX, EY, on nomme R le poids total de la corde, A & E les

charges des crochets A & E; ou les tenſions de la corde dans les ſens AO, EO, on aura (120),

$$R : A : E :: \text{ſin.}\, AOE : \text{ſin.}\, OEY : \text{ſin.}\, OAX.$$

De même, ſi par un point quelconque D de la corde on mène la tangente DF, & qu'on éleve la verticale FT, on aura (en nommant Z le poids de la partie $ABCD$ de la corde, D la tenſion de cette corde en D),

$$Z : A : D :: \text{ſin.}\, AFD : \text{ſin.}\, DFT : \text{ſin.}\, FAX.$$

Si l'on mène encore une autre tangente quelconque BM qui rencontre DF en M, & qu'ayant élevé la verticale MN, on nomme K le poids de la partie BCD, B la tenſion de la corde en B, on aura

$$K : B : D : \text{ſin.}\, BMD : \text{ſin.}\, DMN : \text{ſin.}\, BMN.$$

La courbure de la corde eſt donc toujours telle que *le poids de cette corde ou de l'une quelconque de ſes parties, étant proportionnel au ſinus de l'angle que forment entr'elles les tangentes menées par les extrémités de la corde ou de ſa partie, les tenſions ſuivant les directions des tangentes ſont réciproquement proportionnelles aux ſinus des angles qu'elles forment avec la verticale.*

123. Reprenons l'hypothèſe de l'article 120. La ſomme $P+Q+S$ (Fig. 57) de tous les poids attachés à la corde, ou leur réſultante R, peut être cenſée agir ſuivant la verticale OR; & on peut conſidérer le point O comme le nœud d'une machine funiculaire qui aſſemble trois cordons OR, OA, OE tirés par les trois puiſſances R, A, E. Tout ce qu'on Fig. 57.

a dit dans les articles 114, 115 s'applique donc ici. On voit que pour rendre le poids *R* le plus grand qu'il eſt poſſible par rapport à la puiſſance qui peut lui faire équilibre, il faut rendre les cordons *OA*, *OE* parallèles à la direction du poids. Mais ſi cette diſpoſition eſt la plus avantageuſe de toutes pour le ſimple équilibre, elle a un effet oppoſé pour le mouvement, car elle fait perdre en temps ce qu'on gagne en force. On verra ci-deſſous l'uſage des poulies pour rendre parallèles entr'eux, & à la direction du poids, pluſieurs cordons employés à ſoutenir ce poids.

124. Conſidérons encore un cas d'une machine funiculaire dont chaque nœud aſſemble trois cordons. Fig. 59. Soit *ABCDEF* (Fig. 59) un polygone funiculaire régulier, aux angles duquel ſont appliquées les puiſſances *P*, *Q*, *R*, &c, agiſſantes du centre à la circonférence, & en équilibre entr'elles. Il eſt clair que toutes ces puiſſances ſont égales entr'elles; que tous les côtés du polygone ſont également tendus; & que la ſomme de toutes les puiſſances eſt à la tenſion de l'un des côtés du polygone, comme le contour du polygone, eſt au raïon du cercle qui lui eſt circonſcrit. Car les puiſſances ſont repréſentées par les ſinus des angles égaux *FAB*, *ABC*, *BCD*, &c, tandis que les tenſions des côtés du polygone ſont repréſentées par les ſinus des angles, auſſi égaux, *ABO*, *OBC*, *OCB*, &c; & comme dans un triangle *ABO* la moitié de chaque côté peut être regardée comme le ſinus de l'angle qui lui eſt oppoſé, il s'enſuit qu'en nommant *n* le nombre des côtés du polygone, *x* la

tenſion de l'un de ſes côtés, on aura $P+Q+R+S+$ &c : $x :: n \times \frac{AB}{2} : \frac{AO}{2} :: n \times AB : AO$, proportion dans laquelle les deux derniers termes ſont le contour du polygone & le raïon du cercle qui lui eſt circonſcrit.

Lorſque le nombre des côtés du polygone augmente à l'infini, ſon contour ſe confond avec la circonférence du cercle circonſcrit ; & la tenſion de l'un de ſes côtés eſt alors la tenſion de la circonférence en un point quelconque, ſuivant la direction de la tangente en ce point. Ainſi, ſi à tous les points d'une circonférence de cercle flexible ſont appliquées des puiſſances agiſſantes du centre à la circonférence, & en équilibre ; toutes ces puiſſances ſont égales ; la circonférence eſt également tendue dans tous ſes points ; & la ſomme de toutes les puiſſances eſt à chacune de ces tenſions, comme la circonférence eſt au raïon.

Cela s'applique à l'Hydroſtatique, pour trouver la preſſion d'un fluide contre les parois d'un vaſe cylindrique flexible, dont la baſe eſt horiſontale.

125. Voilà à peu près tout ce qui regarde l'équilibre des machines funiculaires dont chaque nœud n'aſſemble pas plus de trois cordons. Il n'eſt guères plus difficile de déterminer celui des machines funiculaires dont les nœuds, ou du moins quelques-uns, aſſemblent plus de trois cordons. La queſtion ſe réduit, pour chaque nœud, à trouver les quantités & les directions de pluſieurs forces qui concourent en un même point. La tenſion du cordon qui fait la commu-

nication d'un nœud à l'autre, doit toujours être égale & directement opposée à chaque résultante des tensions de tous les autres cordons issus de chacun de ces
Fig. 60. deux nœuds. Par exemple (Fig. 60), la tension du cordon BC est égale & directement opposée à la résultante des tensions des cordons AB, BP, BZ, BV; elle l'est aussi à la résultante des tensions des cordons CO, CQ, CF. Ainsi de suite pour les autres nœuds.

Fig. 61. 126. Lorsqu'un nœud fixe B (Fig. 61) assemble quatre cordons dirigés dans un même plan, & tirés par quatre puissances P, Q, S, Z, il ne suffit pas de connoître les positions de ces cordons pour trouver les rapports de leurs tensions, ni réciproquement les rapports des tensions, pour trouver la position des cordons. Car en vertu de l'équilibre, l'une des puissances, par exemple Z, doit être égale & directement opposée à la résultante des trois autres P, Q, S. Ayant donc pris sur ZB prolongée le point O à volonté, menons à volonté la droite OC qui rencontre en C la direction de la puissance S, & achevons le parallélogramme $OCBM$; par le point M, menons parallèlement aux directions des deux puissances P & Q les droites MK, MG pour avoir le parallèlogramme $BGMK$. Il est clair (35) que la puissance Z étant exprimée par $BE = BO$, les puissances P, Q, S sont exprimées par BG, BK, BC. Or comme le point O demeurant le même, la droite OC a été menée arbitrairement, il est clair que si l'on prend un autre point C, les puissances P, Q, S seront exprimées par d'autres parties de leurs directions. Il ne

ſuffit donc pas de connoître les directions des quatre forces P, Q, S, Z, pour trouver les rapports de leurs quantités. Il n'eſt pas moins évident que les quantités ne ſuffiſent pas pour faire trouver les directions ; car avec les lignes données BO, BC, on peut faire pluſieurs parallèlogrammes $BCOM$, tels que les côtés BM ſoient les diagonales de différens parallèlogramme $BGMK$, dont les côtés BG, BK ſont donnés.

127. Mais ſi les quatre puiſſances P, Q, S, Z, (Fig. 62) ne ſont pas dans un même plan, l'indétermination du premier cas ceſſe ; celle du ſecond ſubſiſte. En effet, menons par les directions des deux puiſſances P & Q le plan $BGMK$; par les directions des deux puiſſances P & S, le plan $BGNC$; par les directions des deux puiſſances Q & S, le plan $BKVC$; & par un point quelconque O de ZB prolongée, les trois plans $ONCV$, $OMKV$, $ONGM$, parallèles chacun à chacun des trois précédens. On formera par-là un parallèlépipéde dans lequel point O étant donné, les points C, G, K ne ſont plus arbitraires ; enſorte que la puiſſance Z étant exprimée par $BE = BO$, les puiſſances P, Q, S ſont exprimées par les lignes fixes & déterminées BG, BK, BC. Les directions des puiſſances ſuffiſent donc alors pour faire trouver les rapports de leurs quantités. Mais la propoſition inverſe n'eſt pas vraie ; car il eſt évident qu'avec les lignes données BO, BC, on peut faire pluſieurs parallèlogrammes $BCOM$, tels que les côtés BM ſoient les diagonales d'autres parallèlogrammes $BGMK$, dont les côtés BG, BK ſont donnés, & leſquels ſer- Fig. 62.

vent de bafes à autant de parallèlépipédes fuivant les arrêtes & les diagonales defquels les puiffances feront dirigées.

128. On voit par les deux articles précédens qu'on peut affembler quatre cordons à un même nœud, de plufieurs manières telles qu'il y ait équilibre. Les conditions de chaque problême déterminent la combinaifon particulière qui doit avoir lieu. En voici un exemple qui mérite d'être examiné, parce qu'il a fon application dans l'Hydroftatique, pour trouver la figure d'un vafe flexible, pefant & chargé de liqueur.

Fig. 63. 129. Soit une corde $ABCDE$ (Fig. 63) attachée à deux points fixes A & E, & à chacun des angles ou nœuds fixes B, C, D de laquelle font appliquées deux puiffances P, S; Q, T; R, V; toutes dirigées dans un même plan, mais dont les unes S, T, V font verticales, & les autres P, Q, R, divifent en deux parties égales chacun des angles de la corde. Je décompofe la force S, repréfentée par la partie BF de fa direction, en deux autres BG, BH, l'une dirigée fuivant BP, l'autre fuivant AB. Il eft clair (107) qu'on aura, Force $BG = S \times \frac{\text{fin. } HBS}{\text{fin. } HBP} = S \times \frac{\text{fin. } ABs}{\text{fin. } ABp}$, Force $BH = S \times \frac{\text{fin. } PBS}{\text{fin. } HBP} = S \times \frac{\text{fin. } sBp}{\text{fin. } ABp}$. Il n'eft pas moins évident que l'équilibre du nœud B eft le même que fi retranchant de la tenfion a du cordon AB la force $S \times \frac{\text{fin. } sBp}{\text{fin. } ABp}$, & ajoutant à la tenfion P du cordon BP, la force $S \times \frac{\text{fin. } ABs}{\text{fin. } ABp}$, ce nœud affem-

bloit ſimplement trois cordons BA, BP, BC, dont le premier fût tiré, dans le ſens BA, par la force $a - S \times \frac{\text{ſin. } sBp}{\text{ſin. } ABp}$; le ſecond, dans le ſens BP, par la force $P + S \times \frac{\text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } ABp}$; le troiſiéme, dans le ſens BC, par la force b qui en exprime la tenſion. Comparons la première force avec la ſeconde; nous aurons (107) $a - S \times \frac{\text{ſin. } sBp}{\text{ſin. } ABp} : P + S \times \frac{\text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } ABp} :: \text{ſin. } PBC : \text{ſin. } ABC :: \text{ſin. } CBp$ ou $\text{ſin. } ABp : \text{ſin. } 2ABp$; & par conſéquent

$$a = \frac{P \times \text{ſin. } ABp}{\text{ſin. } 2ABp} + S \times \left(\frac{\text{ſin. } sBp}{\text{ſin. } ABp} + \frac{\text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } 2ABp} \right).$$

Le multiplicateur de S peut être ſimplifié ou écrit ſous une autre forme; car $\frac{\text{ſin. } sBp}{\text{ſin. } ABp} + \frac{\text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } 2ABp} =$

$$\frac{\text{ſin.}(CBs - ABp) . \text{ſin. } 2ABp + \text{ſin.}(2ABp - CBs) . \text{ſin. } ABp}{\text{ſin. } ABp \times \text{ſin. } 2ABp};$$

ce qui ſe réduit, par les régles de la Trigonométrie, à $\frac{\text{ſin. } CBs}{\text{ſin. } 2ABp}$; enſorte que

$$a = \frac{P \times \text{ſin. } ABp + S \times \text{ſin. } CBs}{\text{ſin. } 2ABp}.$$

Comparons la force $P + S \times \frac{\text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } ABp}$ avec la force b; nous aurons (107), $P + S \times \frac{\text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } ABp} : b ::$ $\text{ſin. } ABC$ ou $\text{ſin. } 2ABp : \text{ſin. } ABP$ ou $\text{ſin. } CBp$ ou $\text{ſin. } ABp$; & par conſéquent

$$b = \frac{P \times \text{ſin. } ABp + S \times \text{ſin. } ABs}{\text{ſin. } 2ABp};$$

Comme le cordon BC eſt également tendu dans le ſens BC, & dans le ſens CB, on trouvera encore, en raiſonnant pour le nœud C comme on a fait pour le nœud B,

$$b = \frac{Q \times \text{ſin. } BCq + T \times \text{ſin. } DCt}{\text{ſin. } 2\,BCq}.$$

Egalant entr'elles les deux valeurs de b, on aura

$$\frac{P.\text{ſin. } ABp + S.\text{ſin } ABs}{\text{ſin. } 2\,ABp} = \frac{Q.\text{ſin. } BCq + T.\text{ſin. } DCt}{\text{ſin. } 2\,BCq}.$$

On trouve, toujours de même, que la tenſion c du cordon CD eſt donnée par chacune des équations,

$$c = \frac{Q \times \text{ſin. } BCq + T \times \text{ſin. } BCt}{\text{ſin. } 2\,BCq},$$

$$c = \frac{R \times \text{ſin. } CDr + V \times \text{ſin. } EDu}{\text{ſin. } 2\,CDr}.$$

Egalant les deux valeurs de c, on aura

$$\frac{Q.\text{ſin. } BCq + T.\text{ſin. } BCt}{\text{ſin. } 2\,BCq} = \frac{R.\text{ſin. } CDr + V.\text{ſin. } EDu}{\text{ſin. } 2\,CDr}.$$

Enfin la tenſion d du cordon DE eſt donnée par l'équation

$$d = \frac{R \times \text{ſin. } CDr + V \times \text{ſin. } CDu}{\text{ſin. } 2\,CDr}.$$

On continueroit à procéder de même, ſi la corde avoit un plus grand nombre d'angles.

Ces différentes équations contiennent les relations que doivent avoir entr'elles les forces P, Q, R, S, T, V & les tenſions a, b, c, d des parties de la corde, pour qu'il y ait équilibre. Lorſque le nombre des angles B, C, D, &c, augmente à l'infini, la corde devient une courbe dont on trouvera facilement l'équation, quand on connoîtra la loi des forces P, Q, R, S, T, V, &c, appliquées à ces angles.

130. Si un nœud d'une machine funiculaire assembloit plus de quatre cordons, le nombre des combinaisons d'équilibre augmenteroit encore. Le problême ne seroit donc déterminé que quand il contiendroit assez de *données* pour mener à la connoissance des tensions & des directions des cordons. Cela se réduit dans tous les cas à une simple affaire de Géométrie. Ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage.

SECTION II.

Du Levier.

131. Le *levier* est une verge inflexible, droite ou courbe, qui sert à élever des poids, ou en général à mettre des puissances en équilibre, au moyen d'un appui fixe sur lequel il est mobile circulairement. Voyez les Figures 64, 65, 66, 67. Fig. 64, 65, 66, 67.

132. Comme l'usage le plus ordinaire du levier est de soutenir un poids à l'aide d'une puissance & d'un appui, les différentes situations que le poids & la puissance peuvent avoir par rapport à l'appui, ont fait imaginer trois espéces différentes de levier.

133. On appelle *levier de la première espèce*, celui où l'appui R (Fig. 64, 65) est placé entre le poids P & la puissance Q. Le poids & la puissance tirent dans le même sens; & l'appui est placé au-dessous du levier.

134. Le *levier de la ſeconde eſpèce* eſt celui où le poids *P* (Fig. 66) eſt placé entre l'appui *R* & la puiſſance Q. Le poids & la puiſſance tirent en ſens contraires; & l'appui eſt encore placé au-deſſous du levier.

135. Enfin, dans le *levier de la troiſième eſpèce* la puiſſance *Q* (Fig. 67) eſt placée entre le poids & l'appui. La puiſſance & le poids tirent en ſens contraires; & l'appui eſt placé au-deſſus du levier.

136. En regardant la réſiſtance de l'appui comme une force appliquée au levier, on voit que la recherche des loix de l'équilibre dans cette machine conſiſte à trouver les rapports de pluſieurs puiſſances qui, en agiſſant ſur une verge inflexible, ſe contrebalancent mutuellement. On comptera, parmi ces puiſſances, la peſanteur même du levier, lorſqu'elle ſera aſſez grande pour qu'on ne puiſſe pas la négliger ſans craindre d'erreur ſenſible.

Fig. 68, 69, 70. 137. Soient d'abord, dans les Figures 68, 69, 70, qui ſont relatives aux trois eſpèces de levier, les trois puiſſances *P*, *Q*, *S* en équilibre. Nous négligeons la peſanteur du levier. Il ne peut y avoir équilibre entre trois puiſſances, qu'autant que deux d'entr'elles ſe réduiſent à une ſeule force égale & directement oppoſée (18) à la troiſième. Or (27, 39) deux forces & leur réſultante ſont toujours dans un même plan, & de plus concourent en un même point, ou bien ſont parallèles. Donc les trois forces propoſées *P*, *Q*, *S* ſont dans un même plan, & concourent en un même point, ou bien ſont parallèles.

138. Suppoſons que les directions des trois puiſ-

ſances

ſances concourent au point O. D'un point R pris arbitrairement ſur la direction de la puiſſance S, ſoient menées parallèlement aux directions des puiſſances P & Q les droites RN, RM, pour avoir le parallèlogramme $OMRN$; & ſoit tirée la diagonale OR. On aura (29),

$$P:Q:S::OM:ON \text{ ou } MR:OR,$$

ou bien encore (33),

$$P:Q:S::\text{ſin.}\,RON:\text{ſin.}\,ROM:\text{ſin.}\,MON.$$

On connoîtra donc les rapports des trois puiſſances P, Q, S, lorſque leurs directions ſeront données.

139. En conſidérant le point O, comme le nœud d'une machine funiculaire qui aſſemble trois cordons OP, OQ, OS tirés par les trois puiſſances P, Q, S, il eſt clair qu'on peut propoſer & réſoudre, au ſujet de ces puiſſances, les mêmes problêmes dont il a été parlé (110).

140. Du point R, toujours arbitraire, ſoient abaiſſées les perpendiculaires RE, RF ſur les directions des deux puiſſances P & Q. On aura (31),

$$P:Q::RF:RE, \text{ \& } P\times RE=Q\times RF.$$

141. Donc, en ſuppoſant que le point R ſoit un appui qui fait maintenant la fonction de la puiſſance S, nous pouvons conclure que *deux puiſſances* P *&* Q *appliquées dans un même plan à un levier, & en équilibre, ſont entr'elles en raiſon réciproque des perpendiculaires abaiſſées du point d'appui ſur leurs directions*; & ce qui en eſt la ſuite, que *ces deux puiſſances ont des momens égaux, par rapport au point d'appui.*

142. La même propriété a également lieu (39) pour le cas où les deux forces P & Q seroient pa-
Fig. 71, 72, 73. rallèles (Fig. 71, 72, 73). Car le point d'appui est nécessairement placé dans tous les cas sur la direction de leur résultante, & on a ici (40, 41), $P:Q::RF:RE$, & par conséquent $P \times RE = Q \times RF$.

143. Lorsque les puissances étant parallèles, les points A, B, R sont placés en ligne droite, on a aussi par les mêmes articles 40, 41, $P:Q::RB:RA$. Cela est d'ailleurs évident, puisque les triangles semblables RFB, REA donnent $RF:RE::RB:RA$. On voit par-là que *dans le levier droit deux puissances parallèles en équilibre, sont entr'elles en raison inverse des bras de ce levier.*

Cette proportion donne $P \times RA = Q \times RB$; c'est-à-dire que *les produits de ces puissances, multipliées chacune par son bras de levier, sont égaux entr'eux.*

144. Il est bon de faire ici une remarque en faveur des Commençans. Le point d'appui dans le levier étant destiné dans tous les cas à faire l'office d'une puissance égale & directement opposée à la résultante des deux puissances P & Q appliquées au levier, il doit résister dans le sens de cette force; autrement il n'y auroit pas équilibre, quand même les deux forces P & Q seroient entr'elles en raison réciproque des perpendiculaires abaissées de l'appui sur leurs directions. En effet, soit, par exemple, le levier AB
Fig. 74. (Fig. 74) droit & incliné, posé sur un appui courbe R qui lui permet de glisser dans le sens de sa lon-

gueur ; & qu'à ce levier ſoient appliqués deux poids P & Q, tels que l'on ait $P:Q::RF:RE::RB:RA$; il n'y aura pas pour cela équilibre. Car la réſultante des deux poids P & Q, qui paſſe par le point R (39), & qui agit ſuivant la verticale Rr, ſe décompoſe en deux autres forces, dont l'une dirigée ſuivant Rf perpendiculaire à la courbure de l'appui eſt détruite, l'autre, dirigée ſuivant Rg tangente à l'appui, tend à faire gliſſer, & fera gliſſer effectivement le levier, puiſque rien ne s'oppoſe à ſon action. Il n'en ſera pas ainſi, ſi, tout reſtant d'ailleurs le même, le levier eſt traverſé par un axe ou boulon R (Fig. 75), & Fig. 75.
qu'il ſoit ſuſpendu par un cordon MR; il demeurera en équilibre dans toutes les inclinaiſons poſſibles, parce que dans tous les cas le boulon porte ſur un point du levier, qui eſt placé dans la verticale MR, & que par conſéquent la réſultante des deux poids P & Q, qui paſſe par le point R, eſt néceſſairement détruite par la réſiſtance du cordon MR.

145. J'ai rencontré des Machiniſtes qui faiſant conſiſter l'eſſence de l'équilibre du levier uniquement dans la réciprocité des puiſſances avec les perpendiculaires abaiſſées du point d'appui ſur leurs directions, croyoient qu'il y aura toujours équilibre, quelles que ſoient les directions des puiſſances, pourvû que la condition propoſée ſoit remplie, & que le levier ſoit traverſé par un boulon qui ne lui permette en aucune manière de gliſſer. Mais on doit ſe ſouvenir (137) que les deux puiſſances P & Q, & la réſiſtance de l'appui conſidérée comme une ſimple puiſ-

ſance, doivent être placées dans un même plan. Soit; par exemple, ARB (Fig. 76) un levier ſitué avec le poids P appliqué à l'une de ſes extrémités, dans un plan vertical $PARB$; & qu'au point B ſoit appliquée une puiſſance Q agiſſante hors de ce plan; que ce levier ſoit traverſé par un boulon R horiſontal & librement mobile ſur ſes extrémités, de manière que le levier ait ſimplement liberté toute entière de tourner circulairement dans le plan $PARB$. De l'appui R, menons les perpendiculaires RE, RF ſur les directions du poids & de la puiſſance, & ſuppoſons qu'on ait $P:Q::RF:RE$, ou bien $P \times RE = Q \times RF$; je dis qu'il n'y aura pas pour cela équilibre. Car en prenant BI pour repréſenter la puiſſance Q, & décompoſant cette force en deux autres BG, BH, l'une perpendiculaire au plan $PARB$, l'autre dirigée dans ce plan : il eſt clair que la premiere eſt détruite par la réſiſtance du levier qui n'a pas la liberté de ſe mouvoir perpendiculairement au plan $PARB$, & que la ſeconde BH, pour être en équilibre avec le poids P, devroit (141) être telle qu'en abaiſſant la perpendiculaire RK ſur ſa direction, on eût, Force $BH \times RK = P \times RE$, & par conſéquent, Force $BH \times RK =$ Force $BI \times RF$, équation qui n'a pas lieu.

Fig. 76.

146. Les trois eſpéces de levier n'ont pas la même propriété par rapport aux quantités de la puiſſance & du poids. Dans les deux premières eſpèces, la puiſſance peut faire équilibre à un poids plus grand qu'elle, tandis qu'au contraire dans le levier de la troi-

ſième eſpèce, le poids eſt moindre que la puiſſance. Mais ſi l'on fait paſſer le levier du repos au mouvement, dans les deux premiers cas la puiſſance ira plus vîte que le poids, préciſément dans le même rapport qu'elle eſt moindre que lui; & dans le troiſième la puiſſance ira moins vîte que le poids, dans le même rapport qu'elle eſt plus grande que lui. Car dans tous les cas les vîteſſes de la puiſſance & du poids ſont proportionnelles aux arcs ſemblables décrits dans le même temps, c'eſt-à-dire, aux diſtances du point d'appui aux directions de la puiſſance & du poids. Ainſi dans les deux premières eſpèces de levier, on perd en temps ce qu'on gagne en force; & dans la troiſième, on perd en force ce qu'on gagne en temps. Les circonſtances particulières où l'on ſe trouve, déterminent le choix de l'eſpèce de levier dont on a beſoin, relativement à l'effet qu'on veut produire.

147. Suppoſons maintenant un levier ARB (Fig. 77) mobile circulairement autour de l'appui R, & auquel ſont appliquées tant de puiſſances P, Q, S, T, V, qu'on voudra, toutes ſituées dans le plan de la rotation, & d'ailleurs dirigées d'une manière quelconque. Ici les trois puiſſances P, Q, S agiſſent dans le même ſens, & les deux autres T, V dans le ſens contraire. Du point d'appui R, ſoient menées les perpendiculaires RE, RF, RM, RL, RI aux directions de toutes ces puiſſances. Les deux forces Q & S peuvent ſe réduire à une force unique que je ſuppoſe dirigée ſuivant KX, & que je nomme K; les deux forces K & T peuvent ſe réduire à une force Fig. 77.

unique que je ſuppoſe dirigée ſuivant YG, & que je nomme G ; enfin les deux forces P & V peuvent ſe réduire à une force unique que je ſuppoſe dirigée ſuivant DZ, & que je nomme D. Ainſi à la place des cinq forces propoſées, on en aura ſimplement deux, G & D. Du point d'appui R ſoient menées les perpendiculaires RY, RZ ſur les directions de ces deux forces ; ſoit auſſi tirée RX perpendiculaire à la direction de la force K. Cela poſé, puiſqu'il y a équilibre, le point d'appui eſt néceſſairement placé ſur la direction de la réſultante des deux forces G, D ; & on a par conſéquent (32), $G \times RY = D \times RZ$. Or,

1°. G étant la réſultante des deux forces K & T, on a (49, 3^e cas), $G \times RY = K \times RX - T \times RL$; & K étant la réſultante des deux forces Q & S, on a (47, 1^er cas), $K \times RX = Q \times RF + S \times RM$. Ainſi $G \times RY = Q \times RF + S \times RM - T \times RL$.

2°. D étant la réſultante des deux puiſſances P & V, on a (47, 2^e cas), $D \times RZ = P \times RE - V \times RI$.

Par conſéquent, à la place de l'équation $G \times RY = D \times RZ$, on aura

$$Q \times RF + S \times RM - T \times RL = P \times RE - V \times RI,$$

ou bien

$$P \times RE + T \times RL = Q \times RF + S \times RM + V \times RI.$$

D'où l'on voit que *la ſomme des momens de toutes les forces qui tendent à faire tourner le levier dans un ſens, eſt égale à la ſomme des momens de toutes les forces qui tendent à le faire tourner en ſens contraire.*

148. Ce Théorême eſt général & embraſſe tous les cas d'équilibre du levier, quel que ſoit le nombre, &

quelles que ſoient les directions des puiſſances appliquées au levier, pourvû ſeulement que ces puiſſances agiſſent dans un même plan. Lorſque le levier eſt peſant, & que ſa peſanteur eſt aſſez conſidérable pour entrer en comparaiſon avec les autres forces, il faut la regarder comme une puiſſance appliquée au centre de gravité du levier, & dirigée verticalement. Par exemple, dans l'article précédent, la force *S* peut être le poids du levier, cenſé réuni à ſon centre de gravité *H*.

149. Qu'on ait un levier peſant, auquel ſoient appliqués ſeulement un poids *P* & une puiſſance *Q* (Fig. 64, 66, 67). Dans le levier de la première Fig. 64, 66, 67.
eſpèce (Fig. 64), la peſanteur du levier contrariera ou favoriſera la puiſſance *Q*, ſelon que le centre de gravité du levier tombera entre les points *A* & *R*, ou entre les points *R* & *B*. Dans le levier de la ſeconde eſpèce (Fig. 66), le poids de ce levier contrarie toujours la puiſſance *Q*: ſi pour augmenter le moment de cette puiſſance, on éloigne le point *B* du point *R*, ou qu'on augmente la longueur du levier, on augmentera auſſi le poids du levier; & il pourra arriver qu'on perde par la ſeconde augmentation, ce qu'on gagne, ou même plus qu'on ne gagne, par la première. Il y a donc dans ce levier une longueur propre à rendre le moment de la puiſſance, le plus grand qu'il eſt poſſible, par rapport au moment de la réſiſtance totale qu'elle eſt obligée de vaincre. Cette longueur ſe trouve par les méthodes ordinaires *de maximis & minimis*. Paſſé ce

terme, on ne peut que perdre à augmenter la longueur du levier. Enfin dans le levier de la troisième eſpèce (Fig. 67), le poids du levier contrarie encore la puiſſance ; mais on voit qu'en ſuppoſant que la longueur *RA*, & la groſſeur du levier demeurent les mêmes, on ne peut que faire augmenter le moment de la puiſſance, en approchant le point *B* où elle eſt appliquée, du point d'application *A* du poids *P*.

150. Dans le problême général de l'article 147, toutes les puiſſances *P*, *Q*, *S*, *T*, *V* (Fig. 77) agiſſent dans un même plan. Je ſuppoſe maintenant que le levier étant parfaitement inflexible, & ayant ſimplement la liberté de tourner dans un plan autour de la broche *R* qui l'enfile, les puiſſances ne ſoient pas toutes dirigées dans ce plan. Alors il faudra décompoſer chaque puiſſance qui n'eſt pas dans le plan propoſé, en deux autres, l'une perpendiculaire à ce plan, l'autre qui y ſoit dirigée. Par ce moyen, on aura deux ſortes de forces, les unes perpendiculaires au plan de rotation, les autres dirigées dans ce plan. Les premieres ſeront détruites par la réſiſtance du levier & de la broche qui ne lui permet pas de ſortir de ſon plan. Les ſecondes ſeront les ſeules auxquelles il faille avoir égard ; & on opérera ſur elles, comme on a fait ſur les forces *P*, *Q*, *S*, *T*, *V* (147).

Fig. 77

151. Si les puiſſances appliquées à un levier, ayant des directions quelconques, ſituées dans des plans différens, le levier avoit un appui ou noyau de forme ſphérique qui lui permît de pirouetter librement en toutes ſortes de ſens, il faudroit décompoſer toutes

les puissances en d'autres parallèles à trois lignes données de position ; & les conditions de l'équilibre se trouveroient par le moyen des articles 71 & 72.

152. Le levier est d'usage dans la plûpart des machines. Il peut être de bois, ou de fer, ou de toute autre matière, selon l'objet auquel il est destiné. Il doit avoir dans chaque cas une grosseur & une résistance proportionnées à sa longueur, à la matière dont il est fait, & aux efforts qu'il est obligé de supporter. La détermination de cette grosseur est une question qui donne peu de prise à la théorie, & sur laquelle on doit sur-tout consulter l'expérience.

153. Parmi les machines où il entre des leviers, les *Ponts-levis* méritent d'autant plus d'être examinés ici avec quelque détail, que les Ingénieurs sont souvent obligés d'en faire construire dans les Places de Guerre, & que la théorie de leur équilibre ne se trouve dans aucun Livre de Méchanique, du moins dans aucun de ceux qui sont venus à ma connoissance.

154. On voit dans la Figure 78 le profil d'un pont-levis, coupé par un plan vertical qui passe par son milieu, & qui le divise en deux parties parfaitement égales & semblables. Cette machine est composée d'un *tablier* exprimé par la droite AE, lequel est mobile autour de deux tourillons A, placés à ses extrémités : de deux longues pièces de bois, marquées au profil par la même ligne GM, lesquelles tournent autour de deux tourillons K ; & dont les parties antérieures KG se nomment *fléches*, les parties postérieures KM se nomment *bascules*. Il y a des traverses Fig. 78.

de bois qui lient enſemble les deux baſcules ; & tout l'aſſemblage eſt cenſé ne faire qu'un ſeul & même corps. Deux *chaînes* repréſentées par GNE joignent les fléches avec le tablier ; elles le font monter quand la baſcule s'abaiſſe, & réciproquement quand le tablier s'abaiſſe, la baſcule monte.

155. Imaginons que le pont-levis ſoit parvenu en montant, dans une poſition quelconque : que T exprime le poids du tablier ; C, celui du ſyſtême des deux chaînes ; F, celui du ſyſtême des deux fléches ; & enfin B, celui du ſyſtême des deux baſcules & de leur aſſemblage. Tous ces poids T, C, F, B doivent être cenſés agir ſuivant les verticales qui paſſent par leurs centres de gravité. Conſidérons les deux chaînes comme réunies en une ſeule GNE ; & de plus regardons d'abord cette chaîne comme une corde parfaitement flexible. Qu'on mène par ſes extrémités les tangentes GN, EN ; elles ſe rencontreront en un point N placé (122) ſur la direction de la verticale CNP qui paſſe par le centre de gravité de la chaîne GNE. Nommons f & ϕ les tenſions de la chaîne en G & E, ſuivant les directions des tangentes GN, EN ; & des points d'appuis A & K, ſoient menées les perpendiculaires At, Ab, Kd, Kg, Ke ſur les directions des forces T, ϕ, f, F, B, reſpectivement.

156. Cela poſé, il eſt clair que AE peut être conſidéré comme un levier iſolé, auquel ſont appliquées les deux puiſſances T, ϕ en équilibre, & que par conſéquent on aura (141) l'équation,

$$T \times At = \phi \times Ab.$$

De même, on peut considérer GKM comme un levier isolé auquel sont appliquées les trois forces f, F, B en équilibre. Ainsi on aura (147),

$$f \times Kd + F \times Kg = B \times Ke.$$

$$\text{ou } B \times Ke - F \times Kg = f \times Kd.$$

Les tensions ϕ & f peuvent être chassées de ces équations, en considérant qu'on a (122), $\phi = \frac{C \times \text{sin.} GNP}{\text{sin.} ENG}$, $f = \frac{C \times \text{sin.} ENP}{\text{sin.} ENG}$. Nous aurons donc

$$T \times At = \frac{C \times \text{sin.} GNP}{\text{sin.} ENG} \times At,$$

$$B \times Ke - F \times Kg = \frac{C \times \text{sin.} ENP}{\text{sin.} ENG} \times Kd.$$

Voyons l'usage de ces équations pour la pratique.

157. Comme le poids C des chaînes est ordinairement fort petit en comparaison des poids T, F, B, & que d'un autre côté les points E & G sont situés, à peu de chose près, sur une même ligne verticale EX; on peut alors négliger la courbure des chaînes, & supposer qu'elles se confondent sensiblement avec la droite GE. Ainsi les deux angles GNP, ENP pourront être regardés comme supplémens l'un de l'autre, & comme ayant par conséquent le même sinus. On aura donc $\phi = f$, sensiblement. Donc, à cause de $\phi = \frac{T \times At}{Ab}$, & de $f = \frac{B \times Ke - F \times Kg}{Kd}$, on aura sensiblement,

$$\frac{T \times At}{Ab} = \frac{B \times Ke - F \times Kg}{Kd}.$$

Nommons 1 le sinus total, & considérons que $At =$

$AH \times$ sin. AHT; $Ab = AE \times$ sin. AEG, sensiblement ; $Kd = KG \times$ sin. KGE, sensiblement; $Kg = KI \times$ sin. KIF; $Ke = KL \times$ sin. KLB; notre équation deviendra, $\frac{T \times AH \times \text{sin. } AHT}{AE \times \text{sin. } AEG} = \frac{B \times KL \times \text{sin. } KLB - F \times KI \times \text{sin. } KIF}{KG \times \text{sin. } KGE}$.

158. On voit par cette équation que les sinus des angles, qu'elle renferme, variant d'une position du pont-levis à l'autre, suivant une loi qui dépend de l'espèce particulière du quadrilatère $AEGK$; cette espèce ne peut pas être arbitraire, si l'on veut que les poids T, F, B demeurant les mêmes, comme ils demeurent en effet, l'équilibre ait lieu dans toutes les positions possibles du pont-levis. Mais en supposant que les côtés opposés du quadrilatère soient égaux deux à deux, c'est-à-dire qu'on ait $AE = KG$, $AK = EG$, & que par conséquent le quadrilatère conserve la figure parallèlogrammique dans toutes les situations possibles, l'équilibre en question aura lieu. Car alors les deux angles AEG, KGE qui sont supplémens l'un de l'autre, ont des sinus égaux; les trois angles AHT, KLB, KIF ont aussi des sinus égaux. D'où il suit que l'équation précédente deviendra

$$T \times AH = B \times KL - F \times KI,$$

$$\text{ou } B \times KL = T \times AH + F \times KI,$$

qui ne renferme que des quantités constantes & indépendantes de la position du pont-levis. Ainsi, pourvû que le quadrilatère $AEGK$ soit un parallèlogramme, le pont-levis demeurera en équilibre par lui-même, & ſans le ſecours d'aucune puiſſance étrangère, dans toutes les ſituations qu'on pourra lui donner. D'où l'on voit l'avantage de la figure parallèlogrammique, indépendamment des facilités que cette figure offre pour la conſtruction & la manœuvre.

159. Quelques Lecteurs ſeront ſurpris, peut-être, que l'équation $B \times KL = T \times AH + F \times KI$ ne renferme en aucune manière le poids des chaînes; & que l'équilibre ſoit exprimé par la même équation que ſi les chaînes n'avoient abſolument aucune peſanteur. Mais cela eſt une ſuite néceſſaire de l'hypothèſe que le pont-levis conſerve la figure parallèlogrammique dans toutes les ſituations poſſibles. Si les chaînes ont une peſanteur ſenſible & comparable aux poids T, F, B, il ſera impoſſible que cette figure ſubſiſte à la rigueur, en regardant toujours les chaînes comme parfaitement flexibles. Quoique la théorie précédente ne laiſſe là-deſſus aucun doute, en voici néanmoins une démonſtration particulière appliquée à un cas où il ſemble que le parallèliſme des côtés du quadrilatère $AEGK$ devroit le plus ſe conſerver.

160. Suppoſons que le quadrilatère $AEGK$ (Fig. 79) ſoit un parallèlogramme; que les deux Fig. 79.
points A & K ſoient placés dans une même ligne verticale, ainſi que les deux points E & G; & que les chaînes n'ayent aucune peſanteur, ou ſoient regardées comme de ſimples fils inextenſibles & non peſans; que tout le ſyſtême ſoit en équilibre. Il eſt clair que le fil GE eſt également tendu dans le ſens EG & dans le ſens GE; & qu'en nommant φ cette tenſion, on

a rigoureusement $T \times AH = \phi \times AE$, $B \times KL - F \times KI = \phi \times KG = \phi \times AE$; ce qui donne

$$T \times AH = B \times KL - F \times KI.$$

Cette équation aura lieu à la rigueur, dans toutes les positions possibles du pont-levis; & la figure parallèlogrammique du quadrilatère $AEGK$ subsistera toujours; tant que le fil GE n'aura aucune pesanteur. Maintenant, qu'on attache un poids à ce fil, ou que les chaînes deviennent pesantes; l'équilibre précédent ne peut plus subsister; les points G & E se rapprochent nécessairement l'un de l'autre; les chaînes prennent la courbure $\gamma \zeta \epsilon$; & le parallèlogramme $AEGK$ se change en la figure $A \epsilon \zeta \gamma K$. D'où l'on doit conclure en général, par la raison inverse, que si le quadrilatère $AEGK$ conserve la figure parallèlogrammique dans toutes les positions possibles, le poids des chaînes doit être regardé comme nul en comparaison de la tension des chaînes, occasionnée par les forces T, F, B. Ce poids ne doit donc pas se trouver dans l'équation de l'équilibre.

161. Les chaînes ont été regardées jusqu'ici comme parfaitement flexibles; mais elles ne sont pas telles à beaucoup près. Elles sont composées d'anneaux oblongs de fer qui ne peuvent pas se plier dans toute l'étendue de leur longueur particulière; de plus ces mêmes anneaux, en s'entrelassant les uns dans les autres, éprouvent un frottement qui s'oppose encore à la flexibilité de la chaîne. Tout cela détruit en grande partie la courbure de cette même chaîne. J'abandonne donc l'hypothèse proposée, & j'en prens une

toute contraire ; je considére les chaînes comme dépourvues de toute flexibilité, & comme des barres GE attachées par leurs extrémités au tablier & aux fléches, par le moyen d'anneaux ou de crochets qui leur donnent en ces endroits toute liberté de tourner circulairement dans le plan du pont-levis à mesure qu'il monte ou qu'il s'abaisse.

162. Que $AEGK$ (Fig. 80) soit un quadrilatère quelconque, composé d'un tel assemblage, & parvenu dans une position quelconque. Des points d'appui A & K soient abaissées, comme ci-dessus, les perpendiculaires At, Kg, Ke sur les directions des poids T, F, B; & soient menées les perpendiculaires Ab, Kd à la barre EG. Nommons C le poids de cette barre, réuni à son centre de gravité ou milieu O; & décomposons ce poids en deux forces verticales qui passent par les points E & G, & qui en sont par conséquent chacune la moitié (39); menons les perpendiculaires Am, Kn sur leurs directions. Il est évident que la barre EG est également tirée suivant sa longueur, dans le sens EG, & dans le sens GE. Donc en nommant X cette force de tension; le levier AE aux points H, E, duquel sont appliquées trois forces, deux verticales, savoir H & $\frac{C}{2}$, & la troisième X dirigée suivant EG, donnera (147) pour condition d'équilibre, l'équation Fig. 80.

$$T \times At + \frac{C}{2} \times Am = X \times Ab.$$

De même, le levier GKM, aux points G, I, L duquel ſont appliquées quatre forces, trois, $\frac{C}{2}$, F, B, verticales, & la quatrième X dirigée ſuivant GE, donnera, pour condition d'équilibre, l'équation

$$\frac{C}{2} \times Kn + X \times Kd + F \times Kg = B \times Ke,$$

ou bien

$$B \times Ke - \frac{C}{2} \times Kd - F \times Kg = X \times Kd.$$

Tirant de chaque équation la valeur de X, on formera celle-ci,

$$\frac{T \times At + \frac{C}{2} \times Am}{Ab} = \frac{B \times Ke - \frac{C}{2} \times Kn - F \times Kg}{Kd}.$$

Et comme, en nommant toujours 1 le ſinus total, on a $At = AH \times \text{ſin.}\ AHT$, $Am = AE \times \text{ſin.}\ AEm$, $Ab = AE \times \text{ſin.}\ AEG$, $Ke = KL \times \text{ſin.}\ KLB$, $Kn = KG \times \text{ſin.}\ KGn$, $Kg = KI \times \text{ſin.}\ KIF$, $Kd = KG \times \text{ſin.}\ KGE$, notre équation deviendra

$$\frac{T \times AH \times \text{ſin.}\ AHT + \frac{C}{2} \times AE \times \text{ſin.}\ AEm}{AE \times \text{ſin.}\ AEG} =$$

$$\frac{B.KL.\text{ſin.}\ KLB - \frac{C}{2}.KG.\text{ſin.}\ KGn - F.KI.\text{ſin.}\ KIF}{KG.\text{ſin.}\ KGE},$$

qui exprime les conditions de l'équilibre, mais qui variera à meſure que le quadrilatère changera de poſition, lorſque ce quadrilatère ne ſera pas un parallèlogramme.

163. Suppoſons que le quadrilatère en queſtion ſoit un parallèlogramme : on aura $AE = KG$, $\text{ſin.}\ AEG = \text{ſin.}\ KGE$, $\text{ſin.}\ AHT = \text{ſin.}\ AEm = \text{ſin.}\ KGn =$ ſin.

fin. KIF = fin. KLB. Par conféquent notre équation deviendra

$$T \times AH + \frac{C}{2} \times AE = B \times KL - \frac{C}{2} \times AE - F \times KI,$$

ou bien,

$$B \times KL = T \times AH + C \times AE + F \times KI,$$

qui différe de celle de l'article 158, en ce qu'elle contient de plus que celle-ci le terme $C \times AE$ relatif au poids des chaînes.

164. Voilà donc deux hypothèfes très-différentes qui donnent, pour les conditions de l'équilibre du pont-levis, des équations qui ne différent que par un feul terme, le moins effentiel de tous. La feconde formule,

$$B \times KL = T \times AH + F \times KI + C \times AE,$$

paroît devoir être préférée dans la pratique.

Quand on aura réglé, de l'une ou de l'autre manière, les dimenfions du pont-levis, eu égard au bois & aux ferrures qui y entrent, on fera affuré qu'il demeurera par lui-même en équilibre dans toutes les fituations poffibles, & que par conféquent l'agent deftiné à le mouvoir n'aura fimplement à vaincre, à chaque inftant, que la réfiftance du frottement.

Je finis cette théorie du lèvier par la defcription de quelques inftrumens qui s'y rapportent, & qui font d'un fréquent ufage dans la fociété.

De la Balance.

165. La balance (Fig. 81), machine deftinée à pefer des marchandifes, eft compofée d'un levier droit Fig. 81.

A B nommé *fléau*, aux extrémités duquel ſont ſuſpendus, avec des cordons, deux *baſſins C* & *D*, qui reçoivent les marchandiſes qu'on veut peſer. Le fléau porte dans ſon milieu un axe *x y* qui lui eſt perpendiculaire, & dont les extrémités entrent & tournent librement dans les *yeux* pratiqués aux deux branches montantes d'une *chaſſe E M* qui ſoutient la machine. Ces extrémités de l'axe n'ont pas la forme cylindrique; elles ſont taillées en couteaux plus ou moins émouſſés, ſuivant que la balance eſt deſtinée à peſer des marchandiſes plus ou moins peſantes; le fléau s'appuie par les tranchans de ces couteaux dans les yeux de la chaſſe, avec une entière liberté de s'incliner de part ou d'autre; il porte une *aiguille f g* qui eſt dans la chaſſe quand il y a équilibre, & que le fléau eſt horiſontal; & qui en s'écartant à droite ou à gauche de la chaſſe, par ſa partie ſupérieure, fait connoître non-ſeulement en quel ſens le fléau s'eſt incliné, mais encore les plus petites inclinaiſons dont il eſt peut-être affecté.

166. Il eſt clair que la balance eſt un levier de la première eſpèce. On doit commencer par la mettre en équilibre, indépendamment des poids qu'on veut peſer les uns contre les autres. Quand cette première opération ſera faite, & qu'en conſéquence le fléau ſe tiendra dans la poſition horiſontale, la balance ſera dans le même cas que ſi ſes parties n'avoient aucune peſanteur; & on ne devra plus s'occuper que des poids qu'on met dans les baſſins. Ceux qui ſont placés d'un côté étant ſuppoſés connus, feront connoître auſſi les autres.

167. La balance demande à être faite avec précaution, si l'on veut qu'elle soit parfaitement juste. Il est d'abord essentiel que les deux bras *EA*, *EB* soient exactement égaux. Si cette condition étant remplie, & les deux bras étant garnis de leurs bassins, un des côtés l'emporte sur l'autre, on mettra du côté le plus foible, des petits poids en quantité suffisante pour établir l'équilibre, & maintenir le fléau dans la position horisontale. Ces petits poids doivent être regardés comme faisant partie de la balance même, & comme étrangers à ceux qu'on veut contrepeser.

168. Si les deux bras *AE*, *BE* n'étoient pas égaux, le plus long favoriseroit le poids placé de son côté. Car supposons que le fléau *AB* étant en équilibre & dans la position horisontale, on mette dans le bassin *C* un poids *P*, & dans le bassin *D* une marchandise *Q*, de manière qu'il y ait équilibre. Ces deux poids se faisant équilibre, on aura (143), $P : Q :: BE : AE$. Donc, si, par exemple, $BE > AE$, on aura $P > Q$. Les deux poids étant donc supposés égaux, l'un d'eux cependant l'emportera sur l'autre, & paroîtra plus pesant. On appelle ces sortes de balances, *balances fausses*. Elles peuvent servir néanmoins à déterminer exactement le poids d'une marchandise. Voici comment.

169. Sans vous embarrasser quel est le plus long bras d'une balance que vous soupçonnez d'être fausse, mettez 1°. dans l'un des bassins, par exemple, dans le bassin *D*, la marchandise *Q* que vous voulez peser ; & observez le poids *P* qui lui fait équilibre. 2°. Transposez la marchandise *Q*, mettez-la dans l'autre

baſſin C, & obſervez encore le poids P' qui lui fait équilibre. Cela poſé, multipliez P par P', & tirez la racine quarrée du produit; elle ſera la valeur exacte de Q. Car le premier équilibre donne (143) l'équation, $P \times AE = Q \times BE$, & le ſecond donne de même, $Q \times AE = P' \times BE$. Diviſant la première équation par la ſeconde, on aura $\frac{P}{Q} = \frac{Q}{P'}$, & par conſéquent $Q^2 = P \times P'$; donc $Q = \sqrt{(P \times P')}$.

170. Une choſe à laquelle on doit faire la plus grande attention, eſt de mettre, autant qu'il eſt poſſible, dans une même ligne horiſontale, le tranchant du couteau qui ſert d'axe, & les deux points A & B d'où pendent les baſſins. Car ſi le point d'appui
Fig. 82 & 83. E (Fig. 82 & 83) eſt au-deſſous ou au-deſſus de l'horiſontale AB; pour peu que cette ligne ſoit inclinée à l'horiſon, elle ſera diviſée en deux parties inégales par la verticle EM menée par l'appui; & conſéquemment les poids qui ſe feront équilibre, ne feront pas égaux. Dans le premier cas (Fig. 82), la balance eſt trop mobile ſur le point E, & elle eſt nommée *folle*; dans le ſecond (Fig. 83), elle trébuche trop difficilement, & elle eſt appellée *ſourde*. Cette ſeconde diſpoſition a moins d'inconvéniens que la première, & l'aiguille ſert à faire connoître le plus leger trébuchement d'un côté ou d'autre.

Je n'entre pas dans les détails qui concernent la conſtruction même de la balance, & le choix des matières dont elle doit être faite.

Du Peson ou de la Romaine.

171. Le peson ou la romaine sert à peser des marchandises de différentes pesanteurs, par le moyen d'un seul & même poids qu'on éloigne plus ou moins du point d'appui. Cette machine (Fig. 84) est composée d'un fléau AB, suspendu par une anse EK qui le divise en deux bras EA, EB, fort inégaux. Le bras le plus court porte un bassin C, ou un crochet destiné à soutenir les marchandises qu'on veut peser ; & on fait couler, au moyen d'un anneau, le long du bras EB, le poids constant P qui doit leur faire équilibre. Voici comment on détermine les points de division du bras EB, auxquels doit répondre le poids donné P pour faire équilibre à différens poids Q placés en C. Fig. 84.

172. Soient G le poids du bras EB réuni à son centre de gravité N; F le poids du bras EA réuni à son centre de gravité H; C le poids du bassin ou du crochet, lequel est censé agir suivant la verticale $A\mathfrak{C}$. Qu'on mette successivement en C différens poids Q, Q', Q'', Q''', &c; & supposons que pour faire prendre au fléau la position horisontale, & établir l'équilibre, il faille appliquer successivement le poids constant P aux points a, b, c, d, &c. Les différentes équations d'équilibre seront (147),

$$Q \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ea + G \times EN,$$
$$Q' \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Eb + G \times EN,$$
$$Q'' \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ec + G \times EN,$$
$$Q''' \times EA + F \times EH + C \times EA = P \times Ed + G \times EN,$$
&c.

Retranchant ſucceſſivement la première équation de la ſeconde, la ſeconde de la troiſième, la troiſième de la quatrième, &c, on aura

$$(Q'-Q)\times EA = P\times ab, \text{ ou } ab = \frac{(Q'-Q)\times EA}{P},$$

$$(Q''-Q')\times EA = P\times bc, \text{ ou } bc = \frac{(Q''-Q')\times EA}{P},$$

$$(Q'''-Q'')\times EA = P\times cd, \text{ ou } cd = \frac{(Q'''-Q'')\times EA}{P},$$

&c.

173. Il ſuit de-là, 1°. que ſi les poids Q, Q', Q'', Q''', &c, croiſſent en progreſſion arithmétique, enſorte qu'on ait $Q'-Q=Q''-Q'=Q'''-Q''=$ &c; toutes les diviſions ab, bc, cd, &c, ſeront égales entr'elles. 2°. Qu'en faiſant chacune de ces parties ab, bc, &c, égale au plus petit bras EA de la balance, on aura $\frac{Q'-Q}{P}=1$, ou $P=Q'-Q$, $\frac{Q''-Q'}{P}=1$, ou $P=Q''-Q'$, &c; c'eſt-à-dire que le contre-poids P ſera égal à la différence de la progreſſion arithmétique des marchandiſes Q, Q', Q'', &c.

174. Si on ſe donne P, le premier terme Q de la progreſſion arithmétique n'eſt point arbitraire : il doit être tel qu'on ait

$$Q\times EA + F\times EH + C\times EA = P\times Ea + G\times EN.$$

Dans la pratique, il convient de mettre d'abord la balance en équilibre par elle-même, indépendamment des poids P & Q. C'eſt à quoi on parvient, ou en mettant dans le baſſin C un petit poids, ou en attachant un petit poids au bras EB, ſelon qu'un côté l'emporte ſur l'autre. Suppoſons le premier cas, & comprenons le petit poids additionnel dans celui C du baſſin : nous aurons alors

$$F \times EH + C \times EA = G \times EN;$$

Donc, $Q \times EA = P \times Ea$; donc en faiſant $Ea = EA$, on aura (à cauſe de $P = Q' - Q$), $Q = Q' - Q$, ou $Q' = 2Q$. Ainſi le premier terme de la progreſſion arithmétique ſera Q, & la raiſon ſera auſſi Q. D'où l'on voit qu'alors en prenant ſur le plus long bras EB des parties égales au plus court EA, on pourra, avec un poids donné P appliqué aux différentes diviſions, faire équilibre à une ſuite de poids P, $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, &c.

175. Les parties égales ab, bc, cd, &c. peuvent elles-mêmes être ſou-diviſées, pour contrepeſer, toujours avec le même poids P, les poids intermédiaires à ceux de la ſuite P, $2P$, $3P$, $4P$, &c. Soit une marchandiſe $= P + \frac{m}{n}P$, m & n étant des nombres poſitifs, dont le ſecond eſt plus grand que le premier. Mettons ce poids en C, & nommons x la diſtance du contrepoids P au point a. Il eſt clair, par l'équation $ab = \frac{(Q' - Q) \times EA}{P}$, qu'on aura ici $x = \frac{\frac{m}{n}P \times EA}{P} = \frac{m}{n}EA = \frac{m}{n}ab$. Ainſi aux fractions du poids répondent des fractions analogues de la partie ab. Il en eſt de même pour les parties ſuivantes bc, cd, &c.

176. Cette balance a cela d'avantageux, qu'avec un ſeul & même poids, on peut contrepeſer d'autres poids très-conſidérables. De plus elle fatigue moins les yeux de la chaſſe, que la balance ordinaire : car ſi, par exemple, on veut contrepeſer avec celle-ci un poids $4P$, les deux baſſins portent chacun un poids pareil ; & la preſſion ſur les yeux de la chaſſe eſt $4P+4P$, ou $8P$ (39) ; au lieu que dans la romaine où le poids P appliqué à la quatriéme diviſion du bras EB, contrepeſe le poids $4P$ mis dans le baſſin C, la preſſion ſur les yeux de la chaſſe eſt ſimplement $4P+P$ ou $5P$ (39). Mais d'un autre côté, le bras EB de la romaine eſt expoſé à ſe plier, quand il eſt un peu long ; ce qui eſt un inconvénient auquel la balance ordinaire eſt moins ſujette.

177. Il eſt évident qu'au lieu de ſuppoſer que le poids appliqué au plus long bras EB eſt conſtant, & l'autre variable, on pourroit faire une balance où ce dernier poids ſeroit variable, & l'autre conſtant. Cette balance eſt l'inverſe de la précédente. Il eſt trop facile de la diviſer, d'après ce qui précéde, pour qu'il ſoit néceſſaire d'entrer ici dans ce détail.

Du Peſon Suédois ou Danois.

178. La balance qu'on a ainſi nommée, à cauſe du grand uſage qu'on en fait en Suéde & en Dannemarck,
Fig. 85. eſt une longue piéce AB (Fig. 85) de fer ou de bois, portant à l'une de ſes extrémités une lourde maſſe A, & à l'autre un baſſin ou un crochet C, pour ſoutenir les marchandiſes qu'on veut peſer ; elle eſt tra-

verſée par un anneau E qui la ſoutient, & qu'on fait gliſſer ſuivant ſa longueur, juſqu'à ce qu'il y ait équilibre de part & d'autre du point E.

179. Conſidérons le ſyſtême de la maſſe A, de la verge AB & du baſſin ou crochet C, comme ne faiſant qu'un même poids P réuni à ſon centre de gravité H. Nommons Q le poids de la marchandiſe qu'on veut peſer. On aura, en vertu de l'équilibre, $P \times EH = Q \times BE$, ou bien $P \times (BH - BE) = Q \times BE$; ce qui donne

$$BE = \frac{P \times BH}{P + Q}.$$

D'où l'on voit que connoiſſant P & BH, il ſera facile de graduer la verge BH, relativement aux différens poids Q qu'on veut peſer.

SECTION III.

Des Poulies.

180. La poulie (Fig. 86) eſt un cercle, ou plutôt un cylindre peu épais, creuſé extérieurement à ſa ſurface en forme de gorge, pour recevoir une corde tirée de part & d'autre par deux puiſſances Q & S. Elle eſt traverſée perpendiculairement à ſon centre O par un boulon dont les extrémités tournent librement dans les branches d'une anſe ou *chappe* OK. Fig. 86.

181. Il peut arriver que la poulie ſoit *mobile* ou *immobile*, ſelon qu'elle s'éleve ou non avec le poids,

ou en général, selon qu'elle change ou non de place pour vaincre la résistance.

182. On appelle *moufles*, & en termes de Marine, *palans*, *caliornes*, des assemblages de plusieurs poulies, les unes fixes, les autres mobiles, toutes embrassées par une même corde. Les poulies fixes sont portées par une même chappe, & les poulies mobiles par une autre chappe. Elles peuvent avoir différentes dispositions, comme on le voit dans les Figures 94, 95, 96, 97, 98.

Fig. 86. 183. Soit *FGHM* (Fig. 86) une poulie sans pesanteur, embrassée dans sa partie *FGH*, par une corde tirée par les deux puissances *Q* & *S* qui se font équilibre. Il est visible que ces deux puissances sont nécessairement égales, ou que la corde est également tendue des deux côtés; autrement cette corde glisseroit ou feroit tourner la poulie vers le côté où seroit la plus grande puissance. L'égalité en question auroit encore lieu, quand même la poulie n'auroit pas la forme circulaire; mais on préfère la forme circulaire comme la plus simple & la plus commode de toutes dans la pratique, relativement aux différens usages qu'on y fait de la poulie. Prolongeons les directions des deux puissances *Q* & *S* jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *A*; & ayant pris les parties égales *AB*, *AC*, pour représenter les quantités de ces puissances, achevons le parallélogramme lozange *ABDC*. La diagonale *AD* qui est évidemment dirigée au centre *O* du cercle, représentera la résultante des deux puissances *Q* & *S*. Donc, si la poulie est fixe, le point

d'appui devra résister dans le sens OA, & supportera un effort représenté par AD; & si la poulie est mobile, la force appliquée à la chappe dans le sens OA, sera représentée par une partie de sa direction, égale à AD. Ainsi en nommant, pour l'un & l'autre cas, P la résistance qui détruit la force AD, on aura (28),

$$P:Q:S::AD:AB:AC \text{ ou } BD,$$

ou bien (33),

$$P:Q:S::\text{sin.}\,QAS:\text{sin.}\,OAS:\text{sin.}\,OAQ,$$

ou, à cause que les deux angles OAQ, OAS sont chacun la moitié de l'angle QAS,

$$Q \text{ ou } S:P::\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}QAS:\text{sin.}\,QAS.$$

184. Menons du centre O les raïons OF, OH aux points d'attouchemens des cordons avec la poulie; & tirons la soutendante FH de l'arc FGH enveloppé par la corde. Les deux triangles ABD, OFH, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, sont semblables, & donnent, $AD:AB:BD::FH:OF:OH$. Ainsi, puisqu'on a $P:Q:S::AD:AB:BD$, on aura aussi,

$$P:Q:S::FH:OF:OH;$$

c'est-à-dire que *les deux puissances* Q *&* S, *& la résistance* P *sont proportionnelles aux raïons & à la soutendante de l'arc embrassé par la corde.*

185. Il suit de-là que *si les deux cordons* FQ, HS, (Fig. 87) *sont parallèles, chacune des deux puissances* Q *&* S *ne sera que la moitié de la résistance* P. Fig. 87.
Ainsi en attachant l'une des extrémités de la corde au point fixe S (Fig. 53), on soutiendra le poids

P par le moyen d'une puiſſance Q qui n'en eſt que la moitié ; mais auſſi, dans le cas du mouvement, le poids ira deux fois moins vîte que la puiſſance, comme nous l'avons déja remarqué (115).

Fig. 88 & 89. 186. Lorſque la poulie $FGHM$ (Fig. 88 & 89), à laquelle les deux puiſſances Q & S ſont appliquées, eſt peſante, il faut prolonger les directions des deux puiſſances Q & S qui ſont toujours égales, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en A ; & ayant conſtruit le lozange $ABDC$, dont la diagonale AD paſſe par le centre, on prendra ſur le prolongement de AD la partie $OI = AD$; on ſuppoſera que le poids de la poulie ſoit exprimé par la verticale OL ; & on fera le ſecond parallèlogramme $OINL$ dont la diagonale ON exprimera la réſultante des deux puiſſances Q, S, & du poids de la poulie. Ainſi la réſiſtance appliquée à la chappe devra être dirigée dans le ſens NOK ; & ſi l'on nomme P cette réſiſtance, p le poids de la poulie, on aura cette ſuite de rapports égaux,

$$P : p : Q : S :: ON : OL : AB : AC.$$

187. Si non-ſeulement la poulie étoit peſante, mais qu'elle fût encore chargée d'un poids X, la conſtruction précédente & le réſultat qui s'enſuit, ſubſiſteroient toujours, en comprenant le poids X dans le poids p.

188. Il eſt évident par tout cela que ſi les puiſſances Q & S (Fig. 90) tirent de bas en haut, & que la poulie, peſante ou non, & chargée d'un poids X, demeure en équilibre ſans le ſecours d'aucun appui ou d'aucune autre puiſſance, la réſultante des

Fig. 90.

deux puiſſances Q & S ſera néceſſairement verticale, puiſqu'elle ſera égale & contraire (18) à l'action du poids appliqué au centre O de la poulie. Les deux puiſſances Q & S feront donc alors des angles égaux avec la verticale.

189. Soit (Fig. 91) un ſyſtême de poulies non peſantes C, G, M. La première, qui ſoutient un poids P, eſt embraſſée par une corde dont une extrémité eſt arrêtée fixément en D, l'autre eſt appliquée à la chappe de la ſeconde poulie ; celle-ci eſt embraſſée par une corde arrêtée d'un côté fixément en E, & attachée de l'autre à la chappe de la troiſième poulie qui eſt elle-même embraſſée par une corde attachée fixément en O par un bout, & tirée de l'autre côté par la puiſſance Q. Ainſi de ſuite, s'il y avoit un plus grand nombre de poulies. Suppoſons que tout le ſyſtême ſoit en équilibre ; & menons les raïons & les ſoutendantes des poulies, comme on le voit dans la Figure. En conſidérant, ce qui eſt permis, l'équilibre de la poulie C, comme ſi cette poulie exiſtoit ſeule ; & nommant F la tenſion du cordon BF, on aura (184), Fig. 91.

$$P : F :: AB : AC.$$

Par la même raiſon, en nommant K la tenſion du cordon IK, on aura,

$$F : K :: IH : IG.$$

La troiſième poulie M donnera de même,

$$K : Q :: NR : NM.$$

Multiplions toutes ces proportions par ordre, nous aurons,

$$P : Q :: AB \times IH \times NR : AC \times IG \times NM ;$$

c'est-à-dire que *le poids, ou en général, la résistance* P, *est à la puissance* Q, *comme le produit des soutendantes, est au produit des raïons.*

190. On doit remarquer que pour se ménager la liberté de donner à la puissance Q telle direction qu'on veut, on fait passer souvent la corde NQ sur une poulie fixe X qu'on appelle *poulie de renvoi*; & qu'alors on applique la puissance en Q'; mais il est clair (184) que cette puissance est toujours la même dans l'un & l'autre cas. On employe les poulies de renvoi dans plusieurs autres occasions.

191. Lorsque les cordons DB, AF, EH, &c. (Fig. 92), sont parallèles, les soutendantes deviennent des diamètres; & on a $P : Q :: 2 \times 2 \times 2 : 1 \times 1 \times 1$. D'où l'on voit qu'alors *le poids ou la résistance est à la puissance, comme le nombre* 2 *multiplié par lui-même autant de fois qu'il y a de poulies mobiles, est à l'unité.*

Fig. 92.

Il est clair que la poulie de renvoi X n'entre jamais pour rien dans ces rapports.

192. On voit par-là qu'en augmentant convenablement le nombre des poulies mobiles, on peut, avec une force médiocre, faire équilibre à des poids très-considérables. Par exemple, dans notre Figure où il y a trois poulies mobiles, la puissance n'est que la huitiéme partie du poids. Mais qu'on fasse passer la machine du repos au mouvement, la puissance ira huit fois plus vîte que le poids; on perd donc en temps ce qu'on gagne en force.

193. Soit (Fig. 93) un nombre quelconque de poulies fixes *A*, *B*, *C*, *D*, & de poulies *E*, *F*, *G*, mobiles & chargées des poids *P*, *R*, *T*; toutes embraſſées par une même corde qui eſt tirée à ſes extrémités par deux puiſſances *Q* & *S*. Tout le ſyſtême étant ſuppoſé en équilibre, il eſt évident que la corde eſt également tendue dans toutes ſes parties. Car les deux cordons qui tirent ſur chaque poulie fixe ou mobile, conſidérée en particulier, ſont également tendus : d'où l'on voit, en allant de proche en proche, que la corde entière eſt par-tout également tendue, & que par conſéquent les deux puiſſances *Q* & *S* ſont égales entr'elles. Quand l'équilibre eſt établi, on peut, à la place de l'une *S* des puiſſances, ſubſtituer un point fixe auquel la corde eſt attachée ; la puiſſance Q demeure toujours la même. Fig. 93.

194. Prolongeons les cordons appliqués aux poulies mobiles juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent aux points *a*, *g*, *n* ; & ayant pris ſur leurs directions les parties égales *ab*, *af*, *gh*, *gm*, *no*, *ns*, pour repréſenter les tenſions égales des mêmes cordons, dont chacune peut être exprimée par la puiſſance Q, décompoſons ces tenſions en deux ſortes de forces, les unes horiſontales, & les autres verticales, en faiſant les parallèlogrammes rectangles que la Figure repréſente. Les poulies *E*, *F*, *G*, étant indépendantes les unes des autres, & ayant la liberté de ſe mouvoir en tout ſens, il faut néceſſairement, pour qu'il y ait équilibre, que les forces appliquées à chacune d'elles en particulier ſe détruiſent par elles-mêmes, & indépen-

damment de celles qui agiſſent ſur les autres poulies. Ainſi, pour la poulie E, les deux forces horiſontales ac, ae, ſont égales & ſe détruiſent; & la ſomme $ad + ad$, ou $bc + fe$ des deux forces verticales ad eſt égale au poids P: enſorte qu'on a, Force $ac =$ Force ae, $P =$ Force $bc +$ Force fe.

De même, pour la poulie F, on a, Force $gi =$ Force gl, $R =$ Force $hi +$ Force ml.

Et pour la poulie G, on a, Force $np =$ Force nr, $T =$ Force $op +$ Force sr.

Or tous les triangles rectangles acb, aef, gih, &c, ayant des hypothènuſes égales, les côtés bc, fe, hi, &c, peuvent être regardés comme les ſinus des angles que les cordons font avec l'horiſon. Donc, en nommant r le raïon ou ſinus total, on aura $P = \frac{Q \times (\text{ſin.}\, bac + \text{ſin}\, fae)}{r}$; $R = \frac{Q \times (\text{ſin.}\, hgi + \text{ſin.}\, mgl)}{r}$;

$$T = \frac{Q \times (\text{ſin.}\, onp + \text{ſin.}\, snr)}{r}; \quad P + R + T = \frac{Q . (\text{ſin.}\, bac + \text{ſin.}\, fae + \text{ſin.}\, hgi + \text{ſin.}\, mgl + \text{ſin.}\, onp + \text{ſin.}\, snr)}{r}.$$

Ces équations donnent les proportions,

$P : Q :: \text{ſin.}\, bac + \text{ſin.}\, fae : r$,
$R : Q :: \text{ſin.}\, hgi + \text{ſin.}\, mgl : r$,
$T : Q :: \text{ſin.}\, onp + \text{ſin.}\, snr : r$,
$P : R :: \text{ſin.}\, bac + \text{ſin.}\, fae : \text{ſin.}\, hgi + \text{ſin.}\, mgl$,
$P : T :: \text{ſin.}\, bac + \text{ſin.}\, fae : \text{ſin.}\, onp + \text{ſin.}\, snr$,
$R : T :: \text{ſin.}\, hgi + \text{ſin.}\, mgl : \text{ſin.}\, onp + \text{ſin.}\, snr$,
$P + R + T : Q :: \text{ſin.}\, bac + \text{ſin.}\, fae + \text{ſin.}\, hgi + \text{ſin.}\, mgl + \text{ſin.}\, onp + \text{ſin.}\, snr : r$.

D'où

D'où l'on voit 1°. que *chaque poids appliqué à l'une des poulies mobiles, est à la puissance, comme la somme des sinus des angles que les deux cordons tangents à cette poulie font avec l'horison, est au sinus total.*

2°. Que *les poids sont entr'eux comme les sommes des sinus des angles formés par les cordons tangents aux poulies mobiles qui les soutiennent.*

3°. Que *la somme de tous les poids, est à la puissance, comme la somme des sinus des angles que les cordons tangents aux poulies mobiles font avec l'horison, est au sinus total.*

195. Le système proposé étant abandonné à lui-même, & étant parvenu à la situation d'équilibre après quelques mouvemens d'oscillation dont il ne s'agit pas ici, aura toujours une disposition telle que les conditions mentionnées seront remplies. Mais si connoissant les poids P, R, T, & la puissance Q ou S, on veut déterminer cette disposition *à priori*, cela sera aisé. Il faudra pour cela que dans la poulie E, les deux angles bac, fae soient égaux, pour avoir des forces horisontales ac, ae égales entr'elles. De plus ces angles doivent être tels que la somme des deux forces verticales bc, fe, ou le double de l'une bc d'elles soit égal au poids P; ce qui est facile à obtenir, puisqu'il s'agit simplement de résoudre un triangle rectangle bac, dans lequel on connoît l'hypothènuse ab, expression de la puissance *donnée* Q, & le côté bc, expression de la moitié du poids P aussi *donné*. On raisonnera de même pour les poulies F & G.

Fig. 94 & 95. 196. Supposons maintenant (Fig. 94 & 95) que les poulies supérieures A, B, C, &c, soient assemblées dans une même chappe fixe AK, & que les inférieures E, F, G soient assemblées dans une même chappe EF chargée d'un poids P. Ce poids doit être regardé comme formé du poids particulier de la moufle inférieure & de ses poulies, & du poids étranger que cette moufle souleve. Que toutes les poulies soient embrassées par une même corde dont une extrémité est tirée par la puissance Q, l'autre est arrêtée fixément en S à la chappe supérieure ou inférieure ; & que tout le systême soit en équilibre. Il est clair, comme dans l'article 193, que toutes les parties de la corde sont également tendues, & que chaque tension peut être représentée par la puissance Q.

197. Je décompose chacune des tensions égales des cordons qui soutiennent la moufle inférieure, en deux sortes de forces, les unes horisontales, les autres verticales, comme on le voit dans les deux Figures. Il n'y a plus équilibre maintenant entre les forces particulières qui agissent sur chacune des poulies inférieures, parce que ces poulies étant contenues dans une même chappe, à des distances fixes les unes des autres, doivent être regardées comme ne formant qu'un même tout, assujetti à suivre le mouvement de la chappe qui les assemble ; mais il faudra,

1°. Que la résultante de toutes les forces horisontales qui tirent dans un sens, soit égale & directement opposée à la résultante de toutes les forces horiſontales qui tirent dans le ſens oppoſé. Ainſi, en nommant F & F' ces deux réſultantes, qui ſont chacune (42) la ſomme de leurs forces compoſantes, on aura $F = F'$; & de plus ces forces F & F' agiront ſuivant une même ligne horiſontale, l'une de gauche à droite, l'autre de droite à gauche.

2°. La réſultante des forces verticales qui proviennent des tenſions des cordons propoſés, doit être égale & directement oppoſée au poids P; enſorte que nommant G cette réſultante, on aura $G = P$; & la force G agira dans la direction de la verticale PI.

Cela poſé, on voit à l'inſpection de nos deux Figures que les tenſions égales des cordons qui tirent la mouſle inférieure, étant repréſentées par des parties égales de leurs directions, la ſomme des forces verticales qui en proviennent, ou (42) la force G, eſt repréſentée par la ſomme des ſinus des angles que ces cordons forment avec l'horiſontale, tandis que l'une des tenſions, ou la puiſſance Q, eſt exprimée par le ſinus total. Donc, à cauſe de $P = G$, il s'enſuit que *le poids* P, *eſt à la puiſſance* Q, *comme la ſomme des ſinus des angles que forment avec l'horiſon les cordons qui ſoutiennent la mouſle inférieure, eſt au ſinus total.*

198. La mouſle inférieure, chargée du point P, étant abandonnée à elle-même, finira toujours par prendre la poſition d'équilibre; & les réſultats qu'on vient de trouver, auront lieu. Cela ſuffit pour la pratique. Le problême inverſe, c'eſt-à-dire, la détermination de la poſition que la mouſle inférieure doit prendre pour qu'il y ait équilibre, mène à des cal-

culs qui, ſans être difficiles, ſont longs & de peu d'uſage. Je les ſupprime, par cette raiſon.

199. Que le ſyſtême étant toujours en équilibre, les cordons qui agiſſent ſur la moufle inférieure, deviennent parallèles : ils ſeront néceſſairement verticaux. Car ſi étant parallèles, ils n'étoient pas verticaux, ils ſeroient tous inclinés dans le même ſens; d'où il ſuit que les forces horiſontales agiſſant toutes dans le même ſens, ne pourroient pas ſe détruire, & que par conſéquent il n'y auroit pas équilibre. De plus, le ſinus de l'angle formé par chacun de ces cordons avec l'horiſon devient le ſinus total. Donc alors (197), *le poids eſt à la puiſſance, comme le nombre des cordons qui tirent la moufle inférieure, eſt à l'unité.*

200. Il ſuit de-là que le poids eſt à la puiſſance dans le plus grand rapport poſſible, lorſque les cordons qui tendent à ſoulever la moufle mobile, ſont parallèles, & par conſéquent verticaux. Cette diſpoſition eſt donc la plus avantageuſe de toutes, pour faire équilibre, avec une force donnée, au plus grand poids poſſible. Mais, dans le cas du mouvement, la vîteſſe du poids eſt à celle de la puiſſance, comme l'unité eſt au nombre des cordons qui tirent la moufle inférieure. Ainſi on perd en temps ce qu'on gagne en force.

201. Le principal uſage des moufles dans la pratique étant de faire gagner de la force, on s'attache, autant qu'il eſt poſſible, à rendre les cordons parallèles. On voit des exemples de ce parallèliſme dans

les Figures 96, 97, 98. La corde peut être arrêtée à la moufle ſupérieure ou à l'inférieure. Fig. 96, 97, 98.

Dans la Figure 96, les centres des poulies de chaque chappe ſont dans une même ligne droite ; & les diamètres de ces poulies croiſſent, en allant ſuivant l'ordre de la corde, à partir du point où elle eſt attachée à l'une des moufles, croiſſent, dis-je, comme une progreſſion arithmétique dont la différence eſt le diamètre de la plus petite poulie. Cet aſſemblage a l'inconvénient d'être un peu volumineux.

Dans la Figure 97, toutes les poulies des deux moufles ont des diamètres égaux; & celles de chaque moufle ſont traverſées par un goujon commun. Ces ſortes de moufles ſont fort en uſage. Les cordons n'y ſont pas exactement parallèles ; mais ce défaut eſt peu conſidérable.

Dans la Figure 98, les poulies de chaque moufle forment une eſpéce de cone tronqué ou de *fuſée*. Les diamètres des poulies vont en progreſſion arithmétique, ſuivant la même loi que dans la Figure 96. Cette troiſième eſpèce de moufles eſt peu en uſage.

202. La moufle ſupérieure eſt portée ordinairement par un appui qu'on peut regarder comme invincible. Si on vouloit déterminer la preſſion qui réſulte contre l'appui, en vertu du poids P & de la puiſſance Q, cela ſeroit aiſé. Par exemple (Fig. 94), on prolongera les directions du poids P & de la puiſſance Q, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en O; & prenant les parties OM, ON, pour repréſenter ces deux Fig. 94.

forces, on achevera le parallèlogramme *OMHN*. La pression résultante de-là contre l'appui, sera représentée par la diagonale *OH*. On raisonnera d'une manière analogue pour les autres cas.

203. Il n'est pas nécessaire de faire observer que si la moufle inférieure, au lieu de porter un poids, soutenoit une résistance dont la direction ne fût pas verticale ; tout ce qu'on a dit pour le premier cas s'appliqueroit à celui-ci, en prenant pour la verticale la direction de la résistance, & pour l'horisontale la perpendiculaire à cette direction.

SECTION IV.

Du Tour.

204. LE *Tour*, *Treuil* ou *Cabestan*, est une machine composée d'un cylindre & d'une roue qui ont le même axe; ou du moins son effet peut toujours être regardé comme résultant d'un tel assemblage. Une Fig. 99. puissance Q (Fig. 99) appliquée à la roue, ou à ce qui en tient lieu, oblige la corde qui soutient le poids P, à s'envelopper autour du cylindre, & par conséquent le poids à s'élever. Le cylindre est garni à ses extrémités de tourillons qui portent sur des appuis.

205. Cette machine a différentes dénominations, selon sa position & les usages auxquels elle sert. Quand le cylindre est horisontal, & par conséquent la roue verticale, elle s'appelle *Tour*, *Treuil*, quelquefois sim-

plement *roue*, du nom de la principale pièce. On l'employe beaucoup pour tirer des pierres du fond des carrières, ou pour soulever d'autres fardeaux très-pesans.

Dans ces sortes de cas, on garnit les jantes de la roue, de chevilles auxquelles des hommes s'appliquent par leurs mains; ce qui leur donne le moyen de s'aider d'une partie de leurs poids pour faire tourner la machine.

Souvent, au lieu de se servir d'une roue garnie de chevilles, on se contente simplement de mettre perpendiculairement au cylindre (Fig. 100) des barres, aux extrémités desquelles des hommes agissent par leurs bras & par une partie de leurs poids. On peut rapporter à cette espéce de tour, celui dont on se sert quelquefois (Fig. 101) pour tirer de l'eau d'un puits profond, & qu'on fait mouvoir par le moyen de *manivelles*, *M*, *M*. Fig. 100. Fig. 101.

Il y a des occasions où l'on employe, pour roue, un grand tambour creux, dans lequel des hommes, en marchant, font tourner la machine par leurs poids. Voyez les Figures 111, 112.

206. Quand le cylindre est vertical (Fig. 102), la machine se nomme *cabestan*. Alors on n'y employe presque jamais une roue; elle est suppléée par des barres horisontales qui traversent le cylindre, & que des hommes tirent ou poussent par leurs extrémités. Le cabestan est d'un grand usage dans la Marine pour lancer l'ancre à la mer, ou pour l'en retirer. Il sert aussi à terre en plusieurs occasions, comme pour tirer des Fig. 102.

pierres ou des tonneaux pleins, d'un batteau qui eſt ſur la riviere, ou pour mouvoir d'autres fardeaux très-peſans, & les faire approcher d'un certain but.

207. Il eſt évident que les effets de toutes les différentes eſpèces de tours reviennent, dans le fond, à celui du tour repréſenté par la Figure 99. Je ſuppoſe donc qu'à la roue ABD (Fig. 103),
Fig. 103. ſoit appliquée, ſuivant une direction tangentielle, & ſituée dans le plan de cette roue, une puiſſance Q qui fait équilibre au poids P attaché à une corde qui s'enveloppe autour du cylindre kn'; enſorte que la puiſſance & le poids exercent leurs actions ſuivant les tangentes des deux cercles ABD, MNK, parallèles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe commun EF. La machine entière étant portée par les deux appuis E & F, il eſt clair que toutes les forces qui proviennent de la puiſſance & du poids, doivent paſſer par ces appuis, & y trouver leur deſtruction. Imaginons, par chacun des points E & F, deux ſections concentriques, & de plus parallèles & égales chacune à chacun des deux cercles ABD, MNK; ces ſections ſont abd, mnk, pour le point E; & $a'b'd'$, $m'n'k'$, pour le point F. Menons, par les points A & N, les droîtes aAa', nNn', parallèles à l'axe EF; & dont la première rencontre les circonférences abd, $a'b'd'$ aux points a, a'; & la ſeconde rencontre les circonférences mnk, $m'n'k'$ aux points n, n'. Par les points a & a', menons les droites aq, $a'q'$, parallèles à AQ; & par les points n & n', les droites np, $n'p'$, pa-

rallèles à NP. Enfin, tirons les raïons CA, Ea, Fa'; ON, En, Fn'. Cette conſtruction faite, je décompoſe le poids P en deux autres p, p', dirigés ſuivant np, $n'p'$; & la puiſſance Q en deux autres q, q', dirigées ſuivant aq, $a'q'$. Ainſi, à la place des deux forces P & Q, on en a quatre, p, p', q, q'. Or, quoique ces forces n'agiſſent pas dans un même plan, il eſt clair, par un raiſonnement ſemblable à celui de l'article 67, que ſi la différence des moments des deux forces p & q, qui tendent à produire, dans le plan abd, des rotations contraires autour du point E, eſt égale à la différence des moments des forces q' & p' qui tendent à produire, dans le plan $a'b'd'$, des rotations contraires autour du point F; ou, ce qui revient au même, que ſi la ſomme des moments des forces p, p', qui tendent à faire tourner la machine en un ſens, eſt égale à la ſomme des moments des forces q, q', qui tendent à la faire tourner en ſens contraire : il eſt clair, dis-je, qu'il n'y aura aucune raiſon pour que le plan abd tourne dans un ſens, ou que le plan $a'b'd'$ tourne dans le ſens contraire. L'équation qui exprime la nature de l'équilibre eſt donc, $p \times En - q \times Ea = q' \times Fa' - p' \times Fn'$, ou bien $p \times En + p' \times Fn' = q \times Ea + q' \times Fa'$. D'où l'on tire, (en mettant CA pour Ea & pour Fa', ON pour En & pour Fn'), $(p+p') \times ON = (q+q') \times CA$. Or (39), $p+p' = P$, $q+q' = Q$. Donc $P \times ON = Q \times CA$; & $P:Q :: CA:ON$.

Par conſéquent, *le poids eſt à la puiſſance, com-*

me le raïon de la roue, eſt au raïon du cylindre.

208. Il peut arriver que les deux forces P & Q ſoient dans un même plan. La proportion précédente a toujours également lieu. Ainſi, quant au rapport qui exiſte entre le poids & la puiſſance, l'effet du tour revient à celui d'un levier de la première eſpèce. La remarque de l'article 146, dans ce qui concerne le levier de la première eſpèce, s'applique donc auſſi au tour.

209. En vertu des deux forces p, q, l'appui E ſouffre une preſſion égale à leur réſultante ; & pareillement en vertu des deux forces p', q', l'appui F ſouffre une preſſion égale à leur réſultante. Donc ſi, après avoir mené les verticales Ez, Fs, & les droites Eh, Fm parallèles à AQ, on repréſente p par Eg, q par Eh, p' par Fi, q' par Fm; qu'enſuite on achève les deux parallèlogrammes $Ehtg$, $Fmli$: les diagonales Et, Fl, repréſenteront les preſſions des deux appuis E & F. Or, puiſqu'on a (40), $p = \frac{P \times Nn'}{nn'} = \frac{P \times OF}{EF}$, $p' = \frac{P \times Nn}{nn'} = \frac{P \times OE}{EF}$, $q = \frac{Q \times Aa'}{aa'} = \frac{Q \times CF}{EF}$, $q' = \frac{Q \times Aa}{aa'} = \frac{Q \times CE}{EF}$; il s'enſuit que dans les deux triangles Egt, Fil, on connoîtra les côtés Eg, gt, Fi, il, & les angles Egt, Fil qui ſont égaux chacun à l'un des angles que la direction de la puiſſance Q fait avec la verticale ; & que par conſéquent on pourra trou-

ver, par les régles de la Trigonométrie, les valeurs des pressions Et, Fl des deux appuis.

210. Nous pouvons représenter les mêmes pressions par des formules générales très-commodes, & qu'on appliquera sans peine à chaque cas particulier. Pour cela, décomposons les forces exprimées par Eh, Fm, chacune en deux autres Ex, Eu; Fy, Fr; l'une horisontale, l'autre verticale. De plus, menons les horisontales tz, ls. Il est évident que l'appui E supporte une pression horisontale représentée par Ex, une pression verticale représentée par Ez; & l'appui F, une pression horisontale représentée par Fy, une pression verticale représentée par Fs. Supposons

le sinus total . . . . $= 1$,
le sinus de l'angle hEx ou mFy que fait la direction de la puissance Q avec l'horison . . . . $= \lambda$,
le cosinus de cet angle . . . . $= \pi$;
la pression Et de l'appui E . . . . $= E$,
sa pression horisontale Ex . . . . $= e$,
sa pression verticale Ez . . . . $= e'$,
la pression Fl de l'appui F . . . . $= F$,
sa pression horisontale Fy . . . . $= f$,
sa pression verticale Fs . . . . $= f'$.

Cela posé, puisque $Eh = q$, $Eg = p$, $Fm = q'$, $Fi = p'$; & que d'un autre côté Ex ou $zt = Eh \times \frac{\pi}{1}$, xh ou $gz = Eh \times \frac{\lambda}{1}$, Fy ou $sl = Fm \times \frac{\pi}{1}$, Fr ou $is = Fm \times \frac{\lambda}{1}$, $Et = \sqrt{[(tz)^2 +}$

$(Ez)^2]$, $Fl = \sqrt{[(ls)^2 + (Fs)^2]}$: on aura

$$e = q\pi,$$
$$e' = p + q\lambda,$$
$$E = \sqrt{[q^2\pi^2 + (p + q\lambda)^2]},$$
$$f = q'\pi,$$
$$f' = p' + q'\lambda,$$
$$F = \sqrt{[q'^2\pi^2 + (p' + q'\lambda)^2]}.$$

211. On a déja obſervé que $p = \frac{P \times OF}{EF}$, $p' = \frac{P \times OE}{EF}$, $q = \frac{Q \times CF}{EF}$, $q' = \frac{Q \times CE}{EF}$. Subſtituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura

$$e = \frac{\pi Q \times CF}{EF},$$
$$e' = \frac{P \times OF + \lambda Q \times CF}{EF},$$
$$E = \frac{\sqrt{[(\pi Q \times CF)^2 + (P \times OF + \lambda Q \times CF)^2]}}{EF};$$
$$f = \frac{\pi Q \times CE}{EF},$$
$$f' = \frac{P \times OE + \lambda Q \times CE}{EF},$$
$$F = \frac{\sqrt{[(\pi Q \times CE)^2 + (P \times OE + \lambda Q \times CE)^2]}}{EF}.$$

Examinons avec quelque détail les conſéquences qui réſultent de ces formules.

212. La puiſſance Q étant ſuppoſée conſerver toujours la même direction, les preſſions horiſontales e & f des appuis demeurent toujours les mêmes, en quelqu'endroit du cylindre que le poids ſoit appliqué,

parce que toutes les quantités π, Q, CF, CE, EF, qui entrent dans les valeurs de ces pressions sont constantes. De plus, à cause de $e+f=\frac{\pi Q\times(CF+CE)}{EF}$ $=\pi Q$; il s'ensuit que *la somme des deux pressions horisontales des appuis, est égale au produit de la puissance par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec l'horison.*

213. Les pressions verticales demeureroient aussi toujours les mêmes, si le poids répondoit toujours au même point O de l'axe. Mais comme la corde a un certain diamètre, & que les rangs de corde se placent les uns à côté des autres sur le cylindre, il est clair qu'à mesure que le poids monte, le point O change de place. D'où il suit que les valeurs des deux pressions e' & f' changent aussi. Mais leur somme est toujours une quantité constante. Car $e'+f'=$

$$\frac{P\times(OF+OE)+\lambda Q\times(CF+CE)}{EF}=P+\lambda Q.$$

Ainsi *la somme des deux pressions verticales des appuis est égale à la somme du poids & du produit de la puissance par le sinus de l'angle qu'elle fait avec l'horison.*

214. Quant aux pressions résultantes E, F, elles ne sont pas les mêmes en général, comme on le voit par leurs valeurs données ci-dessus.

215. De plus, il est évident que ces mêmes forces E, F, ne seront dirigées dans un même plan, que quand les deux triangles Ezt, Fsl seront semblables, & que par conséquent on aura la proportion, $Ez : zt :: Fs : sl$. Supposons que cette proportion ait lieu

en effet, ou, ce qui revient au même, qu'on ait, $\frac{P \times OF + \lambda Q \times CF}{EF} : \frac{\pi Q \times CF}{EF} :: \frac{P \times OE + \lambda Q \times CE}{EF} : \frac{\pi Q \times CE}{EF}$; nous tirerons de-là l'équation $\pi \times OF \times CE = \pi \times OE \times CF$, ou

$$\pi \times OF \times CE - \pi \times OE \times CF = 0,$$

laquelle donne, ou $\pi = 0$, ou $OF \times CE - OE \times CF = 0$.

Dans le premier cas, c'eſt-à-dire lorſque $\pi = 0$, la direction de la puiſſance eſt verticale; les preſſions horiſontales des appuis s'évanouiſſent; il ne reſte plus que les deux preſſions verticales, qui ſont dans le plan vertical, paſſant par l'axe EF.

Dans le ſecond cas, où π étant une quantité finie, on auroit $OF \times CE - OE \times CF = 0$, ou $(EF - OE) \times CE - OE \times (EF - CE) = 0$, ou $OE = CE$, on voit que la direction de la puiſſance Q n'étant pas verticale, les deux preſſions réſultantes contre les appuis, ne ſont dans un même plan que quand le poids & la puiſſance ſont dans un même plan perpendiculaire à l'axe EF.

Concluons des deux cas qu'*en général les preſſions réſultantes contre les appuis, ne ſont dans un même plan que quand le poids & la puiſſance ont des directions, ou parallèles, ou ſituées dans un même plan vertical, perpendiculaire à l'axe.*

216. Lorſque la direction de la puiſſance Q eſt verticale, & que par conſéquent $\pi = 0$, $\lambda = 1$: on a

$$e = 0,$$

$$e' = \frac{P \times OF + Q \times CF}{EF},$$

$$f = 0,$$

$$f' = F = \frac{P \times OE + Q \times CE}{EF}.$$

Ainſi il n'y a plus de preſſions horiſontales, comme nous l'avons déja remarqué; & *on aura la preſſion verticale d'un appui, en multipliant le poids & la puiſſance, chacun par la partie de l'axe qui lui répond, & ſituée du côté de l'autre appui; ajoutant enſemble les deux produits; & diviſant la ſomme par l'axe.*

217. Suppoſons que la puiſſance Q tire horiſontalement, on aura $\lambda = 0$, $\pi = 1$. Par conſéquent

$$e = \frac{Q \times CF}{EF},$$

$$e' = \frac{P \times OF}{EF},$$

$$E = \frac{\sqrt{[(Q \times CF)^2 + (P \times OF)^2]}}{EF},$$

$$f = \frac{Q \times CE}{EF},$$

$$f' = \frac{P \times OE}{EF},$$

$$F = \frac{\sqrt{[(Q \times CE)^2 + (P \times OE)^2]}}{EF}.$$

Il eſt facile de traduire ces expreſſions en langage ordinaire. Je ne les traduis point, pour éviter la prolixité.

Le Lecteur sera aisément d'autres applications de ces formules.

218. Nous n'avons fait entrer dans les valeurs des pressions des appuis, que le poids P & la puissance Q. Si on y veut faire entrer aussi le poids du cylindre & de la roue, cela sera facile. Car, imaginant ce poids réuni à son centre de gravité, il ne s'agira que de le décomposer en deux forces qui passent par les appuis, & qui s'ajoutent aux forces p, p'; ensuite on employera ces deux sommes, comme on a employé ci-dessus p, p'.

219. Il peut arriver que plusieurs puissances & plusieurs poids agissent à-la-fois sur un tour. Supposons, pour envisager la question encore plus généralement, une machine composée de plusieurs roues & de plusieurs cylindres, qui ayant un axe commun, ont d'ailleurs des raïons quelconques. Qu'aux extrémités des raïons R, R', R'', R''', &c, des roues, agissent les puissances Q, Q', Q'', Q''', &c; & aux extrémités des raïons r, r', r'', r''', &c, des cylindres, les poids P, P', P'', P''', &c. On aura, dans le cas d'équilibre,

$$Q \times R + Q' \times R' + Q'' \times R'' + Q''' \times R''' + \&c$$
$$= P \times r + P' \times r' + P'' \times r'' + P''' \times r''' + \&c.$$

Car décomposant chaque puissance & chaque poids en forces qui soient situées dans deux plans passants par les deux appuis, & perpendiculaires à l'axe, on aura deux sommes de moments de forces qui tendent à faire tourner la machine en sens contraire. Ces deux sommes, en vertu de l'équilibre, étant égalées ensemble,

ble produiſent l'équation générale $Q \times R + Q' \times R' + Q'' \times R'' +$ &c.

A l'égard des preſſions des appuis, elles ſe trouvent en réduiſant toutes les forces qui agiſſent ſur chaque appui, en forces horiſontales & forces verticales. Les forces horiſontales ont une réſultante horiſontale égale à leur ſomme; pareillement, les forces verticales ont une réſultante verticale égale à leur ſomme. La preſſion de l'appui eſt la réſultante de ces deux réſultantes.

220. Les effets du *cric* & des *roues dentées* ſe rapportent à celui du tour.

Le cric ſimple (Fig. 104) eſt compoſé d'une barre *AB* garnie à l'une de ſes faces de dents de fer, & mobile dans une chaſſe *CE*. Les dents de la barre *AB* engrènent avec celles d'une petite roue ou *pignon* *DD* qu'on fait tourner ſur ſon axe, au moyen de la manivelle *NM*. Les dents du pignon ſoulevent la barre, & font par conſéquent monter un poids placé ſur ſa tête *A*. Fig. 104.

En conſidérant l'effort que chaque dent du pignon fait en *D* pour ſoulever la barre, comme un poids à élever, il eſt clair (207) que la puiſſance appliquée à la manivelle, eſt à ce poids, comme le raïon du pignon, eſt au bras *NM* de la manivelle. D'où l'on voit qu'en faiſant le raïon du pignon très-petit par rapport à celui de la manivelle, on peut, avec une force médiocre, élever un poids très-conſidérable.

Quelquefois, pour ſoulever un plus grand poids, avec la même force appliquée à la manivelle, on emploie dans le cric plus d'un pignon. Alors l'effet du cric eſt le même que celui des roues dentées, que nous allons expliquer.

221. Tout le monde connoît la figure des roues dentées. On ſait que les dents ſont des parties ſaillantes par leſquelles des roues engrènent les unes avec les autres, & ſe tranſmettent l'action de la force motrice. Ces roues ſont d'un grand uſage dans les moulins, & en général dans toutes les machines mues par le courant d'un fluide, & dans celles où le principe moteur ne peut pas être appliqué immédiatement à la place même où il doit opérer ſon effet. Ordinairement on aſſemble ſur un même arbre, & dans des plans différens, une grande roue & une petite, autrement nommée *pignon*, dont les dents ou *aîles* engrènent avec les dents d'une autre roue. Dans les grandes machines, on ſubſtitue ſouvent aux pi-
Fig. 105. gnons, des lanternes (Fig. 105) qui ne ſont autre choſe que des cylindres aſſemblés parallèlement entr'eux dans des plateaux M, N; alors les dents de la roue engrènent avec les fuſeaux de la lanterne, comme elles feroient avec les aîles d'un pignon. Le méchaniſme revient abſolument au même dans les deux cas. Contentons-nous donc d'examiner l'engrenage des roues & des pignons.

Fig. 106. 222. Soient trois roues A, B, C (Fig. 106), & leurs pignons correſpondans a, b, c. Le pignon, ou plutôt le cylindre a, ſoutient un poids P; la roue A, qui a le même arbre que lui, engrène avec le pignon b; la roue B, qui a même arbre que le pignon

b, engrène avec le pignon c; la roue C qui a même arbre que ce pignon, eſt tirée à ſa circonférence par la puiſſance Q; & tout le ſyſtême eſt en équilibre. Nommons R, R', R'' les raïons des roues; r, r', r'', ceux des pignons; E l'effort de la roue A contre le pignon b; E' l'effort de la roue B contre le pignon c. En regardant l'effort reçu par chaque pignon, comme un poids qui lui eſt appliqué, il eſt évident (208) qu'on aura ces trois proportions,

$$P : E :: R : r,$$
$$E : E' :: R' : r',$$
$$E' : Q :: R'' : r'';$$

leſquelles étant multipliées par ordre, donnent

$$P : Q :: R \times R' \times R'' : r \times r' \times r''.$$

D'où il ſuit que *le poids* P *eſt à la puiſſance* Q, *comme le produit des raïons des roues*, *eſt au produit des raïons des pignons.*

Il en ſeroit de même, s'il y avoit un plus grand nombre de roues & de pignons.

On voit par-là que ces ſortes de machines peuvent donner un très-grand avantage à la puiſſance ſur le poids, relativement à la force; mais cet avantage eſt acquis aux dépens du temps, lorſque la machine paſſe du repos au mouvement.

223. On a ſouvent beſoin, ſur-tout dans l'Horlogerie, que les nombres des révolutions des roues & des pignons ayent entr'eux un certain rapport. C'eſt ce qu'on obtient, en donnant aux roues & aux pignons les nombres convenables de dents & d'aîles. Entrons dans quelque détail à ce ſujet.

Fig. 107. 224. Soient les roues A, B, C, D (Fig. 107), dont la première engrène avec le pignon b fixé à la ſeconde ; celle-ci engrène avec le pignon c fixé à la troiſième ; ainſi de ſuite. Déſignons par A, B, C, D les nombres des dents des roues, & par b, c, d, e, les nombres des aîles des pignons. De plus, nommons N, N', N'', N''' les nombres de tours que les quatre roues font dans le même temps ; ceux des trois pignons b, c, d, qui ne font chacun qu'un même corps avec chacune des trois roues B, C, D, ſeront repréſentés par N', N'', N''' reſpectivement ; nous déſignerons par N^{IV} le nombre de tours du dernier pignon e. Cela poſé, il eſt clair que le nombre des dents de la roue A, engrenées pendant chaque tour, étant exprimé par A, le nombre de dents qu'elle engrenera, pendant le nombre N de tours, ſera exprimé par $A \times N$. De même, le nombre d'aîles engrenées par le pignon b, avec la roue A, pendant le nombre N' de révolutions, ſera repréſenté par $b \times N'$. Or, pendant le même temps, il s'engrene autant de dents de la roue A que d'aîles du pignon b. Ainſi on a l'équation $A \times N = b \times N'$. On a, par la même raiſon, les équations $B \times N' = c \times N''$, $C \times N'' = d \times N'''$, $D \times N''' = e \times N^{\text{IV}}$. Ces différentes équations donnent les proportions

$$N : N' :: b : A,$$
$$N' : N'' :: c : B,$$
$$N'' : N''' :: d : C,$$
$$N''' : N^{\text{IV}} :: e : D,$$

leſquelles étant multipliées par ordre donnent ;

$$N : N^{IV} :: b \times c \times d \times e : A \times B \times C \times D;$$

C'eſt-à-dire que *le nombre des tours de la première roue* A, *eſt au nombre des tours du dernier pignon* e, *comme le produit des aîles des pignons, eſt au produit des dents des roues.*

225. Cette proportion donne l'équation $\frac{N}{N^{IV}} = \frac{b \times c \times d \times e}{A \times B \times C \times D}$, par laquelle on voit que N & N^{IV} étant donnés, rien ne détermine les nombres d'aîles & de dents que chaque pignon & chaque roue doivent avoir en particulier. Il ſuffit que le rapport du produit de toutes les aîles, au produit de toutes les dents, ſoit le même que celui de N à N^{IV}. Suppoſons, par exemple, que la roue A faiſant un tour, pendant un certain temps, le pignon e en faſſe deux ; c'eſt-à-dire $\frac{N}{N^{IV}} = \frac{1}{2}$. On aura $\frac{1}{2} = \frac{b \times c \times d \times e}{A \times B \times C \times D}$, ou $A \times B \times C \times D = 2 \times b \times c \times d \times e$. Donc, ſi l'on donne arbitrairement 6 aîles au premier pignon, 8 au ſecond, 10 au troiſième, 12 au quatrième, on aura, $A \times B \times C \times D = 2 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 = 11520$, nombre qu'il faudra décompoſer en quatre facteurs qui ſeront les nombres des dents des quatre roues A, B, C, D. On peut prendre, pour ces quatre facteurs, ou les quatre nombres 12, 8, 10, 12, ou les quatre nombres 6, 16, 5, 24, ou &c. L'arrangement des roues & des pignons eſt indifférent. Si on avoit commencé par ſe donner les nombres des dents des roues, on auroit trouvé d'une manière ſemblable les nombres des aîles des pignons.

226. Souvent le nombre que l'on a pour le produit total des dents des roues, ou des aîles des pignons, ne peut pas se décomposer en facteurs qui puissent être les nombres des dents ou des aîles, des roues ou des pignons, en particulier. Alors le probléme n'est pas susceptible d'une solution rigoureuse; mais il faut se contenter d'une solution approchée. Voici la méthode qu'on employe ordinairement pour cela, appliquée à un exemple.

Fig. 108. 227. Je suppose qu'on ait simplement (Fig. 108) les trois roues A, B, C, & les trois pignons b, c, d; que la première roue A fasse un tour en un an, & le dernier pignon d, un tour en 12 heures. On aura d'abord (224) l'équation générale,

$$\frac{N}{N'''} = \frac{b \times c \times d}{A \times B \times C}.$$

L'année commune étant de 365 jours 5 heures 49 minutes, ou de $525949'$, & 12 heures valant $720'$; considérant d'un autre côté que les nombres N & N''' de tours, sont entr'eux en raison réciproque des temps employés à les faire: il est clair qu'on aura $\frac{N}{N'''} = \frac{720}{525949}$. Donc, $A \times B \times C \times 720 = b \times c \times d \times 525949$, ou $A \times B \times C = \frac{b \times c \times d \times 525949}{720}$.

Comme le nombre des aîles de chaque pignon, & celui des dents de chaque roue, doivent être des nombres entiers, il faut que le produit $b \times c \times d$ soit un nombre entier, & que la fraction $\frac{b \times c \times d \times 525949}{720}$ en soit aussi un, ou que son numérateur soit divisible par son dénominateur. Il faut de plus que le quotient provenant de cette division, soit décomposable en trois facteurs qui puissent être les nombres des dents des trois roues. En faisant $b \times c \times d = 720$, ce nombre est décomposable en trois facteurs 8, 9, 10, qu'on peut prendre pour b, c, d; mais alors on auroit $A \times B \times C = 525949$, nombre qui n'est pas décomposable en trois facteurs qu'on puisse prendre pour A, B, C. La même difficulté subsiste, en prenant pour le produit $b \times c \times d$ un multiple quelconque de 720. Le problême n'est donc pas soluble à la rigueur; mais on trouvera ainsi une solution approchée.

228. Le numérateur de la fraction $\frac{b \times c \times d \times 525949}{720}$ étant très-grand par rapport à son dénominateur, cette fraction ne changera pas sensiblement de valeur, si sans toucher à son dénominateur, on augmente ou diminue son numérateur d'un petit nombre d'unités. Prenons donc, à sa place, la fraction $\frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720}$, m étant un nombre entier très-petit, positif ou négatif: nous aurons sensiblement,

$$A \times B \times C = \frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720},$$

$$\text{ou } A \times B \times C = b \times c \times d \times 730 + \frac{b \times c \times d \times 349 + m}{720}.$$

Or la première partie est un nombre entier; la seconde $\frac{b \times c \times d \times 349 + m}{720}$ en sera donc aussi un, que je nomme n. On aura ainsi,

$$\frac{b \times c \times d \times 349 + m}{720} = n,$$

$$\text{ou } b \times c \times d = 2n + \frac{22n - m}{349};$$

dont la première partie étant un nombre entier, la ſeconde en ſera auſſi un, que je nomme p. Par-là on aura

$$\frac{22n - m}{349} = p,$$

$$\text{ou } n = 15p + \frac{19p + m}{22}, \text{ nombre entier.}$$

Soit $\frac{19p + m}{22} = q$, nombre entier. On aura

$$p = q + \frac{3q - m}{19}, \text{ nombre entier.}$$

Soit $\frac{3q - m}{19} = r$, nombre entier ; on aura

$$q = 6r + \frac{r + m}{3}, \text{ nombre entier.}$$

Soit $\frac{r + m}{3} = s$, nombre entier ; on aura

$$r = 3s + m.$$

Maintenant il faut rétrograder, & par le moyen de cette dernière équation, déterminer les valeurs des lettres r, q, p, n. Or comme l'équation $r = 3s + m$ renferme trois indéterminées, on peut en prendre deux à volonté, en obſervant ſeulement qu'elles ſoient des nombres entiers, & que m ſoit un petit nombre. Toutes les ſuppoſitions qui donneront pour $b \times c \times d$ un nombre décompoſable en trois facteurs qui puiſſent être les nombres des aîles des pignons, & pour $A \times B \times C$ un nombre décompoſable en trois facteurs qui puiſſent être les nombres des dents des roues ; toutes ces ſuppoſitions, dis-je, ſeront admiſſibles.

Soient, par exemple, $m = -1$, $s = 0$. On aura $r = 1$, $q = 6$, $p = 7$, $n = 111$. Donc $b \times c \times d = 229$, nombre qui n'eſt pas décompoſable en facteurs qu'on puiſſe prendre pour b, c, d. La ſuppoſition propoſée n'eſt donc pas convenable. Pluſieurs autres, comme celles de $m = -2$, $s = 0$, $m = 1$, $s = 0$, &c, ne le ſont pas davantage. Mais celle de $m = -4$, $s = -1$, peut être employée. Car alors on a $r = 1$, $q = 5$, $p = 6$, $n = 95$. Donc $b \times c \times d = 196$, nombre qu'on peut décompoſer en ces trois facteurs, 4, 7, 7, qui peuvent être les nombres des aîles des trois pignons. Mettons pour m, & $b \times c \times d$, leurs valeurs, dans l'équation $A \times B \times C = \frac{b \times c \times d \times 525949 + m}{720}$; elle deviendra $A \times B \times C = 143175$, nombre décompoſable en ces trois facteurs, 25, 69, 83, qui peuvent être les nombres des dents des trois roues. Ainſi, en donnant 4 aîles à un pignon, 7 aîles à un autre, 7 aîles au troiſième ; 25 dents à une roue, 69 à une autre, 83 à la troiſième ; le problême ſera réſolu, & il s'en faudra très-peu de choſe que le dernier pignon faiſant un tour en 12 heures, la première roue ne faſſe un tour en un an.

Si on veut connoître de combien il s'en faudra que la première roue ne faſſe un tour en un an, cela eſt aiſé ; car en nommant x le temps de la révolution de cette roue, il eſt clair qu'on a $\frac{720'}{x} =$

$\frac{4\times7\times7}{25\times69\times83}$, ou $x = 525948' \frac{48}{49} = 365^{j}\ 5^{h}$
$48' \frac{48}{49}$.

On imitera les mêmes procédés dans les autres cas de pareille nature.

229. Il y a des machines qui se meuvent par un méchanisme semblable à celui du tour, mais dans lesquelles l'action de la force motrice est variable. Alors, la résistance à vaincre étant supposée constante, on applique la force motrice à des bras de levier variables, & qui deviennent plus ou moins longs, selon que cette force diminue ou augmente. Tel est le méchanisme des horloges à *ressort*, ou des *montres* ordinaires. Le principe moteur de ces machines est une lame élastique d'acier, pliée spiralement sur elle-même, & enfermée
Fig. 109. dans un *barillet AB* (Fig. 109) qui est traversé par un arbre *OV*, autour duquel il a la liberté de tourner. Cette lame est attachée fixément par l'un de ses bouts à l'arbre *OV*, & par l'autre à la surface concave du barillet. On la plie, & par-là on tend son ressort, en faisant tourner le barillet dans un certain sens, tandis qu'une roue d'arrêt empêche l'arbre *OV* de tourner. Lorsqu'ensuite après avoir mis le ressort dans sa plus grande tension, on lui permet de se déployer, il fait tourner le barillet dans le sens contraire; une chaîne *CDE*, attachée par un bout au barillet, & par l'autre bout à une fusée *MKIL*, tire cette même fusée, l'oblige de tourner sur elle-même, & communique ainsi le mouvement à une roue portée par l'arbre

FG, laquelle le tranſmet à tout le rouage dont la montre eſt compoſée. A meſure que le reſſort ſe déploye, & que par conſéquent ſa force élaſtique diminue, la chaîne eſt appliquée à de plus grands raïons de la fuſée, & agit par ce moyen à l'extrémité de plus grands bras de levier ; ce qui produit une compenſation, & fait que le moment de la force motrice, par rapport à l'axe *FG* de la fuſée, eſt toujours le même, du moins ſenſiblement.

230. La Figure de la fuſée eſt à peu près conique. Si l'on connoiſſoit exactement la loi ſuivant laquelle la force du reſſort varie, il ſeroit facile de déterminer la figure préciſe que la fuſée devroit avoir, pour que le moment de la force motrice, par rapport à l'axe *FG*, fût conſtamment le même, & que par conſéquent le mouvement de rotation de la fuſée demeurât toujours uniforme. Suppoſons, par exemple, que les différentes forces du reſſort, à meſure qu'il ſe déploye, ſoient repréſentées par les ordonnées *FS*, *TV*, *GQ*, &c (Fig. 110) du triangle rectangle *RFS* ; Fig. 110.
que *FG* ſoit la hauteur donnée de la fuſée ; *FO*, ſa première ordonnée qui eſt auſſi connue ; *TX*, une ordonnée indéterminée de la courbe *OXP* dont on cherche la nature. Nommons

FO. . . . . a,
FG. . . . . b,
FT. . . . . x,
TX. . . . . y,
FR. . . . . m,
la force du reſſort en *F*. . . . . P.

Il eſt évident que la force du reſſort en T ſera repréſentée par $P \times \frac{RT}{RF}$, c'eſt-à dire, par $\frac{P(m-x)}{m}$, & que ſon moment, relativement à l'axe FG, ſera exprimé par $\frac{P(m-x)}{m} \times y$. Or, puiſque ce moment doit toujours être conſtant, il ſera le même que celui qui répond au point F. On aura donc $\frac{P(m-x)y}{m} = Pa$, ou bien $my - xy = ma$, qui eſt l'équation d'une hyperbole équilatère entre ſes aſymptotes.

En faiſant $x = b$, on a y ou $GP = \frac{ma}{m-b}$, expreſſion de la dernière ordonnée de la fuſée.

Quant à la hauteur m du triangle RFS, elle ſe détermine par la connoiſſance des forces du reſſort en deux points différens. Ainſi, ayant nommé P la force du reſſort en F, ſi l'on nomme P' la force du reſſort en G; on aura $P : P' :: m : m - b$. D'où l'on tire $m = \frac{bP}{P-P'}$. Subſtituons cette valeur de m dans l'équation $my - xy = ma$, nous aurons

$$\frac{bPy}{P-P'} - xy = \frac{bPa}{P-P'}.$$

On détermineroit d'une manière analogue la figure de la fuſée, dans toute autre hypothèſe ſur la variation des forces du reſſort. Le problême n'a jamais d'autres difficultés que celles qui peuvent tenir à l'analyſe.

231. M. Camus a imité le méchaniſme des fuſées

de montre dans une machine qu'il propoſe * pour tirer de l'eau d'un puits profond, ou des pierres du fond des carrières & des mines. Elle eſt composée de deux bobines coniques & égales *ACBH*, *KEBH* (Fig. 111), qui ont le même axe horiſontal *FD*, & qui ſont adoſſées par leurs plus grandes baſes. Deux cordes qui ſe roulent en ſens contraires ſur ces bobines, ſoutiennent deux ſeaux, dont l'un monte pendant que l'autre deſcend. Chaque ſeau, lorſqu'il eſt prêt à ſe vuider, ou qu'il vient immédiatement d'être vuidé, eſt appliqué au plus grand raïon de ſa bobine; l'autre ſeau qui eſt alors au fond du puits, & qui eſt vuide ou plein, eſt appliqué au plus petit raïon de ſa bobine. La machine eſt mue par un homme qui marche dans la roue *M*, & qui changeant alternativement la direction de ſon mouvement, ſe trouve toujours placé du côté du ſeau qui deſcend. Fig. 111.

232. On voit que les poids des cordes étant néceſſairement aſſez conſidérables, doivent entrer en ligne de compte dans le calcul de la machine; & que la figure rigoureuſe de chaque bobine devroit être telle que dans une poſition indéterminée des deux ſeaux, il y eût équilibre, ſans que le poids de l'homme ceſsât d'agir exactement ſuivant la même ligne verticale. Il s'en faut très-peu de choſe que cette condition ne ſoit remplie, lorſque les deux bobines ont la forme de cones tronqués. Ainſi cette figure, qui eſt d'ail-

* Mém. de l'Acad. année 1739, Cours de Mathématiques, tom. IV, pag. 163.

leurs la plus commode à exécuter, peut être employée dans la pratique, sans craindre d'erreur sensible. Nous allons chercher, en conséquence, les raïons extrêmes que les bobines doivent avoir, pour que le moment du poids de l'homme soit le même, quand un seau est prêt à se vuider, l'autre étant au fond du puits, & prêt à s'emplir; & quand le premier seau venant d'être vuidé, l'homme a changé de place pour faire monter le second seau qui s'est empli pendant que le premier se vuidoit. L'équilibre établi pour ces deux cas extrêmes, aura aussi lieu, du moins sensiblement, dans les cas intermédiaires.

233. Nommons en général,

le poids de chaque seau vuide . . . . S,
le poids de l'eau que chaque seau peut contenir . . E,
le poids de la corde qui soutient un seau, quand elle est entiérement développée . . . . C;
le plus grand raïon AB de chaque bobine . . . . R,
le plus petit raïon DC ou FE . . . . r,
le poids de l'homme . . . . H,
son bras de levier, c'est-à-dire, la distance de sa direction à la verticale zu . . . . a.

Cela posé, imaginons que l'un Q des seaux soit plein & au haut du puits, l'autre P étant encore vuide & au fond du puits; il est clair qu'alors l'homme est du côté du seau P, & qu'on a l'équation,

$$(S+E)\times R=(S+C)\times r+H\times a.$$

Que le seau Q étant vuidé, l'homme change de place pour faire monter le ſeau P qui s'eſt rempli : on aura cette équation,

$$S \times R + H \times a = (S + C + E) \times r.$$

Dégageant les deux inconnues R & r, on trouvera

$$R = \frac{2HaS + HaE + 2HaC}{2E.S + E^2 + E.C},$$

$$r = \frac{2Ha.S + HaE}{2E.S + E^2 + E.C}.$$

234. Il ne ſuffit pas de connoître les raïons R & r pour être en état de conſtruire les deux cones tronqués $ACBH$, $KEBH$; il faut de plus connoître ou leur hauteur, ou le côté BC ou BE. Or ſi l'on nomme L la longueur entière de chaque corde, D ſon diamètre, N le nombre de tours de corde qui couvrent chaque bobine, $\frac{\pi}{1}$ le rapport de la circonférence au diamètre ; & ſi l'on conſidére que les longueurs de corde, néceſſaires pour faire les différens tours, croiſſent en progreſſion arithmétique, depuis la première longueur qui eſt $2r \times \pi$, juſqu'à la dernière qui eſt $2R \times \pi$; il eſt clair qu'on aura $L = N \times (R + r) \times \pi$, ou $N = \frac{L}{(R + r)\pi}$. Mais d'un autre côté, on a évidemment BC ou $BE = N \times D$. On aura donc

$$BC \text{ ou } BE = \frac{L \times D}{(R + r)\pi}.$$

Par le moyen de R, r, BC, on connoîtra la hauteur OD ; car il eſt clair qu'on a

$$OD = \sqrt{\left[\left(\frac{L \times D}{(R+r)\pi}\right)^2 - (R-r)^2\right]}.$$

Ainſi on eſt en état de conſtruire chaque bobine.

235. Il nous reſte à obſerver, au ſujet de l'homme qui fait tourner la roue M, que pour pouvoir marcher commodément & ſans trop ſe fatiguer, il doit s'éloigner médiocrement du raïon vertical zu. L'expérience fait voir que ſi par le point où la direction du poids de cet homme rencontre la circonférence on mène la tangente fk, & qu'enſuite on tire l'horiſontale hn ; la rampe hf ne ſera pas trop roide, pourvû que ſa hauteur fn n'excéde pas la ſixiéme partie de ſa longueur hf. Suppoſons donc $fn = \frac{fh}{6}$; menons le raïon zf, & l'hriſontale zg. Les deux triangles fnh, zgf, qui ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, & qui ſont par conſéquent ſemblables, donnent $fn : fh :: zg : zf$. Donc, à cauſe de $fn = \frac{fh}{6}$, on aura auſſi $zg = \frac{zf}{6}$. Ainſi le bras de levier zg du poids de l'homme, eſt la ſixième partie du raïon de la roue. De plus, nous obſerverons que la hauteur d'un homme pouvant être d'environ $5\frac{1}{2}$ pieds, on doit donner au moins 6 pieds de raïon à la roue, pour que l'homme, en marchant, ne ſe heurte pas la tête contre l'arbre de la roue, qui peut avoir environ 1 pied de diamètre.

Je laiſſe au Lecteur le ſoin d'appliquer cette théorie générale à des exemples particuliers ; & je me contente d'avertir que le poids d'un homme ordinaire eſt

eſt d'environ 150 livres ; qu'un pied cube d'eau douce pèſe 70 livres à très-peu près ; qu'une corde de 1 pouce de diamètre, pèſe environ 2 livres ſur 6 pieds de longueur.

236. Dans le calcul de cette machine, l'on ſuppoſe que le ſeau qui eſt au fond du puits ou dans l'eau, agit de tout ſon poids ſur la bobine à laquelle ſa corde eſt attachée, & que l'eau contenue dans ce même ſeau agit auſſi alors par ſon poids ſur la corde. Or le poids du ſeau, n'agit réellement que par ſon excès ſur le poids du volume d'eau dont il occupe la place ; & l'eau contenue dans ce ſeau ne tire point du tout ſur la corde, tant que le ſeau eſt plongé dans l'eau du puits. Mais comme le ſeau ne demeure que très-peu de temps dans l'eau, l'inexactitude de ces deux ſuppoſitions altère peu les réſultats précédens ; & d'ailleurs on peut y obvier, en imaginant que l'homme, placé du côté de l'autre ſeau, ſe rapproche un peu de la verticale zu, pendant que le ſeau dont il s'agit, ſort de l'eau.

237. Cette même machine a l'inconvénient d'occuper une place aſſez conſidérable. Il eſt clair que pour pouvoir l'employer, le diamètre du puits doit être plus grand que le double de la longueur d'une bobine, plus le diamètre d'un ſeau garni de ſon armature. Or il arrive très-ſouvent que cela n'a pas lieu. Alors, au lieu de deux bobines coniques, on peut employer deux bobines cylindriques (Fig. 112) Fig. 112.
ſur leſquelles les cordes font pluſieurs tours concentriques les uns ſur les autres. Connoiſſant le raïon de

chaque bobine à nu, & le raïon qu'on veut qu'elle ait quand sa corde est entièrement enveloppée ; on déterminera, par des procédés analogues à ceux de l'article 234, la longueur de la bobine ; ou bien connoissant toujours le raïon à nu de chaque bobine, & la longueur qu'on peut donner à l'une & à l'autre, on trouvera les raïons qu'elles ont lorsque les cordes sont entièrement roulées. Il est évident que ces bobines cylindriques occupent moins de largeur que les bobines coniques, puisqu'on est maître de ne donner aux premières que la longueur simplement requise pour que les seaux ne se rencontrent point, & ne se gênent pas dans leurs mouvemens.

SECTION V.

Du Plan incliné.

238. On appelle en général *plan incliné*, tout plan qui fait un angle avec l'horison. Cet angle peut être infiniment petit, & alors le plan incliné se confond avec l'horison, ou bien être droit, & alors le plan devient vertical. Entre ces deux cas extrêmes sont comprises toutes les autres espèces d'inclinaisons.

239. Le plan incliné sert dans la Méchanique à soutenir une partie de la pesanteur des corps, ou à s'aider d'une partie de cette force, soit pour diriger les mouvemens vers un certain but, soit pour les modérer à volonté. Voici la théorie de l'équilibre

de cette machine. Commençons par les cas les plus ſimples.

240. Qu'un corps *P* (Fig. 113), tenu en équilibre ſur le plan fixe *MN*, au moyen d'une force *Q* dirigée ſuivant *QP*, s'appuye par un ſeul point *A* ſur ce plan. Il eſt clair, 1°. que la direction de la force *Q* paſſera néceſſairement par le point *A*, afin que cette force puiſſe être détruite. 2°. Qu'elle ſera perpendiculaire au plan *MN*; autrement la force ſe décompoſeroit en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, qui ſeroit détruite, l'autre parallèle au plan, qui imprimeroit du mouvement au corps. Ces deux conditions ſont eſſentielles à-la-fois pour l'équilibre. Fig. 113.

241. La force Q peut être la réſultante de pluſieurs autres forces particulières appliquées au corps. Ainſi, concluons en général que ſi un corps ſoumis à l'action de tant de forces qu'on voudra, demeure en équilibre ſur un plan qu'il ne touche que par un ſeul point, la réſultante de toutes ces forces paſſera néceſſairement par le point d'appui, & y ſera perpendiculaire au plan.

242. Il ſuit de-là que ſi un corps ſoumis à la ſeule action de ſa peſanteur, demeure en équilibre ſur un plan, en s'y appuyant par un ſeul point, ce plan eſt néceſſairement horiſontal, & que de plus le point d'appui eſt placé dans la verticale abaiſſée par le centre de gravité du corps.

243. Que le corps *P* (Fig. 114), ſoumis à l'action de la force Q, ſimple ou réſultante de pluſieurs Fig. 114.

autres forces, demeure en équilibre ſur le plan *MN*, en s'y appuyant par les deux points *O* & *K*. Il n'eſt pas néceſſaire que la direction de la force *Q* paſſe par l'un des appuis; il ſuffit que cette force puiſſe ſe décompoſer en deux autres qui paſſent par les appuis *O* & *K*, & qui y ſoient perpendiculaires au plan. Or en général, une force & ſes deux compoſantes ſont dans un même plan. Donc la direction de la force *Q* rencontre néceſſairement la droite *OK*; & de plus elle eſt perpendiculaire au plan *MN*, puiſque les deux forces dans leſquelles cette force ſe décompoſe, ſont perpendiculaires à ce même plan.

On voit donc qu'un corps appuyé par deux points ſur un plan, ne peut demeurer immobile, à moins que la force qui pouſſe ce corps, ne ſoit dirigée perpendiculairement au plan, & qu'elle ne rencontre la droite qui joint les deux points d'appuis, laiſſant l'un de ces points à gauche, l'autre à droite.

244. Il en eſt de même de l'équilibre d'un corps appuyé par plus de deux points ſur un plan incliné. Ce corps ne demeurera immobile que quand la force à laquelle il ſera ſoumis, ſera perpendiculaire au plan, & qu'elle pourra ſe décompoſer en forces qui paſſent par les points d'appuis, & qui y ſoient perpendiculaires au plan. Les forces compoſantes ſeront placées en partie d'un côté, en partie de l'autre, par rapport à la force dont elles proviennent.

On voit par-là que ſi un corps ſe ſoutient par ſa peſanteur ſur des appuis placés hors de la verticale abaiſſée de ſon centre de gravité, ces appuis ſont néceſſairement placés de différens côtés par rapport à cette ligne, & détruiſent ainſi les forces dans leſquelles la peſanteur du corps ſe décompoſe.

245. Soit un corps *P* (Fig. 115), peſant & retenu en équilibre ſur un plan incliné *MN*, par le moyen de la puiſſance *Q*. Ce corps touche le plan au point *A*. L'équilibre demande que la réſultante du poids & de la puiſſance ſoit perpendiculaire au point *A* du plan incliné. D'où il ſuit que les directions *BP*, *BQ* du poids & de la puiſſance ſe rencontrent néceſſairement au point *B* par où paſſe la perpendiculaire *AB* élevée ſur le plan incliné ; enſorte que ces deux directions ſont avec la droite *AB* dans un même plan *PBQ* qui eſt tout-à-la-fois vertical ou perpendiculaire au plan horiſontal *MK*, & perpendiculaire au plan incliné *MN*. Ainſi les droites *GI*, *HG* où le plan *PBQ* rencontre les plans *MK*, *MN*, ſont perpendiculaires au même point *G* de l'horiſontale *MO* ; & l'angle *HGI* meſure l'inclinaiſon du plan *MN* ſur le plan *MK*. Du point *H* ſoit abaiſſée la verticale *HI* qui rencontre *GI* au point *I* ; on formera un triangle rectangle *HIG*, dont l'hypothénuſe *HG*, & les côtés *HI*, *IG* s'appellent reſpectivement la *longueur*, la *hauteur* & la *baſe* du plan incliné. Toutes les choſes que l'on a beſoin de conſidérer pour l'équilibre, dans le cas préſent, ſe trouvent dans le plan de ce triangle ; nous pouvons donc le prendre ſeul pour repréſenter ce qui eſt relatif au plan incliné, en ſupprimant les parties ſuperflues de la Figure. Fig. 115.

Fig. 116. 246. Cela posé, sur la direction BA (Fig. 116) de la charge ou pression du plan incliné HG, je prens la partie arbitraire BD pour représenter cette pression ; & j'achève le parallèlogramme $BCDE$, dont les côtés BC, BE sont pris sur les directions du poids & de la puissance. En nommant P, Q, A, le poids, la puissance, la pression du plan incliné qui est égale à la résultante des deux forces P & Q, on aura (27),

$$P:Q:A::BC:BE \text{ ou } CD:BD.$$

247. Par le sommet H du plan incliné, soit menée la droite VHS perpendiculaire à la direction de la puissance Q. Il est évident que les deux triangles BCD, GVH ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, & sont par conséquent semblables ; d'où il suit qu'on a $BC:CD:BD::GV:VH:GH$; donc, à cause de $P:Q:A::BC:CD:BD$, on aura

$$P:Q:A::GV:VH:GH;$$

ce qui est une manière assez commode d'exprimer les rapports des trois forces P, Q, A.

248. Exprimons encore autrement ces rapports, en y faisant entrer des sinus ou cosinus d'angles faciles à déterminer. Pour cela, je considére d'abord qu'on a $GV:VH:GH::\text{sin.}\,GHV:\text{sin.}\,VGH:\text{sin.}\,GVH$. Or, en prolongeant la base GI du plan incliné, jusqu'à ce qu'elle rencontre en X la direction de la puissance Q, & prolongeant de même, lorsqu'il est nécessaire, la longueur GH, & la hauteur IH, jusqu'à la direction de la même puissance, il est clair qu'à cause des deux triangles rectangles HSZ, HST, on a sin. GHV

ou ſin. SHZ = coſ. GZB, ſin. GVH ou ſin. SVX = coſ. IXQ. On aura donc $GV : VH : GH ::$ coſ. GZB : ſin. VGH ou ſin. IGH : coſ. IXQ ; & par conſéquent,

$P : Q : A ::$ coſ. GZB : ſin. IGH : coſ. IXQ ;

c'eſt-à-dire que *le poids, la puiſſance, & la charge du plan incliné, ſont entr'eux, comme le coſinus de l'angle que la direction de la puiſſance fait avec la longueur du plan incliné, le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan, & le coſinus de l'angle que la direction de la puiſſance fait avec la baſe du plan incliné.*

Analyſons en détail les principaux cas qui peuvent arriver.

249. Puiſqu'on a $P : Q ::$ coſ. GZB : ſin. IGH ou coſ. THZ, il s'enſuit que ſi les deux angles GZB, THZ ſont égaux, on aura auſſi $P = Q$. Or cette condition peut être remplie de deux manières, ou en donnant à la puiſſance Q une direction telle que le triangle THZ ſoit iſoſcèle, ou en employant une puiſſance Q' dont la direction ſoit verticale. Dans l'un & l'autre cas, il faut, pour contrebalancer le poids P, une force qui lui ſoit égale. Mais la charge du plan incliné n'eſt pas la même dans les deux cas. Lorſque le triangle THZ eſt iſoſcèle, on a $P : A ::$ coſ. GZB ou coſ. HTZ : coſ. IXQ ; ce qui eſt un rapport fini. Mais ſi la direction de la puiſſance eſt verticale, on a $P : A ::$ coſ. GHI ou ſin. IGH : coſ. 90° ou 0 : d'où il ſuit que dans ce cas la charge du plan incliné s'évanouit. Il eſt évident que cela doit être, puiſqu'alors la puiſſance ſoutient tout le poids.

250. Suppoſons que la direction de la puiſſance

Fig. 117. ſoit parallèle à la baſe du plan incliné (Fig. 117). L'angle que cette direction fait avec la longueur du plan incliné, eſt égal à l'angle HGI, & l'angle qu'elle fait avec la hauteur, eſt droit. On a donc alors $P:Q:A::$ coſ. HGI ou ſin. GHI : ſin. IGH : ſin. tot.

251. La même hypothèſe ſubſiſtant, ſi l'on veut exprimer le rapport des forces P, Q, A, par le moyen des côtés du triangle rectangle GIH, on conſidérera que ſin. GHI : ſin. IGH : ſin. tot. $:: GI:HI:HG$, & que par conſéquent

$$P:Q:A::GI:HI:HG.$$

Ainſi *la puiſſance étant parallèle à la baſe du plan incliné, elle eſt au poids, comme la hauteur du plan incliné, eſt à ſa baſe.*

Fig. 118. 252. Lorſque la direction de la puiſſance Q (Fig. 118) eſt parallèle à la longueur du plan incliné, l'angle que cette direction fait avec la longueur du plan incliné, eſt nul, ſon coſinus eſt le ſinus total; & l'angle que la même direction fait avec la baſe du plan incliné, eſt égal à l'angle HGI. On a donc, $P:Q:A::$ ſin. tot. : ſin. HGI : coſ. HGI ou ſin. GHI.

253. Si dans ce même cas, on veut exprimer les rapports des forces P, Q, A, par le moyen des côtés du triangle rectangle HIG, il eſt clair, qu'à cauſe de ſin. tot. : ſin. HGI : ſin. $GHI :: HG:HI:IG$, on aura,

$$P:Q:A::HG:HI:IG.$$

D'où l'on voit que *la puiſſance étant parallèle à la longueur du plan incliné, elle eſt au poids, comme la hauteur du plan incliné, eſt à ſa longueur.*

254. Le poids étant repréſenté en général (248) par le coſinus de l'angle que la direction de la puiſſance fait avec la longueur du plan incliné, tandis que la puiſſance eſt conſtamment repréſentée par le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du plan, il eſt clair que pour une même inclinaiſon, le rapport du poids à la puiſſance eſt le plus grand qu'il eſt poſſible, lorſque le coſinus dont on vient de parler, eſt le plus grand qu'il eſt poſſible. Or ce coſinus devient le plus grand qu'il eſt poſſible, ou le ſinus total, lorſque la direction de la puiſſance eſt parallèle à la longueur du plan incliné. Ainſi, quand on ſe propoſe de faire équilibre au plus grand poids poſſible avec une puiſſance donnée, il faut diſpoſer cette puiſſance parallèlement à la longueur du plan incliné ſur lequel le poids eſt appuyé; mais quand on fera paſſer la machine du repos au mouvement, cette diſpoſition fera perdre en temps ce qu'on gagne en force; car, tandis que la puiſſance parcourt la longueur du plan incliné, le poids ne s'éleve verticalement que d'une quantité égale à la hauteur de ce plan.

255. Tout ce qu'on vient de dire pour l'équilibre d'une ſeule puiſſance avec un poids poſé ſur un plan incliné, s'applique facilement au cas où il y auroit un nombre quelconque de puiſſances agiſſantes ſur le corps. Car, pour qu'il y ait équilibre, ces puiſſances doivent compoſer avec le poids, une réſultante perpendiculaire au plan incliné, & paſſant par le point d'appui (241); elles ſont donc réductibles à une ſeule force à laquelle on appliquera ce qu'on a dit de la force Q.

256. Considérons maintenant l'équilibre d'un corps soutenu entre plusieurs plans inclinés. Soit un corps
Fig. 119. *P* (Fig. 119), soumis à la seule action de sa pesanteur, & en équilibre entre les deux plans inclinés *MN*, *MK*, qui se rencontrent suivant la droite *MO*. La pesanteur du corps, dirigée suivant la verticale *PD*, qui passe par son centre de gravité, doit nécessairement se décomposer en deux forces qui passent par les points *A* & *B* d'appuis du corps, & & qui y soient perpendiculaires chacune à chacun des deux plans inclinés *MN*, *MK*. Ces trois forces concourent donc en un même point, & sont placées dans un même plan qui est tout-à-la-fois vertical, & perpendiculaire à chacun des deux plans inclinés, puisqu'il contient la verticale *PD*, & les deux perpendiculaires *PA*, *PB* aux deux plans inclinés. D'où il suit que la droite *MO* est nécessairement horisontale ; car elle est la section commune de deux plans *MN*, *MK* auxquels le plan vertical *APB* est perpendiculaire, & qui lui sont aussi réciproquement perpendiculaires. On voit donc que le poids *P*, animé par sa seule pesanteur, ne peut pas demeurer en équilibre entre deux plans inclinés, à moins que ces deux plans ne se coupent suivant une ligne horisontale, & que la pesanteur ne se décompose en forces qui soient perpendiculaires aux points d'appuis.

257. Il est évident que les deux plans inclinés peuvent être représentés par les droites *HG*, *FG*
Fig. 120. (Fig. 120), menées dans ces plans, perpendiculairement au même point *G* de leur section commune.

Abaissons les verticales HI, FE qui rencontrent l'horisontale IE aux points I, E. Les trois lignes HG, HI, IG seront la longueur, la hauteur, & la base du premier plan incliné; & les trois lignes FG, FE, GE seront la longueur, la hauteur, & la base du second. Par le point H, menons l'horisontale HZ qui rencontre FG en Z. Cela posé, le poids du corps, & les deux pressions qui en résultent perpendiculairement aux deux plans inclinés aux points A & B, étant perpendiculaires aux trois côtés du triangle HZG; si l'on nomme respectivement P, A, B, ces trois forces, on aura (29),

$$P : A : B :: HZ : HG : ZG.$$

258. A cause de $HZ : HG : ZG ::$ sin. HGF : sin. HZG ou sin. FGE : sin. ZHG ou sin. HGI, on aura aussi,

$$P : A : B :: \text{sin. } HGF : \text{sin. } FGE : \text{sin. } HGI.$$

D'où l'on voit que *le poids est représenté par le sinus de l'angle que font entr'eux les deux plans inclinés, & que les pressions de ces plans sont réciproquement proportionnelles aux sinus des angles qu'ils forment avec l'horison.*

259. Lorsque l'angle HGF est droit, la pression contre l'un des plans, est au poids, comme le sinus de l'angle d'inclinaison de l'autre plan, est au sinus total, ou comme la hauteur du même plan, est à sa longueur. Cela doit être en effet (252, 253); car il est évident qu'alors la pression contre le premier plan incliné, fait, par rapport au second, l'office

d'une puiſſance qui retiendroit le corps ſur celui-ci, en agiſſant parallèlement à ſa longueur.

Fig. 121. 260. Que l'un *GF* des deux plans (Fig. 121) ſoit horiſontal ; il ſupportera tout le poids du corps ; le point d'appui *B* du corps ſur ce plan ſera placé dans la verticale abaiſſée de ſon centre de gravité ; & la preſſion de l'autre plan *HG* s'évanouira. Tout cela eſt évident ; car alors le poids *P* & la preſſion du plan *GF* ſont exprimés par les ſinus égaux des angles *HGF*, *HGI*, qui ſont ſupplément l'un de l'autre, tandis que la preſſion du plan *HG* eſt exprimée par le ſinus de l'angle que le plan *GF* fait avec l'horiſon, qui eſt égal à zéro.

Fig. 122. 261. Que le plan *GF* (Fig. 122) ſoit vertical, on aura $P : A : B ::$ ſin. tot. : ſin. GHI : ſin. $IGH ::$ $HG : GI : HI$. La preſſion contre le plan *FG* fait, par rapport au plan *HG*, l'office d'une puiſſance qui retiendroit le corps ſur ce plan, en agiſſant parallèlement à ſa baſe *GI*.

On déterminera de même les rapports particuliers du poids & des preſſions des plans inclinés, dans les autres hypothèſes particulières.

262. Si un corps ſoutenu en équilibre entre deux plans, au lieu d'être ſimplement ſoumis à l'action de ſa peſanteur, étoit pouſſé par des forces qui, combinées avec la peſanteur, produiſiſſent une réſultante dont la direction ne fût pas verticale, on appliqueroit à ce cas la théorie générale de l'article 256, en y prenant la direction de la réſultante propoſée, pour la verticale, & la perpendiculaire à cette direction, pour l'horiſontale.

263. Lorſqu'un corps s'appuie à-la-fois ſur plus de deux plans inclinés, les interſections de ces plans ne ſont plus des lignes déterminées, elles peuvent avoir des poſitions différentes par rapport à l'horiſon. Mais, pour l'équilibre, il faut que la peſanteur du corps, ou en général la force qui le pouſſe, ſe décompoſe en forces qui ſoient perpendiculaires aux plans inclinés, & qui paſſent par les points d'appuis du corps. Il y a donc toujours alors dans la direction de cette force un point duquel on peut abaiſſer des perpendiculaires aux plans, aux endroits où le corps s'appuie. Ce point doit être regardé comme celui où concourent les directions de pluſieurs forces en équilibre. Ainſi, connoiſſant la quantité & la direction de la force appliquée au corps, & les poſitions des plans inclinés, on pourra trouver (34) les preſſions de tous les plans inclinés.

264. Les mêmes principes ſervent à déterminer l'équilibre de deux poids *P* & *Q* (Fig. 123), attachés aux extrémités d'une corde *PHQ*, & appuyés ſur deux plans inclinés *MN*, *MK* qui ſe rencontrent ſuivant la droite *MO*. Il eſt clair que ſi rien n'empêche la corde de gliſſer ſur l'arrête *MO*, il faut, pour que la corde ne gliſſe pas effectivement, que cette arrête ſoit horiſontale. Alors, en regardant la tenſion de la corde *PHQ*, qui eſt égale de part & d'autre, comme une force qui retient chacun des deux corps en équilibre ſur ſon plan incliné, on trouvera généralement (246, 247, 248) les rapports qui exiſtent entre cette force, les poids des deux corps, Fig. 123.

& les preſſions qui réſultent perpendiculairement ſur les deux plans inclinés.

Fig. 124. 265. Suppoſons, par exemple, que HG, HF (Fig. 124), ſoient les longueurs de nos deux plans inclinés, & HI leur hauteur commune. Que la corde, qui joint les deux corps, paſſe dans des fentes pratiquées ſuivant les longueurs HG, HF; de manière qu'elle aille en ligne droite d'un corps à l'autre. Soient Hmn, Hnm les angles que cette corde fait avec les longueurs des deux plans inclinés, GVP l'angle qu'elle fait avec leurs baſes. En nommant T la tenſion de la corde, A & B les preſſions perpendiculaires des deux inclinés HG, HF, on aura (248) ces deux ſuites de proportionnelles,

$$P : T : A :: \text{coſ. } Hmn : \text{ſin. } HGI : \text{coſ. } GVP,$$
$$Q : T : B :: \text{coſ. } Hnm : \text{ſin. } HFI : \text{coſ. } GVP.$$

Comme la même force T ſe trouve dans ces deux ſuites, on pourra comparer enſemble deux quelconques des cinq forces P, T, A, Q, B. Ainſi, pour comparer P avec Q, on formera ces deux proportions,

$$P : T :: \text{coſ. } Hmn : \text{ſin. } HGI,$$
$$T : Q :: \text{ſin. } HFI : \text{coſ. } Hnm,$$

leſquelles étant multipliées par ordre, donnent,

$$P : Q :: \text{coſ. } Hmn \times \text{ſin. } HFI : \text{ſin. } HGI \times \text{coſ. } Hnm.$$

On opérera d'une manière ſemblable pour les autres comparaiſons.

Je laiſſe au Lecteur le ſoin de développer toutes les conſéquences particulières qui réſultent de ces proportions générales.

266. S'il y avoit ſur l'arrête *MO* (Fig. 123), ſection commune des deux plans inclinés ſur leſquels les deux poids *P* & *Q* s'appuyent, un obſtacle, comme un clou, une poulie, qui, ſans gêner d'ailleurs l'action de la corde, empêchât ſeulement cette corde de gliſſer, il ne ſeroit plus néceſſaire que l'arrête *MO* fût horiſontale. Mais en ſuppoſant même que les deux parties *HP*, *HQ* de la corde ne ſoient pas dans un même plan; pourvû que la corde ait toute liberté de gliſſer ſuivant ſa longueur, elle eſt toujours également tendue dans les deux ſens, & on peut regarder cette tenſion comme une force qui retient chacun des deux corps en équilibre ſur ſon plan incliné. Fig. 123.

267. L'équilibre des corps ſoutenus entre des ſurfaces courbes, ou ſur des ſurfaces courbes, ſe rapporte à celui des plans inclinés. Car les ſurfaces courbes pouvant être regardées comme des aſſemblages d'une infinité de petits plans différemment inclinés, ſi l'on imagine par les points d'appuis des corps, des plans tangents aux ſurfaces courbes, on pourra conſidérer les corps, comme ſoutenus entre ces plans, ou ſur ces plans.

SECTION VI.

De la Vis.

268. La *vis* (Fig. 125, 126) eſt un cylindre droit autour duquel s'enveloppe ou s'entortille ſpiralement un ſolide qui a, ſuivant ſa groſſeur, la forme d'un Fig. 125, & 126.

prisme parallèlogrammique ou triangulaire. L'une des faces parallèlogrammiques de ce solide s'applique sur la surface convexe du cylindre ; & si l'on conçoit que ce même solide est composé, dans le sens de sa longueur, d'une infinité de filets parallèles entr'eux, tous ces filets, en s'entortillant autour du cylindre, à différentes distances de l'axe CK, forment des angles aigus & égaux entr'eux avec des droites qui les rencontreroient, & qui seroient parallèles à l'axe CK.

Le relief spiral, formé ainsi sur la surface du cylindre, s'appelle *filet de la vis.* Nous nous servirons du mot *spire*, pour désigner la partie d'un filet élémentaire du prisme, laquelle correspond à un tour sur le cylindre. La distance AB qu'il y a parallèlement à l'axe CK entre deux spires correspondantes, se nomme *hauteur du pas de la vis*, ou simplement *pas de la vis.* Il est clair que tous les pas de la vis sont égaux entr'eux.

269. La vis entre dans une piéce MN qu'on nomme *écrou.* Cette piéce doit donc être creusée intérieurement d'une quantité égale & semblable au filet de la vis; ensorte que l'écrou peut être regardé comme le moule du filet de la vis.

270. On employe la vis & son écrou pour comprimer les corps, quelquefois aussi pour élever des poids. L'effet revient au même dans les deux cas. La puissance Q qui meut la machine, est appliquée ordinairement à une barre qui traverse la vis ou l'écrou; & l'une de ces deux piéces est mobile, tandis que l'autre est immobile. Comme la puissance agit toujours

jours de la même manière, soit que la vis soit fixe, & l'écrou mobile, ou la vis mobile & l'écrou fixe, il suffit ici de considérer l'un de ces deux cas.

271. Je suppose que la vis soit fixe & l'écrou mobile; & pour établir clairement l'état de la question, je regarde la vis comme verticale, & l'écrou comme chargé d'un poids *P* qu'il faut élever, à l'aide de la puissance *Q*, qui agit perpendiculairement à l'extrémité de la barre *CQ*, & dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. Il s'agit de trouver le rapport de la puissance *Q* au poids *P*. On peut comprendre dans ce poids celui de l'écrou.

272. Le poids *P* étant soutenu par les filets de la vis, nous pouvons le décomposer en une infinité de petits poids distribués sur les différens points des filets de la vis, aux endroits où ces filets sont touchés par les points correspondans des filets de l'écrou. Représentons-nous la courbe spirale que forme chaque filet élémentaire du prisme générateur, comme partagée en une infinité d'élémens, par des plans horisontaux. Il est clair que ces élémens pourront être regardés comme de petites lignes droites, ou de petits plans inclinés dont l'angle d'inclinaison constante avec l'horison est le complément de celui que chaque filet élémentaire du prisme forme avec une ligne droite parallèle à l'axe du cylindre. Soit *p* l'un des poids élémentaires dans lesquels le poids *P* a été décomposé; & concevons d'abord que ce petit poids *p* est retenu en équilibre sur l'un des petits inclinés dont nous venons de parler, au moyen d'une puissance *r*,

parallèle à la base, ou tangente en p à la circonférence qui a Cp pour raïon. En nommant b la base du plan incliné, h sa hauteur, on aura (251), $p : r :: b : h$. Or, il est évident qu'à un pas de la vis répond une infinité de plans inclinés, & que la somme de leurs bases est égale à * *circ.* Cp, tandis que la somme de leurs hauteurs est le pas même AB de la vis. Donc, puisque tous ces plans sont également inclinés, on aura $b : h :: circ.\, Cp : AB$, & par conséquent aussi,

$$p : r :: circ.\, Cp : AB.$$

Maintenant, au lieu de supposer que le poids p est soutenu par la puissance r, imaginons que la puissance Q ayant été décomposée en une infinité de puissances q, qui lui sont parallèles, & qui sont appliquées en Q, l'une de ces puissances élémentaires q retient le corps p, au moyen d'un levier Cpq qui empêche le corps de glisser. Les deux puissances r & q, dont chacune en particulier fait équilibre au poids p, peuvent être regardées comme appliquées aux points p, Q du levier CpQ dont le point d'appui est dans l'axe de la vis, autour duquel la rotation tend à se faire. Ainsi, puisque ces puissances se contre-balanceroient mutuellement, si elles agissoient en sens contraires, on aura (141), $r : q :: CQ : Cp$, ou bien,

$$r : q :: circ.\, CQ : circ.\, Cp.$$

Multipliant cette proportion par la précédente $p : r :: circ.\, Cp : AB$, on trouvera,

* Cette expression abrégée *circ.* mise au-devant d'une ligne, désigne la circonférence qui a cette ligne pour raïon.

$$p : q :: circ. CQ : AB;$$

c'eſt-à-dire que chaque poids élémentaire du poids *P*, eſt à chaque puiſſance élémentaire correſpondante de la puiſſance Q, dans le rapport conſtant de la circonférence qui a pour raïon la diſtance du point d'application de la puiſſance à l'axe de la vis, à la hauteur du pas de la vis. Donc, par la théorie des proportions, *le poids* P *eſt la puiſſance* Q, *comme la circonférence du cercle qui a pour raïon la diſtance du point d'application de la puiſſance à l'axe de la vis, eſt à la hauteur du pas de la vis.*

273. On voit par-là que dans le ſimple état d'équilibre, le poids eſt plus grand que la puiſſance, dans le rapport de *circ.* CQ à *AB*. Mais lorſque la machine paſſe du repos au mouvement, il eſt clair que le poids ne s'éleve que de la quantité *AB*, tandis que la puiſſance parcourt horiſontalement un eſpace égal à *circ.* *C* Q; on perd donc alors en temps ce qu'on gagne en force.

274. La même proportion $P : Q :: circ. CQ : AB$, fait voir que la hauteur du pas de la vis diminuant, la puiſſance doit diminuer auſſi, tout reſtant d'ailleurs le même. Ainſi, une même vis comprime avec d'autant plus d'effort, ou éleve un poids d'autant plus grand, que la hauteur de ſon pas eſt plus petite.

275. Si la vis, toujours fixe, étoit inclinée, il faudroit décompoſer le poids à élever, en deux forces, l'une perpendiculaire à l'axe de la vis, l'autre dirigée ſuivant cet axe. La première ſeroit détruite par l'appui qui ſoutient la vis, & devroit être né-

gligée; la ſeconde ſeroit la ſeule qui fût contrebalancée par la puiſſance que je ſuppoſe toujours agir dans un plan perpendiculaire à l'axe, & devroit lui être comparée de la même manière que le poids *P* a été comparé à la puiſſance Q (272). Comme on connoît le rapport de la partie du poids, qui agit ſuivant l'axe, à ce poids, l'angle que fait l'axe de la vis avec l'horiſon étant donné; il s'enſuit qu'on connoîtra auſſi le rapport du poids à élever, à la puiſſance.

276. Il arrive quelquefois que la puiſſance tire obliquement par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. Alors, elle ſe décompoſe en deux autres forces, l'une parallèle à l'axe, l'autre dirigée dans un plan perpendiculaire à cet axe. Ces deux forces ſeront connues, puiſqu'on eſt cenſé connoître la quantité & la direction de la puiſſance. La première force s'ajoute à l'effort que la vis doit ſoutenir dans le ſens de ſon axe, ou bien s'en retranche, ſelon que la puiſſance tire de haut en bas ou de bas en haut; & la ſeconde fait équilibre à l'effort réſultant ſuivant l'axe, de la même manière que la puiſſance Q fait équilibre au poids *P*, dans l'article 272. Il eſt clair que la poſition de la vis étant donnée, on parviendra à connoître le rapport du poids à élever, à la puiſſance. Je ne développe pas ce calcul en détail, parce qu'il eſt facile, & que d'ailleurs il n'eſt pas d'un grand uſage dans la pratique.

277. L'action de la vis ne ſe tranſmet pas toujours immédiatement au poids qu'il faut élever, ou en général à la réſiſtance qu'il faut vaincre. Par exem-

ple, la Figure 127 repréſente une machine dans laquelle le filet d'une vis engrène avec une roue dentée garnie d'un tambour T, autour duquel s'enveloppe une corde qui ſoutient le poids P. Une puiſſance Q appliquée à la manivelle M empêche le poids de deſcendre. Le tambour T pourroit porter lui-même une ſeconde vis dont le filet engrènât avec une ſeconde roue dentée, garnie d'un ſecond tambour qui ſoutînt un poids, ou qui portât une troiſième vis ; ainſi de ſuite. Quand on ſaura trouver le rapport du poids P à la puiſſance Q, pour la Figure 127, on appliquera ſans peine les mêmes raiſonnemens aux autres cas. Fig. 127.

On appelle ces ſortes de vis qui engrènent avec des roues dentées, *vis ſans fin*, parce que l'engrènage n'a pas de fin, & demeure toujours le même, tant que la machine tourne.

278. Cherchons le rapport du poids P à la puiſſance Q (Fig. 127). Tout le ſyſtême étant ſuppoſé en équilibre, il eſt évident que le poids eſt contrebalancé immédiatement par la réſiſtance que le filet de la vis oppoſe en h à la dent de la roue, ſuivant la direction hg perpendiculaire au raïon Ch, ou parallèle à l'axe de la vis. Ainſi, en nommant h cette réſiſtance, & la regardant comme une force appliquée à la roue d'un tour, & en équilibre avec le poids P, on aura (208),

$$P : h :: Ch : Cd.$$

De même que le filet de la vis pouſſe la dent de la roue ſuivant la direction hg, ce filet eſt repouſſé à ſon tour ſuivant la direction contraire hi, & avec la même force, par la dent de la roue. Cette dernière force peut être regardée comme un poids qui agit parallèlement à l'axe de la vis, & qui eſt en équilibre avec la puiſſance Q. Par conſéquent, hz étant la hauteur du pas de la vis, on aura (272),

$$h : Q :: circ.\ EM : hz.$$

Multipliant ces deux proportions par ordre, il viendra

$$P : Q :: Ch \times circ.\ EM : Cd \times hz.$$

Le poids eſt donc à la puiſſance, comme le produit du raïon de la roue, par la circonférence que décrit la manivelle, eſt au produit du raïon du cylindre, par la hauteur du pas de la vis.

279. En employant pluſieurs roues dentées & pluſieurs vis ſans fin pour ſoutenir un poids donné, la force appliquée à la manivelle peut être très-petite, par rapport au poids. Mais auſſi, dans le cas du mouvement, la puiſſance eſt obligée d'aller plus vîte que le poids, préciſément dans la même raiſon qu'elle eſt moindre que lui. On ne peut donc jamais procurer aucun avantage à la force motrice ſur le poids, qu'aux dépens du temps.

SECTION VII.

Du Coin.

280. Le *coin* eſt un priſme triangulaire *ABCDEF* (Fig. 128) qu'on introduit dans une fente pour écarter ou ſéparer les deux parties d'un corps. Quelquefois auſſi on s'en ſert pour ſoulever des poids, ou pour comprimer des corps. Il eſt évident que les couteaux, les raſoirs, les ciſeaux, & en général tous les inſtruments tranchants ou pénétrants ſe rapportent au coin. Fig. 128.

On appelle *tête de coin* la face *ABCD* qui reçoit le coup ou l'impreſſion de la force motrice; l'arrête *DE*, par laquelle le coin commence à s'enfoncer, en eſt le *tranchant;* & les faces latérales *DAE*, *CBF* par leſquelles il preſſe les corps contigus, en ſont les *côtés*.

Nous repréſenterons cet inſtrument par ſon ſimple profil *DAE* (Fig. 129), c'eſt-à-dire par le triangle qui, en ſe mouvant parallèlement à lui-même, engendre le coin. Fig. 129.

281. Suppoſons un corps appuyé par ſa baſe *ZF* (Fig. 130), ſur un plan immobile. Que pour écarter les deux parties *M* & *N* de ce corps, on introduiſe entr'elles un coin *DEA* frappé ou pouſſé perpendiculairement à ſa tête par une force Q. Il eſt clair que cette force étant détruite uniquement par Fig. 130.

les résistances que les parties du corps à fendre opposent à l'action du coin, doit nécessairement se décomposer en deux forces dirigées vers les appuis I & K, perpendiculairement aux côtés AE, DE du coin, qu'on peut regarder comme des plans tangents aux appuis I & K. Ainsi (27) la force Q & les deux pressions qu'elle produit aux points I & K, sont dans un même plan, & concourent au même point O. Nommons Q, I, K ces trois forces, & considérons que leurs directions QO, OI, OK étant perpendiculaires chacune à chacun des trois côtés AD, AE, DE du triangle AED, on a (29),

$$Q : I : K :: AD : AE : DE;$$

& par conséquent aussi,

$$Q : I + K :: AD : AE + DE.$$

282. A cause de l'équilibre, les deux pressions I & K sont détruites par deux résistances contraires & égales chacune à chacune, que les parties du corps à fendre leur opposent. Ainsi, *la force imprimée perpendiculairement à la tête du coin, est à la somme des résistances que les parties du corps à fendre opposent immédiatement à son action, comme la tête du coin, est à la somme de ses côtés.*

On voit que plus le coin deviendra tranchant, plus la même puissance acquerra d'avantage sur la somme des résistances à vaincre, & plus, par conséquent, le coin trouvera de facilité à s'enfoncer.

283. Lorsque le coin est isoscèle, c'est-à-dire, lorsque les côtés AE, DE sont égaux, les deux forces I & K sont égales; & on a $Q : I + K :: AD$:

$2AE :: \frac{AD}{2} : AE$. Donc alors, *la force imprimée perpendiculairement à la tête du coin, est à la somme des résistances que les parties du corps à fendre lui opposent, comme la demi-tête du coin, est à l'un des côtés.*

284. Prenons en général sur les directions des deux forces I, K les parties IV, KH, égales respectivement aux côtés AE, DE du coin, pour représenter ces forces ; & décomposons chacune des mêmes forces en deux autres, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la base ZF, en construisant les deux parallèlogrammes rectangles $IRVT$, $KSHG$, qui satisfassent à cette condition. Il est évident que les deux forces IR, KS étant perpendiculaires au plan sur lequel le corps s'appuie, ne peuvent imprimer aucune sorte de mouvement à ce corps. Mais la force IT tend à mouvoir la partie M parallèlement à ZF; & la force KG tend à mouvoir la partie N parallèlement à FZ. Nommons T & G les deux forces IT, KG. Cela posé,

1°. On aura,

$$I : T :: IV \text{ ou } AE : IT;$$

& comme on a (281),

$$Q : I :: AD : AE;$$

si l'on multiplie ces deux proportions par ordre on aura

$$Q : T :: AD : IT.$$

2°. On trouvera semblablement,

$$Q : G :: AD : KG.$$

Ces deux proportions donnent la ſuite de proportionnelles,

$$Q:T:G::AD:IT:KG;$$

& par conſéquent auſſi,

$$Q:T+G::AD:IT+KG.$$

285. Suppoſons que la tête DA du coin ſoit parallèle à la baſe ZF, & menons du tranchant E la perpendiculaire EB ſur la tête. Les deux triangles rectangles IVT, EAB, qui ont des hypothènuſes égales par conſtruction, & qui ayant tous les côtés perpendiculaires chacun à chacun, ſont équiangles, ſont parfaitement égaux. On aura donc $IT=EB$. On démontrera de même que $KG=EB$. Ainſi les deux forces T & G ſont égales; & la ſuite précédente donne

$$Q:T+G::AD:2EB::\frac{AD}{2}:EB.$$

286. Il ſuit de-là que *lorſque la tête du coin eſt parallèle au plan ſur lequel le corps s'appuie, la force imprimée perpendiculairement à la tête du coin, eſt à la ſomme des réſiſtances que les deux parties du corps à fendre lui oppoſent parallèlement à la tête du coin, comme la demi-tête du coin, eſt à ſa hauteur.*

Cette propriété peut être appliquée au cas où l'on ſe ſert du coin pour comprimer; car alors la réſiſtance s'exerce parallèlement à la tête du coin.

287. Voilà, à peu près, à quoi ſe réduit la théorie mathématique du coin. Mais nous ne devons pas diſſimuler que l'application de cette théorie à la pratique n'eſt pas ſuſceptible d'une grande préciſion.

parce que les différents corps ſont composés de parties plus ou moins adhérentes entr'elles, ou de fibres plus ou moins flexibles; d'où il résulte que la même force appliquée au même coin, ne produira pas les mêmes enfoncements dans deux matières différentes, & que chaque enfoncement particulier ne peut guères être déterminé exactement que par la voie d'une expérience immédiate.

NOTES SUR LE CHAPITRE III.

On ſent que les loix générales de l'équilibre ſont ſuſceptibles d'une infinité d'applications, à l'aide de la Géométrie. Mais je ne me livrerai point ici à l'examen de queſtions purement ſpéculatives. La théorie de l'équilibre des machines a l'avantage d'être très-curieuſe par elle-même, & d'être très-utile dans la pratique. Auſſi me ſuis-je efforcé de traiter cette importante matière avec la clarté & l'étendue néceſſaires pour en faciliter l'intelligence & l'uſage. Guidé toujours par le même eſprit, je me propoſe de donner ailleurs des recherches ſur la réſiſtance des bois, ſur la pouſſée des terres contre les murs de revêtement, ſur la meilleure forme & la meilleure conſtruction des voutes, &c. Ces recherches, qui dépendent de la Statique, & dont l'objet eſt intéreſſant pour les Ingénieurs, auroient pû trouver place dans cet Ouvrage; mais elles l'auroient groſſi conſidérablement, & auroient trop détourné l'attention que j'ai désiré qu'on donnât d'abord aux machines. Je me borne, pour le présent, à éclaircir & completter les articles 155, 156, &c, où j'ai considéré les chaînes d'un pont-levis comme parfaitement flexibles. Dans les différentes solutions qu'on a données du problême des *chaînettes*, on a toujours supposé que les extrémités de la corde étoient attachées à des points fixes. Ici les points d'attache sont mobiles, & prennent la position que demande l'équilibre des forces qui agissent sur la corde.

Manière de trouver la courbure d'une chaînette attaché par ses extrêmités à des points mobiles.

I. *Déterminer la nature de la courbe que forme la* Fig. 131. *corde parfaitement flexible* GVE (Fig. 131) *attachée par ses extrémités aux deux points* G *&* E *de deux leviers* GM, EA, *qui sont mobiles autour des points fixes* K, A, *& qui sont chargés des poids* F, B, T?

Supposons que tout le systême soit parvenu à l'état d'équilibre ; il est clair qu'alors les deux points G & E peuvent être regardés comme fixes. Qu'on mène l'axe horisontal KX, & les deux ordonnées infiniment voisines VS, us, à cet axe. Par les points extrêmes G, E de la courbe, & le point V, soient menées les tangentes GN, EN, VQ, dont les deux premières se rencontrent en N, la première & la troisième, en Q ; & soient élevées les verticales GO, EX, NP, QR. Nommons,

l'abscisse KS. . . . . x,
sa différentielle Ss ou Vh. . . . . dx,
l'ordonnée SV. y
sa différentielle uh. . . . . dy,
l'arc funiculaire GV. . . . . s,
sa différentielle Vu. . . . . ds,
le poids du même arc GV. . . . . Q,
la tension de la corde suivant GQ. . . . f,
l'angle GQR que fait la direction de cette force avec la verticale. . . . . θ,
le sinus total. . . . . 1.

Cela posé, il est clair (122) qu'on aura la proportion, $Q : f :: \text{sin.}\, GQV : \text{sin.}\, RQV$. Or, 1°. l'angle $GQV = \text{ang.}\, GQR + \text{ang.}\, RQV = \text{ang.}\, GQR + 180° - \text{ang.}\, Vuh$, & par conséquent $\text{sin.}\, GQV = \text{sin.}\, GQR.\, \text{cos.}\, (180° - Vuh) + \text{cos.}\, GQR.\, \text{sin.}\, (180° - Vuh) = \text{sin.}\, \theta \times -\frac{dy}{ds} + \text{cos.}\, \theta \times \frac{dx}{ds} = \frac{dx\, \text{cos.}\, \theta - dy\, \text{sin.}\, \theta}{ds}$. 2°. L'angle $RQV = 180° - \text{ang.}\, Vuh$, & $\text{sin.}\, RQV = \frac{dx}{ds}$. Nous aurons donc $Q : f :: \frac{dx\, \text{cos.}\, \theta - dy\, \text{sin.}\, \theta}{ds} : \frac{dx}{ds}$; & par conséquent

$$Q\,dx = f\,dx\, \text{cos.}\, \theta - f\,dy\, \text{sin.}\, \theta,$$

équation fondamentale de la courbe cherchée.

II. Le poids Q est une quantité variable & dépendante de la position du point V. Mais les deux quantités f & θ n'en dépendent point, & doivent être regardées comme constantes pour tous les points de la courbe. Elles ſont ſeulement indéterminées, pour le préſent, & nous verrons ci-deſſous la manière de les déterminer. Conſidérons auparavant tout ce qui conſtitue la nature de notre courbe. Il peut arriver que Q ſoit une fonction, ou de x, ou de y, ou de s. Ces trois ſuppoſitions donnent pour GVE une courbe différente.

III. Soit, en premier lieu, Q une fonction de x. L'équation fondamentale donnera

$$dy = \frac{dx(f \operatorname{cof.} \theta - Q)}{f \operatorname{fin.} \theta},$$

équation ſéparée, & immédiatement intégrable ou conſtructible.

IV. De même, ſi Q eſt une fonction de y, on aura

$$dx = \frac{f dy \operatorname{fin.} \theta}{f \operatorname{cof.} \theta - Q},$$

équation encore ſéparée.

V. En troiſiéme lieu, ſoit Q une fonction de s. Mettons pour dx ſa valeur $\sqrt{[ds^2 - dy^2]}$ dans l'équation fondamentale; elle deviendra $f dy \operatorname{fin.} \theta = (f \operatorname{cof.} \theta - Q)\sqrt{[ds^2 - dy^2]}$; d'où l'on tire,

$$dy = \frac{ds(f \operatorname{cof.} \theta - Q)}{\sqrt{[f^2 \operatorname{fin.} \theta^2 + (f \operatorname{cof.} \theta - Q)^2]}},$$

$$dx = \frac{ds(f \operatorname{fin.} \theta)}{\sqrt{[f^2 \operatorname{fin.} \theta^2 + (f \operatorname{cof.} \theta - Q)^2]}}.$$

Ainſi on pourra conſtruire la courbe, puiſqu'on aura x & y en fonctions de la même variable s.

VI. Le cas le plus ordinaire dans la nature ſe rapporte à cette troiſième hypothèſe; c'eſt celui où la corde est uniforme dans sa grosseur. Alors on peut supposer $Q = s$, & la nature de la courbe peut s'exprimer par une équation séparée entre dx & dy. Car nos deux dernières équations donnent en ce cas,

$$\frac{ds(f \operatorname{cof.} \theta - s)}{dy} = \frac{ds(f \operatorname{fin.} \theta)}{dx},$$

ou bien,

$$dx(f \operatorname{cof.} \theta - s) = dy(f \operatorname{fin.} \theta).$$

Différentions chaque membre de cette équation, en prenant dx pour constante: nous aurons $-dxds = ddy(f \operatorname{fin.} \theta)$, ou bien $-dx = \frac{ddy(f \operatorname{fin.} \theta)}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$; ou bien $-dydx = \frac{dyddy(f \operatorname{fin.} \theta)}{\sqrt{[dx^2 + dy^2]}}$ dont l'intégrale est $Adx - ydx = f \operatorname{fin.} \theta \sqrt{[dx^2 + dy^2]}$; équation d'où l'on tire aisément,

$$dx = \frac{dy(f \operatorname{fin.} \theta)}{\sqrt{[(A-y)^2 - f^2 \operatorname{fin.} \theta^2]}}.$$

La constante A doit être telle qu'au point G où l'ordonnée GO est censée donnée, le sinus de l'angle Vuh, qui est toujours $\frac{dx}{ds}$, devienne $= \operatorname{fin.} \theta$. Or, à cause de $ds = \sqrt{[dx^2 + dy^2]} = \sqrt{\left[dy^2 + \frac{dy^2 (f \operatorname{fin.} \theta)^2}{(A-y)^2 - f^2 \operatorname{fin.} \theta^2}\right]} = \frac{dy.(A-y)}{\sqrt{[(A-y)^2 - f^2 \operatorname{fin.} \theta^2]}}$, on a généralement $\frac{dx}{ds} = \frac{f \operatorname{fin.} \theta}{A-y}$. Donc, en faisant $y = GO = q$, quantité supposée donnée, &

$\frac{dx}{ds} = \text{sin.}\,\theta$, on aura, $\text{sin.}\,\theta = \frac{f\,\text{sin.}\,\theta}{A - q}$, & par conséquent $A = q + f$. Ainsi l'équation différentielle de notre courbe est

$$dx = \frac{dy\,(f\,\text{sin.}\,\theta)}{\sqrt{[(f + q - y)^2 - f^2\,\text{sin.}\,\theta^2]}};$$

dont l'intégrale est

$$x = C - f\,\text{sin.}\,\theta.\text{L.}\left(f + q - y + \sqrt{[(f + q - y)^2 - f^2\,\text{sin.}\,\theta^2]}\right).$$

La constante C doit être telle que $y = GO$, donne $x = KO = \pi$, quantité supposée donnée; de sorte que

$$x = \pi + f\,\text{sin.}\,\theta.\ \text{L.}\,(f + f\,\text{cos.}\,\theta) - f\,\text{sin.}\,\theta \times \text{L.}\left(f + q - y + \sqrt{[(f + q - y)^2 - f^2\,\text{sin.}\,\theta^2]}\right),$$

équation finie de la courbe.

VII. Voyons maintenant comment on peut déterminer la relation de toutes les quantités qui constituent l'équilibre, en continuant de regarder la corde comme uniformément pesante. On raisonnera d'une manière semblable dans les autres suppositions.

Nous avons déja mené par le point K, donné de position, l'horisontale BKX; menons de même par le point A, aussi donné de position, l'horisontale CAZ; abaissons la verticale KC, & prolongeons la verticale XE jusqu'en Z. Des points K & A, tirons les perpendiculaires Kd, Ab sur les tangentes extrêmes NG, NE de la courbe. Conservons toutes les dénominations précédentes, & nommons de plus

KG

KG . . . . a,
AE . . . . b,
KI . . . . c,
KL . . . . g,
AH . . . . h,
KC . . . . m,
AC . . . . n,
la longueur entière de la corde GVE . . . p,
l'angle GKO . . . . z,
l'angle ZAE . . . . u.

Il eſt clair que conſéquemment à ces ſuppoſitions, on aura

GO ou q . . . . $= a$ ſin. z,
KO ou π . . . . $= a$ coſ. z,
EZ . . . . $= b$ ſin. u,
AZ . . . . $= b$ coſ. u,
CZ ou KX . . . . $= n + b$ coſ. u,
EX . . . . $= m - b$ ſin. u,
Kg . . . . $= c$ coſ. z,
Ke . . . . $= g$ coſ. z,
At . . . . $= h$ coſ. u,
Kd . . . . $= a$ coſ. $(z + \theta)$.

Cela poſé, 1°. les forces appliquées au levier GKM étant en équilibre, on aura, comme dans l'article 156,

$$B \times Ke = f \times Kd + F \times Kg,$$

c'eſt-à-dire,

$$Bg \text{ coſ. } z = fa \text{ coſ. } (z + \theta) + Fc \text{ coſ. } z, \qquad (A)$$

première équation.

2°. Repréſentons par ϕ la tenſion de la corde suivant EN. L'équilibre du levier AE donnera

$$T \times At = \phi \times Ab,$$

ou bien Th cof. $u = \phi \times AE \times$ fin. AEb.

Or (122), $\phi = \frac{f \times \text{fin.}\, GNP}{\text{fin.}\, ENP} = \frac{f\ \text{fin.}\, \theta}{\text{fin.}\, NEX}$;

& à cause que l'angle $AEb = 180° -$ ang. $NEX -$ ang. AEZ, on aura fin. $AEb =$ fin. NEX. cof. $AEZ +$ cof. NEX. fin. AEZ. Donc $\phi \times AE \times$ fin. $AEb =$ bf fin. $\theta \left(\text{cof.}\, AEZ + \text{fin.}\, AEZ . \frac{\text{cof.}\, NEX}{\text{fin.}\, NEX}\right)$. Or l'équation fondamentale (art. 1er.) donne ici en général, $\frac{dy}{dx} = \frac{f\ \text{cof.}\, \theta - s}{f\ \text{fin.}\, \theta}$; & il est évident que $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{cof.}\, NEX}{\text{fin.}\, NEX}$, lorsque $s = p$. On aura donc $\phi \times AE \times$ fin. $AEb = bf$ fin. $\theta \left(\text{fin.}\, u + \text{cof.}\, u . \frac{(f\ \text{cof.}\, \theta - p)}{f\ \text{fin.}\, \theta}\right) = bf$ fin. θ fin. $u + bf$ cof. θ cof. $u -$ bp cof. $u = bf$ cof. $(\theta - u) - bp$ cof. u. Mettant cette valeur dans l'équation Th cof. $u = \phi \times AE \times$ fin. AEb, elle deviendra

(B) $$Th\ \text{cof.}\, u = bf\ \text{cof.}\, (\theta - u) - bp\ \text{cof.}\, u,$$

seconde équation.

3°. L'équation fondamentale donne encore $s =$ $\frac{f dx\ \text{cof.}\, \theta - f dy\ \text{fin.}\, \theta}{dx} = f$ cof. $\theta - f$ fin. $\theta . \frac{dy}{dx}$; ou bien (en mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur $\frac{\sqrt{[(f + a\ \text{fin.}\, z - y)^2 - f^2\ \text{fin.}\, \theta^2]}}{f\ \text{fin.}\, \theta}$ (VI)), $s =$

f cos. $\theta - \sqrt{[(f + a \text{ sin. } z - y)^2 - f^2 \text{ sin. } \theta^2]}$. Donc, en faisant $s = p$, $y = EX = m - b$ sin. u, on aura

$$p = f \text{ cos. } \theta - \sqrt{[(f + a \text{ sin. } z - m + b \text{ sin. } u)^2 - f^2 \text{ sin. } \theta^2]}, \quad (C)$$

troisième équation.

4°. Enfin reprenons l'équation $x = \pi + f \text{ sin. } \theta$ L. $(f + f \text{ cos. } \theta) - f \text{ sin. } \theta$. L. $(f + q - y + \sqrt{[(f + q - y)^2 - f^2 \text{ sin. } \theta^2]})$, ou bien $x = a$ cos. $z + f$ sin. θ. L. $(f + f$ cos. $\theta) - f$ sin. θ. L. $(f + a$ sin. $z - y + \sqrt{[(f + a \text{ sin. } z - y)^2 - f^2 \text{ sin. } \theta^2]})$, trouvée (art. VI); & considérons qu'à l'abscisse $KX = CZ = n + b$ cos. u, répond l'ordonnée $EX = m - b$ sin. a. Par-là nous formerons cette quatrième équation,

$$n + b \text{ cos. } u = a \text{ cos. } z + f \text{ sin. } \theta. \text{ L. } (f + f \text{ cos. } \theta) - f \text{ sin. } \theta. \text{ L. } (f + a \text{ sin. } z - m + b \text{ sin. } u + \sqrt{[(f + a \text{ sin. } z - m + b \text{ sin. } u)^2 - f^2 \text{ sin. } \theta^2]}). \quad (D)$$

Les quatre équations (A), (B), (C), (D) renferment toutes les quantités qui concernent l'équilibre de la corde avec les leviers mobiles aux extrémités desquels elle est attachée.

On doit remarquer que dans ces équations les poids B, F, T sont censés exprimés par des lignes qui leur sont proportionnelles ; de même que le poids de la corde y est exprimé par la ligne p égale à la longueur entière de cette corde.

VIII. Des différentes quantités qui entrent dans les équations proposées, celles qui sont relatives aux positions *données* des points K, A, & aux longueurs aussi *données* des lignes KG, KI, KL, AE, AH.

ſont données. Il y en a ſeulement huit ; ſavoir, f, θ, z, u, B, F, T, p, qui peuvent être indéterminées ; & ſi on en connoît quatre, on parviendra à connoître les quatre autres, par la réſolution des équations précédentes. Ce qui donne lieu à différens problêmes. Si l'on regarde z, u, f, θ, comme les quatre inconnues, c'eſt-à-dire, ſi tout le reſte étant donné, il s'agit de déterminer les poſitions des deux leviers, la quantité & la direction de la tenſion de la corde au point G : les calculs, quoique dépendans de l'analyſe ordinaire, ſeront intraitables. Il en eſt de même dans d'autres cas. Il y a des queſtions qui donnent des réſultats aſſez ſimples. Je ne m'étens pas davantage ſur ce ſujet, qui n'appartient plus qu'à l'analyſe.

Il eſt facile d'appliquer toute cette théorie générale au cas particulier où la corde ſeroit attachée par ſes extrémités à des points fixes, comme on le ſuppoſe ordinairement ; & alors les calculs deviennent fort ſimples.

CHAPITRE IV.

Des résistances que les Machines éprouvent, lorsqu'elles sont prêtes à se mouvoir.

288. SI les matières dont les machines sont composées, étoient parfaitement dures, parfaitement polies, & si les cordages qu'on est souvent obligé d'employer pour transmettre l'action de la force motrice d'une partie de la machine à l'autre, avoient une entière flexibilité; la théorie de l'équilibre, que nous avons établie dans le Chapitre précédent, suffiroit pour déterminer dans chaque cas la force requise pour contrebalancer un poids donné; & cette force une fois trouvée, on seroit assuré qu'en l'augmentant de la plus legère quantité, l'équilibre se romproit, & que le poids seroit enlevé. Mais dans l'état physique & naturel des machines, il s'en faut beaucoup que les choses ne soient ainsi. Il peut se faire qu'on augmente sensiblement le poids ou la puissance, sans que pour cela il résulte aucun mouvement dans la machine. Le frottement des surfaces les unes contre les autres, & la difficulté que les cordes font à se plier autour des cylindres ou tambours qu'elles embrassent, s'opposent à la génération du mouvement. L'estimation de ces résistances ap-

partient à la Statique, puiſque l'équilibre ſubſiſte juſqu'à ce qu'elles ſoient ſurmontées. On ne doit pas attendre une théorie rigoureuſe ſur cette matière, qui eſt mêlée d'un ſi grand nombre d'accidens & de difficultés phyſiques, qu'on ne parviendra peut-être jamais à l'éclaircir complettement.

SECTION I.

Du Frottement.

289. Tous les corps, quelque polis qu'on les ſuppoſe, ſont couverts d'éminences & de cavités; de manière que quand on frotte deux corps l'un contre l'autre, les pointes du premier s'engagent dans les cavités du ſecond, & que de-là réſulte une difficulté à les ſéparer, en trainant ſeulement l'un ſur l'autre.

290. Il y a deux eſpèces principales de frottement; le frottement des corps qui ne font ſimplement que *gliſſer* les uns ſur les autres, & celui des corps qui *tournent*. Le frottement de la première eſpèce eſt beaucoup plus ſenſible que celui de la ſeconde, parce que dans le premier cas on ne peut faire gliſſer le corps, ou qu'en le ſoulevant un peu verticalement pour dégager les pointes des cavités, ou qu'en briſant les pointes, par un mouvement qui leur ſoit perpendiculaire; au lieu que dans le ſecond cas, le mouvement de rotation tend par lui-même à dégager les pointes des cavités, & fait gliſſer le corps comme ſur un plan incliné. Une roue de charrette ou de

carroſſe, qui tourne ſur le terrein, y éprouve un frottement de la ſeconde eſpèce. Auſſi marche-t-elle beaucoup plus vîte qu'elle ne feroit, ſi elle gliſſoit ſimplement, ſans tourner. C'eſt pour cela que dans les deſcentes un peu roides, on *enraye* les roues de voitures, c'eſt-à-dire, on les empêche de tourner, afin d'augmenter le frottement, & de rallentir par-là le mouvement que la peſanteur imprime à la voiture le long du plan incliné.

291. Quelquefois les deux ſortes de frottement ſe combinent enſemble ; & il en réſulte un frottement *mixte*, lequel a lieu, lorſqu'il y a tout-à-la-fois *gliſſement* & *rotation* dans les corps qui frottent enſemble. Tel eſt le frottement de l'*eſſieu* d'une roue contre le *moyeu*. En effet, qu'une roue axy (Fig. 132), tourne ſur le terrein horiſontal AB, en allant de A vers B; & ſuppoſons que parvenue en B, elle ait fait une révolution, enſorte que tous les points de ſa circonférence s'étant appliqués ſur la droite AB, ces deux lignes ſoient égales entr'elles. Il eſt clair qu'il n'y aura ſur le terrein qu'un ſimple frottement de la ſeconde eſpèce. Il n'eſt pas moins évident que tous les points c, e de l'eſſieu efi qui n'a qu'un ſimple mouvement progreſſif, & point de rotation, décrivent des droites cq, ep égales & parallèles à AB, avec des vîteſſes égales à celle de rotation du point a de la circonférence axy. Et comme le point m du moyeu mgh tourne avec une vîteſſe qui eſt moindre que celle du point a, dans le rapport de cm à ca, il eſt viſible que le point Fig. 132.

e de l'essieu glisse continuellement sur le point correspondant du moyeu. D'où il suit qu'en cet endroit il y a deux mouvements, l'un de rotation, l'autre de glissement, ou un seul mouvement composé des deux premiers; il y a donc aussi deux frottements, l'un de *rotation*, l'autre de *glissement*, ou un seul frottement composé des deux autres.

292. Des Machinistes, habiles à d'autres égards, ont regardé le frottement de la seconde espèce comme nul, & ont cru qu'une machine dont les pièces n'auroient aucun mouvement de *glissement* les unes sur les autres, devroit être censée exempte de frottement. Mais cela est une erreur manifeste. Car il est clair que dans le frottement de la seconde espèce, les pointes ne peuvent se dégager des cavités, sans que le corps ne rampe à chaque instant le long d'un petit plan incliné, & sans que par conséquent il ne soit soulevé d'une quantité égale à la hauteur de ce plan incliné, quelque petite qu'elle puisse être d'ailleurs par rapport à la longueur de la rampe. D'où il suit que cette espèce de frottement doit absorber une certaine partie de la force motrice. On voit par-
Fig. 133. là que si un cercle $axyz$ (Fig. 133), posé sur un plan incliné & abandonné à l'action de la pesanteur, descend en tournant, il perd une partie de la vîtesse que la pesanteur tend naturellement à lui imprimer. Car représentons sa pesanteur par la verticale cp, & décomposons cette force en deux autres cr, cq, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la longueur du plan incliné HGI; la première est détruite;

la seconde est la seule qui fasse descendre le corps; & comme la direction de cette force partage le corps en deux parties xaz, xyz, parfaitement égales; il est évident que ce cercle, en descendant, décriroit simplement la droite hg égale & parallèle à HG, & ne tourneroit point, s'il n'éprouvoit aucun frottement en a. Mais dans l'état physique des choses, quelque polies que puissent être les deux surfaces, il y a continuellement en a un engrènage des pointes dans les cavités; d'où résulte un frottement qu'on doit regarder comme une force dirigée dans le sens GH, & qui étant par conséquent contraire à l'action de la force cq, détruit nécessairement une certaine partie de cette force.

293. Quoique les deux espèces de frottement diffèrent en *quantités*, on sent néanmoins qu'elles doivent suivre à peu près les mêmes loix. Car la résistance dans les deux cas peut être comparée à celle d'un corps qu'il faut soulever d'une certaine quantité fort petite, & qui est plus grande dans le premier que dans le second. Il est donc clair, & l'expérience le prouve, qu'on diminuera l'un & l'autre frottement, soit en polissant les surfaces frottantes, soit en les enduisant de quelque matière grasse & onctueuse qui en comble les cavités. L'expérience fait voir encore que (toutes choses d'ailleurs égales) le frottement des matières de même espèce est plus grand que celui des matières de différentes espèces; c'est-à-dire, par exemple, que le frottement du cuivre contre le cuivre, est plus grand que celui du cuivre contre le

fer. Cet effet s'explique, en considérant que dans les matières de même genre, les surfaces étant semblablement hérissées de pointes & de cavités, le contact est plus immédiat, les pointes s'engagent plus avant dans les cavités, que cela n'arrive, lorsque les matières sont de différentes espèces.

294. Il y a une autre circonstance, d'un genre particulier, qui produit des variétés sensibles dans le frottement. Cette circonstance est la durée de l'application des surfaces les unes contre les autres. On observe qu'en faisant séjourner deux surfaces l'une sur l'autre pendant quelque temps, leur frottement devient plus grand qu'il ne l'est dans les premiers instans; soit, parce qu'une pression plus continuée engage plus avant les pointes dans les cavités, soit parce qu'en général quelque cause physique colle, pour ainsi dire, plus intimement ensemble les deux surfaces. Mais on ne connoît rien de précis sur la loi que suit cette augmentation de frottement, ni sur le temps de sa durée.

295. On a long-temps agité la question (& elle n'est pas encore absolument décidée), si, tout le reste étant d'ailleurs le même, l'étendue plus ou moins grande des surfaces par lesquelles deux corps se touchent, contribue à en augmenter le frottement. M. Amontons est le premier qui ait donné à cette matière toute l'attention qu'elle mérite. Il prétend * que le frottement est simplement proportionnel à la pression, c'est-

* Mém. de l'Acad. an. 1699.

à-dire, à la force qui applique les deux ſurfaces l'une contre l'autre, & ne dépend point de leurs grandeurs. Il confirme ce ſentiment par des expériences. M. Muſchenbroeck ne penſe pas de même *. Il ſoutient que les frottements ne ſuivent pas la raiſon des preſſions. Mais les expériences qu'il rapporte à ce ſujet, ſont trop peu nombreuſes, & ont été faites trop en petit, pour pouvoir décider la queſtion. Pluſieurs autres Auteurs n'ont pas mieux réuſſi. Moi-même, j'ai un peu travaillé ſur la même matière, par la voie de l'expérience; je me ſuis rencontré, à peu près, avec M. Amontons; par exemple, j'ai trouvé que pour faire gliſſer ſur une table horiſontale un parallèlépipéde rectangle, de bois, peſant environ 51 livres, & que je chargeois encore de différens poids; pour le faire gliſſer, dis-je, par deux de ſes faces, dont l'une étoit environ 5 fois plus grande que l'autre, il falloit employer, à peu près, la même force dans les deux cas. Mais j'avoue que les réſultats de tout ce travail ne ſont ni aſſez précis, ni aſſez multipliés, ni aſſez conſtans, pour que j'oſe en faire la baſe d'aucun ſyſtême particulier. Ils me font ſeulement beaucoup incliner pour celui de M. Amontons, avec quelques reſtrictions dont je parlerai, lorſque j'aurai expoſé les raiſons ſur leſquelles cet Auteur ſe fonde.

296. Les pointes dont les corps ſont hériſſés, peuvent être regardées, ſelon lui, ou comme des petits

* Cours de Phyſique expérimentale, tome 1.

corps durs, incapables de ſe plier, ou comme des petits reſſorts qui ſe courbent ſous les poids qui les preſſent. Or, 1°. ſi vous regardez les pointes comme des corps durs, il eſt évident que pour dégager les deux ſurfaces, il faut élever l'une, & que ce qui s'oppoſe à cette action, eſt ſimplement le poids, & non pas la grandeur de la ſurface. Il eſt vrai que dans une grande ſurface, il y a plus de pointes engagées que dans une petite; mais elles le ſont moins profondément dans celle-ci, préciſément ſuivant le même rapport; puiſque la preſſion qui produit l'engrènage, étant toujours la même, l'engrènage total doit toujours auſſi être le même. 2°. Si l'on conſidére les pointes comme des petits reſſorts à plier, le frottement ſera encore proportionnel à la preſſion. Car plus la preſſion eſt grande, plus elle plie les reſſorts, & plus par conſéquent ils lui oppoſent de réſiſtance. Lorſqu'on augmente la ſurface, la preſſion demeurant toujours la même, les reſſorts ſont d'autant moins pliés qu'ils ſont en plus grand nombre; & la force conſumée dans les deux cas, contre les reſſorts, doit être la même, & toujours proportionnelle à la preſſion.

297. Ces raiſonnements ſont plauſibles, on ne peut pas le nier; mais ils ne ſont point démonſtratifs. Ils ne ſont bons tout au plus, à la rigueur, que pour des matières dont les parties ſont liées fortement entr'elles, ſoit que ces matières ſoient d'ailleurs dures ou élaſtiques. Mais ſi les pointes des ſurfaces ſe briſent en frottant les unes contre les autres, le nombre de ces pointes, qui eſt proportionnel aux ſurfaces, aug-

mentera la résistance du frottement; & c'est ce que l'expérience confirme. Il est cependant à propos d'observer que même alors la pression plus ou moins grande est la cause qui fait briser plus ou moins les pointes des surfaces, & que par conséquent elle contribue au frottement, d'une manière beaucoup plus efficace, que l'étendue des surfaces. Tout ce qu'on doit donc conclure dans ces sortes de cas, c'est que la pression est le principal, mais non le seul élément du frottement. Il y a encore un autre cas qui ne peut pas être soumis à l'hypothèse de M. Amontons; c'est celui d'un corps pointu ou tranchant qui se meut sur un plan; car alors la pointe ou le tranchant sillone ou laboure le plan, & y éprouve une résistance qui n'est pas exactement de la même nature que le frottement ordinaire.

298. Mon objet étant seulement ici de considérer le frottement des corps qui sont prêts à se mouvoir, je ne dirai qu'un mot du frottement des corps qui se meuvent actuellement. Il paroît au premier coup d'œil que la vîtesse doit augmenter le frottement; car plus un corps se meut vîte, plus il y a de pointes à dégager, ou de ressorts à plier. M. Desaguliers a fait plusieurs expériences * dans lesquelles le frottement de corps en mouvement s'est trouvé en effet proportionnel à leur vîtesse. Cependant il peut arriver que la vîtesse n'augmente pas sensiblement le frottement; car si d'un côté, à mesure que la vî-

* Cours de Physique expérimentale.

teſſe augmente, il y a plus de pointes à dégager ou de reſſorts à plier, il peut ſe faire d'un autre côté que cette même vîteſſe ne donne pas à la preſſion le temps d'engager les pointes dans les cavités, ſi profondément que le permettroit une moindre vîteſſe. Or une diminution d'engrènage ſemble devoir produire une diminution de frottement. La théorie & l'expérience n'ont encore rien prononcé de parfaitement ſatisfaiſant ſur ces objets.

299. Je viens à la manière d'eſtimer le frottement dans les machines prêtes à ſe mouvoir. Je ſuppoſe que les ſurfaces frottantes ſont aſſez dures & aſſez étendues, pour qu'on puiſſe regarder le frottement comme ſenſiblement proportionnel à la preſſion. Cette hypothèſe eſt admiſſible pour la plûpart des machines, & ſur-tout pour les machines en grand, où les pièces qui frottent, ſont ordinairement de métal, & où l'on a ſoin que ces piéces ne frottent ni par des pointes, ni par des tranchans.

300. On comprend aſſez qu'en ſuppoſant le frottement proportionnel à la preſſion, je n'entens pas que le rapport de ces deux forces ſoit toujours le même. Il varie ſuivant que les ſurfaces frottantes ſont plus ou moins polies. Dans les corps qui gliſſent ſans tourner, le frottement peut être le tiers, ou le quart, ou toute autre partie de la preſſion; cela n'a rien de fixe, & dépend du degré de poliſſure des ſurfaces. Dans les corps qui tournent, le frottement eſt beaucoup moindre, comme nous l'avons déja dit; il peut être la ſixième, ou la huitième, ou, &c, partie

de la preſſion, ſelon que les ſurfaces ſont plus ou moins dures & unies. Ainſi cette expreſſion, *le frottement eſt proportionnel à la preſſion*, ſignifie que la réſiſtance du frottement eſt égale à une certaine partie de la force qui preſſe les deux ſurfaces frottantes l'une contre l'autre, & ne dépend que de cette force combinée avec le degré de poliſſure des ſurfaces, & nullement de leur étendue.

Du frottement dans le Levier.

301. Le levier eſt peu ſujet au frottement, & on peut ſe diſpenſer d'y avoir égard, dans la plûpart des uſages qu'on fait de cette machine. Mais le frottement n'eſt pas à négliger dans les balances, ſurtout lorſqu'elles ſont deſtinées à peſer des poids un peu conſidérables. Voici la manière d'évaluer cette réſiſtance.

302. Que le levier *AB* (Fig. 134) repréſente Fig. 134.
le fléau d'une balance, traverſé perpendiculairement par l'eſſieu horiſontal *fhi* qui tourne ſur des appuis fixes. Suppoſons que les deux bras *cA*, *cB* ſoient parfaitement égaux & également peſants. Dans le ſimple état d'équilibre mathématique, les deux poids *P*, *Q* ſuſpendus aux extrémités du fléau, devroient être égaux. Mais à cauſe du frottement, il pourra ſe faire qu'on augmente l'un des poids, ſans que pour cela l'équilibre ſe rompe. Je ſuppoſe qu'on ajoute au poids *P* un petit poids *p*, tel que l'équilibre commence à ſe rompre, & que la balance tende à s'incliner du côté de *A*. La réſultante des deux poids

$(P+p)$ & Q paſſe entre les points A & c. Ainſi, s'il étoit queſtion de détruire cette réſultante pour établir l'équilibre, il faudroit lui oppoſer un appui dans ſa direction. Mais ici la rotation ſe fait néceſſairement autour du centre c; d'où il ſuit que ce point eſt toujours le centre d'équilibre, & qu'en conſéquence le frottement de l'eſſieu ſur ſon moyeu, peut être regardé comme une force qui eſt dirigée ſuivant la tangente fg, & qui fait équilibre ſéparément au poids p, tandis que les deux poids égaux P & Q ſe font équilibre auſſi ſéparément. Cela poſé, nommons

le raïon de l'eſſieu . . . . a,
le bras cA ou cB de la balance . . . . . . b,
le rapport du frottement à la preſſion,
c'eſt-à-dire, $\dfrac{\text{frottement}}{\text{preſſion}}$ . . . . $\dfrac{n}{1}$ ou n.

Il eſt clair que la preſſion des appuis, après l'addition du poids p, eſt $2P+p$, & que par conſéquent le frottement eſt $n(2P+p)$. Or le bras de levier de ce frottement eſt a, & celui du poids p qui lui fait équilibre eſt b. On aura donc (141), $n(2P+p)\times a = p\times b$; d'où l'on tire

$$p=\frac{2naP}{b-na}.$$

Ainſi on connoît le poids p deſtiné à vaincre le frottement.

EXEMPLE.

Suppoſons que chacun des poids P & Q ſoit de 200

200 livres; que le raïon de l'essieu soit la centième partie du bras de la balance, & que le frottement soit $\frac{1}{5}$ de la pression : c'est-à-dire, $P = 200$℔; $\frac{a}{b} = \frac{1}{100}$; $n = \frac{1}{5}$. On trouvera $p = \frac{400 ℔}{499}$. Ainsi, pour vaincre le frottement en ce cas, il faut ajouter environ les $\frac{4}{5}$ d'une livre.

Du Frottement dans les Poulies.

303. Le frottement dans la poulie simple & fixe, & chargée de deux poids, se détermine comme pour la balance. Cela est évident, en imaginant que du centre c on a décrit, avec le raïon cA ou cB, un cercle qui représente la poulie. La formule $p = \frac{2naP}{b - na}$ s'appliquera donc ici, si, tout restant d'ailleurs le même, on entend par b le raïon de la poulie, & par a, celui de son essieu.

Si les directions des forces appliquées à la poulie n'étoient pas parallèles, le frottement se détermineroit comme nous le verrons ci-dessous pour le tour.

304. Pour montrer la manière dont le frottement doit être évalué dans les poulies mobiles, reprenons la Figure 92, où tous les cordons BD, AF, HE, IK, RO, NQ sont parallèles, & verticaux. Je suppose que toutes Fig. 92. les poulies C, G, M sont égales entr'elles, & ont des essieux égaux. Dans le simple état d'équilibre, & abstraction faite du frottement, les cordons DB, FA sont tendus chacun avec une force qui est la

moitié du poids P; les cordons EH, IK sont tendus chacun avec une force qui est la moitié de la tension de chacun des deux premiers, & par conséquent le quart du poids P, &c : ensorte que la tension du cordon QN, ou la puissance Q, est la huitième partie du poids P. Mais lorsqu'on a égard au frottement, les tensions des cordons augmentent nécessairement. Nommons,

le rayon de chaque essieu. . . . . a,
celui de chaque poulie . . . . b,
le rapport du frottement à la pression. . n,
les tensions respectives des cordons FA, KI, QN . . . . X, Y, Z,
les parties de ces tensions, destinées à vaincre les frottements dans les trois poulies C, G, M. . . . . x, y, z.

Cela posé, 1°. dans la poulie C, la pression sur l'essieu est P, & par conséquent le frottement est nP. Nous ne faisons pas entrer dans cette valeur du frottement la force x, parce que la poulie étant mobile, la force x tend à la soulever, & ne paroît pas devoir contribuer, du moins d'une manière sensible, au frottement contre l'essieu. On aura donc, $x \times b = nP \times a$, ou $x = \frac{nPa}{b}$, & par conséquent

$$X = \frac{P}{2} + x = P \times \left(\frac{b + 2na}{2b}\right).$$

2°. Par les mêmes raisons, la pression dans la poulie G, est X, & le frottement, $= nX$. Ainsi on aura

$y \times b = nX \times a$, ou $y = \frac{nXa}{b}$; & par conséquent

$$Y = \frac{X}{2} + y = X \times \left(\frac{b + 2na}{2b}\right).$$

3°. On a de même, dans la poulie M, $z \times b = nY \times a$, ou $z = \frac{nYa}{b}$; & par conséquent

$$Z = \frac{Y}{2} + y = Y \times \left(\frac{b + 2na}{2b}\right).$$

Prenons, pour abréger, le coéfficient constant $\frac{b + 2na}{2b} = m$: il est clair qu'on aura $X = P \times m$, $Y = P \times m^2$, $Z = P \times m^3$; ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de poulies. On voit que les coéfficiens m, m^2, m^3, vont en progression géométrique.

Si le dernier cordon NQ passoit sur une poulie fixe de renvoi, on feroit entrer le frottement de cette poulie dans le calcul, par l'article précédent. Ici il n'en est pas question.

EXEMPLE.

Soient $P = 800$ ℔; $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$; $n = \frac{1}{5}$, & par conséquent $\frac{b + 2na}{2b} = \frac{8}{15}$. On trouvera, à peu de chose près, $X = 426, 67$ ℔, $Y = 227, 55$ ℔, $Z = 121, 36$ ℔. Ainsi la tension Z, ou la puissance Q, sera d'un peu plus de 121 ℔; au lieu que sans le frottement, elle n'auroit été que de 100 ℔.

Si on avoit crû devoir faire entrer les forces x, y, z dans les valeurs des frottements, on auroit trouvé des résultats peu différents des précédents, parce que les forces x, y, z sont fort petites par rapport aux forces P, X, Y, Z.

On appliquera facilement les mêmes méthodes aux autres cas des poulies.

Du Frottement dans le Tour.

Fig. 135. 305. Soient le poids P & la puissance Q (Fig. 135), appliqués respectivement au cylindre TMC & à la roue DRB d'un tour dont l'essieu est représenté par le petit cercle x. Je suppose qu'ils agissent dans un même plan ; ce qui est toujours permis, pour l'effet qu'on cherche ici. Il est clair que le poids P produit sur l'appui qui porte l'essieu, une pression verticale, égale à lui-même ; je la représente par la verticale AO. Soit Q la force simplement requise pour faire équilibre au poids P ; & que q soit la petite force qu'il faut ajouter à Q, pour vaincre le frottement. Représentons la force $Q+q$ par DE ; & décomposons-la en deux autres DK, DH, l'une verticale, l'autre horisontale. La force verticale DK produit sur l'appui une pression égale à elle-même ; ensorte que si l'on prolonge AO de la quantité $ON=DK$, la pression totale de l'appui, suivant la verticale, sera représentée par AN. De même, la force horisontale DH produit sur l'appui une pression horisontale, égale à elle-même ; je la représente par AL, perpendiculaire à AN. Par conséquent, si l'on achève le parallèlogramme

rectangle $ALFN$; & qu'on tire la diagonale AF, elle exprimera la pression résultante contre le point y où la surface de l'essieu touche l'appui ou le moyeu fixe. Cette pression occasionne le frottement qu'on doit regarder comme une force qui touche en y le cercle x. Nommons

le raïon Ay de l'essieu . . . . a,
le raïon AM du cylindre. . . . . b,
le raïon AD de la roue . . . . c,
le rapport du frottement à la pression . . . n,
le sinus total 1,
le sinus de l'angle donné HDE . . . . . . f,
son cosinus . . . . g.

Il est clair qu'on aura, Force DK ou $ON = (Q+q)f$; Force DH ou $AL = (Q+q)g$; Force $AN = P + (Q+q)f$; Force $AF = \surd[(Q+q)^2 g^2 + (P+(Q+q)f)^2]$; Frottement $= n\surd[(Q+q)^2 g^2 + (P+(Q+q)f)^2]$. Donc, puisque le moment de la force q doit être égal au moment du frottement, on aura,

$$cq = an\surd[(Q+q)^2 g^2 + (P+(Q+q)f)^2]; \qquad (A)$$

ou bien, en élevant tout au quarré, & considérant que $ff + gg = 1$,

$$c^2 q^2 = a^2 n^2 [(Q+q)^2 + P^2 + 2Pf(Q+q)];$$

d'où l'on tire facilement

$$q = \frac{a^2 n^2 (Q+fP)}{c^2 - a^2 n^2} \pm \frac{an}{c^2 - a^2 n^2} \times \surd[(Q^2 + \qquad (B)$$
$$P^2 + 2fPQ)(c^2 - a^2 n^2) + a^2 n^2 (Q+fP)^2].$$

306. Cette formule générale est un peu compli-

quée. Mais nous obſerverons que dans la plûpart des cas qui ont réellement lieu dans la pratique, le raïon de l'eſſieu étant très-petit par rapport à ceux du cylindre & de la roue, la force requiſe pour vaincre le frottement, doit auſſi être très-petite par rapport à P & à Q. D'où il ſuit que dans le radical de l'équation (A), on peut, ſans craindre beaucoup d'erreur, négliger les termes qui contiennent q. Alors cette équation devient

$$cq = an\sqrt{[Q^2g^2 + (P + fQ)^2]},$$

ou bien

$$q = \frac{an}{c}\sqrt{[Q^2 + P^2 + 2fPQ]},$$

ou bien encore, en mettant pour Q ſa valeur $\frac{Pb}{c}$;

$$q = \frac{anP}{c^2}\sqrt{[b^2 + c^2 + 2fbc]},$$

formule d'un uſage aſſez commode.

EXEMPLE.

Soient $P = 900$℔; $a = 1$; $b = 10$; $c = 60$; $n = \frac{1}{5}$; l'angle $HDE = 45°$, ou $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On trouvera $q = 3, 372$℔ environ. Il faut donc ajouter à la puiſſance environ 3℔ & $\frac{372}{1000}$ pour vaincre le frottement; ainſi cette puiſſance qui, ſans le frottement, n'auroit été que de 150 livres, ſera de 153, 372℔, en ayant égard au frottement.

307. Lorſque la direction de la puiſſance Q eſt verticale, on a $g = 0$, $f = 1$; & l'équation (B) donne, en prenant le ſigne ſupérieur du radical,

$$q = \frac{an(P+Q)}{c-an},$$

$$\text{ou } q = \frac{anP(c+b)}{c(c-an)}.$$

EXEMPLE.

Soient, comme dans l'exemple précédent, $P = 900$ ℔, $a=1$, $b=10$, $c=60$, $n=\frac{1}{5}$. On trouvera $q=3, 51$ ℔, à peu près.

Du Frottement ſur le plan incliné.

308. Soit un poids P (Fig. 136), poſé ſur un plan incliné dont HG eſt la longueur, HI, la hauteur, & IG, la baſe. Repréſentons ce poids par la verticale PD; & décompoſons cette force en deux autres PC, PA, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la longueur du plan incliné. Il eſt clair qu'on aura, Force $PC = P \times \frac{HI}{HG}$; Force $PA = P \times \frac{IG}{HG}$. La première de ces deux forces, qu'on appelle la *peſanteur relative* du corps, tend à le faire gliſſer : la ſeconde produit la preſſion ſur le plan incliné, & y occaſionne un frottement de la première eſpèce; de ſorte qu'en nommant n le rapport du frottement à la preſſion, on aura, Frottement $= nP \times \frac{IG}{HG}$. Donc, ſi le poids eſt abandonné uniquement à lui-même, il ne deſcendra pas, à moins que ſa peſanteur relative PC ne ſoit plus grande Fig. 136.

que le frottement, c'est-à-dire à moins qu'on n'ait $\frac{P \times IH}{HG} > nP \times \frac{IG}{HG}$, ou $IH > n \times IG$.

Il suit de-là qu'*un corps posé sur un plan incliné & abandonné à l'action de la pesanteur, ne descend que quand la hauteur du plan incliné est plus grande que le produit de la base multipliée par le rapport du frottement à la pression.*

309. Supposons que le corps soit prêt à descendre, ou que sa pesanteur relative soit égale à la résistance du frottement. On aura $IH = n \times IG$, ou bien $n = \frac{IH}{IG}$. Ainsi, lorsque l'inclinaison du plan incliné est telle que le corps commence à descendre par sa seule pesanteur relative, le rapport du frottement de la pression est le même que celui de la hauteur du plan incliné à sa base. Connoissant donc le premier rapport, on connoîtra le second; ou bien réciproquement, connoissant le second, on connoîtra le premier.

Par exemple, supposons que le frottement soit le tiers de la pression. On aura $\frac{IH}{IG} = \frac{1}{3}$. Or, par la Trigonométrie, le rapport $\frac{IH}{IG}$ peut être regardé comme celui de la tangente de l'angle IGH d'inclinaison du plan, au sinus total; & on trouve dans les Tables trigonométriques, que ce dernier rapport étant $\frac{1}{3}$, l'angle HGI est d'environ $18° \ 27'$. Ainsi, le frottement étant supposé le tiers de la pression, l'angle d'inclinaiſon du plan doit être d'environ 18° 27′, pour que le corps, par ſa ſeule peſanteur relative, ſoit au moment de deſcendre.

Si au contraire l'angle d'inclinaiſon du plan étoit donné, on trouveroit le rapport $\frac{IH}{IG}$ par les Tables; & on auroit enſuite n par l'équation $n = \frac{IH}{IG}$. De-là ſuit une manière bien ſimple & bien commode de déterminer le frottement de la première eſpèce, par la voie de l'expérience. Il ne faut pour cela que mettre un corps ſur un plan d'abord très-peu incliné à l'horiſon; augmenter peu à peu l'inclinaiſon, juſqu'à ce que le corps commence à deſcendre; & obſerver alors le rapport de la hauteur du plan incliné à la baſe; ce rapport eſt celui du frottement à la preſſion.

310. Nous allons maintenant conſidérer un corps qu'une puiſſance eſt prête à faire monter le long d'un plan incliné quelconque, en combattant la peſanteur relative & le frottement. La valeur de cette puiſſance eſt aiſée à trouver en général; mais nous nous contenterons de réſoudre le problême pour les deux cas les plus ordinaires; c'eſt-à-dire, lorſque la direction de la puiſſance eſt parallèle à la longueur ou à la baſe du plan incliné. On imitera facilement la même méthode dans les autres cas.

311. Je ſuppoſe donc en premier lieu que la puiſſance Q (Fig. 137), ſoit parallèle à la longueur du plan incliné. Pour que le corps commence à gliſſer Fig. 137.

dans le sens GH, il faut que la force Q soit égale à la somme de la pesanteur relative du corps, & du frottement. Or, en construisant, comme ci-dessus, le parallèlogramme rectangle $PADC$, & nommant toujours n le rapport du frottement à la pression, on a, Force $PC = P \times \frac{HI}{HG}$, Force $PA = P \times \frac{IG}{HG}$; Frottement $= nP \times \frac{IG}{HG}$. Nous aurons donc,

$$Q = P \times \frac{HI}{HG} + nP \times \frac{IG}{HG},$$

formule où l'on voit la quantité pour laquelle le frottement entre dans l'expression de la puissance Q.

Exemple.

Soient le poids $P = 8000$ ℔; l'angle d'inclinaison HGI du plan, de 30°, ou $\frac{HI}{HG} = \frac{1}{2}$; $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$ à peu près; $n = \frac{1}{3}$. On aura $Q = 4000$ ℔ $+ 2309,333$ ℔. La puissance Q sera donc d'un peu plus de 6309 livres, tandis, qu'abstraction faite du frottement, elle n'auroit été que de 4000 ℔.

Fig. 138. 312. En second lieu, que la puissance Q (Fig. 138) soit parallèle à la base du plan incliné. Ayant décomposé, comme ci-dessus, le poids du corps en deux forces PC, PA, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire au plan incliné, je décompose pareillement la puissance Q, exprimée par la partie PO de sa di-

rection, en deux autres forces PN, PM, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la longueur du plan incliné. On aura, Force $PC = P \times \frac{HI}{HG}$, Force $PA = P \times \frac{IG}{HG}$, Force $PN = Q \times \frac{IG}{HG}$, Force $PM = Q \times \frac{IH}{HG}$. La pression totale du plan incliné étant égale à la somme des deux forces PA, PM; si l'on nomme toujours n le rapport du frottement à la pression, il est clair qu'on aura, Frottement $= n \times \left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{IH}{HG}\right)$. Cela posé, pour que le corps commence à glisser dans le sens GH, il faut que la force PN soit égale à la somme de la force PC, & du frottement; on aura donc alors,

$$\frac{Q \times IG}{HG} = \frac{P \times HI}{HG} + n\left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{HI}{HG}\right);$$

d'où l'on tire,

$$Q = \frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH}.$$

S'il n'y avoit point de frottement, la valeur de la puissance seroit $\frac{P \times HI}{IG}$. Ainsi, $\frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH} - \frac{P \times HI}{IG}$, ou $\frac{nP \times \overline{HG}^2}{\overline{IG}^2 - n \times IG \times IH}$ est la quantité pour laquelle le frottement concourt à augmenter la puissance.

EXEMPLE.

Soient $P = 8000$ ℔; l'angle $HGI = 30°$, ou

$\frac{HI}{HG}=\frac{1}{2}$, $\frac{IG}{HG}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$; $n=\frac{1}{3}$. On trouvera $Q=9022$ ℔, environ. Sans le frottement, la puiſſance ne ſeroit que d'environ 4619 ℔.

Du Frottement dans la vis.

313. Reprenons ici la conſtruction & la démonſtration de l'article 272. La petite puiſſance r

Fig. 125 & 126. (Fig. 125 & 126), qui fait équilibre au petit poids p, en agiſſant ſuivant une direction tangente à la circonférence dont Cp eſt le raïon, a pour valeur $p\times\frac{AB}{\text{circ. } Cp}$, abſtraction faite du frottement. Soit r' la petite puiſſance qui agiſſant de la même manière, fait équilibre au même poids, en ayant égard de plus au frottement. Il eſt clair, par l'article précédent combiné avec l'article 272, qu'on aura,

$$r'=\frac{p\times(AB+n\times\text{circ. } Cp)}{\text{circ. } Cp-n\times AB}.$$

Maintenant, à la place de la puiſſance r', ſubſtituons en une autre q' qui agiſſe en Q ſuivant une direction perpendiculaire à CQ, & dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis. On aura $r':q'::CQ:Cp$, ou bien $q'=r'\times\frac{Cp}{CQ}$. Donc, en mettant pour r' ſa valeur,

$$q'=p\times\frac{Cp\times(AB+n\times\text{circ. } Cp)}{CQ\times(\text{circ. } Cp-n\times AB)}.$$

Dans cette expreſſion de q', la ligne Cp eſt inconnue & variable. Mais comme le poids total P eſt distribué sur tout le filet de la vis, nous pouvons supposer, sans craindre d'erreur sensible dans la pratique, que ce même poids est placé sur la circonférence d'un cercle qui a pour raïon la moyenne arithmétique entre le raïon du cylindre à nu, & le même raïon augmenté de l'épaisseur formé par le relief du filet de la vis. Supposons que Cp soit cette moyenne arithmétique, qui est une quantité constante & donnée; & nommons Q' la somme de toutes les puissances q' qui font équilibre à la somme de tous les poids p, & au frottement; nous aurons sensiblement,

$$Q' = P \times \frac{Cp \times (AB + n \times \text{circ.}\, Cp)}{CQ \times (\text{circ.}\, Cp - n \times AB)},$$

valeur que doit avoir la puissance Q', appliquée en Q pour que l'écrou soit au moment de tourner, & le poids de s'élever le long des filets de la vis, malgré sa pesanteur & la résistance du frottement.

Du Frottement dans le coin.

314. L'essai de calcul que je vais donner pour déterminer le frottement dans le coin, ne doit être regardé que comme un problême de Géométrie, qui est simplement relatif à la matière en question, & qui vraisemblablement n'aura jamais d'application dans la pratique; car la théorie mathématique de l'équilibre de cette machine étant encore imparfaite, comme nous l'avons remarqué, on sent que celle de son frottement doit l'être bien davantage. Quoi qu'il en soit, voici comment on pourroit évaluer le frottement dans le coin, si cet instrument & les par-

ties du corps à fendre étoient d'une dureté & d'une inflexibilité parfaites.

Fig. 139. 315. Soit un coin isoscèle AED (Fig. 139), introduit dans la fente d'un corps MN, & chargé au milieu de sa tête horisontale AD, d'un poids P qui seroit en équilibre avec les résistances du corps à fendre, s'il n'y avoit point de frottement. Supposons que pour vaincre le frottement, ou pour faire glisser les faces du coin le long de celles de la fente, il faille ajouter au poids P un autre poids p. Représentons le poids résultant $P+p$, par la partie BF de sa direction; & décomposons-le en deux autres forces BC, BK, perpendiculaires aux points d'attouchements des faces du coin avec celles de la fente. Chacune de ces deux forces égales sera exprimée par $(P+p)\times\frac{AE}{AD}$; & elles produiront chacune un frottement qui sera exprimé par $n(P+p)\times\frac{AE}{AD}$, n étant toujours le rapport du frottement à la pression. De ces deux frottements égaux que je représente par les côtés Eg, Eh du parallèlogramme lozange $Egfh$, résulte, dans le sens vertical EO, une résistance exprimée par la diagonale Ef, résistance qui, à cause de Ef double de Et, & des triangles semblables Egt, EAO, a évidemment pour valeur $2n(P+p)\times\frac{AE}{AD}\times\frac{EO}{EA}$ ou $2n(P+p)\times\frac{EO}{AD}$. Et comme cette même résistance doit être égale au poids p destiné à lui faire équilibre, on aura

$$p = 2n(P+p) \times \frac{EO}{AD};$$

d'où l'on tire,

$$p = \frac{2nP \times EO}{AD - 2n \times EO}.$$

SECTION II.

* *De la Roideur des cordes.*

316. Il eſt conſtant par l'expérience qu'une corde donnée eſt d'autant plus roide, ou fait d'autant plus de difficulté à ſe plier,

1°. Qu'elle eſt tendue avec plus de force, ou qu'elle eſt chargée d'un plus grand poids;

2°. Qu'elle eſt plus groſſe;

3°. Qu'elle s'enveloppe autour d'un plus petit rouleau.

Mais on ne connoît pas bien préciſément la loi ſuivant laquelle ces trois éléments concourent à produire la roideur de la corde.

317. La plûpart des Auteurs, qui ont écrit ſur cette matière, prennent pour hypothèſe que *la roideur d'une corde eſt en raiſon compoſée du poids qui tend la corde, du raïon de la corde, & de l'inverſe du raïon du rouleau autour duquel elle s'enveloppe.* Cette régle, que j'adopte, comme aſſez conforme à l'expérience, ſuppoſe que les différentes cordes dont on veut comparer les roideurs, ſont de même eſpèce, c'eſt-à-dire également neuves, également torſes, &c.

La vîteſſe avec laquelle une corde ſe plie, influe auſſi ſur ſa roideur ; mais nous n'aurons pas égard à cette circonſtance, parce qu'il ne s'agit ici que de mouvements prêts à naître.

318. De tous les moyens qu'on a propoſés pour éprouver la roideur des cordes, voici celui qui me paroît le plus ſimple & le plus exact.

Fig. 140 & 141. Soient (Fig. 140 & 141) deux poulies *OCM*, *VDN*, parfaitement mobiles par leurs eſſieux ſur des appuis fixes, & chargées, à l'aide de cordes de différents diamètres, la première, des deux poids égaux *P* & *Q*; la ſeconde, des deux poids auſſi égaux *R* & *S*. Je ſuppoſe que pour troubler l'équilibre, ou pour vaincre les frottements & les roideurs des cordes, il faille ajouter au poids *P* un petit poids connu *p*, & au poids *R* un petit poids connu *r*. Il s'agit de trouver directement les parties pour leſquelles les frottements & les roideurs des cordes entrent dans les poids additionnels *p* & *r*. Nommons

le raïon de l'eſſieu de la poulie *OCM*. . . . a,
le raïon de cette même poulie. . . . . b,
le raïon de la corde *PCQ*. . . . . c,
le raïon de l'eſſieu de la poulie *VDN*. . . . l,
le raïon de cette même poulie. . . . . m,
le raïon de la corde *RDS*. . . . . h,
la partie du poids *p*, deſtinée à vaincre le frottement. . . . . x,
la partie du même poids *p*, deſtinée à vaincre la roideur de la corde *PCQ*. . . . . y,
la partie du poids *r*, deſtinée à vaincre le

frottement

frottement . . . . z,
la partie du même poids r, destinée à vaincre la roideur de la corde RDS . . . . u,
le rapport du frottement à la pression . . . . n.

Nous avons ici cinq inconnues à déterminer, sçavoir x, y, z, u, n. Or,

1°. On a, comme il est évident,

$$(A) \qquad x + y = p;$$
$$(B) \qquad z + u = r.$$

2°. La pression totale sur l'essieu de la poulie OCM étant ici $2P + p$, il est clair (303) qu'on aura

$$(C) \qquad bx = n(2P + p)a.$$

De même, on aura

$$(D) \qquad mz = n(2R + r)l.$$

3°. On aura, en vertu de l'hypothèse que nous avons adoptée sur la roideur des cordes,

$$y : u :: \frac{(2P + p)c}{b} : \frac{(2R + r)h}{m};$$

d'où l'on tire

$$(E) \quad bh(2R + r)y = mc(2P + p)u.$$

Comparant ensemble les cinq équations (A), (B), (C), (D), (E) suivant les régles ordinaires de l'Algèbre, on trouvera

$$x = \frac{p(2R + r)bha - r(2P + p)cma}{(2R + r).(bah - bcl)},$$

$$y = \frac{r(2P + p)cma - p(2R + r)bcl}{(2R + r).(bah - bcl)},$$

$$z = \frac{p(2R + r)bhl - r(2P + p)cml}{(2P + p).(amh - cml)},$$

$$u = \frac{r(2P+p)amh - p(2R+r)bhl}{(2P+p).(amh - cml)},$$

$$n = \frac{p(2R+r)bh - r(2P+p)cm}{(2P+p).(2R+r).(ah - cl)}.$$

319. Il eſt bon de lever, au ſujet de ces formules, une difficulté analytique qui pourroit embaraſſer quelques Lecteurs.

Lorſque les raïons des eſſieux ſont entr'eux comme ceux des cordes, ou qu'on a $ah = cl$, les dénominateurs des fractions propoſées deviennent zèro, parce qu'on a $ah - cl = 0$, $bah - bcl = 0$, $amh - cml = 0$; d'où il paroît s'enſuivre que les valeurs de x, y, z, u, n ſont infinies. Mais il faut conſidérer que dans ces mêmes fractions, les numérateurs deviennent zèro dans la même hypothèſe. En effet, les équations (C), (D), (E), donnent,

$$x : z :: am(2P+p) : bl(2R+r),$$
$$y : u :: mc(2P+p) : bh(2R+r).$$

Mettant pour l ſa valeur $\frac{ah}{c}$ dans la première de ces deux proportions, on aura

$$x : z :: mc(2P+p) : bh(2R+r).$$

Donc, $x : z :: y : u$, & $x+y : z+u :: x : z :: y : u$; c'eſt-à-dire, $p : r :: am(2P+p) : bl(2R+r) :: mc(2P+p) : bh(2R+r)$; d'où l'on tire,

$$p(2R+r)bl = r(2P+p)am,$$
$$p(2R+r)bh = r(2P+p)mc.$$

équations qui, avec l'équation $ah = cl$, donnent

$$p(2R+r)bha = r(2P+p)cma,$$

$$r(2P+p)cma=p(2R+r)bcl,$$
$$p(2R+r)bhl=r(2P+p)cml,$$
$$r(2P+p)amh=p(2R+r)bhl.$$

Donc, les numérateurs des valeurs de x, y, z, u, n, deviennent zèro, en même temps que leurs dénominateurs. Donc alors ces valeurs pourroient être infinies, ou zèro, ou finies, si on les considéroit d'une manière abstraite, & sans rapport à la question. Mais dans le cas présent, elles sont nécessairement finies, par la nature du problême ; & voici comment on peut les déterminer.

320. On a ici, comme dans l'hypothèse générale, $x+y=p$, $z+u=r$. De plus, à cause de $ah=cl$, on a, comme on l'a vu, $x:z::y:u$, ou $xu=yz$. On a encore $bx=n(2P+p)a$. Voilà quatre équations entre les cinq inconnues x, y, z, u, n; & on ne peut pas en former d'autres qui ne reviennent, dans le fond, à ces quatre-là. Donc, dans ce cas particulier, le problême est indéterminé. Mais si l'on suppose, par exemple, que x soit une certaine partie *donnée* de p; c'est-à-dire, si l'on fait $x=\frac{p}{t}$, t étant un nombre positif plus grand que l'unité, on trouvera $y=p-\frac{p}{t}$, $z=\frac{r}{t}$, $u=r-\frac{r}{t}$, $n=\frac{bp}{t(2P+p)a}$. On voit qu'il faut se donner l'une des cinq inconnues, pour pouvoir déterminer les quatre autres.

321. J'ai fait quelques expériences sur la roideur

des cordes. En voici une que je crois fort exacte ; & qui s'accorde assez bien avec les calculs précédents.

On a suspendu bien à plomb une poulie fort legère qui avoit 10 pouces 6 $\frac{1}{2}$ lignes de diamètre à nud. Elle étoit traversée quarrément par un essieu de buis de 8 lignes de diamètre, & elle tournoit librement sur les appuis de cet essieu. J'ai pris deux cordes neuves, peu torses, dont la première avoit 9 lignes de diamètre, la seconde 13 lignes de diamètre ; & ayant appliqué successivement ces deux cordes à la poulie, j'ai attaché à chacun des deux bouts de la corde dans les deux cas, un poids de 100 livres 12 onces. Cela fait, j'ai trouvé que pour commencer à faire descendre l'un des poids, ou pour vaincre le frottement & la roideur de la corde, il falloit ajouter un poids de 6 livres, lorsqu'on se servoit de la petite corde, & un poids de 7 livres 8 onces, lorsqu'on se servoit de la grosse corde.

En supposant que l'action d'une corde s'exerce suivant la direction de son axe, il est clair que lorsqu'on se sert de la petite corde, le diamètre de la poulie proposée doit être censé de 11 pouces 3 $\frac{1}{2}$ lignes, & qu'en se servant de la grosse corde, le diamètre de la poulie est de 11 pouces 7 $\frac{1}{2}$ lignes. Nous aurons donc ici, $P = R =$ 100 livres 12 onces $= 100,75$ livres ; $P = 6$ livres ; $r = 7$ livres 8 onces $= 7,5$ livres ; $2P + p = 207,5$ livres ; $2R + r = 209$ livres ; $2a = 2l = 8$ lignes ; $2b = 135,5$ lignes ; $2m = 139,5$ lignes ; $2c = 9$ lignes ; $2h = 13$ lignes. Mettons ces valeurs dans les formules générales de l'article 318, nous trouverons, à peu de chose près,

$$\left.\begin{array}{l} x=2,251 \\ y=3,749 \\ z=2,158 \\ u=5,342 \end{array}\right\} \text{livres.}$$

$$n=0,1837, \text{ nombre abstrait.}$$

D'où l'on voit que pour vaincre le frottement, il faut dans l'un & l'autre cas, un poids d'un peu plus de 2 livres; mais que la roideur de la petite corde est équivalente à un poids d'un peu moins de 4 livres, & celle de la grosse à un poids d'un peu plus de 5 livres. On voit aussi que le frottement est un peu plus que la sixiéme partie de la pression.

322. Je finis par l'application de nos principes à une *Grue*, propre à élever des pierres ou d'autres fardeaux très-pesants.

Dans cette machine (Fig. 142), le poids *P* est suspendu à une poulie *a* embrassée par une corde dont la partie 1 est attachée à un crochet fixe; l'autre partie passe sur la poulie *b*, sur la poulie *c*, & va s'entortiller autour du cylindre *O F*. Une puissance Q appliquée à la circonférence de la roue *Q N* est au moment de faire monter le corps *P*, en surmontant sa pesânteur, le frottement & la roideur de la corde. Pour soutenir la corde dans l'intervalle *b c*, on a mis en *d* & *e* deux petits rouleaux qui étant très-mobiles sur leurs essieux, & n'éprouvant qu'une très-legère pression, ne peuvent occasionner qu'un Fig. 142.

frottement insensible & par conséquent négligeable. Je nomme en général,

le raïon de l'essieu de chacune des trois poulies égales a, b, c, ... a,
le raïon de chacune des mêmes poulies, en y comprenant celui de la corde . . . . . . b,
le raïon de la corde . . . . c,
le raïon des tourillons du cylindre . . . . f,
le raïon du cylindre, en y comprenant celui de la corde . . . . g,
le raïon de la roue . . . . k,
l'effort qu'il faut ajouter à la tension du cordon 2, pour vaincre tout à-la-fois le frottement & la roideur de la corde . . . . x,
la tension totale du même cordon . . . . X,
l'effort qu'il faut ajouter à la tension du cordon 3, pour vaincre tout-à-la-fois le frottement & la roideur de la corde . . . . y,
la tension totale du même cordon . . . . Y,
l'effort qu'il faut ajouter à la tension du cordon 4, pour vaincre tout-à-la-fois le frottement & la roideur de la corde . . . . z,
la tension totale du même cordon . . . . . . Z,
le rapport du frottement à la pression . . . . n.

De plus, je suppose qu'une corde dont le raïon est h, sous une pression connue que je nomme N, en se pliant autour d'une poulie, dont le raïon augmenté de celui de la corde est m, ait une roideur égale à un poids q. Ces quantités h, N, m, q sont données par l'expérience rapportée dans l'article précédent.

Cela posé, 1°. on voit (304) que la poulie *a* étant mobile, & les deux cordons 1, 2 étant verticaux, du moins sensiblement, le frottement de l'essieu de cette poulie est nP. Et comme ce frottement a pour bras de levier le raïon de l'essieu, tandis que la force employée à le vaincre, & appliquée au cordon 2, a pour bras de levier, le raïon de la poulie ; il s'ensuit que l'expression de cette dernière force est $\frac{nPa}{b}$. De plus, on observera qu'en faisant cette proportion, $\frac{Nh}{m} : q :: \frac{Pc}{b}$: un quatrième terme, ce quatrième terme $\frac{qmcP}{bhN}$ exprimeroit (317) la roideur de la corde appliquée à la poulie *a*, si cette poulie étoit fixe. Mais comme cette poulie est mobile, & qu'au moment où elle est un peu soulevée par la force appliquée au cordon 2, il se fait dans la corde un petit mouvement angulaire au point *i*; il paroît que la corde doit faire, à peu près, la même difficulté à se plier, que si on l'enveloppoit sur une poulie fixe qui auroit pour raïon le diamètre de la poulie *a*. Ainsi sa roideur sera représentée, au moins sensiblement, par $\frac{qmcP}{2bhN}$. Cette force, jointe au frottement, doit être égale à x; ce qui donne $x = \frac{naP}{b} + \frac{qmcP}{2bhN}$. Donc,

Q iv

$x = \frac{2bhNnaP + bqmcP}{2b^2hN}$

à cause de $X = \frac{P}{2} + x$, on aura,

$$X = \frac{P}{2} + \frac{naP}{b} + \frac{qmcP}{2bhN};$$

ou bien

$$X = \frac{P}{2} \times \left(1 + \frac{2na}{b} + \frac{qmc}{bhN}\right). \quad (A)$$

2°. S'il n'y avoit point de frottement ni de roideur de corde à vaincre pour la poulie fixe b, les deux cordons 2 & 3 seroient tendus également, avec une force exprimée par X; & il est évident que ces cordons étant, au moins sensiblement, l'un vertical, l'autre horizontal, il est clair, dis-je, qu'en vertu de leurs tensions, il résulteroit aux appuis de l'essieu de cette poulie, une pression exprimée par $X\sqrt{2}$. Mais ici la pression est exprimée, à la rigueur, par $\sqrt{[X^2 + Y^2]}$. Néanmoins, comme Y ne différe pas beaucoup de X, & qu'en supposant ces deux quantités égales entr'elles, le calcul devient beaucoup plus simple, je prendrai $X\sqrt{2}$, pour la valeur approchée de la pression. Ainsi, dans la poulie fixe b, l'expression du frottement sera $nX\sqrt{2}$; & celle de la roideur de la corde, sera $\frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$. Le frottement ayant pour bras de levier le raïon de l'essieu, tandis que la force destinée à le vaincre, & appliquée au cordon 3, a pour bras de levier, le raïon de la poulie, il est clair que la valeur de cette derniére force est $\frac{naX\sqrt{2}}{b}$. Joignons-la à la roi-

(A) En ayant égard au dénominateur de la valeur de x, lequel est 2bchN deur $\frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$; & nous aurons une ſomme qui doit être égale à y; ce qui donne, $y = \frac{naX\sqrt{2}}{b} + \frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN}$. Donc, à cauſe de $Y = X + y$, on aura,

$$Y = X + \frac{naX\sqrt{2}}{b} + \frac{qmcX\sqrt{2}}{bhN};$$

ou bien

$$Y = X \times \left(1 + \frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{qmc\sqrt{2}}{bhN}\right).$$

3°. En raiſonnant pour la poulie c, exactement de la même manière que pour la poulie b, on trouvera,

$$Z = Y \times \left(1 + \frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{qmc\sqrt{2}}{bhN}\right).$$

Maintenant, la puiſſance Q doit faire équilibre à la tenſion Z, au frottement des tourillons du cylindre, & à la roideur de la corde qui s'enveloppe autour du cylindre. Suppoſons que la puiſſance Q agiſſe verticalement, de haut en bas; la réſiſtance Z agiſſant auſſi verticalement, mais de bas en haut. Il eſt évident que la preſſion des tourillons ſera $Z - Q$; & que par conſéquent la valeur du frottement, ſera $n(Z - Q)$. Ce frottement a pour bras de levier le raïon des tourillons du cylindre; ſuppoſons que, pour le vaincre, on employe une force appliquée à l'extrémité du raïon du cylindre; il eſt clair que cette force ſera $\frac{nf(Z-Q)}{g}$. Quant à la difficulté que la corde doit faire à s'envelopper autour du cylindre, nous obſerverons, pour la déterminer, que conſéquemment à la manière dont nous avons fait entrer ci-deſſus la tenſion d'une corde qui paſſe ſur une poulie, & qui eſt chargée de deux poids, dans l'expreſſion de ſa roideur, nous devons conſidérer ici notre corde comme ſi elle étoit chargée de deux poids, exprimés chacun par Z; d'où il ſuit (317) que la roideur de cette même corde ſera repréſentée par $\frac{2qmcZ}{ghN}$. Nous avons donc maintenant trois forces qui agiſſent à l'extrémité du raïon du cylindre; ſavoir, Z, $\frac{nf(Z-Q)}{g}$, $\frac{2qmcZ}{ghN}$. Ces trois forces doivent faire équilibre à la puiſſance Q qui agit à l'extrémité du raïon de la roue. Donc on aura (219), $Q \times k = Z \times g + \frac{nf(Z-Q)}{g} \times g + \frac{2qmcZ}{ghN} \times g$; d'où l'on tire,

$$Q = \frac{Z}{k+nf} \times \left(g + nf + \frac{2qmc}{hN}\right).$$

Comme tout eſt connu ou déterminable dans le ſecond membre, on connoîtra auſſi Q.

Exemple.

Suppoſons le fardeau $P = 10000$ livres; le raïon de l'eſſieu de chaque poulie $= 9$ lignes; le raïon de chaque poulie, en y comprenant celui de la corde $= 9$ pouces; le raïon de la corde $= 15$ lignes; le raïon des tourillons du cylindre $= 9$ lignes; le raïon du cylindre, en y comprenant celui de la corde

$= 6$ pouces; le raïon de la roue $= 6$ pieds. De plus, prenons pour hypothèses, que le frottement soit $\frac{1}{5}$ de la pression; & qu'une corde de 9 lignes de diamètre, sous une pression de 208 livres, en se pliant autour d'une poulie de 11 pouces $3 \frac{1}{2}$ lignes de diamètre, ait une roideur équivalente à un poids de 4 livres en nombre rond; ce qui est conforme, à peu de chose près, à l'expérience de l'article 321. On aura donc, $P = 10000$ livres; $a = 9$ lignes; $b = 9$ pouces; $c = 15$ lignes; $f = 9$ lignes; $q = 6$ pouces; $k = 6$ pieds; $n = \frac{1}{5}$; $h = 4,5$ lignes; $m = 67,75$ lignes; $N = 208$ livres; $q = 4$ livres. D'après ces données, on trouvera (en ne poussant le calcul des parties décimales que jusqu'aux milliémes),

$$\frac{mq}{hN} = \frac{271}{936},$$

$$\frac{2na}{b} + \frac{cmq}{bhN} = 0,073;$$

$$\frac{na\sqrt{2}}{b} + \frac{cmq\sqrt{2}}{bhN} = 0,071;$$

$$\frac{g}{k+f} = 0,072;$$

$$\frac{nf + \frac{2cmq}{hN}}{k+fn} = 0,012;$$

d'où il suit qu'on aura, à peu de chose près,

$$X = 5365 \text{ livres.};$$
$$Y = 5745,916;$$
$$Z = 6153,875;$$
$$Q = 516,926.$$

Ainsi la puissance Q, nécessaire pour commencer à mettre le poids P en mouvement, sera de près de 517 livres. Sans le frottement & la roideur de la corde, la puissance ne seroit que d'environ 417 livres, comme on peut le trouver directement (185 & 207); ou comme on peut le conclure des formules précédentes, en supposant que dans les valeurs de X, Y, Z, Q, on a $n=0$, $q=0$. On voit que le frottement & la roideur de la corde augmentent la puissance d'une quantité considérable. Il est donc essentiel de ne pas négliger ces deux résistances, si l'on veut déterminer l'effet d'une machine avec une certaine précision.

On peut remarquer que dans les poulies b & c la corde n'embrasse pas tout-à-fait un demi-cercle; ce qui diminue un peu sa roideur. Mais aussi, nous avons négligé quelque chose dans l'estimation des pressions que souffrent les appuis des essieux de ces poulies; d'où résulte une espèce de compensation. Ainsi les calculs précédents ne doivent pas s'éloigner beaucoup de la vérité, du moins dans les hypothèses sur le frottement & sur la roideur de la corde, qui en sont les éléments.

Fin de la première Partie.

TABLE
DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉLÉMENS DE STATIQUE.

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de Chardon, rue Galande. 1772.

ERRATA.

Pages,	lignes,	Fautes,		Corrections.
96,	1.	ces	*lisez*	les
Ibid.	13,	BC	*lisez*	Bc
122,	3,	GNE	*lisez*	$GN'E$
Ibid.	15 & 21,			*même correction.*
123,	9, *à la fin*,	At	*lisez*	Ab
132,	17,	verticle	*lisez*	verticale
141,	21,	BF	*lisez*	AF
159,	14,	CF	*lisez*	OF
168,	13,	$3s+m$	*lisez*	$3s-m$
211,	13,	b sin. a	*lisez*	b sin. u

ERRATA *pour le Traité d'Hydrodynamique.*

Il s'est glissé plusieurs fautes d'impression dans mon Hydrodynamique. On en a indiqué quelques-unes dans les deux Errata qui accompagnent cet Ouvrage. En voici d'autres qu'on prie encore le Lecteur de pardonner & de corriger.

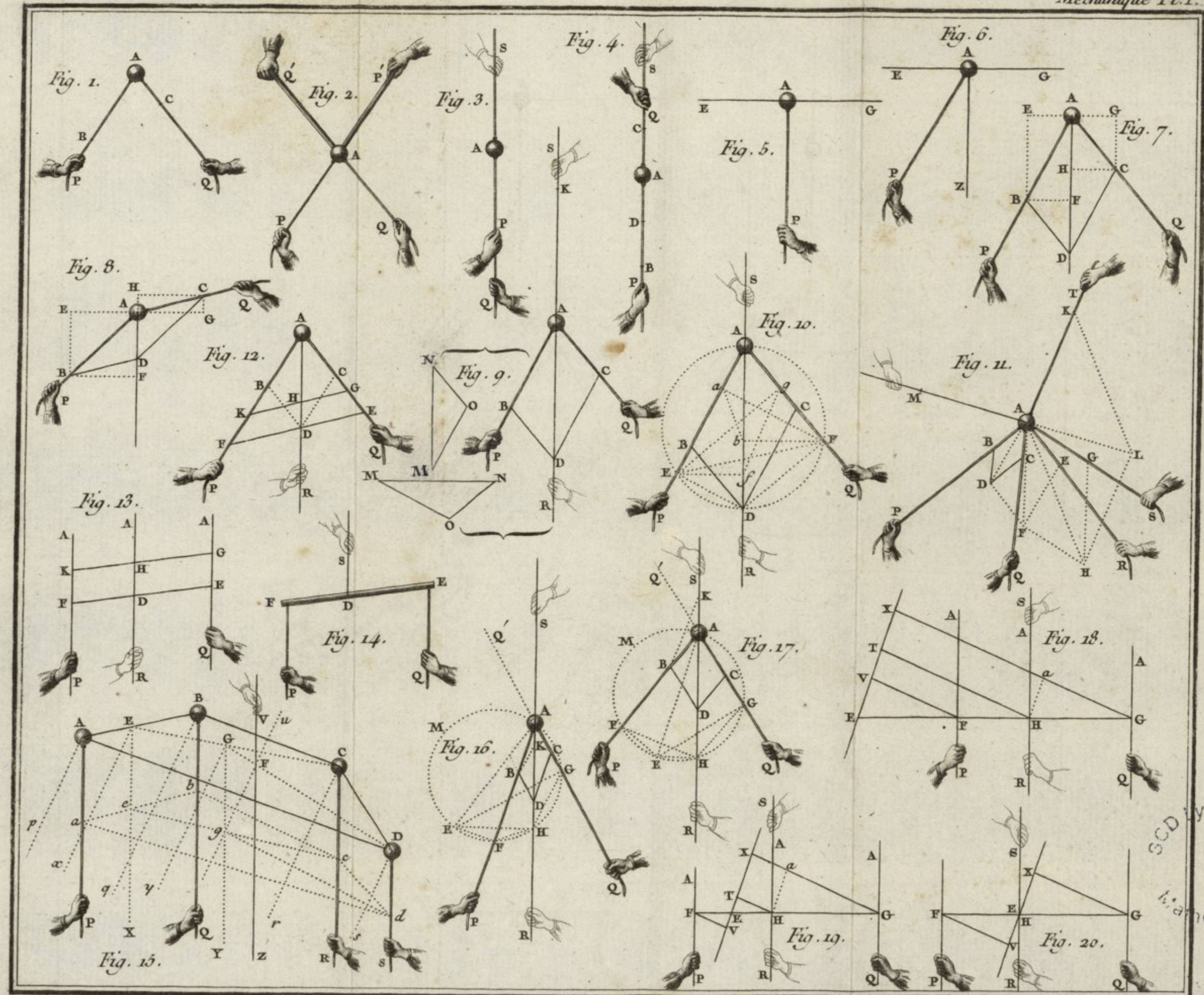
Tome I.

Pages, lignes,	Fautes,		Corrections.
35, *dernière*,	3 lignes	*lisez*	$\frac{1}{2}$ ligne
214, 20,	$EeDd$	*lisez*	Ee, Dd
265, 3,	$(H-h)^2$	*lisez*	$(H-h)^4$
266, 11,			*même correction.*
273, 22,	comparison	*lisez*	comparaison
344, 27,	RO	*lisez*	QO
345, 17,	la	*lisez*	sa
360, 5, *au commenc.*	$-gydx$	*lisez*	$-\frac{gydx}{Ku}$
372, 9,	doublée	*lisez*	sou-doublée
373, 10,	doublée	*lisez*	sou-doublée

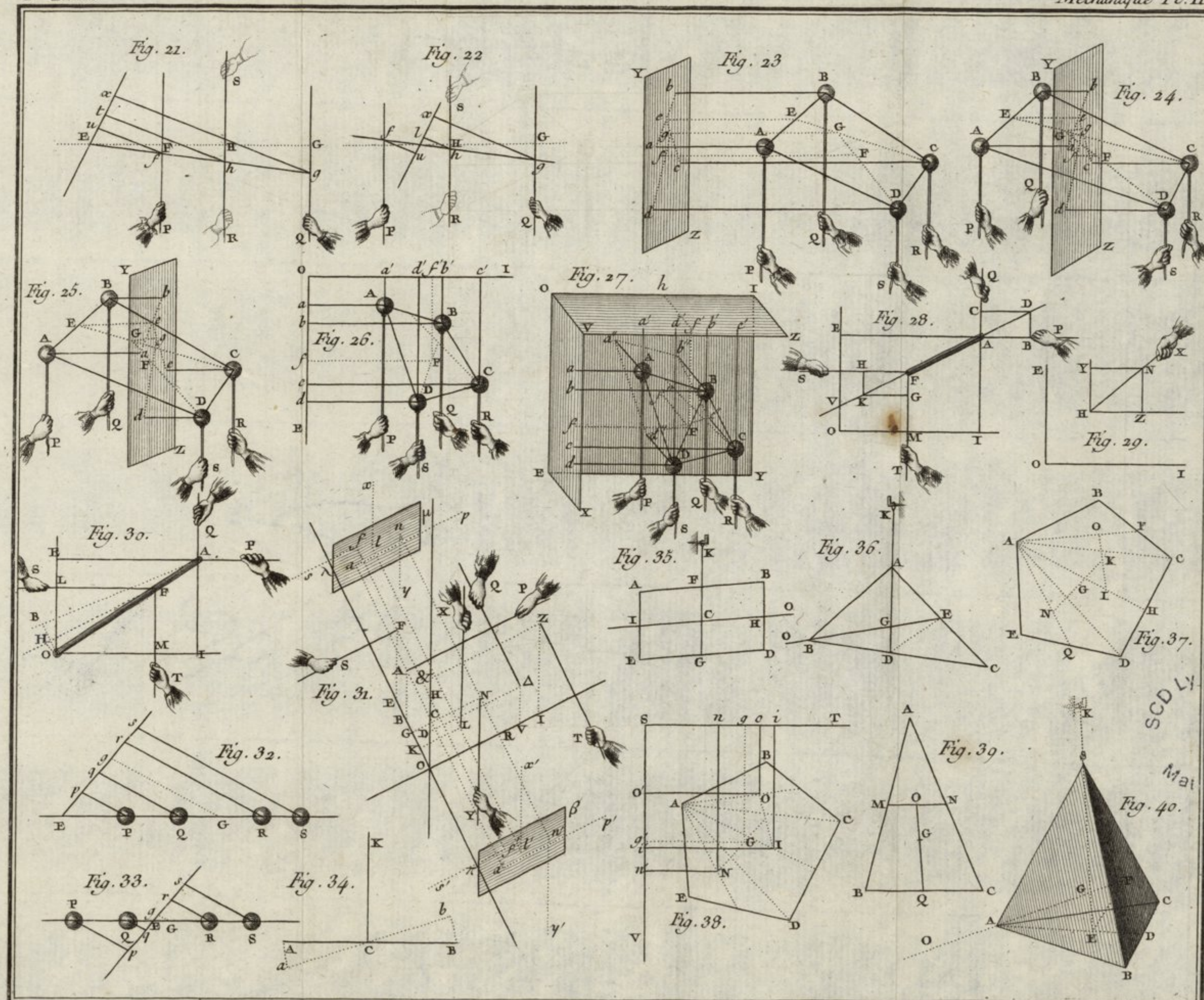
Tome II.

Pages, lignes.		Fautes,		Corrections.
41,	24,	1553	*lisez*	1353
44,	1,	de 1	*lisez*	de 1 pouce
Ibid,	19, *après le mot*	petit	*ajoutez*	trou
96,	7,	diamètre	*lisez*	hauteur
101,	10,	*m n u h*	*lisez*	*m n u b*
Ibid,	26,		*même*	*correction.*
139,	12,	FR	*lisez*	LR
167,	7, *après le mot*	pouces	*ajoutez*	cubes
Ibid,	14,		*même*	*correction.*
300,	15,	perpendiculairement	*lisez*	parallèlement
306,	1, *après le mot*	percussion	*ajoutez*	oblique
311,	20,	cylindrique	*lisez*	cylindre
323 & 324	*Dans le cours des articles 746 & 747, au lieu de* Fig. 76, *lisez* Fig. 77.			
403,	15,	na^2V	*lisez*	na^2V^2
422,	11,	32 pieds	*lisez*	32×850 ou 27200 pieds

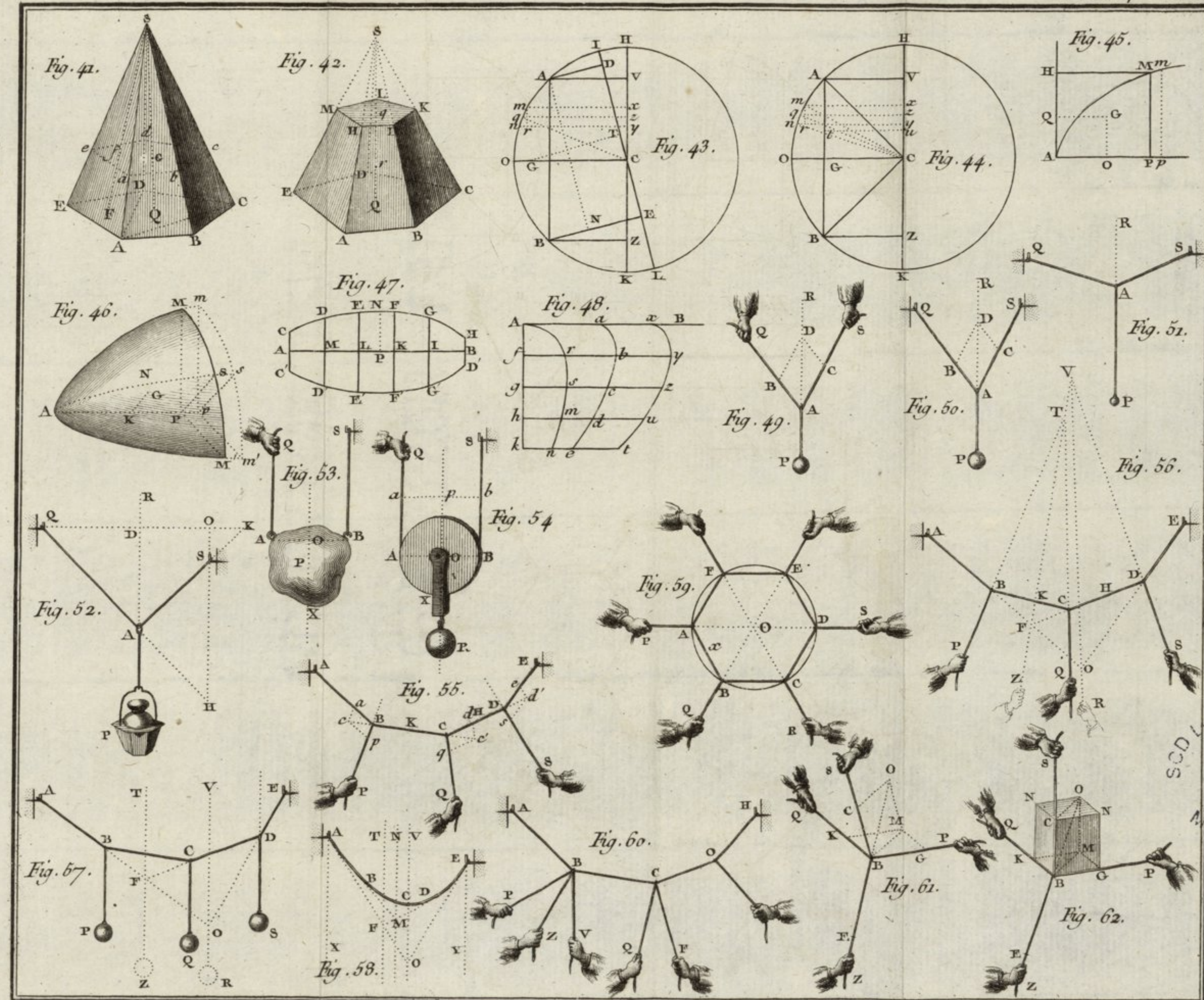
On voit que la plûpart de ces fautes portent sur des choses peu essentielles, & sont d'ailleurs faciles à reconnoître ; mais comme elles altèrent le sens, il est bon de les corriger à la plume, avant que de commencer la lecture des Ouvrages dont il s'agit.



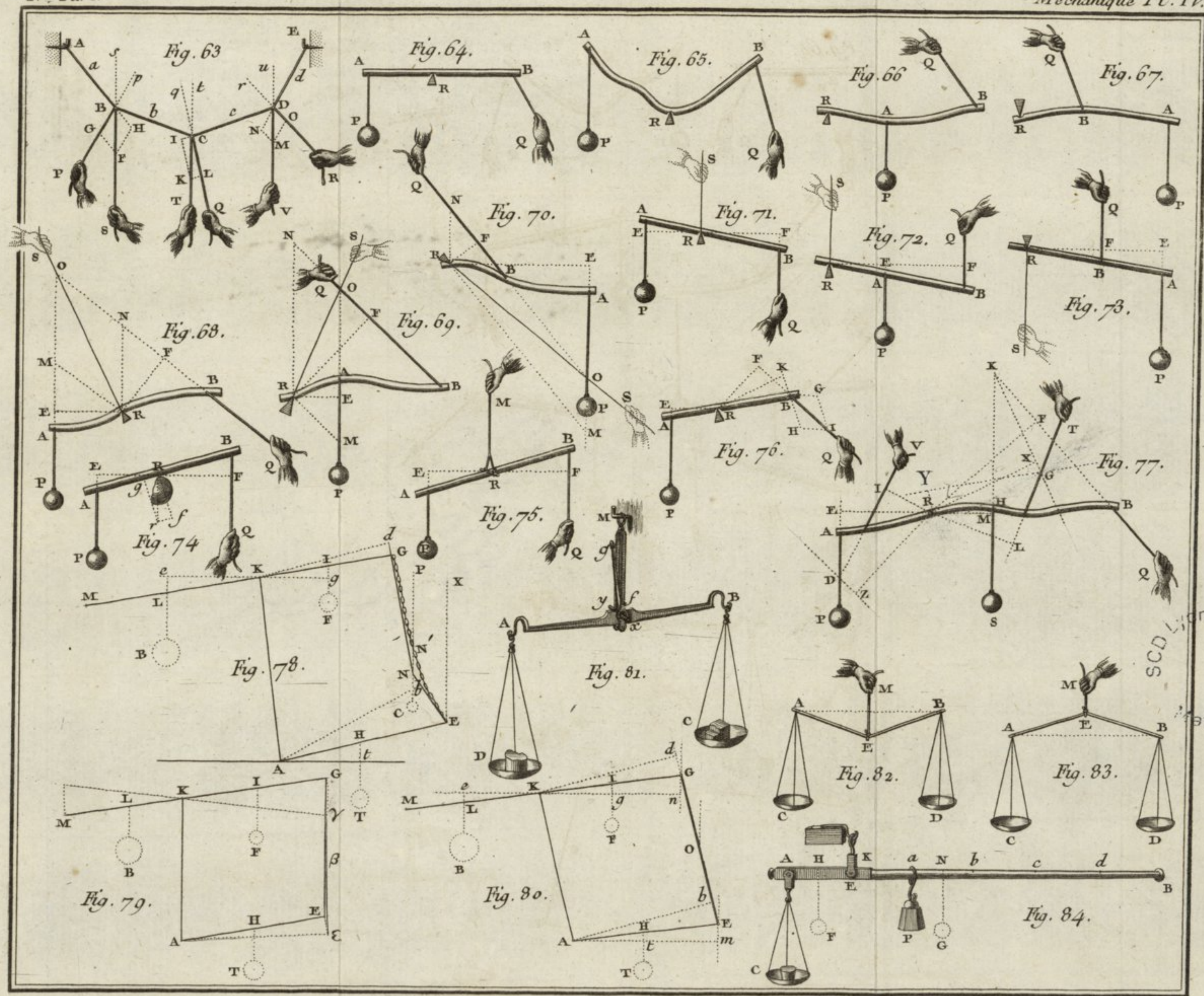
de la Gardette del. et Sculp



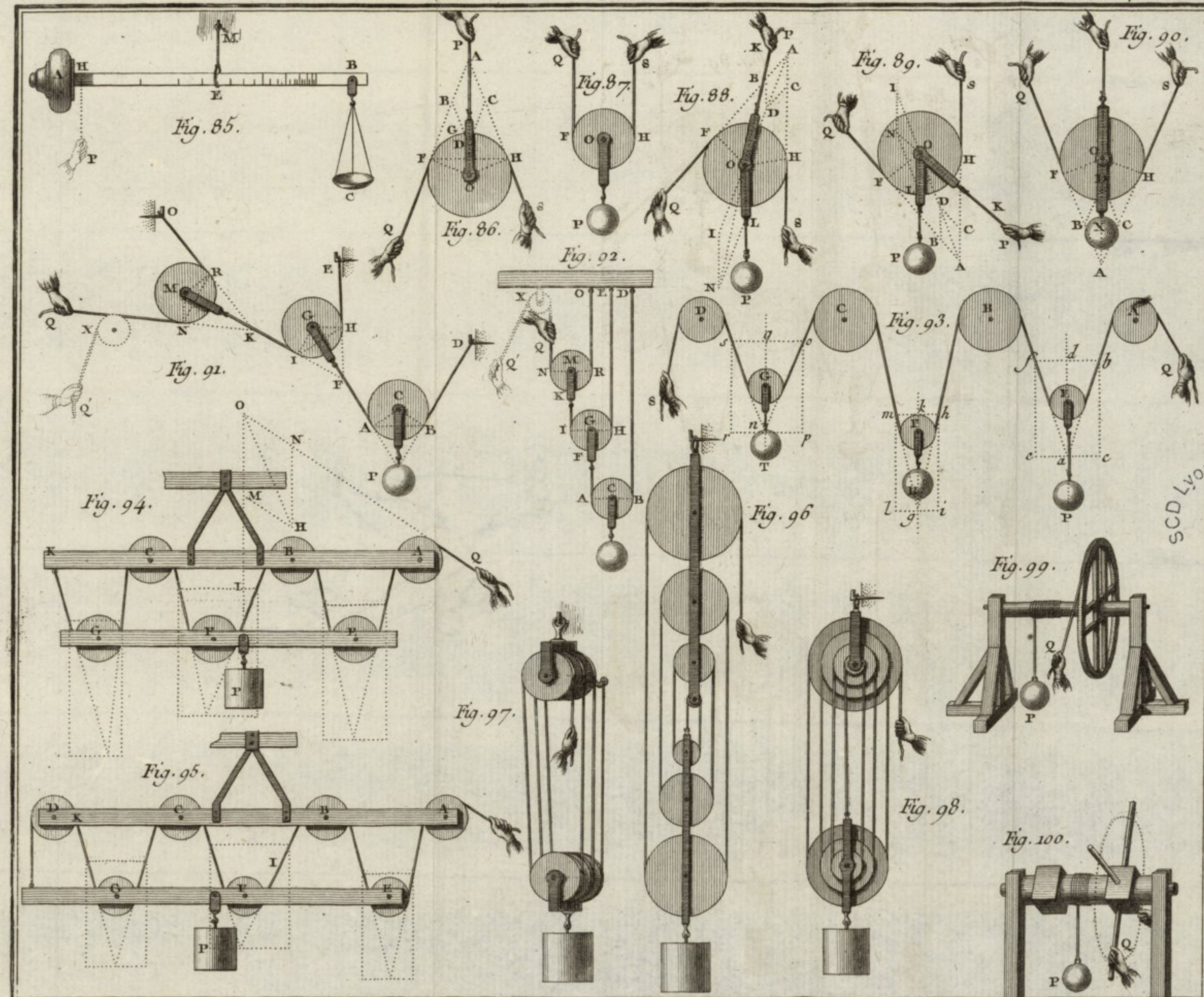
de la Gardette del. et Sculp.



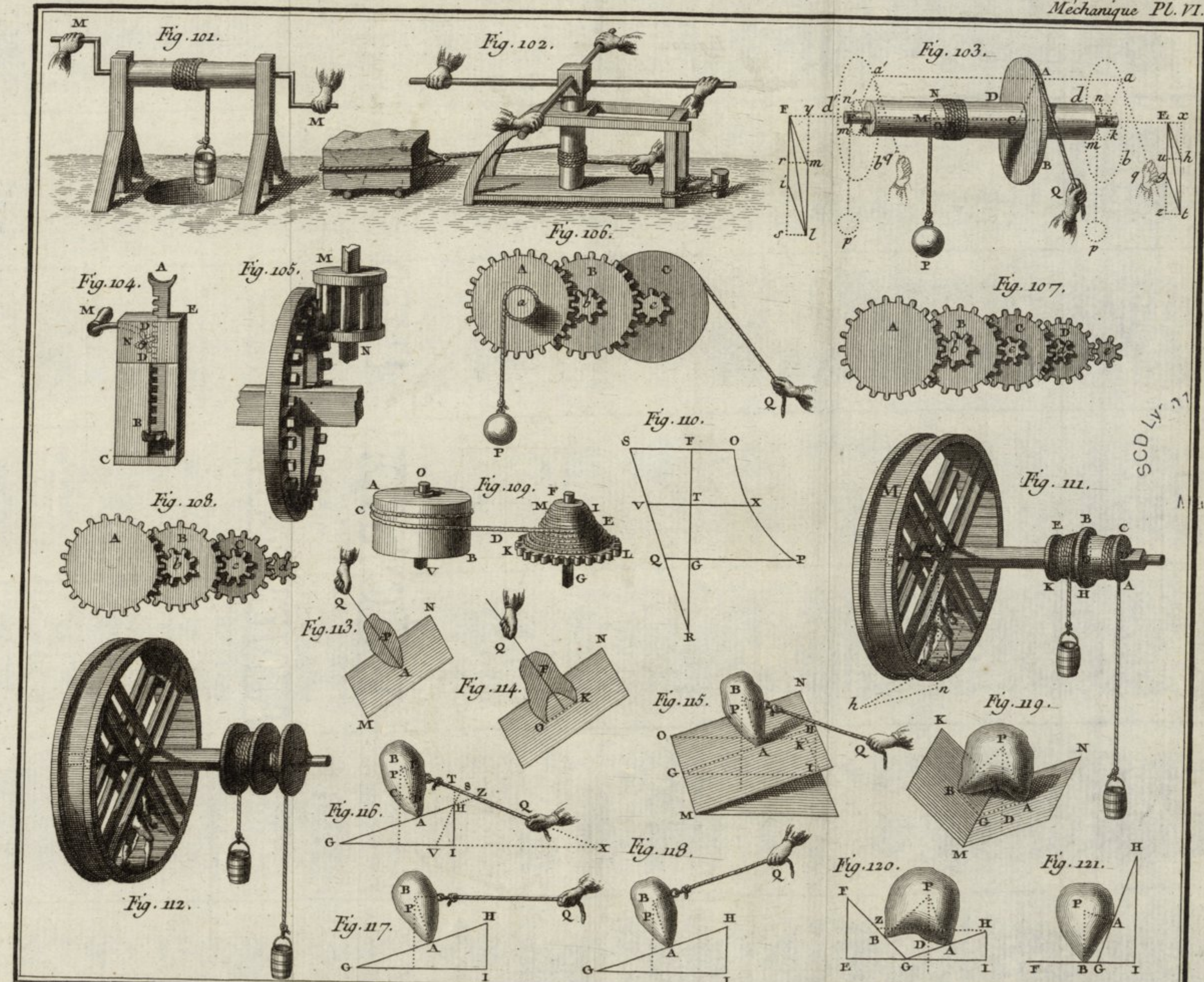
de la Gardette del. et Sculp.



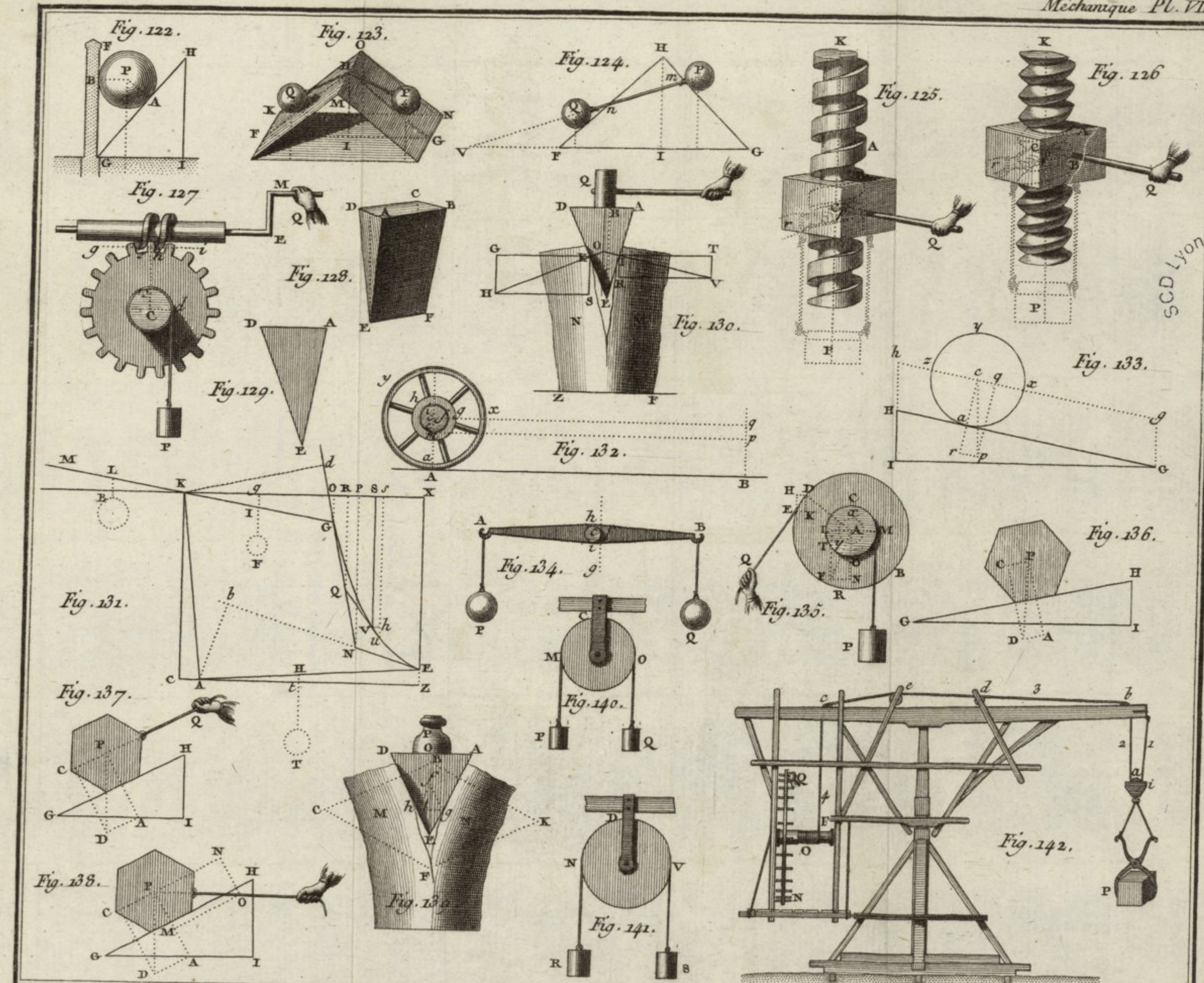
de la Gardette del. et Sculp.



de la Gardette del. et Sculp.



de la Gardette del. et Sculp.



de la Gardette del. et Sculp.

2