ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:

METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.

PER
Is. BARROW, Exprofessorem *Lucasianum* CANTAB.
& Societatis Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Rob. Scott*, in vico
Little Britain. 1675.

ARCHIMEDIS OPERA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè

DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI;

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico Little-Britain. 1675.

Lectori.

Vetustos authores, scientiarum parentes, abi interitu salvos præstari, posterorum interesse videtur, nè ingrati audiant. Neque tametsi quæ continent pleraque novis artificiis vel promptiùs elici, vel concisiùs astrui possint, fructu penitus destituitur illorum lectio. Nam amænum imprimìs videtur quibus à fundamentis tantum in fastigium evectæ sunt scientiæ dispicere; tum haud inutile fuerit degustare fontes, è quibus cuncta fermè recentiorum inventa dimanârunt; istorum quippe perquam ingeniosas atque subtiles persequendo vel æmulando methodos horum emicuit industria. Porrò sincerum demon-

strandi gustum ac peritiam non aliunde quis opinor feliciùs hauserit, quàm ex iis, quorum in theorematis deducendis præcipuæ relucent solertia ac elegantia; quas ut nemo transgredi possit, ità vix assequi quisquam valeat ab illorum Scriptis peregrinus: Ut taceam, cùm à posteris hæc scripta suis firmandis præsternantur, allegentúrque passim, illorum referre qui hæc studia tractant, ea præstò ad manum, nè dicam ad unguem, habere: Id ut promptè tibi succedat, & quàm exiguo impendio, præstitura videtur hæc editio; saltem præ illis, quæ enormi juxta mole spissæ ac pretio caræ hactenus prostant; sin hæc nihilominus displiceat, det ille quæso tibi pænas, qui amicitiâ præpotenter abusus, me nequicquam reclamante, protrusit hæc crepundia, luci publicæ minimè nata vel debita. Vale.

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

ATqui eos spiritus Archimedes, *eam altitudinem ingenii, tantásque præceptorum divitias tenuit, ut quum per ea nomen atque opinionem sibi paravisset non humanæ sed divinæ scientiæ, nullum de his relinquere commentarium sustinuerit: verùm illa in parandis machinamentis industria, atque adeo omni quæ ad usum se applicaret, & ad utilitatem, arte pro humili & sordida repudiata, in iis tantùm posuerit studium suum, quæ præclara & eximia per se, neque ulli adstricta necessitati essent, non conferenda quidem cum aliis, sed quæ certamen excitent cum materia demonstrationi, quum illa mole & specie, exquisita hæc certitudine & vi excellat incredibili: neque enim implicatiores in geometria & contortas magis quæstiones, in simplicioribus liquidioribúsque conscriptas elementis invenias. Id dexteritati illius ingenij alij attribuunt: alij ad laborem referendum putant potius indefatigatum, quo quidvis eum efficere verisimile sit facilè & citra sudorem potuisse. Nam si quæras, per te non invenias demonstrationem illius quæstionum: Ubi didiceris, potuisse putes te eam vel tua sponte invenire, adeo strata est via atque expedita, quæ ad id quod intendit demonstrare perducit. Quare non sunt rejicienda illa quæ de eo feruntur, à sua quadam & familiari* Archimedem *perpetuò demulcitum Sirene, & cibi oblivisci & corporis curam relinquere solitum: quúmque raperetur subinde invitus ad ungendum corpus & ad balneum in foco figuras geometricas exarare: & dum ungeretur, ducere digito lineas, tanta illum dulcedine artis captum & revera inflammatum fuisse. Quum autem multa, & præclara invenisset, dicitur ab amicis & propinquis petisse ut vita defuncti cylindrum sphæram complectentem sepulcro imponerent, inscriberéntque proportionem, quatenus solidum continens excedat contentum. Atque is* Archimedes *quum esset, invictum se urbémque, quantum in ipso esset, præstitit.*

PLUTARCH. *in vita* MARCELLI.

Pag. 307.

Τηλικοῦτον μέντοι φρόνημα καὶ βάθος ψυχῆς, καὶ τοσοῦτον ἐκέκτητο θεωρημάτων πλοῦτον Ἀρχιμήδης, ὥστε ἐφ' οἷς ὄνομα καὶ δόξαν οὐκ ἀνθρωπίνης ἀλλὰ δαιμονίου τινὸς ἔσχε συνέσεως, μηθὲν ἐθελῆσαι σύγγραμμα, περὶ τούτων ἀπολιπεῖν, ἀλλὰ τὴν περὶ τὰ μηχανικὰ πραγματείαν καὶ πᾶσαν ὅλως τέχνην χρείας ἐφαπτομένην, ἀγεννῆ καὶ βάναυσον ἡγησάμενος, ἐκεῖνα καταθέσθαι μόνα τὴν αὐτοῦ φιλοτιμίαν, εἰς τὸ καλὸν καὶ περιττὸν ἀμιγὲς τοῦ ἀναγκαίου πρόσεστιν, ἀσύγκριτα μὲν ὄντα τοῖς ἄλλοις, ἔριν δὲ παρέχοντα πρὸς τὴν ὕλην τῇ ἀποδείξει, τῆς μὲν τὸ μέγεθος καὶ τὸ κάλλος, τῆς δὲ τὴν ἀκρίβειαν καὶ τὴν δύναμιν ὑπερφυῆ παρεχομένης. οὐ γὰρ ἔστιν ἐν γεωμετρίᾳ χαλεπωτέρας καὶ βαρυτέρας ὑποθέσεις ἐν ἁπλουστέραις λαβεῖν καὶ καθαρωτέραις στοιχείοις γραφομένας. καὶ τοῦθ' οἱ μὲν εὐφυΐᾳ τοῦ ἀνδρὸς προσάπτουσιν, οἱ δὲ ὑπερβολῇ τινι πόνου νομίζουσιν, ἀπόνως πεποιημένῳ καὶ ῥᾳδίως ἕκαστον ἐοικὸς γεγονέναι. ζητῶν μὲν γὰρ οὐκ ἄν τις εὕροι δι' αὐτοῦ τὴν ἀπόδειξιν, ἅμα δὲ τῇ μαθήσει παρίσταται δόξα τοῦ κἂν αὐτὸν εὑρεῖν, οὕτω λείαν ὁδὸν ἄγει καὶ ταχεῖαν ἐπὶ τὸ δεικνύμενον. οὔκουν οὐδὲ ἀπιστῆσαι τοῖς περὶ αὐτοῦ λεγομένοις ἔστιν, ὡς ὑπ' οἰκείας δή τινος καὶ συνοίκου θελγόμενος ἀεὶ σειρῆνος, ἐλέληστο καὶ σίτου καὶ θεραπείας σώματος ἐξέλειπεν· βίᾳ δὲ πολλάκις ἑλκόμενος ἐπ' ἄλειμμα καὶ λουτρὸν, ἐν ταῖς ἐσχάραις ἔγραφεν σχήματα τῶν γεωμετρικῶν, καὶ τοῦ σώματος ἀληλειμμένου διῆγε τῷ δακτύλῳ γραμμὰς, ὑπὸ ἡδονῆς μεγάλης κάτοχος ὢν καὶ μουσόληπτος ἀληθῶς. πολλῶν δὲ καὶ καλῶν εὑρετὴς γεγονὼς λέγεται τῶν φίλων δεηθῆναι καὶ τῶν συγγενῶν, ὅπως αὐτοῦ μετὰ τὴν τελευτὴν ἐπιστήσωσιν τῷ τάφῳ τὸν περιλαμβάνοντα τὴν σφαῖραν ἐντὸς κύλινδρον, ἐπιγράψαντες τὸν λόγον τῆς ὑπεροχῆς τοῦ περιέχοντος στερεοῦ πρὸς τὸ περιεχόμενον. Ἀρχιμήδης μὲν οὖν τοιοῦτος γενόμενος ἀήττητον ἑαυτόν τε καὶ τὴν πόλιν ὅσον ἐφ' ἑαυτῷ διεφύλαξεν.

ARCHI-

ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA & CYLINDRO
LIBER PRIMUS.

Archimedes Dositheo Salutem.

ANtea quidem misi quæ contemplando invenimus, ipsorum adscribentes Demonstrationes; veluti *quòd omnis portio comprehensa sub recta linea, & rectanguli Coni sectione sesquitertia est trianguli habentis eandem basim ac portio, æqualemque altitudinem.* Jam quorundam incidentium Theorematum elaboravimus Demonstrationes, quæ sunt hujusmodi. Primò quidem *quòd Sphæræ superficies quadrupla sit maximi circuli eorum qui in ipsa sunt.* Secundum verò *quòd cujusque portionis sphæræ superficiei æqualis est circulus, cujus radius æquatur rectæ à vertice portionis ductæ ad peripheriam circuli, qui basis est portionis:* adhæc, *quòd omnis sphæræ cylindrus, basin quidem habens eandem maximo, eorum qui in sphæra sunt, circulo, altitudinem verò parem diametro sphæræ, cùm ipse sphæræ sesquialter sit, tum superficies ejus superficiei sphæræ sesquialtera.* Hæc quidem natura præcesserant circa dictas figuras demonstranda, nec tamen ab iis, qui ante nos Geometriæ incubuerunt animadversa sunt; ut intelliget quisquis circa has figuras proposita theoremata cum demonstrationibus contulerit. * Sicut & recepta multa eorum, quæ *Eudoxus* circa Solida speculatus est; veluti *quòd omnis pyramis tertia pars est prismatis basim habentis eandem cum pyramide,*

Pessimè depravatus locus: lego, ταῦτα μὲν τῇ φύσει προϋπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα· οὐ μέντοι γέγονεν ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων τεθεωρημένα, καὶ νοήσειεν ὅ, ἂν--

* pro καὶ lego ὥσπερ.

mide, & parem altitudinem: quodque conus omnis ſubtriplus eſt Cylindri baſin habentis eandem cum Cono, ac æqualem altitudinem: quippe cùm etiam hæc ex natura rei priùs ineſſent hiſce figuris, etſi complures ante *Eudoxum* fuerant haud contemnendi Geometræ, contigit tamen ea ab omnibus ignorata fuiſſe, neque perſpecta à quoquam. Licebit autem illis, qui poterint, circa hæc diſpicere. Ex uſu quidem fuiſſet & vellem hæc, adhuc ſuperſtite *Conone*, edita fuiſſe: hunc enim arbitramur imprimis idoneum fuiſſe hæc expendere, & appoſitam de iis ſententiam proferre; bonum factum verò cenſentes etiam * aliis Mathematum *ſtudioſis & peritis* impertire, mittimus tibi Demonſtrationes adſcribentes, de quibus fas erit iis, qui in Mathematicis verſantur, diſpicere. Vale.

Pro τὸ πάντων εἰδέναι lego ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι.

Pro τῆνων lego τῆνον.

Pro αὐτοῖς lego ἄλλοις.

ADſcribuntur primò tam Axiomata quàm Adſumpta ad demonſtrationes ipſorum.

Definitiones & Hypotheſes.

I. Sunt quædam in plano lineæ curvæ terminatæ, quæ illarum terminos conjungentium rectarum vel totæ, ad eaſdem partes ſunt, vel nihil habent ad alteras.

Scholium.

Lineæ curvæ (vel flexæ, καμπύλης γραμμῆς) nomine deſignatur non tantùm linea ubique continuóque curva, ſed & quomodocunque inflexa; ſeu mixta è rectis & curvis, ſeu tota è rectis compoſita. Quomodo perimeter figuræ cujuſvis rectilineæ, vel ejus quæcunque pars angulum includens, eſt linea καμπύλη. Siquidem rectè *Eutocius*. Ἰστέον οὖν ὅτι καμπύλας γραμμὰς καλεῖ οὐχ ἁπλῶς τὰς κυκλικὰς ἢ κωνικάς, ἢ ἀκλαστὸν ἐχούσας τὴν συνέχειαν, ἀλλὰ πᾶσαν ἐν ἐπιπέδῳ γραμμὴν παρὰ τὴν εὐθεῖαν καμπύλην ὀνομάζει· μίαν δὲ γραμμὴν ἐν ἐπιπέδῳ τὴν ὁπωσοῦν συναπτομένην, ὥστε κἂν ἐξ εὐθειῶν σύγκειται &c. Hujuſmodi verò curvarum aliquas adſumit vel totas ad eaſdem rectarum, quæ terminos ipſarum connectunt, partes jacere, vel ſaltem nihil ad diverſas ſitum habere. Sit exemplo peripheria circularis A B C, cujus terminos connectat recta

Fig. 1. A C, liquet totam lineam A B C ſupra rectam A C attolli ad partes B.

B. Sin accipiatur in chorda A C punctum D, lineæ mixtæ D A B C pars quidem aliqua A B C versùs partes B supra C D (terminos D, C connectentem) jacet, alia pars A D secundum ipsam C D protractam (κατ' αὐτὴν in sequenti definitione, hoc est ita ut ei congruat) sita est, nulla verò pars infra C D, ad partes ipsi B contrarias, deprimitur.

II. Ad easdem verò partes cavam appello ejusmodi lineam, in qua * sumptis utcunque duobus punctis, quæ iis interjacent rectæ vel omnes ad easdem lineæ partes cadunt, vel aliquæ quidem ad easdem, quædam verò secundùm *ipsam, sed ad diversas nulla. **lego ἂν (expletivum) pro ἐάν.* ** aut*, supra ipsam.

Schol. Huic intelligendæ subobscuræ definitioni respiciatur & expendatur antecedentis huic præstructæ hypothesis explicatio; cui tantùm adjiciam certum esse cavitatis in easdem partes continuatæ signum, si nulla recta lineam pluribus quàm duobus punctis secet.

III. Haud absimiliter sunt quædam superficies terminatæ, non quidem ipsæ in plano, sed terminos *habentes (suos) in plano; & plani in quo terminos habent, vel totæ ad easdem partes sunt, vel nihil habent ad alias. ** lego ἔχουσαι pro ἔχουσιν.*

IV. In easdem verò cavas ejusmodi voco superficies, in quibus si duo sumantur puncta, quæ punctis interjacent rectæ vel omnes ad easdem superficiei partes cadunt, vel quædam ad easdem, quædam verò secundùm illas, in diversas autem nulla.

Schol. Qui primas duas capit, has intelliget hypotheses nullo negotio.

V. *Sectorem verò solidum* appello, quando sphæram conus secat verticem habens ad centrum sphæræ, comprehensam figuram tum à coni superficie, tum à superficie sphæræ intra conum.

Ut si B A C sit conus, cujus vertex A centrum sphæræ; figura D A E contenta superficie conicâ D A E, & sphæricâ superficie D E, erit sector solidus. Fig. 2.

Fit verò sector solidus D A E ex rotatu sectoris circularis D A Z circa radium A Z; posito arcu D Z = Z E. unde aliter definiri possit. Nota, quòd detracto sectore D A E, residuum è sphæra D X E subinde καταχρηστικῶς dicatur Sector sphæricus, hemisphærio major. *vid. schol. 51. hujus.*

VI. *Rhombum verò solidum* voco, quando duo coni eandem basim habentes vertices habent ad utramque partem plani basis, ita ut ipsorum axes in directum jaceant, ab ambobus conis compositam figuram solidam.

Talis est figura B A C D constans duobus conis B A C, B D C, quorum communis basis est circulus B C, & axis A D transiens per centrum E, Fig. 3.

Hæc autem adſumo.

Axiomata.

I. Linearum eoſdem terminos habentium minimam eſſe rectam.

II. Alias verò lineas ſi in eodem plano exiſtentes eoſdem terminos habeant, inæquales eſſe; quando ſcilicet ambæ ad eaſdem partes cavæ ſunt, & vel una tota comprehenditur ab *altera, & à recta eoſdem cum illa terminos habente, vel aliqua comprehenduntur, aliqua verò communia habet: & minorem eſſe illam quæ comprehenditur.

* *deleo ἀπφανέιας.*

Fig. 4.

Sint exemplo lineæ A C B, A D E B, hiſce conditionibus præditæ; quòd nempe ſunt in eodem plano, & eoſdem terminos A,B habent, & ad eaſdem partes cavæ ſunt; & A C B tota comprehenditur ab A D E B & recta A B, erit A C B minor quàm A D E B. Item, linea mixta Z A C B minor eſt lineâ Z A D E B, quia Z A communis eſt, & reliqua A C B comprehenditur ab A D E B, ut prius.

Hoc pronunciatum ab Editoribus hactenus acceptum eſt peſſimè; in duo quippe diſcerpunt, unum veritate, alterum & ſenſu caſſum. Vide *Rivaltum*, & ſtupe.

III. Similiter & ſuperficierum eoſdem terminos habentium, ſi in plano terminos habeant, minorem eſſe quæ plana eſt.

IV. Alias verò ſuperficies etiam eoſdem terminos habentes, ſi in plano ſint termini, inæquales eſſe, modò ſint ambæ ad eaſdem partes cavæ, & vel una ſuperficies tota comprehenditur ab altera, & a ſuperficie eoſdem cum ipſa terminos habente, vel aliquæ (partes) comprehenduntur, aliquas verò communes habet: & majorem eſſe illam, quæ comprehenditur.

Itidem & hoc Axioma perquam ineptè & abſurdè diſpertitur in duo. Cæterùm ſi ſecundum probè perceperis, etiam hoc facilè aſſequeris. Lucem fœnerabunt quæ infrà ſæpius occurrent Exempla.

V. Quinetiam inæqualium linearum & inæqualium ſuperficierum, ac inæqualium ſolidorum *majus excedere minus eo quod ſibi (aliquoties) adjunctum ſuperare poſſit deſignatum quodvis * ad ſe rationem habens.

* *lego μεῖζον pro μεταξὺ.*
**vel* ſibi homogeneum; *vel* eorum quæ comparari poſſunt.
* *vel* IV.

Ut ſi linea A C lineam A B exſuperet lineâ B C, linea B C toties accipi poteſt (ſeu taliter multiplicari) ut quamvis lineam (puta Z C) excedat. Sequitur ex *def. V. Elementi V.

Hiſce ſuppoſitis,

Prop.

* *Prop. I.*

* *Perperam vulgò pronunciatis accenseatur.*

Si circulo (A D F) *inscribatur polygonum* (A B C D E F) *liquet inscripti polygoni perimetrum minorem esse circuli peripheriâ.*

Nam singulum latus, ut A B, minus est arcu (A B) quem subtendit; & consequenter simul omnia latera arcubus simul omnibus minora sunt, hoc est tota perimeter polygoni totâ circuli peripheriâ. Fig. 5. 2 *ax. hujus.*

Coroll. 1. Eâdem planè ratione quomodocunque diviso arcu quolibet (A D) & ductis subtensis (A B, B C, C D); totus arcus omnibus subtensis major est.

Coroll. 2. Sinus rectus arcu suo minor est, hoc est à centro Z ductâ Z Y X ad A B perpendiculari, est A Y ⊐ arc A X.
Nam A Y B (2 A Y) ⊐ A X B (2 A X).

Prop. II.

Si circa circulum (ABCDE) *describatur polygonum* (MNOPQ), *polygoni circumscripti perimeter circuli perimetro major erit.* Fig. 6.

Nam linea composita A M + B M major est arcu A B, & B N + C N major arcu B C; ac ita de cæteris: quare tota circumscriptæ figuræ perimeter, totâ circuli peripheriâ major est. 2 *ax. huj.*

Corol. 1. Simili ratione quomodocunque diviso arcu quovis, circumductæ tangentes arcu toto majores sunt.

Corol. 2. Tangens arcu suo major est, nempe ductis Z A, Z M, est A M ⊏ A Y. Nam A M + B M (2 A M) ⊏ A Y B (2 A Y).

Prop. III.

Datis duabus magnitudinibus inæqualibus (A, B), *possibile est duas rectas inæquales invenire, ita ut major recta ad minorem habeat minorem rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B). Fig. 7.

Multiplicetur A—B, per numerum aliquem (puta N) donec producta magnitudo, quam voco X, exsuperet B. tum assumptâ quâvis rectâ R, sit R. S :: 1. N :: A—B. X. Dico R+S, & S esse lineas quæsitas. Nam ob B ⊐ X, erit A—B. B. ⊏ (A—B. X ::) R. S. unde componendo erit A. B ⊏ R+S. S: *Q.E.F.* 5 *ax. huj.* *constr.* 8. 5.

Prop. IV.

Fig. 8. 9. *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus* (A,B) *& circulo* (CDEF), *posito circulo polygonum inscribi, aliudque circumscribi, ita ut circumscripti latus ad latus inscripti minorem habeat rationem, quàm magnitudo major* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 1. 10. *el.* [a]Fiat O P. O Q :: A. B. & descripto super O P semicirculo adaptetur O Q, & conjungatur P Q. tum [b] bisecetur circumferentia C D E F, & ejus semissis D C F, & hujus semissis C D, ac ita continuò, donec angulus D G K, semissis anguli D G H sit æqualis angulo P O R ⊐ ang P O Q. pérque K ducatur tangens L M occurrens radiis G D, G H protractis in L,M ; tum conjungatur D H. à bisectione liquet rectam L M latus esse polygoni circulo circumscriptibilis, & D H latus polygoni inscriptibilis. Jam ob angulos D G N, c *const.* R O Q [c] pares, & angulos G N D, O Q R rectos, erunt trigona 4. 6. & 8. 5. D G N, R O Q similia. quare G D (G K). G N :: O R. O Q ⊐ 15. 5. O P. O Q. atqui G K. G N :: L K. D N :: L M. D H. ergo L M. D H ⊐ (O P. O Q [c] ⊐) A. B. *Q.E.F*

Prop. V.

Rursus si fuerint duæ magnitudines inæquales, & sector potest circa sectorem polygonum describi, & aliud inscribi, ut latus circumscripti ad inscripti latus minorem habet rationem, quàm major magnitudo ad minorem.

Eodem planè modo conficitur, quo antecedens.

Prop. VI.

Fig. 10. 11. *Dato circulo* (G) *binisque magnitudinibus inæqualibus* (A,B), *circulo polygonum circumscribere, & aliud inscribere, ita ut circumscriptum ad inscriptum minorem habeat rationem, quàm major magnitudo* (A) *ad minorem* (B).

a 3 *hujus.* b 13. 6. c 4 *hujus.* [a]Fiat linea X. Z ⊐ A. B ; & inter X ac Z reperiatur media proportionalis Y ; [c] tum circulo dato inscribatur polygonum, aliúdque circumscribatur, ita ut hujus latus L M ad illius latus D H minorem habeat rationem, quàm X ad Y. Dico factum. Nam ratio L M ad d *cor.* 20. 6. D H duplicata [d] (hoc est ratio figuræ circumscriptæ ad inscriptam) minor

minor eſt ratione X ad Y duplicatâ, hoc eſt ratione X ad Z; quæ mi- *const.*
nor eſt ratione A ad B. ergo factum.

Corollarium. Prop. VII.

Quin ſimiliter demonſtremus, quòd duabus inæqualibus magnitudinibus datis, & ſectore, poſſit circa ſectorem polygonum deſcribi, & aliud ei ſimile inſcribi, ita ut circumſcriptum ad inſcriptum minorem rationem habeat, quàm major magnitudo ad minorem.

Lemma. Prop. VIII.

Manifeſtum & hoc, quòd, ſi detur circulus vel ſector, & ſpatium aliquod, poſſint circulo vel ſectori polygona æquilatera inſcribendo, & adhuc continuò reliquis ſegmentis, ſupereſſe quædam ſegmenta circuli vel ſectoris, quæ minora ſint propoſito ſpatio.

* Hæc enim tradita ſunt in Elementis. ** vid. 2. 12.*

Prop. IX.

Eſt autem demonſtrandum quòd & circulo dato (vel ſectore) (A) *&* **hoc eſt exceſſus*
ſpatio (B) *poſſit circumſcribi polygonum circulo (vel ſectori), * ita ut* *polygoni ſupra*
relicta à circumſcriptione ſegmenta minora ſint dato ſpatio. *circulum.*

[a] Circulo figura circumſcribatur, quam voca C; & alia inſcribatur, quæ vocetur I, ſic ut $C. I \sqsupset A + B. A.$ Dico factum. Nam ob A [b] $\sqsubset I$; [c] erit $C. A \sqsupset (C. I$ [d] $\sqsupset) A + B. A.$ unde dividendo $C - A. A \sqsupset B. A.$ [e] adeóque $C - A \sqsupset B.$ ergo factum.

a 6 hujus.
b 9. ax. 1.
c 8. 5.
d const.
e 10. 5.

Prop. X.

Si cono Iſoſceli (V A X B Y C Z) *inſcribatur pyramis* (V A B C) Fig. 12.
æquilateram habens baſim (A B C), *ſuperficies ejus, exceptâ baſe, æ-* 13.
quatur triangulo (M N O), *habenti quidem baſin* (NO) *æqualem perimetro baſis* (A B C), *altitudinem verò* (M N) *perpendiculari* (V D) *demiſſæ à vertice* (V) *ad baſis unum latus* (A B).

Nam ducantur V E, V F etiam lateribus B C, C A perpendiculares, & quia triangula A V B, B V C, C V A ſibi mutuò [a] æquilatera ſunt, *erunt perpendiculares V D, V E, V F inter ſe pares. ergo triangulum, cujus baſis æquatur ipſis A B, B C, C A ſimul acceptis, & altitudo *a hypoth.*

b 38. 1. altitudo uni perpendicularium V D, [b] æquatur triangulis A V B + B V C + C V A ; [c] hoc eſt triangulum M N O æquatur ſuperficiei
c conſt. & hyp. pyramidis exceptâ baſe. *Q. E. D.*

Prop. XI.

Fig. 14. *Si circa conum Iſoſcelem* (V D E F) *deſcribatur pyramis* (VABC), *ſuperficies Pyramidis demptâ baſe, æquatur triangulo, habenti baſin æqualem perimetro baſis* A B C, *altitudinem verò coni lateri* (V D).

a 18. def. 11. Sit V Z axis coni, & à centro Z ad contactum D ducatur recta Z D ;
b 18. 11. & ob V Z [a] rectam plano A B C, etiam triangulum V Z D plano
c 18. 3. A B C [b] rectum eſt : at verò tangens A D [c] perpendicularis eſt ipſi
d 4. def. 11. Z D (communi ſectioni planorum V Z D, A B C) [d] ergo A D per-
e 3. def. 11. pendicularis eſt plano V Z D, & [e] conſequenter lineæ V D ; ergo V D (coni latus) eſt altitudo trianguli V A B. Eâdémque ratione coni latus eſt altitudo trianguli V A C, & omnium, quibus conſtat lateratis coni ſuperficies. [f] ergo triangulum, cujus baſis eſt A B + B C +
f 38. 1. C A, altitudo latus coni, [f] æquatur triangulis coni ſuperficiem conſtituentibus. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 15. *Si in coni Iſoſcelis* (V A B) *circulum* (A B C D) *qui baſis eſt coni inciderit recta* (C D) *ab ejus autem terminis ducantur rectæ* (C V, D V) *ad coni verticem* (V) ; *triangulum* (C V D) *ab incidente & ad verticem ductis comprehenſum, minus eſt coni ſuperficie* (C A V B D) *ductis ad verticem interceptâ.*

Biſecetur arcus C A B D in E, & ducantur rectæ C E, D E, V E.
a 1. 6. liquétque triang C V E + D V E [a] ⊏ C V D ; quia C E + D E
b 20. 1. [b] ⊏ C D, & altitudo communis eſt : ſit exceſſus X, primò (ſuppone) non minor ſegmentis C E, D E : & quia ſuperficies conica C V E +
c 3. ax. huj. ſegm. C E [c] major eſt incluſo triangulo C V E (communis enim terminus eſt ſubtenſa C E) ; & ſimiliter conica ſuperficies D V E + ſegm. D E ⊏ triang D V E, erit conjunctè conica ſuperf. C V D + ſegmenta C E, D E ⊏ triang C V E + D V E ; magiſque conica ſu-
d hyp. perf. C V D + X ⊏ triang C V E + D V E [d] = triang C V D + X. unde ſublato communi X, erit con. ſuperf. C V D ⊏ triang C V D. Sin X minor ſit ſegmentis C E, D E biſecentur arcus C E, D E, &
e 8 hujus. ipſorum ſemiſſes, [e] donec reſidua ſegmenta C A, A E, D B, B E minora

nora sint excessu X. túmque ductis rectis A C, A E, A V; B D, B E, B V; [c] erit ut priùs, con. superf. C V A + segm C A $\sqsubset$ triang C V A. & con. superf. A V E + segm A E $\sqsubset$ triang A V E; adeóque conjunctè con. superf. C V E + segm. C A, A E $\sqsubset$ triang C V A + A V E; $\sqsubset$ triang C V E. Simili ratione con. superf. D V E + segm. D B, B E $\sqsubset$ triang D V E; conjunctéque con. superficies C A V B D + segm. C A, A E, D B, B E $\sqsubset$ triang C V E + D V E [d] = triang C V D + X. Unde cùm segm. C A + A E + D B + B E $\sqsupset$ X, erit con. superf. C A V B D $\sqsubset$ triang C V D. *Q. E. D.*

Ita τῆς ἀκριβείας ergò rem ex se satis claram demonstrat *Archimedes*, ut & tres sequentes non minùs αὐτοφανεῖς & αὐτοπίστους: nimirum abhorret is à multiplicandis extra necessitatem axiomatis & postulatis.

Prop. XIII.

Si ducantur rectæ (A C, B C) *tangentes circulum* (A D B) *qui basis est coni* (V A D B) *in eodem quo circulus existentes plano, & sibimet occurrentes; à contactibus verò* (A, B) *& ab occursu* (C) *ad coni verticem* (V) *ducantur rectæ* (A V, B V, C V); *triangula* (A V C, B V C) *à tangentibus & ad coni verticem adjunctis* (*comprehensa*) *majora sunt coni superficie absumptâ ab ipsis.* Fig. 16.

Bisecetur arcus A B in D, & per D ducatur tangens E F, & connectantur V E, V F; [a] éstque E C + F C $\sqsubset$ E F; quare addito communi A E + B F, erit A C + B C $\sqsubset$ A E + E F + B F. [b] proinde triang A V C + B V C $\sqsubset$ triang A V E + B V F + E V F (quandoquidem communis est horum triangulorum altitudo). Sit excessus X, non minor segmentis A E D, B F D: jam quia pyramidica superficies E A V B F, cujus basis est trapezium E A B F, [c] major est inclusâ conicâ superficie A V B, cum segmento A D B (communi existente termino perimetro trianguli A V B); & subtrahendo commune segmentum A D B triangula A V E, E V F, B V F cum segmentis A E D, B F D majora sunt conicâ superficie A V B D: magis igitur triangula A V E, E V F, B V F cum X majora sunt eâdem superficie; [d] hoc est triang A V C + B V C $\sqsubset$ con. superf. A V B D. Sin X minor sit segmentis A E D, B F D, bisecentur arcus A D, B D, & ipsorum semisses, ac ita continuò [e] donec residua segmenta A L G, G K G, D M H, H N B minora evaserint quàm X, & ductis rectis V L, V K, V M, V N similiter procedet demonstratio ac in præcedenti.

a 20. 1.
b 1. 6.
c 4. ax. huj
d hyp.
e 9 hujus.

Prop. XIV.

Fig. 17. *Si in superficie recti cylindri* (A C D B) *sint duæ rectæ* (A C, B D), *cylindri superficies* (A C F D B F A) *rectis intercepta, major est parallelogrammo* (A C D B) *comprehenso rectis* (A C, B D) *in superficie cylindri, & illis* (A B, C D) *quæ terminos ipsarum conjungunt.*

Bisecentur arcus A B, C D in E, F; & ducantur A E, B E, C F,
a 20. 1. D F: & ob A E + E B [a] ⊏ A B, [b] erit pgr. A E F C + B E F D
b 1. 6. ⊏ pgr A B D C (existente pari omnium altitudine): sit X excessus non minor primò segmentis A E, B E, C F, D F; jam cylindrica su-
c 4 ax. hujus. perficies A E B D F C + segm. A E B, C F D [c] ⊏ pgr. A E F C, B E F D + triang. A E B, C F D (communi existente termino parallelogrammo A B C D) ergo subtrahendo commune triang. A E B + C F D, erit cylindrica superf. A E B D F C + segment. A E, B E, C F,
d hyp. D F ⊏ pgr. A E F C + B E F D [d] = pgr. A B C D + X. quare cùm X sit æqualis, aut minor segmentis istis, liquet cylindricam superficiem A E B D F C majorem esse pgr. A B C D.

Sin X segmentis istis minor sit, bisecentur arcus A E, B E, C F, D F,
e 8 hujus. & ipsorum semisses, [e] donec residua segmenta A G, G E, E H, H B; C L, L F, F M, M D minora sint ipso X: tum ductis rectis, ut in figura, erit (ut prius) {pgr. A G L C + G E F L ⊏ pgr A E F C. / pgr. B H M D + H E F M ⊏ pgr B E F D.} Et quia Cylindrica superf. A E B D F C + segm. A E B, C F D ⊏ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M + rectilin. fig. A G E H B, C L F M D (communi existente termino parallelogrammo A B D C) ergò, subtractis communibus istis figuris rectilineis, cylindrica superf. A E B D F C + segm. A G, G E, E H &c. ⊏ pgr. A G L C, G E F L, B H M D, H E F M ⊏ pgr. A E F C + B E F D = pgr. A B D C + X. Unde cùm X segmentis istis major sit, liqui-
const. dò patet cylindricam superficiem A E B D F C majorem esse parallelogrammo A B D C. *Q.E.D.*

Prop. XV.

Fig. 18. *Si in superficie recti cujusdam cylindri sint duæ rectæ* (A C, B D) *à terminis verò rectarum ducantur quædam* (A E, B E, & C F, D F) *tangentes circulos, qui bases sunt cylindri, in eodem existentes plano, & concurrentes; parallelogramma* (A E F C, B E F D) *comprehensa subtangentibus & lateribus cylindri, majora erunt cylindri superficie, interceptâ rectis* (A C, B D) *quæ sunt in superficie cylindri.*

Bi-

Bisecentur arcus AG in B, & ducatur tangens KGL; & erigantur KM, LN parallelæ axi cylindri, & connectatur MN: & liquet esse pgr AEFC + BEFD ⊏ pgr. AKMC + KLNM + BLND (quia, [a]ut priùs, AE + BE ⊏ AK + KL + BL). a in 13 hujus,
Sit excessus X, non minor primò segmentis AKG, BLG, CMH, DNH. Et quia superficies composita ex parallelogrammis AKMC, KLNM, BLND & trapeziis ABLK, CDNM [b]⊏ cylind superf. AGBDHC + segm. AGB, CHD (communi existente termino parallelogrammo ABDC) erunt, subtractis communibus segmentis AGB, CHD, residua pgr [a] AKMC. KLNM, BLND + segm. AKG, BLG, CMH, DHN ⊏ cylindrica superfic. AGBDHC. quare magis pgr. AKMC, KLNM, BLND + X ([c]hoc est pgr. AEFC, BDFG) ⊏ cylind superf. AGBDHC. *Q.E.D.* b 4 ax. huj. c hyp.

Sin X minor sit dictis segmentis, bisecentur arcus AG, BG, ducantúrque tangentes, [d] usque dum segmenta fiant minora quàm X; & simili tenore quo priùs demonstratio progredietur. d 9 huj.

Corollaria.

Hisce verò demonstratis, è prædictis liquet,

1. Quòd si cono Isosceli pyramis inscribatur, pyramidis superficies, exclusâ basi, minor est superficie coni, demptâ quoque basi.

Nam singula pyramidem continentia triangula sunt minora singulis superficiebus conicis, quas intercipiunt & subtendunt. ergo illa simul his simul minora sunt, hoc est superficies pyramidis superficie coni. 12 hujus.

2. Et quòd si cono Isosceli pyramis circumscribatur, superficies pyramidis, exceptâ basi, major est superficie coni, basi quoque seclusâ. 13 hujus.

3. Item apparet ex ostensis, quòd si cylindro recto prisma inscribatur, prismatis superficies è parallelogrammis composita minor est superficie cylindri, sine basi.

Minus enim est singulum prismatis parallelogrammum superficie cylindricâ, quam abscindit. 14 hujus.

4. Et quòd si cylindro recto prisma circumscribatur, prismatis superficies, parallelogrammis constans, major est superficie cylindri, sepositâ basi. 15 hujus.

Hactenus ad sequentes demonstrationes utilia lemmata præstravit; ad principalia jam progreditur Theoremata.

Prop. XVI.

Fig. 19. 20.

Omnis cylindri recti superficies (S), *exclusâ basi, æqualis est circulo, cujus radius* (A) *proportione medius est inter cylindri latus* (L), & *basis diametrum* (2 R).

a 6 *hujus.* b *hyp.* c 15. 5. d *cor.* 20. 6. e 1. 12. f 1. 6. g h 14. 5. k *const.* 18. 5. m 10. 5. n *prius.*

Si neges, esto primùm S ⊏ ⊙ A; & circa circulum A describatur figura (quæ vocetur C), & inscribatur similis altera (quæ dicatur I) [a] ita ut C. I ⊐ S. ⊙ A. tum cylindri basi circumscripta concipiatur figura similis ipsi C, quæ nominetur K: ejúsque perimeter dicatur P. Jam ob 2 R. A [b] :: (A. L [c] ::) 2 A. 2 L; vel antecedentes dimidiando R. A :: A. 2 L. erit [d] Rq. Aq. (hoc est K. C) :: R. 2 L [e] :: $\frac{R}{2}$. L :: [f] $\frac{RP}{2}$. L P; ergo cùm sitq; K = $\frac{RP}{2}$. [h] erit C = L P. [k] ergo L P. I ⊐ S. ⊙ A. atqui L P ⊙ A. [l] ⊐ L P. I. ergo magis L P. ⊙ A ⊐ S. ⊙ A. [m] unde L P ⊐ S. hoc est superficies prismatis superscripti minor est superficie cylindri, contra 4 Coroll. præcedentis. ergo non est S ⊏ ⊙ A.

Sin dicatur S ⊐ ⊙ A, [a] fiat C. I ⊐ ⊙ A. S. & inscripta concipiatur basi cylindri figura similis ipsi I, quæ dicatur Y, ejúsque perimeter P, tum ob Y. I :: [e] Rq. Aq [n] :: $\frac{RP}{2}$. L P; & Y [g] ⊐ $\frac{RP}{2}$, [h] erit I ⊐ L P. Verùm C. I [b] ⊐ ⊙ A. S [l] ⊐ C. S. [m] adeóque S ⊐ I. ergo magis S ⊐ L P. hoc est superficies cylindri minor est inscripti prismatis superficie, contra 3. coroll præcedentis. ergo non est S ⊐ A. Superest igitur, ut sit S = ⊙ A. *Q. E. D.*

Corollaria.

1. Cylindricæ superficies super æqualibus basibus constitutæ se habent ut latera, vel altitudines.
2. Cylindricæ superficies æquè altæ se habent ut diametri basium.
3. Cylindrica superficies rationem habent compositam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes cylindricæ superficies rationem habent laterum, vel diametrorum duplicatam.
5. Æqualium superficierum cylindricarum latera & diametri proportione reciprocantur; & conversè, si reciprocentur hæc proportione, istæ sunt æquales.

Cùm

Cùm enim cylindricæ ſuperficies ſe habeant ut circuli, quibus æquantur; & circuli ut quadrata radiorum; & hæc quadrata æquentur rectangulis ex latere & diametro cylindrorum; & iſta rectangula dictas habeant paſſiones (ut in elementis oſtenditur) ergo hæc patent.

Prop. XVII.

Omnis coni Iſoſcelis ſuperficies (S) *abſque baſi æquatur circulo, cujus radius* (A) *mediam habet proportionem inter coni latus* (L) *& baſis circularis radium* (R). Fig. 21.

Si neges, ſit primò S ⊏ ⊙ A: & circulo A circumſcribatur figura C, & inſcribatur altera I [a]ſic ut C. I :: ⊐ S. ⊙ A; tum baſi coni circumſcribatur quoque figura ſimilis ipſi C, quæ vocetur K, ejúſque ſemi-perimeter appelletur P. Jam quia R. A [b]:: A. L. [c]erit Rq. Aq. ([d]id eſt K. C) :: R. L [e]R P. L P; ergò quum ſit K = R P, [f]erit C = L P [g]quare L P. I ⊐ S. ⊙ A. [h]ſed L P. ⊙ A ⊐ L P. I. ergo magis L P. ⊙ A ⊐ S. ⊙ A. unde L P. ⊐ S. [l]hoc eſt ſuperficies pyramidis cono circumſcriptæ conicâ ſuperficie minor eſt; contra priùs oſtenſa, in 2. coroll. 15 hujus.

Sed ſecundò ſit S ⊐ ⊙ A. [a]fiátque C. I ⊐ ⊙ A. S. & coni baſi inſcribatur figura Y, ſimilis ipſi I, cujus ſemiperimeter appelletur ϖ. Jam Y. I [d]:: Rq. Aq [c]:: R. L :: [e]Rϖ. Lϖ. & *Y ⊐ Rϖ. unde I [f]⊐ Lϖ. atqui C. I. ⊐ ⊙ A. S [h]⊐ C. S. & conſequenter S [k]⊐ I ⊐ Lϖ. [m]hoc eſt ſuperficies coni minor eſt ſuperficie pyramidis cono inſcriptæ, itidem contra demonſtrata, in 1. Coroll. 15. hujus.

a 6 *hujus.*
b *hyp.*
c *cor.* 20. 5.
d 1. 12.
e 1. 6.
*
f 14. 5.
g *hyp.*
h 8. 5.
k 10. 5.
l 11. *hujus.*
m 10 *hujus.*

Corollaria.

1. Conicæ ſuperficies ad æquales Baſes poſitæ ſunt ut diametri baſium.
2. Conicæ ſuperficies æquè altæ, vel æqualia latera habentes ſunt ut diametri baſium.
3. Conicæ ſuperficies rationem habent compoſitam è rationibus laterum & diametrorum.
4. Similes conicæ ſuperficies habent duplicatam laterum vel diametrorum rationem.
5. Æquales conicæ ſuperficies quoad latera & diametros proportione reciprocantur; & converſè.

Prop.

Prop. XVIII.

Fig. 22.

Omnis coni Isoscelis superficies (S) *eandem ad basin rationem habet, quam coni latus* (L) *ad basis radium* (R).

a 1.6. b cor. 2. 12. c 17 hujus.

Nam L. R [a] :: (L R. Rq [b] :: ⊙ rad. $\surd$ L R. ⊙ R. ([c]hoc est ::) S. ⊙ R. *Q.E.D.*

Prop. XIX.

Not. *in hoc & sequentibus triangula conos repræsentantia censentur per axes trajecta.*

Si conus Isosceles (A B C) *secetur plano* (D Q E) *basi* (B P C) *parallelo, parallelis planis interceptæ coni superficiei* (D B C E) *æquatur circulus, cujus radius* (Z) *mediam habet proportionem inter coni latus* (D B) *parallelis planis interjectum, & æqualem utrique radio* (F B + G D) *circulorum* (B P C, D Q E) *qui in parallelis sunt planis.*

Fig. 23. 24.

a hyp. b 17. 6. c sch. 1. 2. d 16. 6. e 4. 6. f cor. 2. 12. g 17. hujus.

Nam ob D B. Z [a] :: Z. B F + D G, [b] erit Zq = D B ×: B F + D G = A B − A D ×: B F + D G [c] = A B × B F + A B + D G − A D × B F − A D × D G = A B × B F — A D × D G (est enim A B × D G [d] = A D × B F, ob A B. B F [e] :: A D. D G). [f] ergo ⊙ rad Z = ⊙ rad $\surd$ A B × B F − ⊙ rad A D × D G. Verùm ⊙ rad $\surd$ A B × B F [g] = superf. A B C; & ⊙ rad $\surd$ A D × D G [g] = superf. A D E. ergo ⊙ rad Z æquatur superficiei D B C E. *Quod E. D.*

Fig. 25.

Coroll. Hinc si recta Y X bisecet latera D B, E C; erit circulus radio $\surd$ D B × Y X æqualis superficiei conicæ D B C E.

Nam ductis rectis Y G, B E, F X; ob D G = $\frac{DE}{2}$, & D Y = $\frac{DB}{2}$, erunt Y G, B E parallelæ; ergo in pgr. G Y U E est Y V = G E. Simili discursu est V X = B F. unde Y X = G E + B F.

Prop. XX.

Fig. 26.

Si duo sint coni Isosceles (B A C, X Z), *& unius superficies* (B A C) *æqualis sit alterius basi* (Z); *& quæ à basis centro* (D) *ad coni latus* (A C) *ducitur perpendicularis* (D E) *altitudini* (X) *æquetur; æquales erunt coni* (B A C, X Z).

a hyp. b 7. 5. c 4. 6. d 18 hujus. e 7. 5. & hyp. f 11. 5.

Nam ductâ A D, ob X = [a]D E, erit A D. X [b]:: A D. D E [c]:: A C. C D (sunt enim similia triangula rectangula A D E, A C D) [d]:: superf. B A C. bas. B F C [e] :: Z. bas. B F C [f] :: A D. X. Itaque cum cùm reciprocentur proportione bases & altitudines conorum B A C, Z X, ii sunt æquales. *Q.E.D.* g 15.12.

Prop. XXI.

Omni Rhombo (G A H D) *ex Isoscelibus conis* (G A A, G D H) *composito, æquatur conus* (X Z) *habens quidem basin* (Z) *æqualem superficiei unius coni* (G A H) *eorum qui Rhombum continent, altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (G D H) *ad prioris coni latus unum* (A H). Fig. 27. 28.

Nam ob X [a] = D E, est A D. X [b] :: A D. D E [c] :: A H. K H [d] :: superf. G A H. baf. G L H [e] :: Z. baf G L H. quare conus cujus altitudo [f] æquatur rectæ A D, & basis circulo G L H æquatur cono X Z (ob reciprocam nempe proportionem A D. X :: Z. G L H). atqui conus altitudine A D, basis G L H æquatur Rhombo A G D H (nam con G D H. con G A H [g] :: D K. A K; & componendo Rhomb A G D H. con G A H :: A D. A K [g] :: con $\left\{\begin{matrix}\text{alt A D.}\\ \text{baf G L H.}\end{matrix}\right.$ con GAH.) [h] ergo Rhombus A G D H æquatur cono X Z. *Q.E.D.*

a *hyp.* b 7. 5. c 4. 6. d 18 *hujus.* e *hyp.* & 7. 5. f 15. 12. g 14. 12. h 1. *ax.* 1.

Prop. XXII.

Si conus Isosceles (B A C) *secetur plano* (G H) *basi* (B C) *parallelo, à circulo verò facto* (G H) *describatur conus* (G D H) *verticem habens basis centrum* (D): *factus autem Rhombus* (G A H D) *auferatur à toto cono* (B A C), *residuo æquatur conus* (X Z), *habens quidem basin* (Z) *æqualem superficiei conicæ* (G B C H) *parallelis planis interceptæ; altitudinem verò* (X) *æqualem perpendiculari* (D E) *ductæ à basis centro* (D) *ad coni latus unum* (A C). Fig. 29.

Conus enim, cujus altitudo est D E, & basis æqualis superficiei G B C H [a] æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem D E, & bases æquales superficiebus A B C, A G H, hoc est differentiæ coni A B C, & Rhombi A G D H (per duas præcedentes). quare conus X Z isti differentiæ æquatur. *Q.E.D.* a 11. 12.

Prop.

Prop. XXIII.

Fig. 30. *Si Rhombi* (GAHD) *ex Isoscelibus conis* (GAH, GDH) *compositi unus conus* (AGH) *secetur plano* (MN) *basi* (GH) *parallelo; à facto autem circulo* (MN) *describatur conus* (MDN) *habens verticem* (D) *eundem cum altero cono* (GDH), *ab integro verò Rhombo* (GAHD) *auferatur effectus Rhombus* (MAND), *residuo æquatur conus* (XZ) *habens quidem basin* (Z) *æqualem conicæ superficiei* (MGHN) *parallelis planis* (MN, GH) *interceptæ, altitudinem verò* (X) *perpendiculari* (DE) *ductæ à vertice* (D) *alterius coni* (GDH) *ad latus* (AH) *reliqui coni* (GAH).

11. 12. Conus enim, cujus altitudo æqualis est ipsi DE & basis superficiei conicæ MGHN, æquatur differentiæ duorum conorum habentium eandem altitudinem (DE), ac bases æquales superficiebus conicis AGH, AMN, *id est differentiæ Rhomborum AGDH, AMDN. ergo conus XZ isti differentiæ exæquatur. *Q.E.D.*

* 21 *hujus.*

Prop. XXIV.

Fig. 31. *Si circulo* (ABCD) *inscribatur polygonum* * *parilaterum simul ac æquilaterum* (AEBFCGDH), *& agantur rectæ* (EH, BD, FG) *polygoni latera conjungentes, quæ parallelæ sint uni cuivis* (EH) *duo polygoni latera subtendentium; omnes conjunctæ* (EH + BD + FG) *ad circuli diametrum* (AC) *illam rationem habent, quam habet dimidia præter unum subtendens* (CE) *ad polygoni latus* (AE).

* ἀρτιόπλευρον.

Ducantur enim rectæ HB. DF. Et quoniam anguli ACE, AEH, EHB, HBD, BDF, DFG, FGC, æqualibus insistentes arcubus, [a]æquales sunt, liquet triangula rectangula CEA, EIA, HIK, BLK, DLM, FNM, GNC esse similia; [b]adeóque esse CE. EA :: EI. IA :: HI. IK :: BL. LK :: DL. LM :: FN. NM :: GN. NC. [c]quare ut CE ad EA, sic antecedentes conjunctim EH + BD + FG ad consequentes simul, hoc est ad totam diametrum AC: *Q.E.D.*

a 27. 3.
b 4. 6.
c 12. 5.

Coroll.

* 16. 6. $CE \times AC$ *$= EA \times : EH + BD + FG$.

Prop.

Prop. XXV.

Si circuli ſegmento (F A G) *inſcribatur polygonum* (FBEAHDG) *latera habens, exceptâ baſe, æqualia, & numero paria; ducantur verò rectæ* (E H, B D) *parallelæ baſi, connectentes latera polygoni, omnes ductæ cum dimidia baſe* (E H + B D + F N) *ad ſegmenti altitudinem* (A N) *eandem habent rationem, quam habet illa* (C E), *quæ à diametro circuli ad polygoni latus ducitur, ad polygoni latus* (A E). Fig. 31.

Nam, prorſus ut in præcedenti, eſt C E. E A :: E I. A I :: H I. I K :: B L. L K :: D L. L M :: F N. M N[a] :: E H + B D + F N. A N[*] :: C E. E A. *Q.E.D.* a 12. 5. * 16. 6.

Coroll. *A N × C E = E A × : E H + B D + F N.

Prop. XXVI.

Sit in ſphæra maximus circulus A B G D, eique inſcribatur polygonum æquilaterum, multitudo autem laterum ipſius menſuretur à quaternario; ſint verò A G, B D diametri: quòd ſi manente diametro A G circumvolvatur circulus A B G D, polygonum continens; liquet quòd peripheria ejus ſecundùm ſphæræ ſuperficiem feretur. Anguli verò polygoni, præter eos qui ad puncta A, G ſecundùm peripherias ferentur circulorum in ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, & rectorum circulo A G B D. Diametri autem ipſorum erunt rectæ polygoni angulos conjungentes, ad B D parallelæ. Aſt polygoni latera ſecundùm conos quoſdam ferentur; nempe A Z, A N ſecundùm ſuperficiem coni, cujus quidem baſis erit circulus circa diametrum Z N, vertex autem punctum A. Sed H Z, M N ſecundùm ſuperficiem quandam conicam ferentur, cujus quidem baſis eſt circulus circa diametrum H M, vertex verò punctum , in quo occurrent productæ H Z, M N ſibi mutuò & ipſi G A. Quinetiam H B, M D ferentur juxta conicam ſuperficiem, cujus baſis eſt circulus circa diametrum B D ad circulum A B G D rectus, vertex autem punctum in quo conveniunt B H, D M, ſecum invicem, & cum recta G A. Haud abſimiliter in altero ſemicirculo, latera ſecundùm ſuperficies conicas deferentur, itidem hiſce conſimiles. Ita quidem inſcripta erit ſphæræ figura quædam prædictis ſuperficiebus conicis comprehenſa, cujus ſuperficies minor erit ſuperficie ſphæræ. Diviſâ enim ſphærâ plano per BD recto ad circulum A BGD, ſuperficies alterius hemiſphærii, & ſuperficies 4 ax. huj.

Fig. 32.

D

perficies inſcriptæ ipſi figuræ eoſdem terminos habent in eodem plano; nam utriuſque ſuperficiei terminus eſt ſuperficies circuli, qui circa diametrum B D circulo A B G D rectus; ſúntque ambæ ad eaſdem partes cavæ, atque ipſarum una ſuperficies comprehenditur ab altera, ac plano habenti eoſdem cum ipſo terminos. Haud aliter ſuperficies figuræ in altero hæmiſphærio minor eſt ſuperficie hemiſphærii: tota igitur ſuperficies figuræ, quæ in ſphæra, minor eſt ſuperficie ſphæræ.

Prop. XXVII.

Fig 31. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (A E B F C G D H) *ſuperficies æquatur circulo, cujus radius poteſt rectangulum comprehenſum ſub figuræ latere* A E, *& rectâ* (E H + B D + F G) *æquali omnibus latera figuræ conjungentibus, paralleliſque duo figuræ latera ſubtendenti* (E H).

a 17. *hujus.*
b *cor.* 2. 12.
c 19 *hujus.*
d 3. *ax.* 1.

Nam $\odot$ rad $\sqrt{}$ A E $\times \frac{EH}{2}$ [a] $=$ ſuperf conica E A H. [b] quare $\odot$ rad $\sqrt{}$ A E $\times$ E H $=$ 2 ſuperf. E A H. Item (ſimili pacto) $\odot$ rad $\sqrt{}$

$\left| \begin{array}{l} BE \times : BD + EH \\ AE. \quad\quad FG \end{array} \right.$ [c] $=$ 2 ſuperf. B E H D. [d] ergo $\odot$ rad $\sqrt{}$. A E $\times$:

E H + B D + F G $=$ 2 ſuperf. E A H + B E H D $=$ ſuperf. A E B F C G D H A.

* *hæc, & cor.* 24. *hujus.*

Coroll. * Hinc $\odot$ rad $\sqrt{}$ A C $\times$ C E $=$ fig. A E B F C G D H A.

Prop. XXVIII.

In ſphæram inſcriptæ figuræ ſuperficies (I) *conicis ſuperficiebus contenta, minor eſt quàm quadrupla maximi circuli* (A B C D) *eorum qui ſunt in ſphæra.*

a *coroll.* 27 *h.*
b *cor.* 2. 12.

Nam ſuperf. I [a] $=$ $\odot$ rad $\sqrt{}$ A C $\times$ C E $\sqsupset$ $\odot$ rad A C [b] $=$ 4 $\odot$ rad A L.

Prop. XXIX.

Fig. 33. *In ſphæram inſcriptæ figuræ* (A F H D C B G E) *ſuperficiebus conicis contentæ, æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens circulum æqualem ſuperficiei figuræ inſcriptæ in ſphæram, altitudinem verò æqualem perpendiculari* (X Z) *à ſphæræ centro* (Z) *in polygoni latus unum ductæ.*

Ducantur radii X E, X F, X G, X H, & connectantur anguli ab A utrinque æquè remoti rectis E F, G H. Eſtque Rhombo E X F A

[a]æqualis conus base conicâ superficie E A F, altitudine X Z. Item, productis G E, H F ad Q; si ex Rhombo G X H Q subducatur Rhombus E X F Q, residuo E G X H F [b]æquabitur conus base superficie conicâ E G H F, altitudine quoque X Z. Similiter, productis B G, D H ad P, si ex cono B P D subtrahatur Rhombus G X H P, residuo G B X D H [c] æqualis erit conus, cujus basis æquatur conicæ superficiei B G H D, altitudo rursus ipsi Z X. Idem erit in reliquo hemisphærio B C D. ergo cùm hisce conis omnibus [d] æquetur conus K; is solido quoque inscripto æquabitur. *Q.E.D.*

a 21 *hujus.*
b 23 *hujus.*
c 22 *hujus.*
d 11. 12.

Prop. XXX.

Inscripta sphæræ figura conicis superficiebus contenta minor est quàm quadrupla coni (M) *basin quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò æqualem radio sphæræ.*

Nam coni K, in præcedente, [a] basis minor est quàm quadrupla circuli maximi, & ejus quoque altitudo X Z minor radio sphæræ; ergo quadruplus coni M major est isto cono K; hoc est figurâ inscriptâ. *Q. E. D.*

a *hyp.* & 29. *h.* 11, 12.

Prop. XXXI.

Sit in sphæra maximus circulus ABGD. Circa verò circulum ABGD describatur polygonum æquiangulum & æquilaterum; multitudo autem laterum ipsius mensuretur à quaternario. Circulo autem circumscriptum polygonum comprehendat circulus circumscriptus E Z H T, circa idem centrum existens ac ABGD. Manente verò EH circumvolvatur planum EZHT, in quo polygonum & circulus. Liquet igitur quòd quidem peripheria circuli ABGD secundùm sphæræ superficiem deferetur, ipsius autem E Z H T peripheria secundùm superficiem alterius sphæræ minori concentricæ feretur: contactus autem, ad quos latera tangunt, circulos describunt rectos circulo ABGD in minori sphæra. Anguli verò polygoni, præter illos qui ad puncta E, H, secundùm peripherias circulorum feruntur in majoris sphæræ superficie descriptorum, ad circulum E Z H T rectorum; verùm latera polygoni secundùm conicas superficies, utique sicut in præcedentibus. Erit igitur figura comprehensa à superficiebus conicis, minori sphæræ circumscripta, majori verò inscripta. Quòd autem circumscriptæ figuræ superficies major sit superficie sphæræ, sic ostendetur Esto enim K D diameter alicujus circuli eorum, qui in minori sunt sphæra, existentibus

Fig. 34.

bus K, D punctis ad quæ duo latera circumscripti polygoni tangunt circulum A B G D; divisâ nempe sphærâ plano per K D ad circulum A B G D recto, etiam superficies descriptæ circa sphæram figuræ dividetur à plano: utriusque enim superficiei terminus est circumferentia circuli, qui est super diametrum K D ad circulum A B G D rectus; súntque ambæ ad easdem partes cavæ, & earum altera continetur ab altera superficie, ac plano eosdem terminos habenti. Minor
4 *ax. hujus.* igitur est comprehensa portionis sphæricæ superficies superficie figuræ circa ipsam descriptæ. Similiter & reliquæ portionis sphæricæ superficies minor est superficie figuræ ipsi circumscriptæ. Patet igitur quòd tota superficies sphæræ minor est superficie figuræ circa ipsam descriptæ.

Prop. XXXII.

Fig. 35. *Superficies descriptæ circa sphæram figuræ* (E F G H I K L M) *æqualis est circulus, cujus radius potest æquale rectangulo comprehenso sub polygoni uno latere* (E F), *& rectæ æquali omnibus polygoni angulos connectentibus* ($FM + GL + HK$), *parallelis alicui* (F M) *subtendentium polygoni latera.*

Centro enim N (quod sphæræ centrum est) per angulos polygoni describatur circulus: huic inscripta est figura E F G H I K L M. Ergo patet res ex 27 hujus.

Coroll. Ductâ F L est $\odot$ rad. $\surd\, FL * GL =$ super. EFGHIKLM. ibid.

Prop. XXXIII.

Figuræ circa sphæram descriptæ superficies major est quàm quadrupla maximi in sphæra circuli (A B C D).

a *cor.* 15. 1. Nam (in figura præcedenti) à centro N ad contactus oppositos
b *hyp.* O, P ducantur rectæ N O, N P ([a]quæ quidem in directum jacent, ob
c 34. 1. angulos G N O, L N P [b]æquales); connexâ verò F L, sunt F L. O P
d 47. 1. [c]pares (ob O F, P L [b]parallelas ac pares) quare cùm G L [d] $\sqsubset$ F L,
e *cor.* 27 *huj.* erit $\surd\, GL * FL \sqsubset OP$. adeóque circulus radio $\surd\, GL * FL$ ([e]hoc est superficies figuræ E F G H I K L M) major est circulo cujus radi-
f *cor.* 2. 12. & 4. 2. us O P, [f]hoc est quadruplo circuli cujus radius N O, hoc est quadruplo A B C D. *Q.E.D.*

Coroll. Nota esse L F, P O pares.

Prop.

Prop. XXXIV.

Circa minorem ſphæram (A B C D) *deſcriptæ figuræ æqualis eſt conus, baſim quidem habens circulum æqualem ſuperficiei ipſius figuræ, altitudinem verò æqualem radio ſphæræ.*

Nam figuræ iſti circumſcribendo circulum E G I L, patet ex 29. hujus.

Prop. XXXV. Coroll.

Figura ſphæræ minori circumſcripta major eſt quàm quadrupla coni, baſin quidem habentis maximum in ſphæra circulum, altitudinem verò radium ſphæræ.

Patet conferendo duas proximè antecedentes.

Prop. XXXVI.

Si ſphæræ inſcripta ſit figura (A N B C D), *& alia circumſcripta* (E F G I L) *ſub ſimilibus polygonis, ad eundem modum quo priùs conſtructis circumſcriptæ figuræ ſuperficies, ad ſuperficiem inſcriptæ, duplicatam rationem habet ejus, quam latus* (G F) *circumſcripti maximo circulo polygoni, ad latus* (B N) *polygoni eidem circulo inſcripti. Ipſa verò figura circumſcripta, ad figuram inſcriptam, rationem habet ejuſdem rationis triplicatam.* Fig. 36.

Nam 1° ductis D N, L F, ob ſimilitudinem figurarum eſt angulus a 4. 6.
G L F æqualis angulo B D N. adeóque rectangula triangula G L F, b 1. 6.
B D N ſunt ſimilia. & G L. L F [a]:: B D. D N. Eſt autem G Lq. G L c 20. 6.
× L F [b]:: G L. L F [a]:: B D. D N [b]:: B Dq. B D × D N. & permutan- d cor. 2. 12.
do G Lq. B Dq ([c]hoc eſt G L. B D, bis, [a] vel G F. B N, bis) :: G L e ſch. 7. 5. & cor. 27 hujus.
× L F. B D × D N [d]:: ⊙ rad √ G L × L F. ⊙ rad √ B B × D N
([e] hoc eſt) :: ſuperf. E F G I L. ſuperf. A N B C D. *Q.E.D.*

2. Ducatur Z O, à centro Z ad tactum O. Eſtque conus, [f] cujus f 34 hujus.
baſis eſt ⊙ rad √ G L × L F, & altitudo Z O, [f] æqualis corpori cir- g 29 hujus.
cumſcripto. [g] Conus autem baſe ⊙ rad √ B D × D N, altitudine Z P, h 24. def. 11.
æquatur corpori inſcripto. Hi coni [h]ſimiles ſunt, (quia Z O. Z P [a]:: k 15. 5.
G O. B P [k]:: G F. B N :: [l] √ G L × L F. √ B D × D N.) ergo ſunt l priùs & 22. 6;
hi coni (hoc eſt iſta corpora) in triplicata ratione ipſarum Z O, Z P, m 12. 12. & 15. 5.
vel G F, B N. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. XXXVII.

Fig. 37.

Omnis sphæræ superficies (S) *quadrupla est maximi circuli, eorum qui sunt in sphæra.*

a 3 *hujus.*
b 4 *hujus.*
c 8. 5. & 31 *h.*
d 36 *hujus.*
e *const.*
f 17. 6.
g *const.*
h 10. 5.
* *ut priùs.*
k 26 *hujus.*
& 8. 5.

Circulus maximi in sphæra circuli quadruplus dicatur X: & primò si fieri potest, sit X $\sqsupset$ S. Fiat autem, utcunque G. H [a] $\sqsupset$ S. X. & sphæræ circumscribantur ac inscribantur figuræ, (quales innuunt præcedentia) sic ut [b] latus D E. B C $\sqsupset$ G. $\sqrt{}$ G H. Harum verò figurarum superficies appellentur Y, Z. Estque S. Z [c] $\sqsupset$ Y. Z. [d] $=$ D E. B C, bis [c] $\sqsupset$ G. $\sqrt{}$ G H bis [f] $=$ G. H [g] $\sqsupset$ S. X. [h] ergo Z $\sqsubset$ X. hoc est inscriptæ figuræ superficies major est quadruplo maximi in sphæra circuli, contra 28 hujus.

Sin verò dicatur X $\sqsubset$ S. fiat G. H [a] $\sqsupset$ X. S. ac D E. B C [b] $\sqsupset$ G. $\sqrt{}$ G H. éstque Y. S [k] $\sqsupset$ Y. Z * $\sqsupset$ G. H [g] $\sqsupset$ X.S. [h] unde Y $\sqsupset$ X; hoc est circumscriptæ figuræ superficies minor est quadruplo maximi in sphæra circuli, contra 31 hujus. Restat igitur, ut sit X $=$ S. *Q.E.D.*

Hoc nobilissimum Theorema (cum eo, quo universale redditur, subsequente ad Prop. XLIX.) inter *Archimedis* (dicam, an omnia quotquot fuerunt Geometrarum) inventa familiam ducit, cùm inveniendi subtilitate, tum rei elegantiâ, sed & utilitate diffusâ.

Coroll. Circulus, cujus radius æquatur diametro sphæræ, adæquat sphæræ superficiem.

Lemma. Sint duæ quæcunque rectæ L, M; oportet invenire alteram N, ita ut sit L. M $\sqsubset$ L. N, ter. Fiat L. P :: P. M. & L. N :: N. P. Erit L. M $=$ L. P, bis $=$ L. N quater $\sqsubset$ L. N, ter.

Prop. XXXVIII.

Omnis sphæra (A) *quadrupla est coni* (K) *basim quidem habentis æqualem maximo circulo eorum qui in sphæra, altitudinem verò radium sphæræ.*

a 3 *hujus.*
b *Lemma præced.*
c 4 *hujus.*
d 8. 5.
e 36 *hujus.*
g *const.*
h 10. 5.
* *priùs.*

Si fieri potest, sit primùm A $\sqsubset$ 4 K. Fiat A. 4 K [a] $\sqsubset$ L. M [b] $\sqsubset$ L. N, ter: tum figuræ circumscribantur & inscribantur (quæ vocentur Y, Z) ita ut latus D E. B C [c] $\sqsupset$ L. N. Estque A. Z [d] $\sqsupset$ Y. Z [e] $=$ D E. B C, ter [g] $\sqsupset$ L.N, ter [g] $\sqsupset$ L. M [g] $\sqsupset$ A. 4 K. [h] ergo Z $\sqsubset$ 4 K. contra 30 hujus.

Sin dicas esse 4 K $\sqsubset$ A. sit 4 K. A [a] $\sqsubset$ L. M [b] $\sqsubset$ L. N, ter. & D E. B C [c] $\sqsupset$ L. N. tum erit Y. A. $\sqsupset$ [d] Y. Z * $\sqsupset$ L. M. [g] $\sqsupset$ 4 K. A. [h] quare

[h]quare $Y \sqsupset 4K$. contra 35 hujus. Ergo potiùs est sphæra $A = 4K$. *Q.E.D.*

Coroll. Hemisphærium æquatur duplo cono ad eandem basin & æquè sibi alto; vel cono ad eandem basin & altiudinem habenti duplam.

Prop. XXXIX. Coroll.

Hisce verò præmonstratis liquet, quòd omnis cylindrus (ABCD) *basim quidem habens maximum in sphæra circulum* (AB), *altitudinem verò* (AD) *æqualem diametro sphæræ, sesquialter est sphæræ* (FGHK); *& quòd superficies istius cylindri cum basibus sesquialtera quoque est superficiei sphæræ.* Fig. 38.

Nam per E (sphæræ centrum) ductâ FH ad AB parallelâ, & junctis EA, EB; est

a 14. 12.
b 10. 12.
c 38 hujus.
d sch. 15. 5.
e 16 hujus.
f 4. 2. & 2 cor. 12.
g 37 hujus.

1. $\frac{1}{6}$ Cyl ABCD [a] $= \frac{1}{3}$ Cyl ABHF [b] $=$ con AEB [c] $= \frac{1}{4}$ sph. FGHK. [d] ergo Cyl ABCD. Sph FGHK :: *6. 4* :: 3. 2.

2. Superf. cyl ABCD [e] $=$ ⊙ rad $\sqrt{AD \times DB}$ $=$ ⊙ rad AB [f] $= 4$ ⊙ FGHK [g] $=$ superf. sphæræ. ergo superf ABCD $+ 2$ ⊙ FGHK. superf. sphæræ :: *6.* 4 :: 3. 2.

Prop. XL.

Secetur sphæra plano non per centrum, sitque in ipsa maximus circulus AEZ secans perpendiculariter planum secans. Inscribatur autem portioni ABC polygonum æquilaterum, & parilaterum, exceptâ base AB. Haud absimiliter ac antehac, si manente GZ circumducatur figura, anguli quidem D, E, A, B ferentur secundùm circulos, quorum diametri DE, AB; latera verò *figuræ secundùm conicas superficies; erítque facta figura solida conicis superficiebus comprehensa, basin quidem habens circulum, cujus diameter AB, *verticem autem C: quinimò ut in præcedentibus, superficiem habebit minorem superficie portionis comprehendentis. Siquidem tam portionis quàm figuræ idem in plano terminus est circumferentia circuli, cujus diameter AB, & ad easdem cavæ sunt ambæ superficies, & una ab altera comprehenditur. Fig. 39.

**lego σχήματος pro τμήματος.*
**lego κορυφὴν pro κορυφῇ.*
ax. 4 hujus.

Prop. XLI.

Superficies inscriptæ in sphæræ portionem figuræ (ADFBGEC) *æqualis est circulo, cujus radius potest æquale rectangulo comprehenso sub uno latere* (BF) *polygoni in maximi circuli segmentum* (ABC) *inscripti,* Fig. 40.

inscripti, & recta (F G + D E + A K) *æquali omnibus ad segmenti basin* (A C) *parallelis, cum semisse diametri basis.*

a 17 *hujus.* Nam ⊙ rad $\sqrt{BF \times FH}$ [a] = superf con F B G & ⊙ rad $\sqrt{\frac{DF}{BF}}$

b 19 *hujus.* ×: H G + D I [b] = superf. D F G E. Item ⊙ rad $\sqrt{\frac{DA}{BF}}$ ×: I E + A K [b] = superf A D E C. [c] ergo conjunctè ⊙ rad $\sqrt{BF}$ ×: F G + D E + A K = superf F B G + D F G E + A D E C = superf A D F B G E C, *Q.E.D.*

c { 1. 2. *cor.* 2. 12. 1. *ax.* 1. }

Coroll. Ductâ LF, erit ⊙ rad $\sqrt{BK \times LF}$ = superf ADFBGEC.

d *cor.* 25 *huj.* Nam B F ×: F G + D E + A K [d] = B K × L F.

Prop. XLII.

Sphæræ portioni inscriptæ figuræ superficies (S) *minor est circulo, cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à portionis vertice* (B) *in circumferentiam circuli* (A C) *qui basis est coni.*

a *cor.* 8. 6. & 17. 6. Nam B K × L F ⊐ B K × L B [a] = B Aq. [b] ergo ⊙ rad B K × L F ([c] hoc est S) ⊐ ⊙ rad AB.

b *cor.* 2. 12.

c *cor. præc.*

Prop. XLIII.

Fig. 41.

Portioni inscripta figura (A D B E C) *conicis superficiebus contenta cum cono* (A F C) *basin quidem eandem habente cum figura, verticem verò sphæræ centrum* (F), *æquale est cono* (K) *basin habenti parem superficiei figuræ, altitudinem verò perpendiculari* (F G) *à sphæra centro* (F) *in unum polygoni latus* (A D) *deductæ.*

a 21 *huj.* Conus enim base superficie D B E, [a] altitudine F G æquatur Rhombo D F E B. [b] Item conus, cujus basis æquatur superficiei A D E C, altitudo ipsi F G æquatur frusto A D F E C: isti simul coni adæquant conum K; hic Rhombus & frustum constituunt figuram inscriptam cum cono A F C. ergò con K = fig. A D B E C + con A F C. *Q.E.D.*

b 23 *hujus.*

c 11. 12.

Schol. Procedunt hæc circa portionem hemisphærio minorem. In majori A Y C subtrahendus est conus A F C, ut sit con K = fig. A Y C — con A F C. nempe si figura latus habens A D toti circulo inscribi possit; vel si arcus A D circulum dimetiri possit, alias non succedit. Similis est discursus; quid plura? Idem in sequentibus intelligendum, analogiâ bene servatâ.

Coroll.

Coroll. Conus, cujus basis æquatur circulo radium habente parem rectæ B C à vertice portionis ad basis circumferentiam ductæ, & altitudo radio sphæræ, superat inscriptam figuram cum cono A F C.

Hujus enim coni tam *basis, quàm altitudo superant basim & altitudinem coni K. * *42 hujus.*

Prop. XLIV.

Sit sphæra, & in ipsa maximus circulus A B C, & semicirculo abscindatur rectâ A B; sitque centrum D; ac à centro D ad A, B connectantur D A, D B: & circa factum sectorem describatur polygonum, & circa ipsum circulus; habebit utique centrum idem cum circulo A B C: quòd si manente E K circumductum polygonum in idem denuò restituatur, descriptus circulus secundùm sphæræ superficiem feretur; & anguli polygoni circulos describent, quorum diametri polygoni angulos jungunt paralleli existentes ipsi A B. Puncta verò juxta quæ minorem circulum contingunt polygoni latera in minori sphæra circulos describunt, quorum diametri erunt quæ tactus conjungunt parallelæ existentes ad A B, latera verò secundùm conicas superficies ferentur, & erit circumscripta figura conicis superficiebus contenta, cujus basis qui super Z H circulus. Superficies autem dictæ figuræ major est superficie minoris portionis, cujus basis qui circa A B circulus: ducantur enim tangentes A M, B N. secundùm conicam ergo superficiem ferentur; & à polygono A M T E N B genita figura majorem habebit superficiem, quàm portio sphæræ, cujus basis est qui circa diametrum A B circulus: nam in uno eodémque plano terminum habent circulum qui super diametrum A B; & à figura continetur portio. Sed facta ab ipsis Z M, H N superficies conica major est facta ab ipsis M A, N B; major enim est Z M quàm MA (rectum quippe *subtendit), ac N H, quàm N B; quando verò hoc fuerit, major est superficies superficie: hæc enim in lemmatis ostensa sunt. Liquet igitur quòd circumscriptæ figuræ superficies major est superficie portionis minoris sphæræ. Fig. 42.

*Z A M. *Facilè deducitur ex 19 huj.*

Prop. XLV. Coroll.

Et patet quòd superficies circumscriptæ sectori figuræ æquatur circulo, cujus radius potest comprehensum & ab uno latere polygoni, & ab omnibus conjungentibus angulos, & prætereà semisse basis dicti polygoni. Fig. 43.

Nam * circumscripta figura, majoris sphæræ portioni inscripta est. Unde liquet ex *antedictis.

* Pro ἐγγεγραμμένον lego περιγεγρ.
* 41 *hujus.*

Prop. XLVI.

Fig. 43. *Superficies* (S) *figuræ* (D E F G H) *circa sectorem* (Z A B C) *descriptæ major est circulo, cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à vertice* (B) *portionis in circumferentiam circuli* (A C) *qui basis est portionis.*

a cor. 41 huj.
b cor. 33 huj.
c hyp. & 4. 6.
d 14. 5. (6.
e cor. 8. & 17.
cor. 2. 12.

Circa figuram describatur sphæra D F H L ; & connectantur rectæ D H, F D, L E. éstque S [a] = ⊙ rad √ L E × F P = ⊙ rad √ B M × F P ([b] ob L E = B M) ⊏ ⊙ rad √ B M × B K. (est enim F P . B K [c] :: F D . B A :: [c] Z D . Z A. adeóque F P [d] ⊏ B K). atqui ⊙ rad √ B M × B K [e] = ⊙ rad B A. ergo S ⊏ ⊙ rad B A. *Q.E.D.*

Prop. XLVII.

Fig. 44. *Quinetiam circumscripta sectori figura* (D E F G H) *cum cono* (D Z H), *cujus quidem basis est circulus circa diametrum* (D H) *vertex verò centrum* (Z) *æqualis est cono, cujus quidem basis æqualis est superficiei figuræ, altitudo autem perpendiculari* (Z N) *à centro ad latus ductæ, quæ utique æqualis est radio sphæræ.*

Figuræ circumducatur sphæra D E F G H ; & liquet propositum ex 43 hujus.

Corollarium.

Hinc apparet circumscriptam figuram cum cono D Z H majorem esse cono, basim quidem habente circulum cujus radius æquatur illi (B A) quæ à vertice (B) portionis minoris sphæræ ad circumferentiam ducitur circuli (A C), qui basis est portionis ; altitudinem verò æqualem radio minoris sphæræ.

a 46. & 47 h.

Nam basis hujus coni [a] minor est base coni, qui æquatur circumscriptæ figuræ ; altitudo autem æqualis.

Prop. XLVIII.

Fig. 45. Sit rursus sphæra, & in ipsa maximus circulus ; ac semicirculo minor portio A B C, & centrum D ; & sectori A B C inscribatur polygonum parilaterum, & huic simile circumscribatur, sintque latera lateribus parallela ; & circa polygonum circumscriptum describatur circulus ; & similiter ac in præcedaneis manente H B circumlati circuli figuras efficiant à conicis superficiebus circumseptas ; demonstrandum

ſtrandum eſt quòd circumſcriptæ figuræ ſuperficies ad inſcriptæ ſuperficiem duplicatam habet rationem, quam latus circumſcripti polygoni ad latus inſcripti. Figura verò cum cono triplicatam habet rationem ejuſdem.

Nam circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad E Z cum dimidia E Z, & latere E K, [a] æquatur ſuperficiei circumſcriptæ: & circulus, cujus radius æquatur potenti rectangulum ex parallelis ad A C cum dimidia A C, & latere A L, [b] æquatur ſuperficiei inſcriptæ. Hæc autem rectangula * ſimilia ſunt (ob polygonorum ſimilitudinem) adeóque [d] ſeſe habent, ut quadrata ex lateribus E K, A L: quare & dicti circuli (hoc eſt ſuperficies circumſcripta, & inſcripta) [e] ſe habent ut quadrata ex E K, A L, [d] hoc eſt in duplicatâ ratione ipſarum E K, A L.

a 45 *hujus.*
b 41 *hujus.*
* 4. 6.
d 20. 6.
e *cor.* 2. 12.

2. Ducatur D M perpendicularis ad latera E K, A L. Et quoniam conus, habens baſim æqualem ſuperficiei polygoni circumſcripti, altitudinem D M, [f] æquatur circumſcripto ſolido cum cono E D Z. & conus, cujus baſis æquatur ſuperficiei polygoni inſcripti, altitudo ipſi D N, [g] æquatur ſolido inſcripto cum cono A D C. Sunt autem radii baſium horum conorum (ut mox vidimus) ſicut latera E K, A L, [h] hoc eſt, ut altitudines D M, D N: [k] ergo hi coni ſimiles ſunt; adeóque [l] ſunt in triplicatâ ratione radiorum ſuorum, hoc eſt ipſarum E K, A L. & [m] proinde ſolida iſtis æqualia (circumſcriptum cum cono E D Z, & inſcriptum cum cono ADC) ſunt in eadem ratione triplicata. *Q.E.D.*

f 47 *hujus.*
g 43 *hujus.*
h 4. 6.
k 24. *def.* 11.
l 12. 12.
m 7. 5.

Prop. XLIX.

Cujuſcunque ſphæricæ portionis (A B C) *hemiſphærio minoris ſuperficies* (S) *æqualis eſt circulo* (X) *cujus radius æquatur ductæ* (B A) *à portionis vertice* (B) *ad circumferentiam circuli* (A C) *qui baſis eſt portionis ſphæricæ.* Fig. 46.

Si neges, eſto primùm $\odot X \sqsupset S$. tum portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quarum ſuperficies appellentur Y, Z) ſic ut latus E F. A D bis (vel E Fq. A Dq) [a] $\sqsupset \odot$ X. S. Jam S. X [b] $\sqsubset$ EFq. A Dq [c] $=$ Y. Z. [d] $\sqsubset$ S. Z. unde X [e] $\sqsupset$ Z, contra 42 hujus.

Sin dicatur X $\sqsubset$ S. ſit E Fq. A Dq [a] $\sqsupset$ X. S. éſtque X. S. [b] $\sqsubset$ E Fq. A Dq [c] $=$ Y. Z [f] $\sqsubset$ Y. S. unde X [e] $\sqsubset$ Y, contra 46 hujus. Itaque potius, ut hæ vitentur repugnantiæ, eſt $\odot X = S$. *Q.E.D.*

a 5 *hujus.*
b *conſt.*
c 48 *hujus.*
d 44 *hujus.* & 8. 5.
e 10. 5.
f 40 *huj.* & 8. 5.

Prop. L.

Fig. 47. 48. *Quinimò ſi portio* (A B C) *major ſit hemiſphærio, ſimiliter ejus ſuperſicies æqualis erit circulo, cujus radius æqualis eſt rectæ* (B A) *à portionis vertice deductæ ad circumferentiam circuli qui baſis eſt portionis.*

Ductâ enim diametro B D, & connexâ D A; erit circulus radio D B [a] æqualis ſuperficiei totius ſphæræ; & circulus radio D A [b] æqualis ſuperficiei portionis A D C. Detrahatur hic ab illo, [c] ſuperéſtque circulus radio B A æqualis reſiduæ portioni A B C. *Q.E.D.*

a *coroll.* 38 *h.*
b 49 *hujus.*
c *cor.* 2. 12. & 3. *ax.* 1.

Corollaria.

1. Cujuſvis portionis ſuperficies (A B C) æquatur curvæ ſuperficiei cylindri (M R S N) habentis eandem altitudinem, vel axem (B K), & diametrum (R S) parem radio ſphæræ.

a 16 *hujus.* Nam ſuperf. cylindrica M R S N [a] æquatur circulo, cujus radius $\surd$ M R $\times$ R S, vel $\surd$ B K $\times$ B D, hoc eſt B A (nam B K, B A, B D ſunt $\div\!\div$) [b] id eſt æquantur ſuperficiei portionis A B C. Hinc

b 49 & 50 *h.*

2. Superficies portionum A B C, A D C ſe habent ut axes K B K D. Nam cylindricæ ſuperficies ipſis æquales M R S N, μ R S ν [d], ſe habent ut latera R M, R μ, hoc eſt ut B K, K D.

3. Sphæricarum quarumvis portionum, ſuperficies axibus ſuis proportionales ſunt.

d 1. *cor.* 16. *h.* Nam & cylindricis ſuperficiebus quibus æquantur [d] hoc convenit.

4. Sphærica ſuperficies A α γ C parallelis planis A C, α γ intercepta æquatur cylindricæ ſuperficiei R ρ σ S iiſdem planis interceptæ.

Nam ſi à ſuperficie cylindrica ρ N, cui æquatur ſphærica ſuperf. α B γ ſubtrahatur cylindrica ſuperf, R N, cui æquatur ſphærica ſuperficies A B C, remanebit ſuperf. cylind. ρ S æqualis ſuperf ſphæricæ A α γ C.

5. Zonæ, ſeu ſuperficies ſphæricæ parallelis planis interceptæ ſuis axibus proportionales ſunt.

Quia nempe cylindris, quibus æquales ſunt, id convenit.

Prop. LI.

Fig. 49. *Cuicunque ſphæræ ſectori* (G A B C, *vel* S) *æqualis eſt conus* (K) *baſin quidem habens æqualem ſuperficiei portionis* (A B C) *ad ſectorem pertinentis, altitudinem verò parem radio ſphæræ.*

Si

Si neges, esto primùm S $\sqsubset$ K. fiátque S. K [a] $\sqsubset$ L. M [b] $\sqsubset$ L. N ter. tum portioni circumscribantur & inscribantur figuræ X. Y, sic ut latus E F. A D [c] $\sqsupset$ L. N. Estque S. Y + con A G C [d] $\sqsupset$ X + con E Z G. Y + con A G C [e] = E F. A D, ter [f] $\sqsupset$ L. N, ter [f] $\sqsupset$ L. M [f] $\sqsupset$ S. K. [g] ergo Y + con A G C $\sqsubset$ K; contra coroll. 43æ hujus.

a 3 *hujus.*
b *lem. ad* 37 *h.*
c 5 *hujus.*
d 8. 5.
e 48 *hujus:*
f *conſt.*
g 10. 5.

Sin dicatur K $\sqsubset$ S. Fiat K. S [a] $\sqsubset$ L. M [b] $\sqsubset$ L. N ter; & reliqua, ut priùs. & ob X + con E G Z. [d] Y + con A Z G $\sqsupset$ * L. M [f] $\sqsupset$ K. S [h] $\sqsupset$ K. Y + con A G C. [g] erit X + con E G Z $\sqsupset$ K, contra coroll. 47æ hujus. quin potiùs est con K = sector S. *Q.E.D.*

* *priùs.*
h 8. 5.

Schol. De sectore sphærico minori directè procedit demonstratio, sed infertur: idem facilè de majori. Nam quia conus, cujus basis æquatur toti sphæræ superficiei, altitudo radio sphæræ totam sphæram exæquat; & conus, cujus basis æquatur superficiei portionis A B C, altitudo itidem radio sphæræ, sectorem A G C B adæquat: detracto hoc cono ab illo, restabit conus, habens basim æqualem reliquæ superficiei sphæricæ, altitudinemque parem radio sphæræ, æqualis residuo sectori majori.

Corollaria.

1. Hinc sector (A G C B) æquatur cono, cujus altitudo sphæræ radio, basis æquatur circulo radium habenti parem subtensæ B A.

2. Portio sphærica (A B C) æquatur isti cono, dempto vel addito cono A G C; (addito, si portio major sit hemisphærio, dempto si minor:) si sector hemisphærio æquetur, cum portione coalescit.

Portionem sphæricam cum cono methodo aliâ comparat *Archimedes*, in libro de Conoidibus & Sphæroidibus. Nam sphæræ & portionibus ejus convenit, quicquid istic de sphæroide sphæroidisque portionibus ostenditur, respectivè.

ARCHI-

ARCHIMEDIS
DE SPHÆRA & CYLINDRO
LIBER SECUNDUS.

Archimedes Dositheo Salutem.

ANtea quidem mandâsti mihi, Problematum demonstrationes ſcriberem, quorum ipſe Propoſitiones ad *Cononem* miſeram. Accidit autem eorum complura inter Theoremata ſcribi, quorum priùs ad te miſi demonſtrationes: quòd nempe omnis Sphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli eorum qui in Sphæra: quinetiam quòd omnis portionis Sphæræ ſuperficiei æquatur circulus, cujus radius æqualis eſt rectæ à vertice portionis ad baſis circumferentiam ductæ. Præterea quòd omnis Sphæræ cylindrus, baſin quidem habens maximum circulum ex iis, qui in Sphæra, altitudinem verò parem diametro Sphæræ, cum ipſe magnitudine ſeſquialter eſt Sphæræ, tum ſuperficies ejus ſeſquialtera ſuperficiei Sphæræ. *Adhæc verò, quòd omnis ſector ſolidus æqualis eſt cono baſin quidem habenti circulum æqualem ſuperficiei portionis Sphæræ, quæ in ſectore, altitudinem verò parem radio Sphæræ. Quæcunque igitur Theoremata & Problemata ſcripta ſunt *per hæc Theoremata in hoc libro deſcribens ad te tranſmiſi: quæcunque verò per aliam inveniuntur contemplationem, quæ ſc. de Helicibus, & quæ de Conoidibus, propediem adnitar mittere. Problematum autem primum hoc fuit.

* *Pro* ϗ διότι *lego* ϗ δὴ ὅτι.

**vel* ex his theorematis (deducta ſcilicet)

Prop.

Prop. I.

Sphærâ datâ ſpatium planum invenire æquale ſuperficiei ſphæræ.

Hoc verò manifeſtum eſt, è prædictis Theorematis oſtenſum. Quadruplum enim maximi in ſphæra circuli planum ſpatium eſt, & æquale ſuperficiei ſphæræ.

Prop. II.

Secundum erat: *Dato cono vel cylindro* (A C) *ſphæram invenire* Fig. 50.
cono, vel cylindro parem. 51.

Analyſis. Factum ſit; ſit nempe X diameter ſphæræ æqualis cylindro A C, cujus diameter A B, latus B C. Fiat B C. B D :: 2. 3. quare cylindrus A D [a]ſeſquialter erit cylindri A C, [b]hoc eſt ſphæræ ad diametrum X. ergo cylindrus A D [c]æquatur cylindro, cujus diameter, & altitudo æquantur ipſi X. [d]ergo erit A Bq. Xq :: X. B D. unde B D* $= \frac{X\ cub.}{A\ Bq}$. at verò A B, X, $\frac{Xq}{AB}$, $\frac{X\ cub.}{ABq}$. ſunt ∺. quare componitur ſic: ſit B C $= \frac{2}{3}$ B D. ([a]unde cylindrus A C $= \frac{2}{3}$ cyl A D); & inter A B, B D reperiantur duæ mediæ proportionales X, Y, erit X diameter ſphæræ æqualis cylindro A C. Nam ſphæra X eſt $\frac{2}{3}$ cylindri, cujus diameter & altitudo æquantur ipſi X; hic autem æquatur cylindro A D; quia eſt X. B D :: A B. Y :: A Bq. Xq. ergo ſphæra ad diametrum X æquatur cylindro A C. *Q. E F.*

a 14. 12.
b *hyp.*
c 39. 1 *hujus.* & 1 *ax.* 1.
d 15. 12.
a 14. 12.
b 39. 1. *hujus.*

Scholium.

Hoc problema ſolidum eſt, ad ipſius quippe ſolutionem exigens, ut duæ mediæ proportionales inveniantur; quod præſtare nequit Geometria communis, regulâ tantùm utens & circino; per conicas ſectiones, & aliis compluribus modis effici poteſt; de quibus hìc taceo.

Prop. III.

Omnis ſphæræ portioni (B V A) *æquatur conus* (B E A) *habens quidem baſim* (B A) *portioni communem, altitudinem verò rectam* (KE), *quæ ad portionis altitudinem* (K V) *eandem rationem habet, quam compoſita è ſphæræ radio* (C V) *& reliquæ portionis altitudine* (KD) *ad reliquæ portionis altitudinem* (KD). Fig. 52.

Nam

a hyp. Nam ob KE. KV [a]:: KD + CV. KD; erit dividendo VE. KV :: CV. KD; & permutando VE. CV :: KV. KD; & componen-
b 14. 12. do CE. CV ([b]hoc eſt. con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad KB.}\\ \text{alt. CE}\end{array}\right.$ con.$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad KB}\\ \text{alt. CV.}\end{array}\right)$ ::
c 20. 6. d 8, & 22. 6. DV. KD [c]:: DVq. DBq [d]:: VBq. KBq :: [e]con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad VB.}\\ \text{alt. CV.}\end{array}\right.$
e 11. 12. con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad KB}\\ \text{alt. CV.}\end{array}\right.$ ergo [f] erit con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad KB}\\ \text{alt CE}\end{array}\right.$ = con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad VB}\\ \text{alt CV}\end{array}\right.$
f 9. 5. g 1. & 2 cor. 51. huj. [g]= port BVA + con BCA. auferatur utrinque con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ. rad. KB}\\ \text{alt. CK}\end{array}\right.$
h 14. 12. & 3. ax. 1. = con BCA; [h]reſtabit con$\left\{\begin{array}{l}\text{baſ rad KB}\\ \text{alt. KE}\end{array}\right.$ = port. ABC. *Q E D.*

Si portio major ſit hemiſphærio, idem planè diſcurſus adhibetur, niſi quòd hìc utrinque ſit addendus conus BCA, ſicut iſtic aufertur.

Corollarium.

Hinc facile eſt datæ portioni, ad eandem baſin, æqualem conum conſtituere; faciendo ſc. KD. KD + CV :: KV. KE; erítque KE quæſiti coni altitudo. Tertium Problema hoc erat:

Prop. IV.

Fig. 53. *Datam ſphæram* (BVAD) *plano ſecare, ita ut portionum ſuperficies ad ſe rationem habeant, eandem data* (X *ad* Y).

a 2 cor. 50. 1 h. b 10. 6. Quia ſuperficies ſphæricæ [a]ſe habent ut axes; liquet ſi diameter ſphæræ [b]ſecetur ad K, ut ſegmenta VK, KD ſint in ratione X ad Y, & per K ducatur planum BA ad ipſam VD rectum, eſſe ſuperficiem BVA ad ſuperficiem BDA, ut VK ad KD, vel X ad Y; & proinde factum eſſe quod poſtulatur.

Prop. V.

Fig. 54. *Datam ſphæram* (BVAD) *plano ita ſecare, ut portiones ſphæræ rationem habeant eandem data* (X *ad* Y).

Analyſis. Factum ſit; ſecet nempe planum BA ſphæram, ita ut portiones BVA, BDA habeant rationem X ad Y; & ſit VD portionum axis; ſintque VD = *d*. *CV = *r*. DK = *a*. unde KV =

*C centrum ſphæræ.

2 r

$2r - a$. Jam ſi D K. D K + C V :: K V. K E, hoc eſt $a. a + r :: 2r -$
a. $KE = \frac{2rr + ra - aa}{a}$. [a]erit conus B E A æqualis portioni BVA. a 3 *hujus.*
Item ſi [a] V K. V K + C V :: K D. K F; hoc eſt $2r - a. 3r - a :: a.$
$\frac{3ra - aa}{2r - a} = K$, [a]erit conus B F A æqualis portioni B D A. [b] ergo X.Y b *hyp.* & 7.5.
:: con B E A. con B F A [c] :: K E. K F :: $\frac{2rr + ra - aa}{a}. \frac{3ra - aa}{2r - a}$ ::X. c 14 12.
Y. quare (ducendo in ſe extrema & media) erit $\frac{3xra - xaa}{2r - a} =$
$\frac{2yrr + yra - yaa}{a}$; & (utrumque latus multiplicando per $2r - a$ & a)
erit $3xraa - xa^3 = 4ry^3 - 3yraa + ya^3$. & (tranſponendo) $3xraa +$
$3yraa - xa^3 - ya^3 = 4yr^3$. & (utrinque dividendo per $x + y$) $3raa -$
$a^3 = \frac{4yr^3}{x + y} = \frac{{}^{*}yrdd}{x + y}$ (*ſubſtituendo dd pro $4r^2$). & faciendo $x + y.$ * 4. 2.
$y :: r. p = \frac{yr}{x + y}$, erit $3raa - a^3 = pdd$. hoc eſt, æquationem hanc, ad
analogiſmum redigendo, $3r - a.p :: dd.aa$. hoc eſt C V + K V. $\frac{Y \times CV}{Y + X}$
:: V Dq. D Kq. qui ipſiſſimus eſt analogiſmus ad quem rem deduxit *Archimedes*, (quod, ut hoc obiter moneam, ſatis prodit qualem is analyſin uſurpârit; nam huc eum deveniſſe varias iſtas proportionum compoſitiones, diviſiones, alternationes, & inverſiones, quas oſtentat, adhibendo, penè ſupra fidem ſit: quod ſi feciſſet, caſui potiùs imputandum eſſet, quàm arti, quòd in genuinas inciderit ſolutiones, & hoc ei conſtanter obtigiſſe, vix concipi poteſt.

Ipſum Problema quod attinet, liquet illud eſſe ſolidum, nec in eo genere facillimum effectu; integram pollicetur Author ejus reſolutionem & compoſitionem, at quòd præſtiterit non apparet. Ei ſupplendo defectui nonnullas *Eutocius* bene longas & laborioſas exhibet conſtructiones, per conicarum utique ſectionum occurſus, quas nos omittimus. Præ illis concinnam & expeditam conſtructionem tradit Excellentiſſimus *Hugenius*, in primo Problematum illuſtrium, quam vide ſîs; vel adhibeas ipſe generalem *Carteſii* methodum, quam pro conſtruendis hujuſmodi problematis edocet, in Geometriæ ſuæ tertio.) Nos Authoris inſiſtentes veſtigiis ſuppoſitâ hujus analogiſmi effectione, problema ſic componimus.

F Fiat

Fiat X + Y. Y :: CV. P; & secetur DV in K, ita ut sit CV + KV. P :: VDq. KDq. & per K transeat planum ipsi VD rectum. Dico factum. Nam sit CV + DK. DK :: KE KV. & CD + VK. VK :: KE. KD, eritque dividendo CV. DK :: VE. KV. & CD. VK :: DF. KD. permutandóque CV. VE :: DK. KV :: DF. CD. inverséque componendo CE. CV (CD) :: CF. DF. & tam antecedentes quàm consequentes conjungendo EF. CF :: CF. DF. unde
a 20. 6. EF. DF [a] :: CFq. DFq :: DVq. DKq (erat enim priùs CD, DF :: KV. DK; adeóque componendo CF. DF :: DV. DK).
b *const.* atqui DVq. KDq [b] :: CV + KV. P. [c] ergo EF. DF :: CV + KV.
c 11. 5. P. quinetiam fuit CV + VK. VK :: KF. KD; & conversione rationis CV + VK. CV :: KF. DF; seu inversè CV. CV + VK ::
d *const.* & 11. 5. DF. KF. ergo ex æquo perturbatè CV. P :: EF. KF. [d] id est X + Y. Y :: EF. KF. & divisim X. Y :: EK. KF [e] :: con BEA. con BFA
e 14. 12. f *const* & 3 *h.* [f] :: port BVA port BDA :: X. Y. *Q.E.F.*

Lemma, pro sequenti.

Fig. 55. 56. Sint coni DMF, GOI æquales similibus sphæricis portionibus DEF, GHI (ad easdem bases constitutis); dico conos hos assimilari.

Nam productis axibus MNR, OPT sint sphærarum centra Q, S. & ob portionum similitudinem erit EN. NR :: HP. PT. & antecedentes dimidiando QR. NR :: ST. PT. componendóque QR + NR. NR :: ST + PT. PT. [a] hoc est MN. EN :: OP. HP. at
a 3 *hujus.* b 24 *def.* 11. rursus, ob portionum similitudinem, est EN. ND :: HP. PG. ergo ex æquali MN. ND :: OP. PG. [b] ergo coni DMF, GOI sunt similes. *Q.E.D.*

Prop. VI.

Fig. 57. *Datæ sphæræ portioni* (DEF) *similem, alterique datæ* (ABC) *æqualem constituere.*

Analysis. Sit GHI portio quæsita, fiántque coni AKC, DMF, GOI æquales portionibus ABC, DMF, GOI, singulæ singulis
a 1. *ax.* 1. ordine. [a] Quare con GOI = con AKC. & [b] idcirco ACq. GIq ::
b 15. 12. * c *lemm præc.* PO. LK. * unde $\frac{ACq \times LK}{GIq} = PO$. Item ob [c] similitudinem co-
d 24 *def.* 11. e 7. 5. norum DMF, GOI [d] est DF. NM :: GI. PO :: [e] GI. $\frac{ACq \times LK}{GIq}$

:: GI

:: G I cub. A Cq × L K. quare $\frac{DF \times ACq \times LK}{NM} =$ G I cub. &(dividendo per A Cq) $\frac{DF \times LK}{NM} = \frac{GI\ cub}{ACq}$. atqui AC, GI, $\frac{GIq}{AC}$, $\frac{GI\ cub}{ACq}$ sunt $\div\!\!\div$. ergo G I est prima duarum inter A C, & $\frac{DF \times LK}{NM}$ mediarum proportionalium.

Vides & hoc problema esse solidum, utpote quod desideret inventionem duarum mediarum proportionalium; quâ suppositâ sic construetur. [a]Fiant coni A K L, D M F pares datis portionibus A B C, D E F. sitque M N. K L :: D F. Z $= \frac{KL \times DF}{MN}$. & inter A C, Z reperiantur proportione mediæ G I, & X. Circa G I verò describatur portio circularis G H I continens angulum G H I = ang D E F. erit portio G H I, quam quæris. Nam faciendo conum G O I parem portioni G H I, quia portiones G H I, D E F [c] similes sunt, [d] erunt & coni G O I, D M F similes. quare P O. G I [e]:: M N. D F :: [f] K L. Z. & permutando P O. K L :: G I. Z [f]:: A C. X [g] :: A Cq. G I q. ([h]sc. ob A C, G I, X, Z $\div\!\!\div$). itaque reciprocam habent coni G O I, A C K basium & altitudinum proportionem; [k] ergo coni G O I, A C K [h](hoc est portiones G H I, A B C) æquantur. *Q. E. F.*

a 3 *hujus.*
b 33. 3.
c *constr.*
d *lemm. præc.*
e 24 *def.* 11.
f *const* & 16. 5.
g 20. 6.
h *const.*
k 15. 12.

Prop. VII.

Datis duabus sphæræ portionibus (A B C, D E F) [*sive ejusdem sive non*] *invenire sphæræ portionem, quæ quidem datarum uni* (D E F) *similis erit, superficiem verò habebit alterius portionis* (A B C) *superficiei parem.* Fig. 58. 59. 60.

Analysis. Sit portio G H I qualis exponitur. unde cùm portionum G H I, A B C superficies æquentur, [a]erit circulus radio H I æqualis circulo ad radium B C; & proinde H I = B C. Item ob similitudinem superficierum D E F, G H I, erit E F. E R :: H I (vel B C). H T: hinc Synthesis. Fac E F. E R :: B C. H T. & sit H T diameter sphæræ; & secetur H T in P, [d] ita ut sit H P. P T :: E N. N R; & per P transeat planum G I ad H T rectum: liquet portionem G H I fore similem ipsi D E F; & esse H I. H T [e] :: E F. E R [f] :: B C. H T. adeoque esse H I = B C. & idcirco circulum radio H I [g] æquari circulo ad radium B C; [h] hoc est superficiem sphæricam G H I superficiei A B C. *Q. E. F.*

a 49 & 50. 1 *h.*
d 10. 6.
e *const.* & *cor.* 8. 6.
f *const.*
g 9. 5.
h 49. & 50. 1 *h.*

Prop. VIII.

Fig 61. *A data sphæra* (B V A D) *plano abscindere portionem* (B V C), *ita ut portio ad conum* (B V C) *habentem eandem cum portione basim* (B A) *& æqualem altitudinem* (V K) *habeat rationem datam* (X *ad* Y).

Quæsita portio sit B V A, & conus B V A; quibus axis communis V K; in quo protracto centrum sphæræ, C; ponatur autem conus B E A æqualis portioni B V A; [a] unde C D + K D. K D :: E K. V K [b] :: con B E A. B V A [c] :: X. Y. dividendóque X—Y. Y :: C D. K D. unde componitur sic: fiat X—Y. Y :: C D. K D. (adeóque componendo erit X. Y :: CD + KD. KD); per K verò transeat planum B A ad V D rectum; túmque si fiat conus æqualis resectæ portioni B V A, erit E K. V K ([a] id est con B E A. con B V A) [b] :: C D + K D. K D [c] :: Y. X. [d] adeóque port. B V A. con B V A :: Y. X. *Q.E.F.*

a 3 *hujus.* b 14. 12. c *const.* & 7. 5.
a 14. 12. b 3. *hujus.* c *prius.* d *const.* & 7. 5.

Lemma.

Sint utcunque A ⊏ B, & C ⊏ D. Erit A + D. B + D. ⊏ A + C. B + C.

Nam A ×: C—D ⊏ B ×: C—D; hoc est A C—A D ⊏ B C—B D. & transponendo A C + B D ⊏ B C + A D. ergo utrinque adjungendo A B + C D, erit A C + B D + A B + C D ⊏ B C + A D + A B + C D, [a] hoc est A + D ×: B + C ⊏ B + D × A + C. * quare A + D. B + D ⊏ A + C. B + C.

a *sch.* 1. 2. * *sch.* 16. 6.

Prop. IX.

Fig. 62. *Si sphæra* (B V A D) *plano secetur non per centrum, major portio* (B V A) *ad minorem* (B D A) *rationem quidem habet minorem quàm* **duplam ejus, quam habet majoris portionis superficies ad superficiem minoris; majorem verò quàm sesquialteram.*

Sit conus B E A = port. B V A. & conus B F A = port. B D A. [a] quare C D + K D. K D :: E K. V K. & dividendo C D. K D :: E V. V K [b] ⊏ V K. C D (quia C Dq [c] ⊏ K D × V K). [d] ergo E V ⊏ V K, & E V × C D [b] ⊏ V Kq. [e] Est verò C D + V K. K F [f] :: V K. K D :: E V. C D * ⊏ E V + V K—C D + V K (E K. C D + V K). [b] ergo Qu: C D + V K ⊏ K F × E K. & [h] proinde Q: C D + V K. K Fq ⊏ K F × E K. K Fq. [k] hoc est V K q. K D q ⊏ E K. K F, hoc est

a 3 *hujus.* * διπλάσιον. b *sch.* 17. 6. c 5. 2. d 14. 5. e 3 *h.* & 16. 5. f *prius* & 16. 6. * — 5. h 8. 5. k *sup.* & 1. 6.

eſt [l] duplicata ratio ſuperficierum BVA. BDA major eſt [m] ratione conorum BEA, B F A ; vel portionum BVA, BFA. quod erat primum.

Porro fiat X q = E V × C D [p] ⊏ V Kq ; & quia E V. X [q] :: X. C D ; [r] erit E V + X. X + C D :: X. C D. [s] ergo Qu : E V + X. Qu : X + C D :: X q. C Dq [t] :: E V. C D. verùm E V + V K. C D + V K [u] ⊏ E V + X. C D + X. (quia $\frac{EK}{EV \sqsubset CD}$ & X [x] ⊏ V K). ergo E Kq. Qu. C D + V K. ⊏ E V. C D [x] :: C D + V K. K F. pone Z, C D + V K, Y, K F eſſe ∸, ergo Zq. Qu: CD + V K [t] :: Z. Y [y] :: C D + V K. K F [x] ⊐ E Kq. Qu : C D + V K. [z] quare Z ⊐ E K. atqui ratio Z ad K F [α] ſeſquialtera eſt rationis C D + V K ad K F. [β] ergo ratio E K ad K F ([γ] hoc eſt coni B E A ad conum B F A, [δ] vel portionis B V A ad portionem B D A) major eſt ſeſquialterâ rationis C D + V K ad K F, [x] vel V K ad K D, [ε] hoc eſt ſuperficiei ſphæricæ B V A ad B D A. ergo ſecundò quoque propoſitum conſtat.

l 3 *cor.* 50 *huj.*
m 14. 12.
p *ſupra.*
q 17. 6.
r 16. & 18 5.
s 22. 6.
t 20. 6.
u *lemm. præc.*
x *ſupra.*
y 16. 5.
z 10. 5.
α *conſt.*
β 8. 5.
γ 14. 12.
δ *conſt.* & 7. 5.
ε 3 *cor.* 50 *h.*

Prop. X.

Sphæricarum portionum (A B C, D E F) *ſub æquali ſuperficie contentarum maximum eſt hæmiſphærium* (A B C). Fig. 63, 64.

Sint coni A G C, D H F æquales portionibus A B C, D E F. quare K G [a] = 2 K A. [b] & E M + L O. L O :: L H. L E. ſit M centrum ſphæræ D E F, & E N = B K. ergo 2 E Nq = 2 K Aq [c] = B Aq [d] = E Dq [e] = O E × E L [f] = 2 E M × E L ; quare E Nq [g] = E M × E L. ergo E N media cadit inter puncta M, L ; unde E N × N O [h] ⊏ E L × L O. Additis igitur hinc inde æqualibus E Nq & E M × E L ; erit E N × E O ([k] hoc eſt E N × N O + E Nq) ⊏ E L × L O + E M × E L [l] = L H × L O [m] ergo E N. L H ⊏ L O. E O [o] :: O Dq. E Oq [p] :: D Lq. E Dq [q] :: D Lq. 2 K Aq. & antecedentes duplicando 2 E N (K G). L H ⊏ 2 D Lq. 2 K Aq [r] :: D Lq. K Aq. Ponatur igitur K Z. L H :: D Lq. K Aq. [s] eritque K Z ⊐ K G ; [t] & ideo conus A Z C ⊐ con A G C. [u] hoc eſt conus D H F minor cono A G C, [x] vel portio D E F minor portione A B C. *Q. E. D.*

a *cor.* 38. 1 *h.*
b 3 *hujus.*
c 47. 1.
d *hyp.* 1. & 49 *vel* 50 *hujus.*
e *cor.* 8. & 17 6.
f *conſt.* & 1. 2.
g 6. *ax.* 1.
h *cor.* 5. 2.
k 3. 2.
l *ſupra* & 16. 6.
n *ſch.* 16 6.
o *cor.* 8 *et* 20. 6.
p *cor.* 8. *et* 22 6.
q *ſupra* & 7. 5.
r 15. 5.
s 10. 5. t 14. 12. & 14. 5. u 15. 12. x *conſt.*

ARCHI-

De CIRCULI *Dimensione.*

Lemma.

Fig. 65. POlygonum ordinatum G H I K L M circulo circumscriptum æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò radius N P.

Nam radius N P ad contactum ductus tangenti G H perpendicularis est; & si ductis rectis N G, N H, N I, N K, N L, N M polygonum resolvatur in triangula, erit radius N P communis omnium altitudo, [a] proindéque triangula ipsa æqualia erunt; [a] ergo triangulum basin habens parem summæ laterum G H, H I, I K &c. altitudinem verò N P æquabitur illis omnibus, hoc est toti polygono circumscripto.

a 1. 6.

Similiter polygnum A B C D E F inscriptum circulo æquatur triangulo, cujus basis est ambitus polygoni, altitudo verò perpendicularis N O è centro in unum aliquod latus ducta.

Prop. I.

In fig. præced. Fig. 66. *Omnis circulus* (N) *æqualis est triangulo* (Q R S), *cujus radius* (N P) *æqualis est uni lateri* (Q R) *circa rectum angulum, perimeter verò basi* (R S).

Si negas sit primò triang Q R S $\sqsupset \odot$ N. Circulo N [a] inscribatur polygonum ordinatum A B C D E F, ita ut $\odot$ N – polyg A B C D E F $\sqsupset \odot$ N – triang Q R S; quare polyg A B C D E F $\sqsubset$ triang Q R S; & quoniam ambitus polygoni [b] minor est perimetro circuli, hoc est ipsâ R S, sit ei æqualis R T; & connectatur Q T; cùm itaque sit R Q $\sqsubset$ N O, [c] erit polyg A B C D E F $\sqsupset$ triang Q R T $\sqsupset$ Q R S. verùm erat polyg A B C D E F $\sqsubset$ triang Q R S, quæ repugnant.

b 1. 1. *de sph. & cyl.*

c *lemm. præc.*

Sin velis esse triang Q R S $\sqsubset \odot$ N; circulo circumscribatur polygonum G H I K L M [a] $\sqsupset$ triang Q R S; [d] ejus perimeter circuli perimetro major est, sit æqualis R V, & connectatur Q V; [c] ergo polyg G H I K L M = triang Q R V $\sqsubset$ triang Q S R; at erat polyg G H I K L M $\sqsupset$ triang Q R S, quæ repugnant.

d 2. 1. *de sph. & cyl.*

Ergo

Ergò potiùs circulus triangulo QRS æquatur; *Q. E. D.*

Breviùs. Circulus est quasi polygonum ordinatum infinitilaterum, in quo radius est perpendicularis ad latera, peripheria verò summa laterum; unde constat è præmisso lemmate propositum.

Coroll. Si circumferentia dicatur ϖ, diameter δ, radius r, erit $\odot = \frac{r\varpi}{2} = \frac{\varpi}{\delta} rr$.

Lemma. Sit A. B $\sqsubset$ C. D; & B = D; erit A $\sqsubset$ C. Nam sit [a] 10. 5.
A. E :: C. D. [a]ergò E $\sqsubset$ B; hoc est E $\sqsubset$ D; [b]quare A $\sqsubset$ C. [b] 14. 5.

prop. II.

Omnis circuli perimeter (ϖ) tripla est diametri (AD, vel δ), & præterea excedit minori quidem quàm $\frac{1}{7}$ (vel $\frac{10}{70}$), majori verò quàm $\frac{10}{71}$ diametri.

Pars prima.

Dico fore $\varpi . \delta \sqsupset 3\frac{1}{7} . 1$. Ducatur tangens AD; sitque $\frac{2}{3}$ rect = $\angle$ ACD = 2 $\angle$ ACE = 4 $\angle$ ACF = 8 $\angle$ ACF = 16 $\angle$ ACH = 32 $\angle$ ACK. quare 2 ang ACK = $\frac{1}{96}$ 4 rect; unde 2AK × 96 est ambitus polygoni circulo circumscriptibilis, circulo circumferentia major; itaque si 2AK × 96 $\sqsupset$ $3\frac{1}{7}$ AB, *liquet * 8. 5.
hæc pars; id verò sic ostenditur:

Ob ang ACE = $\frac{1}{3}$ rect. est CE [a] = 2EA; & ob ang. ACE a 3 *cor.* 12.13.
= 2ACF, est CE.CA [b] :: EF.FA; & componendo CE + b 3.6.
CA.CA :: EA.FA; permutandóque CE + CA.EA :: EA.FA: simili discursu est

$$\left.\begin{matrix} CF \\ CG \\ CH \end{matrix}\right\} + CA. \begin{matrix} FA \\ GA \\ HA \end{matrix} :: CA. \left\{\begin{matrix} GA. \\ HA. \\ KA. \end{matrix}\right.$$

Ponatur CE = 306; quare EA = 153, ac [c]CA ($\sqrt{}$ CEq — c 47. 1.
EAq) = $\sqrt{}$ 93636 — 23409 = $\sqrt{}$ 70227 $\sqsubset$ $\sqrt{}$ 70225 = 265. [d]ergo 571 (306 + 265). 153. $\sqsupset$ CE + CA. EA :: CA. FA; d 8. 5.
itaque posito FA = 153 = $\sqrt{}$ 23409, [e] erit CA $\sqsubset$ 571 = $\sqrt{}$ e lemm. præc.
326041; adeóque CFq $\sqsubset$ 23409 + 326041 = 349450 $\sqsubset$ 349428 $\frac{49}{64}$ = q. 591$\frac{1}{8}$.

Hinc 1162$\frac{1}{8}$ (591$\frac{1}{8}$ + 571). 153 [d] $\sqsupset$ CF + CA. FA :: CA. GA; quare posito jam GA = 153, [e] erit CA $\sqsubset$ 1162$\frac{1}{8}$. = $\sqrt{}$ 1350534$\frac{33}{64}$; & ideo CGq $\sqsubset$ 23409 + 1350534$\frac{33}{64}$ = 1373943$\frac{33}{64}$ $\sqsubset$ 1373720$\frac{49}{64}$ = q. 1172$\frac{1}{8}$.

Igi-

Igitur $2334\frac{1}{4}$ ($1172\frac{1}{8} + 1162\frac{1}{8}$). 153 [d] $\sqsupset$ CG + CA. GA :: CA. HA; ergo si rursus ponatur HA $= 153$; [e] erit CHq $\sqsubset$ q. 153 + q. $2334\frac{1}{4} = 23409 + 5448723\frac{1}{16} = 5472132\frac{1}{16} \sqsubset 5472028\frac{1}{16}$ = q. $2339\frac{1}{4}$. Itaque denuo $4673\frac{1}{2}$ ($2339\frac{1}{4} + 2334\frac{1}{4}$). 153 [d] $\sqsupset$ CH + CA. HA :: CA. KA; ergo si ponatur KA $= 153$, [e] erit CA $\sqsubset 4673\frac{1}{2}$; quare AB. 2KA $\sqsubset 4673\frac{1}{2}$. 153.

f 15. 5. vel inversè 2KA. AB $\sqsupset 153$. $4673\frac{1}{2}$. [f] ergo $94 \times$ 2KA. AB $\sqsupset 94 \times 153$. $4673\frac{1}{2}$; hoc est $\sqsupset 14688$. $4673\frac{1}{2} \sqsupset 14688\frac{6}{7}$. $4673\frac{1}{2}$ :: $3\frac{1}{7}$. 1. quare liquet prima pars.

Pars secunda.

Dico fore ϖ. $\delta \sqsubset 3\frac{10}{71}$. 1. Sit $\frac{1}{6}\,\varpi$ = arc AD = 2 arc AE = 4 arc AF = 8 arc AG = 16 arc AH; quare AH $= \frac{1}{96}\,\varpi$; unde 96 AH est ambitus inscriptibilis polygoni perimetro circuli minor;

*8. 5. quòd si igitur sit 94 AH. AB. $\sqsubset 3\frac{10}{71}$. 1; * liquebit fore magis ϖ. $\delta \sqsubset 3\frac{10}{71}$. 1. illud verò sic constat.

Fig. 59. Ducantur rectæ BD, BE, BF, BG, BH; & AD, AE, AF, AG, AH; & ob ang ABD = 2 ABE, est DB. BA [h] :: DX. KA; &

h 3. 6. componendo DB + BA. BA :: DA. KA; permutandóque DB

k 4. 6. + BA. DA :: BA. KA [k] :: BE. EA. (nam ob [l] similia triangula

l 27. 3. EBA, EAK est BA. KA [h] :: BE. EA).

Simili discursu est EB, FB, GB + BA. EA, FA, GA :: BF. FA, BG. GA, BH. HA.

Sit BA $= 1560$. ergo CA (DA) $= 780$; & DBq (BAq — ADq) $= 1825200 \sqsupset 1825201$ = q. 1351. [m] ergo 2911) 1560

m 8. 5. + 1351). $780 \sqsubset$ DB + BA. DA :: BE. EA; quare si pona-

n lemm. prac. tur EA $= 780$, [n] erit BE $\sqsupset 2911$; & BAq (BEq + EAq) $\sqsupset 9082321 \sqsupset$ q. $3013\frac{3}{4}$.

[m] Quare $5924\frac{3}{4}$ ($2911 + 3013\frac{3}{4}$). 780. (hoc est 1823. 240) $\sqsubset$ EB + BA. EA :: BF. FA; unde si FA ponatur 240, [n] erit BF $\sqsupset 1823$. & BAq (FAq + BFq) $\sqsupset 3380929 \sqsupset$ q. $1838\frac{9}{11}$.

Unde iterum $3661\frac{9}{11}$ ($1823 + 1838\frac{9}{11}$). 240 (hoc est 1007. 66) [m] $\sqsubset$ FB + BA. FA :: BG. GA; quare posito GA $= 66$, [n] erit BG $\sqsupset 1007$; & BAq (GAq + BGq) $\sqsupset 1018405 \sqsupset$ q $1009\frac{1}{6}$.

Itaque denuo $2016\frac{1}{6}$ ($1007 + 1009\frac{1}{6}$). 66 [m] $\sqsubset$ GB + BA. GA :: BH. HA; unde si ponatur HA $= 66$, [n] erit BH $\sqsupset 2016\frac{1}{6}$; & BAq (HAq + BHq) $\sqsupset 4069284\frac{1}{36} \sqsupset$ q. $2017\frac{1}{4}$ ergo BA.

AH

$AH \sqsupset 2017\frac{1}{4}.66$; vel inversè $AH.BA \sqsubset 66.2017\frac{1}{4}$. [p] quare p 15. 5.
$96\ AH.BA \sqsubset 94 \times 66.\ 2017\frac{1}{4}$ (hoc est, $6336.\ 2017\frac{1}{4} :: 3\frac{1057}{8071}.\ 1.$) quare $96\ AH.BA \sqsubset 3\frac{1057}{8071}\ 1 \sqsubset 3\frac{10}{71}.\ 1.$ unde constat propositum.

Coroll. Hinc $\pi.\delta :: 22.7$, ferè.

Prop. III.

Circulus ad suæ diametri quadratum rationem habet eandem (ferè), quam 11 *ad* 14.

Nam $\delta\pi.\delta\delta$ [a] $:: \pi.\delta$ [b] $:: 22.7.$ ergo $\frac{\delta\pi}{4}(\odot).\delta\delta :: \frac{22}{4}.7 :: \frac{44}{4}.14$ (hoc est) $:: 11.14.$ a 1. 6.
b cor. 2. huj.

Cyclometriam longiùs, & ad majorem ἀκρίβειαν promovit posteriorum industria. Consulantur *Vietæ*, *Ludolphi à Ceulen*, *Metii*, *Snellii*, *Hugenii* lucubrationes: ad crassiores saltem usus sufficit hæc *Archimedea* Circuli dimensio.

De SPIRALIBUS, *seu* HELICIBUS.

Archimedes Dositheo S.

THeorematum ad *Cononem transmissorum*, pro quibus assiduè literis à me contendis ut demonstrationes conscribam, plerorumque quidem scriptas habes in iis quas *Heraclides* pertulit; ipsorum verò quasdam etiam in hoc libello scriptas ad te mitto. Nè mireris autem, quòd post diutiorem temporis moram eorum demonstrationes edimus. Hoc enim accidit fieri, quia priùs voluerim iis exhibere, qui in Mathematicis occupantur, & ea libenter perscrutari volunt: * quales enim in *Geometria* speculationes, non bene tractabiles initio visæ, tempore elaboratæ perfectiorem accipiunt? *Conon* certè non sufficiens ipsorum inquisitioni tempus nactus vitam commutavit, obscuritate involuta relinquens; cùm & hæc omnia reperisset, & alia multa pervestigâsset, longiusque promovisset *Geometriam*: scimus enim in illo fuisse non mediocrem Mathematum peritiam, nec non industriam eximiam: à *Cononis* autem excessu cùm anni plures effluxerint, Problematum nullum à quovis percepimus solicitari. Volo autem eorum unumquodque singillatim producere * * * ut redarguantur qui præ se ferunt omnia invenisse, nullam proferentes eorum de-

vel quot: *fortè legendum* πόσα *pro* ποῖα.

Hîc in editis libris interseruntur hæc verba: καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ μὲν κεχωρισμένα· τέλος δὲ ποτ' ἐσσομένων. *quorum mentem assequi nequeo. Locus proculdubio mendosus & mutilus: è conjectura sic interpolata redderem: lego* καὶ γὰρ συμβαίνει δύο τινὰ τῶν ἐν αὐτῷ εἶναι κεχωρισμένα· τέλος δὲ ποτθησομένων. Contigit enim duo quædam eorum quæ in illo (*Cononis* scripto) separatim apposita sunt, falsa esse; * ποτίδει *pro* πεϱσίδει, *vel* πεϱσίδειν. *Habetur apud Theocr. Idyl.* 14 *v.* 45. *imò infra hic. prop.* 4. quæ quidem ultimò in fine proponemus, ut &c.

mon

monstrationem, *interdumque quæ impossibilia sunt * ἃ ποθ', *lego* οἵ ποθ'.
profitentes invenisse: hæc autem quænam Problemata
sunt; & *quorum missas habes demonstrationes; & quæ- * τίνων ὧν, *deleo* ὧν.
nam in hoc libro perlata *comprobamus*, tibi declarabo. Primum itaque Problematum fuit: *Sphærâ datâ, spatium planum invenire sphæræ superficiei æquale:* quod quidem primò manifestum evasit *edito de Sphæra libro*; quippe cùm ostensum sit, *quòd omnis sphæræ superficies quadrupla est maximi circuli eorum qui in sphæra*; liquet quomodo possibile sit invenire planum spatium æquale superficiei sphæræ. Secundum verò: *Dato cono vel cylindro, sphæram invenire æqualem cono vel cylindro.* Tertium verò: *Datam sphæram plano secare, ita ut ejus portiones inter se præstitutam habeant rationem.* Quartum autem: *Datam sphæram plano secare, ita ut superficiei portiones assignatam inter se rationem habeant.* Quintum verò: *Datam sphæræ portionem datæ sphæræ portioni assimilare.* Sextum verò: *duabus sphæræ, seu ejusdem seu diversæ, portionibus datis; invenire sphæræ portionem quandam, quæ sit ipsa quidem uni segmentorum similis, superficiem verò æqualem habeat superficiei alterius portionis.* Septimum: *A data sphæra portionem resecare plano, ita ut portio ad conum basin habentem eandem cum portione, & altitudinem æqualem præstitutam habeat rationem, non majorem illa, quam habent tria ad duo.* Horum quidem modò dictorum omnium demonstrationes pertulit *Heraclides.* Quod autem post hæc separatim appositum: falsum erat; est autem hujusmodi: *Si sphæra plano secetur in inæqualia portio major ad minorem duplicatam habet rationem ejus, quam habet major superficies ad minorem.* Quod verò hoc falsum sit, ex
antea missis manifestum est. Quin seorsim istis adscrip- 9 *II. de sph.*
tum erat & hoc: *Si sphæra plano secetur inæqualiter, ad rectos diametro cuidam ex iis qui in sphæra, portio major ad mi-*
norem eandem obtinebit rationem, quam diametri pars major *Ibid.*
ad minorem: major enim portio sphæræ ad minorem ha-

 bet

bet minorem quidem quàm duplicatam rationem ejus quam habet major ſuperficies ad minorem, majorem verò quàm ſeſquialteram. Erat verò ſepoſitorum problematum ultimum etiam falſum: *quòd, ſi ſphæræ alicujus diameter ſecetur, ita ut quod à majori ſegmento ſit quadratum triplum ſit quadrati, quod à ſegmento minori, perque ſectionis punctum actum planum diametro perpendiculare ſphæram ſecet, erit talis ſpecie figura, qualis eſt major ſphæræ portio, maxima portionum quarumvis aliarum æqualem habentium ſuperficiem. Quòd autem hoc ſit falſum, conſtat ex antea miſſis theorematis:* etenim demonſtratum eſt, *quòd hæmiſphærium maxima eſt portionum, ſub æquali comprehenſarum ſuperficie.* Poſt hæc verò de cono propoſita ſunt & hæc: ſi rectanguli coni ſectio manente diametro circumvolvatur, ita ut diameter ſit axis; à rectanguli coni ſectione deſcripta figura vocetur *Conoides*; & ſi conoideam figuram planum contingat; plano verò contingenti ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abſcindat, abſciſſæ qnidem portionis baſis appelletur planum abſcindens, vertex verò punctum, ad quod aliud planum *conoides* tangit. Quinetiam ſi dicta figura plano ſecetur ad axem recto, quod ſectio quidem circulus erit perſpicuum eſt; *Quòd verò reſecta portio ſeſquialtera erit coni baſin habentis eandem cum portione, & æqualem altitudinem*, demonſtrare oportet. Ac ſi *Conoidis* duæ portiones planis reſecentur utcunque ductis, quòd equidem ſectiones erunt *oxygoniorum conorum* ſectiones, patet; ſiquidem reſecantia plana non ſint ad axem recta: quòd verò portiones hanc inter ſe rationem habent, quam potentiâ inter ſe habent quæ ab ipſarum verticibus ducuntur axi parallelæ uſque ad ſecantia plana, demonſtrandum eſt. Horum autem demonſtrationes *ita tibi mandantur: poſt iſta verò de *Helice* propoſita fuerunt hæc. Eſt verò quaſi genus aliud problematum, *nihil habens commune cum prædictis: de

vid. 26.

* οὕτω. *fortè ſubeſt aliquid errati.*

**lego* ἐπίκοινον ἔχοντα *pro* ἐπι:όναν, ἔοντα.

de quibus in hoc ipſo libello demonſtrationes tibi conſcripſi. Sunt autem hæc: [illa ſubjungit, quæ habentur infrà in Prop. 24. 18. 27. 28.] Horum à me, & aliorum de Helice demonſtrationes in hoc libello ſcribuntur.

PRæmittuntur autem, ſicut & aliis Geometricis, *quæ uſum habent ad ipſorum demonſtrationem. Aſſumo verò & in his, ex iis quæ in libris extant antehac editis, hæc lemmata. *Inæqualium linearum &c.

* *Innuit II. primas propoſitiones, quæ lemmaticæ ſunt, et ſequentium demonſtrationi præſtratæ.* * *Vide 5. ax. libri I. de ſph. & cyl.*

Prop. I.

Si in aliqua linea (A G) *feratur punctum quoddam æquè ſibi ipſi velociter latum, & ſumantur in illa duæ lineæ* (A B, B G); *ſumptæ eandem inter ſe rationem habebunt, quam tempora, in quibus punctum rectas tranſierit.* Fig. 69. 70.

Tempora repræſententur à rectis $\alpha\beta, \beta\gamma$. & * ſumantur B M, B N * *poſt.* utcunque multiplices rectarum B A, B G; & $\beta\mu, \beta\nu$ pariter multiplicia temporum $\beta\alpha, \beta\gamma$: & quia motus [a] æquè veloces ſunt, erit $\beta\mu$ a *hyp.* tempus motûs continuati per B M; & $\beta\nu$ tempus motûs per B N. Quòd ſi recta B M major ſit rectâ B N, liquet (ob motûs ſuppoſitam ἰσοταχείαν) eſſe tempus $\beta\mu$, quo peragitur B M, majus tempore $\beta\nu$, quo peragitur B N; & ſimili ratione ſi B M = B N, eſſe correſpondenter $\beta\mu = \beta\nu$. [d] unde erit A B. B G :: $\alpha\beta$. $\beta\gamma$. *Q. E. D.* d 5 *def. V.*

Prop. II.

Si duorum punctorum utroque ſecundùm lineam quandam, non per unam eandem, æquè ſibimet velociter lato; ſumantur in utraque linea duæ lineæ (A B, B C, & L M, M N) *& tùm primæ* (A B, L M) *in æqualibus temporibus a punctis tranſigantur, tum etiam ſecundæ* (B C, M N); *eandem inter ſe rationem habebunt ſumptæ lineæ.* Fig. 71. 72.

Lationis per A B, & L M tempus ſit X; & lationis per B C, M N tempus ſit Y; éſtque A B. B G [a] :: (X. Y [a] ::) L M. M N. *Q. E. D.* a 1 *hujus.*

Prop.

Prop. III.

Datis quotlibet circulis, recta sumi potest major circumferentiis circulorum.

a per aliquam 4ti elem. b 2.1. de sph.

Circulis [a]circumscribantur polygona quævis, [b] liquet rectam eorum perimetris æqualem circulorum excedere circumferentias,

Prop. IV.

Datis duabus lineis inæqualibus rectâ (R) *& circuli circumferentia* (P), *sumi potest recta, minor quidem datarum linearum majore, major autem minore.*

a 5 ax.1.de sph. b constr. c 7 ax.1. d 4. ax. 1. e 5. ax. 1.

Hoc è quantorum homogeneitate, & adeò ab excessûs divisibilitate satis perspicuum est. Sed cum auctore, sit alterutra R major; & excessus R—P multiplicatus per aliquem numerum N [a]excedat R. Erit $R - \frac{R}{N} \sqsubset P$. Nam quia R—P $\times$: N [b] $\sqsubset$ R. [c]erit $R - P \sqsubset \frac{R}{N}$. ergo transponendo R [d]$\sqsubset \frac{R}{N} + P$. [e] & $R - \frac{R}{N} \sqsubset P$. *Q.E.F.*

Prop. V.

Fig. 73.

Dato circulo, & recta (B T) *tangente circulum, potest à circuli centro* (A) *duci recta* (A T) *ad tangentem, ita ut à tangente & circuli circumferentia intercepta recta* (D T) *ad radium* (A D) *minorem rationem habeat, quàm circuli arcus* (B D) *qui est inter contactum*(B) *& eductam* (A T) *ad datam quamcunque circuli circumferentiam* (P).

a 3 hujus. Fig. 74. a 4. 6. b 1.ax.1.de sph. & 8. 5. c const. & 8. 5.

Accipiatur recta quapiam X [a]major quàm P; & agatur diameter N M ad B T parallela, cui occurrat recta B D secans circulum in D, ita ut intercepta D F major sit quàm X (id quod fieri potest, quoniam sic interceptæ ab M versùs partes F crescunt ad infinitum). Jam trajectâ A T per D, dico factum. Nam T D. D A ([a]:: B D. D F [b]$\sqsupset$ arc B D. D F [c]$\sqsupset$ arc B D. X) [c]$\sqsupset$ arc B D. P.

Prop. VI.

Fig. 75.

Dato circulo, & in circulo rectâ (Z D) *quæ sit minor diametro, potest à circuli centro* (A) *ad peripheriam projici recta* (A G) *secans datam*

tam in circulo rectam (Z D), *ita ut recta* (G H) *inter peripheriam & rectam in circulo datam comprehensa ad conjunctam* (G Z) *à termino* (G) *projectæ, qui est in peripheria ad alteram extremitatem* (Z) *datæ in circulo rectæ, præstitutam habeat rationem* (R *ad* S); *modò tamen data ratio minor sit ea, quam habeat dimidia* (Z E), *datæ in circulo ad ductam è centro ipsi perpendicularem* (A E).

Ducatur diameter N M ad D Z parallela, cui occurrat tangens ZS, & connectatur A Z; & ob angulos A Z E, Z A S [a] paret, & [b] rectos Z E A, A Z S, erunt triangula Z E A, A Z S similia. [c] unde A Z. Z S :: Z E. A E [d] ⊏ R. S. fiat R. S :: A Z. X; [e] ergo X ⊏ Z S. Igitur si per Z (quod fieri posse *constat) transeat recta, secans circulum in G, sic ut inter diametrum & G intercepta G K æquetur ipsi X (secabit autem ad partes D, quia G K ⊏ Z S, & angulum S Z M nulla secet major quam S Z); & connectatur A G; quoniam G H. G Z :: [c] G A (Z A). G K [f] :: Z A. X [g] R. S [h] :: G H. G Z, constat propositum. *

a 29. 1.
b *hyp* & 16. 3.
c 4. 6.
d *hyp.*
e 10. 5.
* *Id nos alibi, quo modo fieri possit, ostendimus.*
f *const.* & 7. 5.
g *constr.*
h 11. 5.

* *sch. ad 6. Vides conditionem apponi meritò: nam si esset* G H. G Z (*vel* G A. G S) :: R. S :: Z E. A E :: Z A. Z S. *essent* G S, Z S *æquales*; q. f. n.

Prop. VII.

Fig. 75.

Iisdem datis, & rectâ (D Z) *protractâ potest è centro recta* (A H) *educi, ita ut quæ* (G H) *fuerit inter peripheriam & protractam ad conjunctam* (G Z) *à termino interceptæ ad terminum protractæ propositam habeat rationem* (R *ad* S), *dummodo data ratio major fuerit eâ, quam habet dimidia* (Z E) *data in circulo ad ductam è centro ipsi perpendicularem* (A E).

Ducatur enim tangens Z S, & connectatur A Z, & cætera ut in præcedenti. Estque Z A. Z S [a] :: Z E. A E [b] ⊐ R. S. fiat R. S :: Z A. X; erit ideo X ⊐ Z S. itaque ducatur Z K, ita ut intercipiatur G K = X (quod constat fieri posse intra angulum A Z S) éstque G H. G Z [a] :: A G (A Z). G K [c] :: A Z. X [d] :: R. S :: [e] G H. G Z. ergo factum.

a 4. 5.
b *hyp.*
c *const.* & 7. 5.
d *const.*
e 11. 5.

Prop. VIII.

Fig. 76.

Dato circulo, & in circulo rectâ (Z D) *quæ minor diametro, & aliâ* (Z S) *tangente circulum ad in circulo datæ terminum* (Z), *potest à circuli centro* (A) *projici recta quædam* (A L), *ita ut pars ejus* (H G) *accepta inter circumferentiam circuli, ac datam in circulo rectam ad*

partem

partem (L Z) *à tangente interceptam habeat propositum rationem* (R *ad* S); *siquidem data ratio sit minor eâ quam habet semissis* (Z E) *datæ in circulo ad ductam è circulo ipsi perpendicularem* (A E).

a 4. 6.
b *hyp.*
c 10. 5.
d 5. 4.
e 4. 6.
f 16. 6.
g 35. 3.
h 7. 5.
k 1. 6.
l *const.* & 7. 5.
m 35. 3. & 16. 6.
n 7. 5.
o 11. 5.
p 19. 5.
q *const.*

Sit diameter N M ad D Z parallela, tangenti L Z occurrens in S; fiátque R. S :: A Z. Z T. unde cùm sit A Z. Z S [a] :: Z E. A E [b] ⊐ R. S. [c] erit Z T ⊏ Z S. Per puncta A, S, T [d] ducatur circulus, quem secet A Z producta in Y, ducatúrque A X, sic ut L X = Z Y (quod fieri posse constat ad alteras partes diametri AP, transeuntis inter Z, T; ob Z T ⊏ Z S, & angulum A Z T rectum) hæc autem (A X) tangentem secet in L, circulum primò positum in G, rectam Z D in H. Dico factum.

Nam L A. H A :: [e] L S. Z S. [f] unde L A × Z S = H A × L S. Item L T × L S [g] = L A × L X. [h] quare L T × L S. H A × L S ([k] L T. H A) :: L A × L X. L A × Z S [k] :: L X. Z S [l] :: Z Y. Z S [m] :: Z T. Z A [n] :: Z T. A G. [o] :: L T. H A [p] :: Z T—L T. A G—H A (hoc est) :: L Z. G H. ac invertendo G H. L Z :: (Z A. Z T [q] ::) R. S. *Q.E.F.*

Prop. IX.

Fig. 77. *Iisdem datis, ac in circulo datâ lineâ* (D Z) *protractâ, potest è centro circuli ad protractam educi recta* (A H); *ita ut quæ* (G H) *est inter peripheriam & productam ad interceptam* (L Z) *ex tangente ad contactum, præsignatam sortiatur rationem* (R *ad* S), *si modò data ratio major sit eâ, quam habet datæ in circulo semissis* (Z E) *ad ductam ipsi è centro perpendicularem* (A E).

Construitur & demonstratur eodem prorsus modo quo præcedens; tantùm hîc faciendo A Z. Z T :: R. S, evadit Z T ⊐ Z S; & inde recta A H occurrit circulo infra tactum ad partes S. quid plura?

Vides in duobus his problematis desiderari, ut intercipiatur L X = Z Y, id quod præstari potest ope primæ conchoidis, cujus polus A, chorda S T, sagitta Z Y; ejus enim cum circulo A S T intersectio determinabit punctum X. at per conicas quoque sectiones idem effici potest, utpote solidum Problema.

Prop. X.

Fig. 78. *Si lineæ quotcunque ponantur deinceps æquali sese excedentes* (a, b, c, d, e, f) *fuerit autem excessus æqualis minimæ* (a); *& aliæ lineæ ponantur, multitudine quidem æquales illis, magnitudine verò singulæ æquales*

quales maximæ (f); *quadrata ab æqualibus maximæ adſumentia quadratum ex maxima, & comprehenſum (rectangulum) à minima & æquali omnibus ſeſe æqualiter excedentibus, tripla erunt omnium quadratorum ab illis, quæ ſeſe excedunt.* $7ff + fa + ea + da + ca + ba + aa = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff$.

Clariùs forſan & breviùs exprimatur, ſi ſit quæcunque ſeries æqualiter ſe continuò excedentium, incipiens à puncto (ſeu nihilo) incluſivè, tripla ſumma quadratorum ex his adæquabitur ſummæ quadratorum è totidem æqualibus maximæ, unà cum rectangulis è minima in omnes.

Nam ſumma quadratorum è tot æqualibus [m] maximæ eſt. m 4. 2.

	ff	
o $a.b.c.d.e.f$	$aa + ee + {}^{*}2ae$	$({}^{*}2ae.$
o 1.2.3.4.5.6.	$bb + dd + {}^{*}2bd$	$({}^{*}4ad.$ ob $b = 2a.$
6.5.4.3.2.1,o.	$cc + cc + {}^{*}2cc$	$({}^{*}6ac.$ ob $c = 3a.$
	$dd + bb + {}^{*}2db$	$(8ab.$ ob $d = 4a.$
	$ee + aa + {}^{*}2ea$	$(10aa.$ ob $e = 5a.$
	ff	

Item $ff{}^{*} = {}^{n}6af{}^{\dagger} = {}^{n}af + 2ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ff$.

Similiq; diſcurſu, $ae + 2ad + 2ac + 2ab + 2aa = ee$

$ad + 2ac + 2ab + 2aa = dd$ * ob $f = ba$.

$ac + 2ab + 2aa = cc$ † ob $5f = 2e + 2d + 2c + 2b + 2a$.

$ab + 2aa = bb$

$aa = aa$

Horum ſumma eſt, $af + 3ae + 5ad + 7ac + 9ab + 11aa$. n 1, 2.

Quæ quidem ſumma excedit ſummam rectangulorum ſupra poſitam per $af + ae + ad + ac + ab + aa$. quod ſi igitur adjiciatur hic exceſſus ſummæ quadratorum ſuprà collocatæ, perſpicuum eſt conflari $3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + 3ff$. Conſimilis diſcurſus cuilibet accommodari poſſit linearum multitudini.

Corollaria.

1. Itaque conſtat hinc quòd omnia quadrata ab æqualibus maximæ eorum quæ ab æqualiter ſeſe excedentibus minora ſunt, quàm tripla.

2. Reliquorum verò dempto maximæ quadrato majores ſunt quàm tripla, hoc eſt eſſe $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee$, quia ſcilicet $ff = 6af \sqsubset af + ae + ad + ac + ab + aa$, adeóque ex ſuperiore æquatione hinc auferendo $ff + af + ae + ad + ac + ab + aa$, illinc

illinc $2ff$ remanebit $6ff \sqsubset 3aa + 3bb + 3cc + 3dd + 3ee + ff$.

3. Quinetiam ideo si similes figuræ describantur, tum ab omnibus sese æqualiter excedentibus, tum ab æqualibus maximæ; figuræ ab æqualibus maximæ minores quidem erunt quàm triplæ earum, quæ ab æqualiter sese excedentibus, reliquarum verò demptâ figurâ quæ fit à maxima majores quàm triplæ: nam quadratorum & similium figurarum eadem prorsus est ratio.

Schol. Hinc pro cognoscenda quadratorum cujuscunque progressionis Arithmeticæ summa regulæ emergunt notatu dignæ.

1. Si series incipiat ab o, primúsque post o terminus sit a, ultimus verò (seu maximus) sit f; & terminorum numerus dicatur n; erit $\frac{nff}{3} + \frac{nfa}{6}$ (vel $\frac{2nff + nfa}{6}$) æqualis summæ quadratorum. Nam $\frac{nf}{2}$ æquatur summæ terminorum (id clarissimè cernis in hujusce propositionis figura) ergo $nff + \frac{nfa}{2}$ æquatur triplæ summæ quadratorum.

Hinc erit tripla summa quadratorum. ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo. ut $f + \frac{a}{2}$ ad f, vel ut $1 + \frac{a}{2f}$ ad 1.

2. Si series incipiat ab o, & primus ab eo terminus sit 1; erit summa quadratorum $\frac{nff}{3} + \frac{nf}{6}$. (è priore).

Hinc summa quadratorum tripla, ad summam quadratorum è totidem æqualibus maximo, ut $2n - 1$ ad $2n - 2$.

Nam $nff + \frac{nf}{2} . nff :: f + \frac{1}{2} . f :: n - 1 + \frac{1}{2} . n - 1$ (ob $f = n - 1$) $:: n - \frac{1}{2} . n - 1 :: 2n - 1 . 2n - 2$.

Item illa ad hanc se habet ut $1 + \frac{1}{2n - 2}$ ad 1.

3. Eodem posito, erit summa quadratorum $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$; vel $\frac{n^3}{3} - \frac{nn}{2} + \frac{n}{6}$. Nam ob $n - 1 = f$ erit $nn - 2n + 1 = ff$. quare $2nff = 2n^3 - 4nn + 2n$. & $nf = nn - 1$ quæ collecta dant $2n^3 - 3nn + n$.

4. In quacunque Progressione, si minimus terminus sit a, excessus x erit summa quadratorum $naa \left.\begin{matrix} -nn \\ -n \end{matrix}\right\} ax + \frac{2n^3 - 3nn + n}{6} xx$.

Nam

Nam summa quadratorum est

$$a.\ a+x.\ a+2x.\ a+3x \qquad \begin{array}{l} aa+0+0 \\ aa+2ax+xx \\ aa+4ax+4xx \\ aa+6ax+9xx \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Summa } naa + {}^{*}\left.\begin{array}{r} nn \\ -\ n \end{array}\right\} ax \qquad \frac{+2n^3 - 3nn + n}{6}\,xx$$

* Nam summa 0.2.4.6. $= nn - n$.

5. Ex his porro colligitur in istis progressionibus quæ à nihilo incipiunt, quo major est terminorum numerus, eò quadratorum ex inæqualibus summam triplicatam, ad æqualitatem cum summa quadratorum è totidem æqualibus maximo propiùs accedere, nam si pro f substituatur ea major quilibet g, quia $1 + \frac{a}{2g} \sqsupset 1 + \frac{a}{2f}$ liquet triplam summam quadratorum ex illis quorum maximus terminus est g, minus inæqualem esse summæ quadratorum è totidem æqualibus maximo, quam ubi maximus terminus est f.

6. Adeóque si numerus terminorum infinitus sit, tripla summa quadratorum ex inæqualibus justè adæquabitur quadratis è maximo, nam si ultimus terminus sit Z, erit $\frac{a}{zz} = 0$ quia a ad z (nedum ad zz) nullam habebit proportionem. Cæterùm fontem hìc uberrimum aperuit *Archimedes*, à quo plurimi in fundum Mathematicum fluvii redundârunt.

Pertentando colligetur isthoc hoc pacto.

Series 1ª.	0. 1. tripla 3. 2 × 1 = = 2.	ratio $1\frac{1}{2}$. 1.	Eodem modo procedit ratio ad infinitum, versùs æqualitatem vergendo.
Series 2ª.	0. 1. 4 : tripla 15 3 × 4 = = = 12	ratio $1\frac{1}{4}$. 1.	
Series 3.	0.2.4.9. tripla 42 4 × 9 = = = 36	ratio $1\frac{1}{6}$. 1.	
Series 4.	0.1.4.9.16. tripla 90. 5 × 16 = = = 80.	ratio $1\frac{1}{8}$. 1	

Prop. X I.

Si lineæ continuò ponantur quotlibet (Z A, Z B, Z C, Z D) *æquali sese excedentes ; & aliæ lineæ ponantur* (*Z D, Z E, Z F) *multitudine quidem unâ minores æqualiter sese excedentibus, magnitudine verò singulæ æquales maximæ* (ZD) *; quadrata omnia ab æqualibus ma-*

*vel ZE, ZF, Z G.

$DZq + EZq + FZq . DZq + CZq + BZq \sqsupset DZq . DZ \times AZ + \frac{DAq}{3}$

$EZq + FZq + GZq . CZq + BZq + AZq \sqsubset EZq . EZ \times AZ + \frac{EAq}{3}$

xima ad quadrata sese æqualiter excedentium sine minima (ZA) minorem rationem habebunt, quàm quadratum maximæ ad æquale utrique, tum comprehenso sub maxima, & minima, tum tertiæ parti quadrati excessûs, quo maxima excedit minimam; ad quadrata verò sese æqualiter excedentium sine quadrato maximæ majorem eâdem ratione.

Est enim $AZ \times : DZ + EZ + FZ + \frac{DAq + EAq + FAq}{3}$

a 3.2. et 1. ax. 1 [a] $= AZq + AZq + AZq + AZ \times : DA + EA + FA : + \frac{DAq + EAq + FAq}{3} \sqsupset AZq + AZq + AZq : + AZ \times : 2DA + 2CA + 2BA : + DAq + CAq + BAq$ (quia scilicet

b 1 cor. 10. h. $DA + EA + FA \sqsupset 2DA + 2CA + 2BA$; [b]&

c 4.2. & 2. ax. 1. $\frac{DAq + EAq + FAq}{3} \sqsupset DAq + CAq + BAq$) [c] $= DZq +$

d 8. 5. $CZq + BZq$. [d] ergo $DZq + EZq + FZq . DZq + CZq + BZq \sqsupset (DZq + EZq + FZq . AZ \times : DZ + EZ + FZ +$

e 12. 5. $\frac{DAq + EAq + FAq}{3}$ [e] $::) DZq . AZ \times DZ + \frac{DAq}{3}$.

Similem adhibendo discursum, quoniam $EA + FA + GA \sqsubset 2CA + 2BA$; & $\frac{EAq + FAq + GAq}{3}$ [g] $\sqsubset CAq + BAq$;

g 2 cor. 10 h. erit $AZ \times : EZ + FZ + GZ + \frac{EAq + FAq + GAq}{3}$

h 8. 5. $\sqsubset CZq + BZq + AZq$. [h] quare $EZq + FZq + GZq . CZq$

k 12. vel 15. 5. $+ BZq + AZq \sqsubset (EZq + FZq + GZq . AZ \times : EZ + FZ + GZ + \frac{EAq + FAq + GAq}{3}$ [k] $::) EZq . AZ \times EZ + \frac{EAq}{3}$.

Coroll.

Et proinde si similes figuræ describantur ab omnibus, tam ab inæqualiter sese excedentibus quàm ab æqualibus maximæ; figuræ omnes, quæ ab æqualibus maximæ ad illas quæ ab æqualiter sese excedentibus, sine figura quæ à minima, minorem rationem quàm quadratum à maxima ad æquale utrique simul & comprehenso sub maxima

ac

ac minima, & tertiæ parti ejus quod est ab excessu, quo maxima exsuperat minimam; ad eas verò quæ ab iisdem sunt figuras sine illa quæ à maxima, majorem eâdem ratione.

Schol.

Si $DA = ZA$, vel $ZD = 2\,ZA$, liquet esse $ZDq.\ ZD \times ZA + \frac{DAq}{3} :: 12.\ 7.$ [a] vel $3\,ZDq.\ 3ZD \times ZA + DAq :: 12.\ 7.$ Nam $3ZDq$ [b] $= 12\,ZAq.$ & $3\,ZD \times ZA$ [c] $= 6\,ZAq$, & DAq [d] $=$ ZAq. a 15.5. b 4.2. c 1.6. d *hyp.*

Definitiones.

I.

Si in plano recta linea (AZ) manente altero termino (A) æquali velocitate circumlata, restituatur denuo (istuc) unde profecta est; simul verò cum linea circumducta feratur punctum æquèvelociter sibi ipsi, secundùm rectam (AZ), incipiens à manente termino (A); punctum helicem describet. Fig. 80.

Schol.

Itaque si dividatur recta AZ in quotcunque partes æquales A *b*, *bc*, *cd*, &c. & circumferentia à puncto B descripta in partes totidem æquales, ac ductis à centro A ad circumferentiæ divisiones radiis, auferantur AB, AC, AD, &c ipsis A *b*, A *c*, A *d* &c ordine æquales, per puncta A B, C, D &c. transibit helix. Et hic modus est helicem describeudi.

II.

Vocetur itaque rectæ quidem terminus (A) qui manet ipsâ circumductâ, principium Helicis.

III.

*Lineæ verò *situs, à quo cœpit recta (AZ) circumferri, principium revolutionis.* * *vel potiùs ipsa linea primò posita.*

IV.

Recta, (AZ) quam quidem in prima revolutione perambulârit punctum in recta latum, prima vocetur; illa verò (ZY) quam in secunda revolutione confecerit idem punctum, secundæ; & consimiliter aliæ juxta revolutionum numeros pariter denominentur. Fig. 81.

V.

Spatium verò sub helice (A P Z) in prima revolutione descriptâ, & rectâ (A Z) quæ prima est, dicatur primum; quod autem continetur ab helice (Z Q Y) per secundam revolutionem descriptâ, & rectâ secundâ (Z Y) secundum vocetur; aliáque deinceps eodem modo nominentur.

Not. Nonnunquam spatium secundum dicitur incluso primo, juxta definitionem hanc; at *subinde secundum dicitur, excluso primo; & ita de reliquis.

* in 27 prop. h.

VI.

Et descriptus circulus, centro quidem puncto (A) quod est principium Helicis, intervallo verò rectâ (A Z) quæ prima est, primus appelletur; descriptus autem centro quidem eodem, intervallo verò (A Y) duplâ rectâ, secundus vocetur; & alii continuò post hos ad eundem modum.

VII.

Fig. 82.

Ac si à puncto (A) quod est principium Helicis ducatur aliqua recta quædam linea (A B); quæ sunt ad hujus rectæ partes easdem (F Z) versùs quas revolutio fit, antecedentia vocentur, quæ verò ad alteras (E A) consequentia.

Prop. XII.

Pappus 20 IV. Fig 83.

Si in helicem (A B C D E Z) unâ revolutione descriptam ab helicis principio (A) incidant rectæ quotlibet (A B, A C, A D, A E) æquales inter se angulos facientes: æqualiter sese excedunt.

Sint excessus C R, D S, E T; & centro A per Z ducatur circulus, ad quem protrahantur A B, A C, A D, A E; & ob angulos M A N, N A O, O A P pares, [a]liquet arcus M N, N O, O P æquari. [b]ergo & tempora per M N, N O, O P æquantur, [c]hoc est tempora per R C, S D, T E. [b]ergo ipsæ R C, S D, T E æquantur. *Q E D.*

a 26.3.
b 1 hujus.
c 1 def. huj.

Lemma.

Fig. 84.

In triangulo B A C recta A G bisecet angulum B A C, erit A B + A C, $\sqsubset$ 2 A G.

Per

Per G ducatur K L ad A G perpendicularis; & per B fiat B H ad
K L parallela. Estque B K[a] $=$ H L. ergo L C $\sqsubset$ B K. (Nam C G. a 2. 6.
G B[b] :: C L. L H.) ergo A L $+$ L C $+$ A L (A K) — K B $\sqsubset$ b 3. 6.
A L $+$ A K hoc est A C $+$ A B $\sqsubset$ A K $+$ A L [c]$\sqsubset$ 2 A G. c 47. 1.

Prop. XIII.

Si recta linea (B C) *contingat helicem* (A B Z), *in uno tantùm puncto continget.*

Tangat enim, si fieri potest, duobus in punctis B, C; & connectatur B C; & angulum B A C bisecet recta A G, occurrens helici in a 12 *hujus.*
D; tangenti in G. estque A C — A D[a] $=$ A D — A B. quare A C b 2 *ax.* 1.
$+$ A B[b] $=$ 2 A D. Sed A C $+$ A B [c]$\sqsubset$ 2 A G. ergo A D $\sqsubset$ A G. c *lemm. præc.*
ergo punctum G est intra helicem; & proinde B C non tangit spiralem, contra hypothesin.

Prop. XIV.

Si in helicem (A B C Z) *primâ revolutione descriptam incidant duæ* Papp. XIX. 4.
rectæ (A B, A C) *à puncto* (A) *quod est principium helicis, & produ-* Fig 86.
cantur ad circumferentiam primi circuli (Z M N O) *eandem inter se rationem habebunt in helicem incidentes* (A B, A C) *quam circuli arcus* (Z M N, Z M O) *qui sunt inter helicis terminum* (Z), *& terminos* (N, O) *à productis ad peripherias factos, sumptis in antecedentia arcubus, ab helicis termino* (Z).

Est enim recta A B ad rectam A C, [a]ut tempus per A B ad tem- a 1 *hujus.*
pus per A C; [b]hoc est tempus per arcum Z M N ad tempus per ar- b 1 *def. hujus*
cum Z M O, [a]hoc est ut arcus Z M N ad arcum Z M O.

Coroll. Eodem discursu quæcunque partes rectarum ad se sunt, ut arcus eodem tempore peracti; & totus radius ad quamcunque partem ipsius se habet, ut tota peripheria ad arcum eodem tempore pervolutum.

Prop. XV.

Et siquidem in helicem (A Z B C Y) *ex secunda revolutione de-* Fig.. 87.
scriptam inciderint rectæ (A B, A C) *ab helicis principio* (A); *eandem rationem habebunt rectæ* (A B, A C) *quam dictæ peripheriæ* (Z M N, Z M O) *post acceptas integras circumferentias.*

Rur-

a 1 *hujus.* Rurſus enim eſt recta A B ad A C, [a]ut tempus per A B ad tempus
b 1 *def. hujus.* per A C, [b]hoc eſt ut tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M N ad tempus per totam circumferentiam, & arcum Z M O, [a]hoc eſt ut tota circumferentia cum arcu Z M N ad totam circumferentiam cum arcu Z M O.

Sch. Eodem modo, de partibus oſtendetur, ut in *Coroll.* præcedentis, quod & ad ſequentia extendetur.

Nota verò poſſe dictarum peripheriarum rationes in quovis circulo circa centrum A deſcripto computari: rectæ enim A Z, A N, A O protractæ ſimiles perpetuo peripherias abſcindent.

Coroll. Eodem oſtendetur modo quòd ſi in helicem ex tertia revolutione deſcriptam inciderint rectæ, eandem inter ſe rationem habebunt, quam dicti arcus poſt totas circumferentias bis ſumptas: quin & ſimiliter quæ in alias helices incidunt, demonſtrantur eandem habere rationem, quam dicti arcus poſt integras circumferentias toties acceptas, quotus eſt numerus revolutionum unitate minutus, etiamſi altera incidens in terminum helicis cadat.

Prop. XVI.

Fig. 88. *Si helicem* (A B Z) *ex prima revolutione deſcriptam contingat recta linea* (S T); *& à contactu* (B) *connectatur ad punctum* (A) *quod eſt principium helicis; inæquales erunt anguli* (A B S, A B T) *quos facit tangens ad connexam; & quidem* (A B T), *qui in antecedentia, obtuſus eſt; qui verò* (A B S) *in conſequentia, acutus.*

Centro A per B ducatur circulus B D E G; liquet helicem extra
a 1 *def hujus.* hunc cadere versùs partes T, [a]quia verſus illas creſcunt ad helicem du-
b 16. 3. ctæ rectæ; unde angulus A B T angulo ſemicirculari A B D, & [b]proinde quovis acuto major eſt. Sit itaque, ſi fieri poteſt, rectus; [b]quam-
c 5 *hujus.* obrem B T tanget circulum B D E; unde [c]duci poterit recta A T ſecans tangentem in T, & circulum D, ita ut intercepta D T ſit ad radium A D in minori ratione, quàm arcus B D, ad arcum E G B. Occurrat A B circulo primo Z M N in N, & A D eidem in O, ac helici
d 4 *cor* 33.6. in H. éſtque componendo A T. A D ⊐ (arc. E G B D. arc E G B [d]::
e 44 *hujus.* arc Z M N O. arc Z M N [e]:: A H. A B [f]::) A H. A D. [g]unde A T
f 7. 5.
g 10. 5. ⊐ A H; adeóque tangens intra helicem cadet, nec ideo tanget; quæ repugnant. quin potiùs angulus A B T obtuſus eſt, quique deinceps A B S acutus.

Coroll.

Coroll.

Haud absimiliter ostendetur, si & tangens helicem ad terminum (Z) contingat, idem evenire.

Prop. XVII.

Quinimò si helicem è secunda revolutione descriptam recta contingat, idem accidet.

Prorsus eâdem methodo demonstratur quâ præcedens, nisi quòd hic loco prop. 14. adhibeatur prop. 15. hujus.

Coroll.

Eadem verò evenient, etiam si tangens ad finem helicis contingat.

Item similiter ostendetur, quòd si ex quacunque revolutione descriptam helicem recta quædam linea tangat, etiamnum ad finem ejus, inæquales efficiet angulos ad conjunctam à tactu ad principium helicis; & eum quidem qui in antecedentia est, obtusum, illum verò qui in consequentia, acutum.

Prop. XVIII.

Si helicem (A Z B) *ex primâ revolutione descriptam tangat recta linea* (P Z) *ad helicis terminum* (Z); *à puncto autem* (A) *quod est in principio helicis, ducatur quædam* (A P) *revolutionis principio* (A Z) *perpendicularis, ducta* (A P) *tangenti occurret; & quæ est inter tangentem ac principium spiralis recta*(AP) *æqualis est circuli peripheriæ* ϖ. Fig. 89.

Quòd tangens occurrat perpendiculari A P, patet; * quia angulus A Z B est acutus. Porro * *16 hujus.*

Sit recta A O major peripheria ϖ; & ducatur O Z; dico O Z secare helicem infra Z, vel ad antecedentia helicis. Nam fiat A E ad O Z perpendicularis; ducatur autem A H, secans O Z protractam in H, & circulum in G, [a]ita ut sit intercepta G H ad chordam Z G, Z A ad ϖ (id fieri potest, quia Z A. ϖ. [b]$\sqsubset$ Z A. A O, [c] vel Z E. A E). Secet autem A H helicem in B. Et quia G H. arc Z G [b]$\sqsupset$ (G H. chord Z G [d]::) Z A. ϖ. erit permutando G H. $\left|\begin{matrix}\text{Z A.}\\ \text{A G}\end{matrix}\right.$ $\sqsupset$ arc Z G. ϖ. ergo componendo A H. A G. $\sqsupset$ (ϖ + arc Z G. arc Z G[e] ::) A B. A G. [f]quare A B $\sqsubset$ A H. ergo punctum H est intra helicem, & proinde O Z secat helicem.

a *6 hujus.*
b *hyp.* & *8.5.*
c *4.6.*
d *const.*
e *15 hujus.*
f *10.5.*

Fig 90.

Sit ſecundò AQ minor quàm ϖ, dico quoque ductam QZ helicem ſecare: nam ducatur tangens ZT, & AE ad ZQ perpendicularis; & quia AZ. ϖ [g] $\sqsupset$ AZ. AQ; [h] duci poſſit recta AL, ita ut HG inter ZQ, & circulum poſita ſe habeat ad ZL, partem tangentis abſciſſam, ut AZ ad ϖ; ſecet autem AL helicem in B. Et quia AZ. ϖ [k] :: HG ZL [l] $\sqsupset$ HG. arc ZG. erit permutando AZ (AG). HG. $\sqsupset$ ϖ. arc. ZG [m] :: AG. BG. [n] ergo HG $\sqsubset$ BG. unde punctum H eſt intra helicem: & proinde QZ helicem ſecat. Quum igitur nulla QZ ad perpendicularem AP ducta peripheriæ inæqualem abſcindens tangat helicem, liquet illam quæ tanget, peripheriæ æqualem abſcindere. *Q.E.D.*

g hyp. & 8.5. h 7 *hujus.* k *conſt.* l 8.5. & 2. c. r 2. l. *de ſph.* m *cor.* 14 *huj.* n 10.5.

Fig. 91.

Dico porro, ſi AP $=\varpi$, ductam PZ helicem tangere. Sumatur enim in DZ quodvis punctum H, & per ipſum ducatur AH occurrens helici in B, circulo in G; & demittatur HK ad PA parallela; centro autem A per K ducatur circulus KRV, helicem ſecans in R; & per R ducatur radius AS. Eſtque PA. HK [o] :: AZ. KZ [*] :: AZ. RS [p] :: ϖ. arc ZS. ergo quum PA [q] $=\varpi$, [r] erit HK $=$ arc. ZS. verùm HK $\sqsupset$ arc ZG. ergo arc ZS $\sqsupset$ arc ZG. [m] unde AR $\sqsubset$ AB. ergo quum AH $\sqsubset$ AR vel AK, liquet punctum H extra helicem cadere. quare tota DZ extra ipſam cadit.

o 4.6. * 7.5. p *cor.* 14. *huj.* q *hyp.* r 14.5.

In protractâ porro PZ ſumatur quodvis punctum *h*, & per ipſum ducatur A*k* ſecans helicem in *b*, circulum in *g*. Item ab *e* demittatur *ek* ad AZ perpendicularis, & centro A per *k* ducatur circulus *krv* helicem ſecans in *r*; ducatúrque recta A*r*, circulo primo occurrens in *s*. éſtque ut priùs AP. *hk* [s] :: AZ. ZK [t] :: AZ. S*r* [u] :: ϖ. arc ZS. [x] unde *hk* $=$ arc Z*s*. Atqui *hk* $\sqsubset$ arc Z*g*. ergo arc Z*s* $\sqsubset$ arc Z*g*. quare A*r* $\sqsubset$ A*b*. verùm A*h* $\sqsubset$ A*k* $=$ A*r*. ergo magis A*h* $\sqsubset$ A*b*. ergo punctum *h* eſt extra helicem. unde planè concluditur totam PZ utcunque productam extra helicem poni, ipſámque proinde contingere.

Figuræ hæ debitas proportiones non ſervant, nè lineæ nimiùm appropinquantes ſeſe obſcurent.

s 4.6. t 7.5. u 15 *hujus.* x 14.5. *

Ita *ſubtiliſſimum hoc Archimedis theorema*, cum ejus converſo, demonſtravimus oſtenſivè; quod maluimus facere, tum quia præſtantior eſt hic demonſtrandi modus, tum quo meliùs authoris ipſius methodus innoteſceret. Siquidem duæ primæ partes *Archimedis* principiis inſiſtunt; tertiam nos excogitavimus, quæ monſtrat quàm facilè, quámque perſpicuò theorematis hujus converſum demonſtrari poſſit, adeóque quomodo potuit inveniri.

Prop.

Prop. XIX.

At ſi ſpiralem (A Z Y) *ex ſecunda revolutione deſcriptam ad terminum contingat recta, & à principio ſpiralis ducatur quædam* (A O) *ad rectos revolutionis principio* (A Y), **occurret ipſa contingenti; eritque recta quæ eſt inter tangentem, & principium ſpiralis, dupla peripheriæ ſecundi circuli* (ϖ). Fig. 92. **per 17 huj.*

Sit enim O A $\sqsubset$ 2ϖ. [a]unde A Y, Zϖ. $\sqsubset$ A Y. O A [b]:: Y E. A E (ductâ ſcilicet A E ad O Y perpendiculari) [c]ergo rurſus duci poſſit recta A H ſecans O Y protractam in H, & circulum in G, ita ut ſit intercepta G H ad chordam G Y, ut A Y ad 2ϖ. ſecet igitur A H ſpiralem in B. Et quia G H. arc Y G [a]$\sqsupset$ G H. chord Z G [d]:: A Y. 2ϖ; erit permutando G H. A Y $\sqsupset$ (arc Y G. 2ϖ [e]::) G B. A Y. [f]ergo G H $\sqsupset$ G B. & proinde punctum H eſt intra helicem. Unde O Y non continget helicem. Similirer, ſi ponatur Q A $\sqsupset$ Qϖ, imitando præcedentis ratiocinium, demonſtrabis ductam Q Y helicem non tangere: quapropter quæ tangit Y P duabus peripheriis æqualem A P abſcindet. *Q. E. D.*

a 8. 5.
b 4. 6.
c 6 *hujus.*
d *conſt.*
e *ſch.* 15 *huj.*
f 10. 5.

Sed & unico argumento, ſicut in præcedenti, demonſtrari poſſit converſum hujus, nempe ſi A P = 2ϖ, rectam P Y tangere helicem: tu rem expende; mihi conſtitutum eſt à repetitionibus temperare.

Coroll.

Eodem modo demonſtrabitur, quòd ſi helicem in qualicunque revolutione deſcriptam recta quædam tangat in helicis termino, & à principio helicis educta, revolutionis principio perpendicularis, occurrat tangenti, multiplex hæc erit peripheriæ circuli, juxta revolutionum numerum denominati, eodem numero.

Prop. XX.

Si helicem (A B Z) *in prima revolutione deſcriptam tangat recta linea* (B P) *non ad finem helicis; à contactu verò* (B) *ad principium helicis conjungatur recta* (B A) *& centro quidem* (A) *principio helicis, intervallo autem conjunctæ* (A B) *deſcribatur circulus* (B E F); *à principio autem helicis ducatur quædam* (A P) *à contactu ad initium helicis connexæ* (A B) *perpendicularis; occurret illâ contingenti; eritq; recta* (A P) *occurſui, & helicis principio interjecta, æqualis peripheriæ* Fig. 93.

 (E F B)

(E F B) *quæ eſt inter contactum, & ſectionem, ubi deſcriptus circulus ſecat principium revolutionis; in antecedentia acceptâ peripheriâ à puncto* (E) *quod eſt in principio revolutionis.*

Nihil facilius eſt, quàm præcedentes diſcurſus huc applicare: nota
Coroll. 14. & not. 15. tantùm, ſi ducatur quæpiam A C ſecans helicem in C, circulum in G, fore AG . GC :: arc EFB. arc BG, Cætera ſponte fluent:
A·B
quid plura? ——ἐχθρὸν δέ μοι ἔστι
Αὖθις ἀριζήλως εἰρημένα μυθολογεύειν.

Coroll.

Quinetiam eodem pacto demonſtrabitur, ſi in ſecunda circumvolutione deſcriptam helicem contingat recta, non ad finem helicis, alia verò eadem conſtruantur, quòd rectæ contingenti occurrentis pars, intercepta à principio helicis, æqualis eſt toti deſcripti circuli peripheriæ, & præterea illi, quæ eſt inter dicta puncta, ſimiliter ſumptâ peripheriâ. Et porro ſi ex quacunque revolutione progenitam *helicem* contingat aliqua recta, non ad terminum helicis; alia verò eadem diſponantur, quòd recta dictis punctis interjecta, ſit multiplex quædam peripheriæ deſcripti circuli ſecundum numerum proximè minorem eo, ſecundùm quem revolutiones dicuntur., & inſuper æqualis arcui inter dicta puncta ſimiliter ſumpto.

Prop. XXI.

Fig. 94. *Sumendo ſpatium comprehenſum ſub helice*(A B C D E F G L Z) *in prima revolutione deſcripta, & prima in principio revolutionis recta* (A Z); *poſſibile eſt ipſi figuram planam circumſcribere, aliámque inſcribere, è ſimilibus compoſitam ſectoribus, ita ut circumſcripta inſcriptâ major ſit quocunque propoſito ſpatio* (X).

a 9 1. Radii quotlibet primi circuli circumferentiam [a] æqualiter partiant (ordiendo ab Z) occurrentes helici punctis A, B, C, D, E, F, G, L, Z. tum centro A per hæc puncta ducantur arcus *b* B β, *c* C κ, *d* D δ, *e* E ε, *f* F φ, *g* G γ, *l* L λ, *z* Z: itaque vides circumſcriptam helici figuram A *b* B *c* C *d* D *e* E *f* F *g* G *l* L *z* Z conflatam è ſectoribus ſimilibus *b* A *b*, *c* A C, *d* A D, *&c.* Vides etiam alteram A B β C κ D δ E ε F φ G γ L λ inſcriptam, conſtantémque ſectoribus B A β, C A κ, D A δ *&c.* qui totidem ſunt, & æquales ſectoribus figuræ circum-
b 33. 6. ſcriptæ, excepto maximo *z* A Z. ([b] nam ſector β A B = *b* A B; & κ A C

x A C = c A C, &c). Itaque si circulus [a]bisectione (vel aliâ æquali sectione) continuò divisus fuerit, ita ut sector z A Z tandem evadat minor dato spatio X [c] (id quod fieri potest), liquet hoc modo fieri posse quod proponitur. c 1. 10.

Coroll.

Hinc patet, quòd possibile sit circa dictum spatium figuram, qualis dicta est, describere, ita ut circumscripta figura spatium superet excessu minori quocunque proposito spatio : & rursus, aliam inscribere, ita ut similiter spatium superet figuram minori quocunque proposito spatio.

Sch. Nota radios A B, A C, A D, A E, &c. sese æqualiter excedere ; & excessus æquari minimo A B. 12 *hujus.*

Prop. XXII.

Sumendo spatium comprehensum sub helice (Z M N O P R Y) *per secundam revolutionem descriptâ, & recta* (Z Y) *quæ est secunda in principio revolutionis, potest ipsi figura plana circumscribi, similibus è sectoribus composita, necnon alia inscribi, sic ut circumscripta inscriptam excedat minori quàm proposito quovis spatio* (X). Fig. 95.

Radii quotlibet secundum circulum [a]æqualiter dispertiant, occurrentes helici punctis Z, M, N, O, P, R, Y ; per quæ, centro A, describantur arcus Z ζ, m M μ, n N ν, o O ω, p P ϖ, r R, y Y ; unde helici circumscriptam habemus figuram A m M n N o O p P r R y Y constantem similibus sectoribus m A M, n A N, o A O, &c. & inscriptam aliam A Z ζ M μ N ν O ω P ϖ R ρ constantem totidem sectoribus Z A ζ, M A μ, N A ν, &c. Et cùm sit sector m A M [b]= M A μ ; & n A N [b]= N A ν, & ita continuò, liquet excessum figurarum esse penes sectores Z A ζ primum inscriptæ, & y A Y, ultimum circumscriptæ (nam reliqui hujus reliquis illius æquantur). atqui continuâ bisectione [c]fieri potest, ut sit sector y A Y $\sqsubset$ X ; túmque fortiùs erit sect. y A Y − Z A ζ $\sqsubset$ X. quare constat propositum. a 9. 1. b 33. 6. c 1. 10.

Schol. Rursus nota radios A Z, A M, A N, &c. æquali excessu procedere, & maximum A Y duplum esse minimi A Z. 12 *hujus.*

Coroll.

Coroll. I.

Itaque liquet excessum circumscriptæ figuræ supra sumptum spatium (sub helice comprehensum) minorem esse posse quovis proposito spatio. Itidémque dicti spatii supra inscriptam figuram excessum minorem esse posse quolibet proposito spatio.

II.

Simili modo liquet, quòd possibile est circa spatium sub helice in quacunque revolutione descripta, & recta in principio revolutionis, ab eodem numero denominata comprehensum describere figuram, qualem diximus, planam, ita ut circumscripta figura superet sumptum spatium minori omni proposito spatio ; & rursus inscribere, ita ut sumptum spatium majus sit, quam in scripta figura, minori quovis proposito spatio.

Prop. XXIII.

Fig. 96. *Sumpto spatio* (C A G) *comprehenso sub helice, quæ minor est descriptâ in prima revolutione, non habenti pro termino principium helicis, & sub rectis* (A C, A G) *ductis à principio helicis ; possibile est spatio figuram circumscribere, similibus è sectoribus compositam & aliam inscribere ita ut circumscripta figura superet inscriptam minori quàm quocunque proposito spatio* (X).

Rectæ A D, A E, A F æqualiter secent angulum C A G, vel arcum K G, ita ut sector *g* A G ⊐ X ; & centro A per C, D, E, F ducantur arcus C *κ*, *d* D *δ*, *e* E *ε*, *f* F *φ*, & (sicut in præcedentibus) planissimè liquet propositum.

Coroll.

Hinc manifestum est, quòd circa dictum spatium figuram planam describere licet, qualem diximus, ut circumscripta figura major sit spatio, minori quàm proposito quovis spatio.

Prop. XXIV.

Fig. 97. Pappus 21. IV. *Spatium sub helice* (A B C D Z) *in prima revolutione descripta, & prima recta* (A Z) *quæ est in principio revolutionis, tertia pars est primi circuli. Spatium dicatur* (S), *& primus circulus* ⊙ *α*.

Dico

Dico primò, non eſt $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsubset S$. Nam ſi affirmas helici [a]circumſcribatur figura A b B c C d D Z, juxta præſcriptum 21æ hujus, quæ dicatur φ, ita ut ſit $\varphi - S \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha - S$: [b]vel $\varphi \sqsupset \frac{1}{3} \odot \alpha$. Cùm verò radii A B, A C, A D *&c.* [c]ſeſe æqualiter excedant, & exceſſus æquetur minimo A B, & ſectores (ad ipſos) ſimiles ſint, [d] erunt tot ſectores æquales maximo z A Z, quot ſunt omnes inæquales, minores triplo inæqualium, hoc eſt circulus α minor triplo figuræ φ; vel $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset \varphi$. at priùs affirmâſti eſſe $\frac{1}{3}\, \alpha \sqsubset \varphi$. ergo tibi contradicis.

a *cor.* 21 *huj.*
b 4 *ax.* 1.
c *ſchol.* 21 *h.*
d 3 *cor.* 10 *h.*
e 4 & 5 *ax.* 1.

Dico ſecundò, non eſſe $\frac{1}{3} \odot \alpha \sqsupset S$; ſi hoc affirmas, helici [a]inſcribatur figura A B b C x Z, quæ vocetur ψ, etiam juxta 21 hujus, ita ut $S - \psi \sqsupset S - \frac{1}{3} \odot \alpha$; [e]vel $\frac{1}{3}\, \alpha \sqsupset \psi$. atqui ſectores omnes æquales ſectori z A Z [d]majores ſnnt triplo totidem inæqualium ſine z A Z, hoc eſt $\odot \alpha \sqsubset 3\psi$, vel $\frac{1 \odot \alpha}{3} \sqsubset \psi$. at priùs erat $\frac{1}{3}\, \alpha \sqsupset \psi$, quæ repugnant.

Hoc etiam bellè declarat Pappus in 21. IV.

Reſtat igitur, ut ſit $\frac{1}{3} \odot \alpha = S$. *Q. E. D.*

Schol.

Hoc directè perſpicitur è ſcholio ad 10 hujus. Cùm enim ſectores figuræ circumſcriptæ vel inſcriptæ procedant ut 0, 1, 4, 9, 16 *&c.* (in duplicata ſcilicet radiorum proportione) & quò deſinant in ſpatium helicis, eorum numerus fit infinitus, ideo totidem eorum maximo æquales, hoc eſt totus circulus, eorum omnium triplus eſt, hoc eſt ipſius ſpatii, ab helice comprehenſi, triplus.

Eleganter hoc etiam colligitur methodo indiviſibilium. Dividatur enim radius A Z in partes quotlibet æquales punctis b, c, d, e, f, g, h; & centro A per iſta puncta deſcribantur arcus b B, c C, d D, &c. occurrentes helici punctis B, C, D, E, F, G, H. Eſtque arcus c C quadruplus arcûs b B (ob radium c A duplum radii b A, & angulum cAC duplum anguli b A B), & arcus d D noncuplus arcûs b B; & ſic perpetuò juxta ſeriem 0, 1, 4, 9, 16 &c. uſque ad maximum zz. quare ſi numerus horum arcuum infinitus ſit (vel ſi per omnia radii A Z puncta tranſeant) erit eorum ſumma ſubtripla totidem æqualium maximo; hoc eſt radii ducti in circumferentiam circuli Z Z, hoc eſt dupli circuli ZZ. ergo ſpatium ex iis conſtans eſt $\frac{2}{3}$ circuli ZZ, & reliquum intra helicem eſt $\frac{1}{3}$ ejuſdem. Exhinc patet magna ſpiralem inter & parabolen affinitas; nam ſi A X ſit axis *parabolæ* A B C D E F G H Z, cujus vertex A, tangens A Z, & per puncta diviſionum b, c, d, &c. ducantur ad axem parallelæ A B, c C, d D &c. Erit $c\,C = 4$

Fig. 97.

Fig. 98.

b B

b B, & *d* D = 9 *b* B &c. *d* D = 16 *b* B; eâdemque sic perpetuò ratione sicut in spirali; adeò quidem ut si recta *b* B hîc æquetur arcui *b* B istic; sint omnes rectæ *c* C, *d* D &c. arcubus respectivis *c* C, *d* D &c æquales. unde spiralis nihil est aliud quàm parabole, cujus parallelæ axi rectæ in circulares arcus, circa verticem A veluti centrum, contorquentur. Unde non adeò mirum est innumeras spiralis affectiones cum passionibus parabolæ conspirare. Mihi sufficiet hoc obiter subnotâsse; qui plura volet, adeat *Gregorium Vincentium, Cavallerium, Torricellium,* aliosque.

Coroll.

Fig. 99. Simili planè discursu, si à centro A ducatur in primæ revolutionis helicem recta quævis A G; & centro A per G describatur circulus E F G, occurrens revolutionis principio A Z in E; erit spatium conclusum helice A B G, & rectâ A G subtriplum sectoris A E F G A.

Prop. XXV.

fig. 95. *Spatium* (Σ) *sub spirali* (Z M N O P R Y) *& recta* (Z Y) *secunda in principio revolutionis ad secundum circulum* ($\mathfrak{C}$) *hanc habet rationem, quam habet 7 ad 12;*

* *schol. 11 h.* * *quæ eadem est, quam habent utraque simul, quodque comprehenditur sub radio secundi circuli* (A Y), *& radio primi circuli* (A Z), *& tertia pars quadrati, quod ab excessu* (Z Y) *quo radius secundi circuli excedit radium primi circuli, ad quadratum à radio secundi circuli.*

Si fieri potest, sit primò $\odot$ rad $\sqrt{}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq $\sqsubset \Sigma$.

a *cor. 22 huj.* [a]Circumscribatur igitur spatio figura (quam voca φ) constans sectoribus, qualis in 22 hujus, ita ut $\varphi - \Sigma \sqsupset \odot$ rad $\sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq $- \Sigma$.

b *4. ax. 1.* [b]vel $\varphi \sqsupset \odot$ rad $\sqrt{}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq. Cùm verò rectæ A Z, A M, A N, A O &c.

c *sch. 22 huj.* [c] sese æqualiter excedant, & super iis (exceptâ minimâ A Z) constituti similes sectores componant figuram φ, & totidem æquales maximo *y* A Y conficiant circulum $\mathfrak{C}$;

d *cor. 11. huj.* [d]erit $\odot \mathfrak{C}$. $\varphi \sqsupset$ A Yq. A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq

e *cor. 2. 12.* [e] :: $\odot \mathfrak{C}$. $\odot$ rad $\sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq.

f *10. 5.* [f] quare $\varphi \sqsubset \odot$ rad $\sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq. Erat verò $\varphi \sqsupset \odot$ rad $\sqrt{}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq, quæ repugnant.

Sin dicatur $\odot$ rad $\sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq $\sqsupset \Sigma$. Inscribatur figura ψ, [a]ita ut sit $\Sigma - \psi \sqsupset \Sigma - \odot \sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq.

e *4 & 5. ax. 1.* [e] quare $\odot$ rad $\sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z $+ \frac{1}{3}$ Z Yq $\sqsupset \psi$. atqui hîc sectores similes ad A Z, A M, A N &c. sine mazimo *y* A Y constituunt figuram ψ, & totidem maximo pares circulum $\mathfrak{C}$. ergo $\odot \mathfrak{C}$. $\psi \sqsubset \odot \mathfrak{C}$. $\odot$ rad $\sqrt{:}$ A Y $\times$ A Z

$\times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. & proinde $\sqsupset$ $\odot$ rad $\surd: AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq$. quod itidem prædictis repugnat.

Quin igitur potius est $\odot$ rad $\surd: AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq = \Sigma$. unde $\Sigma. \odot \beta :: AY \times AZ + \frac{1}{3} ZYq. ZYq$ * $:: 7.12$. *Q.E.D.* *sch. 11 huj.

Coroll.

Eodem autem modo demonstrabitur, quòd comprehensum spatium sub helice per quamcunque revolutionem descripta, & rectâ eodem numero, quo revolutio, denominatâ, ad circulum itidem eodem numero denotatum, quo revolutiones; rationem habet, quam utraq; simul, quódque sub radio circuli ejusdem numeri, & radio circuli numero, qui unitate minor sit numero revolutionum, denominat; & tertia pars quadrati quod ab excessu, quo excedit radius majoris circuli dictorum radium minoris è dictis circuli ad quadratum radii majoris circuli dictorum. Nempe spatium $\alpha\beta\gamma$ se habebit ad circulum tertium, ut $AX \times AY + \frac{1}{3} YXq$ ad AXq; & spatium $\alpha\beta\gamma\delta$ se habebit ad circulum quartum, ut $AV \times AX + \frac{1}{3} XVq$ ad AVq.

Coroll.

Hinc ipsa spatia inter se erunt ut $\frac{AZq}{3}$, $AY \times AZ + \frac{ZYq}{3}$, $AX \times AY + \frac{YXq}{3}$, $AV \times AX + \frac{XVq}{3}$ &c. Nam sp. $\alpha = \frac{AZq}{3} \times \frac{\odot\alpha}{AZq}$.

& sp. $\beta = AY \times AZ, + \frac{ZYq}{3} \times \frac{\odot\beta}{AYq}$. & sp. $\gamma = AX \times AY + \frac{YXq}{3} \times \frac{\odot\gamma}{AXq}$.

at $\frac{\odot\alpha}{AZq} = \frac{\odot\beta}{AYq} = \frac{\odot\gamma}{AXq}$ &c.

Hinc confici possit Tabella rationes exprimens quas habent spatia *helicibus*, & *rectis* comprehensa ad circulos ejusdem ordinis, & ad se invicem, quæ talis est. (quòd si horum spatiorum primum subtrahatur è secundo, secundum è tertio, & ita deinceps, reliqua se habebunt juxta columnam ultimam; quæ nempe spatia respicit propositio 27ª subsequens).

	Circuli.	*Spatia.*	*Residua.*
1.	3	1	1 α.
2.	12	7	6 β.
3.	27	19	12. γ
4.	48	37	18. δ
5.	85	61	24
6.	108	91	30
7.	147	127	36
8.	192	169	42
9.	243	217	48
10.	300	271	54

Prop. XXVI.

Fig. 96. *Comprehensum spatium* (C A G) *sub helice* (C G) *quæ minor est descriptâ in una revolutione, non habens terminum principium helicis* (A), *&* *rectis* (A C, A G) *à terminis ejus ad principium helicis ductis, ad sectorem* (K A G) *radium quidem habentem æqualem majori* (A G) *ductarum à termino ad principium helicis, arcum verò* (G K) *ductis rectis interceptum, ad easdem partes cum helice; hanc habent rationem quam habent utraque simul, quodque continetur sub rectis* (A G, A C) *à terminis ad principium spiralis ductis, & tertia pars quadrati ab excessu quo major dictarum superet minorem ad quadratum majoris* (A G) *à terminis ad principium helicis conjunctarum.*

Sector ipsi K A G similis & cujus radius sit $\sqrt{}$: A G × A C + $\frac{1}{3}$
a cor. 23 h. C Kq vocetur ξ: &, si fieri potest, sit ξ major spatio C A G. [a] Circumscribatur figura qualis in 23 hujus, (quæ nominetur φ) ita ut sit
b 4. ax. 1. φ — sp. C A G ⊐ ξ — sp C A G. [b] vel φ ⊐ ξ. Cùm verò sint rectæ A C, A D, A E &c. æquali progredientes excessu, à quibus præterquam à minima A C, descripti similes sectores componunt figuram φ, totidémque æquales maximo faciunt sectorem K A G, [c] erit sect. KAG.
c cor. 11 huj. φ ⊐ A Gq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq :: sect K A G. ξ. unde φ ⊏ ξ.
A K.
contra constructionem.

Sin

Sin dicatur ſpatium C A G majus dicto ſectore ξ,[a] inſcribatur figura quædam ψ, ita ut ſp C A G — ψ $\sqsupset$ ſp. C A G — ξ; adeóque ξ $\sqsupset$ ψ. atqui jam ſect K AG. ψ $\sqsubset$ ſect K A G. ξ. unde contra conſtructionem, ψ $\sqsupset$ ξ. Ut hæc igitur vitentur abſurda, erit ξ = ſp C A G; & idcirco ſp C A G. ſect K A G :: ſect ξ. ſect K A G :: A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. A Gq. *Q. E. D.*

Coroll.

Spatium K C G. C A G :: A C × C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq.

Nam A Kq[a] = A Cq + 2 A C × C K + C Kq. Pro A Cq + A C × C K [b] ſubſtituatur æquale A C × A K; eſtque A Kq = A C × A K + A C × C K + C Kq ergò ſect K A G. ſp C A G [c]:: A C × A K + A C × C K + C Kq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. & dividendo A G ſp K C G. ſp C A G :: A C × C K — $\frac{2}{3}$ C Kq. A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq,

a 4. 2.
b 3. 2.
c 27 *hujus* &

Prop. XXVII.

Spatiorum comprehenſorum ſub helicibus & rectis, quæ in revolutione, tertium quidem (γ) *ſecundi* (β) *duplum eſt, quartum verò* (δ) *triplum, quintum autem quadruplum; & perpetuò ſubſequens ſecundum numeros qui deinceps, multiplex eſt ſecundi ſpatii; primum verò ſpatium* (α) *ſexta pars eſt ſecundi* (β).

Vid. not ad 5 def. hujus. fig. ad coroll. 25.

Clariſſimè patet horum veritas è tertia columna tabellæ ſuprapoſitæ, è 25ª deducta. quid plura?

Prop. XXXVIII.

Fig. 101.

Si in helice (A C G Z) *ex una quacunque revolutione deſcripta ſumantur duo puncta* (C, G) *quæ non ſunt ipſius termini, à ſumptis verò punctis connectantur rectæ* (A C, A G) *ad helicis principium* (A); *& centro quidem principio helicis, intervallis verò* (A C, A G) *ductis à punctis ad principium helicis deſcribantur circuli* (C L N, K G M) *ſpatium* (K G C) *comprehenſum ſub majori arcu* (K G) *intercepto rectis* (A C, A G) *& helice rectis iiſdem interjectâ, & rectâ* (C K) *productâ, hanc habebit rationem ad ſpatium* (L C G) *comprehenſum ſub minori arcu* (L C), *& eadem helice & rectâ* (G L) *connectente terminos ipſorum, quem radius* (A C) *minoris circuli cum duabus tertiis exceſſûs* (C K) *quo radius majoris circuli excedit minoris circuli radium* *ad radium minoris circuli cum una tertia parte ejusdem excessus* (CK).

a cor. 27 h. b 26 hujus. c sch. 2. 12 d sch. 19. 5. * 3, 2. & 3 ax. 1. f 1. 6.

Nam sp. K G C. sp. C A G [a]:: A C × C K + $\frac{2}{3}$CKq. A K × AC + $\frac{1}{3}$ CKq & sp C A G. sect K A G[b]:: A G × A C + $\frac{1}{3}$ C Kq AGq; ac sect. K A G. sect. C A L [c]:: A Gq. A Cq. ergo ex æquo sp KGC. sect C A L :: A C × C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. A Cq. [d] ergo sp K G C. sp C A G—sect. C A L :: A C × C K — $\frac{2}{3}$C Kq. $\frac{AK \times AC + \frac{1}{3}CKq}{A}$ —A Cq: hoc est sp K G C. sp L C G :: A C × C K + $\frac{2}{3}$ C Kq. *AC × C K + $\frac{1}{3}$ C Kq [f] :: A C + $\frac{2}{3}$ C Kq. A C + $\frac{1}{3}$ C Kq. *Q.E.D.*

Theorema.

Pappus 22. IV. Fig.. 102. *Si ab helicis* A B Z *principio ducantur utcunque rectæ* A D, A C, *erunt spatia* A B D A, A B C A *inter se, ut cubi è rectis* A D, A C.

a cor. 24 hujus. & 15. 5. b 20. def. 5. c sch. 2. 12.

Centro A per D, C ducantur circuli F N D, E M C secantes A Z in E, F; éstque spatium A B D A. A B C A [a] :: sect. A F N D A. A E M C A [b] = A F N D A. A E M K A + A E M K A. AEMCA = [c]A Dq. A Kq + [c]A D. A K = A D cub. | A K cub.
| A C cub.

Pappus 35. IV. *Per helicem cùm alia difficilia Geometriæ Problemata, tum hoc præcipuum conficitur.*

Problema.

Fig 103.

Datum (angulum, vel) arcum Z M G *secare in datam rationem.*

a cor. 14. huj. b 7. 5, c constr.

Ducantur à centro A rectæ A Z, A C, & A G secet helicem ABZ in C; & ratio A E ad A C æquetur datæ, & centro A per E ducatur arcus circuli E B secans helicem in B; & ab A per B ducatur recta A B F; & liquet esse arc Z M F. arc F G [a] :: (A B. E C [b]::) A E. E C, [c]hoc est in data proportione.

De Conoidibus & Sphæroidibus.

Archimedes Dositheo, S.

Mitto ad te conſcriptas à me hoc in libello cùm reliquorum Theorematum Demonſtrationes, quas inter priùs miſſas non habebas, tum aliorum poſtea repertorum, quæ quidem ſæpe jam antea aggreſſus contemplari, cùm diſſicultatis aliquid habere videretur ipſorum inventio, ferè deſperavi; quamobrem neque cum aliis edita ſunt, quæ proponebantur: poſtea verò diligentiùs iis incumbens, inveni de quibus hæſitaveram. Erant autem è prioribus Theorematis reliqua circa *Conoides rectangulum* propoſita, hæc verò jam tandem inventa verſantur circa *Conoides hyperbolicum*, & *figuras Sphæroides*, quarum aliquas quidem oblongas, alias verò oblatas voco.

Definitiones, & Hypotheſes.

De *Conoide utique rectangulo ſupponebantur hæc.*

(Nota: è planis conum diverſimodè ſecantibus ortas in coni ſuperficie lineas, quas *Apollonium Pergæum* ſequuti *Parabolam*, *Hyperbolam*, & *Ellipſim* jam appellitant, vetuſtiores Geometræ nominârant ſectiones *coni rectanguli*, *obtuſanguli*, *acutanguli*; quia ſcilicet, opinor, ſectiones haſce tantùm in cono recto, ſecto à plano ad crus trianguli per axem recto conſiderârunt; quomodo ſemper in cono rectangulo procreabitur *parabola*, in obtuſangulo *hyperbola*, in acutangulo *Ellipſis*, ut nempe ſi B V A ſit triangulum per axem coni, ſitq; D E communis ſectio plani ſecantis cum triangulo B V A, & V D plano Fig. 104. 105. 106.

plano ſecanti recta ſit, ac ideo angulus V D E rectus; conſtat ſi angulus V rectus ſit, eſſe D E ad V A parallelam, adeóque ſectionem eſſe *parabolam*; ſin angulus V ſit obtuſus, liquet E D cum A V producta convenire ſupra verticem coni, adeóque ſectionem eſſe *hyperbolam*; quòd ſi angulus V fuerit acutus, patet D E occurſuram ipſi V A infra verticem, ac idcirco ſectionem fore *ellipſim*. Talis mihi videtur primitùs impoſitorum iſtorum nominum, * quæ paſſim uſurpat *Archimedes* ratio: nos verò tam brevitati quàm perſpicuitati conſulentes ubique pro deſuetis iſtis & jam minùs appoſitis vocabulis uſitatiora ſubſtituemus & commodiora nomina *parabolæ*, *hyperbolæ*, *ellipſis*, quod certè monitum oportere videbatur.)

* *Quamvis haud penitus ignotas Archimedi fuiſſe ſectiones haſce etiam in cono ſcaleno ſatis patet ex* 8 *&* 9 *hujus libri, ubi &* ellipſis *nomen expreſſum habetur.*

I. Si *parabola* manente diametro circumducta reſtituatur denuò unde proceſſerat; â parabola interceptam figuram appellari *conoides parabolicum*; & *axem* quidem illius vocari *manentem diametrum*: *Verticem* verò punctum, quo axis occurrit ſuperficiei conoidis.

Exempli gratiâ, *conoidis* B V A producti è revolutione ſemi-parabolæ B V K circa diametrum V K, axis eſt V K, vertex V.

Fig. 107. II. Si *conoides parabolicum* contingat planum, tangenti autem plano ductum parallelum aliud planum conoidis aliquam portionem abſcindat; interceptam à ſectione conoidis in abſcindente plano planum appellari *baſin abſciſſæ portionis*: *verticem* verò punctum, ad quod alterum planum *conoides* tangit: *Axem* verò ex ducta per verticem ad conoidis axem parallela interceptam in portione rectam.

Parabolicum conoides B V A tangat planum D T in D; & huic parallelum planum G S ſecet; ſitque recta D E *conoidis axi* V K parallela; ſit portio S D G, cujus *baſis* S H G, *vertex* D, *axis* D E.

* *Contemplanda verò proponebantur hæc; quòd &c. ſubjicit prop.*

III. *De *conoide verò hyperbolico* præſtruebamus hæc: ſi in plano ſit *hyperbola*, ejúſque diameter, & ſectionis **aſymptoti*, diametro autem manente circumductum planum in quo ſunt dictæ lineæ reſtituatur unde proceſſerat; de *hyperbolæ aſymptotis* perſpicuum eſt, quòd conum *Iſoſcelem* intercipient, cujus vertex erit punctum, in quo *aſymptoti* conveniunt, *axis* verò *diameter manens*: ab *hyperbola* verò interceptam figuram vocari *conoides hyperbolicum*; *Axem* verò diametrum qui manet; *Verticem* autem punctum, in quo axis occurrit ſuperficiei conoidis: Conum verò ab *hyperbolæ aſymptotis* interceptum, conoidis continentem dici: rectam verò conoidis, & coni ipſum continentis verticibus interjectum axi accedentem nominari.

* τὰς ἔγγιστα *vocat author, nos uſitatum jam nomen ſubrogamus.*

Fig. 108. Si e g. *hyperbola* B V A cum *aſymptotis ſuis* C M, C N circa diametrum C V K revolvatur, fiet *conoides hyperbolicum* B V A, ipſumq;

com-

complectens *conus* M C N, cujus *vertex* C, *axis* C K; ipsius autem *conoidis axis* est V K, *vertex* V, axi accedens V C.

IV. Et si *conoides hyperbolicum* tangat planum, tangenti autem plano parallelum aliud planum portionem abscindat conoidis; planum quidem à sectione conoidis in abscindenti plano interceptum appellari *basin* portionis abscissæ; *verticem* verò punctum quo planum tangens contingit conoides: Axem verò ex ducta per verticem portionis, & verticem coni conoides continentis interceptam in portione rectam, & dictis verticibus interjectam axi accedentem nuncupari. Fig. 104.

E. G. Conoides hyperbolicum B V A tangat planum T D in D, & huic parallelum S G secet, & per hyperbolæ centrum C ducatur recta C D E; erit facta portio S D G, cujus basis S H G, vertex D, axis D E, axi accedens D C.

V. *Parabolica* utiq; *conoideâ* omnia* similia sunt. *Hyperbolicorum* verò *conoideon* ista vocentur similia, quorum continentes coni sunt similes.

* *Utique similitudinem lato sensu capit, aliàs omnia parabolica conoidea non magis sibi similes sunt quàm omnes coni.*

Hinc colligitur *hyperbolarum similium* definitio ex *Archimedis* sententia; nempe, Hyperbolæ similes sunt, quarum figuræ similes, vel quarum latera sunt proportionalia.* Fig. 110. 111.

* *vel, quarum diametri conjugatæ sunt proportionales.*

Sed intellige figuras ad axes solos, non ad alias diametros (saltem ad similes diametros, hoc est eas quæ æquales cum ordinatim applicatis angulos faciunt) constitui.

Sint enim hyperbolæ B V A, *b v a*; quarum asymptoti C M, C N, & *cm*, *cn*; axes C K, *ck*, quibus perpendiculares M N, *mn*; & his parallelæ R S, *r s* per vertices V, *v* ductæ, adeóque tangentes. Sit verò C K, M N :: *ck*, *mn.* ergo coni conoidea hyperbolica, ex hyperbolarum B V A, *b v a* circa axes C K, *ck* revolutione progenita, continentes sunt similes. Sint autem hyperbolæ B V A latera T. R. & hperbolæ *b v a* latera *t*, *r*. & quia T. R :: C Vq. V Rq :: C Kq. K Mq :: Q.*ck* Q.*km* :: Q.*cv*. Q.*vr* :: *t.r.* liquet esse T. R. :: *t.r.* ergo similium hyperbolicorum conoideon hyperbolis convenit habere latera proportionalia. Hæ vero ex *Archimedis* sententia similes censentur.

De *sphæroidibus* verò *figuris* hæc supposuimus.

VI. Si *ellipsis* manente majori diametro circumducta restituatur eò unde processerat, descriptam ab ellipse figuram appellari *sphæroides oblongum*. Quòd si manente minori diametro circumducta ellipsis restituatur unde processit, descriptam ab ellipse figuram vocari *sphæ-*

Proponitur autem contemplandum quod &c. subjicit P. op.

ſphæroides prolatum: utriuſque verò ſphæroidis *axem* appellari manentem diametrum: *verticem* verò punctum, quo axis occurrit ſuperficiei ſphæroidis: *centrum* verò dici punctum axis medium; & diametrum, ductam per centrum axi perpendicularem.

Sit *e.g. ellipſis* V B X A, cujus major diameter V X minorem B A ſecet pependiculariter in C; ſi circa V X revolvatur *ellipſis*, fiet *ſphæroides oblongum*, cujus *axis* V X, *vertices* V, X; *diameter* B A; ſin verò circa B A rotetur, procreabitur *ſphæroides prolatum*, cujus *axis* B A, *vertices* B, A, *diameter* V X, *centrum* verò utriuſque eſt punctum C.

Fig. 113. VII. Et ſi utrumvis *ſphæroides* contingant parallela plana, non ſecantia; tangentibus autem planis parallelum ducatur aliud planum, ſecans ſphæroides; productarum quidem portionum *baſin* appellari quod à ſphæroidis in plano ſecanti ſectione intercipitur: *vertices* autem puncta, ad quæ parallela plana *ſphæroides* contingunt: *Axes* verò, quæ è recta vertices connectente in portionibus intercipiuntur, rectas.

Sphæroides videlicet Q S D G tangant parallela plana D T, Q Y, & his parallelum planum S H G ſecet; cui occurrat tactus connectens D Q in E; erit ſectio S H G baſis; & D, Q vertices; & DE, Q E axes portionum S D G, S Q G.

VIII. Similes verò dici *ſphæroides figuras*, quarum axes diametris proportionales ſunt.

Hinc ex *Archimedis* ſententia *ſimiles ellipſes* definiuntur, quarum axes conjugati ſunt proportionales; vel quarum ad axes figuræ ſimiles, vel quarum latera proportionalia.

IX. Similes verò dici *ſphæroideon*, & *conoideon* figurarum portiones, ſiquidem à ſimilibus figuris ablatæ ſunt, & baſes ſimiles habent, & axes ipſorum vel baſium planis recti exiſtentes, vel cum homologis baſium diametris æquales facientes angulos, eandem inter ſe rationem habent, quam homologi baſium diametri.

Sint nempe portiones B V A, *bva* à ſimilibus conoidibus vel ſphæroidibus diremptæ, quarum axes V K, *vk* cum baſium diametris B A,
Fig. 114. *ba*; & H F, *hf* æquales faciant angulos; & ſit V K. *vk* :: B A. *ba* ::
115. H F. *hf*; juxta definitionem hanc ſimiles erunt hæ portiones.

Proponitur & de ſphæroideis hæc ſpeculari, quòd *&c.* (ſubjicit prop. . . . .)

Dictis verò theorematis demonſtratis per ipſa reperiuntur complura cùm theoremata tum problemata, quale eſt hoc: quòd *ſimilia ſphæroidea*, nec non *ſimiles ſphæroideum*, ac *conoideum* portiones *triplicatam*

inter

inter ſe rationem habent axium. Et, *quòd in ſphæroidibus figuris æqualibus quadrata diametrorum proportione reciprocantur axibus*; &, *ſi in ſphæroidibus figuris quadrata diametrorum reciprocentur axibus æqualia ſunt ſphæroidea.* *Problema* verò hujuſmodi: *A datâ portione ſphæroidis aut conoidis, portionem abſcindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abſciſſa portio æquetur dato cono, vel cylindro, vel datæ ſphæræ.* Præmittentes igitur & *theoremata*, & **epitagmata* ad eorum demonſtrationes uſum habentia, poſtea tibi *problemata* conſcribemus. Vale.

* *hoc eſt, Propoſitiones Lemmaticas, vel ſubſidiarias.*

X. Si *conus* plano ſecetur in omnia coni latera incidenti, ſectio vel *circulus* erit vel *ellipſis*: & ſiquidem igitur ſectio ſit *circulus*, liquet interceptam ab ipſo portionem versùs verticem coni, fore conum. Si verò ſectio ſit *ellipſis*, è cono ad verticem dirempta figura dicatur *abſegmentum* coni: Abſegmenti verò baſis dicatur *planum* ab *ellipſe* comprehenſum: *vertex* verò punctum, quod & coni *vertex* eſt: *Axis* verò à vertice coni ad centrum ellipſis connexa recta.

ἀπότμαμα.

XI. Ac, ſi *cylindrus* duobus planis parallelis ſecetur in omnia cylindri latera incidentibus, ſectiones vel *circuli* erunt, vel *ellipſes æquales*, & mutuò ſibi ſimiles. Siquidem igitur ſectiones circuli fiant, patet quòd reſecta à cylindro figura inter parallela plana, cylindrus erit: ſin verò ſectiones fiant *ellipſes*, abſumpta à cylindro figura inter parallela plana cylindri ſegmentum vocetur: *baſes* autem ſegmenti vocentur plana ſub *ellipſibus* comprehenſa: *Axis* autem recta *ellipſium* centra connectens. (Erit autem hæc in eadem recta cum axe cylindri.)

Hæc clara ſunt, nec explicationem deſiderant. Videntur autem loco ſuo excidiſſe; nos ea certè non immeritò definitionibus ac hypotheſibus accenſemus. Non ſunt *epitagmata*, quæ pollicetur *Archimedes*, ut exiſtimat non nemo.

Prop. I.

Si quotlibet ſint magnitudines (a, b, c, d) *æquali ſeſe excedentes, ſit autem exceſſus æqualis minimæ* (a); *& aliæ magnitudines multitudine quidem æquales his, magnitudine verò æquales maximæ* (d); *omnes magnitudines, quarum unaquæque æquatur maximæ, omnium quidem æqualiter ſeſe excedentium minores erunt quàm duplæ; reliquarum autem ſive maximâ majores quàm duplæ.* Fig 116.

 Nam

Nam ſumma omnium æqualium maximæ eſt

$$\begin{array}{c} d \\ c+a \\ b+b \\ a+c \\ \hline \end{array}$$

hoc eſt $d+2c+2b+2a$; quæ ſumma deficit à dupla omnium per maximam d, & reliquarum duplam eodem exceſſu ſuperat.

Schol.

$$\begin{array}{l} 0.3.6.9. \\ 9.6.3.0. \\ \hline 9.9.9.9. \end{array}$$

1. Si quantorum talis ſeries (hoc eſt Arithmeticè proportionalium) incipiat à o (ſeu nihilo) & maximus terminus ſit d, numerus autem terminorum dicatur n; ſumma terminorum erit $\frac{nd}{2}$, quæ propoſitio nihil fermè differt ab hac *Archimedea*.

$$\begin{array}{l} a+0. \\ a+1x. \\ a+2x. \\ a+3x. \end{array}$$

2. Sit quælibet ſeries Arithmeticè proportionalium, in qua minimus terminus ſit a communis exceſſus x, & numerus terminorum dicatur n; liquet omnium ſummam eſſe $na + \dfrac{\left.\begin{matrix} nn \\ -n \end{matrix}\right\} x.}{2}$

Nam hæc ſumma conſtat ex ſerie æqualium, & ſerie arithmetica à nihilo incipiente, cujus maximus terminus eſt $nx - 1x$.

Prop. II.

* rationem habeant.

A.B.C.D. E.F.G.H.
K.L.M. N.O.P.

Si quotvis magnitudines (A, B, C, D) *aliis magnitudinibus multitudine æqualibus* (E,F,G,H) *binæ binis, prout ordine diſponuntur, proportionales ſint* A.B::E.F *&* B.C :: F.G *&c*); **referantur verò tam primæ magnitudines ad alias magnitudines* (K, L, M) *vel omnes, vel ipſarum aliquæ in quibuſvis rationibus, (ita ut homologæ ſint in iiſdem rationibus* (A. K :: E. N. & B. L :: F. O *&c.*) *Omnes primæ magnitudines ad omnes quibuſcum conferuntur, eandem rationem habebunt, quam omnes poſteriores magnitudines ad omnes quas ipſæ reſpiciunt.*

a hyp & cor.45
b hyp.
c 18.5.

Nam ob K. A [a]:: N.E. & A.B [b]::E.F. & B.L [b] :: F.O. erit ex æquo K.L :: N.O. Similíque diſcurſu L.M :: O.P. Eſt autem A+B +C+D. A [c]:: E+F+G+H.E. & A. K [b]:: E. N. & K. K+L +

$+ M$ [c] $:: N. N+O+P.$ ergo ex æquo $A+B+C+D. K+L+M :: E+F+G+H. N+O+P.$ *Q.E.D.*

Prop. III.

Si quotcunque sint lineæ (X) æquales inter se, & earum unicuique spatium applicetur excedens figurâ quadratâ, latera verò (A,B,C,D) excessuum æquali sese excedant, & sit excessus æqualis minimo (A); sint verò etiam alia spatia, multitudine quidem æqualia his, sed magnitudine singula æqualia maximo (D X + Dq): hæc ad omnia quidem alia spatia minorem habebunt rationem eâ, quam habet æqualis utrique simul & lateri maximi excedentis quadrati, & uni æqualium, ad æqualem utrique simul, & tertiæ parti lateris maximi excedentis quadrati, & semissi unius æqualium; ad reliqua verò spatia sine maximo majorem rationem habebunt, eâdem ratione. Fig. 117.

Hoc est (si linearum multitudo dicatur n, & inæqualium spatiorum aggregatum dicatur Z) erit $nDX + nDq, Z \sqsupset X+D. \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}D.$ &, $nDX + nDq. Z -\!: DX+Dq \sqsubset X+D. \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}D.$

1. Nam quia [a] sunt AX, BX, CX, DX ut A, B, C, D; hoc est juxta primam hujus [b], erit $AX+BX+CX+DX \sqsubset \frac{nDX}{2}$. [c] item $Aq+Bq+Cq+Dq \sqsubset \frac{nDq}{3}$. est verò Z [d] $= AX+Aq+BX+Bq+CX+Cq+DX+Dq.$ [e] ergo $nDX+nDq. Z \sqsupset (nDX+nDq. \frac{nDX}{2}+\frac{nDq^2}{3} ::)\ X+D. \frac{X}{2}+\frac{D}{3}.$ *Q.E.D.*

a 1. 6.
b 1 *hujus.*
c 1 *cor.* 10. *de Helic.*
d *hyp.*
e 8. 5.

2. Porro, quia $AX+BX+CX$ [b] $\sqsupset \frac{nDX}{2}$, & $Aq+Bq+Cq$ [f] $\sqsupset \frac{nDq}{3}$. [e] erit $nDX+nDq. AX+Aq+BX+Bq+CX+Cq$ ([d] hoc est $nDX+nDq. Z -\!: DX+Dq$) [e] $\sqsubset nDX+nDq. \frac{nDX}{2}+\frac{nD}{3} :: X+D. \frac{X}{2}+\frac{D}{3}.$ *Q.E.D.*

f 2 *cor.* 10 *de helic.*

Prop. IV.

Fig. 118. *Si ab eadem parabola quomodocunque duæ resecentur portiones* (BVA, SDG) *quæ æquales habeant diametros* (VK, DE); *tam ipsæ portiones æquales erunt, quàm ipsis inscripta triangula* (BVA, SDG) *basim habentia eandem cum portionibus, & eandem altitudinem.*

a *sch* 49. 1. *Apol.* b 1. 6. c 7. 5. d 11 & 49. 1. *Apol.* e 9. 5. f 1. 6.

Sit primùm AK ad VK perpendicularis; & R, S sint parametri diametrorum VK, DE ergo ductâ GL ad DE (protractam) perpendiculari, est GEq. GLq [a]:: S. R :: [b]S × VK. R × VK [c]:: S × DE. R × VK [d]:: GEq. AKq. [e]unde GL = AK [f]ergo triangula GDE. AVK æquantur, & horum dupla triangula GDS, AVB; & horum sesquialteræ parabolæ GDS, AVB. *Q.E.D.* Simili discursu quævis alia portio parem habens ipsi VK diametrum portioni BVA, adeóque portioni SDG æquabitur: unde constat propositum.

Cor. Si diametri VK, DE portionum æquentur, perpendiculares GL, AK æquabuntur.

Prop. V.

Fig 119. 120. *Omne spatium comprehensum ab ellipse* (VBXA) *ad circulum* ($V\varsigma X\alpha$) *habentem diametrum æqualem majori ellipsis diametro* (VX) *eandem rationem habet, quam minor ejus diameter* (BA) *ad majorem* (VX), *hoc est ad circuli* ($V\varsigma X\alpha$) *diametrum.*

* *intellige spatio Elliptico.* a 8. 1. *de sph.* c 21. *I. Apoll.* d 1. 6. e 22. 6. f 12. 5. g 1. 6. h 1. 12. k 9. 5.

Dico circulum diametro $Z = \sqrt{VX \times BA}$ æquari *ellipsi. Si negas, esto primùm circulus Z major ellipse; circulo igitur Z [a] inscriptum cogita polygonum parilaterum majus ellipse, & huic simile aliud circulo ($V\varsigma X\alpha$), à cujus angulis demittantur perpendiculares μD, νE &c. occurrentes ellipsi punctis M, N &c. & connectantur BM, MN, NV &c. Estque jam $\varsigma Cq. \mu Dq$ [c]:: $XC \times CV. XD \times DV$ [c]:: BCq. MDq. & permutando ςCq. BCq :: μDq. MDq. unde ςC. BC ([d]hoc est triang ςDC. BDC) [e]:: μD. MD ([d]hoc est triang $\mu\varsigma D$. MBD). [f]quare ςC. BC :: trapezium $\varsigma CD\mu$. BCDM. Simili discursu est trap $\mu DE\nu$. MDEN :: μD. MD :: ςC. BC. idémque pariter ostendetur de reliquis trapeziis ac triangulis. [f]quare totum polygonum circuli $V\varsigma X\alpha$ ad totum polygonum ellipsis se habet ut ςC ad BC, vel VX ad BA; [g]hoc est ut VXq ad VX × BA, [h]hoc est ut polygonum circuli $V\varsigma X\alpha$ ad polygonum circuli Z. [k]ergo

go polygonum circuli Z ellipsis polygono æquatur; Sed majus erat toto spatio elliptico, quæ repugnant. Similis continget repugnantia, [o] *9. ax. 1.*
si dicatur ellipsis major circulo Z; inscribendo scilicet ellipsi figuram quæ major sit circulo Z, & per ejus angulos ducendo perpendiculares D M μ, E N ν, &c. & inscribendo circulo Z figuram similem ipsi V ν μ ϛ X; unde demonstrabitur figura ellipsis æqualis figuræ circuli Z, quæ tamen toto circulo Z major ponebatur: ergo potiùs circulus Z ellipsi æquatur. Hinc ellipsis se habet ad circulum V ϛ X α, [p] ut circulus Z ad circulum V ϛ X α, [q] hoc est ut Zq [r] vel V X × B A ad V Xq, [s] hoc est ut B A ad V X. *Q.E.D.* (p *7. 5.* q *2. 12.* r *hyp.* s *1. 6.*)

Facilè colligitur hoc viâ indivisibilium. Quoniam ϛ Cq. μ Dq :: X C × C V. X D × D V :: B Cq. M Dq. erit ϛ C. B C :: μ D. M D :: ν E. N E. * :: ϛ C + μ D + ν E. B C + M D + N E. & omnes ϛ C, μ D, ν E componunt semicirculum V ϛ X, omnes verò B C, M D, N E conficiunt semiellipsim V B X; ergo simicirculus ad semiellipsim se habet ut ϛ C ad B C; vel ut ϛ α ad B A. (*21. 1. Apoll.* * *12. 5.*)

Prop. VI.

Omne spatium comprehensum ab ellipse (V B X A) *ad quemlibet circulum* (Z) *eandem habet rationem; quam comprehensum ab ellipsis diametris* (V X, B A) *rectangulum ad quadratum* (Zq) *diametri circuli.* Fig. 121.

Nam ell. V B X A. ⊙ V ϛ X α [a] :: B A. V X [b] :: B A × V X. V Xq & ⊙ V ϛ X α. ⊙ Z [c] :: V Xq. Zq. ergo ex æquo ell. V B X A. ⊙ Z :: B A × V X. Zq. *Q.E.D.* (a *5. hujus.* b *1. 6.* c *2. 12.*)

Prop. VII.

Sub ellipsibus (A B C D, E F G H) *comprehensa spatia eandem inter se rationem habent, quam comprehensa ab ellipsium diametris rectangula* (A C × B D, E G × F H) *inter se.* Fig. 122. 123.

Sit quivis circulus diametro Z; éstque A C × B D. Zq [a] :: ellipf. A B C D. ⊙ Z. & Zq. E G × F H [a] :: ⊙ Z. ellipf E F G H. ergo ex æquo A C × B D. E G × F H :: ellipf A B C D. E F G H. *Q.E.D.* (a *6 hujus.*)

Coroll.

Hinc liquet comprehensa sub ellipsibus similibus spatia homologorum diametrorum quadratis proportionalia fore.

Nempe

Nempe posito fore A C. B D :: E G. F H ; erit ellips A B C D. E F G H :: A Cq. E Gq :: B Dq. F Hq. Nam A C × B D. B Dq :: A C. B D :: E G. F H :: E G × F H. E Hq. & permutando AC × BD. E G × F H :: B Dq. F Hq, hoc est ellips A B C D. E F G H :: BDq. F Hq, vel A Cq. E Gq.

Lemmata.

I.

Fig.124. Sit conus Scalenus, in quo B V A triangulum per axem rectum basi B F A ; recta verò V K bisecet angulum B V A, & B D sit ad V K perpendicularis ; si igitur per B D transeat planum B E D triangulo B V A rectum, [a]patet ellipsim fieri, cujus centrum C minor axis B D ;
a 13. 1 *Apol.* quòd si ducatur C E ad B D perpendicularis in dicto plano B E D,
b 4 *def.* 11. erit C E semiaxis major ; & C E plano V B A [b]recta erit, [c]adeóque
c 18. 11. planum per V C, C E plano V B A quoque rectum erit. Producatur
d 19. 11. V E, occurrens basi coni in F, & connectatur F K. [d] liquet F K (com-
e 6. 11. munem nempe sectionem planorum (B F A, V C E) rectam esse pla-
f 3. *def.* 11. no V B A ; [e]adeóque parallelam ipsi C E, [f] & perpendicularem ipsi B A. Est [g]igitur K Fq (B K × K A). V Kq :: C Eq. C Vq. Hæc ana-
g 4. & 22. 6. lysis est *Archimedei* quod subsequitur *problematis*, perspicuitatis ergò apposita ; quali similem decimæ propositionis intelligentiæ conducentem, hujus exemplo, tibi deducendam relinquimus.

II.

Recta V C bisecet angulum B V A, & B D ad V C perpendicularis
Fig. 125. sit ; oportet per B ducere rectam B A occurrentem rectæ V C protractæ in K, ita ut V Kq ad B K × K A rationem habeat datam V Cq ad Tq.

Fiat V C. T [a]:: T. C H ; & ad C H [b] describatur segmentum cir-
a 13. 6. culi capiens angulum æqualem angulo C V B, & secet iste circulus
b 35. 3.
c *const.* & 15. 1 rectam V D in M ; & ductis M C N, M H, fiat B A ad N M paral-
d 4. 6. lela. Dico factum. Nam ob [c]æquiangula triangula C V N, C M H,
e 16. 6. erit V C. M C[d]:: C N. C H. unde M C × C N [e] = V C × C H [f] =
f *const.* & 17. 6. Tq. Est autem V Cq . C M × C N [g] :: V Kq. K B × K A. [h] ergo
g *sch.* 23. 6. V Cq. Tq :: V Kq. K B × K A. *Q.E.F.*
h 7. & 11. 5.
l *const.* & 5. 1. Not. debet esse T ⊏ B C. quia quum angulus C D M sit [l]æqualis
m 16. 1. angulo C B X, [m]hoc est major angulo C N B, [n]erit M C. C D ⊏
n *sch.* 6. 6. C B. C N. [o] adeóque M C × C N ⊏ C D × C B, hoc est Tq ⊏
o *sch.* 16. 6. B Cq.

Prop.

Prop. VIII.

Datâ ellipse, & lineâ (C V) à centro (C) ellipsis excitatâ, ad planum, in quo est ellipsis, rectâ, potest inveniri conus, qui verticem habeat excitatæ lineæ terminum (V) in cujus superficie sit ellipsis data. Fig. 126.

Sit B D minor axis, & semiaxis major sit T. Jungantur B V, D V, & [a]fiat Tq. C Vq :: B K × K A. V Kq (quod fieri potest, quia T ⊏ B C). Erit B A diameter basis coni, cujus vertex V, qui complectitur datam ellipsim. a *Lemm. præc.*

Sit enim punctum quodvis L in ellipse, à quo demittatur L H perpendicularis ad B D [b](adeóque recta plano V B D, cui rectò insistit planum ellipsis). producatur V H M, & assurgat M N plano V B A recta, dicti coni superficiem attingens in N. Ducantur denuò per K, M rectæ P Q, R S ad B D parallelæ. Estque Tq. C Vq [c] :: B K × K A. V Kq. & C Vq. C Bq :: K Vq. K Pq :: K Vq. K P × K Q. ergo ex æquo Tq. C Bq ([f]hoc est H Lq. B H × H D) :: B K × K A. K P × K Q [g] :: B M × M A. R M × M S. Item B H × H D. H Vq [g] :: R M × M S. M Vq. ergo rursus ex æquo H Lq. H Vq :: B M × M A. M Vq. ([h]hoc est) :: M Nq. M Vq. [l]unde H L. H V :: M N. M V. [m]quare V L N est recta linea; [n]adeóque punctum L in superficie coni. Similíque ratione tota ellipsis est in eadem superficie. *Q.E.F.*

b *4. def. 11.*
c *const.*
d *4. & 21 6.*
e *7. 6.*
f *21. 1. Apoll.*
g *sch. 23. 6.*
h *35. 3. & 7. 5.*
l *22. 6.*
m *conv. 4. 6.*
n *1. 1. Apoll.*

Prop. IX.

Datâ ellipse, & lineâ (C V) ab ellipsis centro (C) non rectò excitatâ in plano, quod per unam diametrum (B D) assurgit rectum plano, in quo est ellipsis; potest inveniri conus, verticem habens excitatæ terminum (V), in cujus superficie erit data ellipsis. Fig. 127.

Conjungantur V B, V D, & fiat V A = V B; & connexâ B A, per C ducatur E F ad B A parallela. Sit autem T altera semidiameter datæ ellipsis; & [a]fiat E C × C F. Tq :: B Aq. Sq; tum in plano per B A ad planum V B A rectò [b]descripta sit ellipsis, cujus axes A B, S. Hanc complectatur conus habens verticem V (juxta præcedentem; is quoque datam ellipsim comprehendet. Sumatur enim in data ellipse quodvis punctum L, à quo ducatur L H perpendicularis rectæ B D [c]adeóque recta plano B V D) & extendatur V H M; & M N recta plano B V A (hoc est in plano repertæ ellipsis) coni superficiem attingat in N; & per M ducatur R S ad B D parallela. Estque Tq. E C

a *13. & 12. 6*
b *54. 1 Apol.*
c *4 def. 11.*

d *conſt.* e 15. 5. f 21. *1 Apoll.* g *ſch.* 23. 6. h 22. & *conv.* 46.

EC × CF [d] :: Sq. BAq [e] :: $\frac{1}{4}$SQ, $\frac{1}{4}$ BAq :: [f] MNq. BM × MA. Item EC × CF. BC × CD [g] :: BM × MA. RM × MS. ergo ex æquo Tq. BC × CD ([f] hoc eſt HLq. BH × HD) :: MNq. RM × MS. [g] quinetiam BH × HD. VHq :: RM × MS. VMq. ergo rurſus ex æquo HLq. VHq :: MNq. VMq. [h] unde patet punctum L eſſe in latere VN coni; ſimilíque jure tota ellipſis eſt in ſuperficie dicti coni. *Q. E. F.*

Nota, ſi EC × CF = Tq, fore BA diametrum circuli, ſeu baſis dicti coni.

Prop. X.

Fig. 128.

Datâ ellipſe, & lineâ (CD) *ab ellipſis centro* (C) *erectâ in plano, quod ab una diametro* (AB) *excitatur rectum plano, in quo eſt ellipſis; poteſt inveniri cylindrus, axem habens in directum excitatæ lineæ* (CD), *cujus in ſuperficie erit data ellipſis.*

a *ſch.* 2 6. b 4 *def.* 11. c *hyp.* d 21. *1 Apol.* e *ſch.* 23. 6. f 9. 5. g 35. 3. h *conſt.* & 4. *def.* 11. k 6. 11.

Ducantur AF, BG ad CD parallelæ, quas perpendiculariter ſecet recta FDG; & ob AC = CB, [a] eſt FD = DG. Jam Si FG alteræ ellipſis diametro NO æquetur, erit circulus centro D per F, G deſcriptus, & rectus plano FABG, baſis cylindri, quem deſideramus. Sit enim quodvis punctum H in ellipſe; à quo ducatur HK ad AB [b] perpendicularis, & per K ducatur KL ad CD parallela; & ſit LM ad FG perpendicularis. & quoniam HKq. NCq [c] (FDq) :: [d] AK × KB. ACq [e] :: FL × LG. FDq; erit HKq [f] = FL × LG [g] = LMq. ergo HK, LM ſunt pares. Sed & ambæ [h] rectæ ſunt plano FABG; [k] adeóque parallelæ. ergo liquet punctum H eſſe in latere dicti cylindri per M ducto.

Quòd ſi NO major ſit quàm FG, fiat FP = NO; erit FP diameter baſis cylindri, itidem rectæ plano FDC. quod è ſimili conſtabit diſcurſu.

l *ſch.* 47. 1. m 18. 11. n 4 *def.* 11. o 3. *def.* 11. p 28. 1. q *conſtr.* r 10. 11. s 4. & 22. 6.

Sin demùm ſit NO minor quàm FG, [l] fiat DX = √: DFq — CNq. & plano ACX recta erigatur XR = CN, & connectatur DR; erit circulus radio DR, in plano FDR deſcriptus, baſis cylindri, qui datam ellipſim complectetur. Nam ſtantibus, quæ priùs adſumpta ſunt, ducantur LS ad FG, & ST ad KL protractam perpendiculares. Et quia plana RXD, FDX ſibi mutuò [m] recta ſunt, [n] erit FD recta plano RXD, [o] adeóque lineæ RD; [p] ergo RD, SL parallelæ ſunt. Sed & DX, LT [q] parallelæ ſunt. [r] ergo triangula RDX, SLT ſimilia ſunt. [s] Quamobrem eſt STq. SLq ([g] FL × LG)

* LG) :: RXq. RDq. (DFq.) nam eſt RDq [t] = DXq + XRq [t] 47. 1.
[q] = DFq — CNq + CNq = DFq). Item FL * LG. AK * KB [c] ::
FDq. ACq. ergo ex æquo STq. AK * KB :: RXq [q] (NCq)
ACq [d] :: HKq. AK * KB. [f] quare STq = HKq. ergo cùm ſint
ST, HK parallelæ (perpendiculares enim ſunt ambæ plano FAKLT.
Nam planum STL [u] rectum eſt plano FLT; adeóque ST ei re- u 15. 11.
cta) ſitque punctum S in ſuperficie dicti cylindri, erit H in eadem, & pari ratione tota data ellipſis. *Q. E. F.*

Prop. XI.

Quòd quidem omnis conus ad conum compoſitam habeat rationem ex rationibus baſium & altitudinum demonſtratum eſt ab anteceſſoribus; ſch. 15. 12.
& non abſimili modo demonſtratur quòd abſegmentum omne coni ad abſegmentum coni rationem habet compoſitam è rationibus baſium & altitudinum. Necnon quòd omne ſegmentum cylindri tripla ſit abſegmenti conici baſim habentis eandem cum ſegmento, & æqualem altitudinem: 10. 12.
eadem ſcilicet eſt demonſtratio cum illa, quòd omnis cylindrus triplus eſt coni baſin habentis eandem cum cylindro, & æqualem altitudinem.

Scholium.

Etiam hæc ſimili diſcurſu eliciantur.

1. Æquè alta ſegmenta cylindrica, & conica, baſibus proportionalia ſunt. *Vid.* 11. 12.
2. Segmenta ad æquales baſes conſtituta ſunt inter ſe ut altitudines. 14. 12.
3. Æqualium ſegmentorum proportione reciprocantur baſes & altitudines. 15. 12.

Similia ſegmenta triplicatam habent rationem homologorum in baſibus diametrorum, (vel axium ſuorum). 11. 12.

Prop. XII.

Si conoides parabolicum ſecetur plano (DVK) *per axem* (VK) *vel ad axem parallelo* (DEG); *fiet coni ſectio eadem illi, quæ figuram intercipit; diameter autem ipſius erit communis ſectio* (VK *vel* DE) *planorum; ejus* (DEG) *quod figuram ſecat, & ejus* (VDEK) *quod per axem ducitur rectum ſecanti plano. quòd ſi etiam ſecetur plano ad axem recto* (BGA) *ſectio erit circulus, habens centrum* (K) *in axe.* Pars I. A. Fig. 129.

 Quòd

Quòd plano per axem procreetur parabola eadem illi cujus circumductu fiebat conoides, quódque plano ad axem recto intercipiatur circulus, in axe centrum habens, satis ex ipsa conoidis generatione perspicuo constat. Quòd autem sectio D G sit parabola, primò positæ æqualis sic ostendetur. Sumatur in sectione quodvis punctum G, à
a 4. *def.* 11. quo ducatur G E ad D E perpendicularis, [a] adeóque recta plano VDE
b 4. 11. (cui nempe planum D E G rectum ponitur). Per E ducatur B A ad
c 8. 11. D E, vel V K perpendicularis; [b] ergo D E plano per B E, E G recta
d 35. 3. est; [c] ergo axis V K eidem rectus est; quare B G A est circulus ad
e 5. 2. diametrum B A. Sit demum R parameter parabolæ B V A, & duca-
f 3. *ax.* 1. tur D Z ad V K perpendicularis. Estque EGq [d] $= BE \times EA$ [e] $=$
g 11. *1 A. ol.* $BKq - EKq$ [f] $= BKq - DZq$. Est verò BKq [g] $= R \times VK$, &
h 1. *ax.* 1. DZq [g] $= R \times VZ$; [f] adeóque $BKq - DZq = R \times ZK = R \times DE$.
k *conv.* 11. *1. Apol.* [h] ergo $EGq = R \times DE$. [k] unde sectio D G erit parabola, cujus parameter R. *Q.E.D.*

Pars 2. B. *Si conoides hyperbolicum secetur plano* (D V K) *per axem* (V K) *vel*
Fig. 130. *ad axem parallelo* (D E G) *vel* (*plano* D F H) *per coni conoides complectentis verticem* (C) *erit sectio hyperbole; siquidem per axem eadem erit ei quæ figuram concepit; sin æquidistanter axi, similis illi; at si per verticem coni conoides complectentis, dissimilis ei. diameter autem sectionis erit communis sectio* (V K, *vel* D E, *vel* D F) *planorum; ejus quod secat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum secanti plano. Quòd si secetur plano* (B G A) *ad axem recto sectio erit circulus habens centrum in axe.*

Quòd sectio (D V K) per axem hyperbolam reddit illam, quæ conoides ipsum progenuit; & quod planum axi rectum intercipiat circulum, satis evidens est. Quòd si D E sit axi parallela; sint T V, V R latera hyperbolæ D V K, & à D ducatur D Z ad V K parallela; & protractâ E D fiat $DX = TZ + VZ$ $(TV + 2VZ)$. & $TV. VR :: XD. DS$; faciant verò T V, V R, & X D, D S angulos utcunque; & connexæ T R, X S producantur. Sumatur jam in secti-
a *hyp.* & 4 *def.* 1. one punctum quodvis G; à quo ducatur G E ad D E, [a] (adeóque ad planum D V K) perpendicularis; & per E ducatur B A ad V K per-
b 35. 3. pendicularis, & E L ad D S parallela; denique per puncta Z, K du-
c 5. 2. cantur Z Q, K P ad V R parallelæ. Estque jam EGq [b] $= BE \times EA$
d 12. *1 A. ol.* [c] $= BKq - EKq = BKq - DZq$ [d] $= VK \times KP - VZ \times ZQ$.
e 1. 6. verùm (ductâ Q Y ad V K parallelâ) est $VK \times KP$ [e] $= VZ \times ZQ$

+

$+ YP + QY \times KP = VZ \times ZQ + VZ \times YP + QY \times KP$. f 2; *ax.* 1.
[f] ergo $EGq = VZ \times YP + QY \times KP$. eſt autem [g] $XD, DS ::$ g *conſt.*
$TV. VR$. [h] hoc eſt $XE. EL :: QY. YP$; (vel) $:: DE. YP$. [k] ade- h 4.6. & 11.5.
óque $EL \times DE = XE \times YP$ [l] $= TK + VZ \times YP$ [e] $= TK \times YP$ k 16.6.
$+ VZ \times YP$ (hoc eſt) $= QY \times KP + VZ \times YP$; (ob $TK. KP$ l *conſt.*
[m] $:: QY. YP$; [k] adeóque $TK \times YP = QY \times KP$) [n] ergo $EGq =$ m 4.6.
$EL \times DE$. [o] quare liquet punctum G eſſe in hyperbola, cujus latera n 1. *ax.* 1.
XD, DS, diameter DE; quæ quidem hyperbola ſimilis eſt ipſi o *conv.* 12. *1 Apol.*
BVA, quia $XD. DS$ [l] $:: TV. VR$. *Q.E.D.*

Coroll. $XD = TV + VZ = 2CZ$.

$$DS = VR + \frac{VR}{TV} 2VZ.$$

Quòd verò plani ſectionem attinet per centrum C ductam, producatur FDC ad N, ita ut ſit $CN = CD$; & ſectionem DVK tangant rectæ VM, DM; & ſumpto in ſectione DF puncto quovis H ducatur HF ad DF perpendicularis, (adeóque recta plano $FDVK$) & per F ducantur BA ad VK perpendicularis, & FO ad DM parallela. Eſtque $BF \times FA$. (FHq). FOq [p] $:: MVq. MDq$. ergo p 16. 3 *Apoll.*
ordinatim applicatarum FH in ſectione DH quadrata [q] ſe habent ut q 16.5.
quadrata FO in ſectione DO, [r] hoc eſt ut rectangula NFD. [s] ergo r 21. *I Apoll. & cor.* 51. 1.
DH eſt hyperbole, cujus ND eſt axis tranſverſus. quia verò EGq s *conv.* 21. *I. Apoll.*
[t] $\sqsubset FHq$; & $XE \times ED \sqsupset NF \times FD$ (quia $DE \sqsupset DF$ & XD
$= 2CZ \sqsupset 2CD$) non erit $EGq. XE \times ED :: FHq. NF \times FD$; [u] hoc t *cor.* 5. 2.
eſt non erunt harum ſectionum latera ſibi proportionalia; nec ideo u 21. *I. Apoll.*
ſimiles erunt. ergo cùm ſectio DG [y] ſit ipſi BVA ſimilis; erit ſectio y *priùs.*
DH eidem diſſimilis. *Q.E.D.*

Si quodvis ſphæroides ſecetur plano (VBXA) *per axem* (VX) *vel ad axem parallelo* (DEL) *ſectio erit ellipſis, ſiquidem per axem, ipſa illa quæ figuram concepit; ſin æquidiſtanter axi, ſimilis ei; diameter verò ſectionis erit communis ſectio* (DE) *planorum; ejus nempe quod ſecat figuram, ejuſq; quod per axem ducitur rectum ſecanti plano: quinetiam ſi ſecetur plano recto ad axem, ſectio circulus erit, habens centrum in axe.* *Pars* 3. C. Fig. 131.

Primum & ultimum è *ſphæroidis* ortu ſatis liquidò verificantur.

Porro recta A V connectat axium (A B, V X) terminos A, V ; &
a 16. 3 *Apol.* ducatur E S ad A V, & D S ad A B parallelæ. Sumatur autem ut-
b *conv.* 32. *1. Apol.* & 53. *1. elem.* cunque punctum L in sectione, à quo ducatur L H ad D E perpendi-
cularis ; & per H recta M N ad V X perpendicularis. demùm re-
c 4. & 22. 6. ctæ A T, V T sectionem V A X contingant. Estque M H × H N
d 11. 5. (H Lq) D H × H E [a] :: V Tq. A Tq [b] :: C Aq. C Vq [c] :: D Sq. D Eq.
e *conv.* 21. *1. Apol.* [d] :: H Lq. D H × H E. [e] ergo sectio D L E est ellipsis, cujus axes
f *constr.* sunt D E, D S ; & similis ipsi V B X A ; quia D S. D E [f] :: C A.
g 15. 5. C V [g] :: B A. V X.

Pars 4. D. *Si dictarum figurarum quælibet plano* (B V A) *per axem* (V K) *se-
cetur ; à punctis* (G) *in superficie figuræ extra sectionem existentibus*
Fig. 132. *ductæ ad planum secans perpendiculares* (G E), *intra figuræ sectionem
cadent.*

a 18. 11. Per G ducatur planum axi, [a] (adeóque plano per axem) rectum ;
b *priùs.* [b] ergo communis sectio B A erit diameter circuli B G A. [c] & perpen-
c 38. 11. dicularis G E cadet in B A. * ergo punctum E est intra sectionem
B V A. Cunctis his subjecit *Archimedes*: Horum omnium perspi-
cuæ sunt demonstrationes. Ita visum illi ἐξυδερκεῖ. Nos tamen lucem
iis qualemcunque conati sumus accommodare ; non nemo certè spissas
tenebras offudit. (Cui placet immani tædio vexari, *Rivaltum* adeat in
hæc commentantem, ipsiúsque desiderio, ni fallor, abundè satisfiet).

Prop. XIII.

Fig. 133. *Si conoides paraboli cum plano secetur, neque per axem* (V K) *nec
æquidistanter axi, sectio* (D L E) *erit ellipsis. Diameter autem ejus
major, erit recta* (D E) *intercepta in conoide à facta sectione planorum
& ejus quod figuram secat, & ejus quod per axem transit rectum se-
canti plano: minor autem diameter æqualis erit distantiæ* (D F) *du-
ctarum à majoris diametri terminis axi parallelarum* (D Q, E F).

a *hyp.* & 4 *def.* 11. Capiatur enim in sectione punctum quodvis L, à quo ducatur L H
ipsi D E, [a] adeóque plano V D E, perpendicularis. & per H ducatur
b 35. *1 Apol.* B A axi perpendicularis. Rectæ porro T S ad D E, & V N ad B A
c 2. 6. parallelæ tangant sectionem D V E, & ducatur T P ad V K perpen-
d 7. 5. dicularis. Estque ob V S [b] = P V, [c] etiam N S = N T. [d] ergo N Sq.
e 4. & 22. 6. N Vq [e] (hoc est :: D Eq. D Fq) N Tq. N Vq [f] :: D H × H E. B H ×
f 16. 3. *Apol.* H A (hoc est) :: D H × H E. H Lq [g] :: D Eq. D Fq. ergo sectio
g 11. 5. D L E habet proprietatem ellipsis, cujus axes D E, D F. *Q. E. D.*
h 21. *1 Apol.*

Prop.

Coroll. QH (æqualis dimidiæ diſtantiæ) eſt ſemiaxis minor.

Prop. XIV.

Si conoides hyperbolicum ſecetur plano (DEL) *coincidenti omnibus lateribus coni conoides complectentis, non ad rectos axi* (VK) *ſectio erit ellipſis, ejus autem major diameter erit illa* (DE) *quæ intercipitur à conoide à facta ſectione planorum & ejus quod ſecat figuram, & ejus quod per axem ducitur rectum ſecanti plano.* Fig. 134.

Nam eâdem factâ præparatione, qualis in præcedenti, monſtrabitur fore ſemper DH × HE. HLq :: NTq. NVq. [a]unde ſectio erit ellipſis, & diameter ejus DE, major quidem alterâ, quia PV [b]⊏ VS; [c]adeóque TN ⊏ NS [d]⊏ NV.

a conv. 21. I Apol.
b cor. 36. I Ap.
c 2.6. & 14.5.
d 19. 1.

Coroll. Si fiat TN, NV :: ED. M. erit M altera diameter.

Prop. XV.

Si oblongum ſphæroides ſecetur plano (DEL) *non recto ad axem* (VX), *ſectio erit ellipſis. Diameter autem ipſius major erit illa* (DE) *quæ intercipitur in ſphæroide à facta planorum ſectione, ejuſque quod ſecat figuram, & illius quod per axem ducitur ſecanti plano rectum.* Fig. 135.

Quòd ſectio ſit ellipſis, cujus diameter DE non ſecus quàm in præcedentibus facilè apparet. Quòd verò DE ſit major è diametris, hinc (admiſſis quæ priùs) patet. Per centrum C ducantur *ba* axi VX perpendicularis, & *de* ad BA parallela. Et quoniam quadrata ex *de*, *ba* [a]ſe habent, ut NTq ad VNq, hoc eſt ut DEq ad quadratum alterius diametri, & ſit *de* major quàm *ba*, erit DE major altera diametro. *Q.E.D.*

a 16. 3. Apoll.

Coroll. I.

Siquidem prolatum ſphæroides plano ſecetur; alia quidem eadem erunt, ſed intercepta in ſphæroide linea (qualis DE) minor erit diameter.

II.

Ex iiſdem quoque patet in omnibus figuris, quòd ſi parallelis planis ſecentur ipſarum ſectiones ſimiles erunt.

Nam quadrata è perpendicularibus LH ad comprehenſa ſub ſegmentis DH, HE rectangula ſemper eaſdem obtinebunt rationes, æquales

æquales scilicet ei, quam habent V Nq ad N Tq.

Coroll. III.

Si fiat T N. N V :: E D. M. erit M altera diameter.

Prop. XVI.

Fig. 136. *In conoide parabolico à quibuscunque punctis* (D) *in superficie conoidis ductis ad axem* (V K) *parallelis* (F D E), *quæ* (B F) *in easdem partes ducuntur, ad quas sunt ejus gibba, cadent extra conoides, quæ verò ad alteras* (DE) *intra.*

a 12 *hujus.* b 26. *I Apol.* c *hyp.* Nam si per E F & axem V K ducatur planum, [a] faciet parabolam, [b] extra quam D F tota cadet, & D E intra; quia est F E ad V K parallela.

Prop. XVII.

Fig. 137. *In conoide hyperbolico, à quibuscunque punctis* (D) *in ejus superficie, ductis rectis* (F D E) *parallelis alicui rectæ* (C G) *quæ est in conoide, ducta per coni conoides complectentis verticem* (C), *quæ* (D F) *ad easdem partes ducuntur, ad quas sunt ipsius gibba, cadent extra conoides, quæ* (D E) *ad alteras, intra.*

a 12 *hujus.* B. b 47. *I Apol* Nam si per C G, & D E ducatur planum [a] fiet hyperbola, cujus centrum C, [b] ergo ducta C D H, & C G erunt diametri; quapropter D E his intercidens tota ad partes E intra, versùs F verò extra sectionem cadet.

Prop. XVIII.

Fig. 138. *Si figuras conoides tangat planum* (D T) *non secans conoides, in uno tantùm puncto tanget; & per tactum* (D) *& axem* (V K) *ductum planum* (D V K) *rectum erit tangenti plano* (D T).

a 8 *def.* 11. b 12 *hujus.* c 10. *I Apol.* d 7. 11. e 12 *hujus.* f *priùs.* g 18. 3. Si fieri potest, tangat planum D T etiam in Y, & per puncta D Y ducantur rectæ D E, Y Z axi parallelæ; itaque ductum per has planum aut per axem transit, aut [a] ei parallelum est; ínque conoidis supeficie sectionem [b] efficit coni, [c] quam recta D Y secat; cùm igitur D Y [d] sit in plano D T, hoc secabit conoides, adversùs hypothesin.

Porro ducatur D N axi perdendicularis; [e] hæc diameter erit circuli ad planum D V K recti, cujus cum tangenti plano communis sectio sit recta D T; hæc igitur circulum tanget ([f] nec enim secat) [g] unde de D T ad D N perpendicularis erit, & proinde [h]recta plano D V K. ergo planum quodque per D T, adeóque planum tangens [k]rectum erit plano D V K. *Q.E.D.* h 4 def. 11. k 18. 11.

Coroll. Quævis in plano tangenti recta conoidi occurrens tangit conoides; & quamlibet in conoidis superficie factam sectionem. Nam si recta conoides ipsum, aut in ejus superficie factam sectionem aliquam secaret, planum (contra hypothesin) secaret conoides.

Prop. XIX.

Si sphæroidon figurarum quamlibet tangat planum, figuram non secans, in uno solùm puncto tanget; quodque per tactum, & axem ducitur planum, tangenti plano rectum erit.

Prorsus eodem modo demonstratur quo præcedens.

Prop. XX.

*Si (*conoideon aut) sphæroideon figurarum qualibet secetur plano per axem (V X) & sectionem contingens ducatur recta quædam (D T), & per tangentem erigatur planum plano secanti rectum, continget figuram in eodem puncto (D), in quo & recta (D T) coni sectionem tangit.* *Ita puto scripsisse Archimedem. Fig. 139.

Nam si fieri potest alibi tangat dictum per D T planum, puta in G; & à G ducatur G E recta plano D V X; [a]cadet hæc in ipsam D T; [b]unde punctum E [c]erit intra coni sectionem, contra hypothesin. a 38. 11. b 38. 11. c 12. huj. D.

Prop. XXI.

Si figurarum sphæroidon aliquam duo plana parallela (R T, B S) contingant, contactus jungens (B A) per sphæroidis centrum (C) transibit. Fig. 140.

Planum per B, & axem V X plano tangenti B S [a]rectum est; [b]adeóque plano A T. planum per A, & axem tangenti plano A T [b]rectum est; [b]ergo plana B V X, A V X aut parallela sunt, aut coincidunt; [c]non illud, ergo hoc. Igitur communes plani B V A X cum tangentibus planis sectiones B S, A T [d]parallelæ sunt; & [e]tangunt ellipsim B V A X, [f]ergo recta B A per centrum transit. *Q.E.D.* a 19 huj. b sch. 14. 11. c 8. def. 11. d 16. 11. e hyp & cor. 18 hujus. f conv. 27. 2 Apol.

Prop.

Prop. XXII.

Fig. 141. *Si figurarum sphæroidum quarumcunque contingentia ducantur duo parallela plana* (B S, A T) *ducatur autem per sphæroideos centrum* (C) *planum aliquod* (D E) *tangentibus parallelum; quæ per effectam sectionem ducuntur tactus conjungenti* (B A) *parallelæ* (D M) *extra sphæroides cadent.*

Sumatur in sectione punctum quodvis D, & per B A ac D ducatur planum, cujus cum parallelis planis communes sectiones sint rectæ S R, D E, T X. hæ igitur [a]parallelæ sunt, & D E per centrum transit, quia centrum est tam in [b]recta B A, quàm in [c]plano per D E) & sectio B D A E est [d]ellipsis (aut fortè circulus) & B S, A T hanc sectionem [e]tangunt, adeóque B A, D E sunt [f] diametri [g]conjugatæ. [h]ergo quæ per D ducitur ad B A parallela (D M) tangit sectionem B D A E adeóque sphæroides ipsum. *Q.E.D.*

a 16. 11.
b 21 *hujus.*
c *hyp.*
d 12. *hujus. C.*
e *cor.* 18. *huj.*
f *conv.* 27. 2 *Apol.*
g 47. 1 *Apol.*
h 32. 1 *Apol.*

Prop. XXIII.

Fig. 142. *Omnis figura sphæroides* (V D X E) *secta plano* (D E) *per centrum* (C) *bipertitur à plano, cùm ipsa, tum superficies ejus.*

Operam ludat, opinor, qui rei tam claræ lucem conetur addere. Sanè si (ducto per axem V X plano ad planum D E recto) semi-ellipses D V E, D X E similes sint & æquales, quidni eodem modo portiones sphæroides D V E, D X E æquentur & assimilentur penitus? sibi congruent utique: plura tædet.

Prop. XXIV.

Fig. 143.

Datâ cujuscunque conoidis portione (B V A) *resectâ plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) (*vel cujuslibet sphæroidis non majoris dimidio sphæroide portione similiter abscissâ*) *possibile est figuram solidam inscribere, & aliam circumscribere, è cylindris æquè altis *compositam, ita ut figura circumscripta superet inscriptam minori quàm propositâ quâcunque solidâ magnitudine* (Z).

*lego σχᾶμα pro τμᾶμα.
*lego ἐχόντων συγκειμένων, pro ἐχόντων τῶν συγκειμένων.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto, [a]faciente coni sectionem B V A; & super circulum B O A constituatur cylindrus B P Q A, habens eundem cum conoide axem V K; qui quidem

a 12 *hujus.*

dem, *æquisecto axe in punctis N,M,L, [b]sic dividatur ut sit cylindrus B X X A, altitudine K L, minor dato solido Z. Per divisionum verò puncta L, M, N ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurrentes punctis B, A; per quæ ducantur rectæ $l\lambda$, $m\mu$, $n\nu$ ad V K parallelæ. Jam circa axem V K circumvolutâ figurâ B $\kappa\lambda\mu\nu\nu\mu\lambda\kappa$ A liquet [c]effici figuram conoidi circumscriptam, constantem è cylindris Bκ, Bλ, Bμ, Bν æquè altis (nam rectæ κ B, λ B, μ B &c [d]cadunt extra conoides; & rectæ B A sunt [a]diametri circulorum parallelorum ipsi B O A; & altiuditnes K L, L M &c [e]æquantur). Item circumductâ figurâ $l\,m\,n$ B A $n\,m\,l$, patet inscriptam esse conoidi figuram, itidem è cylindris æquè altis compositam; (nam rectæ l B, m B, n B intra sectionem jacent &c) quia verò cylindrus B l [f]æquatur cylindro Bλ, & cylindrus B m cylindro Bμ, & [f]cylindrus B n cylindro Bν; liquet circumscriptam excedere inscriptam cylindro Bκ, hoc est minore quam solido Z. *Q.E.F.*

b 1. 10. & 11. 12. *
c 21. *def.* 11.
d 16, 17, 22 *h.*
e *const.*
f 11. 12.

Coroll. Cylindrus Bκ est excessus figuræ circumscriptæ supra inscriptam.

Prop. XXV.

Datâ conoidis cujuscunque portione (B O A) *resectâ plano* (B O A) *non rectâ ad axem (vel sphæroidis cujuslibet non majoris dimidio sphæroide similiter resectâ) potest ipsi figura solida inscribi, aliáque circumscribi, ita ut figura circumscripta inscriptam excedat minori, quàm propositâ quacunque magnitudine solidâ* (Z). Fig. 143.

Secetur conoides plano per axem ad planum B O A recto; [a] ita ut fiat coni sectio B V A, cujus communis cum plano B O A sectio B R [c]erit diameter ellipsis B O A. sectionem verò B V A [c]tangat recta R Q ad B A parallela in V; à quo [d]ducatur sectionis diameter V K. Super ellipse verò B O A [e] constituatur segmentum cylindricum B P Q A, habens axem K V: æquisecetur autem V K in punctis L,M,N, ita ut ducto per L plano ad B O A parallelo, [f] sit segmentum cylindricum B $\kappa\kappa$ A minus dato solido Z. Per dicta porro divisionum puncta ducantur rectæ X S ad B A parallelæ, sectioni occurrentes punctis B,A; unde ductis per B A planis ad ipsum B O A parallelis (hoc est rectis plano B V A)[b]fient ellipses, quarum diametri BA; ad quas utrinque [c]constituantur cylindrica segmenta B l, Bλ; B m, Bμ &c. quorum axes K L, L M, M N &c æquales inter se. Factum constat, ut in præcedente; quid plura?

a 12. *hujus.*
b 13, 14, 15 *h.*
c *sch* 53. 2 *Ap.*
d 10. 1.
e 10. *hujus.*
f 1. 10.

His prælibatis, *demonstremus quæ de figuris proposita sunt. *(*Subjicit Archimedes*)

Hactenus nempe propoſitiones lemmaticas præſtravit, jam principales aggreditur, quibus iſtæ deſerviunt.

Prop. XXVI.

Fig. 143. *Quæcunque portio* (B V A) *conoidis parabolici reſecti plano* (B O A) *recto ad axem* (V K) *ſeſquialtera eſt coni* (B V A) *baſin habentis eandem portioni, & axem.*

Si fieri poteſt, ſit primò port B V A $\sqsupset \frac{3}{2}$ con B V A. Portioni circumſcribatur figura (quæ vocetur φ) & inſcribatur altera (quæ dicatur ψ) utraque conſtans cylindrulis, juxta 24 hujus, ita ut $\varphi - \psi \sqsubset$ port A B C $- \frac{3}{2}$ con A B C; unde cùm [a]ſit $\varphi \sqsupset$ port A B C, erit ψ

a 9. *ax.* 1. b 10. 12. $\sqsupset \frac{3}{2}$ con A B C [b]$=$ cyl $\frac{BPQA}{2}$. Sunt autem figuræ circumſcriptæ cylindri [c](æquè ſcilicet alti) B κ, B λ, B μ, B ν ad ſe ordine [d] ut ſuæ baſes, [e]hoc eſt ut quadrata radiorum B K, B L, B M, B N, [f] hoc eſt ut axes V K, V L, V M, V N, [c] hoc eſt juxta hypotheſin primæ hujus. ergo cùm cylindrus B P Q A [c]æquetur totidem æqualibus horum maximo B κ; & figura ψ [g] ipſis his omnibus, dempto maximo B κ; [h]erit cyl $\frac{BPQA}{2} \sqsupset \psi$. ſed priùs erat $\psi \sqsupset$ cyl $\frac{BPQA}{2}$: quæ repugnant.

c *conſt.*
d 11. 12.
e 2. 12.
f 20. *I Apol*
g *cor.* 24 *huj.*
h 1 *huj.*

Sin verò dicatur eſſe $\frac{3}{2}$ con B V A $\sqsupset$ port B V A; [k]ſit jam $\varphi - \psi \sqsubset \frac{3}{2}$ con B V A $-$ port B V A; adeóque cùm ſit port B V A [l] $\sqsupset \psi$, * erit $\varphi \sqsubset \frac{3}{2}$ con B V A, [m]hoc eſt $\varphi \sqsubset$ cyl $\frac{BMNA}{2}$, [n]quod eſt abſurdum.

k 24 *hujus.*
l 9. *ax.* 1.
m 10. 12.
n 1 *hujus.*

Ergo potiùs eſt portio B V A $= \frac{3}{2}$ con B V A. *Q.E.D.*

o 11. & 2. 12. *Archimedes* adhibet ſecundam hujus, hoc fermè pacto. Quoniam
p 20. *I Apol.* eſt cyl B|B κ. L A [o]:: (B Kq. B Lq [p]::) V K. V L. & cyl X S. *m* A
q 11. 12. |XS
r 7. 5. [o]:: (B Kq. B Mq [p] ::) V.K. V M. & ſimili modo cyl X S. *n* A :: VK.
s 2 *hujus.* V N; & ſunt cylindri X S [q]æquales inter ſe, [r] adeóque proportiona-
t 1 *hujus.* les totidem æqualibus ipſi V K, [s] ergo erit illorum ſumma (hoc eſt cylindrus B φ Q A) ad omnes *l* A, *m* A, *n* A, ut totidem V X ad V L + V M + VN; [t] hoc eſt in majori ratione quàm 2 ad 1 &c. Res eodem recidit, at noſter modus ſimplicior videtur, & clarior; qualem proinde nos in ſequentibus haud verebimur uſurpare.

Cylindri.	*Rectæ.*
XS.XS.XS.XS.	VK.VK VK.VK.
l A. *m* A. *n* A.	VL.VM.VN.

Cor.

Cor. Conoidis parabolici portio dimidia eſt cylindri ad æqualem baſin & æquè alti.

Cor. 2. Hinc datâ parabolici conoidis portione rectò abſciſſâ, facilè reperitur æqualis ei conus, aut cylindrus, Fig. 144.

Si protrahatur axis K V ad D, ut ſit D V $= \frac{1}{2}$ K V. erit conus B D A $= \frac{3}{2}$ con B V A $=$ port B V A.

Schol.

Indiviſibilium methodo facilè deducitur hæc propoſitio. Sit enim VN $= a$, U K $=$ A; parameter r, vel R. éſtque

$$\left.\begin{array}{l} BNq = ra \\ BMq = 2ra \\ BLq = 3ra \\ BKq = RA \end{array}\right\} \alpha\ \text{Summa eſt } \frac{RAA}{2} \text{ ergo ſumma circulorum B A eſt } \frac{\varpi}{\delta} \frac{RAA}{2}. \quad {}^{*}\text{Conus B V A eſt } \frac{\varpi}{\delta} \frac{RAA}{3}. \text{ ergo.}$$

α *ſch.* 1 *huj.*

* *hoc eſt* $\frac{BKq \times VK.}{3}$

Prop. XXVII.

Quinetiam ſi plano (B O A) *non rectò ad axem à conoide parabolico reſecetur portio* (B V A)*, ſimiliter ſeſquialtera eſt ſegmenti coni* (BVA) *baſin habentis eandem cum portione, & axem eundem.* Fig. 145.

Si fieri poteſt, ſit port B O A ⊏ $\frac{3}{2}$ ſegm B V A, portioni circumſcribantur & inſcribantur figuræ (quæ dicuntur φ ψ) conſtantes ſegmentis cylindricis, juxta 25 hujus, ita ſcilicet ut φ—ψ ⊐ port B V A —ſegm B V A. unde erit ψ ⊏ $\frac{3}{2}$ ſeg B V A. Sunt autem ſegmenta cylindrica B κ, B λ, B μ, B ν, [a] ut baſes ſuæ ellipticæ, [b] hoc eſt ut B Kq, B Lq, B Mq, B Nq, [c] hoc eſt ut axes B K, BL, BM, BN, [d] hoc eſt rurſus juxta hypotheſin primæ hujus; [e] quare ſegm $\frac{BPQA}{2}$ ⊏ ψ, [f] hoc eſt $\frac{3}{2}$ ſegmenti conici B V A ⊏ ψ; quod oſtenſis repugnat: Sin dicatur port B V A ⊐ $\frac{3}{2}$ ſegm B V A, itidem conſequetur abſurda contradictio, ſicut in præcedenti. Ergo potiùs eſt port B V A ſeſquialtera ſegmenti conici B V A. *Q. E. D.*

a *ſch.* 11 *huj.*
b *cor,* 7. *huj.*
c 20. 1 *Apol.*
d *conſtr.*
e 1 *hujus.*
f 11 *hujus.*

Hinc quoque facilè reperiatur ſegmentum conicum aut cylindricum (vel etiam conus, & cylindrus) æquale ejuſmodi portioni.

Prop. XXVIII.

Fig. 145.

Si conoidis parabolici duæ portiones (BVA, SDG) resecentur planis, altera quidem (BVA) recto ad axem, altera verò (SDG) obliquo, sint verò portionum axes (VK, DE) æquales; portiones erunt æquales.

Secetur conis plano per axem ad planum SG recto, [a] faciente sectiones BVA, SDG; quarum diametri VK, DE; connectantur autem VB, VA, & DS, DE; & ducantur GL ad DE (protractum) & DP ad SG perpendicularis. & propter DE [b]= VK, [c] est GL = AK. [d] unde GE. GL) ([e] hoc est DE, DP, [d] vel VK, DP) :: GE. AK [f]:: GE × AK. AKq. [g] Sunt verò GE, & GL, vel AK semiaxes ellipsis, quæ basis est portionis SDG; [h] adeóque GE × AK ad AKq, ut hæc ellipsis ad circulum radio AK. ergo ut altitudo VK ad altitudinem DP, [k] ita est reciprocè basis segmenti conici SDG ad conum BVA. [l] ergo conus BVA segmento conico SDG æquatur, [m] & ideo portio BVA portioni SDG. *Q.E.D.*

a 12 *hujus.* A.
b *hyp.*
c *cor* 4. *hujus.*
d 7. 5.
e 4. 6.
f 1. 6.
g 13 *hujus.*
h 6 *hujus.*
k 11. 5.
l *sch.* 11 *huj.*
m 26 & 27 *h.* & 15. 5.

Proop. XXIX.

Fig. 146.

Si conoidis Parabolici duæ portiones resecentur planis, quomodocunque ductis, portiones ad se mutuò rationem habebunt eandem, quàm quadrata axium suorum.

Per axem conoidis ducatur planum, quod efficiat sectionem; in cujus axe sumanrur à vertice rectæ VK, VZ datarum portionum axibus æquales, & ducantur BA, XY ad VK perpendiculares: [a] sunt igitur portiones BVA, XVY æquales datis; hæ verò se habent invicem [b] ut coni BVA, XVY, [c] hoc est in composita ratione basium & altitudinum, hoc est in ratione composita ex rationibus [d] BKq ad XZq, & VK ad VZ; [e] hoc est composita ex rationibus VK ad VZ, & VK ad VZ; hoc est, [f] ut VKq ad VZq, [g] hoc est ut quadrata axium datarum portionum. *Q.E.D.*

a 28 *hujus.*
b 15. 5. & 26 27 *hujus.*
c *schol* 15. 12.
d 2. 12.
e 21. *1 Apol.*
f 23. 6.
g *const.* & 7. 5.

Prop. XXX.

Fig. 147.

Omnis hyperbolici conoidis portio (BYA) resecta plano (BOA) recto ad axem, ad conum (BVA) habentem basim eandem cum portione, & æqualem altitudinem, hanc habet rationem, quam habet æqualis (KY) & axi (VK) portionis, & triplæ (VY) axi accedentis (VC)

(V C) ad æqualem (X T) utrique & axi portionis, & duplæ (V T) accedentis axi.

Sit aliquod Z. con B V A :: K Y. K T ; & ſi fieri poteſt ſit pri- a 24 *hujus.*
mò Z $\sqsupset$ port B V A. [a]Portioni circumſcribantur & inſcribantur
figuræ (quæ dicantur φ, & ψ) utraque conſtans cylindris, juxta 24
hujus, ita ut ſit φ — ψ $\sqsupset$ port B V A — Z ; *adeóque Z $\sqsupset$ ψ ; ſunt
autem cylindri B κ, B λ, B μ, B ν ad ſe, [b]ut baſes, [c]hoc eſt ut B Kq, b 11.12.
B Lq, B Mq, B Nq, [d] hoc eſt ut rectangula T K V, T L V, T M V, c 2.12.
T N V, ([e]hoc eſt ut T V + V K × V K ; T V + V L × V L , T V d 21. *1 Apol.*
+ V M × V M , T V + V N × V N) [f] hoc eſt juxta hypotheſin ter- e 1. 6.
tiæ hujus ; ergo [g]cylindrus B Q (æqualis ſummæ maximorum B κ) f *conſt.*
ad figuram inſcriptam ψ (æqualem ſummæ inæqualium cylindrorum g 2 *hujus.*
dempto maximo) ſe habet, ut rectangula totidem æqualia maximo h 3 *hujus.*
T K V ad inæqualia rectangula T L V, T M V, T N V, [h]hoc eſt in k 15. 5.
majore ratione quàm K T ad $\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T, hoc eſt in majore ra- l *conſt.*
tione quàm cylindrus B Q ad Z (nam eſt $\frac{KT}{3}$. $\frac{KV}{3}$ + V C [k] :: (KT. m *conſt. & cor.* 4. 5.
K V + 3 V C [l] :: K T. K Y [m] :: con B V A. Z [n] ::) cyl $\frac{BQ}{3}$. Z ; [o] a- n 10.12. * o
deóque K T. $\frac{KV}{3}$. + V C :: cyl B Q. Z) [p] ergo ψ $\sqsupset$ Z ; quod re- p 10. 5. q 24 *hujus.* r 3 *hujus.* s *priùs.*
pugnat priùs oſtenſis. Sin dicatur Z $\sqsubset$ port B V A ; [q]fiat φ — ψ
$\sqsupset$ Z — port B V A , *adeóque φ $\sqsupset$ Z ; & quia cyl B Q. φ [r] $\sqsupset$ KT. t 10. 5.
$\frac{1}{3}$ K V + $\frac{1}{2}$ V T [s] :: cyl B Q. Z ; [t]erit φ $\sqsubset$ Z quod itidem repug-
nat. ergo potiùs eſt Z = port B V A. *Q.E.D.*

Schol.

Hinc facilè reperitur conus æqualis datæ hyperbolici conoidis portioni (B V A).

Fiat K V + 2 V C. K V + 3 V C :: K V. K D. Eſtque con BDA. Fig. 148.
con B V A :: K D. K V :: K V + 3 V C. K V + 2 V C :: port
B V A. con B V A. unde con B D A = port B V A.

Schol.

Indiviſibilium methodo faciliùs tranſigitur hoc negotium.

Sint

Sint $VN = a$. $VK = A$. est

α 12.1 Apoll.

$$BNq^{\alpha} = ra + \frac{r}{t} aa$$

$$BMq^{\alpha} = 2ra + \frac{r}{t} 4aa$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra + \frac{r}{t} 9aa$$

$$BKq^{\alpha} = RA + \frac{R}{T} Aq.$$

β schol. 1 huj. *γ sch. 10. de helic.*

Summa $^{\beta}\frac{RAA}{2} + {}^{\gamma}\frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$

*hoc est $\frac{\varpi}{\delta}$ ×: BKq×VK. δ 10. 12. ζ 15. 5.

Ergo summa circulorum B A, est $\frac{\varpi}{\delta}$ ×: $\frac{RAA}{2} + \frac{R}{T}\frac{A^3}{3}$. At conus BVA δ est *$\frac{\varpi}{\delta}$ ×: $\frac{RAA}{3} + \frac{R}{T}\frac{AAA}{3}$. Horum verò ζ eadem est ratio quæ $\frac{3T}{2}$ + A ad T + A (quod patet istas summas multiplicando per 3T & dividendo per RAA). Et hoc, opinor, modo *Archimedes* hanc proportionem adinvenit.

Prop. XXXI.

Quinimò si non recto ad axem plano resecetur portio hyperbolici conoidis, ad segmentum coni, basin habentis eandem cum portione, eundèmque axem, hanc habebit rationem, quam æqualis utrique, axi nempe portionis cum tripla accedentis axi, ad æqualem ambabus, axi nempe & duplæ accedentis axi.

Probatur ut antecedens, nisi quòd pro circulis hîc ellipses habeantur. Confer Propos. 27.

Prop. XXXII.

Fig. 149. *Omnis figuræ sphæroideos plano resectæ per centrum* (K) *recto ad axem* (V T) *dimidium* (B V A) *duplum est coni* B V A) *basin habentis eandem cum portione, & eundem axem.*

a 24 hujus. *b ut in priorib.*

Si fieri potest sit 2con B V A ⊐ port B V A; portioni ᵃcircumscribantur & inscribantur figuræ (quas pro more voco φ & ψ) ita ut sit φ—ψ⊐ port B V A—2con B V A; ᵇac ideo 2 con B V A⊐ ψ.

Sunt

Sunt autem cylindri $B\kappa$, $B\lambda$, $B\mu$, $B\nu$ ad se [c] ut B Kq, B Lq, B Mq, c 11. 12.
B Nq, [d] hoc est ut rectangula T K V, T L V, T M V, T N V, [e] hoc d 21. *1 Apol.*
est ut V Kq, V Kq—KLq, V Kq—K Nq, V Kq—K Nq; ergo cy- e 5. 2.
lindrus BQ [b] (æqualis summæ cylindricorum æqualium maximo $B\kappa$) f 2 *hujus.*
ad figuram $\dagger$ [b] (æqualem summæ inæqualium dempto maximo) [c] se g 8. 10.
habet ut totidem V Kq, ad reliqua V Kq—V Lq, V Kq—V Mq, V Kq h 2 *cor.* 10 *de helic.*
—V Nq, [g] hoc est in majori ratione quàm tot V Kq ad V K q, VKq— k 10. 12.
V Lq, V Kq — V Mq, V Kq — V Nq, [g] hoc est in majori ra- l 10. 5.
tione quàm tot V Kq ad tot V Kq—$\frac{1}{3}$ V Kq (quia $\frac{\text{tot V Kq}}{3}$ [h] $\sqsubset$
V Lq + V Mq + V Nq) hoc est quàm tot V Kq ad tot $\frac{2}{3}$ V Kq, hoc est quàm 3 ad 2, [k] hoc est quàm cylindrus B Q ad duplum coni B V A. [l] unde fig $\dagger \sqsupset$ 2 con B V A. verùm erat 2 con B V A $\sqsupset \dagger$, quæ repugnant.

Quòd si dicatur 2 con B V A $\sqsubset$ por B V A; [m] fiat φ—$\dagger \sqsupset$ 2 con m 24 *hujus.*
B V A—port B V A; adeóque $\varphi \sqsupset$ 2 con B V A. verùm contra, n 26. 5.
priorem discursum invertendo, [n] patet esse 2 con B V A ad cylindrum o *priùs,* & 2 *h.*
B Q in minori ratione quàm V Kq, V Kq—V Lq, V Kq—V Mq, p 10. 5.
V Kq—V Nq ad tot VKq, [o] hoc est quàm figura φ ad cylindrum BQ, [p] adeóque esse 2 con B V A $\sqsupset \varphi$, quod repugnat. Quin potiùs ergo est port B V A = 2 con B V A. *Q.E.D.*

Per indivisibilia: sit V N = a, V K = A.

$$B\,Nq^{\alpha} = ra - \frac{r}{t}aa.$$ α 13. *1 Apol.*

$$BMq^{\alpha} = 2ra - \frac{r}{t}4aa.$$

$$BLq^{\alpha} = 3ra - \frac{r}{t}9aa.$$

$$B\,Kq^{\alpha} = RA - \frac{R}{T}AA.$$

[β] Summa est $\frac{RAA}{2}$ [γ] $\frac{R}{T}\,\frac{AAA}{3}$. & summa circulorum B A est $\frac{\varpi}{\delta}$: β 1 *hujus.*
$\frac{RAA}{2} - \frac{R}{T}\,\frac{A^3}{3}$. At verò conus B V A [δ] est $\frac{\varpi}{\delta}$: $\frac{RAA}{3} - \frac{R}{T}\,\frac{A^3}{3}$ [δ] (quia γ *sch.* 10. *helic.* δ 10. 11.
B Kq [ζ] = R A + $\frac{R}{T}$ AA). ergo cùm ista summa [θ] sit ad hanc ut $\frac{3\,F}{2}$ — ζ 13. 1 *Apol.* θ 15. 5.
A ad T—A (ut patet utramque ducendo in T, & dividendo per RAA)

λ hyp. *μ 11. 5.* RAA) hoc est in præsente casu ut 2 ad 1) λ quia $\frac{T}{2} = A$) μ erit portio B V A ad conum B V A, ut 2 ad 1.

Prop. XXXIII.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem per centrum secetur, similiter dimidium sphæroidis duplum erit segmenti coni basin habentis eandem cum portione, eundemque axem.

Non abludit demonstratio ab illa præcedentis: confer propos. 27 & 31.

Prop. XXXIV.

Fig. 149. *Omnis figuræ sphæroidis* (B V A T) *plano sectæ recto ad axem* (VT) *non per centrum* (C) *portio minor ad conum* (B V A) *basin habenti eandem cum portione, & axem eundem* (V K) *hanc habet rationem, quàm utraque* (V C + K T) *& semissis axis sphæroidis, & axis majoris portionis ad axem* (T K) *majoris portionis.*

Vides in præcedente secundùm indivisibilia processu, qui generalis est, & ad quaslibet portiones (etiam hemisphæroide majores) æquè spectat, esse portionem B V A ad conum B V A, ut $\frac{3T}{2}$ — A ad T-A, hoc est ut V C + K T ad K T. *Q.E.D.*

Sin *Archimedis* strictiorem discursum aves cognoscere; sit aliquod Z. con B V A :: V C + K T. K T. & si fieri potest, sit primò port B V A ⊏ Z. Portioni verò B V A [d] rursus circumscribantur figuræ φ,

d 24 bujus. Ψ, ita ut φ — Ψ ⊐ port B V A — Z; ac [b] inde Z ⊐ Ψ. Sunt verò cylin-

e ut in præced. *f 2 bujus.* dri Bκ, Bλ, Bμ, Bν ad se [e] ut rectangula BKV, BLV, BMV, BNV; adeóque cylindrus B Q ad inscriptam figuram Ψ, [f] ut tot rectangula T K V ad rectangula T L V, T M V, T N V.

Est verò
$$\begin{cases} TK \times KV^* = TL \times LV + 2CK \times KL + KLq. \\ TK \times KV^* = TM \times MV + 2CK \times KM + KMq. \\ TK \times KV^* = TN \times NV + 2CK \times KN + KNq. \\ TK \times KV^* = TK \times KV = 2CK \times KV + KVq. \end{cases}$$

g 5. 2. *h 4. 2.* *Nam excessus rectangulorum T K V, T L V [g] est C Lq — CKq [h] = CKq + 2 C K × KL + KLq — CKq = 2CK + KL + KLq &c.

Se

Se verò habet summa juxta 3am hujus; [k]adeóq; tot æqualia maximo $2CK \times KV + KVq$ ad omnia inæqualia se habent in minori ratione, quàm $2CK + KV$ ad $\left\{\begin{array}{l} 2CK \times KL + KLq. \\ 2CK \times KM + KMq \\ 2CK \times KN + KNq. \\ 2CK \times KV + KVq. \end{array}\right\}$ k 3 *hujus.*
$CK + \frac{1}{3}KV$; hoc est quàm KT ad $CK + \frac{1}{3}KV$. [l]ergo per conversionem rationis tot æqualia maximo sunt ad seipsa demptis his inæqualibus (hoc est omnia rectangula TKV ad ipsa TLV, TMV, TNV) in majori ratione, quàm KT ad KT dempto $CK + \frac{KV}{3}$; hoc est quàm KT ad $CV - \frac{KV}{3}$. [m]ergo cyl $BQ\Psi \sqsubset KT.CV - \frac{KV}{3}$. Est verò cyl $BQ.Z$ [n]:: 3 con $BVA.Z$ [o]:: $3KT.VC + KT$ :: $KT.VC + \frac{KV}{3}$ (nam $VC + KT = 3VC - VK$). [m]ergo $\Psi \sqsupset Z$, contrà quàm priùs evictum est. l 26. 5. m 10. 5. n 10. 12. o *hyp.*

Quòd si dicatur esse $Z \sqsubset$ port BVA, fiat $\varphi - \Psi$ [p]$\sqsupset Z -$ port BVA, ac ideo $\varphi \sqsupset Z$. Jam (ostensis insistendo) est cyl BQ ad figuram circumscriptam φ, [q]ut tot rectangula TKV (quot sunt cylindri $B\times$ in BQ) ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV. verùm tot rectangula TKV([r]hoc est tot $2CK \times KV + KVq$) ad summam $\left\{\begin{array}{l} 2CK \times KL + KLq \\ 2CK \times KM + KMq \\ 2CK \times KN + KNq \end{array}\right\}$ [s]se habent in majori ratione quàm $2CK + KV$ ([r]vel KT) ad $CK + \frac{1}{3}KV$. & ideo dicta rectangula TKV ad seipsa demptâ hac summâ ([r]hoc est ad rectangula TKV, TLV, TMV, TNV) [t]in minori ratione erunt quàm KT ad $CV - \frac{KV}{3}$, [r]hoc est quàm cyl BQ ad Z. [u]quare cyl $BQ.\varphi \sqsupset$ cyl $BQ.Z$. quare $\varphi \sqsubset Z$. quod iterum repugnat. ergo potiùs est $Z =$ port BVA. *Q.E.D.* p 24 *hujus.* q *ut in præc.* r *priùs.* s 3 *hujus.* t 26. 5. u 10. 5.

Prop. XXXV.

Quinetiam si sphæroides plano non recto ad axem secetur, neque per centrum, minor ejus portio ad segmentum coni basin habentis eandem cum portione axemque eundem hanc rationem habebit, quam simul ultraque & dimidia ejus, quæ connectit vertices factarum portionum, & axis majoris portionis ad axem majoris portionis.

Rursus est port BVA ad conum BVA, ut $VC + KT$ ad KT. Simili modo demonstratur, ut præcedens, adhibendo ellipses pro circulis, ut in 27 hujus; quare tædio parcimus.

Prop. XXXVI.

Fig. 151. *Cujuſcunque figuræ ſphæroideos* (B V A T) *plano ſectæ recto ad axem major portio* (B T A) *ad conum* (B T A) *habentem eandem cum portione baſin, & eundem axem* (T K), *hanc habet rationem, quam æqualis* (G K) *ambabus ſimul & dimidio* (C V) *axis ſphæroidis, & minoris portionis axi* (K V) *habet ad axem* (K V) *minoris portionis.*

Agatur planum D E per centrum; & compleantur coni B V A,
D V E: Sint verò T F = T C; & V K. V C :: V C. V X. Eſtque
a ſch 12. jam con D V E con B V A. [a]= (V C. V K + D Cq. B Kq = V C.
b 21. 1 A, ol. V K + [b] V Cq. T K × K V [c] = V X. V C + V Cq. T K × K V [d]=
c conſt. V X × V C . V Cq + V Cq. T K × K V [e]=) V X × V C. T K ×
d 1. 6. K V. item con B V A. port B V A [f]:: T K. K F [d] :: T K × K V. K F ×
e 20. def. 5. K V. ergò ex æquo eſt con D V E. port B V A :: V X × V C. K F
f 34 huj. × K V. & antecedentes quadruplando [g] ſphærois D V E. port B V A
g 32 hujus. :: [h] V X × G F. K F × K V. & dividendo port B T A. port B V A ::
h conſtr. & 1. 6. V X × G F — K F × K V. K F × K V (hoc [k] eſt) :: V X × G K + K X
k 7. 5. × K F. K F × K V. (nam eſt V X × G F [l] = V X × G K + V X ×
l 1. 2. K F = V X × G K + [l] K V × K F + K X × K F; adeóque V X ×
G F — K F × K V = V X × G X + K X × K F). Item eſt port B V A.
con B V A [f]:: F K. T K. [l]:: K F × K V . T K × K V; & con B V A.
m 11. 12. con B T A [m]:: K V. T K :: T K × K V. T Kq. ergo rurſus ex æquo
n conſt. eſt port B T A. con B T A :: V X × G K + K X × K F. T Kq. Quoniam
o 19. 5. verò eſt V X. V C [n] :: V C. V K :: [o] V X — V C. V C — V K
(hoc eſt) :: C X. K C. & componendo V C + V K. V K :: K X.
K C; hoc eſt G K. V K ([l] vel V X × G K. V X × V K) :: K X. K C
p 12. 5. ([l] vel K X × K F. K C × K F). & [p] proinde G K. V K :: V X × G K +
q 17. 6. K X × K F. V X × V K + K C × K F. eſt vero demùm V X × V K +
r cor. 5. 2. K C × K F [q] = V Cq + K C × K F = V Cq + : T K — V C × : T K
s 7. 5. + V C [r] = V Cq + : T Kq — V Cq = T Kq. [s] ergo G K . V K ::
t priùs. (V X × G K + K X × K F. T Kq [t]::) port B T A. con B V A.
Q. E D.

Hujuſce diſcurſûs tædium qui voluerit declinare, per generalem propoſ. 34æ diſcurſum ſibi patiatur ſatisfieri.

Prop.

Prop. XXVII.

Quinetiam si sphæroides (B V A T) *secetur plano non recto ad axem, neque per centrum, major ejus portio* (B I A) *ad segmentum coni basin habentis eandem cum portione, & eundem axem, hanc habebit rationem, quam utraque simul* (K G) *æqualis nempe dimidiæ* (C V) *vertices connectentis factarum portionum, & axi* (K V) *minoris portionis, ad axem minoris portionis.*

Eodem ferè modo demonstratur quo antecedens, pauculis, quæ res ipsa sponte suggeret, immutatis.

Coroll.

Ex his facilè reperiatur conus cuilibet datæ sphæroidis portioni Fig. 152.
(B V A) æqualis. a 11. 12.
Fiat nempe K T. V C ⊹ K T :: K V. K D. & compleantur coni b *const.*
B V A. B D A; éstque con B V A. con B D A [a]:: K V. K D [b]:: K T. c 34. 35, 36, 37 *hujus.*
V C ⊹ K T [c]:: con B V A. port B V A. [d]ergo con B D A = port d 9. 5.
B V A. *Q. E. F.*

His subjiciemus ea, quæ è dictis consectari subinnuit *Archimedes* in præloquio ad hunc librum suo.

Prop. XXXVIII.

Similes sphæroideon & conoideon portiones (B V A, D X F) *triplicatam inter se rationem habent axium suorum* (V K, X L). Fig. 153. Fig. 154.

Sint C, E centra figurarum, & T, S axium extrema; & [a] quia est a *hyp. & 9 def. hujus.*
K B. K V :: L D. L X; [b] liquet conos B V A, D X F esse similes, b 24. *def.* 11.
[c]adeóque triplicatam habere rationem diametrorum, vel axium V K, c 12. 12.
X L, (unde statim patet portiones B V A, D X F, si parabolicæ fue- d 26, 27 *hujus,*
rint, habere quoque triplicatam eorundem axium rationem; in reli- & 15. 5.
quis autem) ob figurarum similitudinem [e]ipsarum latera proportio- e *hyp.* & 5. 8. *hujus.*
nalia sunt, [f]hoc est T K × K V. K Bq :: S L × L X. L Dq. ergo ex f 21. 1 *Apoll.*
æquo est T K × K V. K Vq :: S L × L X. L Xq [g] hoc est T K. V K :: g 1. 6. & 11. 5.
S L. L X. & per conversionem rationis T K. T V :: S L. S X. adeó-
que T K. C V [*] :: S L. E X. & componendo T K. T K ⊹ C V :: k 30, 31, 32,
S L. S L ⊹ E X [k]hoc est con B V A. port B V A :: con D X F. port 33, 34, 35, 36,
D X F. ergo permutando con B V A. con D X F :: port B V A. port 37, *hujus.*

l 11. 5. B X F. [l]ergo portiones B V A, D X F triplicatam quoque rationem habent axium V K, S L. *Q.E.D.*

Coroll. Hinc ſimiles integræ figuræ ſphæroides triplicatam axium rationem habent.

Nam ex hoc generali diſcurſu ipſarum dimidiæ portiones ita ſe habent.

Prop. XXXIX.

Fig. 155. Fig. 156. *In ſphæroidibus figuris æqualibus* (B V A T, D X F S) *quadrata è diametris* (B A, D F) *proportione reciprocantur axibus; &, ſi quadrata diametrorum reciprocentur axibus, æqualia ſunt ſphæroidea.*

a 32. *hujus.* b 15. 12. c 15. 5.

Si ſphæroides æquales ponantur, erunt ipſarum [a]ſubquadrupli coni B V A, D X F æquales; [b]adeóque erit B A q. D F q :: E X. C V [c]:: S X. T V. *Q.E.D.*

Sin ponatur eſſe S T. T V ([c]hoc eſt E X. C V) :: B A q. D F q. [b]erunt ideo coni B V A, D X F pares; ac adeò horum [d]quadruplæ ſphæroides æquabuntur. *Q.E.D.*

Prop. XL.

Fig. 157. Fig. 158. *A data ſphæroidis aut conoidis portione* (B V A) *portionem abſcindere plano ad datum planum parallelo, ita ut abſciſſa portio æquetur dato cono* (Z X Y).

Not. XP eſt altitudo coni, & Z Y diameter baſis, Z P radius.
a 26 *hujus.*
b 7. 5.
c *conſt.* & *
d 1. 6.
e *conſt.* & 7. 6.
f 11. 1 *Apol.*
g 11. 5.
l *ſch. ad fin. ult.* 2 *Apoll.*
k 28 *hujus.*

1. In parabolico conoide ſit V K axis, & ſectionis per axem parameter R; fiat verò 3 R. Z P :: Z P. G. & inter X P ac G reperiatur media proportionalis, cui æquetur V K; & per K ducatur planum B A axi rectum, erit portio B V A æqualis dato cono. Nam fiat K Q = $\frac{3}{2}$ V K. [a]ergo conus B Q A æquatur portioni B V A. Eſt verò Q K. X P [b]:: $\frac{3}{2}$ V K. X P [c] $\frac{3}{2}$ G. V K [d]:: $\frac{3}{2}$ R G. R × V K [e]:: Z P q R × V K [f]:: Z P q. B K q. [g]:: Q K. X P. ergo conus B Q A æquatur cono Z X Y. adeóque portio B V A cono Z X Y æquatur. Itaque ſi dato plano parallela ducatur D N tangens ſectionem B V A in D; & ducatur diameter D E = V K; & per E ducatur planum S G ad D N parallelum; [k] liquet abſolvi propoſitum.

2. In ſphæroide, & conoide hyperbolico problema ſolidum eſt, cujus analyſin ſubjungam. V T eſt axis. B A ad V T perpendicularis.

Analyſis.

Analysis.

In sphæroide sit VT $= t$. parameter VR $= r$. XP $= m$. ZP $= n$. conus BQA $=$ port BVA. KV $= a$. unde BKq $= ra - \frac{r}{t}aa$. KV.KQ :: $t - a$. $\frac{3}{2}t - a$ :: a. $\frac{3ta - 2aa}{2t - 2a} =$ KQ. Ob portionem BVA $=$ con BQA.

XP. QK :: BKq. ZPq (ob con BQA $=$ con ZXY) m. $\frac{3ta - 2aa}{2t - 2a}$ :: $\frac{rta - raa}{t}$. nn. ergo fit æquatio $2ra^4 - 5tra^3 + 3ttraa + 2tmnna - 2ttmnn = 0$. Ponatur $r = n$. erit $a^4 - \frac{5}{2}ta^3 + \frac{3}{2}ttaa + tmna - ttmn = 0$. Iſta veró æquatio dividitur per $a - t$, & fit $a^3 - \frac{3}{2}taa + tmn = 0$ vel $tmn = \frac{3}{2}taa - a^3$.

Ejuſmodi veró Problemata generalibus ex methodis optimè conficiuntur.

Addenda

Addenda locis infrà citatis.

[*Post Prop. IV.*] *Schol.*

ARchimedeæ doctrinæ complendæ subjiciemus antecedenti suppar circa reliquas sectiones conicas theorema.

Fig. 160. Fig. 161. *Si ab eadem hyperbola, vel ellipse quomodocunque resecentur duæ portiones* (B V A, S D G), *quarum à verticibus ad bases interceptæ diametri* (V K, D E) *semidiametris* (C V, C D) *proportionales sint, tam ipsæ portiones, quàm iis insceipta t,iangula æquabuntur.*

Sit primùm altera diameter V K sectionis axis; & sint C F, C H semidiametri ipsis C V, C D conjugatæ; sectionem verò tangant rectæ (per vertices V, D ductâ) V M, D N concurrentes in M; & per V ducatur L I K tangenti D N (ac ipsis proinde C H, E S) perpendicularis. Demùm ducantur D P ad M V, & M Y ad V K parallelæ. Et quia rectangula triangula M Y D, V M X similia sunt; est Y M. V X (VP. V X) :: D M. M V [a]:: C H. C F. verùm ratio V P ad V X componitur è rationibus V P ad V N, & V N ad VX, [b]hoc est è rationibus CV ad C N, & C N ad X L; è quibus iisdem componitur ratio C V ad X L. ergo est C H. C F :: C V. X L. atqui per hypothesin est C V. V K :: C D. D E (hoc est) :: L X. X I; permutandóque C V. L X :: V K. X I. [c]ergo C H. C F :: V K. X I; hoc est E S. K B :: V K. X I; unde patet inscripta triangula B V A, S D G æquari; sed & hinc ipsas portiones constabit è sequenti theoremate: unde colligetur (prorsus eodem modo sicut in hac *Prop.* 4.) universim præstitutâ conditione præditas portiones sibimet æquari.

a cor. 16. 3. Apol.
b cor. 36. 1 Apol. & 2. 6 elem.
c coroll. infr.

Fig. 162. 163. Sint duæ quælibet portiones ellipticæ vel hyperbolicæ B V A, S D G. quarum interceptæ diametri V K, D E semidiametris V T, D O proportionales sint, & altitudines (V K, X L) basibus (B A, S G) reciprocè proportionentur (V K. X L :: S G. B A): istæ portiones æquales erunt.

Diametri V K, D E similiter utcunque dividantur in punctis Y, P; per quæ ducantur rectæ Z φ basi B A; & rectæ Q R basi S G parallelæ: item per puncta Z, φ ducantur rectæ Z H, φ F ad diame-

trum

trum VT; & QI, RK ad diametrum DE parallelæ. Et quia CV. VK[a]:: CD. DE. [b]erit CV. CK :: CD. CE. & ideo CVq. CVq—CKq :: CDq. CDq—CEq. [c]hoc est CVq. TK × KV :: CDq. OE × ED. Item simili ratione, quia CV. VK[a]:: CD. DE. & VK. VY[d] :: DE. DP; adeóque ex æquo CV. VY :: CD. DP; erit CVq. TY × YV :: CDq. OP × PD; & permutando TY × YV. OP × PD :: CVq. CDq :: TK × KV. OE × ED. Et rursus permutando TK × KV. TY × YV :: OE × ED. OP × PD; [e]hoc est BAq. Zφq :: SGq. QRq; & BA. Zφ :: SG. QR; adeóque permutando BA. SG :: Zφ. QR. Cùm igitur sit BA. SG[a]:: XL. VK; [f]erit Zφ. QR :: XL. VK. Est verò XL. NL[g] :: DE. PE[d] :: VK. YK; & permutando XL. VK :: NL. YK, [f]ergo Zφ. QR :: NL. YK. [h]unde parallelogramma ZHFφ, QIKR æquantur: quod cùm omnibus ejusmodi parallelogrammis (utrique portioni inscriptis aut circumscriptis) conveniat, satis perspicuum est ipsas portiones BVA, SDG æquari.

a *hyp.* b *cor.* 19. 5. c 5. 2. d *const.* e 21. *1 Apol.* f 11. 5. g 2. 6. h 16. 6.

Hanc propositionem *Vinc. Viviani* primus, opinor, detexit, nec ideo laude suâ fraudandus: hæc autem demonstratio de penu nostro. *in fig. præced.*

Coroll. | BA. SG | :: CF. CH :: Zφ. QR.
| BA. SG | :: VM. DM.

[*Ad Prop. XXXIII.*]

Schol.

Si conoidis hyperbolici duæ portiones (BVA, SDG) *resecentur, quarum axes* (VK, DE) *accedentibus axi* (CV, CD) *proportionales sint, ipsæ portiones æquales erunt.* Fig. 164.

Sit primùm axium alter VK basi rectus; secetur autem conois plano per axem ad planum SG recto faciente hyperbolen, in qua portiones BVA, SDG, quarum diametri VK. DE. tangant verò sectionem rectæ VM, DM; & sit DP ad SG perpendicularis. Et quoniam est CV. VK[b] :: CD. DE. [c]erit DM. MV :: GS. AB. [d]ergo AB est alter axis ellipsis, quæ basis est portionis SDG. Item est DP. VK[e]:: BA. SG[e] :: BAq. BA × SG[f] :: ⊙BAq. ellips. BA. SG. [g]ergo segmenta conica BVA, SDG æquantur. Cùm igitur sit port BVA. segm con BVA[h]:: 3CV + VK. 2CV + VK

a 12 *hujus* A. b *hyp.* c *cor. sch.* 4 *h.* d *cor.* 14 *huj.* e 1. 6. f 6 *hujus.* g *sch* 11 *h.* h 30 *hujus.*

l 31 huj. V K[k] :: 3 C D + D E. 2 C D + D E[l] :: port S D G. ſegm con
k not. infra. S D G. [l]ergo quoque portiones B V A, S D G æquantur.
l 14. 5. *Not.* (Quia C V. V K :: C D. D E. eſt 3 C V. V K[m] :: 3 C D.
m 15. 5. D E. & componendo 3 C V + V K. V K :: 3 C D + D E. D E. & permutando 3 C V + V K. 3 C D + D E :: V K. D E. Simili proceſſu eſt 2 C V + V K. 2 C D + D E :: V K. D E. [n]quare 3 C V + V K. 3 C D + D E :: 2 C V + V K. 2 C D + D E. & permutando.)

n 11. 5.

Hinc univerſim, poſitâ conditione prædictæ portiones æquantur: æquantur enim omnes portioni rectæ B V A. ergo inter ſe.

[*Ad Prop. XXXVII.*]

Schol.

Fig. 165. *Si Sphæroidis duæ portiones* (B V A, S D G) *reſecentur, quarum axes* (V K, D E) *axibus integris, vel ſemiaxibus* (V C, D C) *proportionales ſint, æquales erunt portiones.*

Omnino tali diſcurſu probatur, quali theorema Scholii prop. 33. tantùm loco cor. prop. 14. adhibetur coroll. prop. 15 hujus. Quid plura?

De Planorum Æquilibriis, *sive* Centra Gravitatum in Planis.

Libra, *generaliter accepta, aliàs* Latinis *Statera, trutina, lanx, bilanx*; Græcis ζυγὸς & ζυγὰ; τάλαντιν & τάλαντα; σαθμὸς, σαθμίον, & σαθμία; πλάσιγγες, τεχτάνη) *est machina, vel instrumentum magnitudinum, mediante pondere per ipsum explorato, quantitatibus dimetiendis & dignoscendis comparatum; juxtàque Mathematicam abstractionem, & simplicitatem considerata, nil aliud est, quàm linea quædam recta, indefinitè utrinque protensa, in qua punctum aliquod, immobili sustentaculo fultum, instarque centri fixum persistit (centri proinde nomine donatum) dum lineæ circa ipsum pars utraque ponderis ubivis incumbentis, aut appensi nisu, premitur aut attrahitur; ita quidem ut prævalens grave partes, quibus annectitur, deprimat, adversasque consequenter elevet; ast si contranitentia gravia paribus certent efficaciis, tota situm conservet, & in æquilibrio perseveret. Satis verò constat, experientiâ suffragante, ponderum in libra vires (sicut & potentias motivas in vecte, similibusque machinis) à duabus omnino causis dependere; ab ipsius scilicet absoluto pondere, vel ab ipsa magnitudinis (intra certam aliquam physicam speciem consistendo) quantitate) & ex ejus à centro distantia. Nam & majus pondus ad eandem distantiam, & æquale pondus ad eandem distantiam gravitandi efficaciâ præpollere compertum est. Verùm ad posteriorem causam attendendo, quâ propter ipsam exactâ ratione crescant aut minuantur vires, haud ita facilè discernatur aut demonstretur à priori.* Fig. 166.

ri. Sanè quòd æqualium ponderum vires eâdem cum distantiis suis proportione justè crescant, alterum est è præcipuis totius Staticæ, *quam habemus, & totius* Mochlicæ *(totiusque proinde* Mechanicæ*) fundamentis; cui tamen an sola* Geometria, *vulgaribus utens postulatis & hypothesibus astruendo sufficiat, equidem non leves sunt causæ dubitandi. Non aliud adsumit hujus Author Libelli (rem simpliciter & summatim exprimendo) huic principio stabiliendo, quàm idem (vel æquale) pondus in majore distantia magis gravitare, quo concesso vix elici posse videtur ponderis ejusdem vires distantiis accuratè proportionari: cur enim inde colligatur eâdem potius quàm aliâ quâvis proportione gravitationem istam increscere. Isthuc nihilominus (enititur hic Author, quo successu non disputo (cum brevitati consulens, tum quia Censorem hîc non ago, nec Advocatum, sed Interpretem). Cæterum an pro genuino* Archimedis *fœtu sit agnoscendus hic libellus, & prorsus idem sit cum eo, quem* τῶν μηχανικῶν *nomine inscriptum aliquoties allegat* Archimedes *(de quadr. parab. prop. 6. & 10.) cum pluribus de causis ambigere liceat, nil tamen admodum refert anxiè disquirere; talis saltem apparet, ut integram suam perfectionem vel non adeptus primo fuisse, vel postea non retinuisse videatur. Sunt tamen in eo, quæ tanti parentis indolem aliquatenus sapiunt, nec* Archimedeum *planè dedecent acumen. Utcunque perquam utilis est, ut qui primò præcipua* Statices *elementa sternit, &, quantum forte rei natura fert, confirmat; tum figurarum planarum rectilinearum, centra gravitatum, exquisitâ sanè methodo multisque posteriorum ratiociniis lucem præferente consignat. Superficiebus autem gravitatem assignare non veretur; quidni, æquè ac quantitatem? idem de lineis dictum intellige.*

PO-

Postulata, seu Hypotheses.

Petimus (vel supponimus)

I. *Æqualia gravia ab æqualibus longitudinibus (seu distantiis) æquiponderare.*

Schol.

Æqualia gravia, magnitudine, siquidem homogenea sunt; sin specie diversa, saltem absoluto pondere; longitudines autem intelligit à centro libræ (hoc est ab immobili libram sustinenti puncto) ad centra gravitatis appensorum ponderum (vel ad rectas saltem horizonti perpendiculares per dicta centra transeuntes) protensas. Cùm verò de gravitatis centro hîc potissimùm agatur, mirum videatur (videnum id Librum hunc imperfectum & ἀκέφαλον arguat) nullam centri talis definitionem comparere. Inesse gravi cuicunque magnitudini punctum aliquod unum, ejusquam gravis exactè medium, & æqualibus undiquaque momentis stipatum, à quo suspensum vel utcunque sustentatum grave persistet immotum, & ad nullas undicunq; partes vergens aut propendens, à nonnullis postulatur, *alii probare conantur. Illud verò gravitatis centrum appellatur, & à *Pappo* sic definitur: Dicimus autem centrum gravitatis singuli cujusque corporis esse punctum quoddam intus situm, à quo cogitatione suspensum grave quiescit, & delatum conservat eam, quam ab initio habuit, positionem, neutiquam in latione sua circumlatum. ** Lucas Val. post. I. vide Pappum l. VIII. Vide sis infra Schol. Prop.*

Sit, ex. gr. sphæra, cujus diameter A B horizonti parallela, vel obliqua; si concipiatur hæc appendi perpendiculo Z C ad centrum C, perstabit immota; dimissa verò recta procedet*; at si perpendiculo Y D appendatur eadem ad aliud diametri punctum D, gyrationem concipiet circa punctum D, & nunquam consistet, donec punctum C, adeóque tota recta A B perpendiculo Y D protracto coincidat: unde punctum C erit centrum gravitatis sphæræ. (Ita *Pappi* definitionem interpretor, nonnihil à lectione discedens, quam *Commandinus* exhibet; nempe pro ἠμερεῖ φερόμενον καὶ φυλάσσει τὴν ἐξ ἀρχῆς θέσιν. (quod sensum præfert perobscurum, ut videtur, & perplexum) lego (tantùm unam voculam transponendo) ἠμερεῖ, καὶ φερόμενον φυλάσσει δὲ; forsan verò scripserit *Pappus*, ἠμερεῖ, φερόμενον δὲ; facilè siquidem fuit transcriptori characterem voculæ καὶ, pro charactere quo designa- Fig. 167. **Nullâ vertigine circumlata.*

tur δὲ accipere) rei pleniori intelligentiæ quasdam aliorum scriptorum definitiones subjungam.

Lib. de centro grav. solidorum. *Commandinus.* Centrum gravitatis uniuscujusque figuræ solidæ est punctum illud intra positum, circa quod undique partes æqualium momentorum consistunt.

Lucas Valerius. Cujuslibet figuræ gravis centrum gravitatis est punctum illud, a quo suspensum grave per se manet partibus quomodocunque circa constitutis.

Stevinus. Gravitatis centrum est ex quo vel solâ cogitatione suspensum corpus quemcunque situm dederis, illum retinet.

Idem. Gravitatis centrum est per quod plana quævis ducta corpus in duas partes æquilibres dividunt.

* ῥοπῆς. Quæ de solidis illi pronunciant, tu superficiebus & lineis applica, debitam observans analogiam; & adde subsequentem *Eutocii* Commentatiunculam: *Archimedes* (inquit) in hoc libello centrum *propensionis figuræ planæ reputat, à quo suspensa manet horizonti parallela; duorum autem vel plurium planorum centrum propensionis (vel ponderationis) à quo jugum (hoc est *Libra*, vel *Statera*) suspensum horizonti existit parallelum.

Coroll. 1. Ex his, & axiomate præmisso consectatur, quòd libræ centrum est centrum gravitatis gravis ex æqualibus gravibus ad æquales distantias appensas compositi.

2. Etiam ex hoc axiomate colligitur Gravis cujuscunque multiplex ad eandem vel æqualem distantiam, æquè multiplum habere momentum momenti primo gravi competentis (momentum appellitamus vim gravitandi, situ gravis simul ac absoluto pondere consideratis). Nam singuli gravis æqualis appositio momentum æquale confert. Ergo totius multiplicis momentum aggregabitur è tot æqualibus momentis, quot ipsum partibus æqualibus constat.

Similiter, æquisecto gravi quocunque, momentum ejus (ad æqualem distantiam) æquisecabitur.

3. Sequitur unicum cujusque magnitudinis fore centrum gravitatis.

Aliàs duæ rectæ parallelæ (vel duo plana æquidistantia) magnitudinem in partes æquiponderantes dividerent, hoc est pars toti æquiponderet.

II. Æqualia verò gravia ab inæqualibus distantiis non æquiponderare, sed ad illum grave propendere, quod magis elongatur.

Sch.

Sch. Æquè patet hoc: si gravium æqualium alterum præponderat, illud à libræ centro remotius est.

III. Siquidem, cùm à quibusdam distantiis gravia æquiponderent, alteri gravium adjiciatur aliquid; non æquiponderari, sed ad illud grave propendere, cui quid adjectum est.

Æquè liquet, si gravia à quibusdam distantiis æquiponderet, eorum alterum magis elongatum præponderare, minúsque distans elevari.

IV. Quinetiam similiter, si à gravium (æquiponderantium) altero quippiam auferatur, æquilibrium non fieri, sed ad illud grave inclinari, à quo nil ademptum est.

Æquè clarum est, si gravibus æquiponderantibus adjiciantur vel adimantur æquiponderantia, æquilibrium persistere.

V. Æqualium & similium figurarum planarum invicem congruentium, & centra gravitatum mutuò congruere.

Idem de magnitudinibus aliis (corporibus & lineis) æquè verum & manifestum est.

VI. Inæqualium autem & similium (figurarum) centra gravitatum similiter erunt posita.

Definitio.

VII. Puncta verò similiter poni dicimus ad similes figuras, à quibus ad æquales angulos ductæ rectæ faciunt angulos cum homologis lateribus æquales.

Ex g. In similibus triangulis A B C, D E F, si à punctis Z, Y ducantur ad angulos rectæ; fuerint verò singillatim anguli ad Z æquales angulis ad Y; qui nempe lateribus triangulorum homologis opponuntur. quin & anguli Z A B, Y D E; & Z A C, Y D F, & reliqui reliquis, qui homologis eorundem lateribus adjacent, pares fuerint; similiter poni dicentur hæc puncta Z, Y. Fig. 168. 169.

VIII. Si magnitudines à quibusdam distantiis æquiponderent, & ipsis æquales ab iisdem distantiis æquiponderabunt.

IX. Omnis figuræ, cujus perimeter ad easdem partes est cava, centrum gravitatis intra figuram sit oportet. Fig. 170.

Sit in talis figuræ (A B C) perimetro punctum quodvis B, per quod recta linea, vel planum (I X) figuram contingat; sanè liquet punctum

Vide defin. ad post. I. ctum B non esse centrum gravitatis figuræ, quia totum pondus ad unas ipsius X T partes jacet ac propendet; multò minùs ex simili causa punctum D, extra figuram situm, erit centrum gravitatis dictæ figuræ. Idem in ipsis lineis ad easdem partes cavis intellige; earum nempe centrum gravitatis nec in ipsis, nec ad ipsarum partes convexas, sed intra cavum existere.

Prop. I.

Conversa I. post. *Quæ ab æqualibus distantiis æquiponderant gravia, sunt æqualia.*

Nam si alterutrum excedat, excessu dempto, residuum alteri exæ-
a 1 post. huj. quabitur, & [a]æquiponderabit; [b]unde tota non æquiponderabunt,
b 3. post. huj. adversùs hypothesin. ergo neutrum excedit. *Q.E.D.*

Schol. Hoc æquè verum adde: Quæ ab æqualibus distantiis non æquiponderant, sunt inæqualia.

c 1. post. huj. Nam si æqualia essent, [c]æquiponderarent, contra hypothesin.

Et hoc: Si gravia æqualia æquiponderent, distantiæ sunt æquales. Nam si inæquales essent, non æquiponderarent, contra hypothesin.

Prop. II.

Inæqualia gravia ab æqualibus distantiis non æquiponderant, sed ad majus vergent.

a 1. post. huj. Nam si à majori dematur excessus, residuum æquabitur & [a]æqui-
b 3. post. huj. ponderabit minori: quare totum majus [b]præponderat. *Q. E. D.*

Schol.

Momenta ponderum ad eandem (vel æqualem) à libræ centro distantiam, ponderibus ipsis proportionalia sunt.

Fig. 171. Gravium A, B ad æquales distantias C A, C B appensorum momenta sint α, ς. Sit autem M utcunque multiplex gravis A, & μ æ-
a 2 cor. 1. post. què multiplum momenti μ. [a]ergo μ est momentum gravis M ad distantiam C A. Similiter ipsorum B, ς sumptis æquè multiplis N, ν; erit ν momentum gravis N ad B appensi: quòd si M =, ⊏, ⊐ N,
b 1 post. huj. erit respectivè μ [b]=, [c]⊏, [c]⊐ ν. unde A. B :: α. ς *Q. E. D.*
c 2 hujus. Hisce verò suppositis,

Prop.

Prop. III.

Inæqualium æquiponderantium (A, B) *distantiæ* (CA, CB) *sunt inæquales*; *& minor* (CA) *majoris* (A). Fig. 172.

Sit enim A — X = B. ergo ad has distantias præponderabit B ipsi A — X. quapropter erit CB $\sqsubset$ CA. *Q.E.D.*

Coroll. Simili modo liquet ab inæqualibus distantiis (CA, CB) æquiponderantium (A, B) id majus esse, quod est à minore distantia (CA).

Sit enim CQ = CA. [a]ergo B ad distantiam CQ minùs ponderat, quàm ad distantiam CB, [b]hoc est quàm A ad distantiam CA. [c]unde liquet esse B $\sqsupset$ A. *Q.E.D.* *a 2 post. huj.* b *hyp.* *c sch. 1, & 2 h.*

Prop. IV.

Si duæ æquales * *magnitudines* (A, B), *non idem habeant centrum gravitatis, ex ambabus compositæ magnitudinis* (A + B) *centrum gravitatis erit medium* (C) *rectæ* (AB) *conjungentis centra gravitatis magnitudinum.* Fig 173.

* *Magnitudines æquales homogeneas intellige, tum hîc, tum in sequentibus*; *vel æqualia duo pondera,* (*nam de æqualibus magnitudinibus specie differentibus* (*aut saltem pondere diversis*) *non valet.*)

Quòd centrum compositæ magnitudinis A + B sit in recta AB, προδέδεικται, inquit Auctor; unde colligitur in editis libris aliquid deficere, nam tale quid nullibi præmonstratum apparet: nos illud verò, simul ac illam, quæ præ manibus est, propositionem è definitione centri gravitatis utcunque deduximuus. vide *Coroll. Scholii ad 1 post hujus.*

Prop. V.

Si trium magnitudinum (A, C, B) *centra gravitatis* (A, C, B) *in directum posita sint, & æqualem magnitudines gravitatem habeant, & quæ inter centra sunt rectæ* (CA, CB) *æquales sint, ex omnibus compositæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum* (C) *quod & centrum gravitatis est ipsarum mediæ* (C).

Nam quia magnitudo C æquilibratur in puncto C, & huic utrinq; ad æquales distantias accedunt æqualia pondera A, B, non mutabitur æquilibrium. *Vide sch. ad 4. post. hujus.*

Vel

a 4 *hujus.*
b *hyp.*

Vel ſic: quia punctum C eſt centrum *gr.* [a]ipſius A + B, & [b]ipſius C; [a] erit totius A + B : + C centrum gravitatis inter C, & C medium, hoc eſt ipſum C.

Coroll.

1. Exhinc patet, quòd ſi quotcunque magnitudinum multitudine imparium centra gravitatis in directum poſita ſint, ſiquidémque tum æqualiter à media magnitudine diſtantes æqualem gravitatem habeant, tum rectæ ipſarum centris interjectæ æquentur: ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum, quod & ipſarum mediæ centrum eſt gravitatis.

2. Sin autem multitudine pares ſint magnitudines, & centra gravitatis ipſarum in directum poſita ſint, & ipſarum mediæ (*necnon æqualiter utrinque diſtantes à mediis) æqualem gravitatem habeant, & centris interjectæ rectæ æquentur; ex omnibus compoſitæ magnitudinis centrum gravitatis erit punctum medium rectæ centra mediarum connectentis, ut ſubſcribitur, (& in appoſita figura expreſſum vides.

* *Iſta verba deſunt in exemplaribus; at ſupplenda eſſe cùm res ipſa docet, tum hujus applicatio in prop.* IX (*vel 7 in* Baſileenſi Græca) *ubi habentur verba,* καὶ πάντα τὰ ἐφ' ἑκάτερα τῶν μέσων &c.

Fig. 174.

Prop. VI.

Fig. 175.

Commenſurabiles magnitudines (Z, Y) *æquiponderant à diſtantiis eandem reciprocè proportionem habentibus cum gravibus.*

a *hyp.*
b 10. 10.
c 3. 10.
d 2 *ax.* 1.
e *conſt.*
f 2 *ax.* 10.
g 15. 5.
k *priùs.*

Sint C A. C B :: Z. Y. ergo cùm [a]ſint Z, Y commenſurabiles, [b]erunt quoque rectæ C A, C B commenſurabiles; [c] ſit igitur harum communis menſura M; fiant verò A E, & A D ſingulæ æquales ipſi C B, & B F = C A. [d]ergo eſt E B = C A = B F; & E F = 2 C A; [e] ac E D = 2 C B. [f]ergo M ipſas E F, E D metitur; & eſt E F. E D :: [g] C A. C B [e]:: Z. Y. quoties autem M metitur E F, toties quædam X metiatur Z. quapropter erit M. E F :: X. Z. [k]Item eſt E F. E D :: Z. Y. ergo erit ex æquo M. E D :: X. Y. adeóque quoties M metitur E D, toties X metietur Y; & eſt X menſura communis ipſarum Z, Y. Itaque ſi dividatur E F in partes æquales ipſi M, & Z in totidem æquales ipſi X, & ſingulis ipſius E F particulis ad ipſarum medium punctum appendatur æqualis ipſi X, harum omnium gravitatis centrum erit punctum B (ſiquidem æquinumeræ ſunt hinc inde.) Similique prorſus ratione punctum A centrum gravitatis erit tot eidem X æqualium, quoties M continetur in E D, ipſam Y com-

componentium, & similiter dispositarum. Harum autem omnium gravitatis centrum erit punctum C, rectam F D bisecans (quippe D A = C B, & A C = B F, ac ideo C D = C F) ergo si Z ponatur ad B, & Y ad A, hæ ad distantias C B, C A æquiponderabunt. *Q.E.D.*

Coroll.

Si sit Z. Y $\sqsupset$ C A. C B. præponderabit Y ad A posita ipsi Z ad B constitutæ, & vicé versâ; si Y præponderet ipsi Z, erit Z. Y $\sqsupset$ C A. C B.

Schol.

Non ignoro contra discursum hunc quædam objectari, quin ipse superiùs innui principiis ipsis suspicionis causam subesse: sed non est animus disputare, nec incumbit mihi judicium interponere. Refero mentem auctoris, eam neq; tuebor, nec impugnabo. In altero de æquiponderantibus, qui vulgò inscribitur libro, ratiocinium adhibet ab hoc nonnihil diversum, sed eisdem exceptionibus obnoxium. *Prop. 1.*

Prop. VII.

Quinimò si incommensurabiles sint magnitudines (Z X Y) *à distantiis* (C B, C A) *eandem reciprocè cum magnitudinibus proportionem habentibus æquiponderabunt.* Fig. 176.

Si neges; alterutra Z X præponderet, itaque minor eâ quædam æquiponderabit; hanc inter & totam Z X [a]sumatur media quævis Z, ipsi Y commensurabilis. [b]Patet Z (quoniam æquiponderante[c]major est) ipsi Y præponderare. Verùm ob Z. Y [d]$\sqsupset$ (Z X. Y [e].:) C A. C B; [f]præponderabit Y ipsi Z: quæ repugnant.

Similiter è distantiis arguamus licet. Si Z X præponderet ad distantiam C B, æquiponderet ad E, & inter C B, C E media [a]sumatur aliqua C D ad C A commensurabilis; [k]ergo Z X præponderabit ad D. Sed contra quia Z X. Y[e]:: (C A. C B) [d] $\sqsupset$ C A C D; [f] præponderabit Y ipsi Z X ad D positæ: quæ rursus adversantur sibi.

a *lemm ad 8. 3. Theod.*
b *3 post. hujus.*
c *const.*
d 8. 5.
e *hyp.*
f *coroll. præc.*
k *ad 3 post.*

Ex duabus præcedentibus universalis conflatur hæc propositio: *Gravia quælibet è distantiis reciprocè proportionalibus æquiponderant.*

Quæ simul ac semel hoc modò succinctiùs (& *Archimedeis* fermè principiis insistendo) ostendi possit. Sit recta quævis A B, utcunque secta in D: bisectis partibus D A, D B in E, & F, totâque A B bisectâ in C; liquet E fore centrum partis D A, & F partis D B, & Fig. 177.

C totius A B ; adeóque D A + D B ſuſtentata in C æquilibrabitur. Cùm igitur ſit $EC = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DA$; & $FC = \frac{AB - DB}{2}$. adeóque $EC . FC :: AB - DA . AB - DB :: DB . DA$: ſunt rectæ D A, D B centrorum diſtantiis E C, F C reciprocè proportionales : & cum hiſce rectis quælibet gravitates, ipſarum magnitudinibus proportionales, aſſignari poſſint, æquè de quibuſcunque gravibus hoc verum erit.

Cæterùm ex hoc Palmario, *totiuſque Staticæ præcipuo theoremate* complura ſubnaſcuntur *Corollaria.*

I. Si gravia quælibet è quibuſvis diſtantiis æquiponderent, etiam iis proportionalia quævis gravia ab iiſdem diſtantiis (homologa homologis) æquiponderabunt.

11. 5. Retinebitur enim reciproca gravium & diſtantiarum proportionalitas.

II. Si æquiponderantibus addantur aut ſubtrahantur æquiponderantia, tota vel reſidua æquiponderabunt.

12. 5. Nec enim hîc immutabitur reciproca proportionalitas.

Axiomatis accenſeri meruit hæc propoſitio, ſuprà nobis, *Ubaldo,* & aliis.

Fig. 178. *III. Æqualium gravium* (A, B) *momenta diſtantiis ſuis* (C A, C B) *proportionalia ſunt.*

Quâvis aſſumptâ diſtantiâ C Q concipiatur eſſe Z. A :: C A. C Q.

a 6, 7 *hujus.* [a]ergo ponderis Z ad Q ſuſpenſi momentum æquatur momento ponderis A ad diſtantiam A C. Item ſit B (vel A). Y :: C Q. C B. [a]ergo momentum ponderis Y ad Q æquatur momento ponderis B ad diſtantiam B C. Eſt autem ex æquo Z. Y :: C A. C B ; & momenta ponderum Z, Y ad Q ſuſpenſorum [b]ipſis Z, Y prodortionalia ſunt. ergo liquet propoſitum.

b *ſch. 2 huj.*

IV. Quorumcunque gravium (A, B) *ad quaſcunque diſtantias momenta compoſitam habent è ponderum ipſorum & diſtantiarum* (CA, CB) *proportionibus rationem.*

Nam momentum ponderis A in A poſiti ad momentum ponderis B in B, rationem [c]habet compoſitam è ratione momenti ponderis A in A ad momentum ponderis A in B poſiti ([d]hoc eſt è ratione diſtantiæ

c 20. *def.* V.
d *cor. præc.*

tiæ C A ad C B) & è ratione momenti ponderis A in B ad momentum ponderis B in B positi ([e]hoc est è ratione ipsius A ad B). Hinc verò *e sch. 2 hujus.*

V. *Momenta gravium se ad invicem habent, ut ipsa gravia ducta in suas distantias.*

Nempe C A × A repræsentat momentum gravis A ad distantiam A C; & B × B C momentum exhibet gravis B ad distantiam B C.

Hinc quòd è gravi in suam distantiam ducto provenit, à quibusdam momentum appellatur; quale momentum notum & distantiæ applicatum exhibebit ipsum grave; per ipsum verò grave divisum distantiam notificabit.

VI. Si recta (A B) *duarum quarumvis magnitudinum centra* (A,B) *connectat, ex iis compositæ magnitudinis centrum in ista recta* (A B) *existet.* Fig. 179.

Nam si divisa concipiatur recta A B in C, [a] sic ut sit A. B :: C B. C A; [b]magnitudines A, B ad distantias C A, C B æquiponderabunt; [c]adeóque punctum C erit centrum gravitatis compositæ A + B. unde *a 10. 6.* *b 6 & 7.* *c not. ad 1 post.*

VII. Si quotcunque magnitudinum centra sint in una recta, compositæ ex omnibus magnitudinis centrum in eadem existet.

Nam compositæ ex duabus quibuscunque centrum in illa [d]erit, tum ejus compositæ, ut unius, & tertiæ centrum in eadem erit; ac harum trium, & alterius quartæ consimili pacto, & sic porro, donec ad omnium summam perventum est. *d 6 cor.*

Prop. VIII.

Si ab aliqua magnitudine (MNO) *detrahatur magnitudo* (M N P) *non habens idem centrum cum toto, reliquæ magnitudinis* (N P O) *centrum gravitatis est, si recta* (A C) *gravitatum centra, totius magnitudinis, & ablatæ connectens, protrahatur ad easdem partes, ad quas est totius magnitudinis centrum* (C), *& accipiatur quædam* (CB) *è protracta dicta centra conjungente, sic ut eandem rationem habeat ad illam* (C A) *centris* (CA) *interjectam, quam habet gravitas ablatæ magnitudinis* (MNP) *ad gravitatem reliquæ* (NPO), *acceptæ terminus* (B). Fig. 180.

[a] Patet enim centra totius & partium in una recta (B C) versari; positóque puncto D residuæ N P O centro, quia C totius M N O centrum [b]est, [b]& A partis M N P, [c] erit C D. C A :: M N P. N P O [b]:: C B. *a 6 cor. prac.* *b hyp.* *c 6 & 7 hujus.*

d 9. 5. [b]:: C B. C A. [d]ergo C D = C B : & puncta D, B coincidunt. [e]qua-
e *conſt.* re B eſt centrum partis N P O. *Q.E.D.*

Coroll.

Fig. 181. Ex his facilè (juxta methodum, vel hypotheſin indiviſibilium) conſectatur centrum gravitatis figuræ cujuſlibet planæ in ejus, ſiquam habet, diametros (hoc eſt in recta baſi parallelas rectas biſecante) verſari; necnon centrum gravitatis figuræ cujuſcunque ſolidæ in ejus axe (hoc eſt in recta per parallelorum baſi planorum centra tranſeunte) reperiri.

a 7 *cor. præc.* Nam quia, verbi gr. centra rectarum M N (baſi B A parallelarum) ſunt in diametro V K, [a]erit ex omnibus conſtitutæ figuræ V B A centrum in eadem V K. Idem de ſolidis liquidò clarum eſt; quin & de ſuperficiebus, & lineis quibuſvis axem habentibus, aut axi rectam analogam.

Prop. IX.

Fig. 182. *Omnis parallelogrammi* (M N O P) *centrum gravitatis exiſtit in recta* (V K) *oppoſitorum parallelogrammi laterum biſegmenta connectente.*

Ex præcedente corollario ſatis liquet, at moroſiùs *Archimedes* hoc modo.

Si negas, eſto centrum alicubi extra V K in D; per quod ducatur
a cor 1. 10. D C ad M N parallela. Continuâ jam æquiſectione rectæ V N ali-
b 29. 1. & 1. *def.* 6. quando [a]relinquetur ſegmentum V K ⊐ C D; ſimiliterque diviſâ
c 36. 1. V M, ſi per utriuſque ſegmenti (V N, V M) diviſiones ducantur ad
d *cor.* 5. V K parallelæ, diſpertietur totum parallelogrammum M O in paral-
* *Hoc ſumit auctor, aſt ubi probaverit, non reperio; expende ſis annon principium petat.* lelogramma [b]ſimilia, & [c]æqualia ipſi Q K, & ad utraſque rectæ V K partes æquinumera; [*quin & horum omnium centra ſunt in una recta, pariter à ſe diſſita;] [d]ergo totius ex his compoſiti parallelogrammi M O centrum exiſtet in recta mediorum centra connectente. Verùm D extra medium Q K ſitum eſt. ergo D non eſt centrum, contra quod ipſe aſſeruiſti.

Aliter.

Fig. 183. Sint A, B centra parallelogrammorum M K, V O, quæ conne-
f 36. 1. ctat recta A B, ſecans ipſam V K in C, ducantúrque A K, B V. &
g 29. 1. & 1. quoniam parallelogramma M K, V O [f]æqualia ſunt, ac [g]ſimilia, ſi
def. 6. conjungantur ea, ipſorum centra congruent. Quare rectæ A K, B V (ad

ad æquales & congruentes angulos ductæ) congruent, ut & anguli VKA, KVB: sed & anguli ACK, VCB [k]pares sunt. [l]ergo rectæ CA, CB congruent, & æquales erunt. [m]ergo CA. CB :: pgr VO. VP; [n]consequentérque punctum C est centrum totius parallelogrammi MO. *Q.E.D.*

h 5. *post. hujus.* k 15. 1. l 26. 1. m 7. 5. n *vid.* 6 *cor.* 7. *hujus.*

Coroll. Simul patet centrum C rectam VK bisecare. Nam recta CV, CK congruent.

Simili discursu ostendetur in *circulo, ellipse, sphæra, sphæroide, (talibusque cæteris figuris)* idem esse centrum gravitatis, & ipsius figuræ. Fig. 184.

Sit enim VK diameter, & A, B centra gr. segmentorum VMK, VNK; quæ, segmentis congruentibus, congruent. adeóque triangula ACK, BCV congruent; & propterea CA = CB; ac VMK. VNK :: CB. CA. adeóque C est centrum gr. totius. quinetiam CV = CK; & proinde C est centrum figuræ. Liquet igitur.

Prop. X.

Cujuscunque parallelogrammi (MNOP) *centrum gravitatis est punctum* (C) *in quo diametri conveniunt.* Fig. 185.

Recta VK bisecet adversa parallelogrammi latera MN, PO; & EF bisecet latera MP, NO. [a]Igitur in utraque VK, EF est centrum gravitatis parallelogrammi MNOP; [b]ergo intersectio C est centrum: sed & in hoc diametri conveniunt: nam connexis CM, CO; quia CK [c]= CV; & KO [c]= VM, & ang CKO [d]= ang CVM, est ang KCO [e]= ang VCM: adeóque OCM [f]est linea recta: quare diameter MO per C transit. Simili discursu ducta diameter PN per C transibit. Et liquet propositum.

a 9 *hujus.* b 10 *ax.* 1. *el.* c *const.* & 34. 1. d 29. 1. e 4. 1. f 2 *sch.* 15. 1.

Prop. XI.

Si duo triangula (VBA, XDE) *similia sint inter se, & in ipsis puncta* (C, K) *posita similiter ad triangula; unumque punctum* (C) *trianguli in quo existit centrum sit gravitatis, etiam reliquum punctum* (K) *est centrum gravitatis trianguli, in quo existit.* Fig. 186. Fig. 187.

Si negas, aliud Z centrum esto; rectæque ducantur à punctis K, C, Z ad angulos æquales D, B; & E, A. Et quia puncta Z, C sunt similium triangulorum XDF, VBA [a] centra, [b]similiter erunt posita; [c]quapropter anguli ZDE, CBA pares sunt. At verò quia puncta

a *hyp.* b 6 *post. hujus.* c 7 *post hujus.*

K,

d 1 *ax*. 1. *el*. K, C [b]similiter posita sunt, [c] etiam ang K D E = ang Z D E. [d] er-
e 9. *ax*. 1. go anguli K D E, Z D E æquantur. [e] *Q.E.A.*

Prop. XII.

Fig. 188. 189. *Si duo triangula* (V B A, X D E) *similia sint, unius autem trianguli* (V B A) *gravitatis centrum* (C) *sit in recta* (V L) *ab angulo quopiam ad mediam basin ducta, etiam reliqui trianguli centrum gravitatis erit in consimili ducta rectâ* (X M).

a 10. 6. b *hyp*. c 6. 6. d *const*. e 7. *post. hujus*. f *hyp*. g 6. *post*.

[a]Fiat V L. V C :: X M. X K; & connectantur rectæ C B, C A; K D, K E. & quia V B. B A [b]:: X D. D E; erit consequentes bifariando V B. B L :: X D. D M. Item ang V B L = [b]X D M. [c]ergo triangula V B L, X D M similia sunt; [c] & est B V. V L :: D X. X M. ergo cùm sit V L. V C [d] :: X M. X K; erit ex æquo V B. V C :: D X. X K. [c]ergo triangula B V C, D X K similia sunt. quare reliqua triangula C B L, X D M etiam similia sunt. Simili discursu patebit triangula C V A, K X E; & triangula C A L, K E M assimilari. [e]quare puncta C, K similiter poni constat. unde cùm C [f]sit centrum trianguli B V A, [g]erit K trianguli D X E centrum. *Q.E.D.*

Prop. XIII.

Fig 190. *Omnis trianguli* (V B A) *centrum gravitatis est in recta* (V K) *quæ ab angulo* (B V A) *in mediam deducta est basin.*

Constat hoc aliquatenus è dictis apud Prop. 8. ast *Archimedeam* ἀκρίβειαν negligere non licet, quam plerique juniores, in hujusmodi materiis, imitantur. Fontes, è quibus posteritas hausit, & exemplaria quæ respexit, imprimis jucundum est contemplari. Sic igitur procedit Auctor noster.

a *cor*. 1. 10. b 4. 6. c *sch*. 7. 5. d 9. 5. e 9 *hujus*.

Si negas; esto centrum Z, extra rectam V K; & ab Z ducatur Z Y ad A B parallela. [a]Bisecetur K A continuò, donec segmentum K E minùs evadat ipsâ Z Y; similíque ratione dividatur reliqua semissis K B; tum utrinque per divisionum puncta ducantur rectæ E O, F N, G M, H R, I Q, L P, ad V K parallelæ; connectantúrque rectæ P M, Q N, R O (quæ basi B A parallelæ erunt; quia V K. M G [b]:: A K. A G [c]:: B K. B L [b]:: V K. P L; [d]ideóque M G = P L, & simili discursu F N = I H &c). Liquet autem parallelogrammorum L M, φ N, ψ O centra gravitatis [e] existere in recta V K (eorum

quippe

quippe bases [f]bisecanti) & proinde totius ex iis compositæ, triangu- *f hyp & sch.4 6.*
lo inscriptæ figuræ, [g]centrum in eadem V K fore; quod sit C; con- g 7 *cor. 7 huj.*
nectatur C Z, eique protractæ occurrat A S ad K V parallela. Patet
autem triangulum V K B ad residua triangula P L B, Q φ P, R ψ Q,
V X R, *simul sumpta se habere sicut K B ad K H, (nam ductâ VH, * 12. 6.
triangulum V K H triangulis P L B, Q φ P, R ψ Q, V X R æqua-
tur; quoniam altitudo illius horum [g]altitudinibus simul sumptis, & g 2. 6. & 12. 5.
basis ejus horum singulæ basi æquatur; éstque triang V K B . V K H
[h]:: K B. K H. Item simili de causa patet triang V K A ad triangula h 1. 6.
M G A, V X O, & reliqua ex ista parte, se habere sicut K A ad K E
(vel K B ad K H). *ergo junctim totum triangulum B V A se habet
ad ista cuncta residua triangula, sicut K A ad K E, [k]hoc est ut C S ad k 2. 6.
C D; [l]hoc est in majori ratione quàm C S ad C Z. quare dividendo l 8. 5.
habebit figura dictis parallelogrammis constans ad residua cuncta tri-
angula majorem rationem quàm Z S ad Z C; sit ergo summa paral-
lelogrammorum istorum ad dictam summam triangulorum, ut Z T
ad Z C; ergo cùm sit Z T. Z C ⊏ Z S. Z C. [m]erit Z T ⊏ Z S. m 10. 5.
quia verò Z est centrum gr. totius trianguli B V A, & C centrum di-
ctæ summæ parallelogrammorum, & se reciprocè habet Z T ad
Z C, ut summa parallelogrammorum ad residuam ex toto B V A sum-
mam triangulorum; [n]erit T centrum gravitatis dictæ residuæ trian- n 8 *hujus.*
gulorum summæ; quod fieri sanè [o]nequit; quoniam T ad unas hu- o 9 *post. hujus.*
jus compositæ magnitudinis partes, & extra totum triangulum B V A
positum ostendebatur. Itaque potius trianguli centrum est in recta
V K. *Q.E.D.*

Aliter.

Si fieri potest, esto centrum extra V K ad Z; connectantur Z V, Fig. 191.
Z B, Z A; & K R, K S bisecent ipsas V A, V B (unde patet KRVS
esse parallelogrammum) item ducantur R T, S X ad V Z parallelæ,
& connectantur S R, X T, Z K, M N. Hinc cùm sit B Z. B X [a]:: B V. a 4. 6.
B S [b]:: B A . B K [c]:: A B . A K [b]:: A V. A R [a]:: A Z . A T; [d] liquet b *const.* & 15. 5
S R, B A, X T, parallelas esse; & [d]K X, A Z, [d] & K T, B Z etiam c 7. 5. d 2. 6.
esse parallelas. [e]Igitur in similibus triangulis A R K, B S K, A V B e 7. *post. huj.*
puncta T, X, Z similiter poni liquet. ergo cùm Z [f]sit centrum trian- f *hyp.*
guli A V B, [g]etiam T, X erunt centra triangulorum A R K, B S K. g 6 *post. huj.*
ergo punctum N rectam X T [h]bisecans, [k]erit centrum è triangulis h *hyp. sch.* 4. 6. k 4 *hujus.*
A R K, B S K [l](æqualibus nempe) compositæ magnitudinis. Pun- l 26. 1.
ctum verò M [m]est centrum parallelogrammi K R V S (diametrorum m 10. *hujus.*
utique intersectio) [n]ergo totius ex istis triangulis, & hoc parallelo- n 6 *cor.* 7 *huj.*

grammo

grammo compositi trianguli V B A centrum erit in recta M N. Est verò M N (parallelogrammi quippe S R T X latera bisecans) ad R T, adeóque ad V Z [o]parallela, quapropter erit punctum Z extra rectam M N. ergo Z non est centrum, contra quam affirmabas.

o 33. 1.

Prop. XIV.

Fig. 192. *Omnis trianguli* (B V A) *centrum gravitatis est punctum* (C) *in quo concurrunt rectæ* (V K, B E) *ab angulis ad media latera ductæ.*

a 13 *hujus.* b 10. *ax.* 1.

[a]Est enim centrum in utraque V K, B E; [b] ergo in communi puncto.

Coroll. 1. Vicissim rectæ ab angulis per centrum bisecant latera. Aliàs enim, quum centrum sit in iis quæ bisecant, plura forent centra; [b]quod fieri nequit.

b 3 *cor. sch* 1. *post. hujus.*

2. Tres ab angulis rectæ adversa latera bisecantes in uno puncto concurrunt. In centro nempe trianguli.

3. Recta $CK = \frac{1}{3}$ V K.

c 2. 6. d 4. 6. e *sch.* 4. 6.

Nam connexa F E est ad B A [c] parallela; quapropter est C G. K C [d]:: C E. B C [d]:: F E. B A [d] :: V G. G K [e] :: 1. 2. ergo componendo est G K. C K :: 3. 2. adeóque V K. C K :: 3. 1.

Hoc corollarium *Archimedeis* autographis excidisse videtur: nam indemonstratum (opinor) non assumeret auctor; quod facit tamen in proximè sequenti.

Prop. XV.

Fig. 193. *Omnis trapezii* (B M N A) *duo latera* (B A, M N) *sibi parallela habentis centrum gravitatis* (C) *est in recta* (XK) *parallelarum bisectiones conjungentes, sic divisâ, ut pars ejus* (X C), *terminum habens bisegmentum minoris* (M N) *parallelarum, ad reliquam partem* (C K) *hanc habeat rationem, quam habet utraque simul, æqualis duplæ majoris cum minori ad duplam minoris cum majori parallelarum* (X C. C K :: 2 B A + M N. 2 M N + B A).

a *sch.* 4. 6. b 13 *hujus.* c 8 *hujus.* d 10. 6.

Quod centrum trapezii sit in X K patet; quoniam productis B M, A N ad concursum in V, ducta V K ipsam M N quoque [a] bisecat, adeóque rectæ XK coincidit; & hinc utriusque trianguli V B A, V M N centrum [b]est in V K, [c]adeóque reliqui trapezii B M N A centrum in eadem existit. Porro [d]secetur recta X K trifariam in punctis H, G; per quæ ducantur rectæ O P, Q R ad B A parallelæ; itaque ductis

ductis B X, N K, B N, has quoque [e]trisecabunt parallelæ O P, Q R. [f]ergo liquet punctum E fore centrum trianguli B N A; [f]& punctum F esse centrum trianguli M B N; adeóque connexâ E F, [g]hujus & [h]ipsius X K intersectio C erit centrum totius trapezii BMNA. [c]quapropter erit triang B N A. triang M B N ([k]hoc est B A. M N) :: C F. C E [l]:: C H. C G. unde antecedentes duplando compoenndóque est 2 B A + MN. MN :: 2 CH + CG. CG. Item simili discursu (inversè) 2 M N + B A. B A :: 2 C G + C H. C H. Igitur (istic & hîc permutando) 2 B A + M N. 2 C H + C G :: M N. C G :: B A. C H :: 2 M N + B A. 2 C G + C H. & rursus permutando 2 B A + M N. 2 M N + B A :: 2 C H + C G. 2 C G + C H. Est verò 2 C H + C G [r] = (C H + H G [r] =) C X. & 2 C G + C H = (C G + H G [r] =) C K. [s]quare 2 B A + M N. 2 M N + B A :: C X. C K. *Q.E.D.*

e 2. 6.
f 13 & 3. cor. 14 hujus.
g 6 cor. 7 huj.
h prius.
k 1. 6.
l 4. 6.
r const. & 2 ax. 1.
s 11. 5.

R DE

De Quadratura Parabolæ.

Archimedes Dositheo Felicitatem.

CUM audirem obiisse *Cononem*, qui nobis adhuc superstes erat in amicitia, te verò *Cononis* familiarem fuisse, & Geometriæ esse gnarum; illi quidem demortuo indoluimus ceu vero amico, & in Mathematicis planè mirabili; tibi verò protinus destinavimus mittere scribentes, ut *Cononi* decreveramus scribere, è Geometricis theorematis illud, quod antea quidem nemo contemplatus erat, à nobis verò jam perspectum est; primò quidem per mechanica repertum, postea verò Geometricè demonstratum. Eorum sanè, qui priùs Geometrica tractârunt, nonnulli aggressi sunt scribere, ut possibile sit *circulo dato, & circuli dato segmento æquale rectilineum spatium invenire*; nec non postea comprehensum sub *totius coni sectione, & recta spatium quadrare tentârunt; assumentes quæ nemo facilè concesserit *lemmata*; unde à multis illi damnati sunt hæc non advenisse. Veruntamen qui *parabolæ* segmentum comprehensum quadrare conatus fuerit, anteriorum scimus neminem, quod certè nunc à nobis inventum est; demonstratur enim *quòd omne segmentum comprehensum sub recta, & parabola, sesquitertium est trianguli basin habentis eandem, & altitudinem æqualem cum segmento*; hoc assumpto lemmate ad ejus demonstrationem, quòd inæqualium spatiorum excessus (quo majus excedit minus) potest ibi sibimet apponi, ut omne propositum finitum spatium exuperet: usurpârunt autem hoc lemma qui priùs extiterunt Geometræ; *etenim circulos duplicatam inter sesè diametrorum rationem habere demonstrârunt* hoc utentes lemmate;

* ellipsis (*opinor.*)

De sph. & cyl. 1, *ax.* 5.

lemmate; & quòd *sphæræ triplicatam inter se rationem habent diametrorum*; quinetiam *quòd omnis pyramis tertia pars est prismatis eandem cum pyramide basin habentis, & altitudinem æqualem*; & quòd *omnis conus subtriplus est cylindri eandem cum cono basin habentis, & æqualem altitudinem*, similiter prædictum lemma sumentes scripserunt. Evenit verò prædictorum theorematum singulis haud secus ac illis quæ absque hoc lemmate demonstrata sunt adhibitam esse fidem; perinde etiam in similem fidem adductis iis, quæ nos edidimus. Ejus igitur exscriptas demonstrationes mittimus, primò sicut è mechanicis comperta sunt, postea verò prout etiam per Geometrica demonstrantur, præmittuntur autem & Elementa Conica, quæ ad demonstrationem usum habent. Vale.

Prop. I.

Fig. 194. *Si ſit parabola* A B G ; *ſit autem recta* B D *parallela diametro,*
Apol. 46. 1. *vel ipſa diameter ; recta verò* A G *parallela illi, quæ coni ſectionem hanc contingit ad* B ; *erunt* D A, D G *æquales. Sin &* D A *æquetur*
Apol. 5. 2. *ipſi* D G , *parallelæ. erunt ipſa* A G & *ea quæ ſectionem contingit ad* B.

Prop. II.

Apol. 35. 1. *Si ſit parabola* A B G ; *ſit autem recta* B D *parallela diametro, vel ipſa diameter ; ipſa verò* A D G *parallela ei quæ ſectionem contingit ad* B ; *at recta* G E *ſectionem comtingat in* G ; *erunt* B D , B E *æquales.*

Prop. III.

Si ſit parabola A B G ; *recta verò* B D *diametro parallela, vel ipſa*
Apol. 20. 1. *diameter ; & ducantur quædam rectæ* D G, Z H *parallelæ tangenti parabolam in* B ; *erit ut* B D *longitudine ad* B Z, *ita* D G *potentiâ ad* Z H.

Hæc ſanè (ait *Archimedes*) demonſtrantur in conicis Elementis. —Cæterùm ambigi poteſt, utrum *Archimedes* Elementa citaverit, an ejus Tranſcriptores, omiſſis quas is appoſuerat demonſtrationibus ad illa nos ablegaverint. Utique de Conicis, quæ *Archimedis* temporibus extabant, Elementis nihil conſtat : iſta ſaltem apud *Apollonium* jam habentur locis citatis.

Prop. IV.

[Fig. 195. Fig 196. *Sit portio* A B G *comprehenſa ſub recta & parabola ; recta verò* D B *à medio ipſius* A G *parallelo diametro ducatur, aut ipſa ſit diameter ; & connexa recta* G B *producatur ; quòd ſi deducatur altera quæpiam* T Z *ipſi* B D *parallela, ſecans utramque rectarum* A G, B G ; *eandem rationem habebit* Z T *ad* T I *quam* D A *ad* D Z.

a 2. 6. Nam ducatur I K ad A G parallela : éſtque B Gq. B Tq [a]:: (D Gq.
b 34. 1. D Zq [b] :: D Gq. K Iq [c]:: B D. B K [d]::) B G. B F. [e]quare B G, B T,
c 3 *hujus.* B F ſunt $\div\div$. [f]unde B G. B T :: B G $\pm$ B T. B T $\pm$ B F :: T G. T F
d 4. 6. [d]:: T Z. T I. [a]eſt autem D G. D Z :: B G. B T. [g]Ergo D G (D A).
e 20. 6. D Z :: T Z. T I. *Q.E.D.*
f 19. 5.
g 11. 5.

Prop.

Prop. V.

Si portio A B G *contenta sub recta & parabola; & ab* A *ducatur diametro parallela* Z A; *à G verò sectionem tangens in* G, *nempe* G Z: *siquidem in trigono* Z A G *ducatur aliqua* (KL) *parallela* A Z; *ducta* (KL) *in eadem ratione secabitur à parabola, ac* A G *à ducta; homologa verò erit pars* (AK) *ipsius* AG *ad* A *ductæ parti* (KH,) *quæ ad* A G. Fig. 197.

Sit D B diameter parabolæ, & producantur D B E, G B M. Et ob D B [a] = B E, [b]erit K I = I L; [c]item K I. I H :: A D. D K; & permutando K I. A D :: I H. D K :: [d]K I ± I H. A D ± D K :: K H. A K. [e]ergo 2 K I. 2 A D (hoc est K L. A G) :: K H. A K [d] :: KL—KH. A G—AK :: HL. KG; permutandóq; KH. HL :: AK. KG. *Q.E.D.*
Coroll. [f]K L. K H :: A G. A K.

a 2 *hujus.* b *cor.* 4. 6. c 4 *hujus.* d 19. *vel* 12. 5. e 15. 5. f 4, & 18. 5.

Prop. VI.

Intelligatur verò illud (quod & in speculatione proponitur conspiciendum) in (plano) recto ad horizontem, & in linea A B; *dein quæ sunt ad easdem partes cum* D *concipiantur deorsum, quæ verò in adversas sursum; Triangulum verò* B D G *sit rectangulum, habens rectum ad* B *angulum, & latus* B G *æquale dimidio jugi, videlicet ut æquetur* BA *ipsi* B G; *suspendatur verò triangulum ex punctis* B, G; *suspendatur verò & aliud spatium* Z *ab altera parte jugi ad* A; *& æquiponderet spatium* Z *suspensum ad* A *trigono* B G D, *in situ quo jam ponitur: dico spatium* Z *trigoni* B D G *tertiam esse partem.* Fig. 198.

Sit enim B E = $\frac{1}{3}$ B G; ducatúrque E C ad B D parallela; itaq; centrum gr. trigoni G B D [a]est in E C, & hoc suspensum ab E consistet ipsi Z æquiponderans; quare triang G B D. Z [b]:: (A B. B E :: G B. B E ::) 3. 1. *Q.E.D.*
Conversè. Si Z = $\frac{1}{3}$ triang BDG, æquiponderabunt Z, & BDG.

a 3 *cor.* 14. 1. *de æquip.* b 6 & 7. 1 *de æquip.*

Prop. VII.

Sit rursus linea A G *jugum, medium verò ipsius sit* B; *& suspendatur ad* B *trigonum* G D H; *sit verò trigonum* G D H *ambligonium, habens basim* D H, *altitudinem verò parem dimidio jugi* (B G); *& suspendatur trigonum* G D H *è punctis* B, G; *spatium verò* Z *suspensum ad* A *æquiponderet triangulo* G D H *sic habenti ut nunc jacet: similiter* Fig. 199.

militer de monstrabitur spatium Z tertiam esse partem trigoni G D H.

a *conv.* 6 *huj.* b 2 *cor.* 7. *de de æquip.* c *const.*

Nam spatio Z adjiciatur E $= \frac{1}{3}$ triang B D G; [a] quapropter E æquiponderat trigono B D G; [b]ergo Z + E æquiponderat toti B H G. quare 3 Z + 3 E = triang B H G; unde cùm 3 E [c] = triang B D G; erit 3 Z = D H G. *Q.E.D.*

Prop. VIII.

Fig. 200.

Sit jugum A, *medium verò ipsius* B; *& suspendatur ad* B *trigonum rectangulum* G D E, *rectum habens angulum* E; *& suspendatur è jugo secundum* G E; *spatium verò* Z *suspendatur ad* A, *& æquiponderet ipsi* G D E *sic habenti ut nunc jacet*; *quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trigonum* G D E *ad spatium* C: *dico spatium* Z *trigono* G D E *minus esse, sed ipso* C *majus.*

a 6 & 7. 1 *æquip.* b 14. 5. c 8. 1. 5. d *hyp.* e 10. 5.

Sit trigoni E G D centrum gr. in perpendiculari H F; [a] quare Z triang E G D :: H B. B A. [b]ergo Z ⊐ triang E G D. Item H B. B A [c] ⊏ E B. B A [d]:: C. triang E G D; adeoque Z. E G D. ⊏ C. E G D. [e] ergo Z ⊏ C.

Prop. IX.

Fig. 201.

Sit rursus jugum quidem A G, *medium verò ejus* B, *trigonum verò* G D C *ambligonium, basin quidem habens* D C, *altitudinem verò* E G; *& appendatur è jugo secundum* G E; *spatium verò* Z *dependeat ab* A, *& æquiponderet trigono* G D C, *sic habenti ut modò ponitur*; *quam vero rationem habet* A B ad B E, *hanc habeat trigonum* G D C *ad* L: *dico ipsum* Z *majus quidem esse ipso* L, *minus verò ipso* G D C.

Demonstratur ut præcedens.

Prop. X.

Fig. 202.

Sit rursus A B G *quidem jugum, & medium ejus* B; *trapezium verò* B D C H, *angulos quidem ad puncta* B, H *rectos habens*, *latus verò* C D *inclinans versus* G; *& quam habet rationem* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* B D C H *ad* L; *suspensum verò sit trapezium* B D C H *è jugo ad* B H; *item suspendatur spatium* Z *ad* A, *& æquiponderet trapezio* B D C H, *ita se habenti ut jacet*: *dico spatium* Z *minus esse ipso* L.

Nam

Nam [a]ſit centrum trapezii B D C H in recta E F ad A G perpendiculari: éſtque trap B D C H. Z (:: [b]A B. B E) [c]⊏ (A B. B H [d]::) trap B D C H. L. [e]ergo Z ⊐ L. *Q.E.D.*

a 15.1 *æquip.*
b 6 & 7 *æquip.*
c 8. 5.
d *hyp.*
e 10. 5.

Prop. XI.

Sit rurſus jugum quidem A G, *& medium ipſius* B; *ſit verò trapezium* C D T R *habens quidem latera* C D, T R *tendentia ad* G, *ſed ipſa* D R, T C *perpendicularia ad* B G; *& cadat* D R *in* B; *quam verò rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* C D T R *ad* L; *trapezium verò* C D T R *ſuſpendatur ex jugo ad* B H; *&* Z *ex* A, *ac æquiponderet* Z *trapezio* C D T R, *ſic habenti ut modò jacet: ſimiliter ac priùs demonſtrabitur ſpatium* Z *minus ipſo* L. Fig. 203.

Imò planè ſimiliter ac priùs; quid ergo plura?

Prop. XII.

Sit rurſus jugum quidem A G, *medium verò ejus* B; *ſit verò trapezium* D E H C, *ad puncta quidem* E, H *rectos habens angulos, latera verò* C D, E H *vergentia ad* G; *& quam quidem rationem habet* A B *ad* B H, *hanc habeat trapezium* D E H C *ad* M; *quam verò rationem habet* A B *ad* B E, *hanc habeat trapezium* B E H C *ad* L; *ſuſpendatur verò trapezium* D E H C *è jugo ad* E H; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio ita ſe habenti, ut nunc ſubjicitur: dico* Z *majus eſſe ipſo* L, *minus verò ipſo* M. Fig. 204.

[a]Sit enim trapezii D E H C centrum gr in K N ad E D parallela; hinc trap D E H C. Z ([b]:: A B. B K) [c]⊐ (A B. B E [d]::) trap D E H C. L; [e]quare Z ⊏ L. Item trap D E H C. M ([d]:: A B. B H) [c]⊐ (A B. B K [b]::) trap D E H C. Z; [e]unde Z ⊐ M. Quæ *E. D.*

a 15. 1 *æquip.*
b 6 & 7. 1 *æquip.*
c 8. 5.
d *hyp.*
e 10. 5.

Prop. XIII.

Sit rurſus jugum quidem A G, *& medium ejus* B, *trapezium verò* C D T R, *ita ut latera* C D, T R *vergant ad* G; *ſed* D T, C R *perpendicularia ſint ad* B G; *ſuſpendatur verò è jugo ad* E H; *ſpatium verò* Z *ſuſpendatur ex* A, *& æquiponderet trapezio* C D T R *ſic habenti ut nunc ponitur; & quam quidem habet rationem* A B *ad* B E, *illam habeat trapezium* C D T R *ad ſpatium* L; *quam verò rationem* Fig. 205.

A B

habet A B *ad* B H, *hanc habeat idem trapezium ad* M : *planè similiter ac in præcedenti oſtendetur* Z *majus quidem quàm* L, *minus verò ipſo* M.

Demonſtratur prorſus ut proximè antecedens.

Prop. XIV.

Fig. 206. *Sit portio* B K G *comprehenſa ſub recta, & parabola; ſit verò primùm* B G *ad rectos diametro, ducaturque à puncto* B *diametro parallela* B D; *à* G *verò ipſa* G D *tangens parabolam in* G; *enimverò erit* B G D *triangulum rectangulum; dividatur autem* B G *in quotcunque partes* B E, E Z, Z H, H I, *& à ſectionibus ducantur diametro parallelæ* E S, Z T, H V, I X; *à punctis verò* (F, K, P, O) *ad quæ ipſæ ſecant parabolam, conjungantur rectæ ad* G, *& producantur: dico triangulum* B G D *trapeziorum quidem* C E, L Z, M H, N I, *& trigoni* X I G *minus eſſe quàm triplum; trapeziorum verò* Z F, H K, I F, *& trianguli* I O G *majus eſſe quàm triplum.*

Sit A B = B G, & ab A ſuſpendantur α, β, γ, δ, ε æquiponderantia trapeziis D E, S Z, T H, V I, & trigono X I G, ſingula ſingulis,
a 2 *cor.* 7. *æquip.* & [a] cuncta proinde cunctis ſimul. Eſt verò G B. (A B). B E [b] ::
b *cor.* 5 *hujus.* E S. E F [c] :: triang E S G. E F G. Item E S. E F * :: B D. B C [c] :: tri-
c 1. 6. ang B D G. B C G. [d] quare B D G. *B* C G :: E S G. E F G [e] :: B D G
* *cor.* 4. 6. — E S G. B C G — E F G (hoc eſt) :: trap D E. C E; [e] ergo trap
d 11. 5. C E $\sqsubset \alpha$. Simili diſcurſu eſt A B. B Z :: trap S Z. L Z; [f] ac inde
e 19. 5. trap L Z $\sqsubset \beta$, & A *B*. *B* H :: trap T H. M H; [f] ideóque trap M H
e 10. *hujus.* $\sqsubset \gamma$; item A B. B I :: trap V I. N I, atque idcirco trap N I $\sqsubset \delta$;
f 12. *hujus.* ac denique A B. B I :: triang X I G. O I G; & proinde triang X I G
g 8 *hujus.* $\sqsubset \varepsilon$; quare junctim C E + L Z + M H + N I + X I G $\sqsubset \alpha$
h *ut priùs.* $+ \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$. Porro quoniam trap S Z. F Z [h] :: S E. F E [b] :: A *B*.
B E; [f] erit trap F Z $\sqsupset \beta$, ſimilitérque trap K H $\sqsupset \gamma$, & trap P I $\sqsupset$
δ, & triang O I G $\sqsupset \varepsilon$; ac denique trap F Z + K H + P I +
k 6 *hujus.* O I G $\sqsupset \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$: cùm itaque [k] ſit $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon =$
$\frac{\text{triang } D\,B\,G}{3}$, liquet propoſitum.

Prop. XV.

Fig. 207. *Sit rurſus portio B* K G *comprehenſa ſub recta, & parabola, verùm B G non ſit diametro normalis; eſt autem neceſſe vel illam quæ à puncto B diametro parallela ducitur ad eaſdem partes ſectioni, vel iſtam*

quæ

quæ à G, obtuſum facere angulum ad B G; obtuſum angulum faciat quæ ad B, & à B ducatur diametro parallela B D; & à G ipſa G D parabolam contingens in G, & dividatur B G in quotcunque partes B E, E Z, Z H, A I, I G; & ab E, Z, H, I ducantur diametro parallelæ E S, Z T, H V, I X, & à punctis quibus hæ ſecant parabolam conjungantur rectæ ad G, & extendantur: enimverò & nunc dico triangulum B D G trapeziorum quidem C E, L Z, M H, N I, & trianguli X I G minus eſſe quàm triplum; ipſorum verò Z F, H K, I P, & trianguli G O I majus eſſe quàm triplum. Fig. 209.

Eadem prorſus eſt demonſtratio quæ præcedentis, niſi quòd hic pro 10 & 12 hujus, adhibentur 11 & 13. quorſum itaque ταυτολογεῖν.

Prop. XVI.

Sit rurſus portio B X G comprehenſa ſub recta, & parabola; & per B quidem ducatur B D parallela diametro; à G verò ipſa G D tangens parabolam in G, ſit verò ſpatium Z tertia pars trigoni B D G: dico portionem B K G æquari ſpatio Z. Fig. 208.

Si fieri poteſt, ſit primò Z ⊐ port B K G. Secetur tum B D in partes æquales B C, C Q, Q R, R Y, Y D, ita ut ſit triang B G Z ⊐ port B K G—Z; unde erit Z ⊐ port B K G—triang B G Z. conjungantur G C, G Q, G R, G Y occurrentes parabolæ punctis F, K, P, O; per quæ ducantur E S, Z T, H V, I X ad B D parallelæ. (Liquet verò ipſas B E, E Z, Z H, H I, I G etiam æquari; * ob DC. CB :: SF. FE[a] :: GE. EB; & DQ. QB * :: TK KZ[a] :: GZ. Z B &c.) * cor. 4. 6. a 4 hujus.

Quia verò B C = C Q, *erit E F = F L; [b]unde trap F Z = trap F K; item ob Zφ * = K M, [b]erit trap φ H = trap K P; pariterque trap ψ I = trap P O, & triang I G X [b]= triang O G X, ergo triang B G C = trap B F + F K + K P + P O + triang O G K. ergo Z ($\frac{1}{3}$ triang B D G) ⊐ (port B K G — : trap B F + F K + K P + triang O G X ⊐) trap F Z + K H + P I + triang O I G; contra 14 vel 15 hujus. b 37. 1. & 2 ax. 1.

Sin dicatur Z ⊏ port B K G, ſit triang B G C ⊐ Z—port BKG; unde portio B K G + triang B G C ⊐ Z, hoc eſt port B K G + trap B F + F K + K P + P O + triang O G X ⊐ $\frac{1}{3}$ triang B D G, ergo fortius erit trap C E + L Z + M H + N I + triang X I G ⊐ $\frac{1}{3}$ triang B D G; itidem contra 14 aut 15 hujus.

Quin itaque potiùs erit Z = port BKG. *Q.E.D.*

Prop. XVII.

Fig. 209. *Hoc demonstrato, liquet quod omnis portio* (ABC), *comprehensa sub recta, & parabola, sesquitertia est trianguli* (ABC) *habentis basin eandem cum portione, & altitudinem æqualem.*

a 2 *hujus.* b 1. 6. c 20. 6. d 16 *hujus.* Ducatur tangens CF, cui occurrat diameter DB in E, eique parallela AF; & ob DB [a]= BE, [b]erit triang DEC ([c]id est $\frac{1}{4}$ triang AFC) = 2triang DBC [b]= triang ABC. atqui [d] est port ABC = $\frac{1}{3}$ triang AFC; ergo triang ABC port. ABC :: $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 4 :: 1. $1\frac{1}{3}$. *Q.E.D.*

Hoc quod artificio quasi mechanico sic adstruxerat, dehinc methodo prorsus Geometricâ demonstratum exhibebit.

Definitiones

Portionum sub recta & curva comprehensarum

1. Basin quidem appello rectam istam;

2. Altitudinem verò maximam perpendicularem à curva linea demissam in basin portionis;

3. Verticem verò punctum, à quo maxima perpendicularis ducitur.

Prop. XVIII.

Fig. 210. *Si in portione* (ABC), *quæ continetur sub recta & parabola, à media base ducatur recta* (DB) *diametro parallela; vertex erit portionis punctum* (B), *in quo ducta diametro parallela* (DB) *secat parabolam.*

a 1 *hujus.* b 2 *def. ad* 17. *hujus.* Recta EF contingat parabolam in B, & demittatur BG ad AC perpendicularis; & quia EF est [a]parallela basi AC, liquet BG esse maximam perpendicularem earum quæ à sectione duci possunt in AC; & [b]proinde B fore verticem portionis ABC. *Q.E.D.*

Prop. XIX.

Fig 211. *Si in portionem* (ABC) *comprehensam sub recta & parabola ducantur duæ rectæ* (DB, FE) *parallelæ diametro, illa quidem* (DB) *à media base, hæc verò* (FE) *à media dimidia; erit ducta à media base*

base (D B) *ducta à media dimidia* (F E) *sesquitertia longitudine.*

Nam ducatur (E G) parallela basi A C; & quia B D. B G [a] :: a 3 *hujus.*
D Aq. G Eq [b] :: D Aq. D Fq [c] :: 4. 1, erit [d] convertendo B D. G D b 34. 1. c 20 *hujus.*
([b] E F) :: 4. 3 :: $1\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.* d *cor.* 19. 5.

Cor. B D. B G :: 4. 1.

Prop. XX.

Si portioni (A B C) *compeehensæ sub recta & parabola inscribatur triangulum* (A B C) *eandem basin habens cum portione, eandemque altitudinem, majus erit inscriptum* (A B C) *quàm dimidium portionis.* Fig. 212.

Per verticem B ducatur tangens E F ([a] quæ basi est parallela), cui occurant A E, C F diametro parallelæ; liquétque pgr A E F C [b] (hoc est 2 triang A B C) majus esse portione A B C. a 1 *hujus.* b 41. 1.

Coroll. Hinc, liquet, quòd huic portioni possibile est polygonum inscribere, ita ut relictæ portiones minores sint omni proposito spatio.

Nam si portionibus A G B, C H B inscribantur triangula, [a] hæc auferent plusquam semisses portionum A H B, C H B; & si in reliquis id fiat, idem continget. [b] quare tandem ad reliquias dato spatio minores perveniatur necesse est. a 20 *hujus.* b 1. 10.

Prop. XXI.

Si portioni (A B C) *comprehensæ sub recta & parabola inscribatur triangulum* (AB C) *eandem basin habens cum portione, eandemque altitudinem; inscribantur verò & alia triangula* (A H B, C F B) *relictis portionibus* (A H B, C F B), *easdem bases habentia cum portionibus, eandemque altitudioem; singulorum triangulorum* (A H B, CFB) *relictis portionibus inscriptorum octuplum est triangulum* (ABC) *toti portioni inscriptum.* Fig. 213.

Nam quia G I. D B [a] :: A I. A B [b] :: 2. 4; & D B. G H [c] :: 4. 3; erit ex æquo G I. G H :: 2. 3; adeóque G I = 2 I H; [d] quare triang I A G = 2 triang H A I; ideóque triang B A D [e] (4 I A G) = 8 triang I A H. [f] quare triang A B C (2 B A D) = 8 triang A H B. *Q.E.D.* a 4. 6. b *const.* c 19. *hujus.* d 1. 6. e 20. 6. f 15. 5.

Coroll. Triang A H B + C F B = $\frac{1}{4}$ triang A B C.

Prop. XXII.

Fig. 214. *Si sit portio (A B C) comprehehensa sub recta & parabola, & spatia ponantur quotcunque (X, Y, Z) deinceps in quadrupla ratione; sit verò spatiorum maximum (X) æquale triangulo (ABC) basin habenti eandem cum portione, & altitudinem eandem; simul omnia spatia minora erunt portione (ABC).*

Portionibus A H B, C F B inscribantur trigona A H B, C F B portionibus istis æquè alta; & altera pari modo reliquis portionibus A P H, C O F; H M B, F N B; constátque fore triang A H B

a cor. 21 huj. + C F B [a] = $\frac{1}{4}$ triang A B C [b] = $\frac{1}{4}$ X = [b] Y; item pariter fore

b hyp. triang A P H + H M B [a] = $\frac{1}{4}$ A H B; & triang C O F + F N B

c 12. 5. [a] = $\frac{1}{4}$ C F B; [c] adeóque triang A P H + H M B + C O F + F N B

d 15. 5. = $\frac{1}{4}$ A H B + $\frac{1}{4}$ C F B [d] = $\frac{1}{4}$ Y [b] = Z: ergo quum ista trigona simul omnia deficiant à portione A B C, erunt simul X, Y, Z eadem minora.

Prop. XXIII.

D. C. B. A. *Si componantur magnitudines (D, C, B, A) deinceps in quadrupla*

64. 16. 4. 1. *ratione; omnes magnitudines, insuperque minimæ (A) pars tertia eidem summæ adjecta, erunt sesquitertiæ maximæ (D).*

a hyp. Nam quia D [a] = 4C, erit $\frac{1}{3}$ D = $\frac{4}{3}$ C = C + $\frac{1}{3}$ C; similitérque $\frac{1}{3}$ C = B + $\frac{1}{3}$ B; & $\frac{1}{3}$ B = A + $\frac{1}{3}$ A; est ergo $\frac{1}{3}$ D = C + B + $\frac{1}{3}$ B = C + B + A + $\frac{1}{3}$ A; quare D + C + B + A + $\frac{1}{3}$ A. D :: 1 + $\frac{1}{3}$. 1. *Q.E.D.*

Coroll. Hinc, figura portioni inscripta (juxta 22 hujus) minor est quàm $\frac{4}{3}$ trigoni A B C.

Fit enim (ibidem) è magnitudinibus X, Y, Z ∻ in ratione 4 ad 1, quarum maxima X æquatur triangulo A B C.

Scholium.

Liquidiùs id deducatur ex hac universali propositione.

Sint quotcunque quanta proportionaliter decrescentia in ratione α ad β; eorum sit extremum ω, & summa dicatur Z; erit Z = $\frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$.

Nam

Nam ut primum ad secundum, *ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia, hoc est $\alpha . \beta :: Z - \omega . Z - \alpha$; quare (extrema & media in se ducendo) est $\alpha Z - \alpha\alpha = \beta Z - \beta\omega$; & (transponendo) $\alpha Z - \beta Z = \alpha\alpha - \beta\omega$; & (dividendo utrinque per $\alpha - \beta$) est $Z = \frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$. *12. 5.

Hinc si $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $Z = \frac{4^{\alpha} - \omega}{\alpha}$; ut in hac prop. 23.

Adnotetur autem, quòd si progressio continuetur ad infinitum, scilicet ut ω sit $= 0$ nihil; tunc evanescente termino $\beta\omega$, liquet fore $Z = \frac{\alpha\alpha}{\alpha - \beta}$.

Hinc si $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $Z = \frac{4}{3} \alpha$.

Hinc autem brevissimè constat *Archimidea* quadratura; unáque plures innumeræ similiter eliciuntur.

Prop. XXIV.

Omnis portio (A B C) *comprehensa sub recta & parabola, sesquitertia est trianguli* (A B C) *eandem basin habentis cum ipsa, & altitudinem æqualem.* Fig. 214.

Sit $Z = \frac{4}{3}$ triang A B C; &, si fieri potest, sit primò port A B C $\sqsubset Z$: [a]inscribatur portioni figura A P H M B N F O C trigonis constans, (ut in præcedentibus) ac ita ut sit port A B C — fig A P H M B N F O C $\sqsupset$ port A B C — Z; est ergo $Z \sqsupset$ fig A P H M B N F O C; [b]hæc autem figura minor est quàm $\frac{4}{3}$ triang A B C; ergo magis $Z \sqsupset \frac{4}{3}$ triang A B C, contra hypothesin. a cor. 20 huj. b cor. 23 huj.

Sit jam port A B C $\sqsupset Z$; & concipiatur series magnitudinum (quarum summa vocetur S) progrediens in quadrupla ratione, (incipiens utique à triangulo A B C, & decrescens in ω) [c]ita ut sit $\omega \sqsupset Z$ — port A B C: cùm igitur sit $S + \frac{\omega}{3}$ [d] $= Z$; erit $\omega \sqsupset S + \frac{\omega}{3}$ — port A B C; unde liquebit esse portionem A B C $\sqsupset$ S. [e] Quod est absurdum. c cor. 20. huj. d 23 hujus. e 22 huj.

Quare potiùs est port A B C $= Z = \frac{4}{3}$ triang A B C.

Coroll.

Coroll.

Hinc

a 41. 1. b 24 hujus. 1. Si ductâ F G per B ad A C parallelâ compleatur parallelogrammum A G; erit pgr. A G. port. A B C :: 3. 2. Nam pgr A G. triang A B C [a]:: 6. 3; & triang A B C. port A B C [b]:: 3. 4. quare ex æquo pgr A G. port A B C :: 6. 4 :: 3. 2.

2. Complementum A Y B F est $\frac{1}{2}$ semiportionis A B D.

3. Hinc facilè efficitur quadratum æquale portioni. Nam producatur D B in E, ut sit B E $= \frac{1}{3}$ B D; vel E D $= \frac{4}{3}$ B D; & connectantur E A, E C; liquet trigonum A E C æquari portioni ABC;

*14. 2. unde si *fiat trigono A E C æquale quadratum, liquet factum esse.

4. Itaque facilè ad datam rectam applicatur parabolica portio ad illam scilicet applicato triangulo A E C.

De ÆQVIPONDERANTIBVS, LIBER SECUNDUS.

Prop. I.

SI duo sint spatia (AB, CD) *contenta sub recta, & parabola, *quam possumus ad datam rectam applicare; ex utroque ipsorum compositi magnitudinis centrum gravitatis* (H) *erit in recta connectente ipsorum centra gravitatis* (E, F), *dividens dictam rectam* (E, F), *ut ipsius partes* (EH, FH) *reciprocè eandem rationem habeant cum spatiis* (AB, CD). Fig. 216. * cor. 24. de qu. parab.

Accipe FG, FK pares ipsi EH (unde EG = FH), & fiat EL [a] = EG (FH). ad GL applicentur pgr [b] GO, GP utrumvis æquale dimidio AB, & productis OR, PQ compleatur pgr QM. Estque parab CD. parab AB [c]:: EH. FH [d]:: 2EH ([e] 2GF). 2FH (2EG) [e]:: GK. GL [f]:: QN. QP [g]:: pgr QM. QO [c] (parab AB) [h] unde parab CD = pgr QM. Cùm igitur [k] sit E centrum pgr[i] QO, & F centrum pgr[i] QM ([e] ob EG = EL, & FG = FK) sitque QM. QO :: EH. FH; liquet propositum.

a 3. ax. 1.
b cor. 24. de qu. parab.
c 6 & 7. 1 de æquip.
d 15. 5.
e const.
f 34. 1.
g 1. 6.
h 14. 5.
k 9. 1 de æquip.

Manifestum,

Si portioni (ABC) *sub recta, & parabola contentum, inscribatur triangulum* (ABC), *eandem basim habens cum portione, & æqualem altitudinem; & rursus reliquis portionibus inscribantur triangula* (AEB, CFB) *easdem bases habentia cum portionibus, & æqualem altitudinem; & semper reliquis portionibus triangula inscribantur eodem modo* (AME, ESB, CNF, FTB &c); *orta figura* (AMESBTFNC) *portioni evidenter* inscribi dicatur. Liquet verò, quòd sic inscriptæ figuræ angulos connectentes* (ST, EF, MN), *quæque proximè sunt à vertice portionis* (B) *quæque deinceps parallelæ erunt portionis basi* (AC), *& bisecabuntur à portionis diametro* (BD); *& diametros secabunt in rationes numerorum deinceps imparium, uno dicto illâ* (BY) *quæ ad verticem portionis.* Fig. 217.

*Notabiliter, γνωρίμως.

Hoc

Hoc demonstrandum est in *Ordinibus.

* *Librum innuit, cui inscriptum* τάξεις, (Ordines *vel* Series), *de quo nihil admodum constat.*

a 1 *de qu. par.* b 4. 6. c 15.5. & 7.5. d 11.5. e 14. 5. f 4 *de qu.par.* g 2 *ax.* 1. h 33. 1. k *cor.* 19. *de quad. parab.*

Nam (ductis M P, E H, N R, F L diametro parallelis) erit A G = G B; & [b] ideo A H = H L; [a] similitérque A I = I E, ac [b] ideo A P = P H; & sic porro A D in partes æquales dividetur, & pariter C D in totidem æquales; [c] unde A P = CR. Cùm igitur sit AP.PO [b]:: AD.DB [b]::CD. DB::CR.RQ [d]::AP.PO. [e] Erit RQ = PO, item PO.OM [f]:: DC. DP [e]:: AD.DR [f]:: RQ. QN [d]:: PO. OM, [e] quare QN = OM, [g] itaque RN = PM, [h] & MN ipsi AC parallela est. Simili discursu EF, & ST ipsi AC parallelæ ostendentur; [a] unde MV = VN, & EX = XF &c. Denique BD. BX [k]:: 4. 1. Et simili modo, BX. BY :: 4. 1; unde si BY ponatur 1, erit YX = 3. (BX = 4, BD = 16, XD vel EH = 12) item HG. DB ([b] AH. AD) :: 8. 16. unde EG = 4: ducatur MZ ad AB parallela, & ob EG. EZ [k]:: 4. 1; erit ZG (MO) = 3, & OP ($\frac{1}{2}$ HG) = 4, ergo MP (VD) = 7, & proinde XV (XD—VD) = 5. Ex quibus constat de omnibus. *Q.E.D.*

Coroll. 1. EG = FK. unde
2. GK prrallela ad EF.
3. EG = BX = $\frac{1}{4}$ BD.

Prop. II.

Fig. 218.

Si verò portioni (ABC) *comprehensa sub recta, & rectanguli coni sectione rectilineum* (AMESBTFNC) *evidenter inscribatur, inscripti centrum gravitatis erit in portionis diametro* (BD).

a *lemm. præc.* b 15, & 13. 1 *de æquip.* c 7 *cor.* 7. 1 *de æquip.*

Nam connectantur anguli rectis MN, EF, ST, [a] hæ parallelæ sunt basi AC, & bisecantur à diametro BD; [b] quare trapeziorum AN, MF, ET, & trigoni SBT singula centra gravitatis sunt in diametro BD. [c] ergo & compositi ex his centrum gr. est in eadem. *Q.E.D.*

Lemma.

Fig. 219. 220.

Sint trapezia DE, *de*, & MG, *mg*, in quibus DM. MN :: *dm. mn.* & DA. ME :: *da. me.* Atque ME. NG :: *me. ng.* erit trap. DE. MG :: trap *de. mg.*

Producantùr AEP, EGO, *aep*, *ego*, ut occurrant ipsis DN, *dn.*

Estquo

Estque P D. P M [a]:: D A. M E [b]:: *da. me* [a]:: *pd. pm* [c]:: P D. P M. a 4. 6.
ergo dividendo P M. M D :: *pm. md.* [b] item M D. M N :: *md. mn.* b *hyp.*
ergo ex æquo P M. M N :: *pm. mn* ; item ob M E. N G [b] :: *me. ng* ; c 11. 5.
[a]erit M N. M O :: *mn. mo* ergo rursus ex æquo P M. O M :: *pm. om* ; [d]hoc est triang P M E. O M E :: triang *pme. ome.* item triang d 1. 6.
O M E. O N G [c]= M E. N G, bis [b] = *me. ng*, bis [c] = triang *ome. ong* ; ergo permutando triang O M E. *ome* :: triang O N G. *ong* [f]:: e 20. 6. f 19. 5.
trap M G. *mg* ; & rursus permutando triang O M E. trap M G :: triang *ome.* trap *mg* ; ergo ex æquali triang P M E. trap M G :: triang *pme.* trap *mg* ; quinimò similiter trap D E. triang P M E :: trap *de.* triang *pme* ; ergo denuo ex æquo trap D E. M G :: trap *de. mg.* *Q.E.D.*

Coroll. Trap D E. triang O M E *:: trap. *de.* triang *ome.* * 22. 5.

Lemma 2.

Si A. B :: D. E. & A. C :: D. F. Erit B. C :: E. F. & A. B + C :: D. E + F. Fig. 221.

Nam permutando B. E (A. D) :: C. F. & rursus permutando B. C E. F. Item B + C. E + F [a]:: (B. E ::) A. D. ergo permutando A. B + C :: D. E + F. a 12. 5.

Quòd si sit A. B + C :: D. C + F ; & A. B :: D. E. erit B. C :: E. F. & A. C :: D. F. Item si fuerit B. C :: E. F. & A. B + C :: D. E + F. Erit A. B :: D E. & A. C :: D. F. Quæ ex simili rationum permutatione, inversione &c. facilè eliciuntur.

Prop. III.

*Si duarum portionum *similium* (A B C, *abc*) *sub recta, & parabola comprehensarum, utrique rectilineum inscribatur evidenter ; habeant verò inscripta rectilinea latera mutuò æqualia multitudine, centra gravitatum* (Y, *y*) *similiter secant diametros portionum* (B D, *bd*). Fig. 222. 223. * Not.

Angulos connectant rectæ E F, G H, K L, *ef, gh, kl* ; sintque Q, R centra trapeziorum A F E H, & S compositi ex illis A H ; & similiter *q, r, s* sint centra ipsorum *af, eh, ah* : item sit X centrum compositi ex trapezio G L, & trigono K B L, & *x* ipsius *gl* + triang *kbl.* a 3 *de qu par.*
Jam ob A Dq. E Mq [a]:: B D. B M [b] :: *bd. bm* :: *adq emq* ; erit A D. E M ([c]A C. E F) :: *ad. em* ([c]*ac. ef*). [d] ergo 2 A C + E F. 2 E F + A C :: 2 *ac* + *ef*. 2 *ef* + *ac*. hoc est M Q. Q D :: *mq. qd* ; ergo b *hyp. & manif. hujus.* c 15. 5. d 15. & 18. 5.

e 15.1. *æquip.* componendo M D. Q D :: *md. qd.* item B D. M D :: *bd. md.* itaque
f 12. 5. ex æquo B D, Q. D :: *bd. qd*; paritérque B D. Mq :: *bd mq.* Simili
g 6 & 7 1 *æquip.* discursu B D. R M :: *bd. rm*; [f]quare B D. R Q :: *bd. rq.* Item R S.
h 1. *lem.* 2 *huj.* S Q [g]:: trap A F. E H [h]:: trap *af. eh* :: *rs. sq.* ergo ex æquo BD. SQ
k 2 *lem.* 2 *huj.* :: *bd sq*; & [k] proinde BD. S D :: *bd. sd.* Simili discursu B D. B X
l *cor.* 1 *lem.* 2 *hujus.* :: *bd bx*; & proinde B D. X S :: *bd. xs.* Quia verò trap A F. E H
[h]:: *af. eh.* erit componendo A H. E H :: *ab. eh.* Item trap E H. G L
[h]:: *ab. gl.* & trap G L. triang K B L [l]:: *gl. kbl.* ergo ex æquo A H.
G L :: *ab. gl.* & A H. K B L :: *ab. kbl.* & [f] idcirco A H. G L +
K B L [g](X Y. YS) :: *ab gl + kbl.* ([g]*xy. ys*). & cùm priùs fuerit
B D. X S :: *bd. xs*; [k]erit B D. X Y :: *bd. xy*; [k] ideóque etiam B D.
B Y :: *bd. by*; & B D. Y D :: *bd. yd.* ac denique dividendo B Y. Y D
:: *by. yd.* *Q.E D.*

Not. Portionum similitudinem intelligit hic Author, non strictissimam, at latiore sensu, juxta quem omnia triangula, & omnes figuræ Analogicæ (in quibus nempe si diametri à vertice proportionaliter dividantur, per divisiones ductæ ordinatæ proportionales fiunt) sibimet assimilari dicantur; unde quævis duo parabolica segmenta similia esse supponit hic discursus; id quod probè, quò scrupuli tollantur, animadversum oportet.

Prop. IV.

Fig. 224. *Omnis portionis* (A B C) *comprehensa sub recta, & parabola, centrum gravitatis est in portionis diametro* (B D).

Si neges, esto E centrum portionis extra B D; ducatur E F ad B D
a 1. 6. parallela; sitque C F. F D :: C A. G A [a]:: triang CBA. triang GBA.
b *cor.* 20. *de quad. parab.* [b]tum portioni inscribatur figura evidens (quæ vocetur X), ita ut port
A B C—X $\sqsupset$ triang G B A. Inscriptæ autem figuræ centrum [c] sit
c 2 *hujus.* H, & connexæ H E occurrat C K ad B D parallela. Estque X port
d 8. 5. A B C—X [d] $\sqsubset$ triang A B C. port A B C—X [d] $\sqsubset$ triang A B C.
e *priùs.* A B G ([e]:: C F. D E :: K E. H E.) Sit M E. H E :: X. port A B C
f 10. 5. —X; quare M E. H E $\sqsubset$ K E. H E; & [f] ideo M E $\sqsubset$ K E, &
g 8. 1. *de æqu.*
h 9 *post.* 1. *æqu.* M [g]centrum reliquarum portionum erit extra sectionem. *Q.E.A.*

Coroll. Hinc si ex tota portione auferatur trigonum A B C, [g]centrum reliquarum portionum est in B D, & sic porro, ablatis aliis trigonis figuræ inscriptæ.

Lemma.

Lemma.

Si L R. R P ⊏ L S. S P erit L R ⊏ L S.

Nam componendo L P. R P ⊏ L P. S P. [a]ergo R P ⊐ S P. & proinde L R ⊏ L S. a 10. 5.

Inversè, si L R ⊏ L S. erit L R. R P ⊏ L S. S P.

Nam L R. R P [b]⊏ L S. R P [b]⊏ L S. S P. b 8. 5.

Prop. V.

Si portioni (ABC) *comprehensæ sub recta, & parabola, inscribatur rectilineum* (A E B F C) *evidenter, totius portionis centrum gravitatis* (S) *propius est vertici portionis* (B), *quàm inscripti rectilinei centrum* (R). Fig. 225.

Sit P centrum trigoni A B C, & reliquarum portionum A E B, C F B centra sint M, N; trigonorum verò A E B; C F B centra sint I, K, & connectantur M N, I K, G H; liquet O esse centrum port A E B + C F B. (quia hoc est in utraque [a]M N,[b]B D), & L esse centrum triang A E B + C F B; & quia A G = $\frac{1}{2}$ A B, & C H = $\frac{1}{2}$ C B, [c]erit D Q = $\frac{1}{2}$ D B; & D P ([d]$\frac{1}{3}$ D B) ⊐ D O; unde D P ⊐ D S (nam S [a]cadit inter O, P). Simili discursu I G ⊐ M G; quare L P ⊐ O P: cùm itaque sit L R. R P [e]:: triang A B C. triang A E B + C F B. [f]⊏ triang A B C. port A E B + C F B [e]:: O S. S P [f]⊏ L S. S P. [g]erit L R ⊏ L S; quare S est propius vertici B. *Q.E.D.* a 6 cor 7. 1. de æquip. b cor. 4. hujus. c 2. 6. d 3 cor. 14. 1 de æquip. e 6 & 7. 1 de æquip. f 8. 5. g lemm præc.

Coroll. Similiter, quò figura inscripta plura habet latera, eò centrum ejus propiùs ad verticem accedet.

Prop. VI.

Datâ portione (ABC) *comprehensa sub recta, & parabola, possibile est portioni rectilineum* (A E B F H) *evidenter inscribere, ita ut recta* (SR), *quæ est inter centra gravitatum portionis, & inscripti rectilinei minor sit quâcunque rectâ propositâ* (Z). Fig. 226.

Sit B S. Z :: triang A B C. X; & [a]inscribatur figura (A E B F C) evidenter (cujus centrum R), ita ut port A B C — fig AEBFC ⊐ X. Dico factum. a cor. 20 de qu. par.

Si fieri potest, sit S R $\left.\begin{matrix}\sqsubset \\ =\end{matrix}\right\}$ Z. éstque port A B C. port A B C —

 fig

b 8. 5. c *hyp.* fig A E F B C [b] ⊏ triang A B C. X [c] :: B S. Z. ⊏ / = { B S. S R. itaque si ponatur port A B C port A B C — fig A E B F C :: T S. S R, erit

d 8. 1 *de æqu.* T S ⊏ B S ; & T [d] centrum portionum reliquarum demptâ figurâ A E B F C erit extra B D, contra coroll. 4 hujus.

Brevius. Quo figura inscripta plura habet latera, eò propiùs accedet ad verticem ; proinde ad centrum ferè accedet, ex continuo laterum augmento

Prop. VII.

Fig. 227. Fig. 228. *Duarum similium portionum* (A B C, M N O) *comprehensarum sub rectâ, & parabola, centra gravitatum* (E, Q) *in eâdem ratione secent diametros* (B D, N P).

Si negas, esto B H. H D :: N Q. Q P (ita nempe primò ut H cadat infra E). Portioni A B C [a] inscribatur figura A F B G C, cujus centrum G, ita ut E G ⊐ E H ; & huic *similis figura inscribatur portioni M N O, cujus centrum sit T : & ob N Q. Q P ([b] :: B H. H D) [c] ⊏ (B G. G D [d] ::) N T. T P ; [c] erit N Q ⊏ N T, contra 5 hujus.

a 6. *hujus.* * *Not.* b *hyp.* c *lemm. ad* 4 *h.* d 3 *hujus.*

Quòd si dicas esse B K. K D :: N Q. Q P ; & K cadere supra E ; fiat N X. X P :: B E. E D [c] ⊏ *B* K. K D :: N Q. Q P. [c] ergo N X ⊏ N Q ; sic relabimur in primam hypothesin, quam absurdam demonstravimus.

Aliter breviùs. Cùm centra similium figurarum inscriptarum, si laterum numerus augeatur infinitè, in centra portionum desinant, & illarum centra proportionaliter dividant diametros, harum centra idem efficient.

* *Not.* Similes dicuntur inscriptæ segmentis figuræ, non juxta strictam illam, quæ initio sexti elementi definitur, similitudinem, sed propter similem inscribendi modum, qualis in apposito ad primam hujus manifesto, & in 21[a] *de quadr. parab.* describitur ; quæ certè similitudo huic fundando ratiocinio sufficit. vid *Not.* ad 3 hujus.

Prop. VIII.

Fig. 229. *Cujuscunque portionis* (A B C) *sub rectâ, & parabola contentæ centrum gravitatis* (H) *dividit portionis diametrum* (B D), *ita ut pars ejus* (B H), *quæ ad verticem, sesquialtera sit partis* (H D) *quæ ad basim.*

Portioni inscribatur figura evidens A K B L C, & portionum A K B, C L B centra sint M, N ; ac E centrum trigoni A B C ; ducantur

cantur KL, MN, FG, sitque SX $= \frac{1}{3}$ BS $= \frac{1}{12}$ BD (ob BS[a] $= \frac{1}{4}$ BD). unde BX (BS + SX) $= \frac{1}{4}$ BD + $\frac{1}{12}$ BD $= \frac{1}{3}$ BD. Item ED[b] $= \frac{1}{3}$ BD; ergo XE $= \frac{1}{3}$ BD. Porro ob BD $=$ 4KF [c]erit BH $=$ (4KM $=$) 4SQ; ergo (sublatâ SQ) est BS + QH $=$ 3SQ $=$ 3SX (BS) + 3XQ; ergo QH $=$ 3XQ. atqui 3.1[e] :: triang ABC. port AKE + CLB[f] :: QH. HE. [g]ergo XQ $=$ HE; unde XE (BX, vel DE) $=$ 5HE; & XH $=$ 4HE, & HD $=$ 6HE. Liquet igitur fore BH. HD :: 9. 6 :: 3. 2. *Q.E.D.*

a manif. hujus.
b 3 cor. 14 huj.
c 7 hujus.
d conft.
e 24. de qu. par.
f 6, & 7. 1 æqu.
g 9. 5.

Coroll.
BD. | HD :: 15. 6 :: 5. 2.
BD. | BH :: 15. 9 :: 5. 3.
BD. | HE :: 15. 1.

Lemma.

Quotlibet AB, CB, DB, EB $\div\div$; erunt excessus AC, CD, DE etiam $\div\div$ in eadem ratione. Nam ob AB. CB :: CB. DB, erit divisim AC. CB :: CD. DB; & permutatim AC. CD :: CB. DB; item ob CB. DB :: DB. EB; erit divisim CD. DB :: DE. EB; permutandóque CD. DE :: DB. EB :: CB. DB. unde liquet fore AC, CD, DE $\div\div$ in ratione CB ad DB, vel AB ad CB.

Coroll. AD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB, &c. 12, 16, 18, 5.

Prop. IX.

Si quatuor lineæ (AB, CB, DB, EB) *proportionales sint in continua proportione; & quam rationem habet minima ad excessum, quo maxima excedit minimam, hanc habens sumatur aliqua ad tres quintas excessus, quo maxima proportionalium excedit tertiam; quam verò habet rationem æqualis duplæ maximæ proportionalium, & quadruplæ secundæ, & sextuplæ tertiæ, & triplæ quartæ ad æqualem quintuplæ maximæ, & decuplæ secundæ, & decuplæ tertiæ, & quintuplæ quartæ, hanc habens accipiatur quædam ad excessum, quo maxima proportionalium excedit tertiam; simul ambæ sumptæ erunt duæ quintæ ipsius maximæ.* Fig. 230.

Sit EB. AE :: FG. $\frac{3}{5}$ AD; item 2AB + 4CB + 6DB + 3EB. 5AB + CB + 10DB + 5EB :: GH. AD; dico fore AB. FH :: 5. 2.

Nomi-

Nominentur $L = 2AB + 4CB + 6DB + 3EB$.
$M = 5AB + 10CB + 10DB + 5EB$.
$Q = 2AB + 4CB + 2DB$.
$R = 2AB + 4CB + 4DB + 2EB$.
$S = 2DB + EB$.
$T = CB + 3DB + 2EB$.
$V = 2AB + 3CB + DB$.
$X = AC + 3CD + 2DE$.

a cor. lemm. præc. Ob AB + CB. DB[a] :: AD. DE; [b]erit 2AB + 2CB. 2DB ::
(AD. DE[a] ::) CB + DB. EB. [c]quare V. S :: AD. DE: fiat
b 15. 5. AD. DO :: R. S; quare inversè componendo erit AO. AD :: R +
c 12. 5. S. R; (hoc eſt L. R); item AD. GH :: M. L; ergo ex æquo perturbatè eſt AO. GH :: M. R[b] :: 5. 2. Porro, ob DO. AD :: S. R;
d priùs. & AD. DE[d] :: V. S; erit rurſus ex æquo perturbatè DO. DE ::
V. R; quare inversè convertendo T (R — V). R :: OE. DE; item
e cor. præc. AC. CB[e] :: DE. EB[c] :: CD. DB[c] :: 3CD. 3DB[c] :: 2DE. EB;
[c]adeóque X. T :: DE. EB; ergo iterum ex æquo perturbatè OE.
EB :: X. R; componendóque OB. EB :: X + R. R; [c]item AC
+ CD. DE :: AB + CB. DB :: CB + DB. EB :: AB +
2CB + DB. DB + EB; ergo inversè componendo AE. AD ::
AB + 2CB + 2DB + EB. AB + 2CB + DB[c] :: R. Q.
f 16, & 15. 5. [f]ergo R. $\frac{3}{5}$ Q :: AE. $\frac{3}{5}$ AD[g] :: EB. FG; erat verò priùs X + R.
g hyp. R :: OB. EB; ergo ex æquo OB. FG :: X + R. $\frac{3}{5}$ Q (hoc eſt ::
3AB + 3DB + 6CB. $\frac{3}{5}$: 2AB + 2DB + 4CB)[b] :: 5. 2: atqui fuit AO. GH :: 5. 2; quare [e]junctim AB. FG :: 5. 2. *Q.E.D.*

Hæc concluſio ſic operosè monſtrata, poterit ita per operationes Algebraicas expeditiùs & liquidiùs oſtendi.

Sicut $a, b, c, d \div\!\!\div$; & $d. a - d :: y. \frac{3a - 3c}{5}$ (quare $y = \frac{3ad - 3cd}{5a - 5d}$); & $2a + 4b + 6c + 3d. 5a + 10b + 10c + 5d$ $:: z. a - c$ (quare $z = \frac{2aa + 4ab + 4ac + 3ad - 4bc - 6cc - 3cd}{5a + 10b + 10c + 5d}$).

Eſt ergo (ſummas iſtas conjungendo, fractionéſque, quibus conſtant, ad eandem denominationem redigendo) $y + z =$

$$\frac{10aaa + 20aab + 20aac + {}^{*}20aad + 10abd - 20abc\ ({}^{*}-20aad) - 30acc\ (-30abd) - 20acd - 10bcd\ {}^{*}(10add)}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50\,5d - 25dd}$$ * ob $bc = ad$ * ob $cc = bd$.

$$= \frac{10aaa + 20aab + 20aac - 20abd - 20acd - 10add}{25aa + 50ab + 50ac - 50bd - 50cd - 25dd} = \tfrac{2}{5}a.$$ (quod patebit, hujus æquationis partem utramque multiplicando per 5, & dividendo per 2, vel multiplicando per crucem). itaque conſtat.

Lemma.

In parabola A B C, ſint A C, D E ordinatim applicatæ ad diametrum B F; erunt portiones A B C, D B E inter ſe, ut cubi ſemibaſium F A, G D. Fig. 231.

Nam, connexis B A, B C, B D, B E; eſt port A B C. D B E [a]:: triang A B C. D B E [b]:: triang B F A. triang B G D [c] = F A. G D + B F. B G = F A. G D + [d] F Aq. G Dq [e] = F A cub. G D cub. *Q.E.D.*

a 24 *de quad. par.* & 15. 5.
b 15. 5.
c 23. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 5. *def.* 6.

Prop. X.

Omnis fruſti (A D E C) *à parabolico ſegmento ablati centrum gravitatis eſt in rectâ* (G F), *quæ diameter eſt fruſti, hoc modo poſitum, æquiſectâ rectâ* (G F) *in quinque partes* (G L, L H, H K, K P, P F) *in media quinta parte* (H K); *ut ejus particula propior minori baſi fruſti ad reliquam partem eandem habeat rationem, quam habet ſolidum, baſin quidem habens quadratum quod ex majore baſium fruſti, altitudinem verò æqualem utrique ſimul & duplæ minoris baſis & majori, ad ſolidum, baſin quidem habens quadratum minoris baſis fruſti, altitudinem verò æqualem utrique & duplæ majoris baſis & minori ipſarum.* Fig. 231.

Dico ſi fuerit H I. I K :: 2 D E + A C × A Cq. 2 A C + D E × D Eq; foré punctum I centrum gr. fruſti A D E C.

Sint F B, Y B, G B, Z B ∺; & [b]fiat F H. I R :: F Z. Z B; éſtque F Bq. Y Bq [c]:: F B. G B [d]:: A Fq. D Gq; unde F B. Y B :: A F. D G. item F B cub. Y B cub [e](F B. Z B) :: A F cub. D G cub; [f]:: port A B C. D B E; ergo dividendo F Z. Z B ([g]id eſt F H. I R) :: fruſt A D E C. D B E. Porro, D E. A C [h] (D G. A F) [k]:: Y B. F B. [l]quare D E. A F :: Y B. ½ F B; & componendo D E + A F. A F :: Y B + ½ F B. ½ F B. & D E + A F. A C. [m](hoc eſt, D E + A F × A Cq. A C cub) [l]Y B + ½ F B. F B. Item A C cub: D E cub [n]::

a 13, & 11. 6.
b 12. 6.
c 20. 6.
d 3. *de qu. par.*
e 33. 11.
f *lemm. præc.*
g *conſt.*
h 15. 5.
k *priùs.*
l 16, & 15. 5.
m 32. 11.
n *priùs, et* 15. 5

F B

[o] 11.5. FB.ZB; dein DE.AC [o] (YB.FB) [o] :: ZB.GB; ergo DG.
AC :: $\frac{1}{2}$ ZB.GB; componendóque DG.AC + DG :: $\frac{1}{2}$ ZB.
GB + $\frac{1}{2}$ ZB; [l] unde DE.AC + DG [m] (DE cub. AC + DG
× DEq) :: ZB.GB + $\frac{1}{2}$ ZB: quapropter ex æquo erit DE + AF
× ACq. AC + DG × DEq [h] (hoc est 2DE + AC × ACq. 2AC
+ DE × DEq; ([g] hoc est HI.IK) :: YB + $\frac{1}{2}$ FB.GB + $\frac{1}{2}$ ZB;
& componendo HK.IK :: YB + $\frac{1}{2}$ FB + GB + $\frac{1}{2}$ ZB.GB
+ $\frac{1}{2}$ ZB [h] :: 2YB + FB + 2GB + ZB.2GB + ZB. unde
(antecedentes quintuplicando) FG.IK :: 5TB + 5ZB + 10YB
+ 10GB.2GB + ZB. Item FG.FK [p] (:: 5.3.) :: [h] 5FB +
p *hyp.* 5ZB + 10YB + 10GB.2FB + 2ZB + 4YB + 4GB;
ergo (jungendo consequentes duarum proportionum (FG.IF ::
5FB + 5ZB + 10YB + 10GB.2FB + 3ZB + 4YB +
6GB; vel inversè IF.FG :: 2FB + 4YB + 6GB + 3ZB.
5FB + 10YB + 10GB + 5ZB; Item IR.FH ([p] $\frac{3}{5}$ FG) [g] ::
r 9 *hujus.* ZB.FZ; [r] ergo RF (IF + IR) = $\frac{2}{5}$ FB; proindéque BR = $\frac{3}{5}$
s 8 *hujus.* FB; adeóque BR.RF :: 3.2; [s] unde punctum R est centrum
t 19.5. gr. portionis ABC: sit Q centrum portionis DBE; itaque BQ.
u 9.5. QG :: 3.2; vel compositè BG.BQ :: 5.3 :: BF.BR [t] :: FG.
x *supr. cum* 7, & 11.5. QR :: 5.3 [p] :: FG.FH; [u] unde QR = FH; itaque demum [x] est
y 6, & 7.1 *æquip.* QR.IR :: frust ADEC. port DBE; [y] quare punctum I est centrum gr. frusti ADEC. *Q.E.D.*

DE

De Insidentibus Humido.
LIB. I.

Tractatus hic injuriâ temporis mutilus evasit, nec Græcè extat; Latinam versionem perpolivit Federicus *ille* Commandinus, *de literis hisce optimè meritus, quem sequimur* κατὰ πόδας. *Inscriptionem fuisse* περὶ τῶν ὀχουμένων *discimus ex* Strabone; *id est de iis quæ vehuntur, gestantur, feruntur, sustinentur, continentur, vel insident Humido; hæc enim omnia significat* τὸ ὀχεῖσθαι. *Agit verò de Humidi naturâ, figurâ, quatenus admittit corpora, vel attollit, quantâque vi resistit; quo situ in humido consistit, vel movetur portio sphæræ, quoque portio conoidis rectanguli, vel parabolici.*

Hypoth. I.

*Ponatur humidi eam esse naturam, ut partibus ipsius æqualiter jacentibus, & continuatis inter sese, minus pressa à magis pressa expellatur: unaquæque autem pars ejus premitur humido supra ipsam existente ad perpendiculum, si humidum * sit descendens in aliquo, aut ab alio aliquo pressum.*

* *subsidat in uno, & ab alio prematur.*

Schol.

Ratio est, quia desuper incumbens pondus partibus humidi proximè subjectis motum sive conatum imprimit, & hæ sequentibus continuò ad fundum usque; ibi verò, quum ob præpotentem fundi resistentiam progredi nequeat motus, reflectitur, & in latera se diffundens, adjacentes humidi partes conturbat, atque extrudit. Ex. g. pondus A (in fig. appositâ) premens subjectas humidi partes B, motum ipsis communicat, efficitque, ut à fundo C, ad modum inepto, ad par- Fig. 233.

tes D, E resiliant, locúmque cedant deorsum nitenti corpori A. Ita mihi videtur accipienda, & explicanda hæc hypothesis.

Prop. I.

Fig. 234. *Si superficies aliqua plano secetur, per idem semper punctum* (A) *sitque sectio* (B C) *circuli circumferentia, centrum habens punctum illud* (A), *per quod plano secatur, sphæræ superficies erit.*

Nam ab A ad superficiem ducantur rectæ A B, A C utcunque, per
a *hyp.* quas transit planum; hoc in dicta superficie [a] producet circuli
b 15. *def.* 1. circumferentiam, cujus centrum A. [b]ergo A B, A C æquales erunt.
Simili discursu omnes rectæ ab A ad superficiem ductæ æquales erunt.
c 1. *def.* 1 *Theod.* [c]quare superficies proposita est sphærica. *Q.E.D.*

Prop. II.

Fig. 235. *Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphærica est, cujus sphæra centrum est idem quod centrum terræ.*

Centrum terræ sit A. Per hoc secetur humidum plano quocunque, in quo ab A ad superficiem humidi ducantur utcunque rectæ AB, AC.
a 15. *def.* 1. Hæ si pares fuerint, [a]liquet B C esse circumferentiam circuli, & [b]pro-
b 1 *hujus.* inde superficiem humidi esse sphæricam. Sin impares dixeris, centro
c 5 *ax.* 1. A intra humidum ducatur arcus D E. ergo B D, C E [c] impares sunt,
d 1 *hypoth.* & inæqualiter premunt sibi subjectas humidi partes; [d]unde non consistet humidum, sed conturbabitur, contra hypothesin.

Prop. III.

Fig. 236. *Solidarum magnitudinum* (X Y) *quæ æqualem molem habentes æquè graves sunt, atque humidum, in humidum* (B A C) *demissæ demergentur, ita ut ex humidi superficie* (B C) *nihil extet, non tamen adhuc deorsum ferentur.*

Bisecetur angulus B A C rectâ A F, & centro A ducatur arcus D G E, intra humidum; & si dicatur aliquid solidi eminere, puta Y, liquet contentum spatio B D G F, unà cum Y, majus esse humido F G E C, & proinde illo plus ponderare (quum solidum X Y humi-
a *hyp.* do [a]æquè grave sit); quare pars D G magis premetur parte G E;
b 1 *hypoth.* [b]nec consistet solidum, donec X Y omnino immersum fuerit, tum vero quiescet, quum compressio ubique æqualis sit. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. IV.

Solidarum magnitudinum (X) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum non demergetur tota, sed aliqua pars ipsius ex humidi superficie extabit.* Fig. 237.

Fiat ut in præcedenti, & si dicatur tota X demergi, quoniam X [a] levior est humido, liquet id quod continetur spatio B D G F minùs ponderare humido F G E C, & proinde D G minus premi, quàm G E, [b] ideóque haud consistere humidum, donec aliquid ipsius X emineat. *Q.E.D.*

a 1 *hyp.*
b 1 *hypoth.*

Prop. V.

Solidarum magnitudinum (X Y) *quæcunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersæ* (X), *eandem quam tota magnitudo* (X Y) *gravitatem habeat.* vid. Fig. 236.

Si enim pars humidi æqualis demersæ X non æquè gravis sit, ac tota X Y, liquet id quod continetur spatio B D G F unà cum Y, & humidum C E G F non æquè ponderare; ergo D G, & E G inæqualiter premi, [a] ergóque humidum non manere, donec id eveniat. *Q.E.D.*

a 1 *hypoth.*

Prop. VI.

Solidæ magnitudines (A) *humido leviores, in humidum impulsæ, sursum feruntur tantâ vi, quanto humidum molem habens magnitudini* (A) *æqualem gravius est ipsâ magnitudine* (A). Fig. 238.

Sit X gravitas magnitudinis A, & X + Y gravitas humidi ipsi A æqualis. Adsumatur verò B, cujus gravitas sit excessus Y. Itaque demissâ A + B in humidum, [a] demergetur ejus pars, cui æquale humidum gravitatem habet, quantam tota A + B, [b] hoc est ipsam X + Y. at humidum ipsi A æquale [b] tantam habet. ergo pars demersa erit ipsa A. Constat verò A tantâ vi sursum niti, quantâ B deorsum premit; (neutra enim vis prævalet). atqui B deorsum fertur vi gravitatis Y, ergo A eâdem vi assurgit. *Q.E.D.*

a 5 *hujus.*
b *hyp.*

Breviùs. Excedat humidum tibi æquale solidum gravitate Y. ergo humidum vi solidum demergenti resistit gravitate, Y; quâ vi remotâ, sursum pellit A eadem vi.

Sch. Itaque gravia humido leviora, in ipso quasi absolutè levia evadunt, deperditâ propriæ gavitatis vi, & efficaciâ.

Prop. VII.

Fig. 239. *Solidæ magnitudines (A) humido graviores demissæ in humidum ferentur deorsum, donec descendant; & erunt in humido tanto leviores, quanta est gravitas humidi molem habentis solidæ magnitudini æqualem.*

Quòd A deorsum feretur patet, quia partes ipsi subjectæ reliquis magis pressæ cedunt ipsi, locúmque dant. Porro humidi corpori A æqualis gravitas sit X, ipsius verò A gravitas sit X + Y. Liquet corpus A in humido existens sibi subjectas partes deprimere solâ gravitate Y, qua resistentiam subjecti humidi exuperat. Quòd si extra humidum esset, totâ gravitate X + Y ponderaret, ergo in humido existens levior fit quantitate gravitatis X. *Q.E.D.*

Aliter. Sit X + Y gravitas solidi A, & X gravitas ipsi æqualis humidi. Assumatur verò solidum B, cujus gravitas sit X, eique æqualis humidi gravitas X + Y. Itaque composita A + B sibi æquali humido æquè grave est, (nam 2X + Y communis utriusque est gravitas). a 3 *hujus.* [a]Itaque A B in humido immota consistet. ergo [b] cùm B sursum nitatur impetu Y (quo ab humidi gravitate exceditur), eadem A deorsum feretur (æquipollent enim hæ vires, & altera alterius impedit effectum). unde liquet propositum. b 6 *hujus.*

Hypoth. II.

Ponatur eorum quæ in humido sursum feruntur, unumquodque *sursum ferri secundum perpendicularem, quæ per centrum gravitatis ipsorum ducitur.

* *& deorsum.*

Lemma I.

Circuli se intersecent punctis E, F, quæ connectat recta E F. Fig. 240. Fig. 241. centra autem T, H jungat recta T H. hæc bisecat rectam E F ad rectos.

Nam (ductis T E, T F, H E, H F) trigona T E H, T F H sibi mutuò [a]æquilatera sunt. [b]unde ang E T H = F T H. [c]ergo in trigonis E T K, F T K est E K = F K, & ang T K E = T K F. *Q.E.D.*

a 15. *def.* 1. b 8. 1. c 4. 1.

Lem.

Lemm. II.

In sphæræ portione centrum gravitatis est in axe portionis. Demonstratum hoc à *Commandino* de centro gr. prop. 15. & à *Luca Val.* lib. 2. prop. 34.

Prop. VIII.

Si aliqua magnitudo solida (A B C) *levior humido, quæ figuram portionis sphæræ habeat in humidum demittatur, ita ut portionis basis* (A C) *non tangat humidum; figura insidebit recta, ita ut portionis axis* (D B) *sit secundum perpendicularem. Et si ab aliquo inclinetur figura, ut basis portionis humidum contingat, non manebit inclinata, si demittatur, sed recta restituetur.* Fig. 242.

Inclinetur portio, & per axem B D, ac terræ centrum T transeat planum, faciens segmentum circuli A B C, cujus pars immersa sit E B F G. Jungatur E F, quem secet recta T H, connectens terræ ac sphæræ centra T, H, & quidem [a] ad rectos in K. [b] Estque centrum gr. *portionis E L F in L K, & portionis E M F in M K, & [c] proinde totius E L F M in L M, puta N. Portionis verò A B C centrum gr. [b] est in axe B D, puta in O. [d] Transitque recta N O per reliquæ extra humidum partis centrum gr. quod sit P; connectatur T P. Cùm igitur pars immersa [e] sursum feratur secundum rectam T N, pars verò extans deorsum secundum P T (neque hæ lationes sibi invicem ullatenus obsistant, utpote per alias, aliásque lineas peractæ) non quiescet portio, donec hæc centra cum centro terræ in unam rectam incidant, hoc est donec axis D B sit secundum perpendicularem. Tum verò quiescent, quia quanto impetu quæ in humido est pars sursum, tanto quæ extra deorsum per eandem lineam contendit.

a *lemma præc.*
b
* *ducto plano per* E F *ad* TH *perpendiculari.*
c *cor.* 7. 1 *æqu.*
d 8 *æquip.*
e 2 *hypoth.* & 6 *hujus.*

Not. Recta N P libram repræsentat, in qua duo gravia E B F G, A E G F C diversimodè ponderant (*levior est enim pars immersa illâ, quæ extat). Suspensio fit ex puncto O. Radii sunt O N, O P; descendit P, attollitur N; donec puncto O in T H constituto contingat æquilibrium.

* *6 hujus.*

Coroll. Ex his, cùm corporis cujuscunque humido levioris pars alia demergatur, alia emineat, nunquam quiescet corpus, & fluctuare desinet, donec centra harum partium, totius, & terræ in una recta conveniant, quod si contingat, tum quidem consistet corpus.

Prop.

Prop. IX.

Fig. 243. *Quod si figura* (A B C) *humido levior in humidum demittatur, ita ut basis tota sit in humido, insidebit recta, ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur.*

Invertatur figura præcedentis, & ex simili discursu constabit propositum.

DE

De Insidentibus Humido, Liber Secundus.

Prop. I.

SI magnitudo aliqua (AB) humido levior demittatur in humidum, eam in gravitate proportionem habebit ad humidum (CD) æqualis molis, quam magnitudinis demersæ pars (B) habet ad totam magnitudinem AB. Fig. 244.

Sit humidi CD pars C = A [a](unde D = B), corporúmque trium AB, C, D gravitates sint X, Y, Z. [b]unde X = Z. ergo X . Y + Z [c]:: (Z . Y + Z *:: D . C + D ::) [d]B . A + B. *Q.E.D.*

a 3. *ax.* 1. b 5. 1 *hujus.* c 7. 5. * d *sch.* 7. 5.

Lemma I.

Sit conus Isosceles rectangulus ABC, in quo sectio parabola EDF, cujus vertex D, rectum latus R; erit AD = $\frac{1}{2}$ R. Fig. 245.

Nam BCq [a]= (BAq + CAq = 2 BAq ([b]ob BA = CA) =) 2BA × CA. [c]& R . AD :: BCq . BA × CA. ergo R . AD :: 2 . 1. *Q.E.D.*

a 47. 1. b *hyp.* c 11. *1 Apoll.*

Not. AD ab *Archimede* nuncupatur, ea quæ usque ad axem.

Lemma II.

Recta GQ tangens parabolen ABC diametro BD occurrat (MQ); in qua ubicunque sumatur KN æqualis ei, quæ usque ad axem; per contactum G ducatur GO parallela diametro, cui occurrat NO diametro perpendicularis; ducta KO tangenti GQ perpendicularis erit. Fig. 246.

Ducantur enim GZ tangenti, & GX diametro perpendiculares. Sitque R rectum latus parabolæ. Estque QX × XZ [a]= (GXq [b]=)

a *cor.* 8. 6. & 17. 6. b 11. *1 Apol.*

R

c 16. 6. R × X B. [c]ergo R . X Z :: (Q X . X B [d]:: 2. 1 [e]::) R . K N. ergo
d 35. 1 *Apol.* K Z [f]= N X [g]= O G. [h] unde K O, Z G parallelæ sunt; & cùm
e *Lemm. præc.* Z G tangenti G Q [k] perpendicularis sit, [l]erit K O eidem perpendicu-
f 7. 5. laris. *Q.E.D.*
g 34. 1.
h 33. 1.
k *const.*
l 29. 1.

Lemma III.

Centrum gravitatis dividit axem conoidis parabolici, ita ut pars ad verticem, ejus quæ ad basim sit dupla.

Demonstratum hoc à *Commandino*, libro de centro gravitatis, prop. 29. & à *Luca Valerio* lib. 2. prop. 41.

Prop. II.

Fig. 147. *Conoidis rectanguli recta portio* (A B C) *quando axem* (B D) *habuerit minorem quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum, quod ipsam secuit, superficiei* (E F) *humidi fuerit æquidistans.*

a 12 *de conoid. & sphæroid.* Secetur conoides plano per axem [a] facienti sectionem A B C parabolam (quod in sequentibus semper concipiatur factum, quamvis
b 5. 2 *Apol.* brevitatis causa reticeatur) cujus pars submersa habeat diametrum
c 3 *Lem. præc.* G H. Sectionem verò tangat G Q ad E F [b]parallela. Portionis ABC
d *hyp.* centrum gr. sit K, unde K B [c]= $\frac{2}{3}$ D B [d]⊐ K N. Sitque L centrum
e 8. 1 *æquipond.* gr. partis demersæ, [e] unde in protractâ L K erit centrum gr. reliquæ
f 2 *lem. præc.* partis, quod sit M: ducatur N O perpendicularis ad H G, vel B D,
g 29. 1. & connectatur K O secans tangentem Q G in P; [f] & quidem ad re-
h 32. 1. ctos. Jam ob angulos [h]K G P, K Q P ([k] B I F) acutos, liquet per-
k 29. 1. pendicularem K P cadere inter G, & B; nec centra L, M existere in
l 2 *hyp.* 1 *huj.* rectâ K P; etsi ducantur L R, M S ad G Q, vel E F perpendiculares,
m *vid. cor.* 8. 1. *hujus.* [l]pars demersa sursum nitetur per rectam R L, pars extans deorsum secundum M S, tota portio A B C fertur juxta K P, [m] unde non consistet portio A B C, donec hæc centra incidant in axem B D. *Q.E.D.*

Prop.

Prop. III.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quàm sesquialterum ejus quæ usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed ita restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat. Fig. 248.

Inversâ figurâ, simili planè discursu probatur, quo antecedens.

Prop. IV.

Recta portio (A B C) *conoidis rectanguli, quando fuerit humido levior, & axem* (B D) *habuerit majorem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem; si in gravitate ad humidum æqualis molis non minorem proportionem habeat eâ, quàm quadratum quod fit ab excessu* (B T), *quo axis major est, quàm sesquialter ejus* (K N) *quæ usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe* (B D), *demissa in humidum, ita ut ipsius basis* (A C) *humidum non contingat, & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur.* Fig. 249.

Præparatio imitatur præcedentem, similésque lineæ eidem literis designantur, (quod ferè fit in sequentibus.) Sit verò gravitas corporis ABC ad gravitatem humidi æqualis ut Y ad Z. Estque GHq. BDq [a]:: (port EGF. ABC [b]::) Y. Z [c]$=$ vel $\sqsubset$ BTq. BDq. [d]ergo GH $=$ vel $\sqsubset$ BT, [e]quare GL $=$ vel $\sqsubset$ BN. (nam ob BT $+ \frac{3}{2}$KN [c]$=$ BD [f]$= \frac{3}{2}$BK [g]$= \frac{3}{2}$BN $+ \frac{3}{2}$KN, ideóque BT [h]$= \frac{3}{2}$BN. itémque GH [f]$= \frac{3}{2}$GL, [k]erit GH. BT :: GL. BN). ergo GL $\sqsubset$ GO ([l]$\sqsupset$ BN). ergo punctum O est inter L, G. Nec centra totius portionis, & partium in eadem sunt linea, sed pars demersa [m]sursum tendit per RL, & altera deorsum per MS. unde non consistet portio ABC &c. ut in præced.

Coroll. BN $= \frac{2}{3}$ BT.

a 26. *de conoid. & sphæroid.*
b 1 *hujus.*
c *hyp.*
d 9 *vel* 10. 5 & 22. 6.
e 14 5.
f 3 *lem.* 1 *huj.*
g 1. 2.
h 3. *ax.* 1.
k 15. 5.
l 17. 1. *com. Apol.*
m 2 *hyp.* 1 *huj*

Prop. V.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit majorem, quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; si ad humidum in gravitate non majorem proportionem habeat, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe, majus est quadrato, quod ab excessu, quo Fig. 250.

axis major est, quàm sesquialter ejus, quæ usque ad axem, ad quadratum quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat.

a *26 de conoid. & sphæroid.*
b *invertendo, et cor. 19. 5.*
c *1. 2 hujus.*
d *hyp.*
e *9. vel 10. 5.*
f *22. 6.*

Invertatur figura præcedentis, & stantibus quæ ibidem dicta sunt, quoniam B Dq. G Hq [a] :: port A B C. E G F; [b] erit B Dq — G Hq. B Dq :: (port A B C — E G F. A B C [c] ::) Y. Z [d] =, vel ⊐ BDq — B Tq. BDq. [e] ergo B Dq — GHq =, vel ⊐ B Dq — B Tq. [f] quare B T =, vel ⊐ G H & deinceps, ut in præcedenti.

Lemma.

Fig. 251.

In triangulo T D A si latus T D ita dividatur, ut sit T D. T I :: V D. Q I, ducantúrque per V & Q parallelæ ad D A, & I A, hæ convenient in latere T A.

a *hyp. & 19. 5.*
b *4. 6.*
c *conv. 4. 6.*

Nam T D. T I [a] :: T V. (T D — V D). T Q (T I — Q I). ergo convertendo T D. I D :: T V. Q V. atqui I D. D A [b] :: Q V. V Y. (ob V Y ad D A, & Q Y ad I A parallelas) ergo ex æquo T D. D A :: T V. V Y. [c] ergo T Y A est recta linea. *Q.E.D.*

d *4. 6.*
f *19. 5.*

2. Quòd si conveniant parallelæ in Y, erit T D. T I :: V D. Q I. Nam T D. D A [d] :: T V. V Y. & D A. I D [d] :: V Y. Q V. ex æquo igitur T D. I D :: T V. Q V. [f] ergo T D. T I :: T V. T Q :: V D. (T D — T V). Q I. (T I — T Q). *Q.E.D.*

Coroll. T V. T Q :: V D. Q I.

Prop. VI.

Fig. 252.

Conoidis rectanguli recta portio (A B C), *quando levior humido axem* (B D) *habuerit majorem quidem, quàm sesquialterum ejus* (K N) *quæ usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ usque ad axem proportionem habeat, quam quindecim ad quatuor, in humidum demissa, adeò ut ipsius basis* (A C) *contingat humidum* (A F), *nunquam consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidum contingat.*

a *3. lem. 1. 2 h.*

Fiat ut in præcedentibus, & porro sit K V $= \frac{4}{5}$ D B; (unde cùm D K [a] $= \frac{2}{15}$ D B, erit D V $= \frac{9}{15}$ D B, & B V $= \frac{6}{15}$ D B, & proinde B V $= \frac{6}{9}$ D V $= \frac{2}{3}$ D V). Contingant G Q, A T occurrentes diametro T Q B D; ducantúrque V Y (sectioni occurrens in M, tangenti Q G in Y), N O, G X, H ω basi A C parallelæ.

Jam

Jam si B D, B V, B X sint ∺ (quod fortè contingere potest), [b]etiam D Aq, V Mq, X Gq erunt ∺ in eadem ratione, [c]ergo D A, V M, X G erunt ∺. Item B V. B X [d]:: B D. B V [e]:: D Aq. V Mq [f]:: D A. X G [g]:: D I. X Q (ob trigona A D I, G X Q similia). ergo permutando D I. B V :: X Q ([h]I ϖ, ob ϖ H [k]= X G). B X [l]:: 2. 1 [m]:: D ϖ (D I—I ϖ). V X (B V—B X) [l] :: T D. B D. Item (ob B D. B V [d]:: B V. B X. erit convertendo). B D. V D :: B V. V X. ergo ex æquo T D. V D :: D I. V X. & permutando T D. D I :: V D. V X. ac convertendo T D. T I :: V D. V D—V X, vel Q I. (Nam Q I [k]= G H [k]= X ϖ = V ϖ + V X = V ϖ + $\frac{1}{2}$ D ϖ = V ϖ + D ϖ — $\frac{1}{2}$ D ϖ = V D—$\frac{1}{2}$ D ϖ [n]= V D—V X). [o]ergo punctum Y est in T A. Porro, quia V D. X ϖ ([n]G H)*:: T V ([p]D B + B V). T Q ([q]D X) [r]erit V D. G H :: D B + B V—V D. D X—X ϖ. atqui D B + B V—V D = 2 B V [n]= D I. & D X—X ϖ = D ϖ. [s]ergo V D. G H :: D I. D ϖ [t]:: B V ($\frac{1}{2}$ D I). $\frac{1}{2}$ D ϖ ([n]V X, vel G Z). & permutando G H. G Z :: D V. B V [u]:: 3. 2. [x]unde punctum Z erit centrum portionis A G F, in hoc casu.

Quod si porcio major sit minórve, quàm ut B D, B V, B X sint ∺, sit illa *a* B *c*, diametro B *d*, base *a c* ad A C parallelâ, ita ut submergatur portio *a* B *f*, diametro G *h*, base *a f* ad A F itidem parallelâ, cui occurrat tangens T A R, ducatúrque R S ad A C parallela, & occurrens diametro B *d* in S. Estque S V. D V [y]:: R Y. A Y [y]:: G *h*. G H. & permutando S V. G *h* :: D V. G H [u]:: B V. G Z. iterúmque permutando G *h* G Z :: S V. B V [z]⊏ *d* V. B V [u]:: 3. 1. quare in hoc casu centrum cadit inter *z*, & *h*; & proinde infra O in quocunque casu (quoniam K V ⊐ K N). Itaque cùm tota portio gravitet secundum rectam K O P. & pars quæ demergitur, quæque extat per alias, liquet solidum non consistere &c. ut in præcedentibus.

Coroll. B V = $\frac{6}{15}$ D B.

b 20 *I Apol.*
c 22. 6.
d *hyp.*
e *priùs.*
f *cor.* 20 6
g *cor.* 4. 6.
h 4. 6.
k 34. 1.
l 35. *I Apol.*
m 19. 5.
* *cor. lem. præc.*
n *priùs.*
o *lemm. præc.*
p 35. *I Apol.* & 2. *ax.* 1.
q 35. 1. *Apol.* & 3. *ax.* 1.
r 19. 5.
s *schol.* 7. 5.
t 15. 5.
u *priùs.*
x 3 *lem.* 1. 2 *h.*
y *sch.* 2. 6.
z 8. 5.

Prop. VII.

Recta portio conoidis rectanguli, quando levior humido axem habuerit, majorem quidem, quàm sesquialterum ejus, qua usque ad axem, minorem verò, quàm ut ad eam, quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm 15 *ad* 4, *in humidum demissa adeò ut basis ipsius tota sit in humido, nunquam consistet ita, ut basis contingat humidi superficiem, sed ut tota in humido sit, & nullo modo ejus superficiem contingat.* Fig. 253.

Inversâ figurâ, eodem modo demonstratur quo antecedens.

Prop. VIII.

Fig. 253. 254.

Conoidis rectanguli recta portio (A B C), quando axem (BD) habuerit majorem quidem, quàm sesquialterum ejus (K N) quæ usque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam, quæ usque ad axem, proportionem habeat, quam 15 ad 4: si in gravitate ad humidum habeat proportionem minorem ea, quam quadratum, quod fit ab excessu (BT) quo axis major est, quàm sesquialter ejus quæ usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basi ipsius (A C) humidum non contingat, neque in rectum restituetur, neque manebit inclinata, nisi quando axis (B D) cum superficie humidi (E F) angulum fecerit æqualem ei, de quo infra dicetur.

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad BDq ${}^{a}\sqsupset BTq.\ BDq.$ ^{b}itaque $Z \sqsupset BT$, ^{c} & $\frac{2}{3}Z \sqsupset BN$ (${}^{d}\frac{2}{3}BT$). Sit $N\varphi = \frac{2}{3}Z$. & erigatur $\varphi\psi = \sqrt{\frac{1}{2}KN \times B\varphi}$, junganturque $B\psi$, erit angulus $\varphi B\psi$, is quem propositio innuit. Nam 1. sit ang $\varphi B\psi =$ ang EID, vel GQX. Estque $KN.\ XQ\ {}^{e}{::}\ KN \times XQ.\ XQq\ {}^{f}{::}\ GXq.\ XQq$ (nam $KN \times XQ\ {}^{g}= (KN \times 2XB\ {}^{h}= 2KN \times XB\ {}^{k}=)\ GXq$) ${}^{l}{::}\ \varphi\psi q.\ B\varphi q$ (ob ^{m}similia trigona QXG, $B\varphi\Psi$) ${}^{n}{::}\ \frac{1}{2}KN \times B\varphi.\ B\varphi q\ {}^{e}{::}\ \frac{1}{2}KN.\ B\varphi\ {}^{c}{::}\ KN.\ 2B\varphi\ {}^{o}{::}\ KN.\ XQ$ ^{p}ergo $2B\varphi = XQ$. & XB (${}^{g}\frac{1}{2}XQ$) $= B\varphi$. unde $XN = \varphi N\ {}^{m}= \frac{2}{3}Z$. Cúmque sit $GHq.\ BDq\ {}^{q}{::}$ (port $EGF.\ ABC\ {}^{r}{::}$) $Zq.\ BDq$, & propterea $GH\ {}^{s}= Z$, erit $\frac{2}{3}GH$ (${}^{t}GL$) ${}^{c}= \frac{2}{3}Z\ {}^{u}= \varphi N\ {}^{x}= GO\ {}^{y}= GL$. & centrum L cum O coincidet. quare centra portionum sunt in perpendiculari KP, & ^{z} proinde tota portio immota consistet.

2. Quòd si ang $\varphi B\psi \sqsupset$ ang XQG, fiat ang $XQY = \angle \varphi B\psi$. Estque $KN.\ XQ$ (${}^{a}{::}\ GXq.\ XQq$) ${}^{b}\sqsubset YXq.\ XQq\ {}^{c}{::}\ \varphi\Psi q.\ B\varphi q\ {}^{d}{::}$) $KN.\ 2B\varphi$. ^{e}unde XQ (${}^{f}2XB$) $\sqsupset 2B\varphi$. ^{g}& $BX \sqsupset B\varphi$. quare NX (GO) $\sqsubset$ ($N\varphi = {}^{h}\frac{2}{3}Z = {}^{k}\frac{2}{3}GH$) ${}^{l}= GL$. Cadit igitur punctum O intra centrum L: nec sunt centra portionum in una recta KP. unde tota portio non consistet.

3. Quòd si ang $\varphi B\Psi \sqsubset XQG$, simili discursu ostendetur punctum O cadere supra L. ^{z}unde etiam consequetur motus portionis ABC, quomodo sæpiùs inculcatum.

a hyp. (6.
b 10. 5. & 22.
c 15. 5.
d cor. 4. 2 h.
e 1. 6.
f 7. 5.
g 35. 1 Apol.
h 16. 6.
k 11. 1 Apol. & 1. lem. 1. 2 h.
l 4. 6.
m constr.
n constr. & 7. 5.
o 11. 5.
p 9. 5.
q 26. de conoid. & sphæroid.
r hyp. & 1. 2 h.
s 9. 5.
t 3. lem. 1. 2 h.
u constr.
x 34. 1.
y 1. ax. 1.
z sch. 8. 1 huj.
a priùs. suprà.
b 8. 5.
c 4. 6.
d ut suprà.
e 10. 5.
f priùs.
g 15. 5.
h constr.
k supra.
l hyp.
z. vid. cor. 8. 1. hujus.

Prop. IX.

Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit, majorem quidem quàm sesquialterum ejus, quæ usque ad axem; minorem verò quàm ut ad eam quæ usque ad axem proportionem habeat, quam 15

quàm

ad 4, & in gravitate ad humidum proportionem habeat majorem, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe majus est quadrato, quod ab excessu, quo axis est major, quàm sesquialter ejus, quæ usque ad axem, habet ad quadratum quod ab axe, in humidum demissa adeò ut basis ipsius tota sit in humido, & posita inclinata, nec convertetur ita ut axis ipsius secundum perpendicularem sit, nec manebit inclinata, nisi quando axis cum superficie humidi angulum fecerit æqualem angulo similiter ut priùs assumpto.

Nam inversâ figurâ præcedentis, quoniam B Dq. G Hq [a] :: port A B C. E G F, [b] erit B Dq — G Hq. B Dq (:: port A B C — E G F. A B C [c] :: Zq. B Dq) [d] $\sqsubset$ B Dq — B Tq. B Dq [e] quare B Dq — GHq (— Zq) $\sqsubset$ B Dq — B Tq. * ergo Z $\sqsupset$ B T. & $\frac{2}{3}$ Z (Nq) $\sqsupset$ $\frac{2}{3}$ BT (N B) &c. ut in præcedenti. a 26 *de conoid.* b *cor.* 9. 5. & 4. 5 c *hyp.* & 1. 2 *h.* d *hyp.* e 10. 5. * 17. *ax.* 1.

Schol. Sit I K axis parabolæ G I C, ejusque basis G C = 2 G K. & educatur G N, utcunque secans parabolam G B A. Ordinatim applicetur N P, & connectatur G P occurrens ipsi B D in O: à quo applicetur O H ordinatim. Sintque R, S recta latera sectionum G I C, G B A. Súntque tam I K, K G, R, quàm B D, B G, S in $\div\!\div$. unde cùm I K. K G :: B D. D G. erit I K. R :: B D. S. & permutando I K. B D (I G. B G, vel I P. B O) :: R. S. atqui I P, N P, R, & B O, H O, S sunt etiam $\div\!\div$. ergóque I Pq N Pq :: (I P. R :: B O. S ::) B Oq. H Oq. ergo permutando I P. B O :: G P. G O ::) N P. H O. unde sectionis punctum H est in recta G N. & hinc Fig. 256.

1. *Coroll.* G N. G H (G P. G O) :: G I. G B :: (G K. G D) :: G C. G A. & G H. H N :: G A. A C :: G B. B I :: G D. D K.

Porro, ducatur N M ad I K parallela. Estque G C. G A :: (G N. G H :: G M. G K :: M C. A K. & permutando G C. M C :: G A. A K :: L K. H K. item G C. G K :: 2. 1 ::) L K. L I. ergo G C. M C + G K :: L K. H K + L I. ergo G C. K M :: LK. IH. vel GK. KM (:: GH. H N, vel G A. A C, vel G D. D K) :: L I. (I K). I H. Hinc

2. *Coroll.* L K. H K :: G A. A K. & dividendo L H. H K :: GK. A K. Et simili discursu

E X. X B }
l y. y h. } :: G K. A K :: L H. H K.

Porro, quia L I. I H :: G A. A C. erit inversè componendo I H. L H :: A C. G C. Item L H. H K :: G K. A K. atqui I H. H K = I H. L H (A C. G C) + L H. H K (G K. A K)

3. *Coroll.* I H. H K = A G. G C + G K. K A.

Quòd si base K G fiat altera parabola G I K, similis prioribus, similiter ler erit $\left\{\begin{matrix} XB.\ BZ \\ \gamma h.\ \ hi \end{matrix}\right\} = AG.GC + GK.KA = IH.HK.$

Prop. X.

Fig. 257. Fig. 258 *Recta portio* (A B C) *conoidis rectanguli, quando levior humido habuerit axem* (B D) *majorem quàm ut ad eam* (K N) *quæ usque ad axem proportionem habeat, quàm* 15 *ad* 4, *in humidum demissa, ita ut basis ipsius* (A C) *non contingat humidum; nonnunquam quidem recta consistet, nonnunquam inclinata; & interdum adeò inclinata, ut basis ipsius in uno puncto contingat superficiem humidi; idque in duabus dispositionibus, interdum quidem ita ut basis in humidum magis demergatur, interdum verò ita ut superficiem humidi nullo modo contingat, secundum proportionem quam habet ad humidum in gravitate. Eorum quæ dicta sunt singula inferiùs demonstrabuntur.*

Sit gravitas portionis ad gravitatem humidi ut Zq ad B Dq; sitque
a *hyp.* $BK = \frac{2}{13} BD$; & $KV = \frac{4}{15} BD$, & KN ($\sqsupset$ ²KV) ea quæ ad axem; & $DT = \frac{3}{2} KN$.

b *constr.* 1°. Si Zq. B Dq non$\sqsupset$ B Tq. B Dq. quoniam BT [b] $= BD - \frac{3}{2} KN$, in humidum demissa portio A B L non nisi recta consistet, juxta 4 hujus.

c *vid sch.* 5. *de quad. parab.* Pro sequentibus jungatur A B, quam secet V ς ad B C parallela. Item bisecta A B in μ, ducantur $\varsigma\gamma$, $\mu\nu$ ad B D parallelæ: tum ad basibus ad A C diametrisque $\varsigma\gamma$, $\mu\nu$ [c]describantur parabolæ A$\varsigma\alpha$,
d *ibid.* AμD; quarum A$\varsigma\alpha$ [d]transibit per K, (nam D A. Vς (Dγ) [e] :: BD.
e 4. 6. BV [f]:: 15. 6. & dividendo Aγ. γD :: 9. 6 [g] :: 3. 2 [h] :: B D. B K).
f *corol* 6. 2. *h.* Producatur Nϵ ad D A parallela, occurrens sectioni A$\varsigma\alpha$, punctis
g 15. 5. δ, ϵ. per quæ ducantur $\theta\delta\zeta$, $\kappa\epsilon\lambda$ ad B D parallelæ. Estque Aα.
h *priùs.* αC :: 4. 10 :: 2. 5. (nam posito AC = 10, vel AD = 5, erit
k 3 *cor. sch.* 5 *de quadr. parab.* Aγ, vel $\gamma\alpha$ [h] = 3, & γD = 2, unde Dα = 1, & αC = 4. itaque
l 20. *def.* 5. $\theta\delta$. $\delta\varpi$ (Cα. CA + AD. Dα) [h] = 2. 5 + 5. 1 [l] = 2. 1 [m] ::
m $\kappa\epsilon$. $\epsilon\xi$. denique ducantur tangentes $\theta\varphi$, $\kappa\psi$.

Conclusio 2.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate minorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* B T *ad quadratum* B D, *majorem verò quàm quadratum* $\theta\varpi$ *ad quadratum* B D, *demissa in humidum adeò inclinata, ut ipsius basis* (A C) *non contingat humidum, inclinata consistet, ita ut basis superficiem humidi nullo modo contingat, & axis* (B D) *cum humidi superficie* (E F) *angulum faciat majorem angulo* (φ).

Nam

Nam quia Zq. B Dq. $\left\{ \begin{array}{l} ^{a}\sqsubset \theta\varpi q.\ B Dq \\ \sqsupset B\Gamma q.\ B Dq \end{array} \right.$, [b]erit Z $\left\{ \begin{array}{l} \sqsubset \theta\varpi \\ \sqsupset B\Gamma. \end{array} \right.$ quare si inter sectiones A B C, A μ D aptetur ad B D parallela recta G H [c] = Z, cadet hæc inter B D, & $\theta\varpi$: per H ducatur recta A F, quæ humidi superficiem repræsentet. Itaque G H est diameter demersæ portionis A G F. ducatur tangens G Q, sitque G L = $\frac{2}{3}$ G H, ([d]unde L est centrum portionis A G F), ducatúrque L K M, [e]sic ut M sit centrum partis extantis, & ob G L [f] = 2 L H, erit G O $\sqsupset$ 2 O H, quare O cadit supra L; & cùm portio A B C [g]feratur juxta rectam K O, pars demersa attollatur per illi parallelam L R, altera deprimatur secundum M S; quiescat tandem, ut humidi superficies sit E F, eique parallela tangens X Y, constátque esse ang X Y B [h]$\sqsupset$ ang Q [h]$\sqsupset$ ang φ.

Q.E.D

a *hyp.*
b 10. 5.
c *corol.* 8. 2 *h.*
d 3 *lemm.* 2 *h.*
e 8. 1 *æquip.*
f *constr.*
g 2 *hypoth.* 1. *h.* & 2 *lem.* 1. 2 *h.*
h 16. 1.

Concl. 3.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate eam habeat rationem, quam quadratum* $\theta\varpi$ *ad quadratum* B D, *demissa in humidum inclinata adeò, ut basis ipsius non contingat humidum, consistet & manebit ita, ut basis* (A C) *in uno puncto humidi superficiem* (A ϖ) *contingat, & axis cum superficie humidi angulum faciat angulo* φ *æqualem. Quod si portio ad humidum in gravitate eam proportionem habeat, quàm quadratum* $\varkappa\xi$ *ad quadratum* B D, *in humidum demissa, & posita inclinata adeò, ut basis ipsius* (A C) *non contingat humidum; consistet inclinata, ita ut basis in uno puncto humidi superficiem contingat, & axis cum ea faciat angulum angulo* ψ *æqualem.*

Nam 1°. $\theta\varpi$ ([a]Z) est diameter portionis A B*f*, ejusque centrum [b]est δ (ob $\theta\delta$ [c] = 2 $\delta\varpi$), & si per K δ ducatur recta, [c]hæc per tria centra transibit, & secundum ipsam tota portio, ipsæque partes ferentur, [d]ergo immota consistet portio. Estque ang φ = ang A $\varpi\zeta$ (ob $\theta\varphi$, A ϖ, & $\theta\varpi$, B D parallelas). Quòd si portio in alio situ constituatur, centrorum situs immutabitur, neque in una recta convenient, unde commovebitur portio, donec in hunc situm restituatur. Simili discursu, si Zq. B Dq :: $\varkappa\xi$q. B Dq, erit $\varkappa\xi$ (= Z), diameter portionis submersæ, & tota portio consistet sub angulo ψ = A $\xi\lambda$ &c.

a *cor.* 8. 2 *huj.*
b 3 *lem.* 1. 2 *h.*
c 2 *lem.* 1. 2 *h.* & 2 *hypoth.* 1 *h.*
d *sch.* 8. 1 *huj.*

Concl. 4.

Si portio (A B C) *ad humidum in gravitate majorem quidem proportionem habeat, quàm quadratum* $\varkappa\xi$ *ad quadratum* B D, *minorem*

verò

verò quàm quadratum θδ ad quadratum BD; *in humidum demissa, & inclinata, adeò ut ipsius basis* (AC) *non contingat humidum consistet, & manebit ita, ut basis in humidum magis demergetur.*

Simili ferè discursu probatur, quo secunda conclusio inter parabolas ABC, A μ D aptando GH (= Z;) quæ in hoc casu cadet inter

a hyp.& 10.5. θϖ, κξ, quia Z [a] $\left\{\begin{array}{l} \sqsupset \theta\varphi \\ \sqsubset \kappa\xi \end{array}\right\}$. Eritque tum (in situ AGF) GO ⊏ 2OH, & propterea punctum O cadit inter centrum L, & H; neque consistet humidum in illo situ, sed quum basis magis demergitur.

Concl. 5.

Fig. 239. *Si portio* (ABC) *ad humidum in gravitate proportionem habeat minorem, quàm quadratum* κξ *ad quadratum* BD; *demissa in humidum, & posita inclinata adeò ut basis ipsius* (AC) *non contingat humidum, consistet inclinata, ita ut ipsius axis* (BD) *cum humidi superficie angulum faciat* (Q) *minorem angulo* ψ, *& basis* (AC) *nullo modo superficiem humidi contingat.*

Probatur itidem ut 2[da], aptando rursus GH = Z, & hic in situ AGF erit GO ⊐ 2OH, & punctum O cadet inter centrum L, & verticem G. itaque ut consistat, inclinari debet.

Liquet verò in hoc casu positâ EF superficie humidi consistentis, GH diametro portionis EGF, GQ ad EF parallelâ, esse ang Q ⊐ ψ.

Nam si ang Q ⊏ ψ, [a]erit idcirco punctum Q inter B, & ψ, [b]& punctum G inter B, & κ. [b]unde GO ⊏ κς. Atqui κς [c]= $\frac{2}{3}$κξ [d]⊏ $\frac{2}{3}$GH = $\frac{2}{3}$Z. unde GO ⊏ $\frac{2}{3}$GH. [e]unde O non erit centrum portionis EGQ. quare portio ABC non consistet, contra hypothesin.

a 16. 1.
b ex. 35. 1 Apol.
c supra.
d constr.
e 3 lem. 1. 2 b.

FINIS.

LEMMATUM ARCHIMEDIS, *quæ vocantur*, Editio Nova.

PRÆFATIO.

HÆC ماخوذات *Machudát*, sive *Lemmata Archimedis*, quorum pars magna usum habet atque elegantiam, nè penitùs interirent inter *Motawassetát* متوسطات i.e. libellos inter Elementa *Euclideana* grandémque *Ptolemæi* Syntaxin medios, (quos *Alexandrini* jam olim μικρὸν Ἀστρονόμον appellitabant,) adservare maluerunt *Arabum* Mathematici: quod præter præfationem *Abi'lHasan*, duo Codices Bibliothecæ *Bodleianæ* nimio satis comprobant. De *Græcis* tamen minùs emendatis quingentis penè abhinc annis *Arabica* fecit Vir Cl. *Thabetus Corraides*. Postea Notis suis nè vix adornavit is quem dixi, *Abu'lHasan* (vel *Abu'lHonein*, ut aliqui volunt proclivi errore) *Ali Ebn Ahmed Nasvæus* ابو الحسن علي بن احمد النسوي. Quinetiam Latinè nunc ea leguntur ex duplici versione, alterâ quidem Celeberr. V. D. *Johannis Gravii*, quæ cum animadversionibus pauculis *Sam. Fosteri* Prælectoris *Greshamensis* sæculi hujusce devergentis anno LIX. *Londini* prodiit, mox alterâ *Abrahami Ecchel-*

lensis, quam suis adnotatis illustravit, atque adeò *Florentiæ* edidit egregius Mathematicus *Alf. Borellus*. Valdè autem miror virum præclarum alterumq; planè *Siciliæ* decus, de istorum Lemmatum Authore tam anxiè disputare: dummodo constat, ut nihil certius, Lemma omnium primum illud esse quod ad Tactiones *Apollonianas* suo ex ingenio posuit *Pappus*: tum quartum quintúmve nè vix ab eis differre, quibus Theorematum Floridorum Conditor Propositionem ἀρχαίων sed nulli certo Authori redditam (hanc in Lemmatum horunce sextum ita conjectam hodiéq; legis) illustratam voluit, nim. *Prop.* XIV. & XVII. *Arabes* autem, quibus *Archimedis* nomen in Mathesi præ cæteris clarius fuit notiúsque, vocabula ipsa ἄρβηλον & σελήνιον (*Lem.* 4. & 15.) summo viro retulere; quanquam *Pappus*, cujus fortean de scriptis *Eutocius* (sic amat) pleraque hæc Lemmata carpserat, simpliciùs paulò dixerat, χωρίον ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον: de voce alterâ certa est fides diu ante *Archimedem* natum apud Geometras valuisse. *Opus potius esse mixtum reor, atque ab uno vel altero Theoremate sive *Archimedis* sive *Apollonii*, (talia enim ultrò inducit Doctrina Tactionum,) certè perantiquo, cæteris omnibus, ut audent scioli, hominis pænè Divini nomen additum inscriptúmque. Lemmatum verò suorum libellum scripsisse olim *Archimedem* nullus putem aut voluisse. Isthæc ita præcipuæ modò Propositioni præmittere solet, modò ἐπὶ τέλει subjicere. Quod ad quartum alterius libelli περὶ σφ. καὶ κυλ. conqueritur *Eutocius*, minus innuit quàm viro docto perplaceat: plerisque puta Exemplaribus Operum *Archimedis* binorum Lemmatum tam ἀναλύσιν quàm σύνθεσιν, quas ad *Prop. IV.* pollicitus erat, malè excidisse; tum duo illa Theoremata (plura nè cogites) quæ fortè repererat *Eutocius* adeò fuisse propter Scribam malehabita, corrupta & defor-

*Ii homines huic etiam tribuerunt libellum, qui erat Zenodori *de Isoperimetris*, imò *fragmentum de Statica*, atque *alia*.

deformia, ut pro *Archimedéis* accipere quæ erant *Archimedis*, omninò ſubvereretur. Sed præfari multis haud decet. Breviculus enim ex ſe liber iſte eſt, & hoc compendio adhuc brevior.

Id verò ſubmonendum puto, Schemata quæ heic vides ab Autographis Præſtantiſſimi viri D. *Jac. Golii* fuiſſe expreſſa; ſive in meliores codd. incidit ille, quàm *Abr. Ecchellenſis* atque ego vidimus, ſive potiùs ingenio ac eruditione ſuis plus maximo potuit. Verùm de tanto viro, déque filii ejus erga me meritis tum dicam quæ ſentio ipſe, & omnes ſcire oportet, quando adhuc alia quàm ſtricturas ſcripſero & Epitomas.

Archimedis Lemmata.

Lemma I.

B*inorum circulorum* A B C, D B E, *sese intra extrave tangentium in* B *diametri* AC, DE *invicem parallelæ sint; recta linea est quæ per* A D B *transit.* Fig. 260. 261.

a 11, 12, 3.
b 31. 1.

Adjunctæ rectæ [a] F G B æquidistet [b] D H. Jam propter æquales H F [c], D G [d], G B, necnon [d] F A, F B; erit H A = [e] F G = [c] DH, & [f] A D H = A. Atque ob pares [g] B G D, B F A, D H A, erunt [h] B D G + B = A + A D H = 2 A, & B D G [k] = A. Unde [l] A D G + A [g] = 2 rect = A D G + G D B. Recta igitur [m] linea est A D B. Aut in fig. alterâ, Unde [l] A B G + A (= [n] F B D + H D B) [g] = 2 rect = A B G + (B D G [f]) G B D, & A B D [m] recta est.

c 34. 1. d 15. *def.* e *ax.* 3, 2. f 5. 1. g 29. 1. h *cor.* 32. 1. k *ax.* 7. l *ax.* 2, 1. m 14. 1. n 15, 29. 1.

Notæ.

Hoc lemmate *Prop.* XXIV[am] Operis *Apollonii* περὶ ἐπαφῶν jam olim illustrabat *Pappus*, ut videre est *Prop.* CX. LVII[mi] Συναγωγῶν. Commonstrat verò (connexis radiis G B, F B, & ipsis G D, F C invicem parallelis) tam F B G quàm A B D rectas esse, apodixi probâ quidem (contra quam putat Vir doctus,) & eleganti. Ecce illam!

Est enim ductâ tangente O P, G B O [o] = recto [o] = O B F, atque [n] G B F recta. Et, quia [p] D G. G B :: B F. F A, & D G B [g] = B F A, erit [r] G B D = F B A. Recta autem est G F, ergo [s] A B D etiam recta.

o 18. 3. p *def.* 15. *et* 7. 5. r 6. 6. s *sch.* 15. 1.

Consimile autem Lemmation Cl. *Comandinus* Propositioni XIV. Libri Quarti Collect. *Pappi* addidit, ut opus fuit, quod vide. Verùm id jam obiter monitum velim, Propositionem illam XIV *Pappi* eandem omninò fuisse (sic reor) cum XXIV[ta] Geometræ *Pergæi* de Tactio-

Tactionibus, atque adeò utramque minimè differre abs horum Lemmatum Quinto; omnes equidem ipsas eadem Lemmatia, Illustrationes easdem, ut probè constent, exposcere.

Casum duntaxat facillimum exposuit *Abu'lHasan*, parùm quidem peritè, ubi A D B, F G B diametris A C, E D rectè insistant, nempe (H—A) A D H + recto H D G + G D B (G—B) = 2 rectis. recta igitur ipsa A D B.

Lemma II.

Fig. 262. *Si semicirculum* A B C *à puncto* D *tangant rectæ* A D, D B, *& deducatur* B E ⊥ A C: *connexa* C D *ipsam* B E *bifariam secabit in* F.

a 31.3.& 13.1
b 18.3. & 28.
c cor. 36. 3.
d 5.1.
e 29.1. et 4.6.
f 14.5.
g cor. 32.1.
h ut modò.
k ax. 3.
l 6.1.

Occurrant invicem [b] C B, A D protractæ in G, & jungatur A B. Quia (ob pares [c] A D, D B,) A B D sive [d] B A D + D B G = recto G B A[a] (A B C) = [g] B A D + G, erit G B D [k] = G, & [l] G D = (D B [h] =) A D. Atqui propter parallelas A D, E B, erit DA . FE [e] :: (DC.CF ::) GD. BF. Quare [f] E F = F B.

Notæ.

1. Paria heic peccavit Adnotator *Nasvæus* atque in præcedente Theoremate; scil. è casubus summè obvium adduxit, quando Cathetus B E ad centrum circuli A B C pertineat.

2. Hinc, ut bene monet Cl. *Borellus*, investigare licet duo polygona ordinata & similia, quorum circumscriptum inscriptum excessu quidem minori dato quovis superet, tum etiam rationem diametri ad circuli peripheriam compendio egregio eruere. Nam C E. C A :: B E. (A G) A D + D B; hoc est, perimeter polygoni circulo A B C ex semilatere B E inscripti, ad perimetrum duplo laterum numero ex latere ipso A D + D B circumscripti. Chordas verò per seq. Lemma, atque etiam proportionem licet inter A C & C E magis semper magisque minuere, eóque rationem diametri A C ad semichordam B E elicere. Quippe hinc datur B Eq, & huic par A E × E C, imò datur per Lemma, quod sequitur, ipsa A E. quare E C datur, atque etiam recta A D + D B. Idcirco ad peripheriam circuli (quæ quidem inter adscriptorum polygonorum ambitus mediat,) ratio diametri illicò emicat.

3. Horum Lemmatum Compilator, quisquis fuerit *Græcorum*, aut Scholiastes fortè *Arabs*, rectas A D, D G pares esse jubet, suo quasi fretus opusculo de Rectangulis, quod jam pridem periit. Istud tamen ex Elementis facillimè constat.

Lemma

Lemma III.

In circuli segmento A B C, *à quovis curvæ puncto* B *ad basin* A C *agatur perpendicularis* B D, *fiantque* D E = D C, *&* *arcus* B F = B C: *annexa* F A *erit æqualis ipsi* A E. Fig. 263. 264. 265.

Jungantur C B, B F, F E, E B. Est igitur E F B [c] = F E B, propter æquales rectas F B[a], (B C) [b]B E. Sed A F B + (A C B[b]) C E B [d] = 2 rectis [e] = A E B + C E B. Quare [f] A F B = AEB, & (A F B — F E B) A F E = A E F. Unde [g] A E = A F.

a 29. 3.
b hyp. & 4. 1.
c 5. 1.
d 22. 3.
e 13. 1.
f ax. 3.
g 6. 1.

Schol.

1. Hujus egregii Theorematis Casus secundus, ubi A B C est semicirculus, *Cl. Ptolemæo* rectas olim circulo applicanti pernecessarius erat. Lemma tamen, quod τὸ κατὰ διχοτομίαν appellatur, cap. IX. Libri Primi Μεγ. Συντ. hâc occasione non constat modò, sed & generale evadit.

Datis scil. tam chordis quàm arcubus C A, A F, F C, adeóque semiarcu B C, quæritur ipsa B C chorda. Demissâ B D ⊥ A C, habes, ut priùs, $DC = \frac{EC}{2} \left(\frac{AC - AF}{2}\right)$. D verò rectus est, & B C D ex dato arcu (A C — C B) B A, etiam datus. Quare specie datur (per 40. Dat.) triang B D C. Dantur igitur ratione (3 def. Dat.) sed & magnitudine (2 Dat.) rectæ B C, C D. Fig. 264.

2. Rursum socors esse mavult *Abu'lHasan*; (istum enim λέξεως pravatæ insimulandum reor) & præter Authoris *Græci* ingenium, omissis reliquis casum medium ostentare.

Lemma IV.

Super A C *ejusque segmenta* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *&* *fiat* D B ⊥ A C: *erit figura* (A B C F D E A) *trium semicirculorum peripheriis interclusa, quam* Ἄρβηλον *vocat Archimedes, circulo circa* B D *æqualis.* Fig. 266.

Nam A Dq + D Cq + (A D × D C bis [a]) D Bq [b] = A Cq. Súntque [c]circuli inter se, ut quadrata diametrorum. Quocirca [d] semicirculus A B C æquatur circulo circa diametrum B D, una cum binis

a cor. 13, 17. 6.
b 4. 2.
c 2. 12.
d ax. 7.

e *ax.* 3. binis ſemicirculis A E D, D F C: unde [e] Arbelon *Archimedæum*, hoc eſt, ſemicirculus A B C minus ſemicirculis A E D, D F C par omninò erit circulo circa B D deſcribendo.

Notæ.

1. Cl. *Borellus* iſta verbis ſuis adnotat.

" Hæc forſan eſt una earum propoſitionum quas *Pappus* legit in " libro antiquo de menſura *Arbeli*, ſeu ſpatii à tribus ſemicircumfe- " rentiis circulorum comprehenſi, ut ait *Proclus*: quæ quidem ele- " gantiſſima eſt, ejuſque inventionis Lunulæ *Hippocratis Chii* origi- " nem extitiſſe puto. Eſt enim *Hippocratis* Lunula ſuperficies plana " à quadrante peripheriæ circuli majoris, & ſemiſſe peripheriæ cir- " culi ſubdupli comprehenſa. Arbelus verò recentiorum eſt ſpatium à " triente & à duobus ſextantibus circumferentiarum trium circulo- " rum æqualium comprehenſum; & hiſce duobus ſpatiis facilè qua- " drata æqualia reperiri poſſunt. At Arbeli *Archimedis* & *Procli* huc- " uſque reperta non eſt quadratura; ſed poteſt quidem aſſignari cir- " culus prædicto ſpatio æqualis. *Vide jam Viëtam in Reſponſis.*

2. Huic figuræ nomen dedit, ut par erat, cultellus ſeu ſcalprum Sutoris, quâ formâ ſemper fuit. Unde pervetus Gloſſa, Ἄρβηλον, Sicila: & Etymorum Græcanicorum conſarcinator, Ἄρβηλον, σμιλίον σκυτικὸν περιφερές· ἔστι δὲ καὶ ὅπλον. Imò ante iſtos Scholiaſtes *Nicandri* paulò diſertiùs, Ἄρβηλοι δὲ λέγονται κυκλοτερῆ σιδήρεια, οἷς οἱ σκυτοτόμοι τέμνουσι καὶ ξέουσι τὰ δέρματα. Hæc tamen obiter; alia jam me Matheſis diſtinet. Interpreti autem Arabi اربلوس *Arbelus* dicitur tanquam de virilis generis voce *Græcâ*.

3. Hoc quartum Theorema ex *Pappi* inventis fuiſſe exiſtimo, quo ad propoſitionem ſequentem, quæ ſubtiliſſima eſt & Sene *Siculo* digna, via certior ampliórque pateret: nec adeò *Hippocrati Chio* Meniſcos quadrandi cauſam dediſſe aliquam, quin ipſum potiùs abs antiquiſſimo illo Tetragoniſmo quàm opportunè ortum fuiſſe. Ait enim *Pappus*, quamprimùm expoſuerat Antiquam illam Propoſitionem, quæ proximum Lemmatum *Archimedæorum* facit, & quidem paulò ante decimum quartum Floridorum Theorematum Libri ſui Quarti, (quod minimè diſcrepat ab hoc Lemmatio,) — Δειχθήσεται δὲ τὰ προτεθὲν λαμβανόμενα.

Lemma V.

Super A C *ejusque segmenta quævis contigua* A D, D C *describantur tres semicirculi* A B C, A E D, D F C, *sitque* D G ⊥ A C: *pares invicem erunt circuli* B H E, L F N, *qui Arbelo* A B C D *inscripti, tam perpendicularem* G D *quàm semicirculos contingant in punctis* H E B, L F N. Fig. 267.

Duc diametrum H I: hæc autem [a]æquidistet A C, ob [b]rectam D H I [c]= A D H, atque connexa B I -|- I A [d]recta est. Tum conveniant A B, D G in G, convenient etenim [e]propter B A D -|- A D H < 2 rectis: adjuncta B H -|- H C, & recta est, & ad [f] A G perpendicularis, atque [d] I E -|- E D, & A E -|- E K etiam rectæ. Est autem [c]G D ⊥ D A, & juncta C K ⊥ K A, quare producta C K G recta erit. Quoniam verò E D || C G, propter rectos [f] A E D, A K C, erit [g] A D. I H :: (A G. G I ::) A C. C D. adeóque [k] A D × D C = A C × I H, & argumento pari A D × D C = A B × L M. Æquantur igitur inter se diametri I H, L M, & [h]circuli ipsi I E H, L F M. *Q. E. D.*

a 28. 1.
b 19. 3.
c *hyp.*
d *lem.* 1.
e 29, 32. 1.
f 31. 3.
g 2. 6.
h 2. 12. *ult.* 1.
k 16. 6.
l *v. schol.* 1.
n 27. 3.
o 32. 1.
p 14. 1.

Scholia.

1. Sive *Græcus* ille, qui hæc Lemmata primus collegit, sive potiùs *Arabum* aliquis, quo C G rectam lineam esse ostenderet, citat Opusculum suum de Trigonis Rectangulis. Inde verò *Ali Abu'lHasan* hoc adjumenti accepit. *v. fig.* 271. (*sive schema primum Borelli, ad paginam.* 393.)

B C ⊥ A G, quod in triang A B C per F occursum perpendicularium B E, C D transit. Junge D E. Circulus A D F [f]ibit per E, ob rectum [c] A E F. Æquantur autem [n]D A F, D E F, atque [n] D E B, D C B, hoc est, B A G, D C B. & B communis est. Unde [o] A G B (C D B), [c]= recto A G C. Recta [p]igitur est C B, sive in schemate *Archimedeo* C G.

2. Deinde Adnotator *Nasvæus* cæteros casus hujusce quinti Theorematis ad mentem *Abi Sahl Cuhensis*, percelebris Mathematici, hoc ferè modo exponit. Fig. 268.

Casus secundus. Vel semicirculi A P N, O P C se mutuò secent in P. Sitque D P ⊥ A C: æquales invicem erunt circuli H E B, M F L, qui semicirculos & perpendicularem contingunt.

Æqui-

Fig. 268. Æquidistant H I, A C, & agantur A B, A H K [a] transeuntes per
[a] *lem.* 1. I, E. atque conveniant A G & D P in G. Dein jungatur recta [b] C K
b $\perp$ K G, & I N $\perp$ C B [a] transeuntes per E, H.
c 31.3 : 28.1. Propter parallelas [c] C K N I, est [d] C A. C N :: (A G. G I ::) A D.
d 2.6. H I. adeóque [e] C N $\times$ A D = C A $\times$ H I. Verùm C D $\times$ D O =
e 16.6. [f] D Pq = A D $\times$ D N, atque [c] C N. D A :: (N D. D O ::) [g] C N.
f *cor.* 13.17.6. O A. Quare [e] C D $\times$ O A = D A $\times$ C N [h] = C A $\times$ H I. Pariterq;
g 19.5. C A $\times$ L M = C D $\times$ O A. Unde æquantur & diametri L M, H I,
h *ut priùs.* & circuli [k] M F L, H E I.
k *ult.*1 : 2.12.

Casus tertius. Vel semicirculos jam disjunctos A E N, O F C tangant partes rectæ D F, D P : æquantur circuli H E B, M F L, qui tam semicirculos quàm perpendicularem à tangentium occursu (D) erectam contingunt in punctis E, B, H, & F, R, L.

Æquidistent A C, H I, L M diametri, & jungantur C B, I N, rectæque A H K, C G transeuntes per H, E, & K; quia [c] C G || C N, erit [d] A D. H I :: (A G. G I ::) A C. C N, adeóque A D $\times$ C N = A C
l 36.3. $\times$ H I. Ac pariter C D $\times$ A O = A C $\times$ L M. Est autem [l] C D $\times$ D O = (D Qq = D Pq) A D $\times$ D N, atque C D. A D :: (D N.
m 18.5. D O ::) [m] C N. A O. Quocirca A D $\times$ C N [e] = (C D $\times$ O A) [h] = A C $\times$ H I = A C $\times$ L M = C D $\times$ O A. Pares igitur invicem sunt diametri L M, H I, circulique [k] L F M, H E I.

Lemma VI.

Fig. 270. *Circuli* E F B, *qui tres semicirculos super* A C, A D $= \frac{r}{s}$ D C, *&* *ipsam* D C *descriptos contingit, diameter* G H *diametro* A C *æquidistet; quæratur autem proportio diametrorum ad invicem.*

Ductis rectis A G, G B, C H, H B, H E, E A, G F, F C, item D G, D H, D I, D K, G L O, H M P, erit G O $\perp$ A O, & H P $\perp$ A C.

Et (propter H G, D K, D I || A C, A B, C B) erit O P. P C :: G M. M C :: A D. D C :: A L. L H :: A O. O P :: O P. P C, hoc est, $\frac{r}{s}$ P C. P C.

Unde aggregatum ex 3 continuè proportionalibus,

$$\frac{r^2 PC^2}{s^2 PC} + \frac{rPC}{s} + PC. \frac{rPC}{s} :: AC. PO = GH.$$

Ex,

Ex. gr. (sic enim vult Arabs) sit P C = 4. Erit O P = 6, O A = 9, adeóque diam. A C . G H :: 19 . 6.

Adnotata in Lemma V & VI.

§ 1. Lemmatum *Archimedis* quod putant, quintum ex *Pappi* inventis assumptísque transcriptum est, quâ arte illustrius esset id quod sequitur.

Præmonet adeò, priusquam ostenderet principem illam veteremque propter quam appellitat ex vett. membranis, Libro *IV.* Floridorum *Prop. XIV.* eisdem positis quæ in Schemate nostro 270, & ab α deductâ $\alpha\,\mu \perp$ A C & = G O, esse μ D . $\frac{1}{2}$ H G :: A D — D C . A D + D C.

Rectæ etenim sunt [a] A E H, G E D, C F G, D F H; similiáque trig. [b] D E A, D O G, itemque D H P, D F C, quare A D . D E :: G D . D O, & A D O = E D G: pariter D C . D E :: H D . D P, & C D P (= HDE = EDG) = ADO. a *Lemma* 1. b 31, 3. 32, 1. & 4. 6.

Unde AD . DC :: PD . DO. & componendo convertendoque AC . AD—DC :: PO = GH . PD—DO :: Pμ = $\frac{1}{2}$ G H . $\frac{1}{2}$ PD — DO. *Q. E. D.*

Syntheorema 1. Tum propter sim. trigona D O G, (DEA,) HPA, erit D O . O G :: H P . P A, & D O × P A = G O × P H = HPq = Q. $\alpha\,\mu$.

2. Imò, quia C D . D A :: O D . D P erit componendo tam AD . AC :: PD . PO & diam. AD × (PO) GH = PD × AC. quàm CD . AC :: OD . PO. & diam. CD × (PO) GH = DO × AC.

§ 2. Deinde *prop. XVII. l.* 4. quæ decimam sextam ejusdem adjuvat, ut D H q . H I q :: A C . C D. Ponantur eadem quæ in Figurâ 267. fiatque I O $\perp$ A C, Rectæ gr. sunt [n] H E A, I E D, & propter ea C A × A O = [a] (coeuntibus D, P.) A D q. [b] A C. (A C — A D) D C :: A D. (A D — A O) D O = H I :: (ob sim. trigona [c] A E D, H E I) D E . E I :: [h] D E q . E H q :: [f] D H q . H I q. a *per preced.* b 17. 6 : 19. 5. c 34. 1. *est.* d 4. 6. e 31. 3 : 29. 1.

Est etenim propter I H D [i] rectum, & [k] H E $\perp$ D I; [g] D E . E H :: H E . E I :: D H . H I. f 22. 6. g 8. 6. h 20. 6.

Hinc statim constat horum Lemmatum quintum, viz. [l] AC . DC :: ⊙ circa D H . ⊙ circa H I pariter, A C . A D :: ⊙ circa D H . ⊙ circa L M. Æquanturque [m] circuli ad H I, L M. Quod ex *Pappo* comprobatum volui. i 18. 3. k 31. 3. l 12. 2. m 19. 5. n *Lem.* 1.

§ 3. Propositio autem illa Antiqua & *Archimedea*, quam vocant, talis erat referente *Pappo lib. 4. prop. XVI.*

Tres semicirculos in spatio *Arbelico* tangat circulus G F H, ipsum verò binósque semicirculos alter circa N etiam tangat, atque ita porro. Erit $\alpha\mu = GH$, & $QN = 2RI$, &c. juxta naturalem numerorum seriem. (Ponantur ea quæ in Schem. 270.)

a § 1. *sch.* 1° Æquantur [a] C A O, P A D, atque A C P, O C D, unde [b] AD.
b 16. 6. A C :: A O. A P, necnon A C. C D :: O C. C P. Quare, [d] A O.
c 17. 5. (P A—A O) O P :: A D . D C [c] :: O P. P C, & [e] O Pq = A O ×
d 19. 5. P C [e] = Q: $\alpha\mu$. Ergo [f] $\alpha\mu$ = (O P) [g] = G H.
e 17. 6.
f *ult.* 1. 2. Et, quia [h] $\frac{2}{1} = \frac{\alpha\mu + GH}{GH} = \frac{NQ}{RI}$ - 1 erit QN = 2 RI.
g 34. 1.
h 15. *Papp. l.* 4. Et sic deinceps.

3. Quinimò si fuerint A C, D C in fig. 267. inter se sicut numeri
9. 10. quadrati, [i] erit D H commensurabilis diametro H I, aliàs non. Nam per § 2 universè, $\frac{AC}{CD} = \frac{DFq}{HIq}$. Sit igitur $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{1}$, erit DF = 2HI: pariter QN = 3RI, &c. juxta vulgatissimam numerorum consequentiam.

4. Quæ est *Pappi* propositio *XVIII.* Manifestum etiam est, si circuli *f, g, h*, & semicirculos A D E, A B C, séque invicem tetigerint, fueritque Cathetus *fn* æqualis radio, fore $go = 3gi$, & $hp = 5hq$, &c. juxta numeros deinceps impares. Nam per § 3. $\frac{fn + 2fn}{\text{diam.}} = \frac{go}{2gi} = \frac{3}{2}$, & $go = 3gi$, &c. (vide fig. 282. sive illam *Pappi* ad *XVIII. pr. lib.* 4.)

Lemma VII.

Fig. 272. *Circulus* A B C *quadrato* A C *circumscriptus duplus est inscripti circuli* E F G.

a 34. & *ult.* 1 Ductâ [a] etenim diametro E G || B C, erit diam. B Dq [b] = (2 BCq)
b 47. 1. 2 E Gq, & circulus circuli duplus.
c 2. 12. Adnotat *Abu'lHasan Næsvæus*, tanquam ex libello quem de Circulo fecit, tritum illud,

Vis $\frac{r}{s}$ polygoni sive circuli dati E H G. Habes latus aut diame-

trum

trum E G, & $\frac{r}{s}$ E G, necnon (per 13. 6.) quadratum par rectangulo $\frac{EG^2 r}{s}$. unde, E G. $\frac{EGr}{s}$ :: E G². $\frac{EG^2 r}{s}$ :: [c] circulus datus quæsito :: per 20. 6.

Lemma VIII.

In circuli secante A C *statuatur* B C *par radio, & per circuli centrum* D *agatur* C E : *arcus* A E *triplus est ipsius* B F. Fig. 273.

Ductis enim E G ∥ A B, radiisque D G, D B : erit D G E [a] = D E G $\left(\frac{GDF}{2}\right)$ [c] = C [a] = F D B [d] = $\frac{1}{3}$ G D B, & arcus B F [e] = ($\frac{1}{3}$ B G) [f] $\frac{1}{3}$ A E, ob A G E [c] = G A B. unde constat propositum.

Alf. Borell. hoc fermè modo. Adjunctâ E B, erit (B D C) [a] C = 2 D E B [a] (E + E B D) : unde A B E [b] = C + E [s] = 3E, & arcus A E [e] = 3B F.

Quod in hoc theoremate ponitur, datæ peripheriæ τειχοτομίαν, quod vides, inducit, atque ita Geometriam planam, ut ritè construatur, omninò superat. Id tamen facili opere præstat *Solida*, multóque adhuc plura *Linearis* quam vocant.

Lemma IX.

In circulo binæ quævis chordæ A B, C D *sese ad angulos rectos secantes, intercludunt arcus* A D + C B, *pares arcubus* A C + D B. Fig. 274.

a 3. 3.
b cor. 26, 3. & constr.
c cor. 28. 3.
d ax. 1. def. 17.
e ax. 7.

Agatur diameter E F ∥ A B, est igitur G D [a] = G C, A E [b] = B F, & A E + A D [c] = E C. unde semicirculus C F + E A + A D = C F + F B + A D [e] = A C + D B.

Lemma X.

Circulum A E B *tangant rectæ* C A, C B, *secent verò* C D, *& huic parallela* B E, *& connexa* A E *secanti* C D *conveniat in* F : *Cathetus* F G *bisecabit ipsam* E B. Fig. 275.

Junge A B, est igitur C A B [a] = (A E B) [b] A F C, & D communis utrique triang [b] C A F, A H C ; unde [c] F C. C A :: C A. C H, &

a 32. 3.
b constr. 29. 1.
c 32. 1 : 4. 6.

d 17.6. & [d] F C × C H = C Aq [e] = C Bq. Quia [f] verò F C. C B :: C B,
e cor. 36. 3. & < [g] D communis, erit < [g] C F B = [g] (C B H [h] = G A B [k])
f cor. 17. 6. A F C. Sed (C F A) F E B [k] = F B E [b] (C F B), angulíque [l] ad G re-
g 6. 6. ¢ti, atque latus G F commune; quare E G [l] = G B.
h 5. 1.
k ax. 1.
l 26. 1.

Lemma XI.

Fig. 276. *Circuli diameter* A F *poteſt quadrata ex ſegmentis binarum chordarum* A B, C D, *ſeſe ad angulos rectos ſecantium in* E.

a ax. 12 31.3. Jungantur A C, A D, C F, D B. Propter A E D [a] = A C F, &
b 27. 3. A D C [b] = A F C, erit C A F [c] = D A E, & tam curva quàm re-
c cor. 32. 1. ¢ta C F [d] = D B. Unde AFq [f] = C Fq [e] (D Bq) + A Cq, hoc
d 26, 29. 3. eſt, [f] D Eq + E Bq + A Eq + E Cq.
e ult. 1.
f 47. 1.
g cor. ult. 6.

Schol.

Ali Naſvæus hoc modo: annexis A D, D B, B C. In triangulo D E B, E = recto [c] = B + D, & arcus D A + B C [g] = ſemicirculo. Poteſt ideò diameter utraque [d] D Aq + B Cq, hoc eſt, quadrata ex A E, E D, E B, E C.

Lemma XII.

Fig. 277. *Semicirculum tangant* C D, D E, *rectaque* C G *tranſeat per* F *interſectionem ſubtenſarum* D B, E A, *qui tactus* D, E, *& diametri terminos* A, B *connectant. Erit* C G ⊥ A B.

a 31. 3. Junge D A, E B. Erit ang. [a] rectus A D B [b] = D A B + D B A
b cor. 32. 1. [a] = B E F. Et (C D B) [d] D A B + A B F + F B E = D A B +
c 2 ax. (C E F) [d] A B E [c] = B E F + F B E [b] = D F E [c] = C D B + C E F.
d hyp & 32. 3. Unde C F [f] = C D: atque eſt D A G [d] (C D F [g] = C F D) +
e ax. 1. D F G = 2 rectis = [a] recto (A D F) + F G A. Quare [k] C G ⊥
f ſchol. A B.
g 5. 1.

Schol.

1. In Demonſtratione ut pares ſint C F, D C, provocatum eſt ad opuſculum, quod hodie nuſquam eſt, *de Tetrapleuris*: ſupplet tamen

h 13. 1. τὸ ἐλλιπὲς *Abu'lHaſan* Adnotator hunc in modum.
k 10 def. 1. Vis C F > D C = C H. Eſt igitur (connexis D H, H E,) C D H
l 16. 1. [g] ſeu D H C [l] > D F C, & C E H ſive C H E [l] > C F E: quare

D H E

DHE = CDH + CEH majore CDF + CEF, pars toto. Rursum ais CF $\angle$ DC = CG. Erit pariter (jungenti DG, GE,) DGE, hoc est, CDG + CEG minor CDF + CEF, totum parte. Ergo CF = CD.

2. *Cl. Borellus* Methodo idem directâ commonstrat, hâc puta.

Fac CN = CE, & adjunge NE. Anguli igitur [m] plani NDFE valent quatuor rectos, atque anguli [n] oppositi EFD (CDF + CEF) + N [o] (CEN) = FDN + FEN = 2 rectis. Quare circulus ex centro C (ob [o] CN = CE = CD) plano NEFD circumscriptilis [p] auferet [q] CF = CD. m *sch*. 32. 1. n *ax*. 3. o 19. 3. p 22. 3. q *def*. 15.

Lemma XIII.

Catheti AE, BF, *à diametri circularis extremis* A, B *cadentes*, *exsecante à diametro* CD *segmenta* CE, FD *invicem æqualia auferunt*. Fig. 278.

Junge EB, & per centrum G adige GI ∥ AE, quæ bisecat [a] CD & æquidistat ipsi BF. Erit (ob AG = GB) EI [b] = IB, & EH [b] = HF. Et HD (HC) minus HE æquales ipsi FD [c] = FE. a 3. 3: 30. 1. b 2. 6. c *ax*. 3.

Lemma XIV.

Super AB *ejusque paria segmenta* AC, DB, *atque sub intersegmento* CD *describantur quatuor semicirculi, & per* E *centrum circulorum* AFB, DGC *pertrahatur*, FG ⊥ AB: *Circulus circa* FG *aequalis est figuræ curvilineæ* AFBDGCA, *quam Salinon appellat Archimedes*. Fig. 280.

Sunt enim diam. FGq [d] (DAq) + CAq [a] = 2 DEq [b] (CEq) + EAq [c] = ½ ABq + DCq. Panterque [e] ipsi circuli Quare [f] semicirculi super AB, DC, æquanter circulis ad FG, CA. Et [g] Circulus ad FG minus illo ad AC, hoc est minus paribus semicirculis super AC, DB æqualis est Salino, sive figuræ à quatuor semicirculis AB, BD, DC, CA conclusæ. a 10. 2. b *hyp*. & *ult* 1. c *hyp*. & 4. 2. d 15, *dif*. e 2. 12. f *ax*. 7 g *ax*. 3.

Nota.

(Salinon) sive σελινιον Luna est, quatenus vultu planissimè suo appartet, hoc est, μηνοειδής. Unde nomen antiquitus erat puerorum amuletis.

Lemma

Lemma XV.

In semicirculo ACB, *sit* CB *chorda Pentagoni & recta* CD
Fig. 281. *per arcûs* CA *punctum medium* D *transiens diametro* AB *producta occurrat in* E, *atque connectatur* DA *Cathetus* FG *auferet* GF *semidiametro circuli parem.*

Jungantur CA,GD,DB,& è centro HD. Est igitur (ob [a]CAB $=\frac{2}{5}$ recti) CAD [b] = DAB $=\frac{1}{5}$ recti : utque (2 DAH) [d] DHB $=\frac{2}{5}$ recti. Sed rectus C [c] = G, & FA commune, quare (in trigonis ACF, GAF) AC = [f] AG : necnon (in trigonis ACD, AGD) ob pares angulos ad A, AD commune, & AE = AG, erit [f] ACD = AGD = [g] $\frac{3}{5}$ 2 rect. $=\frac{6}{5}$ recti. atque ACD = [h] DBE, & DBA [k] = DGB. Unde DB = [l] DG.

Item quia DHG $=\frac{2}{5}$ recti, & DGH $=\frac{6}{5}$ recti, erit HDG [k] $=\frac{2}{5}$ recti, & DG [l] = GH.

Postremò quoniam (in triang. EDB, HDG) BDE [h] = (CAB [a] $=\frac{2}{5}$ recti) GDH, & ut prius DGH = EBD, & DB=DG, erit EB [f] = GH, & EG [m] = radio BH.

a *Cor.* 10. 4.
b 17. 3.
c 9. 5.
d 5, 32. 1.
e 31. 3.
f 26. 1.
g *sch.* 22. 3.
h *cor.* 22. 3.
k 32. 1.
l 6. 1.
m *ax.* 2.

Coroll. I.

Annexis CH, CG, erunt ACE, HDE, & HCG, GDB trigona iscoscelia & similia, similiterque posita & ad bases secta. Nim. duas quintas recti æquant hinc HCB, HCG, GCE; inde EDB, BDG, GDH.

Coroll. II.

Liquet insup. EC (= CA, chordæ $\frac{3}{10}$ totius circuli) divisam esse in D mediâ ac extremâ ratione, cujus segmentum majus ED (= radio DH, ob DBE = DGH,) est latus hexagoni ordinat circulo ACB inscribendi, minusque DC decagoni, per 9, *e.* 13. pariterque juxta mediam extremamque rationem sectas esse EG in B, BH in G, & EH tam in B quàm G, EA denique in centro H. Deinde æquantur cùm ECB tum $\frac{1}{2}$ GCE parti quintæ recti.

Binæ prop. quæ sequuntur in editione Florentinâ ad indubium æternumque opus *Archimedis* de Spherâ prorsus pertinent. Codices etenim Arabici in 15. Lemma omnes desinunt.

Archi-

ARCHIMEDIS ΨΑΜΜΙ'ΤΗΣ

SIVE

Liber de Arenæ numero.

ARbitrantur nonnulli, rex *Gelo*! arenæ numerum infinitum esse. Dico autem non solùm ejus, quæ est circa *Syracusas* reliquamque *Siciliam*, sed etiam quæ in omni regione habitabili pariter atque inhabitabili continetur. Sunt Autem alii, qui non illum quidem infinitum putent, sed nullum dari denominatum numerum posse credant qui illius multitudinem exuperet.

Itaque eos qui ita opinantur, si ejusmodi arenæ molem animo comprehenderent, cujusmodi esset, si universa terra, repleto in eâ mari & cavitatibus omnibus, altissimorum montium vertices exæquaret; atque hujus ipsius rursus alterum multiplicem excogitarent, nonimè dubium est existimaturos illius multitudinem numeros longe omnes, multúmque superare. Ego verò id ostendere conabor demonstrationibus Geometricis quas tu ipse assequeris: eorum videlicet numerorum, qui à nobis expressi traditíque sunt in iis, quæ ad *Zeuxippum* Scripsimus, nonnullos non solùm arenæ multitudinem superare, quæ terræ undique repletæ ut diximus æqualis esset, sed etiam quæ ipsi mundo parem haberet magnitudinem. Non enim ignoras mundum à compluribus Astrologis appellari Sphæram, cujus centrum quidem est terræ centrum, semidiameter autem est æqualis lineæ inter centrum solis & centrum terræ interjectæ. Hæc igitur in iis, quæ ab Astrologis scripta sunt, redarquens *Aristarchus Samius* positiones quasdam edidit, ex quibus sequitur Mundum proximè dicti mundi multiplicem esse. Ponit enim stellas inerrantes atque solem immobiles permanere, terram ipsam circumferri circa solem secundùm circumferentiam circuli, qui est in medio cursu constitutus; sphæram autem inerrantium stellarum circa idem centrum cum sole sitam, tantâ esse magnitudine, ut circulus secundum quem ponit terram circumferri, eam habeat proportionem ad distantiam stellarum fixarum, quam centrum Sphæræ habet ad superficiem. (Vide *Copernic.* revol. *l.* 3. *c.* 15.) Id verò manifestò constat fieri non posse. Quoniam enim Sphæræ centrum nullam habet magnitudinem, neque perfectè ullam habere proportionem ad sphæræ superficiem existimandum est. Quare credibile est *Aristarchum* ita intellexisse, *utputa in hypothesium primâ, &c.*

Suis igitur numeris notisque (captu sanè perfacilibus) ut exhiberet Senex ille Siculus quantum arenarum capiendo esset fixarum orbis jam penitus oppletus, imò eo plusculum, hæc ante cætera poni voluit.

Hypotheses.

1. Est secundùm *Aristarchum*, qui inter sphæras fixarum solisque quàm inertes & defixas globum nostrum circum agitabat, ut hæc tellus: ad orbem Revolutionis Annuæ, (qui veterum Astronomorum Mundus fuit,) ita iste. ad orbem fixarum: Fiatque adeò horum diametris ἀνάλογον, per 18. *e.* 12.

2. Terræ autem ambitus, quem Antiqui Geometræ 300000 stadiorum esse comprobarunt, (quia decuplo liberalior maluit illis esse *Archimedes* εὐαμφιλόγου ἕνεκεν) haud superet trecentas stadiorum Myriadas, sitquè ita (per Cyclometrica *Archim.*) diameter terrestris minor quàm stadiorum centrum Myriades.

3. Statuatur solis diameter & terrestri major, & quidem trigecupla diametri Lunaris, neque plus. Quid enim? hanc *Eudoxus* noncuplam Lunaris diametri pridem asseruerat, *Phidiasqui* duodecuplam: & demonstraverat sanè *Aristarchus* (*prop.* 9. libelli aureoli qui adhuc adservari meruit,) nè vix vigecuplam, atqui esse plusquam ipsius octodecuplâm.

Observationes.

1. *Aristarchus* quidem capto solis angulo visuali (quâ in re & manus & visus & organa nimiùm fallere solent,) aiebat solis discum partem Zodiaci vigesimam & septingentesimam subtendere: Veruntamen *Siculus* noster, quoniam Problema suum subtilius eo quicquam haud postulat, observavit binos modò angulos, alium quidem angulo solis paulò majorem, aliumque eo minorem. Is autem erat observandi modus.

Dummodo in crenâ regulæ super palum versatilis jaciat Cylindrulus, solis jàm exorti oppositos solum margines visui ad extremum regulæ posito permittens, angulus quem capiunt rectæ à mediò visu Cylindrulum tangentes, major fuerit visuali solis angulo si

visio

viſio fieret in puncto: Quia vero hoc aliter fit, ponatur jam ad regulæ extremum, ubi priùs erat viſus, globulus, diametrum habens non minorem latitudine pupillæ: atque hunc globum necnon Cylindrulum tangant binæ rectæ; eæ accurſu ſuo angulum efficient minorem angulo ſolis viſuali, cùm utrinque aliquid ſolaris diſci compareat. Cæterem magnitudo viſu non minor hac arte inveſtigatur: Sumantur duo Cylindri bene tornati, terſi, & æquè craſſi, quorum alter ſit albus, alter non albus: Non-albus verò ad oculum quam proximè ſtatuatur in crenâ regulæ prædictæ, alter autem ab oculo magis diſtet; ſiquidem viſo non-albo albus juxta varia intervalla promotus diſpareat, magnitudo paris craſſitudinis cum Cylindris iſtis non minor erit diametro viſûs, quod ſuprà requirebatur. Ubi denique Cylindrulus in crenâ regulæ collocatus totum ſolis diſcum à viſu penitus abripit, rectæ quæ à viſu ducuntur Cylindrulum contingentes continebunt coeundo angulum haud minorem $\angle$ ſolis viſuali. Ita autem deprehenſus eſt angulus ſolis viſualis major eſſe $\frac{1}{200}$ recti anguli, minorque $\frac{1}{164}$ recti: Modos tamen alios ſtellarum diametros & quidem accuratius paulò captandi vide apud *Ricciolum* in Almag.

2. Obſervatum eſt 25 papaveres (μήκωνας) in rectam lineam diſpoſitos longitudinem digitalem ſuperare.

Sit tamen, majoris evidentiæ ergo, diameter papaveris haud minor quàm digiti pars quadrageſima: atque conſtet corpus papavere non majus decem millibus arenarum, neque pluribus.

Lemmata.

1. Solis diameter major eſt latere chiliagoni orbitæ revolutionis annuæ inſcripti.

Plano per terræ centrum *h*, viſúmque *d* ſecentur, ſole jam exorto, Orbis annuæ revolutionis, terra ipſa, & Sol ſecundum circulos *abc*, *def*, & *ſq*. quem quidem tangant rectæ *dn*, *dt*; itemque *hr*, *hq* ſecantes circulum *abc* in *a*, *b*. Quoniam, dum *k* horizontem ſtingit, [a] $\angle$ [g] *hdk* rectus *e*, exceditquè [b] terreſtrem diameter ſolis, erit ſole jam prorſus elevato, $\angle hdk$ obtuſus, [c] & $hk > dk$, necnon *rhq* ($\angle$ [d] *ndt*, angulo ſolis) $< \frac{1}{164}$ recti: adeòque recta $ab <$ ſubtenſâ $\frac{1}{4 \times 164}$ circuli *abc*. Atqui perimeter 656-goni. *kh* :: $\sqsubset$ 44 . 7 :: $\sqsubset$ 656 . $104\frac{4}{11}$, atque adeò latus 656-goni. *kh* :: $\sqsubset$ 1 . $104\frac{4}{11}$: quare $\frac{ba}{kh}$ :: $\sqsubset$ ($\frac{1}{1148}$, *i.e.* in integris, :: $\sqsubset$) Fig. 283.

a 18. 3. Commandini.
b *hyp.* 3. *pag.*
c 32, 19. 1.
d 24 *opt.* Aucl.
e *Obſerv.* 1.
f *cor.* 33. 6.

 $\frac{1}{100}$

g Ptol. Alm. l. 1. c. 9. $\frac{1}{100}$: atque ba multò $\sqsupset \frac{hk}{100}$. est autem ba diameter circuli fg.
h 13. 5. quippe (ob auh, bkr, rectos [m] & b communem) est [n] $hk . ba$ [i]
i 6. 1. $= hk :: kr . au$: unde [o] $kr = au$, & diameter $(= 2kr)$
k 28. 5. $= ab$; Estque [p] $2 hy \sqsupset ab$ sive $2 ks$, unde $hy + ks \sqsupset \frac{1}{100} hk$
l 15. def. 1. & reliquum $ys \sqsubset \frac{99}{100} hk$, adeòque $hk . ys :: \sqsupset 100 . 99$.
m 3. 18. 3.
n 4. 6. Quia autem tam hr [e] $\sqsupset hk$, quàm $ys \sqsupset dt$, (Scil. junctis
o 9. 5. dy, st, obtusi [r] sunt $<$ [i] dyz, zst, & [c] $dz \sqsubset yz$ necnon $zt \sqsubset zs$,
p hyp. 3.
q 8. 5. eòque [s] $ys. \sqsupset dt$.) erit $\frac{hr}{dt} (::$ [q] $\sqsupset \frac{hr}{ys} :: \sqsupset \frac{hk}{ys}$ [t] $) :: \sqsupset \frac{100}{99}$
Fig. 284. Præterea in trigonis rectangulis hkr, dkt, quia $kr = kt$,
r Cor. 16. 3. ac hr $(hq) \sqsubset dt$, erit angulus [u] major $tdk . rhk ::$
s 4. ax. $\sqsubset hk . dk$. [Compositis etenim ad rectos trigonis ktd, khr,
t ut prius. $\sqsupset hr . dt$.
u cor. 37. 3. & 15. 5. sit $df = hk$, & [x] $fi \parallel kr$, circuli igitur pares circa pares diametros
x 12, 28. 1.
y sch. 31. 3. df, hk, y transibunt per i, r, eritque $\frac{< fdi}{< rhk} (::$ [z] $\frac{\text{arcus } fi}{\text{arcus } kr})$ [g]
z 33. 6.

Fig. 285. $:: \sqsubset$ [h] $\frac{\text{recta } fi}{\text{rect. } kr} :: \sqsubset$ [n] $\frac{(fd)\, kh}{kd}$ Vel Componantur triangula ista ad acutos, h, d, & centro d, intervallo do, describatur circulus poq, Erit igitur $\frac{< kdo}{< odt} (h. e.$ [f] $\frac{\text{sector } pod}{\text{sect. } oqh} :: \sqsupset$ [q] $\frac{\text{sect. } pod}{\Delta\, oth})$
$:: \sqsupset$ [q] $\frac{\Delta\, kod}{\Delta\, oth}$ sive [i] $\frac{ko}{ot}$; & componenti, $\frac{< kdt}{< khr} (:: \sqsupset$ [k] $\frac{(kt)kr}{ot})$
[n] $:: \sqsupset e. \frac{hr}{dt}$.]

Inde [u] $\frac{ndt}{rhk} (:: \sqsupset \frac{hr}{dt})$ multò $:: \sqsupset \frac{100}{99}$. Tum, quia ndt (major $\frac{1}{200}$ recti) $rhq :: \sqsupset \frac{1}{200} . \frac{99}{20000}$, $h. e.$ 1001. 99, est rhq ($\sqsubset$ [i] $\frac{99}{20000}$ recti, $h. e.$ $\sqsubset \frac{1}{202} . \frac{1}{99}$ recti) multò $\sqsubset \frac{1}{203}$ recti. Solis igitur diameter ba major est subtensâ parti $\frac{1}{812}$ circumferentiæ totius, & adhuc major subtensâ $\frac{1}{1000}$ circumferentiæ seu latere Chiliagoni Orbitæ ἐνιαυσίᾳ inscripti.

Coroll.

Hinc autem sequitur, quia ambitus Chiliagoni, (qui quidem
α 21. 1. α excedit tres diametros Orbitæ annuæ cui inscribitur, cùm vel
β cor. 15. 4. ambitus hexagoni β æquet tres diametros sui circuli,) minor est mille

$\frac{1}{100}$ diametris

diametris ſolis, & adhuc minor tricies mille diametris Lunæ aut terræ, Diametrum Orbis revolutionis annuæ (quem mundum vocant, minorem eſſe decies mille diametris terræ, multoque minorem γ centrum Myriadibus myriadum ſtadiorum, ſive 10000×1000000. γ *hyp.* 2.

2. *Τῶν ἀειθμῶν κατονόμαξις.*

Novem primi gradus ſeu Periodi ab unitate in ratione decuplâ (quæ ad præſens inſtitutum abundè ſufficit) progredienti vocentur Numeri Primi: & gradus octo præter unitatem Octas Prima. Iſti verò numeri commodè ſatis exprimi ſolent, notis puta diſtinctis ad Myriades & ad Myriadum Myriades notis illis repetitis. Dein novem gradus, qui proximè ſequuntur incipiendo à nono ſeu ultimo gradu, numerorum primorum, appellentur Numeri Secundi necnon octo ipſius gradus excepto itidem primo, Octas ſecunda: Atque ita porro

3. Si numeri ab unitate proportionalis fuerunt, ut $\iota = \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon.\zeta.\eta.\theta.\iota.\varkappa.\lambda.$ ſeu $1.b.b^2.b^3.b^4.b^5.b^6.b^7.b^8.b^9\ b^{10}$ & aliqui δ, θ ex eadem analogeâ ſeſe multiplicaverint, factus inde numerus ($\delta \times \theta =$) χ æqualis erit ipſi λ, qui tantum diſtet à θ majore multiplicantium, quantum minor ab unitate in eadem analogiâ.

Quippe [a] $\begin{matrix} \alpha . \beta :: \theta . \iota \\ \beta . \delta :: \iota . \lambda \end{matrix}$ & $\alpha . \delta :: \theta . \lambda$: quare [b] $\theta\lambda$ ſeu $\chi = \alpha\lambda$ $=$ [c] λ. Patet etiam $\lambda - \iota$ diſtare ab unitate quantus eſt numerus ex utriſque conflatus, quibus ſe invicem multiplicantes δ, θ ab unitate abſunt. Sunt equidem $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$, quot ipſe θ ab unitate diſtat, at $\iota, \varkappa, \lambda$, ſunt uno minores, quàm quibus δ diſtat ab unitate: etenim unà cum θ totidem erunt.

a *hyp.* & 14.7.
b 19.7.
c 5 *ax.* 7.

His igitur partim poſitis, partim verò demonſtratis, quod jam propoſitam eſt, oſtendemus.

Propoſitio Princeps.

Arenæ numerus, quæ magnitudinem obtineat æqualem Sphæræ ſtellarum inerrantium ab *Ariſtarcho* poſitæ, minor eſt mille Myriadibus octavorum, quos vocamus, numerorum, tantum abeſt ut ſit vel infinitus vel ineffabilis.

Quia diameter papaveris eſt ad digitum :: (1 . 40 [a] :: 40 . 1600 ::) 1600 . 64000; Sphæra ex diametro digitali non [b] continebit pluſquam 64000 papaverum globoſorum, ſive [a] arenarum 64000×10000,

a *Obſerv.* 2.
b 18. 12.

10000, hoc eſt, ſex myriades myriadum quatuorque myriadum millia $=$ ſex n^{ii} $+$ quatermillibus myriadum α^{i}: atqui $\sqsubset$ decem α^{ii}. Numerus autem arenarum, quas capit ſphæra ex diametro centum digitorum, adeóque [b] ſphæræ ex digitali diametro multiplex centum myriadibus, minor eſt 1000000 $\times$ decem n^{ii}, hoc eſt, minor mille myriadibus α^{ii}: Nam 10 $\alpha^{ii} \times 1000000$, qui fit ex 10 n^{ii} termino decimo ab unitate in ratione decuplâ, & ex 1000000 termino ſeptimo [c] erit progreſſionis iſtius terminus decimus ſextus; octo autem primi termini pertinent ad n^{i}, & octo ſequentium ultimus valet mille myriades ℳ n^{ii}. Rurſus numerus arenarum, unà cum monade quibus conſtat ſphæra ex diametro decies mille digitorum, qui quidem ſtadium ſuperant, hoc eſt, ſphæra [b] centum myriadibus multiplex ſphæræ ex diametro digitali, minor eſt 1000000 $\times$ mille myriades n^{ii}, hoc eſt, minor decem myriadibus ℳ n^{iii}, ſive progreſſionis iſtius termino $(16+7-1=^{c})$ 22do, quandoquidem octo primi termini cum unitate pertineant ad n^{i}, octo ſequentes ad n^{ii}, & cæterorum ſex ultimus deſinat in decem myriades n^{iv}. Numerus etiam arenarum, quibus repletur ſphæra centum ſtadiorum diametrum habens adeóque ſphæræ ex diametro unius ſtadii multiplex myriadibus centum, minor erit 1000000 $\times$ decem myriades n^{iii}, ſive progreſſionis termino $(22+7-1)$ 28vo, hoc eſt, minor mille unitatibus ℳ n^{iv}. Pariter ſphæra ex diametro denum millium ſtadiorum, adeóque ſphæræ centum ſtadiorum diametrum habentis multiplex centum myriadibus, continet arenarum numerum minorem 1000000 $\times$ 1000 unitates ℳ n^{iv}, ſive termino progreſſionis $(28+7-1)$ 34to, hoc eſt, minorem decem unitatibus ℳ n^{v}. Dein ſphæra ex diametro centum myriadum ſtadiorum continet arenas pauciores quàm 1000000 $\times$ 10 unitates ℳ n^{v}, ſeu quantitatem termini 40mi, hoc eſt, pauciores quàm mille myriades ℳ n^{v}. Item ſphæra ex diametro decies mille myriadum ſtadiorum habet arenarum numerum minorem 1000000 $\times$ mille myriades ℳ n^{v}, ſeu termino 46to, hoc eſt, minorem myriadibus decem ℳ n^{vi}: Et ſphæra ex diametro centum myriadum myriadum ſtadiorum, quæ [d] orbis annui diametro major eſt continet arenarum numerum minorem 1000000 $\times$ myriades decem ℳ n^{vi}, ſive termino 52do, hoc eſt, minorem mille unitatibus ℳ n^{vii}. Ergo mundus veterum Aſtrologorum ſeu orbis revolutionis annuæ non capit tot arenas quot ſunt mille unitates ℳ n^{vii}. Denique numerus arenarum quæ repleant fixarum ſphæram *Ariſtarchicam*, minor eſt mille myriadibus ℳ n^{viii}. Quoniam enim diametri terræ, mundi Aſtrologorum, orbiſque fixarum fuit ∺ [e], oſtenſáque eſt diameter mundi

c *Lemma* 3.

d *Cor. lem.* 1.

e *Hyp.* 1.

iſtius

iſtius minor 10000 diametris terræ, erit etiam fixarum orbis diameter minor 10000 diametris mundi, & fixarum orbis [b] minus decies millies decies mille myriades mundorum: unde numerus arenarum, quas continebit ſphæra æqualis fixarum orbi juxta *Ariſtarchum*, minor erit 1000000000000 × mille unitates Μυ ν^{vii}, ſive progreſſionis termino $(13+52-1)$ 64^{to}, qui eſt gradus octavus Μυ ν^{viii}; minor mille myriadibus Μυ ν^{viii}. Patet ergo propoſitum. Hæc autem, rex *Gelo!* quamplurimis quidem, qui Mathematicis inſtructi non ſunt, non admodum credibilia fore arbitror: illis verò qui ea didicerunt, & circa diſtantias & magnitudines terræ, ſolis, mundique totius elaborarunt, credibilia prorſus eſſe propter demonſtrationem. Quapropter & de his ipſis ſpeculari aliquos non abſurdum eſſe exiſtimavi.

ARCHI-

ARCHIMEDIS EXOTERICA.

PRæter illa *Archimedis* opera quæ hic exponuntur, alia memorat *Rivaltus* partim ab *Archimede* ſcripta, partim ab illo facta; ſed quorum particularis notitia, præ temporum injuriâ, ad nos non pervenit.

1. Ex *Vitruvio* ad hunc ſenſum narrat. Cùm *Hiero Syracuſarum* Rex, Aurum certo pondere Artifici tradiderat, qui Coronam inde conficeret; poſteaque intellexerat Artificem, Auri parte ſurreptâ, Argentum æquali pondere ſubſtituiſſe; *Archimedem* ea de re conſuluit. Ille autem Balneum ingreſſus, effluentem aquam conſpicatus, hinc anſam cepit determinandi, quantum Auri ſurreptum fuerat; ſtatimque præ gaudio nudus exiliens Balneo, vociferatus Ἕυρηκα, Ἕυρηκα, domum ſe contulit. Nempe, cum Aurum, ejuſdem ponderis, minoris molis ſit quàm Argentum; moleſque corporis irregularis non aptiùs colligi poſſit, quàm ex Aquæ menſurâ cujus locum occupet; explorato primùm, quantum ſpatii in Aquâ occuparet Corona, quantumque Aurum purum ejuſdem ponderis, & quantum denique æqualis ponderis Argentum; hinc calculo colligendum eſſe, quantum Auri & quantum Argenti miſcuerat Artifex. Inventum certè *Archimede* dignum. Sed, quomodo ille calculum inſtituerit, & quantâ ſubtilitate ſingulorum molem rimatus eſt, non exponit *Vitruvius*; contentus rem craſſiùs expoſuiſſe, quam ipſam (puto) executus eſt *Archimedes*. Et, ſiquid ea de re ſcripſit *Archimedes* ipſe, periit. Alii alios modos expoſuerunt; inter quos *Ghetaldus*, in ſuo *Archimede promoto*; atque *Johannes Baptiſta Hodierna* in ſuo *Archimede Redivivo*, impreſſo *Panormi Siculorum*, in 4°, Anno 1644 Italicé.

Calculus ſic commode inſtituitur. Pondus Auri quantum eſt Coronæ, occupet ſpatium L; Pondus Argenti huic æquale, ſpatium L + M. Pondus Coronæ, ſpatium L + N. Ergo, ut N ut ad M, ſic pondus Argenti admixti, ad pondus Coronæ. Nempe ſpatii incrementum

crementum M prodiret ſi totum Aurum Argento commutatum foret; adeóque incrementum N, oſtendet quantum jam commutatum ſit.

2. Ex *Athenæo* & *Diodoro*, Cochleam *Archimedis* memorat ad Aquam ex Sentinâ ſtupendi Navigii *Hieronis* exhauriendam, unius hominis operâ: eandemque machinam ad aquas ex Fodinis, Lacubus, ſimilibuſque exhauriendis adhibitam. Recentiores ex conjecturâ hujuſmodi figuram accommodant: & ſpeciatim *Guido Vbaldus* in peculiari Tractatu. Fig. 284.

3. Ex *Athenæo*, memorat *Archimedis Helicem*, cujus ope (cum paucis aliis inſtrumentis) ſtupendum illud navigium in mare deduxit *Archimedes*. Figuram hujuſmodi, ex conjecturâ ſupplent. Fig. 285.

4. Ex *Zetze* & *Oribaſio*, recenſet *Archimedis* Triſpaſtum, quo 7000 mediorum pondus attrahebat. (Neſcio an 50000 legendum ſit, propter πεντεμυριομέδιμνον.) Figuraſque adhibet has duas. Fig. 286, 287.

5. Ex *Polybio*, & aliis, memorat *Archimedis* Tormenta Bellica, Balliſtas, Catapultas, Sagittarios, Scorpiones, Manum ferream cum catena (Tollenovis inſtar) aliúmque apparatum, quibus contra copias, naveſque, *Marcelli* & *Appii* pugnatum eſt.

6. Ex *Galeno* & *Zetze*, *Archimedis* Πύρεια memorat, ſeu ſpecula Uſtoria, quibus *Marcelli* Naves incendebat. De quibus *Cavalerius*, in tractatu poſthumo, *Del Specchio Vſtorio*, (*Bononiæ* impreſſo in 4°, Anno 1650.) Italicè fuſius agit.

7. Ex *Zetze*, *Pappo*, & *Tertulliano*, memorat *Archimedis* Pneumatica & Hydroſcopica: nec hujuſmodi tantum Inſtrumenta conſtructa, ſed & libros ab *Archimede* conſcriptos.

8. Ex *Claudiano*, *Archimedi* Σφαιροποιΐαν memorat; ſeu machinam Cœleſtium motuum æmulam.

Verùm quum horum omnium nihil jam exſtet ab *Archimede* conſcriptum; non niſi ex dubiis conjecturis ſuppleri poſſunt.

FINIS.

Pag.	Lin.	In Argumento.
2	8	A *pro* B.
2	13	X *pro* H & G.
3	2	Z vel Y *pro* X.
8	*pe.*	C F H *pro* F G M.
9	19	B M *pro* D M.
10	34	F N O L *pro* P X O L.
11	3	A G *pro* H G.
16	10	FE ⊏ DE *pro* GF ⊏ DE.
16	17	DEq . EB × BA :: Tq . Mq *pro* DEq . EB × AE :: Mq . Tq.
19	11	C F *pro* C E.
20	*ul.*	C D *pro* F B.
21	4	Q.AE—EB *pro* Q.EB—AE.
22	28	B A *pro* D A.
23	4, 5, 6, 7	A G *pro* A E.
30	1	L X *pro* L K.
31	1	*In margine*, D E *pro* D C.
31	14	$\frac{4\,DEq.}{BX}$ *pro* $\frac{4\,FEq.}{BX}$
31	26	B H *pro* E H.
35	5	F G *pro* O G.
35	6	F H *pro* O H.
37	11	C B *pro* A B.
37	*pe.*	Y Z *pro* V Z.
38		Fig. 49. *pro* 94.
41	13	B H *pro* B E.
43	*pe.*	B A C *pro* B A D.
45	25	X V *pro* X Y.
52	22	A, B *pro* A, F.

54	13	A E *pro* B E.
58	25	M C *pro* Z C.
59	*ul.*	majus *pro* minus.
62	16	G I *pro* C I.
64	22	L E *pro* L I.
64	26	O *pro* I.
64	29	D C *pro* G D.
66	6	B X K *pro* B X R, & B F *pro* B E.
66	16	A F *pro* A G.
68	17	D B q *pro* D K q.
68	33	H F × F E *pro* H F × F D.
68	34	
69	22	G I *pro* G L.
69	28	T O *pro* I O.
70	4	sectionum *pro* contingentium.
70	8	A E *pro* A F.
70	10	LSH *pro* LSF; & ALN *pro* ALM.
74	22	*Deest* + *inter* AEq & CX×XA.
75	*pe*	*Deest* + *inter* EXq & CE×ED.
77	18	E C *pro* F C.
78	21	*Citatur* 4 & 22.6 *pro* 19.5.
79	10	A B *pro* A D.
79	26	K O B *pro* K O P.
86	5	F A *pro* D F.
91	*ul.*	O P *pro* O D.
96	*pe*	F G *pro* F M.
99		*Ult. duæ lineæ ita corrigantur*, FN.FL::NK.KL & (ob sect. AMD) NK.KL :: NM . ML quar FN.FL::NM.ML *Q.e.a.*
102	8	A D, B G *pro* A C, B C.

In Citationibus.

Prop.9.nota f, *pro* 17 6 *lege* 16,6. *pr.*16.*n.*a, 13 hujus *l* 12 hujus. *pr.*20.*n.*c, 3.6 *l.*1.6. *pr.*33.*n.*c, 4.*l* 4.2. *pr.*38 *n.*c, 21 hujus *l.*37 hujus. *pr.* 44 *n.* a, 31 hujus *l.*37 hujus. *pr.*45.*n.*f, 7.1 *l.*7.5. *pr.*45.*n.* g, 4.1 *l.* 4.6. *pr.* 51. *n.* m, 7.1 *l.* 7.5. Libri I.

Prop. 2. *nota* g, *pro* 6.5 & 3 ax. 1 *lege* 6 & 5.2. *pr.* 4. *n.* g, 53. hujus *l.* 53.1 hujus. *pr.* 48. *n.* g, *deest hæc citatio* (17 ax. 1.) Libri II.

Prop. 4. *nota* a, *pro* cor. 44 hujus *lege* cor. 15.2 hujus. *pr.* 8. *n.* k, 8.1 *l.* 4.3 hujus. *pr.* 16. *n.* d, & *pr.* 16, 17, 18, 19. *n.* b, *in singulis pro* 16.5 *l.* 4.6. *pr.*20. *n.* c, 16.3 *l.*4.6. *pr.* 21. *n.* b, 46.5 *l.* 4.6. *pr.* 22. *n.* k, 2.6 *l.* 6.2. *pr.* 23. *n.* b, 16.5 *l.* 4.6. *pr.* 23. *n.* d, *l.* facilè deducitur ex 15.3 hujus. *pr.* 33. *n.* d, 2.6 *l.* 6.2. *pr.*34 *n.*e, 15.6 *l.* 16.6. *pr* 37 *n* b, 49 & 51. hujus *l.* 2 & 11.3 hujus. *pr.*44.*n* b, & *pr.*45.*n.*c, *pro* 15.6 *l.*16.6. *pr.*56 *n.*p, ex 2 vel 4.8 *l.* 2 vel 4.3. Libri III.

*Prop.*14 *nota* a, *pro* cor.14 hujus *lege* 5 hujus *pr.* 15.*n.*b, 36.1 hujus *l.*39.3 hujus. *pr.* 21. *n.*a, 6 hujus *l.* 8 hujus. *pr.* 21. *n.*b, 15 hujus *l.* 17 hujus. Libri IV.

In Schematis.

Fig.14.*deest linea* F G. fig 30 *deest* D *ubi* EH *occurrit sectioni*. fig.136. *pro* H *lege* B. fig 148 *deest* D *ubi lineam* AC *bisecat* KB. fig.176.*deest* E. fig. 194. *deest ubi* Y *ubi* LX *diametro occurrit*. fig.276 *deest* E *ubi* DK *sectioni occurrit*.

APOLLONII CONICA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,
Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico **Little-Britain**, 1675.

De Apollonio Pergæo, ex Vossio de Scriptoribus Mathematicis:

Proximæ post *Euclidem* antiquitatis, ex iis qui extant est Apollonius Pergæus, Claruit enim sub Ptolomæo Evergete.

N*Atus est Pergæ, civitate Pamphiliæ. De ætate autem ejus, quod dixi auctor est* Heraclius *in* Archimedis *vita, & exinde* Eutocius Ascalonita *initio commentariorum in Conica* Apollonii. *Ubi ex* Gemini *Mathematicarum præceptionum libro sexto refert, ut ob conicam hanc scientiam à suæ ætatis hominibus nuncupatus sit* magnus Geometra, Euclidis *discipulos, quod & ipsum ætatem indicat*, Alexandriæ *audivit, à quibus cum multa accepisset; non difficile adeò fuit quatuor conicorum* Euclidis *libros commentario illustrare, ac totidem alios adjungere: ut in universum conicorum essent libri viij: sicut auctor est Pappus* Alexandrinus *libro vij Mathematicæ Collectionis.* Pag. 54.

Atque eodem libro alia quoque ejusdem Apollonii *memorat, videlicet libros duos* περὶ λόγου ἀποτομῆς, de proportionis sectione: *totidem* περὶ χωρίου ἀποτομῆς, de spatii sectione: *etiam duos* διωρισμένης τομῆς, determinatæ sectionis: *ac totidem* ἐπαφῶν, tactionum: *duos quoque* νεύσεων, inclinationum: *ac similiter duos* τόπων ἐπιπέδων, planorum locorum. *Quorum* Pappus *alios vocat* ἐφεκτικοὺς, in se solis consistentes: *alios* διεξοδικοὺς, extra sese tendentes. Pag. 55.

Cæterùm fuere olim, qui Conica non esse Apollonii Pergæi, *sed* Archimedis *putarent. Existimavit hoc* Heraclius *ille, qui* Archimedis *vitam retulit. Ejus verba inde adducit* Eutocius, *quibus ait* Archimedem *primum omnium consignasse* Elementa Conica: Apollonium *autem, cùm ea sciret necdum edita esse ab auctore, involâsse in illa, proque suis edidisse. Ac videtur id posse ipsius* Archimedis *verbis comprobari. Nam ipse operis de Conicis Elementis meminit partim libro* περὶ κωνοειδέων, καὶ σφαιροειδέων, *ante propositionem quartam. Utrobique enim ait, id, de quo loquitur demonstratum esse in libris Conicis. Nisi quis censeat, respici* Euclidis *quatuor Conicorum libros: quorum* Pappus *mentionem facit in septimo Mathematicarum Collectionum libro. Verum, si alienum opus signaret* Archimedes *non sic loqueretur. Solet enim tum dicere, priores id demonstrasse. Et sanè* Archimedi *non fuisse ignotum conos secari posse planis, quæ ad latus Coni habeant inclinationem differentem, satis comprobat contra* Eutocium, *& alios*, Guido Ubaldus *initio Commentarii in secundum* ἰσορροπικῶν Archimedis. *Quæ cùm considero, nolim de auctore multùm contendere. Et fortasse rudiores* Archimedis *chartas nactus fuit* Apollonius, *atque eas perfecit. Utcunque est, ante hæc de Conicis edita ab* Apollonio, *imperfecta erat eorum notitia: ut tradit* Eutocius Ascalonita Pag. 434.

initio

initio Commentarii ſui in Conica Apollonii. Atque, Ariſtæi judicio, Pappi eadem mens fuit.

Quatuor priores libros primus tranſtulit Joan. Baptiſta Memmius; ſed inſeliciter, eò quòd Argumentum operis non intelligeret: unde, non vidit ſat manifeſtas Græci codicis mendas, ac ſæpe pueriliter hallucinatur: ſicut monitum Franciſco Maurolyco, præfatione in Coſmographiam ſuam. Operæ igitur fecit Federicus Commandinus; qui denuo Latinè vertit, Bononiæque edidit anno 1566. Nec tamen omnia in eo vertendo potuit Commandinus. Vſque adeo corruptus erat Græcus codex, quare in Latinis vitioſum ſequi codicem eſt coactus; ut ipſe agnoſcit.

Alia quoque Apollonii hujus citant Proclus in Euclidem, ubi laudatur Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος ἐν τῷ Ὠκυπεβόῳ. Fortaſſe reſcribendum τῇ Ὠκυβόῃ. Quæ vox fuerat à βοὴ ſignificante pugnam: ut ſæpe apud Homerum: ὠκυβόαι, ταχυμάχαι. Et quædam recenſet Eutocius Aſcalonita libro de dimenſione Circuli, Eutocius hic etiam in Conica Apollonii commentatus fuit. Eum quoque commentarium Latinè vertit Commandinus. Vtcunque verò nunc * quatuor duntaxat Conicorum libros habeamus, Arabicè tamen tres prætereaex Oriente eſt nactus Clariſſimus Jacobus Golius, antehac, in Academia Leidenſi, collega conjunctiſſimus. Cui multum Arabicæ debent literæ ac Matheſis univerſa: plura verò propediem debebunt; præſertim ubi tres illi Conicorum libri viderint lucem. Quærat aliquis quid factum ſit de libro octavo, Cognoſcimus de hoc ex Codice Goliano: ubi ad Calcem erat adſcriptum eò non fuiſſe Arabicè tranſlatum; quia etiam liber ille deſideraretur in Codicibus Græcis, unde Arabes cætera tranſtuliſſent. Sed doctiſſimus Merſennius, præfatione in Apollonii Conica; quæ ſunt in ejus Συνόψει Mathematica; Arabicè illum extare ait: imò omnes Apollonii libros eâ linguâ legi; ſane plures etiam, quam enumerarit Pappus. Atque horum teſtem citat Aben Nedin; qui librum contexuit de Philoſophis Arabibus, omniumque eorum ſcripta memoravit, qui fuere à quadringenteſimo poſt Muhammedem anno. Interim (ut idem Merſennius addit) Claudii Mydorgii, patricii Pariſini, ea eſt ſuſpicio tres illos Conicorum libros, qui ab Arabibus Apollonii creduntur non eſſe genuinos, verùm ab aliquo ſuppoſitos, qui ſub Apollonii nomine facere voluerit fucum. Atque hoc inde colligit; quod libro quinto prima Propoſit. in vj. Apollonii non tantummodo in Cono recto, ſed in Scaleno etiam quolibet, & portionibus quibuſvis, demonſtret poſſibilia quæque. Meminit auctoris quoque Vitruvius, lib. 1. cap. 1. Cardanus in 16 de Subtilitate ei ſeptimum inter ſubtilia orbis ingenia tribuit locum.

*Anno 1650. antequuam tres poſteriores à Borellio ederentur.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. I.

DEFINITIONES.

I.

SI ab aliquo puncto (A) ad circumferentiam Circuli (B H C,) qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, conjuncta recta linea (A B) in utramque partem producatur, & manente puncto (A) convertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; ſuperficiem (D A E F G) à recta linea deſcriptam, conſtantémq; ex duabus ſuperficiebus (D A G, E A F) ad verticem (A) inter ſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea (E A B D) quæ eam deſcribit in infinitum aucta, voco *Conicam ſuperficiem*. Fig. 1.

II.

Verticem ipſius, manens punctum (A).

III & VI.

Axem, rectam lineam (A G), quæ per punctum (A), & circuli centrum (G) ducitur.

IV.

Conum autem voco figuram (A B C), contentam circulo (B H C), & conicâ ſuperficie (B A C), quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interjicitur.

V & VII.

Basim, circulum ipsum (B H G).

VIII.

Conorum rectos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

IX.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

X.

Fig. 2. Omnis curvæ lineæ (A B C) in uno plano existentis *Diametrum* voco, rectam lineam (B D,) quæ quidem ducta à linea curva, omnes lineas (A C), quæ in ipsa ducuntur cuidam lineæ (A C) æquidistantes, bifariam dividit.

XI.

Verticem lineæ rectæ terminum (A,) qui est in ipsa linea (A B C.)

XII.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur, unaquæque æquidistantium linearum (A C.)

XIII.

Fig. 3. Similiter, & duarum curvarum linearum (C A D, E B F) in uno plano existentium, *diametrum* quidem *transversam* voco, rectam lineam (A B), quæ omnes (C D, E F) in utraque ipsarum ductas, rectæ cuidam (C D, vel E F) æquidistantes bifariam dividit (in X.)

XIV.

Vertices, diametri terminos (A, B) qui sunt in ipsis lineis (C A D, E B F.)

XV.

Rectam verò *diametrum* (Z Y) voco, quæ inter duas lineas (C A D, E B F)

E B F) poſita, lineas omnes (C E, D F) ductas rectæ cuidam (A B) æquidiſtantes, & inter ipſas interjectas, bifariam ſecat (in Z vel Y.)

XVI.

Ordinatim ad diametrum applicari dicitur unaquæque linearum æquidiſtantium (C D, vel E F ad A B; & C E, vel D F ad Z Y.)

XVII.

Conjugatas diametros voco curvæ lineæ (A Z B Y), & duarum curvarum (C A D, E B F) rectas lineas (A B, Z Y), quarum utraque diameter eſt, & rectas lineas (C D, C E) bifariam dividit. Fig. 4.

XVIII.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos.

XIX.

Axes conjugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri conjugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

Nihilo differunt axes à diametris, niſi quòd indifferenter illæ, hi ad rectos tantùm ſecent.

Apollonius Eudemo.

S. D.

SI & corpore vales, & aliæ tuæ res ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tempore tecum *Pergami* fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad Te primum librum emendatum, reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori; non enim arbitror te oblitum quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim; rogatus à *Naucrate* Geometrâ, quo tempore *Alexandriam* veniens apud nos fuit; & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, majorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe *Naucrates* quamprimum eſſet navigaturus, nos ea non emendavimus, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcripſimus, utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur, noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris, quatuor primi hujus diſciplinæ continent Elementa: quorum primus complectitur generationes trium Coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemq; principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab iis qui de ea re ſcripſerunt elaborata. Secundus Liber tractat ea quæ attinet ad Diametros, & ad Axes Sectionum, & ad illas lineas *quæ cum ſectione non conveniunt; tum de aliis diſſerit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt. * Tertius liber continet multa & admirabilia Theo-

*ἀσυμπτώτους.

Theoremata, quæ utilia erunt & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes; quorum complura & pulcherrima, & nova ſunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus, non poſitam eſſe ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas, verùm ipſius tantummodo particulam quandam, atque hanc non ſatis feliciter. Neque enim fieri poterat, ut ea compoſitio rectè perficeretur abſque iis, quæ à nobis inventa ſunt. Quartus liber tradit quot modis Conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſſint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt; coni ſectio, & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem 4 Libri ad abundantiorem ſcientiam pertinent. Etenim Quintus de Minimis & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & ſimilibus Coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus Problemata Conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia judicare. Vale.

LIB. I.

Prop. I.

RECtæ lineæ (A G) quæ à vertice (A) ſuperficiei Conicæ ad puncta (G) quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur, in ipſa ſuperficie erunt. Fig. 5.

Cùm enim puncta A G ſint in ſuperficie conica, (*a*) recta ipſam deſcribens per puncta A, G tranſibit. Itaque liquet tunc rectam A G in ſuperficie conica exiſtere. a 1. *def.* 1. *hujus.*

Coroll. 1. Hinc conſtat, ſi à vertice ad aliquod punctum eorum quæ ſunt intra ſuperficiem, recta linea ducatur, intra, & ſi ad aliquod eorum quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere. *Cor.*

Coroll. 2. Rectæ à vertice ad puncta, quæ in superficie, ductæ, basis circumferentiæ occurrent, si opus est, protractæ.

Prop. II.

Fig. 6. Si in alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, sumantur duo puncta (D,E), & quæ puncta conjungit recta linea (D E) ad verticem non pertineat, intra superficiem cadit, quæ verò est in directam (E F) cadet extrà.

a 2 Cor. 1. 2 hujus. b 2. 3. c 2. 11. d 10. 3. e 1. Cor. 1 hujus.

Conjungantur rectæ A D, A E [a] occurrentes basis circumferentiæ punctis B,G, quæ connectat recta B G; hæc[b] intra circulum cadet, ac proinde intra superficiem conicam; ergo [c] planum trianguli A B G est intra superficiem conicam; ergo recta D E in ipso sita [c] est intra eandem. Porro recta A F [d] cadit in B G protractam extra circulum; & [e] proinde extra superficiem conicam; ergo punctum F est etiam extra ipsam.

Prop. III.

Fig. 7. Si conus (A B C) plano per verticem (A) secetur, sectio (A B C) triangulum erit.

a 1. hujus. b 3. 11. c 20. def. 1.

Nam A B & A C [a] rectæ sunt: item B C [b] est recta. [c] ergo ABC est triangulum.

Prop. IV.

Fig. 8. Si alterutra superficierum, quæ sunt ad verticem, secetur plano (D H E) æquidistante circulo (B K C), per quem fertur recta linea superficiem describens, planum (D H E) quod superficie concluditur, circulus erit, habens centrum (G) in axe (A F); figura verò (ADE) contenta circulo (D H E) & ea parte superficiei conicæ, quæ inter secans planum (D H E), & verticem (A) interjicitur, conus erit.

a 2. hujus. b 3. 11. c 2. Cor. 1. hujus. d hyp & 16. 11. e 4. 6. f hyp & 15. def. 2. g 14. 5.

Planum per axem A F faciat [a] trigonum A B C; communisque sectio ejus cum plano D H E [b] sit recta D F. In sectione D H E sumatur punctum utcunque H, ducaturque recta A H K [c] circumferentiæ basis occurrens in K, & connectantur GH, F K. Atq; ob D E, B C, ac G H, F K [d] parallelas, erit F B. G D [e] :: (A F. A G [e] ::) F K. G H. unde cùm F B F K [f] æquentur. [g] erunt etiam G D, G H æquales. idémque de reliquis à G ad sectionem ductis rectis ostendi poterit. Unde de sectio D H E [h] circulus erit, cujus centrum G, & [k] proinde figura A D E conus. h 15. def. 1. k 4 def. hujus.

Coroll. 1. Recta D E est diameter circuli [l] D H E. l

2. Conus A D E [m] similis est cono A B C (ob A G. G D :: A F. F B.) m 24 def. 11.

Prop. V.

Si conus Scalenus secetur plano (A B C) per axem ad rectos angulos ipsi basi (B C), secetúrque altero plano (G H K) ad triangulum per axem recto, quod ex parte verticis (A) abscindat triangulum (A G K) simile (ei A B C) quod per axem, * subcontrariè vero positam; sectio (G H K) circulus erit. Vocetur autem Sectio subcontraria. Fig. 9.

In sectione G H K accipiatur punctum H utcunque; à quo [a] ducatur H F recta plano A B C, quæ [b] in rectam G K cadet, & quidem [c] perpendiculariter, puta in F. per F ducatur D E ad B C parallela; estque planum per D E, H F [d] parallelum basi B C; [e] efficitque sectionem D H E circulum, in quo F D × F E [f] = F Hq. Quia verò ang. A D E [g] = (ang. A B C [h] =) ang. A K G, & ang. K F E [k] = G F D; æquiangula erunt trigona K F E, D F G. unde E F. F K [l] :: G F. F D. ergo F K × G F [m] = (E F × F D [n] =) H Fq. [o] quare sectio G H K est circulus. Q.E.D.

a 11. 11. b 38. 11. c 3 def. 11. d 15. 11. e 4. hujus. f 35. 3. g 29. 1. h hyp. k 15. 1. l 4. 6. m 16. 6. n prius. o conv. 35. 3.

Prop. VI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur, sumatur autem aliquod punctum (D) in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem; & ab ipso ducatur recta linea (D E) æquidistans cuidam rectæ (M N), quæ perpendicularis est à circumferentia circuli (BMC) ad trianguli basin (B C); triangulo per axem occurret, & ulteriùs producta usque ad alteram superficiei partem, bifariam ab ipso triangulo secabitur. Fig. 10.

Recta A D protracta circumferentiæ basis occurrat puncto K; per quod ducatur K H L ad M N parallela; [a] adeóque ad D E. [b] ergo D E producta occurret rectæ A H, puta in F. Producatur D F ad superficiem G. a 30. 1. b

Liquet rectam A L, (cùm sit in plano A D E, vel A K L, & in superficie coni) ipsi D F occurrere in G. & fore K H. D F :: (A H. A F ::) H L. F G. unde quum sit K H = H L, erit D F = F G. *Q. E. D.*

Prop.

Propos. VII.

Fig. 11. Si conus plano (A B C) per axem secetur, secetur autem & altero plano (D F E) secanti planum basis coni, secundùm rectam lineam (D E) quæ sit perpendicularis, vel ad (B C) basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur: lineæ (H K) quæ à sectione (D F E), in superficie coni à plano facta, ducuntur æquidistantes ei (D E), quæ est perpendicularis ad trianguli basim (B C), in communem sectionem (F G) plani secantis, & trianguli per axem, cadent. Et siquidem conus sit rectus linea (D E), quæ est in basi, perpendicularis erit ad (F G) communem sectionem plani secantis, & trianguli per axem, si verò Scalenus, non semper, nisi cùm planum (A B C), quod per axem ducitur ad basim coni (B D C E) rectum fuerit.

Quòd H K plano A B C, & proinde ejus cum plano D F E communi sectioni F G occurrat, inque ipso occursu bisecetur, liquet ex præcedenti. Porro, si conus rectus sit, erit circulus B C plano A B C
a 4. def. 11. rectus; [a] ac ideo D E plano A B C recta; & propterea D E ad F G perpendicularis. Idem discursus valet, si trigonum A B C circulo B C utcunque rectum fuerit; sin hoc non fuerit, non erit D E ad F G per-
b 4. 11. pendicularis: Nam si D E utrique B C, F G perpendicularis sit, [b] erit
d 18. 11. eadem D E recta plano A B C; [d] unde circulus B C trigono A B C rectus erit, contra Hypoth.

Coroll. Hinc F G diameter est sectionis D F E, utpote quæ rectas ad D E parallelas bisecat.

Prop. VIII.

Fig. 12. Si conus secetur plano (A B C) per axem, & secetur altero plano (D F E) secanti basim coni (B D C) secundùm rectam lineam (D E), quæ ad (B C) basim trianguli per axem sit perpendicularis; diameter autem (F G) sectionis factæ in superficie, vel æquidistet uni (A C) laterum trianguli, vel cum ipso extra coni verticem conveniat; & producantur in infinitum tum superficies coni (A B C) tum planum secans (D F E); sectio quoque ipsa (D F E) in infinitum augebitur; & ex diametro (F G) sectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualem (CFH) abscindet linea (M N H), quæ quidem à coni sectione (M F N) ei (D E) quæ est in basi, æquidistans ducta fuerit.

Nam

Nam quia diameter F G cum latere A C ad partes X [a] nunquam convenient, si ipsa ad [b] libitum producatur, puta ad H, & per H ducantur K L ad B C, & M N ad D E parallelæ, [c] planum per K L, M N plano B D C E parallelum erit, inque superficie coni producta [d] circulum efficiet, ad quem si protrahatur planum D F E, liquet [d] augeri conum, & sectionem D F E &c.

a *Hypoth.* b 3. 1. c 15. 11. d 4. *hujus.*

Prop. IX.

Si conus (A B C) secetur plano (D K E) convenienti cum utroque latere (A B, A C) trianguli per axem, quod neque basi (B C) æquidistet, nec subcontrarie ponatur, sectio (D K E) circulus non erit. Fig. 13.14.

Si fieri potest, sit D K E circulus; & ab H basis centro ad F G (communem sectionem basis cum plano secanti) ducatur perpendicularis H G, per quam & axem transeat trigonum A B C. Dein sumatur quodvis punctum K in linea D K E, per quod ducatur K M L ad F G parallela, occurrens rectæ D E G (communi sectioni plani secantis, & trigoni A B C) in M. [a] unde K M = M L.

Porrò, per M ducatur N X ad B G parallela. & quia planum per N X, K L, [b] plano B C parallelum est, * ideoque circulum efficit. In quo K L [b] diametro N X [c] est perpendicularis, erit N M × M X [d] = (K Mq ([d] =) D M × M E. ([e] ob D K E circulum). [f] ergo N M. B M :: M E. M X. [g] ergo trigona N M D. E M X similia sunt: & ang. M E X = (ang. D N M [h] =) ang. A B C. Itaque sectio est [k] subcontraria, contra Hyp. ergo sectio D K E non est circulus. *Q. E. D.*

a 6. *hujus.* b 15. 11. * 14. *hujus.* c 10. 11. (6. d *cor.* 13. & 16. e *hyp.* f 17. 6. g 6. 6. h 29. 1. k 5. *hujus.*

Prop. X.

Si in coni sectione (F E D) sumantur duo puncta (G, H); recta linea (G H), quæ ejusmodi puncta conjungit, intra sectionem cadet, & quæ in directum ipsi constituitur, cadet extra. Fig. 15.

Nam quia puncta G H [a] sunt extra latus trigoni (A B C) per axem ducti, recta G H non pertinget ad verticem A; [b] ergo hæc intra conum cadet, ac proinde intra sectionem; sin producatur extra conum cadet, ac proinde extra sectionem.

a *hyp.* b 2. *hujus.*

Prop. XI.

Si conus plano (A B C) per axem secetur; secetur autem & altero Fig. 16.

plano (D F E), ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam (D E), quæ ad baſim (B C) trianguli per axem ſit perpendicularis, & ſit ſectionis diameter (F G) uni (A C) laterum trianguli per axem æquidiſtans; recta linea (K L) quæ à ſectione ducitur æquidiſtans ſectioni (D E) plani ſecantis, & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum (F G), poterit ſpatium æquale contento, lineâ (F L), quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam (K L) & ſectionis verticem (F) interjicitur, & alia quadam (F H) quæ ad lineam (A F) inter coni angulum (A) & ſectionis verticem (F) interjectam, eam proportionem habeat, quam quadratum baſis (B C) trianguli per axem, ad id quod reliquis duobus trianguli lateribus (A B, A C) continetur. Dicatur autem hujuſmodi ſectio PARABOLE.

a 15. 11. Per L ducatur M N ad B C parallela; éſtque ſectio plani per M N,
b 4. *hujus.* K L ducti (ad B D C E [a] paralleli) [b] circulus; [c] & K L ad M N per-
c 10. 11. pendicularis; [d] unde K Lq = M L × L N. Porro F L × H F. F L ×
d *cor.* 13 & 16. 6. F A [e] :: (H F. F A [f] :: B Cq. A C × A B [g] = B C. A C. [h] (M L.
e 1. 6. F L) + B C. A B [h] (M L. F M, [k] vel L N. F A) = M L. F L +
f *hypoth.* L N. F A [g] =) M L × L N. F L × F A. [l] ergo M L × L N ([d] K Lq)
g 23. 6. = F L × H F. *Q. E. D.*
h 4. 6.
k 2. 6. 19. 5.

Propoſ. XII.

Si conus plano (A B C) per axem ſecetur; ſecetur autem & altero
Fig. 17. plano (D F E) ſecanti baſim coni ſecundùm rectam lineam (D E) quæ ad baſim (B C) trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſectionis diameter (F G) producta, cum uno latere (A C) trianguli per axem extra verticem coni conveniat in (H): recta linea (M N), quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni (D E) plani ſecantis, & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium (F N X P) adjacens lineæ (F L), ad quam ea (F H), quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditúrque angulo (F A H) extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ (A K) quæ diametro (F G) æquidiſtans, ab vertice (A) ſectionis uſque ad trianguli baſim (B C) ducitur, ad rectangulum baſis partibus (B K, K C), quæ ab ea fiant, contentum, latitudinem habens lineam (F N), quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam (M N), & ſectionis verticem (F) interjectam, excedénſque figurâ (F N O L) ſimili, & ſimiliter poſitâ ei, quæ continetur lineâ (H F) extra angulum ſubtenſâ, & ea (F L), juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum (F G) applicantur. Vocetur autem hujuſmodi ſectio *Hyperbole.*

Per

Per N ducatur R S ad B C parallela. Estque F N × H N. F N × N X[a] :: (H N. N X)[b] :: H F. F L[c] :: A Kq. B K × K C[d] = A K. B K ([b]F G. G B, [b] vel F N. N R) + A K K C. ([b]A G. G C. [b] vel H N. N S.) = F N. N R + H N. N S[d] =) F N × H N. N R × N S. ergo F N × N X[e] = (N R × N S[f] =) N Mq. *Q. E. D.*

- a 1. 6.
- b 4. 6.
- c *hyp.*
- d 23. 6.
- e 9. 5.
- f 4. *hujus*, & *cor.* 13, *ac* 16. 6.

Prop. XIII.

Si conus plano (A B C) per axem secetur, & secetur altero plano (E L D) conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque basi coni æquidistet, nec subcontrariè ponatur; planum autem, in quo est coni basis (B C), & secans planum conveniant secundùm rectam lineam (F G) quæ sit perpendicularis vel ad basim (B C) trianguli per axem, vel ad eam (B C K), quæ in directum ipsi constituitur; recta linea (L M) quæ à coni sectione ducitur, æquidistans planorum communi sectioni (F G) usque ad sectionis diametrum (E D) poterit spatium (E O X M) adjacens lineæ (E H), ad quam sectionis diameter (E D) eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ (A K) diametro (E D) æquidistantis à coni vertice (A) usque ad trianguli basin (B C) ductæ, habet ad rectangulum contentum basis partibus (B K, C K), quæ inter ipsam (A K) & rectas trianguli lineas (A B, A C) interjiciuntur; latitudinem habens lineam (E M), quæ ex diametro (E D) ab ipsa abscinditur ad sectionis verticem (E): deficiensque figurâ (O H N X) * simili, & similiter positâ ei, quæ diametro (E D) & lineâ (E H) juxta quam possunt, continetur. Dicatur autem hujusmodi sectio *Ellipsis*. Fig. 18.

Per M ducatur P M R ad B C parallela. Estque E M ×. D M. E M. × M X[a] :: (D M. M X[b] :: D E. E H[c] :: A Kq. B K × K C[d] = A K. B K ([b]E G. G B. vel [b] E M. M P) + A K. K C. ([b]D G. G C. [b] vel D M. M R) = E M. M P + D M. M R[d] =) E M × D M. M P × M R. ergo E M × M X[e] = (M P × M R[f] =) M Lq. *Q. E. D.*

- a 1. 6.
- b 4. 6.
- c *hyp.*
- d 23. 6.
- e 9. 5.
- f 4. *hujus.* & *cor.* 13. & 16 ÷ 6.

Prop. XIV.

Si superficies (B C A X O), quæ sunt ad verticem (A), plano non per verticem secentur, erit in utraque superficierum sectio (D E F, & G H K) quæ vocatur Hyperbole. Et duarum sectionum eadem erit diameter (M E, H N), lineæ verò (E P, H R), juxta quas possunt ordinatæ ad diametrum, æquidistantes ei, quæ est in basi coni, inter se æ- Fig. 19.

quales erunt. Et figuræ tranſverſum latus (E H) utrique commune; quæ ſcilicet inter ſectionum vertices interjicitur. Vocentur autem hujuſmodi ſectiones *Oppoſitæ*.

Quòd utraque ſectio D E F, G H K, ſit Hyperbole, liquet ex 12mâ hujus. Porrò ductâ per A rectâ S A T ad M N parallelâ, eſt
a 4. 6. — A S. B S[a] :: A T. T O. & A S. SC[b] :: A T. T X. Unde A Sq.
b *hyp.* — B S. × S C ([b]hoc eſt H E. E P) :: A Tq. T O × T X ([b]hoc eſt E H.
c 9. 5. — H R). [c] quare E P = H R.

Prop. XV.

Fig. 20. Fig. 21.

Si in Ellipſi à puncto (C) quod diametrum (A B) bifariam dividit, ordinatim ducta linea (D C E) ex utraque parte ad ſectionem producatur, & fiat ut producta (D E) ad diametrum (A B), ita diameter (A B) ad aliam lineam (D F): Recta linea (G H) quæ à ſectione ducitur ad productam (D E) diametro (A B) æquidiſtans, poterit ſpatium (D L) adjacens tertiæ proportionali (D F), latitudinem habens lineam, (D H) quæ inter ipſam & ſectionem interjicitur, deficiénſque figurâ (M K) ſimili ei, quæ continetur lineâ (D E) ad quam ducuntur, & eâ (D F) juxta quam poſſunt. Quòd ſi ulterius producatur (G H) ad alteram ſectionis partem (V), bifariam ſecabitur ab ea (D E), ad quam applicata fuerit.

Sit A N linea, juxta quam poſſunt applicatæ ad A B: junctâque
a 13. *hujus.* — B N, per G ducatur G X ad D E parallela, pérque C & X ipſæ X O,
b 4. 6. — C P ad A N parallelæ; & per N, O, P ipſi A B parallelæ N R, O S,
c *hyp.* — P T. Liquet igitur eſſe D Cq [a] = rectang. A P. & G Xq [a] = re-
d 1. 6. — ctang. A O. Et ob A N. C P. (A T) [b] :: (A B. C B [c] :: 2. 1.) erit
e 2. *ax.* 1. — T N = A T. [d] unde rectang. A P = N P. [d] & rectang. X T [d] =
f 43. 1. — Y I [e] = N S (ob T O [f] = R O). ergo rectang. A O. ([a] G Xq) +
g 5. 2. — O P [e] = (rectang. N P [d] = A P [a] = C Dq [g] =) H Cq (G Xq) +
h 3. *ax.* 1. — H E × H D. & proinde rectang. H E × H D [h] = rectang. O P. (P S
k 1. 6. — × S O). Item H E × H D. H L × H D [k] :: (H E. H L [l] :: D E. D F [m] ::
l 4. 6. — D Eq. A Bq ([n] ob D E, A B, D F ∺)[o] :: C Dq ([a] P C × C A, vel
m *cor.* 20. 6. — P C × C B). C Bq [k] :: P C. C B [k] :: P S. S O [p] ::) P S × S O. [h](H E
n *hyp.* — × H D). S Oq. ergo H L × H D q = (S O q [r] =) H Gq. Quod erat
o 15. 5. — primum. Porrò, ductis V Q ad G X, & Q Z ad A N parallelis, propter
p 23. 6. — AX × X O [a] = (G Xq [r] = V Q q [a] =) A Q × Q Z [s], erit A Q. A X [s] ::
q 9. 5. r 34. 1. s 14. 6. — (X O. Q Z [l] ::) X B. Q B, ergo dividendo X Q. X A :: X Q. Q B.

quare

quare $XA = QB$. item CA [v] $= CB$. [x] ergo $CX = CQ$; [r] hoc est $HG = HV$. Quod erat secundum. t 9. 5. v hyp. x 3. ax. 1.

Coroll. Itaque DE est diameter altera priori AB conjugata.

Schol.

Breviùs ita Calculum instituemus.

$$\text{Sint}\begin{cases} BC, \text{ vel } CA = d. \\ AN = r. \\ CX, \text{ vel } HG = a. \end{cases}$$ Fig. 22.

$$\text{Est igitur}\begin{cases} BX = d + a. \\ AX = d - a. \end{cases}$$

Est autem $2d.r :: d+a.\frac{r}{2}+\frac{ra}{2d}$ quare $d-a$ (AX) $\times : \frac{r}{2}+\frac{ra}{2d}$ hoc est $\frac{dr}{2}-\frac{raa}{2d} = GXq$ vel HCq. Item quia $2d.r$ (BA. AN) :: d. (BC). $\frac{r}{2}$. erit d(BC) $\times \frac{r}{2}$, h.e. $\frac{dr}{2} = DCq$. Ergo $DCq - HCq$ (h. e. $HE \times HD$) $= \frac{raa}{2d}$. Porrò quia DCq. BCq (hoc est $\frac{dr}{2}$. dd) :: DEq. ABq :: DE. DF (ob DE, AB, DF ÷÷) :: HE. HL :: $HE \times HD$. $\left(\frac{raa}{2d}\right)$. $HL \times HD :: \frac{dr}{2}. dd :: \frac{r}{2}. d :: \frac{raa}{2d}. aa$. Erit $HL \times HD = aa = HGq$.

Simili discursu erit $HL \times HD = HVq$. unde $HG = HV$.

Prop. XVI.

Si per punctum (C), quod transversum latus (AB) oppositarum sectionum bifariam dividit, recta quædam linea (CD) ordinatim applicetur, ipsarum diameter erit, priori diametro (AB) conjugata. Fig. 23.

Recta quæpiam GH ad AB parallela sectionibus occurrat punctis G, H, à quibus ordinatim applicentur GK, HL; sintque AE. BF recta sectionum latera; & junctæ AF, BE producantur; ducantúrque KM, LN ad AE, BF parallelæ. Estque $AK \times KM$ [a] $=$ (GKq [b] $= HLq$ [a] $=$) $BL \times LN$. Item $AK \times KM$. $AK \times KB$ [c] :: (KM. KB [d] :: AE. AB [e] :: BF. BA [d] :: LN. LA [c] ::) $BL \times LN$. $BL \times LA$. ergo (ob $AK \times KM$ [f] $= BL \times LN$) [g] erit $AK \times KB = BL \times LA$. [h] quare KB. BL :: LA, AK. & componendo KL.

a 13. hujus. b 34. 1. c 1. 6. d 4. 6. (5. e 14. hujus. et 7. f priùs. g 14. 5. h 14. 6.

k 9. 5. KL. BL :: LK. AK. [k] ergo BL = AK. & [l] proinde CL = CK;
l *hyp.* & 3. *ax.* [m] hoc est XH = XG. [n] ergo CD est diameter, quippe quæ ipsam
m 34. 1. GH, & similiter omnes ad AB parallelas bisecat.
n 12. *def. hujus.*

Coroll. 1. Si GK = HL, erit AK = BL; & BK = AL, ac inde BK × AK = AL × BL.

2. Vicissim, si AK = BL, vel BK = AL. erit GK = HL. & BK × AK = AL × BL.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

Fig. 24. 25. 1. Punctum (C), quod hyperbolæ, & ellipsis diametrum (AB) bifariam dividit, Centrum sectionis dicatur.

2. Et quæ à centro (C) ad sectionem perducitur (CB) vocetur ex centro sectionis.

3. Similiter & punctum (C) quod transversum latus (AB) oppositarum sectionum bifariam dividit, Centrum vocetur.

4. Quæ autem (DE) à centro ducitur æquidistans ei (GK), quæ ordinatim applicata est, mediámque proportionem habet inter latera figuræ (AB, BF) & bifariam secatur à centro (C), secunda diameter appellatur.

Brevitatis causâ, Transversum latus, Rectum latus, & secundam diametrum elementis T, R, M designabimus: unde

* Cor. 20. 6. *Coroll.* * Tq. Mq :: T. R. (ob T, M, R ÷÷.)
& $CDq = \frac{1}{4} DEq = \frac{Mq}{4} = \frac{1}{4} TR$.

Viam jam munit ad singularum sectionum proprietates primas, & præcipuas eliciendas.

Prop. XVII.

Fig. 26. Si in coni sectione (CAD), ab ipsius vertice (A) ducatur recta linea (AC) æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, extra sectionem cadet.

a 7. *hujus.* Nam si dicatur intra cadere, [a] ergo bisecabitur à diametro; quod
b 10. *hujus.* fieri nequit, [b] cùm producta extra sectionem cadat.

Prop.

Prop. XVIII.

Si recta linea (A F B) sectioni occurrens (in F), productáque in utramque partem, extra sectionem cadat; sumatur autem aliquod punctum (C) intra sectionem, & per ipsam ei (A B), quæ sectioni occurrit, ducatur æquidistans (C D); ducta linea (C D), & producta, ex utraque parte sectioni occurret. Fig. 27.

Sumatur in sectione punctum quodvis E, & connectatur E F; hæc ipsi C D occurret; & siquidem inter puncta E F, manifestum est ipsam sectioni occurrere; sin extra, tum priùs cum sectione conveniet. Simili discursu ad partes A F sectioni occurret.

Prop. XIX.

In omni sectione coni recta linea (B C) quæ à diametro (A B) ducitur, ordinatim applicatæ æquidistans, cum sectione conveniet. Fig. 28.

Sumatur aliquod punctum D in sectione, jungatúrque A D; hæc occurret ordinatim applicatæ ad A, ergo ad illam parallelæ A C; & siquidem inter puncta A D, tum B C [a] protracta sectioni occurret, sin extra, priùs. [a] 10. *hujus.*

Prop. XX.

Si in Parabola duæ rectæ lineæ C E, D F à sectione ad diametrum (A B) ordinatim applicentur, ut earum quadrata inter se, ita erunt lineæ (A E, A F) quæ ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur. Fig. 29.

Sit A G latus rectum. itaque C Eq [a] = A E × A G. [a] & D Fq = A F × A G. ergo C Eq. D Fq [b] : : (A E × A G. A F × A G [c] : :) A E. A F. *Q. E. D.*

[a] 11. *hujus.* [b] 7. 5. [c] 3. 6.

Conversim. Si sit C Eq. D Fq : : A E. A F, erunt puncta C, D in parabola.

Coroll. D F ⊏ C E.

Hæc prima & præcipua est parabolæ proprietas, ex ejus definitione emergens.

Prop. XXI.

Si in hyperbola, vel ellipsi vel circuli circumferentia, rectæ lineæ (D E, F G) ordinatim ad diametrum (A B) applicentur, erunt quadrata Fig. 30.

drata earum ad ſpatia contenta lineis (E B, E A, & G B, G A) quæ inter ipſas, & vertices (A, B) tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus (A C) ad tranſverſum (A B); inter ſe verò ut ſpatia, quæ interjectis, ut diximus, lineis continentur.

Per E, & G ducantur E H, G K ad A C parallelæ, occurrentes pro-
a 4. 6. ductæ B C in H, & K. Eſtque C A. A B [a] : : (H E. E B [b] : :) H E
b 1. 6. × E A ([c] hoc eſt D Eq). E B × E A. Simili diſcurſu C A. A B : : F Gq.
c 12. *hujus.* G B × G A. Itaque D Eq. E B × E A [d] : : F Gq. G B × G A. & vi-
d 11. 5. ciſſim D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A.

Coroll. In hyperb. F E ⊏ D E. (in ellipſi uſque ad conjugatam ipſi A B diametrum; nam inde incipiunt ordinatim applicatæ decreſcere.) *Sch.*

Converſim; ſi fuerit D Eq. E B × E A : : R. T. vel D Eq. F Gq : : E B × E A. G B × G A. erunt puncta D, F in aliqua harum ſectionum.

Hæc prima eſt & præcipua harum ſectionum proprietas, ex ipſarum definitione reſultans.

Coroll. D Eq. E B × B A : : Tq. Mq.

Viam jam ſternit ad ſectionum tangentes indagandas.

Prop. XXII.

Si Parabolen, vel hyperbolen recta linea (C D) in duobus punctis
Fig. 31. (C, D) ſecet, non conveniens cum ſectionis diametro (A B) intra ſe-
32. ctionem, producta cum eâdem diametro extra ſectionem conveniet.

a *cor.* 20. & Ordinatim applicentur C E, D B: ſunt hæ inæquales, & [a] minor
b *cor.* 21. *hujus.* D B, [b] ergo juncta C D producta cum E A conveniet extra ſectionem ad partes A. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

**id eſt, conjugatas.* Si ellipſin ſecet recta linea (E F) inter duas *diametros (A B, C D) producta, producta cum utraque earum conveniet, extra ſectionem.

Fig. 33. Ordinatim applicentur E G, F H. atque ob E Gq. F Hq [a] : : B G
a 21. *hujus.* × G A. B H × H A, [b] & B G × G A ⊏ B H × H A (eſt enim punctum
b 5. 2. G propiùs centro M, quam punctum H); [c] erit E Gq ⊏ F Hq. &
c 14. 5. E G ⊏ F H. ergo E F producta cum diametro B A conveniet, ad

partes

partes A. Simili discursu eadem F E diametro D C occurret ad partes C.

Coroll. E G ⊏ F H.

Prop. XXIV.

Si parabolæ, vel hyperbolæ recta linea (C E) in uno puncto (D) occurrens, & producta ex utrâque parte, extra sectionem cadat, cum diametro (A B) conveniet. Fig. 34.

Sumpto quolibet in sectione puncto F, jungatur F D; [a] hæc diametro occurret; puta in A; hanc verò decussat ipsa C D (in D). ergo C D producta diametro occurret; inter A scilicet & sectionem. a 22. *hujus.*

Prop. XXV.

Si ellipsi recta linea (E F) occurrens (in G), inter duas diametros (A B, C D) & producta ex utrâque parte cadat extra sectionem, cum utrâque diametro conveniet. Fig. 35.

Ordinatim applicetur G K: hæc diametro A B est parallela: ergo E F cum A B conveniet. Simili discursu, F E cum C D conveniet.

Prop. XXVI.

Si in parabola, vel hyperbola ducatur recta linea (C D) sectionis diametro (A B) æquidistans, in uno tantùm puncto (E) cum sectione conveniet. Fig. 36.

Quod conveniet C D cnm sectione, patet, (quoniam distantia parallelarum C D, A B est finita, sectio autem in infinitum potest augeri; adeóque ducta aliqua ab A B ordinatim applicata ad sectionem, excedet istam distantiam.) Conveniat in E; & ordinatim applicetur E F: ergo cùm omnes ordinatim applicatæ ad partes D [a] majores sint quàm E F, ad partes verò C minores, liquet C D nusquam convenire cum sectione, præterquam in E. a *cor.* 20. & *cor.* 21. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si parabolæ diametrum (A B) secet recta linea (C D), producta in utramque partem cum sectione conveniet. Fig. 37.

Sit A E ordinatim applicatis parallela; si C D huic parallela sit,

 liquet

a 19. *hujus.* b 17. *hujus.* c 11. 6. d 19. 5. e 4. & 22. 6. f 22. 6. g *conft.* & *cor.* 20. 6. h *conv.* 20. *hujus.*

[a] liquet ipſam utrinque ſectioni occurrere; ſin minùs, producta conveniet cum A E, puta in E, [b] ergò priùs cum ſectione, puta in G; ordinatim igitur applicetur G F; [c] fiátque A F. A D :: AD. AB. [d] unde F D. D B :: A D. A B. ductâ igitur B C ad G F parallela erit, F Dq. D Bq (e hoc eſt G Fq. B Cq) [f] :: A Dq. A Bq [g] :: A F. A B. ergo cùm ſit G Fq. B C q :: A F. A B, [h] erit punctum C in ſectione: quare C D utrinque ſectioni ocurrit.

Prop. XXVIII

Fig. 38.

Si recta linea (C D) unam (A) oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum (E) intra alteram ſectionem (B), & per ipſum linea (E F) contingenti æquidiſtans ducatur, producta ad utramque partem cum ſectione (B) conveniet.

a 4. 6. b *conſtr.* c 14. 5. d *conſtr.* & *Sch.* 48. 1. e 7. 5. f 21. *hujus.*

Nam quia C D diametro occurrit, eidem occurret E F, puta in G. Sit A H = B G, & per H ducatur H K ad C D vel E F parallela, ſectioni occurrens in K, & ordinatim applicetur K L, ſumatúrque G M = H L; denique ducatur M N ad K L parallela. Eſtque H L. L K :: [a] G M. M N. ergo (ob H L [b] = G M) [c] erit L K = M N. [d] Item B L × A L = A M × B M. quare B L × A L. L Kq [e] :: A M × B M. M Nq. [f] unde punctum N erit in ſectione B. Simili argumento ex altera parte occurret ipſa E F ſectioni.

Prop. XXIX.

Fig. 39.

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea (C D) per centrum (C) ducta occurrat uni ſectioni (A), ulteriùs producta alteram quoque (B) ſecabit.

a 21. *hujus.* b *conſtr* & *ſch.* 48. 1. c 14. 5. d *conſtr.* e 29. 1. f 4. 1. g *Sch.* 15. 1.

Ad diametrum A B ordinatim applicetur D F, fiátque B G = A F; & ordinatim ducatur G E, jungatúrque C E. eſtque B F × A F. D Fq [a] :: T. R [a] :: A G × B G. G Eq. ergo cùm [b] ſit B F × A F = A G × B G. [c] erit D Fq = G Eq & D F = G E. [d] Item C F = C G. & ang. F [e] = ang. G. [f] ergo ang. F C D = G C E: [g] quare linea D C E eſt una recta, ſectioni B occurrens in E.

Coroll. 1. D F = E G.

2. C D = C E; (ob trigona C F D, C G E ſimilia, & latera C F, C G æqualia.)

Prop.

Prop. XXX.

Si in ellipsi vel oppositis sectionibus ducatur recta linea D E, ad utrasque partes centri (C) sectioni occurrens, ad centrum (C) bifariam secabit. Fig. 40.

In oppositis sectionibus patet * ex præcedenti. In ellipsi verò ad diametrum A B ordinatim applicentur D F, E G. Et quoniam B F × F A. A G × G B [a] :: (D Fq. G Eq [b] ::) F Cq. G Cq. & permutando B F × F A. F Cq :: A G × G B. G Cq. & componendo A Cq. (B F [c] × F A + C Fq). F Cq :: B Cq. [c] (A G × G B + G Cq) G Cq. sitque A C [d] = B C. [e] erit F C = G C; & propterea C D [f] = C E.

Coroll. C G = C F, & G E [f] = D F; & G B [g] = F A. & B F [g] = A G. & B F × F A [h] = A G × G B.

* *cor. 2. præc.*
a 21. *hujus.*
b 4. 6. & 22. 6.
c 5. 2.
d *constr.* & 10. *def. hujus.*
e 14. 5.
f 4. 6.
g 3. *ax.* 1.
h *Sch.* 18. 1.

Prop. XXXI.

Si in transverso figuræ latere (A B) hyperbolæ, sumatur aliquod punctum (C) non minorem (C B) abscindens ad verticem sectionis, quàm sit dimidia transversi lateris (A B) figuræ, & ab ipso (C) recta linea (C D) sectioni occurrat, si producatur, intra sectionem ad sequentes ipsius partes (E) cadet. Fig. 41.

Sit primò A C = C B. & ordinatim applicentur D H, * F E G. Et quia C Gq. C Bq [a] $\sqsubset$ C Hq. C Bq. erit per conversam rationem C Gq. C Gq — C Bq $\sqsupset$ C Hq. C Hq — C Bq. & inversè C Gq — C Bq. C Gq $\sqsubset$ C Hq — C Bq. C Hq. & permutatim, C Gq — C Bq. [b] (A G × G B.) C Hq — C Bq [b] (A H × H B) $\sqsubset$ (C Gq. C Hq [c] ::) G Eq. H Dq). ergo cùm A G × G B. A H × H B [d] :: G Fq. H Dq. erit G Fq. H Dq [e] $\sqsubset$ G Eq. H Dq. [f] ergo G F $\sqsubset$ G E. ergo C D E intra sectionem cadit.

Quòd si ab aliquo puncto in A C (posito C centro) ad punctum D ducatur recta, hæc ipsam C D decussabit in D, adeóque magis intra sectionem cadet.

Coroll. Hinc, linea hyperbolem contingens, diametrum secat inter verticem, & centrum sectionis: unde multò magis

Linea quæ duobus punctis secat (vel quæ tangenti parallela esse poterit) diametro occurret inter verticem & centrum.

* utcunque hæc ad partes E.
a 8. 5.
b 6. 2.
c 4. & 22. 6.
d 21 *hujus.*
e 13. 5.
f 10. 5.

Prop. XXXII.

Fig. 42. Si per coni sectionis verticem (A) ducatur recta linea (A C) ordinatim applicatis æquidistans, sectionem continget,& in locum (CAG), qui inter coni sectionem & rectam lineam (A C) interjicitur, altera recta linea non cadat.

Fig. 43. 44. Si fieri potest, cadat A D,& à puncto D (utcunque sumpto in A D) ordinatim applicetur D G E. Sintque A F, B A latera figurarum. Jam in parabola fiat A F. A H :: D Eq. A Eq. & ducatur H K ad E D parallela, sectioni occurrens in L. Estque A F × A H [a] (L Hq). AHq [b] :: (A F. AH [c] :: D Eq. A Eq. [d] ::) K Hq. A Hq. [e] ergo L H = KH. [f] *Q. E. A.*

In reliquis sectionibus, præter hæc, connexa B F producatur; & per E ducatur E M N ad A F parallela, fiàtque A E × E N = D Eq; & juncta A N secet B M in X; ducantur X H ad A F, & H K ad AC parallelæ. Estque X H × A H [g] (L Hq). A Hq [h] :: (X H. A H [h] :: N E. E A [b] :: N E × E A [g] (D Eq). E Aq [d] ::) K H q. A Hq. ergo L Hq [f] = K Hq. & L H = K H, pars toti æqualis. [f] *Q. E. A.*

a 11. *hujus.*
b 1. 6.
c *constr.*
d 4. & 22. 6.
e 9. 5.
f 9. *ax.* 1.
g 12. *hujus.*
h 4. 6.

Cor. Si duæ sectiones sese contingant, quæ harum unam contingit recta, alteram quoque continget.

Prop. XXXIII.

Fig. 45. Si in parabola, sumatur aliquod punctum (C), à quo recta linea (CD) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; & ei (E D) quæ ab ipsa ex diametro abscinditur ad verticem, æqualis (A E) ponatur in directum ab ejus extremitate (E): recta linea (A C), quæ à facto puncto (A) ducitur ad illud (C) qood sumptum fuerat, sectionem continget.

Sumpto utcunque puncto F in A C, ordinatim applicetur F B, sectioni occurrens in G. Et quoniam 2 A E × E B [a] $\sqsupset$ A Eq + E Bq; erit 4 A E × E B [b] $\sqsupset$ (A Eq + E Bq + 2 A E × EB [c] =) A Bq; [c] atqui 4 A E × E D. = A Dq. ergo 4 A E × E B. A Bq [d] $\sqsupset$ 4 A E × E D. A Dq. & permutando 4 A E × E B. 4 A E × E D ([e] hoc est, E B. E D, [f] vel G Bq. C D q) $\sqsupset$ A Bq. A Dq. ([g] vel F Bq. C Dq) [h] ergo G B. C D $\sqsupset$ F B. C D. [k] quare G B $\sqsupset$ C D. unde punctum F est extra sectionem; idémque de reliquis rectæ.

a *Not. infra.*
b 4. *ax.* 1.
c 4. 6.
d 13. 5.
e 1. 6.
f 20. *hujus.*
g 4. & 22. 6.
h 22. 6.
k 10. 5.

rectæ A C punctis simili discursu ostendetur. ergo recta A C F sectionem contingit. *Q. E. D.*

Not. 2 A E × E B $\sqsupset$ A Eq + E Bq. Nam A Eq + E Bq = 2 A E × E B + Quad: A E − E B ([z] hoc est + A Eq + E Bq − 2 A E × E B). z *cor.* 7. 2.

Prop. XXXIV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (C), ab eóque recta linea (C D) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ (BD, AD), interjectæ inter ordinatim applicatam (C D) & (A, B) terminos transversi lateris (A B) figuræ, eandem habeant inter se (B E, E A) partes lateris transversi, ita ut quæ sunt ad verticem partes sibi ipsis respondeant (B D. D A :: B E. E A); recta linea (E C) conjungens punctum (E) quod in transverso latere sumitur, & punctum (C) quod est in sectione, sectionem ipsam continget. Fig. 46. 47.

Sumpto utcunque puncto F in E F ordinatim applicetur F G, sectioni occurrens in H. & per A, B puncta ducantur A L, B K ad E F paralleloe, & protrahantur D C K, E C X, G C M. Estque B K. A N [a] :: (B D. D A [b] :: B E. E A [a] :: B C. C X [a] ::) B K. N X. [c] ergo N X = A N. quare N X × A N [d] $\sqsubset$ A O × O X. [e] ideóque N X. O X [f] (hoc est K B M B) [e] $\sqsubset$ A O. A N. unde K B × A N $\sqsubset$ M B × A O. [g] ergo K B × A N. C Eq ([h] hoc est B D × D A. D Eq.) $\sqsubset$ B M × A O. C Eq [h] (hoc est B G × G A. G Eq.) & permutando B D × D A. B G × G A [k] (hoc est C Dq. H Gq) $\sqsubset$ D Eq. G Eq. [l] (C Dq. F Gq) [m] ergo C D. H G $\sqsubset$ C D. F G. [n] ergo H G $\sqsupset$ F G. quare punctum F extra sectionem existit. Quare E F sectionem contingit.

a 4. 6.
b *hyp.*
c 9. 5.
d 5. 2.
e *Not.* 2. *infra.*
f *Not.* 1.
g 8. 5.
h 3. *Not.*
k 21. *hujus.*
l 4, & 22. 6.
m 22. 6.
n 10. 5.

Notæ.

1. Quòd sit N X. O X :: K B. M B; sic patet: quoniam N O. K M [o] :: (O C. C M [o] ::) O X. M B, & permutatim N O. O X :: K M. M B. erit componendo N X. O X :: K B. M B. o 4. 6.

2. Quòd sit N X. O X $\sqsubset$ A O, A N, sic ostenditur. Sit R × S $\sqsubset$ X × Y. Dico R. X $\sqsubset$ Y. S. Sit enim R S = X Z. [p] ergo Z $\sqsubset$ Y. [q] ergo Z. S [r] (hoc est R. X) $\sqsubset$ Y. S. p *sch.* 48. 1. q 8. 5. r 17. 6.

3. Quòd sit K B × A N. C Eq :: B D × D A. D Eq, ita constabit: quoniam A N. C E [s] :: A D. D E. & C E. K B [s] :: D E. D B erit ex s 4. 6.

æquo

t 1. 6. æquo A N. K B [t] (A Nq. A N $\times$ K B) :: A D. D B [t] (A Dq. A D $\times$
u 4. & 22. 6. D B). [u] Item C Eq. A Nq :: D Eq. A Dq. ergo rursus ex æquo C Eq. A N $\times$ K B :: D Eq. A D $\times$ D B, ac inversè.

Coroll.

Hinc si $\frac{T \times AD}{T + 2AD} = AE$ in hyperbola, vel $\frac{T \times AD}{T - 2AD}$ in ellipse, erit E C tangens.

Prop. XXXV.

Fig. 48. Si parabolen recta linea (A C) contingat, conveniens cum diametro (A B) extra sectionem (in A), quæ (C B) à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abscindet ex diametro ad verticem sectionis lineam (B G) æqualem ei (G A), quæ inter ipsam & contingentem interjicitur; & inter locum, qui est inter contingentem, & sectionem, alia recta linea non cadet.

Si fieri potest, sint A G, G B inæquales; ipsique A G æqualis ponatur G E; & ordinatim applicetur E F. [a] ergo ducta A F sectionem continget, & rursus occurret ipsi A C. [b] *Q. E. A.*

a 33. *hujus.*
b 14. *ax.* 1.

Porro dic aliquam D C sectionem inter & A C cadere; fiátque G E = G D. & ordinatim applicetur E F. [a] ergo ducta D F tanget sectionem, ipsámque D C iterum decussabit. [b] *Q. E. A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 49. 50. Si hyperbolen vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea (C D) conveniens cum transverso figuræ latere (B A), & à tactu recta linea (C E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur; erit ut linea (B D) quæ interjicitur inter contingentem, & terminum (B) transversi lateris ad (D A) interjectam inter eandem, & alterum lateris terminum (A), ita linea (B E), quæ est inter ordinatim applicatam (C E) & lateris terminum (B) ad eam (E A), quæ est inter eandem (C E) & alterum terminum (A), adeo ut continuatæ inter se sint, quæ sibi ipsis respondent (B D. D A :: B E. E A). Et in locum, qui inter contingentem, & sectionem coni interjicitur, altera recta linea non cadet.

a 34. *hujus.*
b 14. *ax.* 1.

Si enim non sit B D. B A :: B E. E A; sit B D. D A :: D G. G A. & ordinatim applicetur G F; [a] ergo ducta D F sectionem continget, iterúmque conveniet cum recta [b] D C. *Q. E. A.*

Quin-

Quinetiam si aliqua H C intercedat, fiat B H. H A :: B G. G A. & applicetur G F ordinatim: [a] itaque juncta H F sectionem continget, [b] ipsamq; D G bis decussabit. *Q. E. A.*

Cor. Hinc si C D tangat, erit in hyperbola $AG = \frac{T \times AD}{T - 2AD}$; in ellipse $AG = \frac{T \times AD}{T + 2AD}$.

Not. In hyperbola A G ⊏ A D: quia T — 2 A D ⊐ T.
In ellipse A G ⊐ A D, quia T + 2 A D ⊏ T.

Prop. XXXVII.

Si hyperbolen vel ellipsim, vel circuli circumferentiam recta linea (C D) contingens cum diametro (A B) conveniat, & à tactu (C) ad diametrum linea (C E) ordinatim applicetur; quæ (E F) interjicitur inter applicatam (C E) & sectionis centrum (F), unà cum interjecta (D F) inter contingentem (C D) & sectionis centrum (F); continebit rectangulum æquale quadrato lineæ F B, quæ est ex centro sectionis; sed unà cum ea (E D) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit spatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ (C E), eandem proportionem habet, quam transversum figuræ latus ad rectum. Fig. 51. 52.

Nam A E. E B [a] :: A D. D B ergo componendo A E + E B. E B :: A D + D B. D B quare (in hyperbola) bipartiendo antecedentes, F E. E B :: F B. D B. & per conversam rationem, F E. F B :: F B. F D. [b] unde F E × F D = F Bq. *Q. E. D.*
Item, inversè F B [c] (A F) F E :: (F D. F B [d] ::) D B. (F B — F D). E B (F E — F B) ergo componendo. A E. F E :: D E. E B. ergo F E × D E [e] = A E × E B. quare F E × D E. C Eq [f] :: (A E × E B. C Eq [g] ::) T. R. *Q. E. D.*
In Ellipsi verò & circulo, ob A E + E B. E B :: A D + D B. D B. erit quoque (bipartiendo antecedentes,) F B. E B :: F D. D B. & per conversam rationem F B. F E :: F D. F B. unde F E × F D [h] = F Bq. hoc est D E × F E + F Eq [k] = (F Bq =) A E × E B + F Eq [m] ergo D E × F E = A E × E B. & D E × F E. C Eq [n] :: (A E × E B. C Eq [o] ::) T. R.

a 36. *hujus.*
b 17. 6.
c *hyp.*
d 19. 5.
e 16. 6.
f 7. 5.
g 21. *hujus.*
h 17. 6.
k 3. 2.
l 5. 2.
m 3. *ax.* 1.
n 7. 5.
o 21. *hujus.*

Coroll. F E, F B, F D sunt ∺.

$\left\{\begin{array}{l} FE.\ EB :: FB.\ DB. \\ FB.\ BE :: FD.\ DB. \\ FB.\ FD :: BE.\ DB. \end{array}\right.$

Hinc

Hinc methodus ex dato puncto in diametro, vel ſectione contingentem ducendi.

Converſim: ſi F E × F D = F Bq: vel ſi D E × F E. C Eq :: T,R. erit recta C D tangens ſectionis.

Prop. XXXVIII.

Fig. 53. 54. 55. 56. Si hyperbolen, vel ellipſin, vel circuli circumferentiam recta linea (F L) contingens in (E), cum ſecundâ diametro (C D) conveniat, & à tactu (E) ad diametrum (C D) applicetur linea (E H) æquidiſtans alteri diametro (A B); quæ (H G) interjicitur inter applicatam (E H) & ſectionis centrum (G) unà cum interjecta (F G) inter contingentem, & ſectionis centrum, continebit rectangulum, æquale quadrato quod fit ex (G C) dimidia ſecundæ diametri: ſed unà cum ea (H F) quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, ſpatium continebit, quod ad quadratum applicatæ (E H) eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad tranſverſum.

a 23. 6.
b 34. 1 & 4. 6.
c 21. *hujus.*
d *cor. def. ad* 16. *hujus.*
e *hyp.*
d 15. 5.
e 37. *hujus.*
f 14. 5.

Ordinatim applicetur E M. Eſtque G M × G L. H G × F G [a] = G M. H G + G L. F G [b] = G M. E M + L M. E M [a] = G M × L M. E Mq [c] = T. R [d] :: Tq. Mq ([e] A Bq. C Dq [d] ::) A Gq. C Gq. ergo cùm A Gq [e] = G M × G L [f]. erit C Gq = H G × F G. *Q. E. D.*

Porro, inverſè R. T = (H G. G M + F G. G L [b] = H G. H E + F H. H E [a] =) H G × F H. H Eq.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt. Ut linea (C F), quæ inter tangentem, & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam (F D), quæ inter tangentem, & alterum terminum ſecundæ diametri, ita eſſe lineam (D H), quæ eſt inter alterum terminum, & applicatam, ad eam (C H) quæ inter alterum terminum & applicatam.

g *priùs.*
h *hyp. & ſch.* 48. 2.
k 14. 6.

Nam ob F G × H G [g] = (C Gq [h] =) C G × G D, [k] erit F G. G D :: C G. G H. & per converſam rationem G F. F D :: G C. C H. & duplicando antecedentes, C F + F D. F D :: D C. C H. & dividendo C F. F D :: D H. C H. *Q. E. D.*

Coroll. 1. Si F G × G H = G Cq. vel F H × H G. H E :: R. T. erit E F tangens.

2. F G × G H = $\frac{1}{4}$ T R.

Prop.

Prop. XXXIX.

Si hperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat (in D); & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C E); sumptâ quàvis lineâ ex duabus, quarum altera (E F) interjicitur inter applicatam (C E), & sectionis centrum (F); altera (E D) inter applicatam, & contingentem (C D); habebit ad eam applicata (C E) proportionem compositam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum (E F, E D) ad applicatam (C E), & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad transversum. Fig. 57. 58.

Sit E F. C E :: G. E D. [a] vel E F × E D = C E × G. ergo C Eq. — a 16. 6.
C E × G [b] (C E. G) [c] :: (C Eq. E F × E D :: [d]) R. T. atqui C E. — b 1. 6.
E D [e] = C E. G + G. E D ([f] + E F. C E.) ergo C E. E D = — c 7. 5.
R. T. + E F. C E. *Q. E. D.* — d 37. *hujus.*

e 5. *def.* 6.
f *constr.*

Prop. XL.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam recta linea (A H) contingens (in A) conveniat cum secunda diametro (D E); & à tactu (A) ad eandem diametrum (D E) applicetur linea (A G) æquidistans alteri diametro (B C); sumptâ quâlibet lineâ ex duabus; quarum una (G F) inter applicatam (A G) & sectionis centrum (F) interjicitur, altera (G H) inter applicatam, & contingentem: habebit ad ipsam applicata (A G) proportionem compositam ex proportione, quam habet transversum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum linearum (G F, G H) habet ad applicatam (A G). Fig. 59. 60.

Sit G H. A G :: K. G F. [a] vel G H × G F = A G × K. ergo A Gq. — a 16. 6.
G H × G F [b] (T. R.) [c] :: (A Gq. A G × K [d] ::) A G. K. atqui A G. — b 38. *hujus.*
G F [e] = A G. K + K. G F [f] (+ G H. A G). ergo A G. G F = — c 7. 5.
T. R. + G H. A G. *Q. E. D.* — d 1. 6.

e 5. *def.* 6.
f *constr.*

Prop. XLI.

Si in hyperbola, vel Ellipsi, vel circuli circumferentia ordinatim applicetur recta linea (C D) ad diametrum (A B); & ab applicata (C D), & ea (E A) quæ ex centro, describantur parallelogramma æquian- Fig. 61. 62.

gula

augula (D G, A F); habeat autem applicata (C D) ad reliquum latus (C G) parallelogrammi (D G) proportionem compositam ex proportione, quam habet ea quæ ex centro (E A) ad reliquum latus (E F), & ex proportione, quam rectum figuræ sectionis latus (R) habet ad transversum (T); parallelogrammum factum à lineâ (E D) quæ inter centrum (E) & applicatam (C D) interjicitur, simile parallelogrammo (A F), quod fit ab ea (E A) quæ ex centro, in hyperbola quidem majus est, quàm parallelogrammum (D G) ab applicata (D C), parallelogrammo (A F) ab ea (E A) quæ ex centro; In ellipsi verò, & circuli circumferentia, unà cum parallelogrammo (D G) quod fit ab applicata, æquale est parallelogrammo (A F) ab ea, quæ ex centro.

a 21. *hujus.* b 1. 6. c 9. 5. d *constr.* e *hyp.* f 5. *def.* 6. g 1. 6. h *priùs* & 7. 5. k 22. 6. l 6. 2. m 19. 5. n 5. 2.

Fiat R. T [a] (hoc est D Cq. B D × D A) :: D C. C H [b] (hoc est D Cq. D C × C H). [c] ergo B D × D A = D C × CH. item D C. CH + A E. E F [d] = (R. T + A E. E F [e] = D C. C G [f] =) D C. C H + C H. C G. quare A E. E F [b] (hoc est A Eq. A E × E F) :: (C H. C G [g] :: C H × D C. C G × D C [h] ::) B D × D A. C G × D C. permutandóq; B D × D A. A Eq :: (C G × D C. A E × E F [k] ::) *pgr.* D G. F A. ergo in hyperbola componendo *pgr.* D G + F A. *pgr.* F A :: D Eq. [l] (B D × D A + A Eq). A Eq.

In Ellipsi verò & circulo, permutando A Eq *pgr.* F A :: (B D × D A. *pgr.* D G [m] ::) D Eq [n] (A Eq — B D × D A). *pgr.* F A — D G & permutando D Eq. A Eq :: *pgr.* F A — D G. *pgr.* F A.

o 22. 6.

quare si fiat ex D E parallelogrammum simile ipsi A F [o]; liquet propositum.

Coroll. Quæ de parallelogrammis ostensa sunt, eadem valent in trigonis horum dimidiis.

Prop. XLII.

Fig. 63.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) conveniat in A; & à tactu (C) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (C H); sumpto autem quovis puncto (D) in sectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ (D E, D F), altera quidem (D E) æquidistans contingenti (C A); altera vero (D F) æquidistans ei (C H), quæ à tactu (C) ordinatim est appplicata; triangulum (E D F) quod ab ipsis constituitur, æquale erit parallelogrammo (F G) contento linea (C H) à tactu applicata, & ea (F B), quæ interjicitur inter æquidistantem (D F) & sectionis verticem (B.)

a 35. *hujus.* b ex. 41. 1.

Nam ob A H [a] = 2 H B, [b] erit triang. C H A = *pgr.* H G. quare

pgr.

pgr. H G. triang. D F E [c] ::(triang. C H A. D F E [d] :: C Hq. D F q [e] :: H B. F B [f] ::) *pgr.* H G *pgr.* F G. [g] ergo triang, D F E = *pgr.* F G. *Q. E. D.* c 7. 5. d 22. 6. e 20. *hujus.* f 1.6. g 9. 5.

Prop. XLIII.

Si hperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) conveniat cum diametro (A B); & à tactu (E) ad diametrum (A B) ordinatim applicetur linea (E F); huic verò per sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), quæ cum linea (E C) per tactum (E) & centrum (C) conveniat in (L); & sumpto in sectione aliquo puncto (G), ab eo ad diametrum ducantur duæ lineæ (G H, G K) una quidem (G H) æquidistans contingenti (E D), altera vero (G K) æquidistans ei (E F), quæ à tactu applicata est: triangulum (G K H) ab ipsis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum (C K M) quod abscindit linea (C E) per centrum & tactum ducta, triangulo (C B L) ab ea (C B) quæ ex centro simili abscisso: in ellipsi verò, & circuli circumferentia una cum triangulo (C K M) abscisso ad centrum æquale erit triangulo (C B L), simili abscisso, quod describitur ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 64. 65. 66.

Nam G K KH [a] = (EF. F D [b] = C F. F E + R. T [c] =) C B. B L + R. T. unde triang. G H K, æquatur excessui triangulorum C K M, B C L. *Q. E. D.* a 4. 6. b 39. *hujus.* c 4. 6. d *cor.* 41. *hujus.*

Coroll. Triang. G K H = 4 laterum K B L M.

Schol.

Triang. C B L = triang. C D E. *Vid. Eut.*

Prop. XLIV.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (F G) contingens cum diametro (A B) conveniat (in G); à tactu verò (F) ad diametrum ordinatim applicetur linea (F O); atque huic per alterius sectionis verticem (B) ducatur æquidistans (B L), ut conveniat cum linea (F C) per tactum (F) & centrum (C) ductâ; sumpto autem quovis in sectione puncto (N), applicentur ad diametrum duæ lineæ (N K, N H), quarum altera (N K) æquidistet contingenti (F G), altera æquidistet ei (F O) quæ à tactu ordinatim applicata est; triangulum (N H K), ab ipsis factum, minus est, quàm triangulum (CMH) quod abscindit applicata ad centrum sectionis, triangulo simili (CBL), abscisso ab ea (C B) quæ ex centro. Fig. 67.

a 31. hujus. b hyp. c cor. 29. hujus. d 15. 1. e 4. 1. f 27. 1. g 30. 1. h 43. hujus.

Productâ F C, ut occurrat sectioni B in E, per E ducatur tangens E D, & ordinatim applicetur E X. Estque O C * C G[a] = (A C q[b] = B Cq[a] =) X C * C D. ergo cùm sit O C[c] = X C, erit C G = C D. item F C[c] = E G. & verticales anguli ad C[d] pares sunt.[e] ergo ang. C G F = ang. C D E.[f] unde D E ad F G, &[g] proinde ad N K parallela est.[h] ergo triang. C M H—C B L = triang. N H K.

Coroll. C D = C G.

Coroll. Tangens E D tangenti F G æqualis & parallela est: & conversim; si E D tangenti F D æqualis vel parallela sit, etiam E D tanget oppositam sectionem.

Prop. X L V.

Fig. 68. 69. 70. 71.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (C M L) cum secunda diametro (H D) conveniat (in L); & à tactu (C) ad eandem diametrum applicetur linea (C D), æquidistans alteri diametro (A H); & per tactum (C) & centrum (H) ducta linea (C H) producatur; sumpto autem in sectione quovis puncto (B), ad secundam diametrum (H D) ducantur duæ lineæ (B E, B F), quarum una (B E) contingenti (C L), altera (B F) applicatæ (C D) æquidistet; triangulum (B F E) quod ab ipsis constituitur, in hyperbola quidem majus est, quàm triangulum (G F H) abscissum ab applicata ad centrum, triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L), & vertex sectionis centrum (H): in ellipsi verò & circuli circumferentia, unà cum triangulo abscisso (G F H) æquale est triangulo (L C H), cujus basis est linea contingens (C L) & vertex sectionis centrum (H).

a 39. hujus. b 4. 6. c cor. 41. hujus. d 34. 1. & 1. ax. e 3. ax. f 7. 1. g 4. 1. h prius. l 4. 6. m 2. ax. 1.

Ducantur C K, B N ad D H parallelæ. & trigonum ad A H, (simile trigono (C D L) appelletur P. estque C K. K H[a] = (M K. K C + R. T[b] =) C D. D L. + R. T. quare in hyperb. triang. C D L (C D H + C L H)[c] = (triang. C K H + P[d] =) triang. C D H + P.[e] unde P = triang. C L H. Cæterum ob B N. F G[f] = (F H. FG.[g] = D H. D C[f] = C K. K H[h] = C D. D L + R. T[l] =) B F. (N H) F E + R. T.[c] Erit triang. B F E = triang. G H F + P.[m] ergo triang. B F E = triang. G H F + triang. C L H.

Simili discursu, in ellipsi erit triang. B F E + G H F = triang. C L H.

Prop. XLVI.

Si parabolen contingens recta linea (C A) cum diametro (A B) convenïat (in A); quæ per tactum (C) ducitur diametro æquidistans (H C M), ad easdem partes sectioni lineas (L F) in sectione ductas, quæ æquidistant contingenti (C A), bifariam secabit (in N.) Fig. 72.

Ordinatim applicentur B H, F G K, L M D. Estque triang. E L D [a] = *pgr*. B M. & triang. E F G [a] = *pgr*. B K. [b] ergo 4 lat. F L D G = *pgr*. G M. auferatur commune N M D G F; [b] manéntque trigona N M L, F K N æqualia. [c] eadémque similia sunt. ergo homologa latera N L, N F æquantur. *Q. E. D.*

a 42. *hujus*. b 3. *ax*. 1. c 29.1. & 4. 6.

Coroll. 1.

In parabola omnes lineæ parallelæ diametro sunt * etiam diametri; & vicissim, omnes diametri sunt parallelæ.

* *def*. 10. *hujus*.

Coroll. 2.

Omnes contingenti æquidistantes sunt ordinatim applicatæ ad diametrum per tactum ductam.

Prop. XLVII.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (E D) cum diametro (A B) conveniat (in D); per tactum (E) & centrum (C) ducta linea (E C) ad easdem partes sectioni, quæ in sectione ducuntur contingenti (E D) æquidistantes (G N) bifariam secabit (in O.) Fig. 73. 74.

Ordinatim applicentur N F X, B L, G M K. Estque triang. H N F [a] = 4 lat. L B F X. & triang. G H K [a] = quadrilat. L B K M. [b] ergo 4 lat. N G K F = M K F X. commune auferatur O N F K M, [b] manent trigona O M G, O X N æqualia. [c] eadem vero similia sunt. ergo N O = G O. *Q. E. D.*

a *cor*. 43. *hujus*. b 3. *ax*. 1. c 29. 1. & 4. 6.

Coroll. C E est diameter sectionis cujuslibet ex his.

Prop. XLVIII.

Si unam oppositarum sectionum contingens recta linea (L K) cum diametro (A B) conveniat (in K); & per tactum (L), & centrum (C) linea (L C) producta alteram sectionem secet (in E); quæ in altera Fig. 75.

sectione

sectione ducta fuerit contingenti (L X) æquidistans (G N) à lineâ (L C) productâ bisecabitur (in O.)

a *cor.* 44. *hujus.*
b 30. 1.
c 47. *hujus.*

Ducatur tangens E D; [a] estque E D ad L K parallela; [b] ac ideò ad N G. [c] ergo $ON = OG$. *Q. E. D.*

Lemma.

Fig. 76. 77.

Sit triangulum N L K æquale parallelogrammo L C, & ang. $KLN = DLP$: erit $KL \times LN = 2DC \times LD$.

a 6. *ax.* 1.
b 14. 6.
c 16. 6.

Compleatur enim *pgr.* L R. & productâ L P, fiat $PT = LP$. & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* L R [a] = *pgr.* D T. [b] unde KL. LD :: LT (2DC). LN. [c] quare $KL \times LN = 2DC \times LD$.

Item, si D P fuerit trapezium trigono K L N æquale, erit $KL \times LN = LD \times : CD + LP$. Nam fiat $PT = DC$; & compleatur *pgr.* D T. eritque *pgr.* DT = (2DP = 2 triang. KLN =) *pgr.* L R. unde KL. LT. (LP + DC) :: LD. LN. quare $KL \times LN = LD \times : DC + LP$. *Q. E. D.*

Schol. Hinc KNq. KLq :: R. G (hoc est ut parameter axis ad parametrum diametri D N).

Fig. 78.
a 4. & 22.6.
b 11. *hujus.*
c *priùs in* 49.
d 7. 5. (*b.*
e 1. 6.
Est. 2. 7*mi* Apollonii.

Nam KNq. KLq [a] :: XDq. DCq: & est XDq [b] $= R \times BX$. [c] & $DCq = G \times BX$. [d] ergo KNq. KLq :: $(R \times BX. G \times BX$ [e] ::) R. G.

Schol.

Not. Si R sit parameter axis B X; erit $G = R + 4BX$.

Nam sit B K ad D C parallela. ergo $CB = DL = BX$. | $BT = 2DL$.

$$G \times \left| \begin{array}{l} DL = BLq = \\ BX. \end{array} \right| \begin{array}{l} DXq + BTq = R \times BX + 4BXq. \\ LTq. \end{array}$$

ergo $G = R + 4BX$.

Prop. XLIX.

Fig. 79.

Si parabolen contingens recta linea (D C) cum diametro (B C) conveniat in (C); & per tactum (D) ducatur linea (F N) æquidistans diametro (C B); à vertice verò (B) ducatur æquidistans (B F) ei (D X), quæ ordinatim applicata est; & fiat ut contingentis portio (E D) inter applicatam (B F) & tactum (D) interjecta ad æquidistantis portionem (D F), quæ itidem inter tactum (D) & applicatam (BF) interjicitur; ita quædam recta linea (G) ad duplam contingentis (DC;)

quæ

quæ (KL) à sectione ducta fuerit contingenti (DC) æquidistans, ad lineam (FN), quæ per tactum ducitur diametro æquidistans, poterit rectangulum contentum inventâ lineâ (G), & eâ (LD), quæ inter ipsam (KL), & tactum (D) interjicitur. DE. | DF :: G. | 2 DE BX.

Ordinatim applicentur DX & KNM. Estque CB [a] = (BX [b] = FD); [c] unde triang EBC = EFD. additóque communi DEBMN, erit DCMN [d] = (*pgr.* FM [e] =) triang. KPM. ablatóque communi LPMN, erit *pgr.* LC [f] = triang. NLK. [g] unde KL × LN = 2DC × LD.

Itaq; G × LD. KL × LN [h] :: (G × LD. 2DC × LD [k] :: G. 2DC [l] :: ED. DF [m] :: KL. LN [n] ::) KLq. KL × LN. [o] ergo G × LD = KLq.

Cor. Hinc DL est diameter, & G rectum latus sectionis, cujus vertex D. $\frac{4DEq}{BX} = \frac{2DE \times DC}{BX}$ est rectum latus sectionis, cujus vertex B.

a 35. *hujus.*
b 34. 1.
c *ex.* 20.6.
d 2. *ax.*
e 42. *hujus.*
f 3. *ax.*
g *lemma præc.*
h 7. 5.
k 1. 6.
l *hyp.*
m 4. 6.
n 1. 6.
o 9. 5.

Prop. L.

Si hyperbolen, vel ellipsin, vel circuli circumferentiam contingens recta linea (ED) cum diametro (AB) conveniat, pérque tactum (E) & centrum (C) linea (EC) producatur; à vertice autem (B) ordinatim applicata (BG) conveniat cum ea (EC), quæ ducitur per tactum, & centrum; fiátque ut contingentis portio (EF) inter tactum (E) & applicatam BG ad portionem (EG) lineæ (EC) ductæ per tactum & centrum; quæ itidem inter tactum (E) & applicatam (BG) interjicitur, ita quædam recta linea (EH) ad duplam contingentis (ED); quæ (LM) à sectione ducitur contingenti (ED) æquidistans ad lineam (EC) per tactum, & centrum ductam, poterit spatium rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (BH), latitudinem habens interjectam (EM) inter ipsam (LM) & tactum (E); in hyperbola quidem excedens figurâ simili contentæ lineâ (EK) dupla ejus (CE), quæ est inter centrum & tactum, & inventâ lineâ (EH), in ellipsi verò, & circulo deficiens eâdem.

Fig. 80. 81.

EF. EG :: EH. 2 ED.

Ducatur LRN ad BG, & CSO ad KP parallelæ. Et ob EK [a] = 2EC, [b] erit EH = 2ES. ergo 2ES. 2ED [c] :: (EH. 2ED [d] :: FE. EG [b] ::) LM. MR. porro ob triang. RNC [e] = CDE. [f] (CGB) + LNX (in hyperbola), [e] vel triang. RNC + LNX = CDE (in ellipsi & circulo) erit trapezium MEDX [g] = triang. LMR.

a *hyp.*
b 4. 6.
c 7. 5.
d *hyp.*
e 43. *hujus.*
f *sch.* 43 *hujus.*
g 3. *ax.* 1.

h *lem. ante 49.* L M R. [h] ergo L M × M R = E M × : E D + M X. Denique quia
k 4. 6. M O. E S [k] :: (M C. C E [k] ::) M X. E D. componendóque M O +
l 1. 6. E S. E S :: M X + E D. E D, erit permutando M O + E S. M X +
m *priùs et* 7. 1. E D ([l] hoc est E M × : M O + E S. E M × : M X + E D [m] vel E M
n 15. 5. × : M O + E S. L M × M R) :: E S. E D [n] :: 2 E S. 2 E D [o] :: L M.
o *priùs.* M R. [l] :: L Mq. L M × M R. [p] ergo E M × : M O + E S = L Mq.
p 9. 5. atqui E S q = (S H [r] =) O P. ergo E M × M P = L M q. *Q. E. D.*
q *priùs.*
r 34. 1.

Cor. E K est diameter, & E H latus rectum sectionis, cujus vertex E.

Prop. L I.

Fig. 82. Si quamlibet oppositarum sectionum contingens recta linea (C D) cum diametro (A B) conveniat; pérque tactum (C) & centrum (E) linea (C E) producatur usque ad alteram sectionem; à vertice vero (B) ducatur linea (B G) æquidistans ei, quæ ordinatim applicata est, conveniénsque cum linea (C E) per tactum & centrum ducta; & fiat ut contingentis portio (L C) inter applicatam & tactum ad portionem (C G) lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta linea (K) ad duplam contingentis (C D), quæ in altera sectione ducitur, æquidistans contingenti (F M) ad lineam (F E) per tactum, & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adjacet inventæ lineæ (K) latitudinem habens lineam, quæ est inter ipsam, & tactum (F), excedénsq; figurâ simili ei, quæ lineâ (CF) inter oppositas sectiones interjectâ, & inventâ (K) continetur.

a *cor. 44. hujus.* Ordinatim applicetur A X N. [a] Súntque F M, C D æquales & pa-
b *constr.* rallelæ: [b] itémque A N, B G parallelæ sunt. ergo F X. F N [c] :: (LC.
c 4. 6. C G :: [d] K. 2 C D [e] ::) K. 2 F M; unde quæcunque à sectione A F ad
d *hypoth.* productam E F contingenti F M ducuntur parallelæ, [f] poterunt re-
e 7. 5. ctangulum contentum ipsâ K, & interjecta inter istas; & punctum
f 50. *hujus.* F, excedéntque figurâ simili ei, quæ rectâ C F, & ipsâ K continetur.

Coroll.

a 46. *hujus.* Itaque his demonstratis, liquet in [a] parabola unamquamque recta-
b 47. rum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistantes,
c 48. diametrum esse; In [b] hyperbola verò & ellipsi & [c] oppositis sectionibus, unamquamque earum, quæ per centrum ducuntur.

d 49. Et in [d] parabola quidem applicatas ad unamquamque diametrum,
e 50. æquidistantes contingentibus posse rectangula ipsi adjacentia: in [e] Hyperbola,

perbola, & [f] oppositis rectangula adjacentia ipsi, quæ excedunt eâdem figurâ, in ellipsi autem, quæ eâdem deficiunt. Postremò quæcunque circa sectiones, adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & aliis diametris assumptis eadem contingere.

f 51. *hujus.*

Prop. LII. Probl. 1.

Datâ in plano rectà lineâ (A B) ad unum punctum (A) terminatâ, invenire in plano coni sectionem, quæ Parabole appellatur, ita ut ejus diameter sit data linea (A B), vertex lineæ terminus (A); quæ verò à sectione ad diametrum (A B) in dato angulo applicatur, possit rectangulum contentum lineâ, quæ est inter ipsam & sectionis verticem (A), & alterâ quâdam datâ lineâ (Z). Fig. 83.

Datus angulus primò rectus sit. Producatur A B ad E, ita ut A E $\sqsubset \frac{1}{4}$ Z. Sitque Z. Y [a] :: Y. A E. unde Z. A E [b] :: Yq. A Eq. ergo cum Z [c] $\sqsupset$ 4 A E, [d] erit Yq $\sqsupset$ 4 A Eq, & proinde Y * $\sqsupset$ 2 A E. [e] ergo ex Y, & duabus AE constitui poterit triangulum. Fiat ergo EAF, rectum subjecto plano, ita ut AF = AE, & E F = Y; ducantúrque A K ad E F, & F K ad E A parallelæ ([f] unde A K [f] = E F = [g] = Y; & F K [f] = E A [g] = F A). Tum concipiatur conus, cui vertex F, basis circulus super diametrum A K, rectus plano A F K; erit is conus rectus (ob F K = F A). Secetur conus plano ad circulum A K parallelo, [h] facientíque proinde sectionem M X N circulum, plano M F N (vel F A K) rectum; horúmque communis sectio sit recta M N, [h] diameter nempe circuli M X N; communis autem sectio subjecti plani, & circuli sit recta X L. Quum igitur tam circulus M X N, quàm subjectum planum recta sint triangulo M F N, [k] erit istorum communis sectio X L recta trigono M F N, [l] ideóque rectis (quæ in eo) M N, A B perpendicularis. Ex quibus constat planum per A B, X L ductum facere in cono sectionem, quæ parabole dicitur (juxta conditiones in 11ª hujus præscriptas) cujus diameter A B, lineæque ad hanc à sectione ordinatim ductæ ad rectos angulos applicentur, utpote ad X L parallelæ. Porro ob Z, Y; A E [m] (hoc est Z, A K, A F) [n] $\div$, [o] erit Z . A F :: A Kq . A F q (A F $\times$ F K). [p] unde Z est rectum latus. Ergo factum.

1. *Cas.*
a 13. 6.
b *cor.* 20. 6.
c *constr.*
d 14. 5.
* 4. 2.
e 22. 1.
f 34. 1.
g *constr.*
h 4. *hujus.*
k 19. 11.
l 3. *def.* 11.
m *priùs.*
n *constr.*
o *cor.* 20. 6.
p 11. *hujus.*

Sed datus angulus non sit rectus, sitque ei æqualis H A E; & fiat A H = $\frac{1}{2}$ Z; & per H ducatur H E ad A E perpendicularis, & per E ad H B parallela E L, & per A ad E L perpendicularis A L: tum bisectâ E L in K, per K ducatur ipsi E L perpendicularis M K F G; 2. *Cas.* Fig. 84.

a 11.6. sitque A Lq [a] = L K × K M Datis igitur rectâ K L positione, & rectâ K M magnitudine, & recto angulo, describatur (ut modò ostensum)
b 11. hujus. parabole, cujus diameter K L, vertex K, & rectum latus K M. Transi-
c 33. hujus. bit hæc per A ([b] ob A Lq = K L × K M) & A E [c] continget ipsam,
d cor. 46. huj. (ob L K = K E) & H A est diameter [d] (quia ad E L parallela), [e] &
e 45. hujus. quæ ad A E parallelæ, bisecantur ab A B, [f] inque angulo H A E appli-
f constr. cantur: & ob trigona A G F, A E H [g] similia (quia anguli A E H,
g 4. 6. A G F recti, & H A E communi), est F A. A G [g] :: (H A. A E [h] ::)
h 15. 5. 2 H A. 2 A E, [k] hoc est F A. A G :: Z. 2 A E. [l] unde Z rectum erit la-
k constr. tus sectionis. Quæ *E. F.*
l 49. hujus.

Prop. LIII. Probl. 2.

Fig. 85. Datis duabus rectis lineis (A B, B C) terminatis, quæ ad rectos inter se angulos constituantur; & alterâ (A B) productâ ad * easdem partes angulo recto, invenire coni sectionem, quæ hyperbole dicitur; in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, B C), ita ut producta (A B) sit diameter sectionis, & vertex punctum (B), quod ad angulum (A B C) consistit; quæ verò à sectione ad diametrum ordinatim applicatur, angulum faciens, æqualem dato, possit rectangulum, quod adjacet alteri lineæ (B C), latitudinem habens lineam interjectam inter applicatam, & sectionis verticem (B), excedénsque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis â principio lineis (A B, B C) continetur.

* hoc est versùs D.

1. Cas. Sit datus angulus primò rectus; & super lineam A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B describatur circulus,
* vid. not. 1. * ita ut ductâ diametro E K L ad A B perpendiculari, non sit ratio E K ad K L major eâ, quam habet A B ad B C. Fiat igitur E K. K M
a 12. 6. [a] :: A B. B C. & per M ducatur M F ad A B parallela; junctísque
b 29. 1. A F, E F, B F, per B ducatur B X ad E F parallela. Itaque ob ang.
c 27. 3. A X B [b] = (A F E [c] = E F B [b] =) F B X, [d] erit F B = F X. Con-
d 6. 1. cipiatur jam conus, cujus vertex F, basis circulus super diametrum B X, rectus trigono F B X Erit is conus rectus (ob F B = F X). Producantur F B, F X, M F, & secetur conus plano, ad circulum B X paral-
e 4. hujus. lelo, [e] facienti proinde circulum G P H R rectum plano F X B, cujúsq; diameter G H communis sit istorum planorum sectio. Sit vero P D R communis sectio circuli G R H, & subjecti plani. Et quoniam tam circulus G R H, quàm subjectum planum recta sunt trigono FGH,
f 19. 11. [f] erit horum communis sectio P D R eidem trigono F G H recta;
g 3. def. 11. [g] ideóque rectis, quæ in eo, G H, D B perpendicularis. Ex quibus liquet

liquet coni sectionem P B R (juxta conditiones in 12^{ma} hujus præsti- h *constr.*
tutas) esse hyperbolen, cujus vertex B, & ordinatæ ad diametrum A B k *2. 6.*
in angulo recto applicentur, quippe omnes ad ipsam P R parallelæ. l *1. 6.*
Porro ob A B . B C[h] :: (E K. K M[k] :: N E. N F[l] :: N E × N F m *35. 3.*
[m](N A × N B). N Fq[n] = N A. N F[o](O F. F G) + N B. N F n *23. 6.* o *4. 6.*
([o]O F. F H)[n] =) O Fq. O G × G H[p] :: A B. B C. [q]erit A B trans- p *11. 5.*
versum latus, & B C rectum. q *12. hujus.*

Sin datus angulus non sit rectus. Datæ sint rectæ A B, A C, & *2. Cas.*
angulus B A H per dato. Bisecetur A B in D, & descripto super AD Fig. 86.
semicirculo, occurrat G F ad A H parallela, * faciens G Fq. D G × *vid. not. 2.*
G A :: A C. 2 A D; junctaq; F D, [a]fiat F D. D L :: D L. D H; & sum- a *13. 6.*
ptâ D K = D L, [b] fiat L F. A F :: A F. F M; & connectatur K M, b *11. 6.*
& per L ducatur N L X ad K F perpendicularis. Describatur tunc c *12. hujus.*
Hyperbole (juxta modò ostensa), cujus vertex L, transversus axis K L, d *constr.* & *17.*
rectum latus L N; [c] transibit hæc per A [d] (ob L F × F M = A Fq.) e *37. hujus.* (*6.*
& A H sectionem [e] continget (ob F D × D H = D Lq) [f] & proin- f *cor. 47. hujus.*
de A B est diameter sectionis. Porro, quum sit A C. 2 A H + F G. g *4. 6.*
G D[g] = (A C. 2 A H. + A H. A D[h] = A C. 2 A H + 2 A H. h *15. 5.*
2 A D[k] = A C. 2 A D[l] = F Gq. G A × G D[m] =) F G. G A + k *5. def. 6.*
F G. G D. Erit A C. 2 A H :: (F G. G A[n] ::) O A. A X. [o] unde l *constr.*
A C est rectum latus. Ergo factum. m *23. 6.* n *4. 6.* o *50. hujus.*

Notæ.

1. Describitur circulus circa A B, ita ut E K. K L :: A B. B C, Fig. 87.
hoc pacto.

Fiat utcunque Z K. K Y[a] :: A B. B C. & bisectâ Z Y in V, centro a *12. 6.*
V, per Z, & Y describatur circulus, secans ipsam A B (si opus est;
productam) in S, & T; connexísque S Y, S Z, per A ducantur ad b *29. 1. et 2. ax.*
has parallelæ A L, A E. ergo quum angulus Y S Z rectus sit, [b] erit c *conv. 31. 3.*
quoque angulus L A E rectus. [c] ergo super diametrum L E descrip- d *cor. 1. 3.*
tus circulus transibit per A, [d] ideóque per B, [e] quia K B = K A. éstq; e *hyp.*
E K. Z K[f] :: (A K. S K[f] ::) L K. Y K. & permutando E K. L K :: f *4. 6.*
(Z K. Y K[g] ::) A B. B C. g *constr.*

2. Quomodo autem ducatur G F ad A H parallela, faciens GFq ad Fig. 88.
D G × G A in data ratione (puta R ad S), ita constabit. Sumpto Z
centro circuli, ducatur Z Y ad A H T perpendicularis, & ab occursu
Y, ducatur Y Q ad A H parallela, [a] quare Y Q tangit circulum. Fiat a *cor. 16. 3.*
verò Q V. V Y[b] :: S. $\frac{R - S}{2}$. & productâ Q Y, sumatur Y K = Y V; b *12. 6.*

 con-

connectantúrque Z K, Z V circulum secantes in P, & F; conjunctaq; P F protrahatur ad G. dico factum.

c 4. 1. d 2. 6. e 30. 1. f *constr.* Nam ob V Y = K Y, & angulos ad Y rectos, [c] erit Z V = Z K. item Z F = Z P, [d] ergo F P ad V K, [e] hoc est ad A H, est parallela. Et quoniam S. $\frac{R-S}{2}$ [f] :: Q V.V Y, erit duplando consequentes, S. R—S

* :: Q V. V K. & invertendo R—S. S :: V K. Q V. & componendo R. S

g 1. 6. :: (Q K . Q V *:: G P. G F [g] :: G P × G F . G Fq [h] ::) D G × G A.

h 36. 3. & 7. 5 G Fq. ac inversè S. R :: G F q. D G × G A. *Q. E. F.*

Prop. *LIV.* *Probl.* 3.

Fig. 89. Datis duabus rectis terminatis (A B, A C), atque ad rectos inter se angulos, invenire circa diametrum ipsarum alteram (A B) coni sectionem, quæ Ellipsis appellatur, in eodem plano, in quo sunt datæ lineæ (A B, A C), ita ut vertex sit punctum (A) ad rectum angulum (B AC); & à sectione ad diametrum (A B) applicatæ in angulo dato possint rectangula adjacentia alteri lineæ (A C), quæ latitudinem habeant lineam inter ipsas, & verticem (A) sectionis interjectam, deficiántque figurâ simili, & similiter positâ ei, quæ datis rectis lineis (A B, A C) continetur.

1. *Cas.* Sit datus angulus primò rectus, & ex A B planum attollatur, rectum subjecto plano, in quo circa A B descriptum sit circuli segmentum A D B; & bisecetur arcus A D B in D, unde connectantur DA, D B; & fiat A X = A C; & per X ducatur X O ad B D parallela, & per O ipsa O F ad A B parallela, & juncta D F occurrat protractæ B A in E. Junguntur F A, F B, & producantur, pérque punctum G (utcunque sumptum in F A) productâ) ducatur ipsi E D parallela GH, productæ A B occurrens in K, productæque F O in L. Estque ideò

a 29. 1. ang. H G F [a] = (ang. E F A [b] = F A D [c] (F B D) + F D A [d] (FBA)

b 32. 1. = F B D + F B A [e] = A B D [c] = D F B [a] =) G H F [f] = H G F.

c 26. 3. [g] unde F G = F H. Itaque super G H describatur circulus G H N

d 21. 3. e 19. *ax.* 1. f 1. *ax.* g 6. 1. h 19. 11. k 3. *def.* 11. rectus trigono H F G, sitque basis coni recti, habentis verticem F. Et quia tam circulus G H N, quàm subjectum planum recta sunt plano H FG, [h] erit ipsorum communis sectio (K M) plano eidem, [k] rectísque idcirco G K, A K perpendicularis.

l 13. *hujus.* m 23. 6. Liquet igitur planum per A K M [l] facere in cono ellipsin, cui diameter A B, ad quam ordinatæ omnes perpendiculariter applicentur, quippe ipsi K M parallelæ: porro, ob F Lq. G L × L H [m] = (F L. G L

GL[n] (AK. KG, [n] vel AE. EF) + FL. LH ([n] BK. KH, [n] vel BE. EF) = AE. EF + BE. EF [m] = AE × BE. EFq [o] = DE × EF. EFq [p] = DE. EFq = DA. AO :: [q] BA. AX [r] ::) BA. AC [s] :: FLq. GL × LH. erit AC rectum latus. n 4. 6. o 36.3. & 7.5. p 1.6. q 4.6. r constr. et 7.5. s 11. 5.

Sin diameter AB minor ponatur dato recto latere AC; bisectâ AB in D, ducatur FE bisecta quoque in D, ita ut sit AC. FE [a] :: FE. AB. & ductâ FG ad AB parallela, sit FE. FG [b] :: AC. AB ([c] hoc est) :: FEq. ABq :: FDq. [d] (FD × DE). ADq [e] :: FE. FG. Ducatur itaque (ut modò ostensum) ellipsis, cujus axis EF (& rectum latus FG; transibit hæc per A, (ob FD × DE. ADq [f] :: FE. FG) [g] ideóque per B ([d] ob AD = DB). item propter AC. CB :: FDq. AD × DB (ADq). [g] erit AC rectum latus. 2. Cas. Fig. 90. a 13. 6. b 12. 6. c cor. 20. 6. d constr. e 11. 5. f 21. hujus. g 30. hujus.

Sed datus angulus non sit rectus; sitque ei æqualis angulus BAD; bisectâque AB in E, circa AE describatur semicirculus, in quo ad AD *ducatur parallela FG, faciens FGq. AG × GE :: CA. AB; & junctæ AF, EF producantur; [a] & sit DE. EH :: EH. EF & sumptâ EK = EH, factóque HF. FA [b] :: FA. FL, conjungatur KL, occurrens ductæ NM (per H ad AL) parallelæ. Tum (ex modò præostensis) describatur ellipsis, cujus axis transversus sit KH, & rectum latus HM. [c] transibit hæc utique per A [d] (ob HF × FL = FAq); & [e] idcirco per B (ob AE [e] = EB) ac ipsam [f] continget DA [g] (ob DE × EF = EHq). Item propter CA. 2DA. + FG. GE [h] = (CA. 2DA + DA. AE [k] = CA. 2DA + 2DA. AB [l] = CA. AB [m] = FGq. AG × GE [n] =) FG. AG + FG. GE. erit CA. 2DA*:: (FG. AG [p] ::) XA. AN. [q] ergo AC est rectum latus. 3. Cas. Fig. 91. * vid. Not. a 13.6. b 11.6. c 13. hujus. d constr. e 30. hujus. f conv. 38 huj. g constr. & 17. (6. h 4. 6. k 15. 5. l 5. def. 6. m constr. n 23. 6. * p 4. 6. q 50. hujus.

Notæ.

Quomodo verò duci poterit GF ad AD parallela, ita ut sit GFq ad AG × GE in data ratione S ad R, ita constabit. Fig. 92.

Sumpto Z centro circuli, ducatur ad AD perpendicularis ZY, circulo occurrens in Y. & per Y ducatur QY ad AD parallela; [a] & proinde tangens circulum in Y, occurrensque productæ ZA in Q. a cor. 16. 3.

[b] Fiat autem $\frac{R-S}{2}$. S :: YQ. QV. productâque VY sumatur YK = YV; & junctæ YZ, KZ producantur, adeò ut completo circulo occurrant punctis F, P, & connectatur FP, secans AE in G. Dico factum. b 12. 6.

Nam

c *constr.* & 4. 1. d 2. 6. e 30. 1. f *const.* Nam ob ZV [c] = ZK, & ZP = ZF, [d] erit PF ad VK, [e] hoc est ad AD parallela. [f] item (ob $\frac{R-S}{2}$. S [f] :: YQ. QV,) erit componendo $\frac{R+S}{2}$. S. :: YV, QV. & duplando antecedentes, R+S. S :: KV. QV. & dividendo R. S :: (KQ. QV [g] :: PG. GF [h] :: PG × GF. GFq [k] ::) AG × GE. GFq. & inversè S. R :: GFq. AG × GE. *Q. E. F.*

g * h 1. 6. k 35. 3. & 7. 5.

Prop. LV. Probl. 4.

Fig. 93. Datis duabus rectis terminatis (EB, BH), atque ad rectos inter se angulos, invenire oppositas sectiones, quarum diameter sit una (EB) datarum linearum; & vertices lineæ termini (E, B); applicatæ vero ab utraque sectione possint spatia adjacentia alteri lineæ (BH), excedentiáque figurâ simili ei, quæ datis lineis (EB, BH) continentur.

a 53. *hujus.* [a] Describatur hyperbole ABC, cujus diameter transversa sit BE, & rectum latus BH; & ordinatæ ad BE in dato angulo (G) applicentur. Ducatur quoque EK ad rectos ipsi BE, æqualisque ipsi BH, & [a] describatur itidem alia hyperbole DEF, cujus diameter sit EB, rectum latus EK; ductæque ordinatim applicentur in angulo, qui deinceps ipsi G. Liquet igitur descriptas hyperbolas ABC, DEF fore sectiones oppositas, habentes diametrum communem BE, & recta latera BH, EK inter se æqualia. *Q. E. F.*

Prop. LVI. Probl. 5.

Fig. 49. Datis duabus rectis lineis (AC, DE) sese bifariam secantibus (in B), circa utramque ipsarum oppositas sectiones describere, ita ut rectæ lineæ (AC, DE) sint conjugatæ diametri; & quarumlibet oppositarum sectionum diameter possit figuram aliarum oppositarum.

a 11. 6. et 17. 6. b 55. *hujus.* Sit AC × CL [a] = DEq; (vel AC, DE, CL ∺) [b] describantúrque sectiones oppositæ FAG, HCK, quarum transversa diameter sit AC, rectum latus CL; & ordinatim ductæ ad CA in dato angulo applicentur. [c] Erit harum secunda diameter ipsa DE; quiâ AC. DE [d] :: DE. CL; [d] & DE ordinatim applicatis parallela bisecatur in B. [a] Sit pariter DE × DR = ACq. & [b] describantur sectiones oppositæ MDN, OEX, quarum transversa diameter DE, & DR rectum latus; ductæque ordinatim ad DE in dato angulo applicentur; [c] eritque harum secunda diameter AC, ob DE. AC [d] :: AC. DR, & AC bisectam in B. Ergo factum.

c *def. ad* 16. *hujus.* d *constr.*

Definitio. Vocentur autem hujusmodi sectiones *Conjugatæ.*

A POL-

APOLLONII CONICORUM LIB. II.

Prop. I.

SI hyperbolen contingat recta linea (D E) ad verticem (B); & ab ipso ex utraque parte sumatur (B D, B E) æqualis ei, quæ potest quartam figuræ partem, lineæ (C D, C E) quæ è sectionis centro (C) ad sumptos contingentis terminos (D, E) ducuntur, cum sectione non convenient. Fig. 95.

Sumpto utcunque in C D puncto H, ordinatim applicetur H G F. Estque A F × F B. F Gq [a] :: (T. R [b] :: Tq. T R [c] :: $\frac{Tq}{4}$. $\frac{TR}{4}$ [d] :: C Bq. B Dq [e] ::) C Fq. F Hq. ergo cùm A F × F B. [f] ⊏ C Fq. [g] erit F Gq ⊏ F Hq. ergo punctum H est extra sectionem. Idémque de reliquis rectæ C D punctis ostendetur. ergo tota C H est extra sectionem. *Q. E. D.*

a 21. 1. *hujus.* b 1. 6. c 15. 5. d *hyp.* e 4. 6. *et* 22. 6. f 6. 2. g 14. 5.

Coroll. C Bq. B Dq :: T. R :: A F × F B. F Gq.

Prop. II.

Iisdem manentibus, ostendendum est, non esse alteram asymptoton C K, quæ angulum D C E dividat. Fig. 96.

Per B ducatur BK ad C D parallela, occurrens ipsi C K in K; & per K ducatur H G K F L ad D E parallela. Estque H K [a] = D B, [b] & K L ⊏ B E. [c] unde H K × K L ⊏ D B × B E vel B Dq. atqui ob C Bq. B Dq ([d] A F × F B. G Fq) [e] :: (C Fq. F Hq [f] ::) C Fq — A F × F B. (6.

a 34. 1. b 5. *ax.* 1. c *sch.* 48. 1. d *cor.* 1. *hujus.* e 4. 6. *et cor.* 22 f 19. 5.

g 6.5. & 3. ax. × F B. F Hq—G Fq [g] (hoc est C Bq. H G × G L.), [h] est B Dq =
h 9 5. (1. H G × G L. ergo H K × K L ⊏ H G × G L. [k] unde punctum K est
k *Sch.* 5. 2. intra sectionem. & proinde C K sectionem intrat. *Q. E. D.*

Coroll. H G × G L = D Bq = $\frac{1}{4}$ T R.

Prop. III

Fig. 97. Si hyperbolen contingat recta linea (H K), cum utraque asymptoton (E F, E G) conveniet; & ad tactum (B) bifariam secabitur; quadratum vero utriusque ejus portionis (BF, BG) æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum (B D) per tactum ducitur.

a 1. *hujus.* Ducatur diameter B E D, & quartæ parti figuræ ad hanc æquentur singula B Hq, B Kq. erunt ductæ E H, E K asymptoti. [a] ergo hæ non differunt ab ipsis E F, E G.

Prop. IV. Probl. 1.

Fig. 98. Datis duabus rectis lineis (A B, AC) angulum (BAC) continentibus, & dato intra angulum (BAC) puncto (D), describere per punctum (D) coni sectionem (quæ hyperbole dicitur, ita ut datæ lineæ (A B, AC) ipsius asymptoti sint.

a 31.1. b 4.6. [a] Duc D F ad A B parallelam, & fac F C = F A, & produc CDB.
c *constr.* Estque B C. C D [b] :: (C A. C F [c] :: 2. 1). ergo B Cq [d] = 4C Dq
d *cor.* 4. 2. = 4B Dq. duc D A E, ita ut A E = D A. & fiat E D × G [e] =
e 11.6 *et* 17.6. B Cq [f] = 4B Dq. [g] Habes igitur diametrum E D, & rectum latus G
f *prius.* hyperbolæ, cujus vertex D, [h] asymptoti A B, A C. ergo factum.
g 53. *hujus.*
h 1. *hujus.*

Prop. V.

Fig. 99. Si parabolæ, vel hyperbolæ diameter (D B E) lineam quandam (A C) bifariam secet (in E), quæ (F G) ad diametri terminum (B) contingit sectionem, æquidistans est lineæ (A C) bifariam sectæ.

a 46. & 47. 1. *hujus.* Si negas A C esse parallelam ipsi F G, sit ei parallela C H. [a] ergo C K = K H. unde cùm sit quoque C E [b] = E A, [c] erunt A H, E K parallelæ, contra 22. 1. hujus.
b *hyp.*
c 2. 6.

Prop.

Prop. VI.

Si ellipsis, vel circuli circumferentiæ diameter (A B) lineam quandam (C D) non per centrum transeuntem bifariam secet (in E), quæ ad diametri terminum (A) contingit sectionem, æquidistans erit bisectæ lineæ (C D). Fig. 100.

Demonstratur, ut præcedens.

Prop. VII.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingat recta linea (F G); & huic æquidistans (A C) ducatur in sectione; & bifariam dividatur (in E); quæ à tactu (B) ad punctum (E) lineam bifariam dividens jungitur (B E), sectionis diameter erit. Fig. 101.

Nam altera [a] nulla B H bisecabit A C; ergo non erit alia [b] diameter quàm B H.

a *9. ax. 1.*
b *46. & 47. 1. hujus.*

Prop. VIII.

Si hyperbolæ occurrat recta linea (A C) in duobus punctis (A, C); producta ex utraque parte conveniet cum asymptotis (D E, D F); & lineæ (A E, C F), quæ ex ipsa abscissæ inter sectionem & asymptotos interjiciuntur, æquales erunt. Fig. 102.

Bisecetur A C in G, ducatúrque D G. [a] hæc diameter est. [b] ergo tangens per B (nempe H K) est ad A C parallela; ergo cùm H K *asymptotis occurrat, [c] sitque B H = B K,* etiam A C eisdem occurret, [d] eritque G E = G F; [e] unde manent A E, C F æquales. *Q. E. D.*

a *7. hujus.*
b *5. hujus.*
c *3. hujus.*
*
d *4. 6.*
e *3. ax.*

Prop. IX.

Si recta linea (C D) occurrens asymptotis (A C, A D) ab hyperbolæ bifariam secetur, (in B) in uno tantum puncto sectionem contingit. Fig. 103.

Occurrat alibi, si fieri potest, in E. ergo E C [a]= (B D [b]= $\frac{1}{2}$ D C [b]=) B C. [c] *Q. E. A.*

a *8. hujus.*
b *hyp.*
c *9. ax. 1.*

Prop. X.

Si recta linea (D F) sectionem secans (in A, C) conveniat cum utraque asymptoton (E D, E F), rectangulum contentum rectis lineis Fig. 104.

 (D A,

(D A, A F) quæ inter aſymptotos, & ſectionem interjiciuntur, æquale eſt quartæ parti figuræ factæ ad diametrum (H G), quam æquidiſtantes ipſi ductæ lineæ (A C) bifariam dividit.

Patet ex corollario 2dæ hujus.

a 1. *ax.* 1. *Cor.* $AD \times AF$ [a] $= CD \times CF$.

Prop. XI.

Fig. 105. Si utramque linearum (A E, A C) continentium angulum (EAC), qui deinceps eſt angulo (D A C) hyperbolen continenti, ſecet recta linea (E F), in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet; & rectangulum conſtans ex iis (E G, F G), quæ interjiciuntur inter lineas AE, A C) angulum continentes, & ſectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro (A B), quæ ſecanti lineæ (E F) æquidiſtans ducitur.

a *cor.* 47. 1. *hujus.*
b 26. 1. *hujus.*
c 5. *hujus.*
d 3. *hujus.*
e 23. 6.
f 4. 6.
g 10. *hujus.*
h 14. 5.

Ducatur A L ad E F parallela. [a] hæc diameter eſt ſectionis. [b] ergo E F in unico puncto (G) occurrit ſectioni. Per G ordinatim applicetur H G L K; [c] hæc tangenti C D (per verticem B ductæ) eſt parallela. C Bq [d] (C B × B D). B Aq [e] = (C B. B A [f] (H G. G F) + B D. B A [f] (G K. G E) [e] =) H G × G K. G F × G E. ergo cùm C Bq [g] = H G × K G, [h] erit B Aq = E G × G F. *Q. E. D.*

Prop. XII.

Fig. 106. Si ab aliquo puncto (D) eorum, quæ ſunt in ſectione, ad aſymptotos (B A, B C) duæ rectæ lineæ (D E, D F) in quibuſlibet angulis ducantur; & ab altero puncto (G) in ſectione ſumpto ducantur aliæ lineæ (G H, G K) his ipſis (D E, D F) æquidiſtantes, rectangulum conſtans ex æquidiſtantibus (G H, G K) æquale eſt ei, quod fit ex iis (D E, D F), quibus illæ æquidiſtantes ductæ fuerant.

a *cor.* 10. *hujus.*
b 14. 6.
c 4. 6.
d 11. 5.
e 16. 6.

Connexa G D protrahatur utrinque in A, & C. Eſtque D A × DC [a] = G A × G C: [b] unde G A. D A [c] (G H. D E) [b] :: (D C. G C [c] ::) D F. G K [d] :: G H. D E. [e] ergo G H × G K = D F × D E. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 107. Si in loco aſymptotis (A B, A C) & ſectione terminato, quædam recta linea (E F) ducatur, æquidiſtans aſymptoton alteri (A B), in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet.

Si

Si primò negas E F sectioni occurrere, per G (punctum utcunque sumptum in sectione) ducantur G C, G H ad A B, A C parallelæ. Sitque A E × E F [a] = G C × G H; connexa A F [b] sectioni occurret, puta in K. Ex quo ducantur K L, K D ipsis A B, A C itidem parallelæ. ergo K L × (A L) K D [c] = (G H × G C [d] =) A E × E F. [e] *Q.E.A.*
Proinde E F sectioni occurret, nempe in M. Dic alibi occurrere, puta in N. ducantúrque M X, N B ad A C parallelæ. ergo E M × M X [f] = (E N × N B [g] =) E N × M X. [h] *Q.E.A.*

a 12.6.et16.6. b 2. *hujus.* c 12. *hujus.* d *constr.* e 9. *ax.* f 12.*hujus.* g 34. 1. & *sch.* h 9.*ax.* (48.1.

Prop. XIV.

Asymptoti (A B, A C), & sectio in infinitum productæ ad seipsas propius accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo (K). Fig. 108.

Ducantur E H F, C G D tangenti utcunque parallelæ; pérque A, & occursum H jungatur A H X. Estque C G × G D [a] = E H × H F. [b] quare G D. H F :: E H. C G. ergo cùm G D $\sqsubset$ (X D $\sqsubset$) H F, [c] erit E H $\sqsubset$ C G; paritérque omnes decrescunt versùs partes C G. Sumatur E L $\sqsupset$ K, ducatúrque L N ad A C parallelæ; [d] hæc sectioni occurret, puta in N, per quod ducatur M N B ad E F parallela. Estque M N [e] (= E L) [f] $\sqsupset$ K, *Q.E.D.*

a 10. *hujus.* & 1. *ax.* b 14. 6. c 14. 5. d 13. *hujus.* e 34. 1. f *constr.*

Cor.

Ex hoc manifestum est lineas A B, A C ad sectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ asymptoti (quales A Y, A Z); & angulum B A C minorem esse quolibet angulo, qui aliis ejusmodi lineis continetur.

Prop. XV.

Oppositarum sectionum (A, B) asymptoti communes sunt. Fig. 109.

Sint A B diameter, C centrum, ac D E, F G contingant sectiones in A, B; è quibus utrinque abscindantur AD, A E, B F, B G, ut singularum quadrata æquentur quartæ parti [a] figuræ ad A B: itaque junctæ C D, C E sectionis A, & C F, C G, sectionis B [b] asymptoti erunt. quoniam verò utraque D E, F G ordinatim applicatis ad A B est parallela; & [c] proinde sibi invicem istæ parallelæ sunt, [d] erit ang. B A C = G B C; paréſque [e] sunt A C, B C; [f] & A D, B G. [g] ergo ang. A C D = ang. B C G. [h] ergo D C G est recta linea. Simili-

a 14.1. *hujus.* b 1. *hujus.* c 30. 1. d 29. 1. e *hyp.* f *constr.* g 4. 1. h *cor.* 15. 1.

terque E C F recta est. Unde patet propositum.

Coroll. Tangentes D E, F G parallelæ sunt sibi invicem.

Prop. XVI.

Fig. 110. Si in oppositis sectionibus (A, B), ducatur quædam recta linea (H K), secans utramque linearum (C D, C F) continentium angulum (D C F), qui deinceps est angulo (D C E, vel G C F) sectiones continenti; cum utraque oppositarum in uno tantùm puncto conveniet, & lineæ (H L, K M), quæ ex ipsa abscissæ inter asymptotos (C D, C F), & sectiones interjiciuntur, æquales erunt.

a 11. hujus. Quod H K sectionibus occurrat, [a] manifestum est; occurrat punctis L, M; pérque centrum C ducatur A B ad L M parallela. Estque
b 29. 1. hujus. K L × L H [a] = (A Cq [b] = B Cq [a] =) H M × M K. [c] ergo K L.
c 16. 6. M K :: H M . L H. & componendo L M . M K :: M L. L H. [d] unde
d 9. 5. M K = L H, *Q. E. D.*

Prop. XVII.

Fig. 111. Oppositarum sectionum (A, B; C, D) quæ conjugatæ appellantur, asymptoti communes sunt.

a cor. 15. hujus. Sint A B, C D conjugatæ diametri sectionum; pérque vertices A,
b def. ad 16. & 17. 6. B, C, D ducantur tangentes F G, K H, F K, G H; [a] Liquet, F G H K esse parallelogrammum, & diagonales F H, G K esse asymptotos; nam
c cor. 4. 2. figuris ad A B [b] æquatur C Dq, [c] hujúsque quartæ parti singula A Fq,
d 1. & 16. hujus. A Gq, B Hq, B Kq æquantur. [d] unde F H, G H sunt asymptoti sectionum A, B. pariterque hæ asymptoti sunt sectionum C, D. quare constat propositum.

Prop. XVIII.

Fig. 112. Si uni (C) oppositarum sectionum, (A, B; C, D) quæ conjugatæ dicuntur, occurrat recta linea (E F), & producta ad utrasque partes extra sectionem cadat; cum utraque (A, B) sectionum, quæ deinceps sunt, in uno tantùm puncto conveniet.

a 3. hujus. Sint G H, L K asymptoti, [a] his occurrit E F. [b] ergo liquet pro-
b 16. hujus. positum.

Prop.

Prop. XIX.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, ducatur recta linea (E F), ipsarum quamvis (C) contingens cum sectionibus (A, B), quæ deinceps sunt, * conveniet (in G, H); & ad tactum (C) bifariam secabitur.

Fig. 113. * *per præced.*

Sint K L. M N asymptoti. Et ob C E[a] = C F, & E G[b] = F H, [c] erit C G = C H. *Q. E. D.*

a 3. *hujus.* b 16. *hujus.* c 3. *ax.* 1.

Prop. XX.

Si oppositarum sectionum (A,B,C,D) quæ conjugatæ appellantur, unam (A) contingat recta linea (E F); & per ipsarum centrum (X) ducantur duæ lineæ; una quidem (E X) per tactum, altera verò (X G) contingenti (E F) æquidistans; quousque occurrat (in G) uni (C) earum sectionum, quæ deinceps sunt; recta linea (G H) quæ in occursu (G) sectionem contingit, æquidistans erit lineæ (E X) per tactum, & centrum ductæ; quæ verò (E Z, G O) per tactus, & centrum ducentur, oppositarum sectionum conjugatæ diametri erunt.

Fig. 114.

Sint A M, C N [a] recta sectionum latera, & per puncta E, G, C ordinatim applicentur E K, G L, C R P. Estque X K. K E. ┼ F K. K E [b]= (X K × F K. K Eq [c]= B A. A M [d]:: N C. C D :: [c] G Lq. L X × L H [b]=) G L. L X ┼ G L. L H. atqui (ob L X ad E K, & L G ad X K, & G X ad E F parallelas) [e] est F K. K E :: G L. L X. ergo manet X K. K E :: G L. L H. [f] ergo trigona E K X, H L G similia sunt. [f]& ang. E X K = H G L. itemque totus ang. G X K [g]= X G L. [h] ergo manet ang. E X G = H G X. [k] quare rectæ E X, G H parallelæ sunt.

a 14. 1. *hujus.* b 23. 6. c 37. 1. *hujus.* d *vid. Not.* e 4. 6. f 6. 6. g 29. 1. h 3. *ax* 1. k 27. 1.

Porro, fiat P G. G R [l]:: H G. S. [m] est ergo 2 S, juxta quam possunt ordinatæ ad diametrum G O. item T X × K E (× X V) [n]= C Xq; ([o]vel T X, C X, K E ∺) [p] quare T X. K E ([c] hoc est T F. F E, [q] vel triang. T X F. F X E) :: (T Xq. C Xq. [p]::) triang. T X F. X C P. ergo triang. F X E [r]= (X C P [s]=) H X G. item ang. X E F [g]= X G H. ergo reciprocè G H. E X [t]:: E F. G X. [u] unde G H × G X = E X × E F. ergo S × G X. E X × E F [x]:: (S. × G X. G H × G X [y]:: S. G H [z]:: G R. G P [a]:: E X. E F [y]::) E Xq. E X × E F. ergo E Xq

l 12. 6. m 51. 1. *hujus.* n 38. 1 *hujus.* o 17. 6. p *cor.* 20. 6. q 1. 6. r 9. 5. s *sch.* 43. *huj.* t 15. 6. u 16. 6.

x 7. 5. y 2. 6. z *constr. et inversè.* a 4. 6.

[b]=

b 5.5. c *priùs.* d *cor.* 4.2. e 6. *ax.* 1. f *def. ad* 16.1. *hujus.*

[b] $= (S \times GX$ [c] $=)\ \frac{1}{4}$ fig. ad G O. quare E Zq [d] (4E Xq) [e] $=$ fig. ad G O. Simili discursu erit G Oq figuræ ad E Z æquale. quare E Z, G O [f] sunt conjugatæ diametri. *Q. E. D.*

Not. Quòd B A. A M :: N C. C D, sic patet. Quoniam [f] NC. B A :: BA.CD.& BA.CD :: C D. A M. erit ex æquali N C. C D :: (B A. A M.

Cor. B A. A M :: N C. C D.

Prop. XXI.

Fig. 115.

Iisdem positis, ostendendum est, punctum (E), in quo contingentes lineæ (A E, C E) conveniunt, ad unam asymptoton esse.

a 34. 1. b 3. *hujus.* c *hyp.* d 1. *hujus.*

Nam quia C Xq ([a] vel A Eq) [b] æquatur $\frac{1}{4}$ C Dq, [c] hoc est quartæ parti figuræ ad A B, [d] erit X E asymptotos.

Prop. XXII.

Fig. 116.

Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D) quæ Conjugatæ appellantur, ex centro (X) ad quamvis sectionem (C) ducatur recta linea (XC) & huic æquidistans ducatur altera (E K L H) quæ cum una (A) ex sectionibus, quæ deinceps sunt, & cum asymptotis (X E, X F) conveniat; rectangulum constans ex portionibus (E K, K H) lineæ ductæ inter sectionem, & asymptotos interjectis, quadrato lineæ (X C) quæ ex centro ducitur, æquale erit.

a 5. *hujus.* b 48. 1. *hujus.* c 20. *hujus.* d 10. *hujus.* e *cor.* 4. 2.

Bisecetur K L in M, ducatúrque (per M, & X) recta M A X B; Igitur tangenti ad A [a] parallela est E H; eadémque proinde ad A B diametrum [b] ordinatim applicatur; & A B, C D [c] sunt conjugatæ diametri; quare $EK \times KH$ [d] $= (\frac{1}{4}$ T R [c] $=)$ C Xq.

Cor. $EK \times KH =$ C Xq.

Prop. XXIII.

Fig. 117.

Si in oppositis sectionibus A, B, C, D) quæ conjugatæ appellantur, ex centro (X) ducatur quædam recta linea (X C) ad quamvis sectionem (C); & huic æquidistans (K L) ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps sunt, sectionibus (C, A, D) conveniat, rectangulum constans ex portionibus (K M, M L) lineæ ductæ (K L) inter tres sectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus lineæ (X C), quæ ex centro ducitur.

a *cor.* 22. *huj.* b 11. *hujus.* c 1. *ax.* 1.

Sint E F, G H sectionum asymptoti. ergo $HM \times ME$ [a] $=$ (C Xq [b] $=$) $HK \times KE$. [c] quare 2 C Xq $= (HM \times ME + HK \times KE. =)$ LM, LM × MK. (Nam LM × MK [d] = LH × MK [e] (KE × MK) + HM × MK [d] = KE × MK + HM × ME + KE × HM [e] = KE × HK + HM × ME.) d 1.6. e 16. *hujus.*

Prop. XXIV.

Si parabolæ occurrant duæ rectæ (A B, D C), utraque in duobus punctis, & nullius ipsarum occursus, alterius occursibus contineatur, convenient inter se extra sectionem. Fig. 118.

Per B, C puncta ductæ sint diametri E F, G H. [a] Hæ parallelæ sunt, [b] nec alibi occurrunt sectioni. unde junctâ B C, erunt anguli A B C, D C B simul duobus rectis majores. [c] ergo A B, D C extra sectionem concurrent ad partes E G. a *cor.* 46. 1. *huj.* b 26. 1. *hujus.* c 13. *ax.* 1.

Prop. XXV.

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ (E F, G H), utraque in duobus punctis, nullius autem ipsarum occursus alterius occursibus contineatur, convenient quidem inter sese extra sectionem, sed tamen intra angulum (B A C) qui hyperbolen continet. Fig. 119.

Ducantur A F, A H, & connectatur F H. & quoniam E F, G H secant angulos A F H, A H F, concurrent intra angulum F A H, & propterea magis intra angulum B A C. Idem discursus valet, si utraq; E F, G H sectionem contingunt; aut si una contingat, altera duobus punctis secet. *vid. cor.* 31. 1. *hujus.*

Prop. XXVI.

Si in ellipsi, vel circuli circumferentia, duæ rectæ lineæ (C D, E F) non transeuntes per centrum (H), se invicem secent (in G), bifariam sese non secabunt. Fig. 120.

Per G ducatur diameter A B; súntque omnes, quas A B bisecat, tangenti ad A [a] parallelæ, & proinde sibi invicem parallelæ. Ergo C D, E F non bisecantur in G. *Q. E. D.* a 6. *hujus.*

Prop. XXVII.

Si ellipsim, vel circuli circumferentiam contingant duæ rectæ lineæ (C D, E F; & siquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per Fig. 121. 122.

centrum

centrum transeat sectionis, contingentes lineæ (C D, E F) sibi ipsis æquidistabunt; sin minùs, convenient inter sese ad easdem partes centri.

a 6. *hujus.* b 30. 1. c *ex priore parte hujus.* d 29. 1. e 13. *ax.* 1.

Si A B per centrum transit, [a] erit utraque C D, E F ordinatim applicatis parallela, [b] ergo sibi invicem. Sin A B non transeat, per centrum, ducatur diameter A H, & per H tangat K L. [c] ergo C D, K L parallelæ sunt: [d] quare anguli B A H, K H A duobus rectis minores sunt. [e] ergo E F, H K convenient ad partes B H: & proinde E F, A C convenient ad partes A B. *Q. E. D.*

Conversè; si C D, K H æquidistent, transibit recta quæ tactus connectit per centrum.

Prop. XXVIII.

Fig. 123. Si in coni sectione, vel circuli circumferentia duas lineas æquidistantes (A B, C D) bifariam secet recta linea (F E) diameter erit sectionis.

Sola enim F E bisecat parallelas ad A B.

a 5. & 6. *huj.* b 46. *et* 47. 1. *hujus.*

Si fieri potest, sit alia F G diameter. [a] ergo quæ tangit sectionem in G, est ubique A B, C D parallela. unde C H [b] $=$ ($\frac{1}{2}$ C D $=$) C E. *Q. E. A.*

Prop. XXIX.

Fig. 124. 125. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A) in idem punctum (A) conveniant; & ab eo, ad punctum (D), quod lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secat. ducatur alia linea (A D), sectionis erit diameter.

* a 5. *hujus.* & 47. 1. *huj.* b *hypoth.* c * d 1. *ax.* e 9. *ax.*

Si fieri potest, sit alia D E diameter; jungatúrque C E, * sectioni occurrens in F, per quod ducatur F H K G ad C B parallela. ergo F H [a] $=$ H K. item (ob C D [b] $=$ D B) [c] est F H $=$ H G. [d] ergo H K $=$ H G.* *Q. E. A.*

Prop. XXX.

Fig. 126. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (B A, C A) in unum punctum (A) conveniant, diameter (A D), quæ ab eo puncto ducitur lineam (B C) tactus (B, C) conjungentem bifariam secabit.

a 29. *hujus.* b *cor.* 46. 1. *huj.*

Si fieri potest sit B E $=$ E C; ducatúrque A E. [a] ergo A E est quoque diameter sectionis. [b] ergo in parabola A E, A D sunt parallelæ;

læ; in reliquis sectionibus A [c] est centrum. Quæ sunt absurda. c vid. 47. 1. hujus.

Prop. XXXI.

Si utramque oppositarum sectionum (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C D, E F), siquidem ea (A B), quæ tactus (A, B) conjungit, per centrum transeat, contingentes lineæ (C D, E F), æquidistantes erunt; sin minus, convenient inter sese ad easdem partes centri. Fig. 127. 128.

Probatur, ut 27ma hujus.

Prop. XXXII.

Si utrique oppositarum sectionum occurrant rectæ lineæ (A B, C D), ipsas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus secantes, & productæ inter se conveniant; punctum in quo conveniunt, erit in angulo (K L G), qui deinceps est angulo (G L H, vel F L K) sectiones continenti. Fig. 129.

Sint F G, H K sectionum asymptoti; hisce [a] occurret utraque A B, C D. productæ igitur occurrent sibi invicem sub angulo H L F, vel G L K, prout inclinantur ad has, aut illas partes. a 8. hujus.

Prop. XXXIII.

Si oppositarum sectionum (A, B) uni (A) occurrens recta linea (C D) ex utrâque parte extra sectionem cadat; cum altera sectione (B) non conveniet; sed transibit per tres locos, quorum unus quidem est sub angulo sectionem continente, duo verò sub iis angulis, qui deinceps sunt. Fig. 130.

Liquet C D [a] occurrere asymptotis duobus punctis; ergo non alibi; ergo non alteri sectioni, quam semper complectuntur asymptoti. a 8. hujus.

Prop. XXXIV.

Si oppositarum sectionum unam (A) contingat recta linea (CD); & huic ducatur æquidistans (E F) in altera sectione (B); quæ à tactu (A) ad (G) medium lineæ æquidistantis (E F) ducitur (A G), oppositarum sectionum diameter erit. Fig. 131.

Si fieri potest, sit altera A K diameter. [a] ergo tangens per occursum H parallela est ad C D, ideóque ad E F. [b] quare E K [b] = (K F = $\frac{1}{2}$ EF [c] =) E G. [d] Q. E. A.

a 5 hujus.
b 47. 1. hujus.
c hyp.
d 9. ax. 1.

Prop. XXXV.

Fig. 132. Si diameter (A B) in oppositarum sectionum una (B) rectam lineam (C D) bifariam secet (in E); quæ in diametri termino (A) contingit alteram sectionem (A), lineæ bisectæ (C D) erit æquidistans.

a 48. 1. hujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 22. 1. huj.

Si fieri potest, sit altera D F tangenti parallela. ergo D G [a] = G F. Item D E [b] = E C. [c] ergo C F ad E G est parallela. [d] *Q.E.A.*

Prop. XXXVI.

Fig. 133. Si in utraque oppositarum sectionum (A, B) ducantur rectæ lineæ (C D, E F) inter se æquidistantes, quæ (G H) ipsarum medium conjungit, oppositarum sectionum diameter erit.

a 5. hujus.
b 30. 1.
c 48. 1. hujus.
d hyp.
e 9. ax. 1.

Si fieri potest, sit altera G K diameter: [a] ergo tangens per A ad C D parallela est; [b] adeóque ad E F. unde E K ([c] = KF = $\frac{1}{2}$ E F [d] =) E H. [e] *Q. E. A.*

Prop. XXXVII.

Fig. 134. Si oppositas sectiones (A, B) secet recta linea (C D), non transiens per centrum X; quæ (E X) ab ipsius medio (E) ad centrum ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta appellatur: transversa verò diameter, ipsi conjugata, est ea (A B), quæ per centrum ducitur æquidistans lineæ bisectæ (C D).

a 30. 1. hujus.
b hyp.
c 2. 6.
d 4. 6.
e 34. 1.
f 6. hujus.
g 16. 1. hujus.

Ducatur D X sectioni [a] occurrens in F, & connectatur F C, & producatur B A G. Atque ob C E [b] = E D; & F X [a] = X D [c] erit F C ad X E parallela, & F G [d] = (X E [e] =) GC. [f] quare F C tangenti ad A parallela est. [g] ergo A B, & E X sunt conjugatæ diametri. *Q.E.D.*

Prop. XXXVIII.

Fig. 135. Si oppositas sectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C X, D X), convenientes in uno puncto (X); quæ (X E) ab eo puncto ad medium (E) lineæ (C D) tactus (C, D) conjungentis ducitur, oppositarum sectionum diameter erit, quæ recta vocatur, transversa verò ipsi conjugata (A B), quæ per centrum ducitur, æquidistans lineæ (C D) tactus conjungenti.

Si

Si fieri poteſt, ſit altera E F recta diameter, cui occurrat D X (producta in F; & connectatur C F, [a] ſectioni occurrens in A; per quod ducatur A B ad C D parallela. ergo A G [b] = G B. item (ob C E [c] = E D) eſt A G [d] = G K. [e] unde G B = G K. [f] *Q. E. A.*

a 32. 1 *hujus.*
*b 12. *def.* 1 *hujus.*
c *hyp.*
d *cor.* 2. 6.
e 1. *ax.* f. 9. *ax.*

Prop. XXXIX.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (C E, D E) in unum punctum (E) convenientes; quæ (E F) per punctum illud (E), & centrum ducitur, lineam tactus (C, D) conjungentem bifariam ſecabit. Fig. 136.

Si fieri poteſt, ſit CG = GD. [a] ergo ducta GE erit diameter: [b] atqui F E eſt diameter. ergo interſectio E eſt centrum ſectionis. [c] *Q. E. A.*

a 38. *hujus.*
b *hyp.*
c 32. *hujus.*

Prop. XL.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingentes duæ rectæ lineæ (C E, E D) in unum conveniant; & per punctum (E), in quo conveniunt, ducatur linea (F G) æquidiſtans tactus conjungenti (C D), & ſectionibus occurrens (in F, G); quæ (F H, G H) ab occurſibus ad medium (H) lineæ (C D) tactus conjungenti ducuntur, ſectiones ipſas contingunt. Fig. 137.

Ducatur E H, [a] erit hæc recta diameter; & tranſverſa A B, ducta per centrum X ad C D parallela: unde E X × X H [b] æquatur quartæ parti figuræ ad A B. Hinc, cùm F E [c] ſit ordinatim applicata, [d] liquet F H tangere ſectionem A. Pari modo G H ſectionem B continget. *Q. E. D.*

a 37. *hujus.*
b 38. 1 *hujus.*
c 38. *hujus.*
d 38. 1. *hujus.*

Prop. XLI.

Si in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ (A D, C B), ſe invicem ſecent, (in E) non tranſeuntes per centrum (X), ſeſe bifariam non ſecabunt. Fig. 138.

Ducatur E X; ergo ſi A D, C B ſe mutuò biſecent in E, [a] erit E X diameter conjugata illi X F, quæ per X ducitur ad C B parallela; erítq; E X * tangenti ad F parallela. Paritérque (ductâ X H ad D A parallelâ) erit E X tangenti ad H parallela. [c] Ergo tangentes ad F, H ſibi invicem parallelæ ſunt. [c] *Q. E. A.*

a 37. *hujus.*
* *vid.* 37. *hujus.*
c 31. *hujus.*

Prop. XLII.

Fig. 139. Si in oppositis sectionibus (A, B ; C, D) quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (E F, GH) se invicem secent, non transeuntes per centrum (X) ; bifariam sese non secabunt.

Per centrum X ducantur A B ad E F, & C D ad G H parallelæ, & connectatur X K : posito igitur ipsas E F, G H se mutuò bisecare, [a] erunt X K, A B, & X K, C D conjugatæ diametri, unde tangens per A tangenti per C erit parallela (utpote utraque ipsi X K) quod fieri nequit : [b] conveniunt enim hæ ad unam asymptoton. Ergo E F, G H se mutuò non bisecant.

a 37. *hujus.*
* 5. *hujus.*
b 21. *hujus.*

Prop. XLIII.

Fig. 140. Si unam (A) oppositarum sectionum (A, B ; C D) quæ conjugatæ appellantur, secet recta linea (E F) in duobus punctis (E, F) ; & à centro (X) ducantur duæ lineæ (X G, X C), una quidem (X G) ad medium (G) lineæ secantis (E F), altera verò (X C) ipsi (E F) æquidistans, erunt hæ (X G, X C) oppositarum sectionum conjugatæ diametri.

Nam quia tangens in A ad E F [a] parallela est ; & [b] proinde ad C X, [c] erunt A X, C X conjugatæ diametri.

a 5. *hujus.*
b *hyp.* & 30. 1.
c 20. *hujus.*

Prop. XLIV. Probl. 2.

Fig. 141. Datâ coni sectione (A C E), diametrum invenire.

Analysis. Factum sit ; & sit C H diameter ; & ad hanc ordinatim applicentur A E, B D : bisecat has diameter C H in H, & F.

Compositio. Ducatur utcunque recta A E sectionem secans punctis A, B ; & huic parallela fiat BD ; bisecentur hæ in H & F ; & connectatur H F C. [a] Erit H C diameter sectionis. Eodem licet modo infinitas diametros invenire.

a 28. *hujus.*

Prop. XLV. Probl. 3.

Fig. 142. 143. Datâ ellipsi, vel hyperbola centrum invenire.

[a] Duæ ducantur utcunque sectionis diametri A B, C D ; erit harum intersectio centrum sectionis.

a 44. *hujus.*

Prop.

Prop. XLVI. Probl. 4.

Datæ parabolæ (F C E) axem invenire. Fig. 144.

Analysis. Sit C D axis, eique perpendicularis F E; est ergo FD = D E. Quòd si ducatur utcunque diameter AB, [a]erit hæc ipsi CD parallela; atque idcirco ipsi F E perpendicularis. Hinc [a] 46. 1. *hujus.*

Componitur sic. [a] Ducatur utcunque diameter A B, eique [b] statuatur perpendicularis E F; bisectaque E F in D, [b] erigatur perpendicularis D C; erit hæc axis parabolæ: est enim D C diameter, [a]quia parallela diametro A B; & bisecat ipsi perpendiculares E F, (neque enim ulla alia ipsas bisecabit) [c]ergo est axis. [a] 44. *hujus.* [b] 11. 1. [c] 18. *def.* 1. *hujus.*

Prop. XLVII. Probl. 5.

Datæ hyperbolæ, vel ellipsis (A B C) axes invenire. Fig. 145. 146.

Analysis.

Esto K D axis; ergo [a] bisecat hæc sibi perpendiculares utcunque ductas A C, in D. Itaque si è K [b] centro sectionis connectantur K A, KC, [c] erunt K A, K C æquales. Hinc [a] 18. *def.* 1. *hujus.* [b] 45. *hujus.* [c] 4. 1.

Compositio.

[d] Sume K centrum sectionis, & centro K duc utcunque circulum A E C, sectioni occurrentem punctis A, C, quæ connectat recta AC; bisecetur autem A C in D, & connectatur DK. Erit DK axis. [d] 45. *hujus.* Fig. 147. 148.

Nam ductis K A, K C, [e] liquet trigona K D A, K D C sibi mutuò esse æquilatera, & [f] proinde æquari angulos K D A, K D G; ac idcirco rectos esse: [g] unde K D est axis. [e] *constr.* [f] 8. 1. [g] 18. *def.* 1. *huj.*

Quòd si per K ducatur MN ipsi AC parallela, [h] erit M N axis conjugatus ipsi K D. [h] 16. 1. *hujus.* & 19. *def.* 1. *h.*

Prop. XLVIII.

His autem demonstratis, superest ut ostendamus non esse alios axes ipsarum sectionum.

Si fieri potest, sit alius axis K G. ergo ductâ ad hanc perpendiculari A H, [a] erit L H = A H; adeóque (junctâ K L) K L [b]= (K A [c]=) K C: ideóque circulus A E C etiam transit per L, quod in hyperbola manifestè absurdum; in ellipsi verò, ducantur C R, L S ad M N perpendiculares. Et propter L Sq + S Kq [d] = (L Kq [e] = C Kq [d] =) C Rq + R Kq. & M S × S N + S Kq [f] = (K Mq [f] =) M R × R N, [a] 18. *def.* 1. *huj.* [b] 4. 1. [c] *constr.* [d] 47. 1. [e] *priùs.* [f] 5. 2.

+R

h 3. ax. 1. + R Kq. erit L Sq — C Rq [g] = (R Kq — S Kq [g] =) M S × S N —
k 2. ax. 1. M R × R N. & [k] proinde L S q + M R × R N = C Rq + M S ×
S N. Verùm (ob ordinatim applicatas L S, C R) est L Sq . M S ×
l 21.1. hujus. S N [l] :: C Rq . M R × R N. ergo L Sq = M S × S N . & C R q =
m 25.5. M R × R N. (Nam si L Sq $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ M S × S N, [m] esset hinc L S q
n conv. 35. 3. + M R × R N . $\sqsubset$ vel $\sqsupset$ C Rq + M S × S N, contra modò ostensa). [n] Unde sectio A B C circulus esset (non verò Ellipsis) contra hypothesin.

Prop. XLIX. Probl. 6.

Fig. 149. Datâ coni sectione, & puncto (A), non intra sectionem, dato, ab eo ducere rectam lineam (A D), quæ sectionem contingat.

* 47. hujus. 1. Cas. Sectio data primò sit Parabola, cujus * axis B E punctum datum A sit in ipsa sectione.

Analysis. Tangat A D, axi B C occurrens in D, ductâque A E
a 35. hujus. ad B C perpendiculari, [a] erit B E = B D. Itaque

Compos. Si ex dato puncto A ducatur AE perpendicularis axi BC,
b 33. 1. hujus. & in axe producto sumatur B D = B E, jungatúrque D A, liquet [b] hanc parabolen tangere.

2. Cas. Punctum A sit in ipso axe.

Fig. 150. *Analysis.* Tangat A D; ductáque sit D E axi B C perpendicu-
c 35.1. hujus. laris: itaque rursus est A B [c] = B E.

Compos. Sumatur B E = A B; & ab E ducatur E D axi perpen-
d 33.1. hujus. dicularis; sectioni occurrens in D, & connectatur D A; [d] continget hæc sectionem.

3. Cas. Sin datum punctum coincidat vertici B, [e] liquet ductam per B axi
e 17. 1. huj. perpendicularem esse contingentem.

4. Cas. Punctum A datum sit alibi extra axem.

Fig. 151. *Analysis.* Tangat A D. itaque ductâ A E ad axem B C parallelâ,
f cor.46.& 35. 1. hujus. & ordinatim applicatâ D E, erit rursus G E [f] = A G.

Compos. Per A ducatur A E axi parallela, factóque G E = A G, per E ordinatim applicetur E D, sectioni occurrens in D, & conjun-
g 46.& 33. 1. hujus. gatur D A: [g] liquet hanc sectionem contingere.

h 47. hujus. k 45. hujus. Sectio data sit secundò Hyperbola; cujus [h] axis transversus K B, [k] centrum F, asymptoti F L, F M.

1. Cas. Punctum datum A sit in sectione.

Fig. 152. *Anal.* Tangat A D; & sit A E perpendicularis axi B C; est igi-
m 36.1. hujus. tur K E. E B [m] :: K D. D B.

Com-

Compos. E puncto A ducatur A E axi perpendicularis, [n] secetúrque KB in D, ut sit K D. D B :: K E. E B ; jungatúrque D A. [o] Continget hæc sectionem. n 16. 6. o 34. 1. *hujus.*

Punctum A sit in axe. 2 *Cas.*

Anal. Tangat A D, & sit D E axi perpendicularis: itaque rursus K E. E B :: [m] K A. A B. Fig. 153.

Compos. * Fiat K E. E B :: K A. A B. & per E ducatur axi perpendicularis E D, sectioni occurrens in D; & connectatur D A; [o] hæc sectionem continget. * *Not.* 1.

Sit datum punctum A alicubi intra angulum L F M. 3 *Cas.*

Anal. Tangat A D, junctáque F A producatur, & fiat F O = F N; & * ordinatim applicetur D E. Est ergo O E. E N [p] :: O A. A N. Fig. 154. * p 36. 1. *hujus.*

Compos. Juncta F A producatur, & sumatur F O = F N. fiátque O E. E N [q] :: O A. A N. & ordinatim applicetur E D; jungaturq; D A. [r] Tanget hæc sectionem. q *Not.* 1. r 34. 1. *huj.*

Sit punctum A in F M unâ asymptoton. 4 *Cas.*

Anal. Tangat A D sectionem, asymptoto F L occurrens in P; sitque D Q ad L F parallela: atque ob A D [s] = D P, [t] erit A Q = Q F. Hinc Fig. 155. s 3. *hujus.* t 2. 6.

Compos. Bisecetur A F in Q, & per Q ducatur Q D ad F L parallela, sectioni occurrens in D, jungatúrque D A. Continget hæc sectionem. Nam productâ A D in p, ob A Q [v] = Q F, [x] erit A D = D P. [y] quare A D tangit sectionem. u *constr.* x 2. 6. y 9. *hujus.*

Punctum A sit in loco, qui deinceps est angulo L F M sectionem continenti. 5. *Cas.*

Anal. Tangat A D; junctáque A F producatur, cui parallela utcunque in sectione sumatur R S; & bisectâ R S in E, connectatur E F, & fiat F O = F N; est igitur E O diameter [z] ipsi A F conjugata; & per D ductâ D T ad E O parallelâ, erit [a] A F × F T quarta pars figuræ ad O N. Hinc Fig. 156. z 2. 37. *hujus.* a *cor.* 38. 1. *huj.*

Compositio. Juncta A F producatur, eíque parallela utcunque ducatur R S (sectioni occurrens punctis R, & S); bisecetur R S in E; junctâque E F producatur, & fiat F O = F N, [z] ergo O N est transversa diameter, ipsi A F conjugata. * Fiat A F × F T æqualis quartæ parti figuræ ad O N, & per T ducatur T D ad O N parallela, sectioni occurrens in D, & jungatur D A. [b] Tanget hæc sectionem. * *Not.* 2. b *conv.* 38. 1. *h.*

Sin

6. Cas. Sin assignetur punctum A intra angulum Y F Z, nulla inde tangens
c 31.1. *hujus.* duci poterit; ducta enim linea [c] utramque Y F, Z F secabit: ergo non tanget.

Sit tertiò, sectio data ellipsis, cujus axis B C, centrum F.

1 *Cas.* Datum punctum A sit in sectione.

Anal. Tangat A D, & A E ordinatim applicetur ad axem. Estq;
d 36. 1. *hujus.* C E. E B :: [d] C D. D B.

Compos. Ducatur A E perpendicularis axi C B; & producatur
Fig. 157. C B, ut sic C E. E B [e] :: C D. D B. & connectatur D A. [f] Tanget
e *Not.* 2. hæc Ellipsin.
f 34. 1. *hujus.*

2 *Cas.* Punctum A sit extra sectionem.

Anal. Tangat A D; & juncta A F producatur, & ordinatim applicata sit D E. Est itidem O A. A N [g] :: O E. E N.
g 36. 1. *hujus.*
Fig. 158. *Compos.* Connectatur A F sectioni occurens in N,O; fiatque O A.
h 10. 6. A N [h] :: O E. E N. & per E ad A O ordinatim applicetur E D, secti-
k 34. 1. *hujus* oni occurrens in D; & connectatur D A: [k] tanget hæc sectionem.

Fig. 159. *Not.* 1. Datur recta K B secta in A; oportet producere hanc ad E, ita ut sit K E. B E :: K A. A B.

a 12. 6. [a] Fiat K A—A B. A B :: K B. B E. ergo componendo erit K A. A B :: K E. B E. *Q. E. F.*

Prop. L. Probl. 7.

Fig 160. Datâ coni sectione, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes sectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

Sit sectio primùm parabole, cujus axis A B.

Fig. 161. *Analysis.* Tangat D C sectionem, faciens angulum D parem dato
a 40. *dat.* F. Itaque ductâ C B ad A B perpendiculari, [a] datur ratio D B ad
b 33. 1 *hujus.* B C; ergo datur ratio A B [b] ($\frac{1}{2}$ D B) ad B C. [c] ergo datur angulus
c 41. *dat.* B A C. [d] quare datur positio rectæ A C, & inde punctum C, &
d 29. *dat.* hinc tangentis C D positio.

Compos. Sumpto E puncto utcunque in latere dati anguli ducatur E G ad alterum latus F G perpendicularis, & bisecta F G in H, jungatur H E, fiatque ang. B A C = ang. G H E: & ab occursu C du-
f 35. 1. *hujus.* catur C B ad A B perpendicularis; productâque A B, sumatur A D
g *constr. et* 15. = A B; & connectatur D C, [f] liquet hanc tangere sectionem Et
h 4. 6. (5. quoniam F G. H G [g] :: D B. A B. & H G. G E [h] :: A B. B C (ob
k *constr.* ang. G H E [k] = B A C, & [k] rectos ad G & B) erit ex æquo, F G. G E.

GE :: DB. BC. [l] ergo pares sunt anguli F, D. *Q. E. F.* l 6. 6.

Sit secundò Hyperbole, cujus axis A B, centrum X: Fig. 162. 163.

Anal. Tangat D C, faciens angulum parem dato K H G; jungatúrque X C, & statuatur C E axi perpendicularis; est igitur data ratio X E × E D ad E Cq [m] (eadem quæ T ad R); item [n] datur ratio E C ad E D (ob datos angulos E D C, & rectum E). [o] ergo datur ratio X E × E D ad E Dq; [p] hoc est ratio X E ad E D. Proinde [q] datur ratio X E ad E C. [r] ergo datur angulus E X C, & [s] hinc positio rectæ X C, & hinc punctum C, & hinc tangens C D.

m 37. 1. *hujus.* n 40. *dat.* o 50. & 8. *dat.* p 1. 6. q 8. *dat.* r 41. *dat.* s 29. *dat.*

Quòd si ducatur asymptotos X F; [t] liquet angulum E D C majorem esse angulo A X F, quoniam D C [v] producta ipsam X F secabit. Itaque datus angulus non debet esse minor illo, qui sectionem continet.

t 16. 1. v 3. *hujus.*

Compos. Sumatur G punctum utcunque in latere H G dati anguli; & à G ducatur ad H K perpendicularis G K. [y] Fiat autem T. R :: M K × K H. K Gq. & connectatur M G: dein fiat ang. A X C = ang. K M G; & ab occursu C [z] ducatur tangens C D. Dico factum.

y *Not.* z 49. *hujus.*

Ducatur enim C E axi perpendicularis: & propter X E. E C [a] :: M K. K G. ac [b] ideò X Eq. E Cq :: M Kq. K Gq. & E Cq. X E × E D [c] :: (R. T :: [d]) K Gq. M K × K H; erit ex æquo X Eq. X E × E D. :: M Kq. M K × K H. [e] hoc est X E. E D :: M K. K H. Verùm E C. X E [f] :: K G. M K. Ergo rursus ex æquo E C. E D :: K G. K H. ergo quum anguli E, K recti sint, [g] erit ang. E D C = K H G. ergo factum.

a *constr.* & 4. 6. b 22. 6. c 37. 1. *hujus.* d *constr.* e 1. 6. & 11. 5. f *priùs & inversè.* g 6. 6.

Quòd verò X C sectioni occurrit, sic ostenditur: Ducatur A F ad X A perpendicularis, angulóque A X F fiat æqualis K H L. Cùm igitur sit M K × K H. K Gq (:: [h] T. R [k] ::) X Aq. A Fq [l] :: H Kq. K Lq) [m] ⊏ H Kq. K Gq. [n] erit M K × H K ⊏ H Kq & proinde M Kq ⊏ M K × H K. & M Kq. K Gq [o] ⊏ (M K × H K. K Gq [p] ::) X Aq. A Fq. quare X Eq. E Cq ⊏ X Aq. F Aq. & X E. E C q (hoc est X A. A N) ⊏ X A. A F. [r] ergo A N ⊐ A F. quare X C secat angulum E X F; & [s] propterea sectioni occurrit.

h *constr.* k 1. *hujus.* l 4. & 22. 6. m *constr. et* 8. 5. n 10. 5. o 8. 5. p *priùs.* q 4. 6. r 10. 5. s 3. *hujus.*

Sit tertiò sectio ellipsis, cujus axis A B, centrum X. Fig. 164. 165.

Analysis. Tangat C D, faciens angulum D parem dato G; jungatúrque X C, & sit C E axi perpendicularis. Est itaque data ratio C Eq ad E D × E X [a] (eadem quæ R ad T). Item ratio C Eq ad E Dq [b] datur (ob datos angulos D, & E); [c] ergo datur ratio E Dq ad E D × E X. [d] hoc est ratio E D ad E X. [e] ergo ratio E X ad C E datur. [e] quare datur angulus E X C, & hinc [f] positio rectæ X C, & inde punctum C, adeóq; [g] positio tangentis C D,

a 37. 1. *hujus.* b 40. *dat.* c 8. *dat.* d 1. 6. e 41. *dat.* f 29. *dat.* g 49. *hujus.*

Compos. Sumpto utcunque puncto F in latere dati anguli, ducatur
h *Not.* FH ad GH perpendicularis; & fiat R. T :: [h] F Hq. GH × HK;
k 49. *hujus.* junctâque KF, fiat ang. AXC = HKF; & ab occursu C [k] duca-
l *constr.* & 4. & 22. 6. tur tangens CD. Dico factum. Nam ductâ CE ad AB perpendicu-
m 37.1. *hujus.* lari, propter XEq. ECq [l] :: KHq. HFq. & ECq. ED × XE :: [m]
n *constr.* R. T :: [n] HFq. HG × KH. erit ex æquo XEq. ED × XE :: KHq.
o 1. 6. HG × KH. [o] hoc est XE. ED :: KH. HG. Item EC. XE :: [p] HF.
p *constr. et* 4.6. HK. ergo rursus ex æquo ED. EC :: HG. HF. Unde cùm ang.
q 6. 6. E [n] = H, [q] erit quoque ang D = G. Ergo factum.

Not. Fieri debet R. T :: FHq. GH × HK. Itaque $\frac{T \times FHq}{R \times GH} =$ HK.

Compos. Fiat R. T :: FH. $Q = \frac{T \times FH}{R}$; tum GH. Q :: FH.

$$HK = \frac{Q \times FH}{GH} = \frac{T \times FH \times FH.}{R \times GH}$$

Prop. LI. *Probl.* 8.

Fig. 166. Datâ coni sectione lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto (Z) æqualem.

a 50. *hujus.* In parabola facilè conficitur. [a] Tangat enim hanc utcunque CD
b *cor.* 46.1. *h.* faciens cum axe AB angulum D parem dato Z; & per tactum C du-
c *constr.* catur CE ad AB parallela: [b] Liquet CE esse diametrum, & angu-
d 29. 1. lum DCE alterno CDA, [c] (hoc est dato Z) [d] æquari. *Q. E. F.*

Fig. 167. In hyperbola verò, cujus axis AB, centrum E.

168. *Analysis.* Tangat CD faciens angulum ECD parem dato; Trigono autem CDE circumscribatur circulus; & ductâ per C ad axem perpendiculari GCZ, per V centrum circuli ducantur VQ ad ZG, & VY ad EG parallelæ, & sit CS ad GE parallela. Estque ZG.
e 1. 6. CG [e] :: (ZG × GC. CGq [f] :: EG × GD. CGq [g] ::) T. R. ergo
f 36. 3. & 7. 5. dividendo MC. CG :: T−R. R. & bipartiendo antecedentes [h] YC.
g 37. 1. *hujus.* CG. [k] (hoc est VS. SQ) :: $\frac{T—R}{2}$. R. Hinc
h 3. 3.
k 34. 1.

l 33. 3. *Compos.* Exponatur utcunque recta FH, super quâ [l] describatur
m 15. 6. segmentum circuli capiens angulum (ut FKH) parem dato Z. A circuli autem centro N ducatur NO ad FH perpendicularis, [m] secetúrque

túrque N O in P, ut ſit NP. PO :: $\frac{T—R}{2}$. R. ducatúrque P K ad FH parallela, circulum ſecans in K, & per K ducatur K L ad protractam F H perpendicularis; & producatur L K M, & perpendicularis huic ducatur N X. Junctâ denique K F, fiat ang. AEC = ang. LFK; & per occurſum C [n] ducatur ſectionem contingens C D. Dico factum. n 49 *hujus.*

Ducatur axi perpendicularis C G; & quoniam $\frac{T—R}{2}$. R.[o] :: NP. PO (X K. K L) erit (duplando antecedentes) T—R. R :: M K . K L. & componendo T. R :: M L . K L :: [p] M L × K L . q (F L × H L). K Lq :: T. R :: [r] E G × D G. C Gq. Eſt ergo F L. K L ⊣⊢ H L. K L [s] (F L × H L. K Lq) = E G. C G ⊣⊢ D G. C G (E G × D G. CGq). atqui (ob [t] ſimilia trigona F L K, E G C) [v] eſt F L. K L = E G. CG. ergo H L . K L :: D G . C G . [x] ergo anguli H K L, D C G pares ſunt, & [y] proinde reliqui F K H, E C D etiam pares ſunt. *Q.E.D.*

o *conſtr.* p 1. 6. q 36. 3. r 37. 1. *hujus.* s 23. 6. t *conſtr.* u 4. 6. x 6. 6. y 3. *ax.* 1. z 1. *hujus.*

Quòd verò E C ſectioni occurrat, ſic oſtenditur; ſit E T aſymptotos, & axi A B ducatur perpendicularis A T. Eſtque E A q. A T q [z] :: (T. R :: [a] F L × L H. L Kq) [b] ⊐ F Lq. K Lq, [c] vel E Gq. C Gq. ergo ang. A E T ⊏ ang. A E C; [d] & proinde E C ſectionem ſecat.

a *conſtr.* b 8. 5. c *prius.* d 2. *hujus.*

Coroll. Si ſit F L × H L. K Lq :: E G × D G. C Gq. erunt trigona H L K, D G C ſimilia.

Prop. LII.

Si ellipſim (cujus Axes A B, C D, & Centrum E) recta linea (GL) contingat; angulus (L F E), quem facit cum diametro (E F) per tactum (F) ducta, non eſt minor angulo (LCA) deinceps ei (A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam ſectionem (C) inclinatis continetur. Fig. 169. 170. 171.

Sit primò E F ad B C parallela: ergo cùm ſit A E [a] = E B, [b] erit A H = H C ergo, cùm E F [c] ſit diameter, [d] erit A C tangenti G L parallela: unde ang. L F H [e] = (C H E [c] =) L C H.

a *hyp.* b 2. 6. c *cor.* 47. 1. *huj.*

Sed non ſit E F ad B C parallela. ergo ductâ F K ad A B perpendiculari [f] erunt anguli L B E, F E K inæquales, & trigona C B E, F E K diſſimilia. Non igitur eſt E Kq. K Fq :: (B E q. (A E × E B). E Cq, [f] hoc eſt T. R; [g] hoc eſt) GK × K E. K Fq. ergo E Kq, & G K × K E ſunt inæqualia, & proinde G K, K E inæquales ſunt. [h] Capiat circuli ſegmentum M Y N angulum parem angulo A C B: [k] ergo id ſemicirculo majus eſt (nam ob A E, vel B E [l] ⊏ E C, [m] eſt uterque angulus A C E,

d 5. *hujus.* e 29. 1. f *cor. ad def. ad* 16. 1. *huj.* g 37. 1. *hujus.* h 33. 3. k 31. 3. l *hyp.* m 18. 1. *et* 32. (1.

n 10. 6. A C E, B C E semirecto major, ideóque ang. A C B obtusus). [n] Fiat N X. X M :: G K. K E & per X ducatur ipsi M N perpendicularis Y X, & connectantur M Y, N Y; bisectâque M N in T, erigatur ei perpendicularis O T P, in qua sumpto circuli centro R, ducatur R S ad Y X perpendicularis; jungantúrque M O, N O: liquet ang. N O T[o] ($\frac{1}{2}$ N O M) angulo B C E [o] ($\frac{1}{2}$ B C A) æquari; ideóque esse T Nq.
o 4. 1. T Oq [p] :: E Bq. E Cq. Est verò Y S. Γ R q (X S) [r] $\sqsupset$ O R. T R. &
p 4. & 22. 6. conversè S Y. X Y $\sqsubset$ R O. T O. & duplando antecedentes Z Y. X Y.
q 34. 1. $\sqsubset$ P O. T O. & dividendo Z X. X Y. ([o] hoc est Z X $\times$ X Y [p] (vel
r 8. 5. N X $\times$ X M). X Y q) $\sqsubset$ (P Γ. T O q :: T Nq. T Oq [r] :: E Bq. E Cq
o 1. 6. [r] ::) G K $\times$ K E. K Fq. Itaque si fiat N X $\times$ X M. X Vq :: G K $\times$ KE.
p 35. 3. (6. K Fq, [s] erit X V $\sqsubset$ X Y. Et quoniam N Xq. N X $\times$ X M [t] :: (N X.
q cor. 13. & 20. X M [v] :: G K. K E [t] ::) G Kq. G K $\times$ K E. erit ex æquo N Xq. X Vq
r prius. :: G Kq. K Fq. [x] & N X. X V :: G K. K F; connexâ igitur N V, [y] erit ang. N V X = ang. G F K. & simili discursu ang. M V X =
s 10. 5. E F K [z] unde totus ang. N V M = G F E. atqui ang. N V M [a] $\sqsupset$
t 1. 6. N Y M (A C B). ergo ang. G F E $\sqsupset$ A C B, & qui deinceps ang.
u constr. E F L $\sqsubset$ L C A. *Q. E. D.*
x 22. 6.
y 6. 6.
z 2. ax. 1.
a 21. 1.

Prop. LIII. Probl. 9.

* Fig. 172. 173. 174. 175.

Datâ ellipsi (A B C D) contingentem lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto (Y) æqualem. * Oportet autem acutum angulum datum non esse minorem angulo (A C G) deinceps ei (A C B), qui lineis (A C, B C) ad mediam sectionem inclinatis continetur.

* juxta præcedentem.

Sit primò datus ang. Y = A C G per centrum E ducatur E K ad B C parallela; & per occursum K sectionem contingens G H. Dico factum.

a hyp. Nam ob A E [a] = E B, [b] erit A F = F C : ergo cùm K E sit diameter,
b 2. 6. [c] erit A C tangenti H G parallela. ergo ang. E K G [d] = (E F C [d] =
c 5. hujus. A C G = [e]) Y. *Q. E. F.*
d 29. 1.

e hyp. Sin. ang. Y $\sqsubset$ A C G, erit qui deinceps Z $\sqsupset$ A C B. Exponatur
f 33. 3. utcunque circulus, [f] in quo segmentum M N P capiat angulum parem
g cor. 1. 3. angulo Z; bisectâque M P in O, ducatur per O ipsi M P perpendi-
h 4. 1. cularis N R [g] (in quo circuli centrum V), & connectantur M N, P N.
k constr. Itaque ang. A C E [h] ($\frac{1}{2}$ A C B) $\sqsubset$ ang. M N O [h] ($\frac{1}{2}$ M N P, [k] vel $\frac{1}{2}$ Z). quare
l cor. ad defin. ad 16. 1. huj. A E. E C $\sqsubset$ M O. O N. & A Eq. E Cq. [p] (T. R) $\sqsubset$ (M Oq. q (N O $\times$ O R).
q 35. 3. O Nq [r] ::) O R. O N. ergo componendo T + R. R $\sqsubset$ R N. O N. & biparti-
r 1. 6.

endo

endo antecedentes $\frac{T+R}{2}$. R $\sqsubset$ V N . O N. dividendóque $\frac{T-R}{2}$.
R $\sqsubset$ V O. O N. Sit $\frac{T-R}{2}$. R :: V O . O I [s] ($\sqsupset$ O N). & per I s 10. 5.
ducatur I *X* ad M P parallela, & per *X* ipſa *X* S T ad N R parallela, & V Q ad M P parallela. ergo cùm $\frac{T-R}{2}$. R [t] :: (V O . O I [u] ::) Q S. S *X*. erit componendo $\frac{T+R}{2}$. R :: Q *X*, S *X*. & duplando antecedentes, T+R. R :: T *X*. S *X*. & dividendo T . R :: T S. S *X*. Connectantur igitur M *X*. P *X*, & fiat ang. A E K = ang. M P *X*. & per occurſum K ducatur G H tangens ſectionem. Dico factum. Nam ordinatim applicetur K L. éſtque H L × L E. K Lq [x] :: (T. R [y] :: T S. S *X* [z] ::) T S × S *X* [a] (M S × S P). S *X* q. [b] ergo H L . K L + L E. K L [b] (H L × L E. K Lq = M S × S P. S *X* q [c] =) M S. S *X* + S P. S *X*. atqui ([d] ob ang. A E K = M P *X*, & rectos ad L, & S) [e] eſt L E. K L :: S P. *X* S. ergo manet H L. K L :: M S. *X* S. ergo ang. HKL = M *X* S. ergo totus ang. H K E [f] = (ang. M *X* P [g] =) ang. Z. & qui deinceps ang. E K G = ang. Y. Ergo factum.

t *conſtr.* (5.
v 34. 1. & 11.
x 21. 3.
y *priùs.*
z 1. 6.
a 35. 3.
b 23. 3.
c 23. 6.
d *conſtr.*
e 4. 6.
f 2. *ax.* 1.
g *conſtr.*

Coroll. Si H L × L E. K Lq :: M S × S P. *X* S q. Erit trigonum H L K ſimile trigono M S *X*.

Problema.

Linea E F coni ſectionem ſecet, oportet huic parallelam ducere, quæ ſectionem contingat. Biſecetur E F in C; & per C ducatur diameter ſectioni occurrens in T; & per T ducatur T S ad E F parallela; hæc ſectionem continget. Res liquidò patet. Fig. 176.

APOL-

APOLLONII
CONICORUM
LIB. III.

Prop. I.

Fig. 177. 178. 179. 180. SI coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes rectæ lineæ (A C, B D) inter se conveniant (in E), pérque tactus (A, B) ducantur diametri (A D, B C), quæ contingentibus occurrant (in D, C); triangula (A E D, B E C) ad verticem facta, sibi ipsis æqualia erunt.

Per A ducatur A F ad B D parallela. Estque (in parabola) *pgr.* A D B F [a] = triang. A C F: ablatóque communi trapezio A E B F, restat triang. A E D = triang. B E C. *Q. E. D.*

In aliis verò sectionibus (ob G F . G B [b] :: G B. G C) [d] est G F. G C. ([e]hoc est triang. G F A. G C A) [d] :: (G Fq. G Bq [c] ::) triang. G F A. G B D. [f] quare triang. G C A = G B D. & proinde (ablato vel addito communi quadrilatero) remanet triang. A E D = triang. BEC. *Q.E.D.* *Coroll.* Triang. G C A = triang. G B D.

a 42. 1. *hujus.*
b 37. 1. *hujus.*
c 1. 6.
d *cor.* 20. 6.
e 1, & 22. 6.
f 9. 5.

Prop. II.

Fig. 181. 182. 183. 184. 185. 186. Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumatur aliquod punctum (G), & per ipsum ducantur (K G L, F G M) æquidistantes contingentibus usque ad diametros; quadrilaterum (G L G I) factum ad (A C) unam contingentium, & ad (B C) unam diametrorum, æquale erit triangulo (A I M), quod ad eandem contingentem (A C) & ad alteram diametrum (AD) constituitur.

Nam

Nam ob triangulum G K M [a] æquale quadrilatero A K L C, liquet (addito vel ablato communi A I G K) tota, vel residua A I M, G I C L æquari. a 42, *vel* 43. 1. *hujus.*

Prop. III.

Iisdem positis, si in coni sectione, vel circuli circumferentia, sumantur duo puncta (F, G) & per ipsa ducantur (F H K L, N F I M, & G H P R, N G X O) æquidistantes contingentibus, usque ad diametros, quadrilatera ((L G, R F, & L N, R N) quæ ab ipsis fiunt, in diametris constituta, inter se æqualia erunt. Fig. 187. 188. 189.

Nam quadrilat. G O L H ┼ 4lat. H L C P [a] = 4lat. G O C P [b] = triang. A R P = [a] 4lat. M I P R ┼ triang. A I M [c] (hoc est = 4lat. M I P R ┼ 4lat. F L C I [d] =) 4lat. M F H R ┼ 4lat. H L C P. [e] ergo 4lat. G O L H = 4lat. M F H R. & [f] proinde etiam quadrilat. N O L F = quadrilat. N M R G. *Q. E. D.*

a 19. *ax.* 1.
b 2. 3. *hujus.*
c 2. *ax.* 1. & 2. 3. *hujus.*
d 2, & 3. *ax.* 1.
e 3. *ax.* 1.
f 2. *ax.* 1.

Prop. IV.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) inter se conveniant (in C), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A D H, B D G) contingentibus occurrentes (in F, G); triangula (A C F, B C G), quæ ad contingentes constituuntur, sibi ipsis æqualia erunt. Fig. 190.

Per H ducatur tangens H L. [a] Hæc tangenti A G parallela erit; [b] & A D = H D. quare triang. A G D. [c] = (triang. H L D [d] =) triang. B F D. Proinde (addito communi G D F C) erit triang. A C F = triang. B C G. *Q. E. D.*

a *cor.* 44. *hujus.*
b 30. 1. *hujus.*
c 4. 6. & 8. 1.
d 1. 3. *hujus.*

Prop. V.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ (E D, F D) sibi ipsis occurrant (in D), & in sectionum quavis (B) sumatur aliquod punctum (G), à quo ducantur duæ lineæ, unà quidem G M æquidistans contingenti (F D), altera verò (G K H L) æquidistans ei (F E), quæ tactus (E, F) conjungit, triangulum (G H M), quod ab ipsis constituitur ad diametrum (C D) per occursum ductæ, à triangulo (K H D), quod est ad occursum contingentium, differt triangulo (F K L) facto ad contingentes, & ad diametrum (F C), quæ per tactum (F) ducta fuerit. Fig. 191.

Nam

a 29.& 38.2.*h.* Nam ob [a]diametrum C D, & ordinatim applicatam F E, [b] atque
b *hyp.* G L, G M ipsis F E, F D parallelas, [c] liquet esse triang. M G H =
c 45.1. *hujus.* triang. C H L -|- C D F = triang. K H D -|- F K L.

Coroll. Triang. K F L = quadrilat. M G K D.

Prop. VI.

Fig. 192. 193. Iisdem positis, si in una oppositarum sectionum sumatur aliquod punctum (K), & ab eo ducantur rectæ lineæ (K L M, K N X) contingentibus (A F, B G) æquidistantes, quæ & contingentibus (A F, B G), & diametris (A E C, B E D) occurrant; quadrilaterum (KF) ab ipsis factum ad unam contingentium (A F), & ad unam diametrorum (B D) æquale erit triangulo (A I N) quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum (A C) constituitur.

a 2.3. *hujus.* Nam (in 1. fig.) triang. K O N [a]= 4lat. A O M F. unde (addito communi A I K O) triang. A I N = 4lat. K F. Item (in 2 fig.) ductâ
b 2. 3. *hujus.* contingente C O P; [b] erit triang. C O N = 4lat. K P. additóque
c 4. 3. *hujus.* communi O E, triang. C P E ([c]hoc est triang. B G E, [d] hoc est triang.
d 1. 3. *hujus.* A F E) [e]= 4lat. K E. quare itidem addito communi E I, [e] erit tri-
e 2. *ax.* 1. ang. A I N = 4lat. K F. *Q. E. D.*

Cor. Triang. A F E = 4lat. K E.

Prop. VII.

Fig. 194. Iisdem positis, si in utraque sectione (A B, C D) sumantur aliqua puncta (K, L), & ab ipsis ducantur contingentibus æquidistantes (M K P R X, N S T L W), quæ & contingentibus & diametris occurrant, quadrilatera (K T, L E, & K Y, L R) à lineis ductis constituta ad diametros, inter se æqualia erunt.

a 2. *hujus.* Nam ob quadrilat. K R F O [a] = triang. A O I, erit 4lat. K R E I
b 2. *ax.* 1. [b]= (triang. A E F [c]=) 4lat. L E. [b]unde 4lat. K R T N = 4lat. L I;
c *cor.* 6. *hujus.* [b]& 4lat. K X Y O = L R. Quæ *E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 195. Iisdem positis, pro punctis K, L sumantur C, D, in quibus diametri (AC, B D) cum sectionibus conveniant, & per ipsa ducantur contingentibus æquidistantes (D X, C T); dico quadrilaterum D C quadrilatero

drilatero

drilatero F C, & quadrilaterum X I quadrilatero T O æquale esse.

Nam ob trigona A E F, B E G [a] æqualia, [b] erit AE. EG :: B E. a 1. hujus.
E F; & [c] converse, A E. A G :: B E. B F. item A C. A E :: ([d] 2. 1 [d] ::) b 15. 6.
B D. B E. ergo ex æquali A C. AG :: BD. B F. ergo [e] triang. ACT. c cor. 19. 5.
A G H :: triang. B D X. B F H. atqui triang. A G H [f] = B F H. d 30. 1.
ergo triang. A C T [g] = B D X: [h] quare 4lat. C H = 4lat. D H. & e 22. 6.
4lat. C F = 4lat. D G. Adhæc triang. C E O [k] = triang. A E F [l] = f 1. hujus.
triang. B E G [k] = triang. D E I. [m] ergo 4lat X I = T O. Quæ g 14. 5.
E. D. h 3. ax. 1.
k 8. 1.
l cor. 1. hujus.
m 2. ax. 1.

Prop. IX.

Iisdem positis, si alterum quidem punctum, ut K, sit inter diametros, alterum vero sit idem quod unum punctorum C, D, ut C; & ducantur æquidistantes; dico triangulum C E O æquale esse quadrilatero K E, & quadrilaterum L O ipsi L M æquale esse. Fig. 196.

Nam triang. C E O [a] = (triang. A E F [b] =) 4lat K E. [c] ergo triang C R M = 4lat. K O. & 4lat. L M = 4lat. L O. a 4. hujus. b cor. 6. huj. c 3. ax. 1.

Prop. X.

Iisdem positis sumantur K, L, non tamen in punctis, in quibus diametri sectionibus occurrunt, demonstrandum est quadrilaterum L T R X quadrilatero ω X K I æquale esse. Fig. 197.

Nam triang. T Y E — Y ω L [a] = (triang. B E G [b] = triang. A E F [a] =) triang X E I — X R K. [c] ergo triang. T Y E + X R K = triang. X E I + Y ω L. additóque utrinque spatio K X E Y L χ, [c] erit 4lat. L T R χ = ω χ K I. *Q. E. D.* a 43. 1. hujus. b 1. hujus. c 1. ax. 1.

Prop. XI.

Iisdem positis, si in quavis sectione (A B) sumatur punctum B, & ab ipso lineæ æquidistantes ducantur; una quidem (B M) contingenti (A E) æquidistans, altera verò (B L) æquidistans ei (A D) quæ tactus conjungit; triangulum (B F M) quod ab ipsis fit ad diametrum (G M) per occursum (E) contingentium ductam, à triangulo (AKL) contento lineâ contingente (A K) & diametro (A H L) per tactum, differt triangulo (K E F), quod ad contingentium occursum constituitur. Fig. 198.

a 45. 1 *hujus.* Nam triang. B M F[a] = (triang. L H F + triang. H A E[b] =)
b 19. *ax.* 1. triang. A K L + triang. K F E.
c 3. *ax.* 1. *Cor.* 4 lat. B K E M[c] = triang. A K L.

Prop. XII.

Fig. 199. Iisdem positis, si in una sectione (AB) sumantur duo puncta (B,K), & ab utrisque similiter ducantur æquidistantes (B L M N, K O X P ad A D; & B X K, K L S ad B E); quadrilatera (B P, K R) ab ipsis constituta, æqualia erunt.

a *cor.* 11. *huj.* Nam quia triang. A O P[a] = 4lat K O E S; & triang. A M N[a] =
4lat B M E R; [b] erit 4 lat. M O P N (= triang A O P — triang.
b 3. *ax.* 1. A M N)[b] = (4lat K O E S — 4lat B M E R[b] =) 4lat K X R S
c 2. *ax.* 1. — 4lat B M O X. [c] unde 4lat K X R S = (4lat M O P N +
4lat B M O X =) 4lat B X P N. *Q. E. D.*

Prop. XIII.

Fig. 200. Si in oppositis sectionibus (A, B, C, D), quæ conjugatæ appellantur, rectæ lineæ (A F, B E) contingentes sectiones (A, B), quæ deinceps sunt, in unum punctum (E) conveniant, & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H C, B H D); triangulâ (B F H, A G H), quorum communis vertex est sectionum centrum (H), inter se æquales erunt.

a 20. 2. *hujus.* Per puncta A, & H ducantur A K, L H M ad B E parallelæ; [a] li-
b 4. 6. quetque esse L M, D B diametros conjugatas. Itaque K H. H B [b] (hoc
c 38. 1. *hujus.* est A H. H F) [c] :: H B. H G. [d] ergo triang. A G H [d] = triang. BHF.
d *Not.* *Q. E. D.*
e 12. 6. *Not.* [a] Sit H X. H F :: (H B. H G[f] :: A H. H F) [g] ergo H X =
f 11. 5. A H. & ideo triang. A E H[h] = triang. H G X[k] = triang. B H F.
g 9. 5.
h 1. 6.
k 15. 6.

Prop. XIV.

Fig. 201. Iisdem positis, si in quavis sectione (B) sumatur punctum (X), & ab ipso ducantur lineæ (X R S, X O T) æquidistantes contingentibus usque ad diametros (B H D, A H C); triangulum (O H T), quod ad centrum (H) constituitur, à triangulo (X T S) circa eundem angulum (T) differt triangulo (H B F, vel A G H) basin habenti lineam contingentem (B F, vel A G) & verticem sectionum centrum (H).

ducatur

Ducatur A Y ad B F parallela; & propter [a] conjugatas diametros L M, D B; & huic ordinatim applicatam A Y, [b] erit A Y. YG [c](hoc est X T. T S) = H Y. Y A [c] (H B. B F) + T. R. [d] quare triang. O H T = (triang. X T S + triang. B F H. [e] =) triang. X T S + triang A G H. *Q. E. D.*

a 20. 2 *hujus.*
b 40. 1 *hujus.*
c 4. 6.
d 41. 1. *hujus.*
e 13. *hujus.* & 1. *ax.*

Prop. XV.

Si oppositarum sectionum (A B, G S, T, X) quæ conjugatæ appellantur, unam (A B) contingentes rectæ lineæ (A D E, B D C) conveniant (in D), & per tactus (A, B) ducantur diametri (A H F, B H T); sumatur autem punctum (S) in quavis (G S) sectionum conjugatarum, & ab ipso ducantur contingentibus æquidistantes (S L, S Y) usque ad diametros (B T, A F) triangulum (S L Y), quod ab ipsis ad sectionem constituitur, majus est quàm triangulum (H L F), quod ad centrum (H), triangulo (H C B) basin habenti lineam contingentem (B C) & verticem (H) centrum sectionum.

Fig. 202. 203.

Ducantur X H G ad B C, & G I K ad A E, & S O ad B T parallelæ. Fiantque D B. B E [a] :: M N. 2 B C [b] :: M P ($\frac{1}{2}$ M N). BC. [c] atque X G. T B :: T B. R. Liquet X G, B T [d] fore conjugatas diametros; & S O (vel L H) [e] ordinatim applicari ad X G, & [f] M N fore rectum latus figuræ ad B T, [g] & R rectum latus figuræ ad XG. Porro D Bq. D B × B E [b] :: (D B. B E [k] :: M P. B C [h] ::) M P × B H. [l] (H Gq). B C × B H. permutandóque D Bq. H Gq [m] (hoc est triang. D B E. triang. GHI) :: DB × BE. BC × BH [n] :: triang. DBE. triang C B H. unde triang. G H I [o] = triang. C B H. Atqui H L. L F. [p] :: (H B. B C [q] :: H B. M P [r] (R. X G) + M P. B C [s] (D B. B E vel G H. H I) =) R. XG + G H. H I [t] = H L. L F. [v] unde triang. S L Y = (triang. H L F + triang. H G I [x] =) triang. H L F + triang. C B H. *Q. E. D.*

Not. D B × B E. B C × B H :: triang. D B E. triang. C B H. Nam ducantur C V, D Q ad B H perpendiculares. Estque D Q × B E. DB × B E [a] :: (D Q. D B [b] :: C V. C B [a] ::) C V × B H. C B × B H. & permutando D Q × B E [c] (hoc est 2 triang. D B E). C V × B H [c] (2 triang. C B H) :: D B × B E. C B × B H [d] :: triang. D B E. triang. C B H.

a 12. 6.
b 15. 5.
c 11. 6.
d 20. 2. *hujus.*
e 47. 1. *hujus.*
f 51. 1. *hujus.*
g 4. *def* ad 16. 1. *hujus.*
h 1. 6.
k *constr.* (6.
l *priùs.* & 17.
m 22. 6.
n *Not.*
o 9. 5.
p 4. 6.
q 5. *def.* 6.
r *cor.* 20. 2 *hujus.* & 15. 5.
s *constr.*
t 11. 5.
u 41. 1. *hujus.*
x 2. *ax.*
a 1. 6.
b 4. 6.
c 41. 1.
d 11. & 15. 5.

Prop. XVI.

Fig. 204. 205. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) in unum conveniant (in C); & ab aliquo puncto (D) eorum, quæ sunt in sectione, ducatur linea (DF) uni (BC) contingentium æquidistans, quæ & sectionem, & alteram (AC) contingentium secet (in E, & F); ut quadrata contingentium (BC, AC) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, ED) quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem, ad quadratum lineæ (AE) inter æquidistantem (FE) & tactum (A) interjectæ.

a 46. & 47.1. b 6. 2. (huj. c 1. hujus. d 16. 5. & 22. 6. e 19. 5. f prius. g 2. hujus. h 22. 6.

Per A, B ducantur diametri AGH, KBL; & DN ad AC parallela. [a] Liquet esse FK = KD. [b] unde FE × ED + DKq = EKq. Item CBq. triang CBL [c] (triang CAH) [d] :: EKq triang. EKL [d] :: DKq triang DKN [e] :: EKq — DKq. triang EKL — triang DKN (hoc est [f] ::) FE × ED. 4lat DL ([g] = triang AEG). ergo permutatim CBq. FE × ED :: (triang CAH. triang AEG [h] ::) CAq AEq. vel iterum permutando CBq. CAq :: FE × ED. AEq. *Q. E. D.*

Coroll. 1. FE × ED. CBq :: AEq: ACq.

2. $\left.\begin{array}{l}\text{DBq. triang. DKN ::}\\ \text{CBq. triang. CBL ::}\end{array}\right\}$ FE × ED. 4lat. DL.

Prop. XVII.

Fig. 207. 208. Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contingentes duæ rectæ lineæ (AC, BC) in unum conveniant (in C); sumantur autem in sectione duo quævis puncta (D, E), & ab iis ducantur lineæ (EFIK, DFGH) contingentibus æquidistantes), quæ & sibi ipsis, & * lineæ occurrant; ut quadrata contingentium (AC, BC) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (KF, FE), quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum (F), ad rectangulum quod lineis (HF, FD) similiter sumptis continetur.

* sectioni.

* Cor. 2. præc. a 3. hujus. b 16. 5. & 22. 6. c 1. hujus.

Per A, B ducantur diametri AMLN, BXOP, & DX, EM tangentibus parallelæ. Estque KF × FE. 4lat FM [a] (vel 4lat. FX) * :: (EIq triang EIM [b] ::) ACq. triang ACN [c] (vel triang BCP). Similique discursu, HF × FE. 4lat FX :: CBq. triang BCP. & inversè 4lat FX. HF × FE :: triang. BCP. CBq. ergo

ergo ex æquali KF × FE. HF × FE :: ACq. CBq. *Q. E. D.* Fig. 209.

Si punctum F intra sectionem cadat, similis est discursus, nisi quod *pro.* 6. 2. adhiberi debeat 5. 2 *Elem.* (in præcedenti.)

Prop. XVIII.

Si oppositas sectiones (AB, MN) contingentes duæ rectæ lineæ (ACLE, BCH) inter se conveniant (in C); sumatur autem in quavis sectione (MN) aliquod punctum (D), & ab eo ducatur linea (DFGE) uni contingentium (BC) æquidistans, quæ & sectionem, & alteram contingentium secet in (F, & E): ut quadrata contingentium (BC, CA) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (FE, ED), quæ interjiciuntur inter sectionem & contingentem (AE) ad quadratum lineæ (AE) inter æquidistantem (FE), & tactum (A) interjectæ. Fig. 210.

Ducatur DX ad AE parallela. Estque FE × ED + DOq [a] = OEq. ac BCq. triang BCL [c] (vel triang ACH) [b] :: (OEq. triang, OEL [b] :: DOq. triang DOX [d] :: FE × ED. 4lat. DL [e] (vel triang. AEG). itemque triang. ACH. ACq [b] :: triang. AEG. AEq. Ergo ex æquali BCq. ACq :: FE × ED. AEq. *Q. E. D.*

a 48. 1. *huj.* & 6. 2.
b 16. 5. *et* 22. 6
c 1. *hujus.*
d 19. 5.
e 6. *hujus.*

Prop. XIX.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ (AF, DF) in unum conveniant (in F), & ducantur contingentibus æquidistantes, (GHIKL, MNXOL) quæ & sibi ipsis & sectioni occurrant; ut quadrata contingentium (AF, FD) inter sese, ita erit rectangulum contentum lineis (GI, LI) quæ interjiciuntur inter sectionem, & linearum occursum, ad rectangulum, quod lineis (ML, LX) similiter sumptis continetur. Fig. 211.

Sint HAEC, NDEB diametri, & XR, IP tangentibus AF, DF parallelæ. Estque AFq. triang AFS [a] (vel triang DFT) [b] :: (HLq. triang HLO [b] :: HIq. triang HIP [c] ::) GL × LI. 4lat TO [d] (vel 4lat KX). itémque triang DFT. DFq [c] :: 4lat KX ML × LX. ergo ex æquo AFq. DFq :: GL × LI. ML × LX. *Q. E. D.*

a 4. *hujus.*
b 16. 5. *et* 22. 6
c 2 *cor.* 16. *huj.*
d 7. *hujus.*

Prop. XX.

Si quæ oppositas sectiones (AB, CD) contingunt duæ rectæ lineæ (AF, CF) sibi invicem occurrant; & per occursum (F) ducatur linea Fig. 212.

nea (B F H D) tactus conjungenti (A C) æquidiſtans, quæ ſecet utramque ſectionem (in B D); ducatur autem alia linea (G L S M N X) æquidiſtans eidem, ſectioneſque & contingentes ſecans: erit ut rectangulum contentum lineis (B F, F D), quæ inter occurſum ſectionum, & ſectones interjiciuntur, ad quadratum lineæ contingentis (A F), ita rectangulum, quod continetur lineis (G L, L X) interſectiones, & contingentem interjectis, ad quadratum lineæ (A L) ad tactum abſciſſæ.

a 38. el. 39 2. hujus.
b 45. 1. hujus.
c 16. 3. & 22. (6.
d 19. 5.
e 5. hujus.

Sint A E H, E F diametri; ducantúrque G P, B R ad A E parallelæ. Eſtque B Fq. [a] (BF × F D). triang B F R [b] (triang A F H) [c]:: L Sq. triang L S H [d] :: G L × L X. 4lat G L F P [e] (triang A L N). Item triang A F H. A Fq [e] :: triang A L N. A Lq. ergo ex æquo B F × F D. A Fq :: G L × L X. A Lq. *Q. E. D.*

Coroll. Triang. B F R. B F × F D :: 4lat G L F P. GL × L X.

Prop. XXI.

Fig. 213.

Iiſdem poſitis, ſi in ſectione ſumantur duo puncta (G, K), & per ipſa ducantur rectæ lineæ; una quidem (N X G O P, vel K S T) contingenti (A F) æquidiſtans; altera verò (G L M, vel K O V $\chi \Psi \omega$) lineæ (A C) tactus conjungenti æquidiſtans; quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: Erit ut rectangulum contentum lineis (B F, FD), quæ interjiciuntur inter occurſum contingentium, & ſectiones, ad quadratum contingentis (A F); ita rectangulum contentum lineis (K O, O ω) inter ſectiones, & linearum occurſum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (N O, O G) ſimiliter ſumptis continetur.

a 41. 1. huj.
b 46. 5. et 22. 6
c cor. 16. huj.
d 12. hujus.
e cor. præced.

Nam A F q. triang A F H [a] (triang B Y F) [a] :: X O q. triang. X O Ψ [b] :: X G q triang X G M [c] :: N O × O G. 4lat G O Ψ M [d] (4lat K O R T). [e] Item triang. B Y F. B F × F D :: [e] 4lat KORT. K O × O ω. ergo ex æquali A F q. B F × F D :: N O × O G. K O × O ω. atque inversè.

Prop. XXII.

Fig. 214.

Si oppoſitas ſectiones (A, B) contingant duæ rectæ lineæ (A C, B D) inter ſe æquidiſtantes; ducantur autem aliæ lineæ, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant (una quidem K E M) contingentibus æquidiſtans, altera verò (G X E) æquidiſtans ei (A B), quæ tactus conjungit: erit ut tranſverſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam (A B) tactus conjungentem conſtituitur; ita rectangulum contentum lineis

lineis (G E, X E) inter ſectionem, & linearum occurſum interjectis, ad rectangulum, quod lineis (K E, E M) ſimiliter ſumptis continetur.

Ducantur G F, X N ad A C parallelæ: hæ (& parallela his K M) a 31.2. *hujus.*
ad [a] diametrum A B ordinatim applicantur: quare B L × L A. K L q b 21.1. *hujus.*
[b] ::(A B. R [b]:: B N × N A [c] (F A × N A). X Nq. [d] :: B L × L A — F A c *cor.* 16.1. *huj.*
× N A. K Lq — X Nq (— E L q) (hoc eſt) [e] :: F L × L N. [f] K E × E M. d 19. 5.
atqui F L × L N [g] = G E × E *X*. [h] ergo A B. R :: G E × E X. K E × e *Not.*
E M. *Q. E. D.* f 5. 2.
Not. [e] Quod F L × L N = B L × L A — F A × N A ſic patet. g 34. & *ſch.* 48. 1.
Biſecetur B A, vel F N in Z. Eſtque B L × L A + Z A q [k] = (Z L q h 7, & 11. 5.
[k] = F L × L N + Z Nq [l] =) F L × L N + F A × A N + Z A q k 2. 6.
(nam Z Nq [k] = B N × A N + Z Aq). ergo B L × L A = F L × l 2. *ax.* 1.
L N + F A × A N.

Prop. XXIII.

Si in oppoſitis ſectionibus (A B, C D, E F, G H), quæ conjugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ (A L, E L), contingentes oppoſitas ſectiones (A B, E F) conveniant in quavis ſectione (in L); ducantur autem aliquæ lineæ (G O, H S) æquidiſtantes contingentibus (A L, E L; quæ & ſibi ipſis, & aliis ſectionibus (C D, G H) occurrant: ut quadrata contingentium (A L, E L) inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis (G X, X O) quæ inter ſectiones, & occurſum (X) interjiciuntur ad rectangulum, quod lineis (H X, X S) ſimiliter ſumptis continetur. Fig. 215.

Ducantur S T ad A L, & O Y ad E L parallelæ. Eſtque H P * =
P S, & G M * = M O; ac E Lq. triang E V L. [a] (triang. A L χ) a 4 *hujus.*
[b] :: P Xq. triang P N X [c] :: H X × H S. 4lat T N X S [d] (X R Y O). b 16. 5. *et* 22.
Item triang. A L χ. A Lq [c] :: 4lat. X R Y O. G X × X O. ex æquo c *ut ſæpe piùs.*
igitur E Lq. A Lq :: H X × X S. G X × X O. Quod *E. D.*

Prop. XXIV.

Si in oppoſitis ſectionibus (A, B, C, D) quas conjugatas appellamus, à centro (E) ad ſectiones ducantur duæ lineæ (A C, D B) quarum una quidem (A C) ſit tranſverſa diameter, altera verò (D B) recta; & ducantur aliæ lineæ (F L, M R) his diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant, ita ut occurſus (*X*) ſit in loco inter quatuor ſectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus (F X, X L) lineæ diametro tranſverſæ æquidiſtantis, unà Fig. 216. 217.

cum

cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus (M X, X R) lineæ æquidistantis rectæ diametro proportionem habet eandem, quam diametri rectæ (D B) quadratum ad quadratum transversæ (A C); æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia (A E) transversæ diametri constituitur.

1 *Not.* RN × MN + NX × PX = RX × XM. Nam NX × PX + o 5. 2. O Xq [o] = O Nq. [p] ergo N X × P X + O X q + R N × N M =
p 2. ax. 1. (O Nq + R N × N M [o] = O Mq =) R X × X M + O Xq. unde
q 3. ax. 1. (auferendo O X q utrinque) [q] erit N X × P X + R N × N M = R X × X M.

2 *Not.* L X × X F + X H × X K = F K × H F (vel L H × H F) Nam K X × X H + I Hq [r] = I Xq. [s] quare K X + X H + I Hq +
r 6. 2. L X × X F = (I Xq + L X × X F [t] = I Fq [t] =) L H × H F + I Hq.
s 2. ax. 1. & (auferendo commune I Hq) [u] erit K X × X H + L X × X F =
t 5. 2. L H × H F.
u 3. ax. 1.

Sint S E T, V E Y asymptoti; sitque occursus primò in angulo
a 15. 5. S E V, vel S E Y. Per A ducatur tangens S A V. Estque D Bq. A Cq
b 56. 1. & 1. 2 hujus. [a] :: (D E q. A Eq [b] (hoc est) :: S A × A V. A Eq [c] = S A. A E +
c 23. 6. A V. A E (hoc est) [d] :: N X. X H + P X. X K [e] =) N X × P X. X H
d 4. 6. × X K [e] :: D Eq + N X × P X. A E q + X H × X K [f] (hoc est ::)
e 12. 5. P M × M N [g] (vel R N × M N) + N X × P X. [f] L H × H F [g] (vel
f 11. 2. hujus. F K × H F) + X H × X K (hoc est) [h] ::) R X × X M. F K × H F +
g 8. 2. hujus. X H × X K [k] ::) D Bq. A Cq. atqui L X × X F + X H × X K [l] = F K
h 1 Not. × H F [f] = A Eq. ergo L X × X F + L H × H F + X H × X K =
k 11. 5. 2 A Eq. *Q. E. D.* Sin occursus H sit in asymptoto, erit F H × H L
l 2 Not. [f] = A Eq. [f] & M H × H R = D Eq. unde D E q. A Eq [n] :: M H ×
m 2. ax. 1. H R. F H × H L. & 2 F H × H L [m] = 2 A Eq.
n 7. 5.

Prop. XXV.

Fig. 219. Iisdem positis, sit linearum ipsis A C, B D æquidistantium occursus in una sectionum (D B) atque in puncto X, ut positum est: Dico rectangulum (O X N) contentum portionibus lineæ, quæ transversæ diametro (A C) æquidistat, majus esse, majus est quàm illud, ad quod rectangulum (R X M), ex portionibus lineæ æquidistantis rectæ diametro (D B), eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia transversæ diametri constituitur.

a 11. 2 hujus.
* 10. 2 hujus.
b supr. in præc. Nam D Eq [a] (id est P M × M H). E Aq* (L K × K S) :: [b] P X × X H.

XH. $SX \times XL$ [c] :: $RX \times XM$. $TX \times XK$ :: DEq. EAq; [d] atqui $OT \times TN = 2AEq$. [e] ideóque $OX \times XN$ [e] (hoc est $TX \times XK + OT \times TN$) $= TX \times XK + 2AEq$. *Q. E. D.*

Not. * $PX \times XH - PM \times MH = RX \times XM$. & [x] $SX \times XL - LK \times KS = TX \times XK$.

Not. $OX \times XN$ [z] $= TX \times XK + OT \times TN$.

c 19.5. Not. 1.
d 23. 2 hujus.
e 2. ax. 1.
f Not.
* vid. Not. ad 22 hujus.
x v. not. ad 24 h.
z v. not. ad 24 h.

Prop. XXVI.

Quòd si æquidistantium occursus ad punctum X sit in una sectionum A C, ut positum est; rectangulum (L X F), quod continetur portionibus lineæ æquidistantis transversæ diametro (A C), minus erit quàm illud, ad quod rectangulum (R X G), portionibus alterius lineæ contentum, eandem proportionem habet quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ, duplo quadrati ejus, quod à dimidia transversæ diametri constituitur. Fig. 220.

Nam (simili ratione) D Eq. [a] (hoc est $VG \times GS$, [b] vel $RS \times SG$). AEq :: $VX \times XS$. $KX \times XH$ [c] :: $RS \times SG + VX \times XS$. $AEq + KX \times XS$ [d] (hoc est) :: $RX \times XG$. $AEq + KX \times XH$. Atqui AEq [e] $= (LH \times HF =) KX \times XH - LX \times XF$. & [f] proinde $2AEq + LX \times XF = KX \times XH + AEq$.

Not. 1. * $RS \times SG + VX \times XS = RX \times XG$.
2. [g] $LH \times HF = KX \times XH - LX \times XF$.

a 11. 2 hujus.
b 8. 2. hujus.
c 12. 5.
d Not.
e 11. 2. huj.
f 2 ax. 1. huj.
* vid. Not. 2. ad 24. hujus.
g v. not. ad 22. hujus.

Prop. XXVII.

Si in Ellipsi vel circuli circumferentia ducantur conjugatæ diametri (A C, B D), quarum altera quidem (A C) sit recta, altera verò (BD) transversa: & ducantur duæ rectæ lineæ (K M, N H) diametris æquidistantes, quæ & sibi ipsis, & sectionibus occurrant: quadrata ex portionibus (N F, F H) lineæ æquidistantis transversæ diametro, quæ inter sectionem, & linearum occursum interjiciuntur, assumentia figuras ($KF \times Z$, & $FM \times Y$) ex portionibus (K F, F M) lineæ, quæ rectæ diametro æquidistat, inter linearum occursum (F), & sectionem interjectis, similes & similiter descriptas ei, quæ ad rectam diametrum constituitur, quadrato transversæ diametri æqualia erunt. Fig. 221.

Ducatur N X ad A E parallela. Sintque R, S recta latera pro dia-

metris

a 12. 6. metris B D, A C; [a]fiántque N X. V :: A C. S :: K L. X. Et propter
b 16. 5. R, A C, B D, S ÷÷ [b] erit R. B D [c] hoc eſt N Xq. D X × X B) :: A C.
c 21. 1. *hujus.* S [e] :: N X. V [f] :: N Xq. NX × V. Unde N X × V [g] = (D X × X B
e *conſtr.* [h] =) B Eq — X Eq (— N Gq). Simili diſcurſu K L × X = B Eq —
f 1. 6. F Gq. [k] ergo N X × V + K L × X + N G q + F G q = 2 B E q.
g 9. 5. [l]atqui 2 N Gq + 2 F Gq = H Fq + F Nq. & 2 N X × V + 2 K L
h 5. 2. × X (hoc eſt 2 F L × V + 2 K L × X) [m] = F M × Y + K F × Z. [n]er-
k 2. *ax.* 1. go H F q + F N q + F M × Y + K F × Z = 4 B E q [o] = B D q.
l 9. 2. *Q. E. D.*
m *ex.* 9. 2.
n 2 *ax.* 1.
o 4. 2.

Prop. XXVIII.

Fig. 222. Si in oppoſitis ſectionibus (A, B C, D), quas conjugatas appellamus, ducantur diametri conjugatæ (A C, B D), ut earum altera (AC) recta ſit, altera (B D) tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ (F K, L N) diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectionibus occurrant: Quadrata ex portionibus (L G, G N) lineæ æquidiſtantis rectæ diametro (A C), quæ inter linearum occurſum, & ſectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus (F G, G K) alterius lineæ, quæ tranſverſæ diametro (B D) æquidiſtant, inter ſectiones, & occurſum linearum interjectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

* 15. 5. Ordinatim applicentur F O, & L X. Eſtque A Fq. EBq :: * AC q.
a *cor.* 19. 6. BDq [a] :: R. BD :: FOq (EHq). DO × OB [b] :: CX × X A. LXq (EMq)
b 21. 1. *hujus.* [c] :: A Eq. C X × X A + E Hq. E B q + D O × O B + E M q
c 12. 5. [d] (hoc eſt) :: X Eq + E Hq. O Eq + E Mq. [e] (hoc eſt) :: L Mq.
d 6. 2. + G Mq. F Hq + G Hq [e] :: 2 L Mq + 2 G Mq. 2 F Hq + 2 GHq
e 15. 5. [f](hoc eſt) :: L Gq + GNq. FGq + GKq [g] :: ACq. BDq. *Q. E. D.*
f 9. 2.
g 11. 5.

Lemma pro ſeq.

Fig. 223. Sit linea recta compoſita *a + b + c + a.* Erit Quad. *a + b +* Quad. *c + a = bb + cc + 2 a × : b + c + a.* hoc eſt *aa + bb + 2 ba + cc + aa + 2 ca = bb + cc + 2 ba + 2 ca + 2 aa.*

Prop. XXIX.

Fig. 224. Iiſdem poſitis, ſi linea (L N) rectæ diametro æquidiſtans, ſecet aſymptotos; quadrata ex ipſius portionibus (X G, G O), quæ inter linearum occurſum, & aſymptotos interjiciuntur, aſſumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus (F G, G K,)

G K) lineæ (F K) quæ transversæ diametro æquidistat, inter occursum linearum, & sectiones interjectis, eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum, ad quadratum transversæ.

Nam ob L X [a] = O N, erit L Gq + G Nq [b] = X G q + G Oq + 2 L X × X N [c] (+ 2 A Eq). ergo X G q + G Oq + 2 A Eq (+ ½ A Cq). F Gq + G Kq [d] :: L Gq + G Nq. F Gq + G Kq [e] :: A Cq. B Dq. *Q. E. D.* a 16.2. *hujus.* b *lemm. præc.* c 10.2. *hujus.* d 7. 5. e 28. *hujus.*

Prop. XXX.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, C) producatur linea (A C); per occursum verò (D) ducatur linea (DL) æquidistans uni (F E), asymptoton (F E, FG), sectionémque & lineam tactus conjungentem secans, bifariam dividetur (in K). Fig. 225.

Jungatur F D B M; sitque F H = F B: ducantúrque B E, K N ad A C parallelæ. Estque D Nq. N Kq [a] :: (F Bq. B Eq [b] :: H B. R [c] ::) H N × N B. N Kq. [d] unde H N × N B = D N q. [e] item M F × F D = F Bq. Ergo D N q + M F × F D [f] = (H N × N B + F Bq. [g] =) F Nq ergo D N = N M. [h] quare D K = KL. *Q. E. D.* a 4. & 22. 6. b *cor.* 1. 2. *huj.* c 21. 1. *hujus.* d 9. 5. e 37. 1. *hujus.* f 2. *ax.* 1. g 6. 2. h *conv.* 6. 2. k 2. 6.

Coroll. F Bq. B Eq :: H N × N B. N Kq.

Prop. XXXI.

Si quæ oppositas sectiones contingunt duæ rectæ lineæ (A C, B C) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; per occursum verò (C) ducatur linea (C H) æquidistans asymptoto (EF); quæ sectionem, & lineam tactus conjungentem secet; linea (CH) inter occursum, & eam quæ tactus conjungit interjecta à sectione bifariam dividetur (in G). Fig. 226. *Not.* E *est centrum.*

Ducantur rectæ C E D, & tam E K M N & G X ad A B, quàm K F, G L ad C D parallelæ. Estque N L × L K. L Gq [a] :: (E Kq. KFq [b] ::) M Lq. L Gq. [c] unde N L × L K = M Lq. [d] quare M Lq + K Eq = (N L × L K + K Eq [e] = L Eq [f] =) G X q. ergo cùm G X q. M Lq + K E q :: X C q. L G q + K Fq; [h] erit X C q = (L Gq + K F q =) [f] (E Xq) [k] C E × E D. [l] ergo C X = X D; [m] adeóque C G = G H. a *cor. præc.* b 4. & 22. 6. c 9. 5. d 2. *ax.* 1. e 6. 2. f 34. 1. &c. h 14. 5. k 38. 1. *huj.* l *conv.* 5. 2. m 2. 6.

 Prop.

Prop. XXXII.

Fig. 227.

Si hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ (A F, C F) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A C) producatur linea (A C); per contingentium verò occursum (C) ducatur linea (F K) tactus conjungenti (A C) æquidistans; & per punctum (H), quod conjungentem tactus (A C) bifariam secat, ducatur linea (H K) æquidistans asymptoton alteri (D E): quæ (H K) inter dictum punctum (H), & lineam æquidistantem (F K) incerjicitur, à sectione bifariam dividetur (in L).

a *cor.* 30. *huj.*
b 4 & 22. 6.
c 9. 5.
d 37. 1. *hujus.*
e 2. *ax.* 1.
f 6. 2.
g *Not.*
h 2. 6.
k 1. 2.
l 2. *ax.* 1.
m *prius.*
n 2. 2.
o 3. *ax.* 1.
p *constr.*
q 3. 2.
r 1. *ax.* 1.
s 16. 6.
t 9. 5.
u *constr.*

Ducantur B E, L M ad A C parallelæ. Estque G M × M B. MLq. [a] :: (D B q. B Eq [b] ::) H M q M Lq. [c] unde G M × M B = H Mq. [d] Item H D × D F = D Bq. [e] ergo H Mq + H D × D F = (DBq + GM × MB [f] =) DMq. [g] ergo FM = MH. [h] & propterea KL = LH.

Not. Fiat D Z = M H. Estque M D × D F + M H × DF [k] = H D × D F. [l] ideóque (addendo utrique ipsum M H q) M D × D F + M H × D F + M H q = (H D × D F + M H q [m] = D Mq [n] =) M D × D F + M D × F M. ergo (ablato communi M D × D F) MD × F M [o] = M H × D F + M Hq [p] = D Z × D F + D Z q q = FZ × Z D [r] = M D × F M. [s] quare F Z. F M :: M D. Z D. & componendo Z M. F M :: Z M. Z D. unde F M [t] = (Z D [v] =) H M.

Prop. XXXIII.

Fig. 228.

Si, quæ oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (A G, D G), sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, D) linea (A D) producatur; per contingentium verò occursum (G) ducatur linea (C F) æquidistans tactus conjungenti (A D); & per punctum (L), quod conjungentem tactus (A D) bifariam secat, ducatur linea (L N) æquidistans asymptoton alteri (H K), conveniénsque cum sectione, & cum linea æquidistante (F C) per occursum (G) ducta: quæ (L N) inter dictum punctum (L) & lineam æquidistantem (F N) interjicitur, à sectione bifariam dividetur (in M).

a 4. & 22. 6.
b *cor.* 30. *huj.*
c 12. 5.
d 2. 6.
e 38. 1. *huj.*
f 34. 1. &c.
g 9. 5.
h *conv.* 5. 2.
k 2. 6.

Ducantur M P ad A D, & E K, M X ad G H parallelæ. Estque M Pq. P Lq [a] :: (H Eq. E Kq [b] :: E X × X B. X Mq [c] :: + H E q + E X × X B. E Kq + X Mq (hoc est) :: [d] H Xq (vel P Mq) [e] G H × H L + X Mq (vel) ::) [f] P Mq. G H × H L + H Pq. ergo P Lq [g] = G H × H L + H Pq. [h] quare L P = P G. & [k] consequenter L M = M N.

Prop. XXXIV.

Si in una (D C) aſymptoton (D C, D E) hpperbolæ, ſumatur aliquod punctum (C); ab eóque recta linea (C E) ſectionem contingat; & per tactum (B) ducatur æquidiſtans (F G) aſymptoto (D C); quæ (C G) per dictum punctum (C) tranſit, alteri (D E) aſymptoton æquidiſtans, à ſectione bifariam dividetur (in A.) Fig. 229.

Ducantur AH ad CD, & BK ad DE parallelæ; éſtque $CB^2 =$ BE; [b] ideóque CK = KD. Item KB × KD [c] = CA × CD, [d] hoc eſt CG × CK = CA × CD. [e] quare CG. CA :: (CD. CK [f]::) 2. 1. *Q. E. D.*

a 3. 2 *hujus.*
b 2, 6.
c 12. 2 *hujus.*
d *Sch.* 48. 1.
e 15. 6.
f *prius.*

Prop. XXXV.

Iiſdem poſitis, ſi à ſumpto puncto (C) ducatur recta linea (C F) ſectionem ſecans in duobus punctis (A, F); erit ut tota (F C) ad eam (C A), quæ extra ſumitur, ita inter ſeſe portiones (F L, L A) illius (F A), quæ intra ſectionem continetur. Fig. 230.

Ducantur C N X, K A V M, O P B R, Y F parallelæ ad D E; & A P S, T F R M X ad C D parallelæ. Eſtque $AC^2 =$ F G; ac idcirco T G [b]= (K A [c]=) D S. & C K [b]= (T F [c]=) D Y. unde D K [d]= C Y. Item rectang H K. rectang K N [e]:: (D K. K C [f]:: C Y. K C [g]:: E C. C A [g]:: M K. K A :: [e] rectang M D. rectang A D (hoc eſt) [h]::) rectang M D. rectang D B [k] (vel rectang O N) [l]:: rect. M D—rectang H K, rectang O N—rectang K N (hoc eſt) :: rect. M H. rectang K B :: [m]rectang M H. rect. A H (ob rectang K S [h]= rectang H O; & A B commune :: M V. V A [g]:: F L. L A [n]:: F C. C A. *Q. E. D.*

a 8. 2 *hujus.*
b 4. 6. & 14. 5.
c 34. 1.
d 2 *ax.* 1.
e 1. 6.
f 7. 5.
g 4. 6.
h 12. 2 *hujus.*
k 3. 2 *hujus.*
l 19. 5. (*et* 4. 6.
m 2 & 3. *ax.* 1.
n 11. 5.

Prop. XXXVI.

Iiſdem poſitis, ſi à puncto (G) ducta linea (H G) neque ſectionem in duobus punctis ſecet, neque æquidiſtans ſit aſymptoto (C E), ſed cum oppoſita ſectione conveniat (in A); erit ut tota (A K) ad lineam (K H), quæ inter ſectionem (H), & æquidiſtantem (K L) per tactum (B) interjicitur; ita quæ (A G) eſt inter oppoſitam ſectionem (A) & aſymptoton (C G) ad eam (G H), quæ inter aſymptoton (C G), & alteram ſectionem (H). Fig. 231.

Ducantur

a 1.6. b 4.6. c 7.5. d 16.2.*hujus.* e 12.6. f 12.2 *hujus.* g 3.2 *hujus.* & 4.6. h *Not.* & 7.5. k 11.5. l 12.2 *hujus.*

Ducantur H M, A N ad C G parallelæ; & B X, G P, R H S N parallelæ ad D E. Estque rectang N C. rectang C H [a]:: (N S. S H :: [b]A G. G H [c]:: D H. G H. (ob A D = [d]G H) [b]:: C S. S G [a] :: rect C R rectang R G [e] :: rectang N C + rectang C R. rectang C H [f](vel rectang L X [g] vel rectang B G) + rectang R G (hoc est) :: rectang. N L. rectang R X (hoc est [h]::) rectang N L. rectang L H :: [a]N R. R H :: [b]A K. K H :: [k] A G. G H. *Q. E. D.*

Not. Rectang R X = rectang L H. ob rectang X H [l] = rectang. M B. & commune rectang B H.

Prop. XXXVII.

Fig. 232. 233. 234.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam, vel sectiones oppositas, contingentes duæ rectæ lineæ (A C, B C) sibi ipsis occurrant, & per tactus (A, B) producatur linea (A B); a contingentium vero occursu (C) ducatur linea (C F) sectionem secans in duobus punctis (D, F); erit ut tota (F C) ad eam (C D) quæ extra sumitur ita portiones (F E, E D) inter sese, quæ à linea (A B) tactus conjungente fiunt.

Ducantur diametri C H, A K; & rectæ D P, F R ad A C parallelæ, & L F M, N D O parallelæ ad A B.

a 4. & 22.6. b 49 & 51.1. *huj. et* 2.*ax.*1 c 2. & 22.6. d 11.5. e 22.6.

Estque triang L M C. triang X O C :: [a] L Mq. X Oq [a]:: L Cq C Xq [a]:: F Cq. C Dq [a]:: F Mq. D Oq [a]:: triang F R M. triang D P O [a]:: triang L A K ([b]hoc est 4lat. L C R F). triang X A N ([b]hoc est 4lat. X C P D) [a]:: L Aq. A Xq [c]:: F Eq. E Dq [d]:: F Cq. C Dq. [e]quare F E. E D :: F C. C D. *Q. E. D.*

Coroll. L M. X O :: F E. E D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 235. 236.

Iisdem positis, Si per contingentium occursum (C) ducatur recta linea (C O) æquidistans tactus conjungenti (A B); & per punctum (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (F O) secans, & sectionem ipsam in duobus punctis (F, D), & lineam æquidistantem (C O) per occursum ductam: erit ut tota (F O) ad eam (O D), quæ extra sumitur inter sectionem, & lineam æquidistantem; ita portiones (F E, E D) inter sese, quæ à linea (A B) tactus conjungente efficiuntur.

a *cor. præc.* b 4.6. c 2.6. d 11.5.

Ducantur L F K M, D H G X N parallelæ ad A B; ac F R, G P ad F C parallelæ. Estque F E. E D [a] :: L M. X H [b]:: L C. C X [c]:: F O. O D [d] :: F E. E D. *Q. E. D.*

Prop. XXXIX.

Si, quæ oppoſitas ſectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (AD, BD) ſibi ipſis occurrant, & per tactus (A, B) linea (A B) producatur; à contingentium verò occurſu (D) ducta linea (E G) & utramque ſectionem (E, F) & lineam (A B) tactus conjungentem ſecet (in G): erit ut tota (E G) ad eam (F G), quæ extra ſumitur inter ſectionem & conjungentem tactus; ita portiones (E D, D F) inter ſeſe, quæ inter ſectiones (E, F), & contingentium occurſum (D) interjiciuntur. Fig. 237.

Per centrum C ducatur A C K; & fiant E H S K, F N M X O
ad A B parallelæ, ac E P F R ad A B parallelæ. Eſtque E H. H D [a]::
F M. M D & H D. H S [a]:: M D. M X. unde ex æquo E H. H S :: a 4. 6.
F M. M X. [b] quare E Hq. F Mq [c] (id eſt triang. E H P. triang b 16. 5. & 22. 6.
F M R) :: H Sq. M Xq [c] (hoc eſt triang D H S. D M X.) atqui tri-
ang E H P [d] = triang A S K + triang H D S. & triang F M R [d] = c 4. 6. & 22. 6.
triang. A X N + triang D M X. [e]quare triang H D S. triang DMX d 11. *hujus*.
([c]hoc eſt H Dq. D Mq [c] vel E Dq. D Fq) :: triang A S K. triang e 19. 5.
A X N [f]:: K Aq. A Nq. Eſt autem K A. A N :: E G. G F (Nam KA. f 22. 6.
A Q. [c]:: E G. G Q. & A Q. A N [c]:: G Q. G F; adeóque ex æ- g 11. 5.
quo K A. A N :: E G. G F). [g] ergo demum eſt E G. G F :: ED. DF.
Q. E. D.

Not. K A. A N :: E G. G F.

Prop. X L.

Iiſdem poſitis, ſi per contingentium occurſum (D) ducatur recta linea (F G) tactus conjungenti (A B) æquidiſtans; & à puncto (E), quod conjungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea (H L) ſecans utramque ſectionem (in H, K) & æquidiſtantem (F G in L) ei, quæ tactus conjungit: erit ut tota (H L) ad eam (L K), quæ extra ſumitur, inter æquidiſtantem, & ſectionem, ita portiones (H E, E K) inter ſeſe, quæ inter ſectiones, & conjungentem tactus interjiciuntur. Fig. 238.

Ducantur A C X T; & parallelæ H N M X, K O B ad A B; & a 11. *hujus*.
H R, K S ad A D. Eſtque triang H R N. [a] (triang X M A + tri- b 4 & 22. 6.
ang M N D). triang K S O [a] (triang A Y P + triang P O D) [b]:: [b] c 4. 6.
H Nq. K Oq :: M Aq. A Pq (nam H N. K O [c]:: H E. E K [d]:: X A. d 34. 1. & 7. 5.
A Y :: [c] M A. A P) [b]:: triang X M A. triang YAP [e]:: triang M N D.
triang e 19. 5.

f *Not.* triang P O D [b] :: M Nq . P Oq [b] :: N Dq . D Oq [f] :: H Lq. L Kq [g] ::
g *supra et* 11.5 H Eq. E Kq. [h] quare H L. L K :: H E. E K. *Q. E. D.*
h 22.6.
k 4.6.
l 34.7. & 7.5.

Not. N D. D O :: H L. L K. Nam N D. D O [k] :: (M D. D P [l] :: H V. V K [k] ::) H L. L K.

Prop. XLI.

Fig. 239. 240. Si parabolen contingentes tres rectæ lineæ (A E, C E, D F) inter se conveniant, in eandem proportionem secabuntur. (E D. D A :: C F. F E :: F B. B D).

a 29 2. *hujus.*
b 35. 1. *huj.*
c 5. 2. *hujus.*
d 4. 6.
e 4. 6.

Ducatur A C, quam bisecet E G. Si hæc per tactum B transit, parallela, & [a]erit diameter. & [b]E B = B G. & D F ad A C [c] parallela. [d] Unde E D = D A. & E F = F G. [e] & D B = B F, quare liquet propositum.

* 46. 1. *huj.*
f 35. 1. *huj.*
g 2. 6.
h 7. 5.
k 15. 5.
l *constr.*
m *priùs.*
n 2. 6.
o 4. 6.
p 15. 5.
q *priùs* & 4. 6.

Sin per aliud punctum H transeat; per H ducatur tangens K H L ad A C parallela, & diameter M B X (per B) ad E G * parallela; & ordinatim applicentur A O, C P (ab A, & C). Eritque M B [f] = B P, ideóque M F [g] = F C. & E L [g] = L C (ob E H [f] = H G). unde F C. L C [h] :: (M F. E L [k] :: M C. E C) X C. G C. item L C. C E :: (1. 2 ::) G C. [l] C A. ergo ex æquali F C. C E :: X C. C A. quare inversè dividendo F C. F E :: (C X. X A ::) E D. D A (nam K A. E A [m] :: 1. 2 :: B O. O N [n] :: D A. A N, & permutando K A. A D :: (E A. A N [o] ::) G A. A X. & E A. K A :: C A. G A. unde ex æquali E A. A D :: C A. A X. dividendóque E D. A D :: C X. X A).

Porro, C X. X A [o] :: C P. A O [p] :: $\frac{1}{2}$ C P. $\frac{1}{2}$ A O (hoc est) q :: B F. D B. ergo E D. A D :: B F. D B.

Prop. XLII.

Fig. 241. 242. 243. Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremo diametri (A B) ducantur lineæ (A C, B D) æquidistantes ei, quæ ordinatim applicata est; & ducatur alia quæpiam linea (C E) quomodocunque contingens; abscindet ex ipsis lineas (A C, B D) continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum (A B) constituitur.

a 16. 1. *huj.*

Per centrum F ducatur F G H ad A C vel B D parallela. In hac est [a]diameter (puta F G) ipsi A B conjugata. Item per tactum E ducatur E L ad A C parallela; & E M parallela ad A B. Estque K F. A F

AF[b] :: AF. FL. unde (in hyperbole) KF. AF. [c] (KF + AF. AF + b *cor.37.1.6.*
FL (hoc est) :: KA. AL. vel (in ellipsi) per conversam rationem, & c 12. 5.
permutando KF. AF (vel FB) :: KA. AL. [d] quare KB. (FB − d *inversè &*
KF. vel FB + KF) KF :: KL. (AL − KA vel AL + KA). KA. *conversè. vel*
[e] hoc est BD. FH :: LE. AC. unde BD × AC [f] = (FH × LE [g] = *componendo.*
FH × FM = [h] FGq [k] =) $\frac{1}{4}$ TR [l] = BD × AC. *Q. E. D.* e 4. 6.
f 16. 6.
g 34.1. h 38.1.*huj.* k *cor.def.ad* 16 1.*hujus.* l 1.*ax.*

Prop. XLIII.

Si hyperbolen contingat recta linea (CH), abscindet ex asymptotis (DC, DE) ad sectionis centrum (D) lineas (DC, DH) continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis (DF, DG) abscissis ab altera contingente (FG), ad sectionis verticem (B), qui est ad axem (BD). Fig. 244.

Ducantur AK, BL ad DG; & AM, BN ad CD parallelæ. a 3. 2 *hujus.*
Estque CH [a] = 2AH; & ideò CD [b] = 2AM. & DH [b] = 2AK. b 4. 6.
unde CD × DH [c] = (4AK × AM [d] =) 4BL × BN. Simili dis- c *Sch.*48.1.
cursu 4BL × BN = FD × DG. [e] unde CD × DH = FD × DG. d 12. 2 *hujus.*
Q.E.D. e 1. *ax.* 1.

Non aliter argumentabimur, etsi DB non sit axis, sed alia quæpiam diameter.

Prop. XLIV.

Si quæ hyperbolen, vel oppositas sectiones contingunt, duæ rectæ lineæ (CF, EG) occurrant asymptotis (DC, DE); quæ (CE, GF) ad occursus ducuntur, lineæ (AB) tactus (A, B) conjungenti æquidistantes erunt. Fig. 245. 246.

Nam ob CD × DF [a] = ED × DG, [b] erit CD. ED :: DG. DF. a 43.*hujus.*
[c] quare CE, GF parallelæ sunt. ergo HG. GE :: HF. FC. item b 15. 6.
GE. GB :: [d] 2. 1 :: FC. CA. ergo ex æquo HG. GB :: HF. FA. c 6. 6. *&c.*
inverséque GB. HG :: FA. HF. & divisè HB. HG :: HA. HF. d 3. 2. *hujus.*
[c] quare GF, & AB parallelæ sunt. *Q. E. D.*

Prop. XLV.

Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus, ab extremo axis (AB) lineæ (AC, BD) ad rectos angulos ducantur, & quartæ parti figuræ æquale rectangulum (AFB, AGB) comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidem, & sectionibus oppositis excedat figurâ quadratâ, in ellipsi ve- Fig. 247. 248.

rò deficiat; & ducatur linea (E C) ſectionem contingens, occurrénſque eis (A C, B D) quæ ſunt ad rectos angulos; lineæ (C F, D G), quæ ab occurſibus (C, D) ducuntur ad puncta (F, G) ex eo comparatione factâ, angulos rectos (C F D, D G C) ad ea (F, G) efficient.

a 42. *hujus.* b *hyp.* c 15. 6. d 6. 6. e 32. 1. f 2 *cor.* 13. 1.

Nam A C × B D [a] = ($\frac{1}{4}$ TR [b] =) A F × F B. unde A C. A F [c] :: F B. B D. item anguli C A F, F B D [b] recti ſunt. [d] ergo ang. A C F = ang B F D. [d] & ang. A F C = ang. F D B. ergò cùm anguli A C F, A F C [e] conficiant unum rectum, etiam anguli B F D, A F C uni recto æquabuntur. unde (in ellipſi) reliquus D F C [f] rectus erit. Simili diſcurſu angulus C G D rectus oſtendetur.

Prop. XLVI.

Fig. 249. 250.

Iiſdem poſitis, lineæ conjunctæ æquales facient angulos (A C F, D C G, & C D F, B D G) ad contingentes (C D, B D).

a *præc. et* 31. 3. b 21. 3. c *in præced.*

Circulus enim diametro D C deſcriptus [a] per puncta F, G tranſibit. unde ang. D C G [b] angulo D F G, [c] hoc eſt angulo A C F, æquatur. Similiter ang. C D F = ang. B D G. *Q. E. D.*

Prop. XLVII.

Fig. 251. 252.

Iiſdem poſitis, linea (H E) ab occurſu (H) conjunctarum (C G, F D) perpendicularis eſt ad contingentem (C D).

a 46. *hujus.* b 15. 1. c *hyp.* d 4. 6. e 45. *hujus.* f 4. 6. g 36. 1. *huj.* h 2. & 4. 6. k 9. 5. l 9. *ax.* 1.

Si negas, eſtò H L ad E C perpendicularis; & ordinatim applicetur E M (ad B D parallela). Atque ob ang. G D B [a] = (ang. C D F [b] =) ang. L D H. & [c] rectos D B G, D L H, erunt trigona G D B, D H L ſimilia. quare B D. D L [d] :: (G D. D H [d] :: F C. C H (ob ſimilia trigona G D H, F C H; nam anguli [e] C F H, D G H recti ſunt, & qui ad H æquales, vel communes) :: [d] A C. C L. (ob ſimilia trigona C A F. C L H); nam & hìc ang. A C F [a] = ang. L C H. & anguli F A C, C L H [c] recti ſunt). ergo permutando D L. C L :: (B D. A C [f] :: B K. A K [g] :: B M. A M [h] ::) D E. E C. ergo inverſè C L. D L :: E C. D E. & diviſè C D. D L :: C D. D E. quare D L [k] = D E. [l] *Q. E. A.* Ergo H E potiùs eſt perpendicularis ad E C. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XLVIII.

Iisdem positis, ostendendum est lineas (E F, E G), quæ à tactu ducuntur ad puncta (F, G) ex comparatione facta, æquales continere angulos (C E F, G E D) ad contingentem (C D). Fig. 253. 254.

Circulus enim diametro D H descriptus [a] transit per puncta E G [b](ob angulos D G H, DEH rectos) unde ang. D E G [c]= (ang DHG [d]=ang. C H F [c]=) ang. C E F.
Not. In hyperbole anguli D H G, C HF sunt idem angulus.

a 31.3.
b 45. et 47. h.
c 21.3.
d 15.1.

Prop. XLIX.

Iisdem positis, si à punctorum aliquo (G) ad contingentem (C D) agatur perpendicularis (G H); quæ à facto puncto (H) ducuntur ad axis extrema (A, B) angulos rectos (A H B) continebunt. Fig. 255. 256.

Nam (ob angulos D B G, D H G [a] rectos) circulus super diametro D G descriptus [b] transit per puncta B, H. unde ang. G H B [c] = ang. B D G [d]= ang A G C [e]= ang A H C [f]= ang G H B. ergo (addito communi angulo B H C, vel A H G) [g] erit ang. A H B=ang. C H G [h]= rect. *Q. E. D.*

Not. ang. A G C=ang. A H C. Nam (ob [h]rectos angulos CAG, CHG) circulus, diametro C G descriptus, [b]per puncta A, H transibit, in quo anguli A G C, A H C eidem arcui A C insistent, & proinde [c]æquales erunt.

a hyp.
b 31.3.
c 21.3.
d 45. hujus.
e Not.
f 1. ax. 1.
g 2 ax. 1.
h hyp.

Prop. L.

Iisdem positis, si à sectionis centro (H) ducatur linea (H L) contingenti occurrens, æquidistánsque lineæ (F E) per tactum (E) & per unum (F) punctorum ductæ; erit (H L) æqualis dimidio (H B) axis (A B). Fig. 257. 258.

Jungantur EG, AL, LG, LB, ducatúrq; GM ad EF parallela. Estque (ob FH [a]= HG) EN [b]= N G; ideóq; E L [b] = LM. Item (ob ang. DEG [c]= (ang C E F[d]=) ang E M G.) [e] Erit E G = G M. quare ang. G L E [f]= ang G L M. ergo G L ad E M est perpendicularis. [g] ergo ang A L B est rectus. [h] ergo circulus diametro A B descriptus transibit per L; & radius H L radio H A æquabitur. *Q. E. D.*

a hyp.
b 2. 6.
c 48. hujus.
d 29. 1.
e 6. 1.
f 8. 1.
g 49. hujus.
h 31. 3.

Prop. L I.

Fig. 259. Si in hyperbola, vel oppositis sectionibus ad axem (A B) comparetur rectangulum (A D B, A E B) æquale quartæ parti figuræ, excedénsque figura quadrata; & à punctis (D, E) ex comparatione factis ad quamlibet sectionem inclinentur rectæ lineæ (D F, E F); major (E F) minorem (D F) quantitate axis (A B) superabit.

a 29. 1.
b 48. *hujus.*
c 6. 1.
d 2. 6.
e 4. 6.
f 50. *hujus.*
g 1. *ax.* 1.

Recta F K H tangat sectionem in F, & per centrum C ducatur G C H ad F D parallela. Estque ang. K H G [a] = (ang K F D [b] =) ang G F H. unde G H [c] = (G F [d] =) G E (ob C D = C E). Item F D [e] = 2 G C. & C H [f] = C B (ideóque 2 C H = A B). [g] ergo E F (hoc est 2 G H) = (2 G C + 2 C H =) F D + A B. *Q. E. D.*

Prop. L I I.

Fig. 260. Si in ellipsi ad majorem axem (A B) ex utraque parte comparetur rectangulum (A C B, A D B) æquale quartæ parti figuræ, deficiénsq; figurâ quadratâ; & à punctis (C, D) ex comparatione factis ad sectionem inclinentur rectæ lineæ (C E, D E), ipsi axi (A B) æquales erunt.

a 48. *hujus.*
b 29. 1.
c 6. 1.
d 2. 6.
e *hyp.*
g 1. *ax.* 1.
h 4.
k 50. *hujus.*

Recta F E H tangat sectionem, & per centrum G ducatur G K H ad C E parallela. Estque ang H E K [a] = (ang F E C [b] =) ang E H G. unde K H [c] = (K E [d] =) K D (ob G C [e] = G D). [g] ergo C E [h] (2 G K) + E D (2 K H) = 2 G H. [k] = 2 A G [c] = A B [g] = C E + E D.

Prop. L I I I.

Fig. 261. 262. Si in hyperbola, vel ellipsi, vel circuli circumferentia, vel oppositis sectionibus ab extremo diametri (A C) ducantur lineæ (A D, C E) ordinatim applicatis æquidistantes; & à dictis terminis (A, C) ad idem sectionis punctum (B) ductæ lineæ (A B, C B) secent æquidistantes (A D, C E); rectangulum ex abscissis (A D, C E) factum, æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum (A C) constituitur.

a 4. 6.
b 23. 6.
c 21. 1. *huj.*
d 1. 6.
e 11. 5.
f 9. 5.

Ordinatim applicetur B F. Estque A F. F B [a] (hoc est A C. C E) + C F. F B [a] (hoc est A C. A D) [b] = A F × C F. F Bq [c] :: T. R. [d] :: Tq. (A Cq). T R [e] = A C. C E + A C. A D [b] = A Cq. C E × A D. [f] ergo C E × A D = T R. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. LIV.

Si coni sectionem, vel circuli circumferentiam contiugentes duæ rectæ lineæ (A D, C D) sibi ipsis occurrant; & per tactus (C, A) ducantur contingentibus æquidistantes (C G, A F); à tactibus verò ad idem sectionis punctum (H) ductæ lineæ (A H, C H) æquidistantes secent (in G, & F); rectangulum constans ex abscissis (A F, C G) ad quadratum lineæ (A C) tactus conjungentis, proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (E B) lineæ (D E) ab occursu (D) contingentium ad punctum (E) medium conjungentis tactus ductæ, quæ est intra sectionem ad quadratum reliquæ (B D), & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus (A D, C D) factum, ad quartam partem quadrati lineæ (AC) tactus conjungentis. Fig. 263.

Per H, B ducantur K H O X L, M B N ad A C parallelæ. Liquet M N sectionem [a] tangere, & fore M B [b] = B N & K O [b] = O L. (nam A E [c] = E C) item H O [d] = O X; [e] quare H K = X L. & [f] X K = L H. Hinc A Mq. M B × B N (M Bq) [g] :: A Kq. X K × K H (L H × K H). & permutando A Mq. A Kq :: M B × B N. L H × K H. [h] item N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. ergo ex æquali N C × A M. M B × B N :: L C × A K. L H × K H [l] = L C. L H [m] (F A. A C) + A K. K H. [m] (G C. A C) [l] = F A × G C. A Cq [n] :: N C × A M. M B × B N [o] = N C × A M. N D × D M [p] (E Bq. B Dq) + N D × D M. M B × B N [q] (C D × D A. A E × E C) [n] ergo F A × G C. A Cq = E Bq. B Dq + C D × D A. A E × E C. *Q. E. D.*

a 32. 1.
b ex. 4. 6.
c hyp.
d 46, & 47 1. hujus.
e 3. ax. 1.
f 2. ax. 1.
g 16. hujus.
h Not. 1.
l 23. 6.
m 4. 6.
n 11. 5.
o 5. def. 6.
p Not. 2.
q Not. 3.

Not. 1. N C × A M. A Mq :: L C × A K. A Kq. Nam (propter parallelas A C, K L, M N) est A M. A K [a] :: N C. L C. & permutando A M. N C :: A K. L C. [b] hoc est A Mq. A M × N C :: A Kq. A K × L C. & inversè.

a 2. 6.
b 1. 6.

Not. 2. N C × A M. N D × D M :: E Bq. B Dq. Nam A M × C N. N D × D M [c] = (A M. D M [d] (E B. B D) + C N. N D [d] (E B. B D) = E B. B D + E B. B D [d] =) E Bq. B Dq.

c 23. 6.
d 2. 6.

Not. 3. N D × D M. M B × B N :: C D × D A. A E × E C. Nam N D × D M. M B × B N [e] = (N D. B N [f] (hoc est C D. E C) + D M. M B [f] (hoc est D A. A E) = C D. E C + D A. A E [e] =) C D × D A. E C × A E.

e 23. 6.
f 4. 6.

Prop.

Prop. LV.

Fig. 264. Si quæ oppositas sectiones contingunt, rectæ lineæ (A G,DG) sibi ipsis occurrant; & per occursum (G) ducatur linea (C E) conjungenti tactus (A D) æquidistans; per tactus verò ducantur contingentibus æquidistantes (A M, D M); & à tactibus ad idem alterius sectionis punctum (F) ducantur lineæ (A F, F A), quæ secent æquidistantes (DM, A M), rectangulum constans ex abscissis (A H,D N) ad quadratum lineæ (A D) tactus conjungentis, eandem proportionem habebit, quam rectangulum ex contingentibus (AG, D G) factum ad quadratum lineæ (C G) ab occursu (G) ad sectionem ducta, quæ quidem (C G) conjungenti tactus (D A) æquidistet.

* Not. 1. Per F ducatur F L K B ad A D parallelâ Estique EGq. *(vel CGq)
a 20. hujus. G Dq [a] :: B L × L F *(vel K F × L F). L Dq. item G Dq. G D ×
b Not. 2. G A :: L Dq. L D × A K. ex æquali igitur C Gq. G D × G A :: K F
c 23. 6. × L F. L D × A K [c] = K F. A K [d] (A D. D N) + L F. L D [d] (AD.
d 4. 6. A H) = A D. D N + A D. A H [d] = A Dq. D N × A H. ac inversè G D × G A. C Gq :: D N × A H. A Dq. *Q. E. D.*

Not. 1. E G = C G. & L F = K B, vel K F = L B. Nam bi-
e 38. 2 hujus. sectâ A D in O, [e] erit G O recta diameter, cui conjugata quæ ad AD
f ex. 4. 6. parallela. ergo C G = G E, & B P = P F. [f] item K P = P L. [g] er-
g 3. ax. 1. go K B = LF &c.

Not. 2. G Dq. G D × G A :: L Dq. L D × A K. Nam propter
h 4. 6 & converse. parallelas A D, K L, erit G D. L D [h] :: GA. KA. & permutando G D. G A. [k] (hoc est G Dq. G D × GA) :: L D. K A [k] (hoc est) :: L Dq.
k 1. 6. L D × K A.

Prop. LVI.

Fig. 265. Si quæ unam oppositarum sectionum contingunt, rectæ lineæ (AE, B E) sibi ipsis occurrant; & per tactus (A, B) ducantur contingentibus æquidistantes (B N, A M); à tactibus verò ad idem alterius sectionis punctum (C) ducantur lineæ (A C,BC), quæ æquidistantes (B N, A M) secent (in N,M): rectangulum constans ex abscissis (BN, A M) ad quadratum lineæ (A B) tactus conjungentis proportionem habebit compositam ex proportione, quam habet quadratum portionis (L D) lineæ, ad punctum L medium conjungentis tactus (A B) ductæ, quæ est inter dictum punctum (L), & alteram sectionem (D) ad qua-

quadratum ejus (D E), quæ inter ſectionem (D), & occurſum (E) interjicitur; & ex proportione, quam habet rectangulum, ex contingentibus (AE, BE) factum ad quartam partem quadrati lineæ (A B) tactus conjungentis.

Ducantur C G K, D H F ad A B parallelæ. Eſtque B H q. H D q [a] Not. 1.
[a](H D × D F) [b] :: B Kq. P K × K C [a] (C G × K C). item F A × B H. [b] 18. *hujus.*
B Hq [c] :: G A × B K. B Kq. ergo ex æquali F A × B H. H D × D F [c] Not. 2.
:: G A × B K. C G × K C. atqui F A × B H. H D × D F [d] = F A × [d] 5. *def.* 6.
B H. H E × E F [e] (L Dq. D Eq) + H E × E F. H D × D F [f] (A E × [e] Not. 3.
E B. A L × L B). [g] ergo L Dq × D Eq + A E × E B. A L × L B = [f] Not. 4.
G A × B K. C G × K C [h] = B K. K C [k] (A M. A B) + G A. C G [g] 11. 5.
[k](NB. A B) = A M. A B + N B. A B [h] = A M × N B. A Bq [g] = [h] 23. 6.
L Dq. D Eq + A E × E B. A L × L B. *Q. E. D.* [k] 4. 6.

Not. 1. H D = D F. & P K = C G. Nam ob A L [l] = L B [l] *hyp.*
[m] eſt H D = D F. [m] & K X = X G. item X C [n] = X P. [o] ergo P K = [m] *ex.* 4. 6.
C G. [n] 47. 1. *huj.*

Not. 2. F A × B H. B Hq :: G A × B K. B Kq. Nam propter [o] 2. *ax.* 1.
parallelas B A, F H, G K, [p] erit F A. A G :: H B. B K. & permu- [p] *ex.* 2. *vel* 4. 8
tando F A. H B [q] (hoc eſt F A × H B. H Bq) :: A G. B K (hoc eſt [q] 1. 6.
A G × B K. B Kq).

Not. 3. F A × B H. H E × E F :: L Dq. D Eq. Nam F A × B H. [r] 23. 6.
H E × E F [r] = F A. E F [s] (L D. D E) + B H. H E [s] (L D. D E) [s] *ex.* 4. 6.
= L D. D E + L D. D E [r] = L Dq. D Eq.

Not. 4. H E × E F. H D × D F :: A E × E B. A L × L B. Nam [t] 23. 6.
H E × E F. H D × D F [t] = H E. H D [u] (E B. B L) + E F. D F [u] (E A. [u] 4. 6.
A L) = E B. B L + E A. A L [t] = E B × E A. B L × A L.

APOL-

APOLLONII CONICORUM LIB. IV.

Prop. I.

Fig. 266. SI in coni sectione, vel circuli circumferentia sumatur aliquod punctum (D) extrà; atque ab eo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D C); una quidem (D B) contingens, altera verò (DC) in duobus punctis (E, C) secans; & quam proportionem habet tota linea secans (C D) ad partem sui ipsius (D C), quæ extra sumitur, inter punctum (D) & sectionem interjecta; in eandem dividatur, quæ (C E) est intra, ita ut rectæ lineæ ejusdem rationis ad unum punctum conveniant (C D. D E :: C F. F E); quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum (D) extra sumptum, sectionem continget.

Est quasi conversa 37æ 3ii.

a 49. 2. huj. b 37. 3. hujus. c hyp. d 9. 5.

Ex D [a] ducatur tangens D A, & connectatur A B, secans D C in G. ergo C G . G E [b]:: (C D. D E [c] ::) C F. F E. ergo componendo C E. G E [d] :: C E. F E. ergo G E = F E. ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*

Caroll. B A secat D C in F.

Prop. II.

Hæc quidem communiter in omnibus sectionibus demonstrata sunt; at in sola hyperbola si linea D B sectionem contingat, & D C in punctis E, C secet, puncta verò E, C contineant tactum ad B, & punctum D sit extra angulum asymptotis comprehensum, similiter fiet de-

demonstratio. * Possumus enim à puncto D aliam ducere contingentem D A, & quæ reliquæ sunt ad demonstrationem, perficere. * 49. 2. huj.

Prop. III.

Iisdem existentibus puncta E, C punctum B non contineant, sitque punctum D intra angulum asymptotis comprehensum, poterimus à puncto D alteram contingentem ducere, quæ sit D A, & reliqua similiter demonstrare. Fig. 267.

Prop. IV.

Iisdem positis, si occursus E, C contineant tactum ad B; & punctum D sit in angulo (L X N), qui deinceps est angulo (K X N) asymptotis (K L, M N) comprehenso; linea quæ à tactu (B) ad divisionem (F) ducitur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur eandem sectionem continget. Fig. 268.

Ex D [a]ducatur DH tangens oppositam sectionem, & connectatur HB, secans C E in G. [b] ergo C G. G E :: (C D. D E [c] ::) C F. F E. & componendo C E. GE :: C E. F E. [d] ergo puncta G, F coincidunt. *Q.E.D.*
a 49. 2. huj.
b 37. 3. huj.
c hyp.
d 9. 5.

Coroll. H B secat D C in F.

Prop. V.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (X N) asymptoton; quæ à puncto B ad F ducitur, eidem asymptoto (X N) æquidistabit. Fig. 269.

Nam per B ductâ B G ad X N parallelâ, erit rursus C G. G E [a] :: (C D. D E [b] ::) C F. F E. ergo componendo, C E. G E :: C E. F E. [c] unde G, & F coincidunt.
a 35. 3. huj.
b hyp.
c 9. 5.

Prop. VI.

Si in hyperbola extra sumatur aliquod punctum (D), à quo ad sectionem ducantur duæ rectæ lineæ (D B, D F); altera quidem (D B) contingens, altera verò (D F) æquidistans uni asymptototon; & æquidistantis portio (E D) inter sectionem & punctum (D) interjecta, æqualis sit ei (E F), quæ intra sectionem continetur: linea, quæ à tactu (B) ducitur ad factum punctum (F), occurret sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad punctum extra sumptum (D) sectionem continget. Fig. 270.

a 49.2. hujus. b 30. 3. hujus. c hyp.

Ponatur D intra angulum asymptotis comprehensum; ex D [a] ducatur tangens D A, conjungatur B A, secans D F in G. ergo E G [b] = E D [c] = E F, quare puncta E, F coincidunt. *Q. E. D.*

Coroll. A B secat D E in F.

Prop. VII.

Fig. 271.

Iisdem positis, sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur. Dico etiam sic eadem evenire.

a 31. 3. huj. b hypoth.

Iterum, ex D ducatur tangens D H, & connectatur H B secans D F in G. ergo E G [a] = E D [b] = E F. ergo non differunt puncta F, G. *Q. E. D.*

Prop. VIII.

Fig. 272.

Iisdem positis, sit punctum D in asymptoton unâ (M N), & reliqua eadem fiant: dico lineam, quæ à tactu (B) ad extremam partem (F) sumptæ (D F) ducitur, æquidistantem esse asymptoto (M N), in qua est punctum D.

a 34. 3. huj. b hyp.

Nam ducatur B G ad M N parallela, ergo rursus E G [a] = (E D) [b] = E F. & puncta G, F coincidunt. *Q. E. D.*

Prop. IX.

Fig. 273.

Si ab eodem puncto (D) ducantur duæ rectæ lineæ (D E, D F), quarum utraque coni sectionem, vel circuli circumferentiam in duobus punctis secet; & quam proportionem habent totæ lineæ (E D, F D) ad portiones (D H, D G), quæ extra sumuntur, in eam dividantur, quæ sunt intra (E H, F G); ita ut partes ejudem rationis ad idem punctum conveniant (E D. D H :: E K. K H. & F D. D G :: F L. L G), quæ per divisiones (L, K) ducitur linea, sectioni in duobus punctis occurret; & quam ab occursu ad punctum (D) extra sumptum ducuntur, sectionem contingent.

a 49. 2. huj. b cor. 1. 4. h.

A puncto D [a] ducantur contingentes D A, D B; & conjungatur A B. hæc [b] secat D E in K; [b] & D F in L, unde liquet propositum.

Prop.

Prop. X.

Hæc quidem communiter in omnibus, at in sola hyperbola, si alia quidem eadem sint, unius autem rectæ lineæ occursus contineant occursus alterius; & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, eadem prorsus evenient, quæ dicta sunt, ut in secundo theoremate tradidimus.

Prop. XI.

Iisdem positis, si unius lineæ occursus occursus alterius non contineant, & punctum D sit intra angulum asymptotis comprehensum, & figura, & demonstratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

Prop. XII.

Iisdem positis, si unius lineæ (D F) occursus (F, G) alterius (D E) occursus (E, H) contineant; & sumptum punctum (D) sit in angulo (P R X) deinceps ei, qui asymptotis (P O, N X) comprehenditur; linea per divisiones (K L) ducta, si producatur, occurret oppositæ sectioni; & quæ ab occursibus ducuntur ad punctum D, oppositas sectiones contingent. Fig. 274.

Ex D ducantur contingentes D M, D S; & connectatur M S: hæc [a] secat ipsam D E in K, ipsámque D F in L. unde liquet propositum. a cor. 4. 4. huj.

Prop. XIII.

Iisdem positis, si punctum D sit in una asymptoton, & reliqua eadem existant; quæ per divisiones (K L) transit linea, asymptoto (OP) in qua est punctum, æquidistabit; & producta occurret sectioni; quæ verò ab occursu ad punctum (D) ducitur, sectionem continget. Fig. 275.

Itidem liquet ex 5 [a] hujus.

Prop. XIV.

Iisdem positis, si punctum D sit in una (P O) asymptoton; & linea quidem D E sectionem in duobus punctis secet; D G verò alteri asymptoto (N X) æquidistans, secet in uno tantùm, quod sit G; fiátq; ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ipsi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta K, L transit linea & asymptoto (O P) æquidistabit, Fig. 276.

 &

& sectioni occurret: quæ verò ab occursu (B) ducitur ad D, sectionem continget.

Nam ductâ contingente D B, & per tactum B ductâ ad asymptoton

a *cor.* 1. 4. *huj.* O P parallelâ; secabit hæc [a]ipsam D E in K, [b]ipsámque D G in L,

b *cor.* 6. 4. *huj.* unde liquet propositum.

Prop. XV.

Fig. 277. Si in sectionibus oppositis (A, B) inter duas sectiones sumatur aliquod punctum (D), & ab ipso duæ lineæ ducantur; altera quidem (DF) contingens unam oppositarum, altera verò (A B) utramque secans; & quam proportionem habet linea (A D) inter sectionem (A) quam non contingit, & punctum (D) interjecta ad lineam (D B), quæ est inter punctum & alteram sectionem (B), eandem habaet linea quædam (A C) major eâ (A B), quæ inter sectiones interjicitur, ad excessum ipsius (C B) in eadem recta, & ad eundem terminum (B) cum linea ejusdem rationis; quæ à termino (C) majoris lineæ (A C) ad tactum (F) ducitur, occurret sectioni, & quæ ab occursu ducitur ad sumptum punctum (D), sectionem continget.

a 49. 2 *huj.* Ex D [a]ducatur tangens altera D E; & connectatur F E. Hæc se-

b 36. 1 *huj.* cat A C in C; si negas, secet alibi in G. ergo erit A G.G B [b]:: (AD.

c *hypoth.* D B [c]::) A C. C B. & dividendo A B GB :: A B. C B. [d]unde GB

d 7. 5. = C B. ergo G, & C sunt idem punctum.

Prop. XVI.

Fig. 278. Iisdem positis sit punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppositæ sectioni; & quæ ab occursu ducitur ad D, eandem sectionem contingere.

Ducatur ex D tangens altera D E; & connectatur E F, secans A B

a 49. 2 *huj.* in G. ergo A G. G B [b]:: (A D. D B [c]::) A C. C B. unde dividen-

b 39. 3. *huj.* do A B. G B :: A B. C B. ergo G B [d] = C B. ergo puncta C, G co-

c *hyp.* incidunt. *Q. E. D.*

d 7. 5.

Prop. XVII.

Fig. 279. Iisdem positis sit punctum D in una asymptoton: dico lineam, quæ ab F ad C ducitur, asymptoto, in qua est punctum (D) æquidistare

Sit F G asymptoto parallela. ergo rursus A G. G B [a]:: (AD. DB [b]::) A C. C B. & dividendo A B. G B :: A B. C B. ergo G, & C sunt idem punctum. [c] *Q. E. D.*

a 36. 3 huj.
b hyp.
c ut in præc.

Prop. XVIII.

Si in sectionibus oppositis sumatur aliquod punctum (D) inter duas sectiones, & ab ipso ducantur duæ lineæ (A B, C H), utramque sectionem secantes; & quam proportionem habent interjectæ (A D, C D) inter unam sectionem, & punctum (D) ad eas, (D B, D H), quæ inter idem punctum (D) & alteram sectionem interjiciuntur, eandem habent lineæ (A K, C G) majores iis (A B, C H), quæ sunt inter sectiones oppositas, ad excessus ipsarum (K B, G H); quæ per terminos (K, G) majorum linearum transeunt, occurrent sectionibus; & quæ ab occursibus ad sumptum punctum (D) ducuntur, sectiones contingent. Ponatur D inter asymptotos. Fig. 280.

Per D [a]ducantur contingentes D E, D F, & connectatur E F; secat hæc [b] ipsam A B in K, [b]ipsamque C H in G. ergo liquet propositum.

a 49. 2 huj.
b 15. 4. huj.

Prop. XIX.

Sumatur punctum D in angulo deinceps ei, qui asymptotis continetur, ducantúrque rectæ lineæ (A B, C H) sectiones secantes, & ut dictum est dividantur (in K, G): dico eam, quæ per K G producitur, occurrere utrique sectionum, & quæ ab occursibus ducuntur ad D, sectiones contingere. Fig. 281

Rursus enim per D [a]ducantur contingentes D E, D F; [b]secabit juncta F E ipsam A B in K, ipsámque C H in G. unde constat propositum.

a 49. 2. huj.
b 16. 4. huj.

Prop. XX.

Si sumptum punctum (D) sit in una asymptoton, & reliqua eadem fiant; linea (KG), quæ transit per terminos (K, G) excessuum, asymptoto, in qua est punctum (D) æquidistabit; & quæ à puncto (D) ducitur ad occursum sectionis, & lineæ (K G) per terminos transeuntis, sectionem continget. Fig. 282.

Nam pariter [a] ductâ tangente D F, ducta per tactum F ad asymptoton parallela [b]secabit A B in K, & C H in G. ergo res constat.

a 49. 2 huj.
b 17. hujus.

Prop.

Prop. XXI.

Fig. 283. Sint rurſus oppoſitæ ſectiones A, B, ſitque punctum D in una aſymptoton, & linea quidem D B K in uno tantùm puncto occurrat ſectioni B, alteri aſymptoto æquidiſtans, linea verò C D H G utrique ſectioni occurrat; & ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ſit B K. Dico lineam, quæ per puncta K, G tranſit, occurrere ſectioni, aſymptotóque, in qua & punctum D, æquidiſtare; & quæ ab occurſu ad punctum D ducitur, ſectionem contingere.

a 6. 4. *hujus.* b 15. *hujus.* Ductâ enim tangente D F, & F G parallelâ aſymptoto (in qua D); ſecabit F G [a] ipſam D B in K, [b] ipſámque C H in G. unde conſtat.

Prop. XXII.

Fig. 284. Sint ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotique, & punctum D ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; linea verò C D H ſecet utraſque ſectiones, & D B alteri aſymptoto æquidiſtat; ſitque ut C D ad D H, ita C G ad G H, & ipſi D B æqualis ponatur D K: dico lineam quæ per puncta K, G tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectiones eaſdem contingere.

Itidem patet ut in 6ta, & 16ta hujus libri.

Prop. XXIII.

Fig. 285. Sint itidem oppoſitæ ſectiones A B; punctúmque D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; & linea quidem B D ſectionem B in uno puncto tantùm ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea verò D A ſimiliter ſecet ſectionem A, ſitque D B ipſi B G æqualis, & D A ipſi A K; dico lineam, quæ tranſit per K G occurrere ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad D ducuntur, ſectiones contingere.

Patet ut in ſexta.

Prop. XXIV.

Fig. 286. Coni ſectio (D A B C) coni ſectioni vel circuli circumferentiæ (E A B C) non occurrit, ita ut pars quidem eádem ſit, pars verò non communis.

Si

Si affirmas, in parte communi ABC sumatur punctum H utcunque, & connectatur A H; & huic parallela ducatur D C; ipsámque A H bisecet diameter B G F. Itaque (ob sectionem E B C) [a] erit E F = F C. & (propter sectionem D B C) D F [a] = F C. [b] proinde E F = D F. *Q. E. A.* a 46. & 47. 1. b 1 *ax.* (*huj.*

Prop. XXV.

Coni sectio coni sectionem, vel circuli circumferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non secat. Fig. 287.

Si fieri potest, secet quinque punctis A, B, C, D, E proximis: conjungantur rectæ A B, D C, quæ primò occurrant, (ut semper [a] fit in parabola & hyperbola) in L. [b] fiátque A L. L B :: A O. O B. [b] & DL. L C :: D P. P C. jungatúrque O P, sectionibus occurrens punctis R, H. [c] ergo ductæ L R, L H sectiones contingent: ducatur EL, sectionibus occurrens in M, G. erítque E N. N M ([d] :: E L. L M) [e] ⊏ (E L. L G [d] ::) E N. N G. [f] unde N M ⊐ NG. [g] *Q. E. A*

a 24. & 25. 2. *hujus.*
b 10. 6.
c 9. 4 *hujus.*
d 37. 3 *h.*
e 8. 9.
f 10. 5.
g 9 *ax.*

Sin parallelæ sint A B, D C (ut fieri potest in ellipsi & circulo), bisecentur ipsæ in O, & P; & connexa O P sectionibus occurrat in R, H. [h] quare R H est diameter, ad quam ordinatim applicantur A B, D C; eísque parallela E G (per E ducta). [k] unde erit utraque E G, E M bisecta in N. ac propterea N G = N M. *Q. E. A.* Fig. 288.

h 28. 1. *huj.*
k 10. *def.* 1. *h.*
l 9. *ax.*

Prop. XXVI.

Si dictarum linearum aliquæ in uno puncto (A) sese contingant, non occurrant sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 289.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis B, C, D proximè sitis; [a] ducatúrque tangens A L, occurrens ductæ B C in L; [b] fiat autem B L. C L :: B P. P C; & connexa A P sectionibus occurrat in H, & R. [c] ergo ductæ L H, L R contingent sectiones: itaque ducta D L, absurditatem incurremus, pariter ac in præcedenti. Sin B C, A L non conveniant, (in ellipsi nempe, & circulo) similiter consequetur absurdum.

a 49. 2. *huj.*
b 10. 6.
c 9 *hujus.*

Prop. XXVII.

Si prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis (A, B) sese contingant, in alio puncto sibi ipsis non occurrent. Fig. 290. 291. 292.

Occurrant, si fieri potest, in C; primò extra contactus.

Du-

Ducantur tangentes A L, B L, quæ si occurrant in L, ductâ C L,
a 27. 2 hujus. incurritur absurditas, ut in 25ma. Sin tangentes parallelæ sint, [a] erit
b 10. def. 1. b. quoque A B utriusque sectionis diameter, ac [b] idcirco N M [b] = (NC
c 9. ax. [b] =) N G. [c] *Q.E.A.*

Sin punctum C sit intra contactus, rursus ducantur tangentes A L,
d 29. 2. huj. B L, & connexa A B bisecetur in F, [d] eritque F L diameter; unde si ducatur C G M ad A B parallela, [b] erit utraque C G, C M bisecta in K; unde K G = K M. [c] *Q. E. A.*

Prop. XXVIII.

Fig. 293. Parabole (A G B) parabolen (A M B) non contingit, præterquam in uno puncto.

Si fieri potest, contingant se parabolæ punctis (A, B), à quibus ducantur tangentes A L, B L, concurrentes in L. junctámque A B bi-
a 29. 2 huj. secet recta L F. [a] hæc diameter erit utriusque sectionis; [b] unde L F
b 35. 1 huj. bisecta est in G, & M. [c] *Q. E. A.*
c 9. ax.

Prop. XXIX.

Fig. 293. Parabole (A G B) hyperbolen (A M B) non contingit in duobus punctis, extra ipsam cadens.

Tangat, si fieri potest, punctis A, B, à quibus ducantur tangentes
a 29. 2 huj. A L, B L; junctámque A B bisecet recta L F; [a] hæc utriusque secti-
b 37. 1. huj. onis erit diameter. Sit D centrum hyperbolæ; erítque F D. D M [b]::
c 19. 5. (D M. D L [c]::) F M. M L. quare, cùm F D ⊏ D M, [d] erit F M
d 14. 5. ⊏ M L. ergo F M ⊏ G L. atqui F G [e] = G L. ergo F M ⊏ F G.
e 35. 1. huj. [f] *Q. E. A.*
f 9. ax.

Prop. XXX.

Fig. 293. Parabola (A M B) ellipsim vel circuli circumferentiam (A G B) non contingit in duobus punctis (A, B) intra ipsam cadens.

a 37. 1 huj. Si affirmas, ducantur tangentes A L, B L. & rectam A B iterum
b 19. 5. bisecet diameter F G, in qua sit D centrum ellipsis, vel circuli. Estque
c 14. 5. L D. D G [a]:: (D G. D F [b]::) L G. G F. [c] ergo L G ⊏ G F. atqui F G
d 9. ax. = G L. quæ [d] repugnant.

Prop.

Prop. XXXI.

Hyperbole (A G B) hyperbolen (A M B), idem centrum (D) habens, in duobus punctis (A, B) non continget. Fig. 293.

Si dicas contingere, ducantur contingentes A L, B L; & juncta DL producatur: [a]bisecabit utique hæc tactus conjungentem A B, in F; éstque (propter hyperbolen A G B) DGq [b]$= FD \times DL$. & (ob hyperbolen A M B) DMq [b]$= FD \times DL$. [c] quare $DGq = DMq$. [d] *Q. E. A.*

a 30. 2. *huj.*
b 37. 1. *h.*
c 1. *ax.*
d 9. *ax.*

Prop. XXXII.

Si ellipsis (A M B) ellipsin, vel circuli circumferentiam, (A G B), habens idem centrum (D), in duobus punctis (A, B) contingat, linea (A B) conjungens tactus, per centrum (D) transibit. Fig. 294.

Nam ductis contingentibus A L, B L, siquidem A B per centrum [a]non transit, [b]hæ convenient, puta in L. erítque juncta L D [c] diameter utriusque sectionis; & proinde in una, DGq [d]$= DL \times LF$; in altera, DMq [d]$= DL \times LF$. [e] unde $DGq = DMq$. [f] *Q. E. A.*

a *hyp.*
b 27. 2 *huj.*
c *cor.* 51. 1. *h.*
d 37. 1 *huj.*
e 1. *ax.*
f 9. *ax.*

Prop. XXXIII.

Coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) coni sectioni, vel circuli circumferentiæ (A D B E C), quæ non ad easdem partes connexa habeat, ad plura puncta quàm duo non occurret. Fig. 295. 296.

Si fieri potest, occurrant tribus punctis A, B, C; liquétque rectas A B, C B continere angulum, ad partes in quibus sunt concava lineæ (A B C). paritérque eædem angulum continent ad partes, in quibus concava lineæ A D B E C. ergo lineæ A B C, A D B E C concava habent ad easdem partes, contra hypothesin.

Prop. XXXIV.

Si coni sectio, vel circuli circumferentia (ABF) occurrat uni (ACF) oppositarum sectionum in duobus punctis (A, F); & lineæ (A B F, A C F) quæ inter occursum interjiciuntur ad easdem partes concava habeant; producta linea (A B F) ad occursus, alteri (D) oppositarum sectionum non occurret. Fig. 297.

a 33. 2 huj. Nam recta A F sectioni D [a] non occurret, ergo nec sectio A B F.

Prop. XXXV.

Fig. 298. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) occurrat uni (A) oppositarum sectionum (A, B); non occurret ipsarum reliquæ (B) ad plura puncta, quàm duo (B, C).

Nam ut occurrat pluribus, repugnat 33æ hujus.

Prop. XXXVI.

Coni sectio, vel circuli circumferentia oppositis sectionibus ad plura puncta, quàm quatuor non occurret.

a 35. 4. huj. Etenim si uni occurrat, reliquæ ad plura puncta [a] non occurret, quàm duo.

Prop. XXXVII.

Fig. 299. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (C A D) unam oppositarum sectionum (A) concavâ sui parte contingat, alteri oppositarum (B) non occurret.

a 49. 2.
b cor. 32. 1. h.
c 33. 2. h.

Per contactum A [a] ducatur recta E F tangens, [b] utramque sectionem. [c] hæc sectioni B non occurret, ergo nec linea C A D.

Prop. XXXVIII.

Fig. 300. Si coni sectio, vel circuli circumferentia (A B C) utramque oppositarum sectionum (A, B) contingat in uno puncto (A & B); oppositis sectionibus in alio puncto non occurret.

a cor. 32. 1. h.
b 33. 2.

Ducantur rectæ A D, B E contingentes sectiones A, B; [a] hæ lineam A B C etiam contingunt. [b] ergo (inclusa his) linea A B C non occurret sectionibus A, B.

Prop. XXXIX.

Fig. 301. Si hyperbole (A B C) oppositarum sectionum uni (A B D) in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione sita, quæ ipsi (A B C) opponitur sectio (E), oppositarum alteri (F) non occurret.

Con-

Conjungatur A B; [a] hæc neutri ſectionum E, F occurret. ergo nec ipſæ E, F (quibus illa interjacet) ſibi occurrent. a 33. 2 *huj.*

Prop. XL.

Si hyperbole (A C B) utrique oppoſitarum ſectionum (A, B) occurrat; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret. Fig. 302.

Si fieri poteſt, occurrat ſectioni A punctis D, E. [a] ergo recta D E neutri ſectionum C, B occurret. Quare nec ipſæ ſectiones C, B convenient, contra hypotheſin. a 33. 2 *huj.*

Similiter, ſectio E non continget utramque A, B. Nam ducta tangens H E [a] neutri C, B occurret; ergo nec ipſæ, itidem contra hypoth.

Prop. X L I.

Si hyperbola (C A B D) utramque oppoſitarum ſectionum (A, B) duobus punctis (C, A; D, B) ſecet, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio (E F) nulli oppoſitarum (A, B) occurret. Fig. 303.

Sint K G L, M N G aſymptoti ſectionum A B, E F. liquet rectam C A [a] occurrere aſymptoto L G ad partes K, (non ad L); & rectam D B ad partes M, (non ad partes N,) [a] occurrere aſymptoto N G, a 8. 2 *huj.*
adeóque [b] angulum P H R continere angulum N G L, & propterea b 25. 2 *huj.*
ſectionem E F. Atqui C A [c] non occurrit ſectioni D B O, nec D B ſectioni C A X. ergo rectæ C A R, D B P ſectionibus C A X, & E F; ſectionibúſque D B O, & E F interjacent; & proinde ſectio E F neutri C A X, D B O occurret. *Q. E. D.* c 33. 2 *huj.*

Prop. X L I I.

Si hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis (A, B, C, D) ſecet, quæ ipſi opponitur ſectio (K), non occurret alteri oppoſitarum (E). Fig. 304.

Occurrat, ſi fieri poteſt, in K; junctæque A B, D C [a] conveniant a 25. 2 *huj.*
productæ in L; & [b] fiat A L. L B :: A P. P B. & D L. L C :: D R. b 10. 6.
R C. [c] ergo connexa P R ſectionibus occurret, [c] & quæ ab L ad occurſus ducuntur, ſectiones contingent; [d] eritque proinde (ob ſectionem c 9. *huj.*
A F D) F L. N L :: N K. K L; [d] & (propter ſectionem A M D) NF. d 36. 1. *huj.* & 16. 5.
F L :: N M. M L. [e] quare N K. K L :: N M. M L. *Q. E. A.* e 11. 5.

Prop. XLIII.

Fig. 305. Si hyperbole (ACB) oppositarum sectionum (A B,C) alteri (AB) in duobus punctis (A, B) occurrat, concava habens ad easdem partes; alteri verò (C) occurrat in uno puncto (C); quæ ipsi (A C B) opponitur sectio (D), nulli oppositarum (AB, C) occurret.

a 33.2 huj. Conjungantur (AC, BC; [a] hæ non occurrent sectioni D; &
b 34.4 huj. quoniam sectioni A B occurrunt, [b] non secabunt alibi sectionem C; ergo sectionem D continet sectio C; unde liquet propositum.

Prop. XLIV.

Fig. 306. Si hyperbole (AMBC) uni (ABC) oppositarum sectionum (A B C), D E F) occurrat in tribus punctis (A, B, C); quæ ipsi opponitur (D E K) alteri oppositarum (D E F) præterquam in uno puncto non occurret.

Si fieri potest, occurat punctis D, E; junganturque A B, D E;
a 36. 2 huj. sintque hæ primò parallelæ, & bisecentur rectâ G H; [a] eritque GH
b 48. 1 huj. sectionum diameter; ductâ igitur per C ipsi B A parallelâ C X, pro-
c 9. ax. ductáque H G ad N, [b]erit utraque C X, C O bisecta in N. [c] Q.E.A.
Fig. 307. Sin A B, D E conveniant in P, per C ducatur O C R ad A P parallela, & protrahatur D P R. Bisecentur autem A B, D E punctis H, G; per quæ ducantur diametri G S, H S; & rectæ I T, L T, M Y se-
a 5. 2 hujus. ctiones contingant; [a] unde I T ad D P, & [a]L T ad A P, [a] & M Y ad
b 19. 3. huj. O R (vel A P) erunt parallelæ. quare O R × R C. D R × R E [b]::
c 9. 5. (L Tq. T Iq [b] :: A P × P B. D P × P E [b] :: M Y q. Y Iq [b] ::) X R ×
d 9. ax. R C. D R × R E. [c] unde O R × R C = X R × R C. [d] Q. E. A.

Prop. XLV.

Fig. 308. Si hyperbole (ABD) unam (D) oppositarum sectionum (ABC, D) contingat, alteram verò (A B C) secet in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (C E) nulli oppositarum (A B C, D) occurret.

Occurrant, si fieri potest, in C; jungatúrque A B F, cui occurrat
a in 25.2 huj. tangens DF; [a] erit occursus F intra asymptotos sectionis ABD. ergo
c 33 huj. ducta CF cadit intra angulum B F D. atqui tangens D F [c] non occurrit sectioni A B C. ergo C F extra ang. B F D cadit, quæ repugnant.

Prop.

Prop. XLVI.

Si hyperbole (A G C) unam (A B C) oppoſitarum ſectionum (A B C, D) in uno puncto (A) contingat, & ſecet in duobus punctis (B, C), quæ ipſi opponitur ſectio (E) alteri oppoſitarum (D) non occurret. Fig. 309.

Si fieri poteſt, occurat in D; jungatúrque C B, cui occurrat tangens A F. [a] erit F intra aſymptotos: ducatur D F ſectiones ſecans in G, K. [b] ſitque C F. F B :: C L. L B; & connectatur A L M N. ergó ductæ F M, F N [c] ſectiones contingent; eritque [d] proinde X G. G F :: X D. DF (ob ſectionem A G M); & X K. K F :: X D. D F. (propter ſectionem A K N). [e] quare X G. G F :: XK. K F. *Q. E. A.*

a 25. 2.
b 10. 6.
c 1 *hujus.*
d 36. 1 *hujus.* & 16. 5.
e 11. 5.

Prop. XLVII.

Si hyperbole (D A C) unam (A B C) oppoſitarum ſectionum (A B C, E F G) contingens, in alio puncto (C) ſecet; quæ ipſi DAC opponitur ſectio (E F H) alteri oppoſitarum (E F G) non occurret præterquam in uno puncto. Fig. 310.

Occurrat punctis E, F; jungatúrque E F. Sitque primò E F tangenti A K parallela; ergo quæ biſecat ipſam E F, [a] diameter per A tranſit; ſit hæc A L; pérque C ducatur C B ad A K parallela; [b] biſecta eſt igitur utraque B C, D C in L. [c] *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 48. 1. *huj.*
c 9. *ax.*

Sin E F, A K conveniant (in K); ideóque E F, B C (in N); biſecet diameter A M ipſam E F, ſectiones ſecans punctis X, O; per quæ ducantur contingentes X P, O R, [d] rectæ E F, ac proinde invicem parallelæ; eritque D N × N C. E N × N F [e] :: (A Pq. P Xq [f] :: A Rq. R Oq [e] ::) B N × N C. E N × N F: [g] quare D N × N C = B N × N C. [h] *Q. E. A.* Fig. 311.

d 34. 2 *huj.*
e 19. 3 *huj.*
f 4. & 22. 6.
g 9. 5.
h 9. *ax.*

Prop. XLVIII.

Si hyperbole (A C) unam (A B) oppoſitarum ſectionum (A B, D E G) in uno puncto (A) contingat; quæ ipſi (A C) opponitur ſectio (D E F) oppoſitarum alteri (D E G) non occurret ad plura puncta, quàm duo. Fig. 312. 313.

Si fieri poteſt, occurrat quoque in H; ducatúrque A K utramque ſectionem A B, A C contingens, & conjungatur D E, quæ primò parallela ſit ipſi A K. Biſecetur D E in L, & connectatur A L: [a] eſt hæc oppoſitarum diameter: ductâque H X G F ad D E parallelâ, erit X G [b] = (X H [b] =) X F. *Q. E. A.*

a 34. 2 *huj.*
b 10 *def* 1 *h.*
c 9. *ax.*

Sin

Sin D E non sit ad A K parallela, occurrat ei in K, reliquisque peractis ut priùs, producta F H ipsi A K occurrat in R. quare G R × R H.
d 19.3. huj. R Aq [d]:: (D K × K E. A Kq ::) F R × R H. R Aq. [e] ideóque G R ×
e 9.5. R H = F R × R H. [e] *Q. E. A.*

Prop. XLIX.

Fig. 314. Si hyperbole (A B) utramque oppositarum sectionum (A, B) contingat, quæ ipsi opponitur sectio (E), nulli oppositarum (A, B) occurret.

Ducantur enim A D, B G, quæ contingant sectiones; [a] liquet has
a 25. 2. huj. intra asymptotos sectionis A B convenire. [b] ideóque asymptotis secti-
b 33. 2. huj. onis E non occurrere, sed eas continere, & multò magis sectionem E. Cùm igitur tangens A C [b] non occurrat sectioni B G, nec tangens B C [b] sectioni A D, neutri harum occurret sectio E. *Q. E. D.*

Prop. L.

Fig. 315. Si utraque oppositarum sectionum (A, D) in uno puncto (A & D) contingant, ad easdem partes concava habens, in alio puncto non occurrent.

a 47. 4. huj. Si fieri potest, sectiones D occurrant in E; ergo sectiones A [a] non
b 39. 2. huj. occurrent præterquam in uno puncto A. ducantur contingentes A H,
c 10. def. 1. b. D H, junctæque A D sit parallela E B C; & per H ducatur H K diameter secunda sectionum oppositarum; [a] bisecabit hæc ipsam A D in K, [c] ideóque utramque E B, E C in L. *Q. E. A.*

Prop. LI.

[Fig. 316. Si hyperbole (A C B) oppositarum sectionum unam (A D B) contingat in duobus punctis (A, B); quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (E) non occurret.

Si fieri potest, occurrat in E, ducantúrque sectionum contingentes A G, B G; & connectantur A B, E G, & producta E G sectionibus
a 36. 1. huj. occurrat in C, D, rectæque A B in H. Erit igitur H D. D G [a]::(H E.
b 14. 5. E G [a]::) H C. C G. ergo quum H D ⊐ H C, [b] erit D G ⊐ C G.
c 9 ax. [c] *Q. E. A.*

Prop.

Prop. LII.

Si hyperbole (A D) oppositarum sectionum unam (A) contingat (in A), convexa habens è regione sita; quæ ipsi opponitur sectio (F) oppositarum alteri (B) non occurret. Fig. 317.

Ducatur enim A C tangens sectiones; [a] hæc neutri sectionum B,F occurret; sed inter ipsas cadet; ergo nec ipsæ sectiones occurrent. *Q. E. D.* a 33. 2 *hujus.*

Prop. LIII.

Oppositæ sectiones (A B C D, E F) oppositas (A B, C D) non secant in pluribus punctis, quàm quatuor.

Nam quum sectiones convexa habent sibi obversa, si 1°, sectio A B C D * secet utramque A B, C D in quatuor punctis (A, B, C, D), [a] liquet E F neutri reliquarum A B, C D occurrere. *1. Fig. 318. a 41. *hujus.*

Sin 2dò, sectio A B C sectionem A B* secet in duobus punctis (A, B,) ipsásque C D in uno E; non occurret ergo E F [b] ipsi C D; nec ipsi A B præterquam uno puncto; (si enim duobus, [c] ergo ei opposita A B C non omnino occurret alteri C D, contra hypoth.) *2. Fig. 319. b 39. *hujus.* c. 41. *hujus.*

Sin 3°, Sectio A B C sectionem A B E secet punctis duobus A, B; [d] non occurret sectio E F sectioni D, nec sectioni A B E, præterquam duobus punctis. 3. Fig. 320. d 35. *hujus.*

Sin 4°, Sectio A B C D utramque A B, E F unico puncto secet, [e] nulli ipsarum occurret ipsa E F duobus punctis. 4. Fig. 321. e 40 *hujus.*

Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant; & 5°, altera alteram in quatuor punctis (A, B, C, D) secet, [f] sectio EF neutri A B, C D occurret. Sin 6°, Sectio A B C alteri occurrat tribus punctis, [g] ipsa E F alteri in uno tantum puncto occurret, idémque in reliquis. Nullo igitur modo oppositæ sectiones oppositis ad plura puncta convenient, quàm quatuor. 5. Fig. 322. 323. f 36. *hujus.* 6. Fig. 324. g 44. *hujus.*

Prop. LIV.

Si oppositæ sectiones (B C, E F) oppositas (A B, D) in uno puncto (B) contingant, non occurrent sibi ipsis ad alia puncta plura quàm duo. Fig. 325.

Habeant Sectiones convexa sibi invicem obversa, occurrátque primò Sectio B C ipsi D duobus punctis, C, D. [a] ergo Sectio E F neutri [a] AB, [b] C D occurret. a 39. *hujus.* b 52 *hujus.*

Sin 2ò, Sectio B C secet ipsam D semel in C, [c] ergo E F sectioni D, nusquam occurret, nec ipsi A B nisi in uno puncto (si enim duobus, [d] non Fig. 326. c 52 *hujus.*

d 39 hujus. [d] non occurret BC ipsi D) contra hypothesin).

Fig. 327. Sin 3ò, Sectio BC non occurrat sectioni D, [e] nec EF ipsi D occurret, [f] ipsique AB occurret duobus tantùm punctis.

e 52 hujus. f 35. hujus. Sin Sectiones ad easdem partes concava habeant, similis erit discursus; constabítque omninò propositum.

Prop. LV.

Fig. 328. Si Sectiones oppositæ (AB, CD) oppositas (AC, EF) contingant in duobus punctis, in alio puncto sibi ipsis non occurrent.

a 49. hujus. Contingant primò in AC. [a] ergo Sectio EF nulli ipsarum occurret.

b 51. hujus. Fig. 329. Secundò, contingant in A, B; [b] itaque rursus CD non occurret ipsi EF.

Fig. 330. c 52. hujus. Tertiò, contingat Sectio AC ipsam AB in A, & Sectio D ipsam EF in F. [c] ergo nec Sectio EF Sectioni AB, nec Sectio CA ipsi DF occurret.

Fig. 331. d 50 hujus. Quartò, contingat AC ipsam AB in A, & EF ipsam D in E, habentes concava ad easdem partes, liquet ipsas neutiquam iu alio puncto occurrere: quare omnino constat propositum.

LAUS DEO.

THEODOSII
SPHÆRICA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè

DEMONSTRATA.

Per *ISAACUM BARROW*,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*, in vico **Little-Britain.** 1675.

De THEODOSIO, ex VOSSIO de Scientiis Mathematicis:

In temporibus Ciceronis ac Pompeii claruit Theodosius Tripolites qui partem Geometriæ de figura Sphærica libris tribus utilissimis egregiè excoluit.

EOs Græcè edidit Latinèque vertit ac Lutetiæ Wechelii *typis mandavit* Joannes Pena *Mathematicus Regius. Compluria ex eo* Ptolomæus *hausit* & Ptolemæo *recentiores*, Pappus, Proclus, Theon, *multa item; sed, dissimulato* Theodosii *nomine; exscripsit* Vitellio, *ob quæ tamen maximè fuit admirationi.* Arabes *etiam in Linguam suam transtulerunt. Ex Arabico verò Latinè versus fuit à* Platone Tiburtino, *ut auctor est, qui de Speculis ustoriis scripsit. Eaque interpretatio* Venetiis *excusa, ante annos jam* 155 *eo nempe à quo & Almansoris Judicia ex Arabico Latine versa sunt. Sed immane quantum interest inter genuinum* Theodosium *& Arabicè loquentem, usque adeò ut ob tam multa addita alius videri possit, quæ res compulit* Joannem Penam *regium apud Parisienses Mathematicum, ut, non contentus Græcè edere, quod per se magnam laudem merebatur, ex Græco etiam optima fide faceret Latinum Parisiis editus* 1558, *& post eum* Christophorus Clavius, Herigonius, *& nuperrime* Guarini *in* Euclide *adaucto, &* Claudius Millet *de Chales in cursu Mathematico hoc opus illustrarunt. Quanquam*

autem

autem Theodosius *hic* Tripolites *inscribatur, eóque nomine à* Suida *etiam memoretur: non dubium tamen quin idem sit ac* Bithynus *ille* Theodosius, *professione philosophus; quem Mathematicis disciplinis uti & filios ejus, præstitisse, ait* Strabo, *lib.* 12. *Ut* Pompeii *magni temporibus vixisse videatur. Nec obstat quod dicatur* Bithynus. *Nam fortasse ex* Bithynia, Tripolin *in* Africam *abiit, atque ibi sedem fixit. Quomodo* Hipparchus *eidem* Straboni *est* Bithynus; *qui* Ptolemæo, *& aliis, est* Rhodius. *Scripsit etiam* περὶ οἰκήσεων, de habitationibus, *cujus Argumenti* 12 *Propositiones dedit* Mersennius *in Synopsi Mathematica, pag.* 246, *& tribus sequentibus; & libros* 2, περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν, de diebus ac noctibus. *Quæ Græcè in Bibliotheca Regia* Lutetiæ, *adservantur, Latinè* Argentorati *edi curavit* Petrus Dasypodius, *anno* 1572.

THE-

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SPHÆRA est figura solida comprehensa una superficie, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ ductæ sunt inter se æquales.

Aliter in Elemento 11° definitur, à Semicirculi circumductu.

II

Centrum autem Sphæræ est ejusmodi punctum.

III.

Axis verò Sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque terminata in Sphæræ superficie, circa quam quiescentem circumvolvitur Sphæra.

IV.

Poli Sphæræ sunt extrema puncta ipsius axis.

V.

Polus Circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes sunt inter se æquales.

Ut si omnes rectæ P Z à puncto P ad circumferentiam circuli B Z A ductæ sint æquales, erit P polus circuli B Z A: & inversè si P sit polus, erunt omnes P Z æquales inter se. Fig. 1.

VI.

In Sphæra æqualiter distare à centro sphæræ circuli dicuntur, cùm perpendiculares quæ à centro sphæræ in ipsorum plano ducuntur, sunt æquales. Longiùs autem abesse ille dicitur, in cujus planum major perpendicularis cadit.

Prop. I. Theor.

Fig. 2. Si ſphærica ſuperficies (B A C) ſecetur aliquo plano (B C); linea (B G C F E), quæ fit in ſphæræ ſuperficie, eſt circumferentia circuli.

a 1. *def. hujus.* b *hyp.* c 15. *def.* 1. Fig. 3. d 12. 11. e 3. *def.* 11. f 47. 1. g 1. *def. huj.* h 1 *ax.* 1. & 3. *ax.* 1. k 15 *def.* 1.

Nam primò tranſeat planum per ſphæræ centrum D: [a] liquet igitur rectas quaſcunque (D E, D F &c.) à D ad lineam B G C F E, [b] hoc eſt è centro ſphæræ ad ejus ſuperficiem, eductas inter ſe æquari; [c] & proinde lineam B G C F E eſſe circuli circumferentiam.

Sin planum non tranſeat per centrum ſphæræ, ab eo (D) [d] ducatur D H plano B C perpendicularis; & ab H ad lineam B G C F E ducantur utcunque rectæ H E, H F, & connectantur D E, D F. Erítque (ob [e] ang. D H E, D H F rectos) D Hq + HEq [f] = (DEq [g] = D Fq =) D Hq + H Fq. [h] quare H E = H F. Eodem modo rectæ omnes ab H ad lineam B G C F E eductæ æquantur: [k] ergo linea B G C F E eſt circumferentia circuli. *Q. E. D.*

Coroll. Idem eſt ſphæræ centrum & circuli, qui fit plano per ſphæræ centrum trajecto.

Centrum circuli, qui fit plano non per centrum ſphæræ trajecto, eſt in perpendiculari à centro ſphæræ in planum demiſsâ.

Prop. II. Probl.

Fig. 4. Datæ ſphæræ (B A D C) centrum reperire.

a 1 *hujus.* b 1. 3. c 12. 11. d 11. 11. e 6. 11. f *cor.* 1 *huj.*

Data ſphæra ſecetur utcunque plano [a] facienti circulum B E D, [b] cujus centrum F; ab F [c] erigatur F A recta plano B D E, quæ ſphæræ occurrat punctis A, C; biſecetur A C in G: erit G centrum ſphæræ. Si negas, eſto H centrum ſphæræ, [d] à quo ducatur H I recta plano B D E: [e] éſtque H I ipſi G F parallela; & punctum I eſt centrum circuli B E D, ſed F ponebatur centrum: quæ repugnant.

Coroll. Si in ſphæra ſit circulus non per centrum ſphæræ tranſiens, ſphæræ centrum erit in rectâ è centro circuli ad ipſius planum perpendiculari.

Prop. III. Theor.

Fig. 5. Sphæra (A D B) planum (E F), à quo non ſecatur, non tangit in pluribus punctis uno.

a 1 *hujus.*

Tangat, ſi fieri poteſt, punctis A, B; & à ſphæræ centro C conjungantur C A, C B; planum per C A, C B [a] facit in ſphæra circulum A D B, A D B, in plano tangenti [b] rectam E A B F : [c] hæc circulum A D B secat, & proinde sphæram : ergo planum secat sphæram, non tangit, contra hypothesin. b 3. 11. c 2. 3.

Cor. Recta, quæ duo puncta in sphæræ superficie signata connectit, intra sphæram cadit.

Prop. IV. Theor.

Si sphæra (A C D E) tangat planum (A H K I L), quod eam non secet, recta linea (B A) ducta à sphæræ centro (B) ad contactum (A), perpendicularis erit ad planum (A H K I L). Fig. 6.

Nam per B A ducantur utcunque duo plana, quæ faciant in sphæra circulos A C D E, A F D G, in plano tangenti rectas H A I, K A L. Et quia sphæræ centrum B [a] est quoque centrum circulorum A C D E, A F D G, & rectæ H I, K L tangunt hos circulos ([b] quippe non secant), [c] erit B A utrique H I, K L perpendicularis ; ergo & plano per H I, K L ducto recta erit. *Q. E. D.* a *cor.* 1. *huj.* b *hyp.* c 18. 3. d 4. 11.

Prop. V. Theor.

Si sphæra (A B C D) tangat planum (E F), quod ipsam non secet, à contactu autem (C) excitetur recta linea (C A) ad angulos rectos ipsi plano (E F), in lineâ excitatâ (C A) erit sphæræ centrum. Fig. 7.

Si negas punctum G extra C A sit centrum, jungatur C G : [a] ergo C G plano E F recta est. [b] ergo C A eidem plano E F recta non est, contra hypothesin. a 4. *hujus.* b 13. 11.

Prop. VI. Theor.

Circulorum (A D, B C, E F), qui in sphæra sunt, maximi sunt, qui per sphæræ centrum (G) ducuntur (A D) ; aliorum verò (B C, E F) illi inter se æquales sunt, qui æqualiter à centro (G) distant ; qui verò longiùs à centro distant, minores sunt : & circuli in sphæra maximi per sphæræ centrum transeunt ; aliorum autem æquales à centro æqualiter distant, minores verò longiùs à centro distant. Fig. 8.

Ducantur G H recta circulo B C, & G I recta circulo E F ; & connectantur G D, G C, G E.

1. G C recto angulo GHC opposita [a] major est quàm C H ; hoc est radius circuli A D major est radio circuli B C : ergo circulus A D major est circulo B C. a 47. 1.

2 & 3. $GHq + HCq$ [a] $= (GCq = GEq)$ [a] $= GIq + IEq$: ergo si $GH = GI$, erit $HC = IE$; & proinde circulus BC æqualis circulo EF: sin $GH \sqsubset GI$, erit $HC \sqsupset IE$, & propterea circulus BC minor circulo EF.

4. Si circulus maximus AD per centrum non transeat, alius transeat, is ergo (ut modò ostensum est) circulo AD major erit, contra hyyothesin.

5. & 6. Ob $GHq + HCq = GIq + IEq$; si $HC = IE$, erit $GH = GI$: sin $HC \sqsupset IE$, erit $GH \sqsubset GI$.

Prop. VII. Theor.

Fig. 9. Si in sphæra (BAC) sit circulus (BFCG), à sphæræ autem centro (D) ad circuli centrum (E) connectatur recta linea (DE), connexa linea (DE) ad planum circuli (BFCG) recta erit.

Ducantur BC, GF diametri circuli BFCG, utcunque & connectantur DB, DC, DF, DG. Quoniam trigona DEB, DEC sibi mutuò æquilatera sunt (quippe $DB = DC$, $EB = EC$, & DE commune est) [a] erunt anguli DEB, DEC pares, & proinde recti.
a 8. 1. Simili discursu anguli DEF, DEG recti erunt. [b] ergo DE recta est
b 4. 11. plano BFCG. *Q. E. D.*

Prop. VIII. Theor.

Fig. 10. Si in sphæra (BADC) sit circulus (BGDH), & à sphæræ centro (E) ad circulum (BGDH) ducatur perpendicularis (EF), quæ ad utramque partem producatur, cadet ea in ipsius circuli polos (A, C).

Ducantur utcunque diametri BD, GH, & connectantur AB, AD,
a 3. *def.* 11. AH, AG. Quoniam radii FB, FD, FG, FH pares sunt, [a] & an-
b 4. 1. guli AFB, AFD, AFG, AFH recti, [b] erunt subtensæ AB, AD,
c 5. *def. huj.* AG, AH æquales. [c] ergo A est polus circuli BGDH. Similique argumento C ostendetur ejusdem polus. *Q. E. D.*

Prop. IX. Theor.

Fig. 10. Si sit in sphæra (BADC) circulus (BGDH) & ab altero (A) polorum ejus in ipsum ducatur perpendicularis recta linea (AFC), cadet hæc in circuli centrum (F), & inde producta cadet in reliquum polum ipsius circuli.

Nam

Nam per F ducantur rectæ B D, G H utcunque, & connectantur A B, A D, A G, A H. Et quoniam rectæ A B, A D, A G, A H [a] pares sunt, & anguli A F B, A F D, A F G, A F H [b] recti, [c] erunt rectæ F B, F D, F G, F H æquales. [d] ergo F est centrum circuli BGDH. [e] Item quia centrum sphæræ est in recta A F C, erit C ejusdem circuli alter polus. *Q. E. D.*

a 5. *def. huj.*
b 3. *def.* 11.
c 47. 1.
d 9. 3.
e 6. *hujus.*

Prop. X. Theor.

Si sit in sphæra circulus (B G D H); linea recta (A C) per ejus polos (A, C) ducta, ad circulum (B G D H) recta est, transitque per centrum circuli (F), & sphæræ (E). Fig. 11.

Fiat, ut in præcedenti, & connectantur rectæ C B, C D, C G, C H. Et quoniam trigona C A B, C A D, C A G, C A H sibi mutuò [a] æquilatera sunt, [b] erunt anguli C A B, C A D, C A G, C A H pares. [c] Ergo cùm rectæ F B, F D, F G, F H, tum anguli A F B, A F D, A F G, A F H æquantur. [d] quare A F recta est circulo B G D H, [e] & F est centrum ejus, & [f] proinde etiam centrum sphæræ est in A F. Quæ *E. D.*

a 5. *def huj.*
b 8. 1.
c 4. 1.
d 4. 11.
e 9. *hujus:*
f *cor.* 2. *huj.*

Schol. 1. Theor.

Si in sphæra sit circulus (B G D H), & ab altero (A) polorum ejus per sphæræ centrum (E) ducatur recta (A E F C) erit hæc ad circuli planum perpendicularis, & producta cadet in centrum ipsius, & in reliquum polum. Fig. 11.

Fiat, ut priùs, & connectantur E B, E D, E G, E H: & quia trigona A E B, A E D, A E G, A E H sibi mutuò æquilatera sunt, [a] erunt anguli E A B, E A D, E A G, E A H pares; [b] ergo cùm rectæ F B, F D, F G, F H, tum anguli A F B, A F D, A F G, A F H æquantur; [c] quare A F recta est circulo B G D H, [d] & F est centrum ejusdem, & C alter polus. *Q. E. D.*

a 8. 1.
b 4. 1.
c 4. 11.
d 9. *hujus.*

Schol. 2. Theor.

Si in sphæra sit circulus (B G D H), & à centro sphæræ (E) per centrum circuli (F) ducatur recta linea (A E F C), cadet hæc in utrumque polum circuli (B G D H).

Nam recta E F [a] perpendicularis est plano circuli B G D H. [b] ergo utrinque protracta cadet in polos circuli. *Q. E. D.*

a *hyp* & 7. *h.*
b 8. *huj.*

Corollarium ex his.

Quatuor puncta; centrum circuli, poli ejusdem, & centrum sphæræ in una recta exiſiunt, in diametro ſcilicet ſphæræ ad circuli planum rectâ.

Prop. XI. Theor.

Fig. 12. In ſphæra (A B C D) maximi circuli (A C, B D) ſe mutuò ſecant bifariam.

a 6. *hujus.* Commune enim centrum circulorum ([a] hoc eſt ſphæræ centrum)
b 3. 11. eſto G; erit hoc in communi ſectione [b] recta E F: ergo recta E F eſt diameter, utrumque circulum biſecans. *Q. E. D.*

Coroll. Interſectio duorum circulorum in ſphæra maximorum eſt diameter ſphæræ.

Prop. XII. Theor.

In ſphæra (A B C D) circuli (A C, B D), qui ſe mutuò biſecant, ſunt maximi

Communis circulorum ſectio E F biſecetur in G; erit G centrum commune circulorum (quoniam E F diameter), quin & ſphæræ: nam ex G erigatur G H perpendicularis circulo A C, & G B recta circulo B D; [a] eritque centrum ſphæræ in utraq; GH, GI; ergo in communi puncto G ergo cùm circuli A C, B D per centrum ſphæræ tranſeant, [b] erunt maximi circuli. *Q. E. D.*

a *cor.* 2. *huj.*
b 6. *huj.*

Prop. XIII. Theor.

Fig. 13. Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) circulum quempiam (B E D) ad rectos angulos ſecet, & bifariam ſecat eum, & per polos (A, C)

Ab F centro ſphæræ (ſeu circuli maximi A B C D) ducatur F G
a 38. 11. recta circulo B E D, [a] quæ communi circulorum ſectioni B D occur-
b *cor.* 1. *huj.* ret in G. [b] eritque G centrum circuli B E D; ergo B D eſt diame-
c 8. *hujus.* ter circuli B E D, ipſum biſecans; [c] & ipſius poli ſunt in F G protracta; ergo in circulo A B C D. *Q. E. D.*

Valet hæc Propoſitio, nec non 8, 9, 10 cum ipſarum Scholiis, etiam quando circulus B D maximus eſt, & tranſit per centrum ſphæræ.

Coroll. Hinc, ſi circulus maximus alterum non biſecet, neque per ejus polos tranſeat, is huic obliquus eſt.

Prop.

Prop. XIV. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) circulum non maximum (B E D) biſecat, ad angulos rectos eum ſecat, & per polos.

Biſecetur ſectio B D in G, & à ſphæræ centro F connectatur F G. Et quia B D [a] eſt diameter circuli B E D, erit G ejus centrum. [b] ergo F G recta eſt circulo B E D, & producta [c] cadet in ejuſdem polos; proinde poli ejus ſunt in circulo A B C D. Quæ *E. D.*

a *hyp.*
b *7 hujus.*
c *8 hujus.*

Prop. XV. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) eorum, qui in ſphæra ſunt, circulorum aliquem (B E D) ſecet per polos (A, C); ſecabit eum bifariam, & ad angulos rectos. Fig. 13.

Nam ducta recta A C [a] recta eſt circulo B E D, & per centra circulorum F, G tranſit. quare 1°, circulus A B C D [b] rectus eſt circulo B E D; & 2°, communis circulorum ſectio B D eſt diameter circuli B E D, ipſúmque biſecat. Quæ *E. D.*

a *10 huj.*
b *18. 11.*

Schol. 1. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) tranſeat per polos (A, C) alterius cujuſpiam maximi circuli (B D); tranſibit viciſſim hic (B D) per illius (A C) polos (B, D). Fig. 14.

Nam circulus A B C D circulum B D [a] perpendiculariter ſecat; ergo viciſſim circulus B D circulum A B C D ſecat perpendiculariter, [b] adeóque per polos ipſius. *Q. E. D.*

a *15 hujus.*
b *13 hujus.*

Schol. 2. Theor.

Si in ſphæra circulus (A B C D) circulum (B D) per polos (A, C) ſecet, circulus (A B C D) maximus eſt, & bifariam eum ſecat, & ad angulos rectos.

Nam recta A C [a] tranſit per centrum ſphæræ, [b] ergo circulus A B C D eſt maximus; [c] biſecátque circulum B D, eidémque rectus eſt. Quæ *E. D.*

a *10 hujus.*
b *6 hujus.*
c *15 hujus.*

Schol,

Schol. 3. Theor.

Vide fig. Prop. præc. Si in ſphæra circulus (A B C D) circulum (B D) bifariam, & ad rectos ſecet angulos, circulus (A B C D) maximus eſt, eúmque ſecat per polos.

Nam biſectâ communi circulorum ſectione B D in G, erit G centrum circuli B D: in plano circuli A B C D ducatur G A ad B D perpendicularis; [a] erit G A plano B D recta; [b] ergo G A tranſit per polos circuli B D. [c] ergo circulus A B C D per ipſius B D polos tranſit, maximúſque proinde exiſtit. Quæ *E. D.*

a 4. *def.* 11.
b *Sch.* 2. 10 *h.*
c *Sch.* 2. 15 *h.*

Schol. 4. Theor.

Si in ſphæra ſit circulus (B D), & à polorum ejus altero (A) cadens recta (A G), ipſius plano perpendicularis, æquetur ejus ſemidiametro, circulus (B D) maximus eſt.

Nam G [a] eſt centrum circuli B D, & centrum ſphæræ eſt in rectâ A G, & alter polus C in eâdem protractâ: ergo circulus per A C eſt maximus. Eſto is A B C D ſecans circulum B D punctis B, D: & connectatur G D. Cùm igitur angulus A G D [b] rectus ſit (quoniam A G plano B D ponitur recta) erit A G. G D :: G D. G C. atqui G D = A G. ergo G C = (G D =) A G. ergo cùm centrum ſphæræ ſit in A G, erit G centrum ſphæræ. [c] ergo circulus D B eſt maximus. *Q. E. D.*

a 9 *hujus.*
b 3 *def.* 11.
c 6 *hujus.*

Prop. XVI. Theor.

Fig. 15.

Si ſit in ſphæra maximus circulus (A B), recta linea (C B), ducta ab ejuſdem circuli polo (C) ad circumferentiam, æqualis eſt lateri quadrati inſcripti maximo circulo.

Nam demiſsâ C E rectâ circulo A B, [a] erit E centrum circuli A B, ipſiúſque ſphæræ; ([b]quare circulus A C B D eſt maximus), & anguli ad centrum E recti; ideóque ſinguli arcus C A, C B, A D, B D ſunt quadrantes: quare ſubtenſa C B eſt latus quadrati maximo circulo A C B D inſcripti. *Q. E. D.*

a 9 *hujus.*
b 6 *hujus.*

Schol.

Si in ſphæra ſit circulus (A B), & ab ejus polo (C) ad circumferentiam ducta recta (C B) æquetur lateri quadrati in eo deſcripti, circulus ipſe (A B) maximus eſt.

Du-

Ducatur C E recta circulo A B; [a]ergo E est centrum circuli AB; & C E [b] perpendicularis est radio E B. ergo C Eq + B Eq [c] = C Bq = 2B Eq. quare C E = B E. [d] ergo circulus A B est maximus. — a 9 hujus. b 3 def. 11. c 47. 1. d sch. 4. 15. h.

Prop. XVII. Theor.

Si in sphæra sit circulus (A B), à cujus polo (C) in ipsius circumferentiam ducta recta linea (C B) æquetur lateri quadrati inscripti maximo circulo (C A B D), ipse circulus (A B) maximus erit.

Circulus enim C A D B, transiens per E centrum sphæræ, & rectam C B, est maximus; cujus arcus C B est quadrans; eíque par C A etiam quadrans (ob rectam C A = C B); proinde sectio A B erit diameter circuli C A D B. eadémque A B diameter est circuli A B ([a]hunc enim bisecat;) ergo circulus A B est maximus. *Q.E.D.* — a 15 hujus.

Prop. XVIII. Probl.

Lineam rectam describere æqualem diametro (A C) circuli cujuslibet (A B C D) in sphæra dati. — Fig. 16. 17.

In peripheria circuli A B C D sume tria quælibet puncta A, B, D, junctísque rectis A B, A D, B D, [a] fac triangulum E F G triangulo A B D æquilaterum; & duc F H ad E F, & G H ad E G perpendiculares, concurrentes in H; & connectatur E H. Erit E H = A C. Ducatur C D: atque ob ang. E F H + ang E G H [b] = 2 rect. [c] erit ang F E G + ang F H G = 2 rect. [d] ergo quadrilaterum E F H G circulo inscribi potest; quare ang E H G [c] = (ang E F G [d] = ang A B D [e] =) ang A C D. item ang H G E [b] = (rect [c] =) ang CDA; & [b] latus E G = A D; [f] ergo E H = A C. *Q. E. F.* — a 22. 1. b const. c cor. 32. 1. d cor. 22. 3. c 27. 3. d 8. 1. e 3. 1. f 26. 1.

Scholium. Theor.

Linea recta (A E) à polo (A) cujusvis circuli (B C), in sphæra, ad sphæræ superficiem ducta, quæ sit æqualis lineæ rectæ (A B) ab eodem polo ad superficiem circuli (B C) ductæ, in circuli (B C) circumferentiam cadet. — Fig. 18. Not. hoc scholium prop. 19. subnectendum est.

Si negas; per A E ducatur circulus maximus A B E C, occurrens circulo B C punctis B, C; ergo ducta A B [a] = (A D [b] =) A E: [c] proinde arc. A B = arc. A E, contra 9. ax. 1. — a 5 def. huj. b hyp. c 28. 3.

Prop.

Prop. XIX. Probl.

Fig. 19. Deſcribere lineam rectam (E H) æqualem diametro (A C) datæ
20. ſphæræ.

In ſuperficie datæ ſphæræ ſume duo puncta A, B pro libitu tuo. Polo A intervallo A B deſcribatur circulus B Z D, cujus diametro
a 18. hujus. B D ᵃ fac æqualem F G; & ſuper F G fac triangulum F E G triangulo B A D æquilaterum; ipſiſque E F, E G duc perpendiculares F H, G H convenientes in H: erit ducta E H æqualis diametro ſphæræ.

Nam per A B, A C deſcribatur maximus circulus ſecans circulum B Z D in B, D; eritque ut in præcedenti E H = A C.

Prop. XX. Probl.

Fig. 21. Per duo data puncta (A, B) in ſphærica ſuperficie deſcribere circulum maximum.

Deſcribatur polo A, intervallo A G, latere quadrati maximo circulo inſcripti, circulus C D; & polo B, pari intervallo B G, deſcribatur circulus E F priori occurrens in G. Itaque circulus polo G intervallo G A tranſibit per B (quia G A = G B), eritque maximus
a 17. hujus. (ᵃquia G A æquatur lateri quadrati maximo circulo inſcripti). *Q. E. F.*

Si puncta A B opponantur ex diametro ſphæræ, liquet circulos quoſcunque per illa deſcriptos fore maximos.

Prop. XXI.

Fig. 22. Cujuſlibet circuli (A B) in ſphæra dati polum invenire.
23.

1. Sit primò datus circulus A B non maximus; ſume in ejus peripheria duo quælibet puncta C, D; biſeca verò arcum C A D in A, & arcum C B D in D; unde arc. A C B = arc. A D B; itaque ſi
a 14. hujus. per puncta A, B ducatur circulus maximus A E B F, ᵃ erit in hoc polus circuli A C B; quare biſecto arcu A E B in E, erit E polus circuli A C B. *Q. E. F.*

2. Sin datus circulus A B ſit maximus, biſeca ſemicirculum A G B in G; polóque A, ſpatio G A (vel G B) duc circulum A E B F, biſectóque arcu A F B in F, erit F polus circuli A C B D. *Q. E. F.*

Prop.

Schol. 1. Theor.

Si in ſuperficie ſphæræ acceptum fuerit aliquod punctum (A), & ab eo puncto ad circumferentiam circuli cujuſpiam (B C) in ſphæra dati, cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales (A D, A E, AF); acceptum punctum (A) polus eſt ipſius circuli (B C). Fig. 24.

Ex A ducatur A G recta circulo B C, & connectantur G D, GE, G F.

Ob angulos A G D, A G E, A G F rectos; & rectas A D, A E, A F pares, [a]erunt G D, G E, G F etiam pares; quare G eſt centrum circuli B C; atque inde A erit ejuſdem polus. *Q. E. D.* a 47. 1. b 8 *hujus.*

Schol. 2. Theor.

In ſphæra circuli (B F, C E), à quorum polis (A, D) rectæ (A F, D E) ad eorum circumferentias ductæ ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt: & circulorum æqualium (B F, C E) æquales ſunt rectæ (A F, D E) ab eorum polis (A, D) ad circumferentias ductæ. Fig. 25.

A ſphæræ centro G ducantur G A, G D; [a] hæ tranſeunt per circulorum centra H, I; connectantur H F, I E; & G F, G E. a 10 *hujus.*

1. *Hyp.* Ob A F = D E, [a]erit ang A G F = ang D G E; item ang G H F = rect. = ang G I E. & G F = G E, ergo G H = G I. [b] ergo circuli B F, C E æquantur. *Q.E.D.* a 27. 3. b 6 *hujus.*

2. *Hyp.* Quia circuli B F, C E pares ſunt, [b] erit G H = G I. item G F = G E, & H F = I E; [c] ergo ang A G H = ang D G E. [d] quare ſubtenſæ A F, D E pares ſunt. *Q. E. D.* c 8. 1. d 29. 3.

Prop. XXII. Theor.

Si in ſphæra recta linea (A B) per centrum (A) ducta rectam aliquam lineam (C D) non per centrum ductam biſecet, ad angulos rectos ipſam ſecabit. Quòd ſi ad angulos rectos eam ſecet, etiam biſecabit ipſam. Fig. 26.

Nam circuli per A B, C D deſcripti, [a] maximi ſcilicet, centrum erit A; ergo ſi B C = BD, [b]erit A B ad CD perpendicularis; & ſi A B ſit perpendicularis, [b]erit B C = B D. a 6 *hujus.* b 3. 3.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIO.

IN sphæra circuli se mutuò tangere ducuntur, cùm communis sectio planorum utrumque circulum tetigerit.

Prop. I. Theor.

Fig. 27. In sphæra paralleli circuli (B F, C E) circa eosdem polos sunt.

a 10. 1 *hujus*. b *conv*. 14. 11. c 8. 1 *hujus*.

Sint A, D poli circuli B F, quos connectat recta A D; [a] hæc recta est circulo B F, [b] ergo & circulo C E; [c] quare per polos circuli C E transit; ergo A, D sunt poli circuli C E. Unde liquet propositum.

Prop. II. Theor.

In sphæra circuli (B F, C E) qui sunt circa eosdem polos (A, D), sunt paralleli.

a 10. 1 *hujus*. b 14. 11.

Nam quia polos connectens recta A D utrique circulo B F, C E [a] recta est, [b] erunt paralleli isti circuli. *Q. E. D.*

Scholium. Theor.

Fig. 28. In sphæra non sunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

a 1. 2 *huj*. b 10. 1 *huj*. c 6. 1 *huj*.

Sint æquales duo circuli A B, E F, & paralleli: vis alterum C D hisce parem dari, & parallelum. Sint igitur [a] communes omnium poli G, H, quos connectat recta G H; [b] hæc per I centrum sphæræ transit, & parallelis circulis recta est; ergo ob circulos pares C D, E F, [c] erit I L = I M, contra 9. *ax.* 1.

Prop.

Prop. III. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B, A C) ſecent in eodem puncto (A) circumferentiam illius maximi circuli (A B C), in quo polos habent, ſe mutuò tangent illi circuli (A B, A C). Fig. 29.

Nam circulus A B C ad ambos A B, A C [a] rectus eſt, [b] quare communis horum ſectio (puta E D) circulo A B C recta eſt; ergo E D perpendicularis eſt rectis A B, A C (quæ communes ſunt ſectiones circuli A B C cum circulis A B, A C; & quæ diametri ſunt circulorum A B, A C). [d] ergo E D tangit circulos A B, A C, ergo hi ſe mutuò tangunt. *Q.E.D.*

a 15. 1. *huj.*
b 19. 11.
c 3. *def.* 11.
d 16. 3.
e *def.* 1. 2 *huj.*

Prop. IV. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B, C B) ſe mutuò tangant, maximus circulus (D E) per eorum polos (D, E) deſcriptus, per eorum contactum (B) tranſibit. Fig. 30.

Si non tranſit per B, tranſeat per F; circulus igitur G F polo D, intervallo D F (majori quàm D B) deſcriptus ſecabit circulum C B in F. atqui circuli G F, C F ſe mutuò [a] contingunt (quia circulus maximus D F E tranſit per utriuſque polos). Quæ repugnant.

a 3. 2. *hujus.*

Prop. V. Theor.

Si in ſphæra duo circuli (A B, C B) ſe mutuò tangant, maximus circulus (D B) deſcriptus per unius (A B) polos (D), & per amborum contactum (B); per reliqui quoque circuli (C B) polos (E) tranſibit. Fig. 31.

Tranſeat circulus maximus D E per polos D, E; [a] hic per contactum B tranſibit: puta alterum maximum D B F tranſire per D, B. ergo cùm uterque arcus D B [b] ſit ſemicirculus, & D ſit polus circuli A B, erit B alter ejuſdem polus, ſitus in ſuâ ipſius circumferentiâ. *Q.E.A.*

a 4. 2 *hujus.*
b 11. 1 *huj.*

Prop. VI. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B) circulorum in ſphærica ſuperficie deſcriptorum aliquem (A C) tangat, tanget & alterum ei æqualem, & parallelum. Fig. 32.

Sint D & E poli circuli A C, quos nectat recta D E. Per A, D, E ducatur circulus maximus A D B E. Item polo E, per B, ducatur circulus a 10. 1 hujus. b 14. 11. culus B F. Et quia D E utrique circulo A C, B F [a]recta est, [b]erunt hi paralleli. Item si ex semicirculis A D B, D B E dematur communis c sch.21. 1 h. arcus D B, manet arcus A D = arc. B E. Unde circulus A C [c] æqualis est circulo B F. Denique quia polus circuli A B est in circulo d 3. hujus. A D E, in quo itidem polus circuli B F; [d] tanget circulus A B circulum B F. Unde liquet propositum.

Coroll. Hinc liquet contactus A, B diametraliter opponi.

Prop. VII. Theor.

Fig. 32. Si sint in sphæra duo æquales, & paralleli circuli (A C, B F), maximus circulus (A B), qui eorum alterum (A C) tetigerit, reliquum quoque (B F) tanget.

a 6. 2. hujus. Nam si circulus A B non tangat ipsum B F, [a]tanget alterum saltem ipsi A C parem, & parallelum; ergo tanget tres circulos pares & b sch.2. 2 huj. parallelos. [b] *Q. E. A.*

Scholium. Theor.

Circuli (A C, B F) in sphæra paralleli, quos maximus aliquis circulus (A B) tangit, æquales inter se sunt.

a 1 hujus. b 4 hujus. c 3. ax. 1. d 2. sch. 21. 1. hujus. Per [a]communes parallelorum polos D, E, & polos circuli A B describatur maximus circulus A F B, [b] qui per tactus A B transibit. Et ob semicirculos A D B, D B E, [c]erit arcus A D = B E. [d] ergo circuli A C, B F æquantur.

Prop. VIII. Theor.

Fig. 33. Si in sphæra maximus circulus (A B) ad aliquem sphæræ circulum (C D) obliquus sit, tanget is duos circulos, æquales quidem inter se, parallelos autem prædicto circulo (C D), ad quem obliquus est.

Cape circuli C D polos E, F; pérque hos, & polos circuli A B describatur circulus E A B; item polo E per A, & polo F per B dea 3. 2 hujus. b 6. 2 hujus. c 2. 2 hujus. scribantur circuli A G, B H; [a] liquet circulum A B tangere circulos A G, B H; [b]hosque pares esse, & [c] parallelos circulo C D. *Q. E. F.*

Schol. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (AB) circulorum aliquem (A G) tangat, obliquus erit ad alios circulos (C D) parallelos ei, quem tangit.

Nam

Nam quia circulus A B [a]non transit per polos circuli A G (tangit enim circulum A G, non bisecat); non transibit per polos circuli C D, [b]ergo obliquus est circulo C D. *Q.E.D.* a 15.1 *hujus.* b 13. 1 *huj.*

Prop. IX. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B C D, E D F B) se mutuò secent, maximus circulus (A E C F) per eorum polos ductus, bisecabit segmenta (B A D, B C D, & B E D, B F D) ipsorum circulorum. Fig. 34.

Sint A C, E F sectiones circulorum A D C, E D F cum circulo A E C F, & B D sectio ipsorum A D C, E D F. Et quia circuli ADC, E D F circulo A E C [a]recti sunt; erit B D ([b]recta circulo A E C F, [c]adeóque) perpendicularis rectæ A C. Ergo cùm A C sit [d] diameter circuli A D C, [e] erit arc A B = arc A D, & arc C B = arc C D. Similì discursu arc E B = arc E D, & arc F B = arc F D. *Q.E.D.* a 15.1 *huj.* b 19.11. c 3.*def.* 11. d 15. 1 *huj.* e 28. 3.

Schol. 1. *Theor.*

Si in sphæra circuli (A B C D, E B F D) se mutuò secent; circulus alius (A E C F) eorum segmenta (A B D, C B D; & E B D, F B D) bisecans, transit per eorum polos, éstque maximus.

Nam ob A B + B C [a]= A D + D C; erunt arcus A B C, ADC semicirculi; ergo recta A C est diameter circuli A B C D; ergo cùm arcus A B, A D pares sint, erit recta B G D rectæ A C perpendicularis: & pari discursu recta B G D rectæ E F ostendetur perpendicularis; quare B G D [b]recta erit circulo A E C F per ipsas AC, E F ducto; [c]ergo ambo circuli A B C D, E B F D recti sunt circulo A E C F. [d] unde liquet circulum A E C F maximum fore, & per circulorum A B C D, E B F D polos transire. *Q. E. D.* a 2. *ax.* 1. b 4.11. c 18.11. d 3 *sch.* 15.1. *huj.*

Schol. 2. *Theor.*

Si in sphæra duo circuli (A B C D, E B F D) se mutuò secent, maximus circulus (A F C E) bisecans duo quæcunque illorum segmenta (B A D, B E D), habens tamen arcum (A F C E) inter illa segmenta positum semicirculo inæqualem) transit per polos ipsorum, duóque reliqua segmenta (B C D, B F D) bisecet. Fig. 35.

Dic alium circulum maximum A G E descriptum iri per polos circulorum B C D, B F D; [a] hic segmenta B A D, B F D bisecabit, & a 9. 2 *huj.*

proinde

proinde transibit per puncta A, E; unde arcus A F C E [b]erit semicirculus, contra hypothesin; ergo A F C E transit per polos circulo-
b 11. 1 *huj.* rum ABCD, EBFD; [a]adeóq; segmenta BCD, BFD bisecat. *Q.E.D.*

Prop. X. Theor.

Si sint in sphæra paralleli circuli (A B C D, E F G H), per quo-
Fig. 36. rum polos (I) describantur maximi circuli (A E I G C, B F I H D); parallelorum quidem circumferentiæ (A B, E F, & B C, F G &c.) inter maximos circulos interceptæ similes sunt; maximorum autem circulorum circumferentiæ (A E, B F, C G, D H) inter parallelos circulos interceptæ, sunt æquales.

Sint A C, B D sectiones circuli A B C D cum circulis A I C, B I D; & E G, F H sectiones circuli E F G H cum iisdem A I C, B I D,
a 15. 1 *hujus.* [a]erunt A C, B D diametri circuli A B C D, & E G, F H diametri circuli E F G H; ergo L & K sunt centra circulorum A B C D, EFGH.
b 16. 11. Item (ob circulorum A C B, E G H parallelismum) [b]erunt E G, A C,
c 10. 11. & F H, B D parallelæ; [c] quare ang E K F = ang A L B; ergo similes sunt arcus A B, E F: eâdémque ratione arcus B C, F G similes
* 5. *def.* 1 *huj.* ostendentur. Quinimò * subtensæ rectæ I A, I B, I C, I D, & [d] ideò
d 28. 3. arcus I A, I B, I C, I D æquantur; & pari modo arcus I E, I F, I G, I H æquantur; unde etiam reliqui arcus A E, B F, C G, D H pares sunt. *Q. E. D.*

Prop. X I. Theor.

Fig. 37. Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F)
38. æqualia circulorum segmenta (A G C, D H F) ad angulos rectos in-
39. sistant, à quibus sumantur æquales circumferentiæ (A G, D H), qua-
40. rum quælibet inchoata ab extremitate sui segmenti sit minor semisse
41. circumferentiæ integri segmenti; à punctis autem (G, H) æquales
42. circumferentias (A G, D H) terminantibus, ducantur æquales rectæ lineæ (G B, H E) ad circumferentias circulorum (A B C, D E F) primò positorum; ipsæ circulorum primò positorum circumferentiæ (A B, D E) interceptæ inter illas rectas lineas (G B, H E) & extremitates diametrorum (A C, D F) erunt æquales.

a 30. 11. Ducantur G I recta plano A B C, & H K recta plano D E F ([a]cadent hæ in rectas A C, D F); connectantúrque A G, B I; & D H,
b 27. 3. E K; & B L, E M (ad centra L M). Et propter arc. G C = arc. H F,
c 29. 3. [b]erit ang G A C = ang H D F. Item ang G I A *= rect. = ang
* 3. *def.* 11.
d 26. 1. H K D; & A G [c]= D H. [d] Ergo G I = H K, & A I = D K; unde

de I L = K M). Item G B [e] = H E, & anguli G I B, H K E * ſunt recti : [g] ergo I B [f] = K E : itaque trigona B I L, E K M ſibi mutuò æquilatera ſunt ; unde ang A L B = ang D M E. [h] ergo arcus A B, D E æquantur. *Q. E. D.* e *hyp.* f 47. 1. g 8. 1. h 26. 3.

Si perpendicularis à G, & H incidant in diametrorum extremitates (ut in 5, & 6 figuris) breviùs conficietur negotium ſic. Ob G A [k] = H D ; & G B [e] = H E, & angulos G A B, H D E rectos. Erit quoque A B [f] = D E. [l] Ergo arc. A B = arc. D E. *Q. E. D.* k *ſuprà.* l 28. 3.

Prop. XII. Theor.

Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F) erigantur circulorum æqualium ſegmenta (A G C, D H F) ; & ab ipſis ſegmentis æquales circumferentiæ (A G, D H) ad extremitates ſegmentorum deſumantur, minores dimidiis ipſorum partibus ; ab ipſis autem circulis æquales circumferentiæ (A B, D E) ſumantur ad eaſdem partes, quæ ſunt ad extremitates diametrorum : rectæ lineæ (G B, H E) ductæ à punctis in circumferentiis ſegmentorum ad puncta in circumferentiis circulorum, erunt æquales.

Fiat, ut in præcedenti ; & quoniam (ut iſtuc oſtenſum) I L = K M, & B L = E M, & arc A B = arc D E, [a] erit ang I L B = ang K M E. [b] ergo B I = E K : ſed & G I = H K ; & anguli G I B, H K E recti ſunt ; [b] ergo B G = E H. *Q. E. D.* a 27. 3.

In 5 & 6 Fig. ob arc A B = D E ; & ideo rectam A B = D E, & A G = D H ; & angulos G A B, H D E rectos, [b] erit G B = H E. *Q. E. D.* b 4. 1.

Prop. XIII.

Si in ſphæra ſunt paralleli circuli (A B, C D, F G H), & deſcribantur maximi circuli (A F K, B H K), qui unum quidem (A B) parallelorum tangant, reliquos verò (C D, F G H) ſecent ; circumferentiæ (A B, C D, F G ; & A B, L E, M H) parallelorum, interceptæ inter eos maximorum circulorum ſemicirculos (B N P, A F O ; & A M O, B H P), qui non concurrunt ſimiles erunt : maximorum verò circulorum circumferentiæ (A C, A L ; B D, B E ; & C F, L M ; D G, E H ; & A F, A M, B G, B H,) inter duos quoſcunque parallelos interceptæ, erunt æquales. Fig. 43.

* Fiant ſcilicet arc. K O = N A, & arc. K I = N B ; unde quum

NPK, & NOK sint semicirculi, erunt BNP, AFO semicirculi; & adeò reliqui AMO, BHP etiam semicirculi).

* 1. 2 hujus. Per parallelorum *polos I, & contactus A, B describantur circuli maximi QAIR, SBIT; estque arc CA [a] = arc AL, & arc DB [a] = arc BE; & arc CV [a] = arc VL; & arc DX [a] = arc XE.

a 5 & 9. 2 h. Porro, quum circulus QAIR circulo AFK, & circulus SBIT circulo BHK [b] recti sint; & arcus AI, BI minores quadrante (ob circulum ABRT non maximum); & arc AI = BI; erunt juxta 11 hujus arc AC, BE æquales. Ergo arcus AL, AC; BE, BD æquales sunt. Eodémque pacto arcus AM, AF, BH, BG æquantur. Unde & reliqui CF, LM, EH, DH æquantur. *Q.E.D.*

b 15. 1 hujus.

c 29. 3.
d 28. 3.
e 10. 2 huj.

Item ob arc CAL = arc DBE; [c] erit subtensa CL æqualis subtensæ DE, & [d] proinde arcus CVL arcui DXE; & semissis CV = DX: unde addito vel subtracto communi VD, erit arc CD = arc VX. Ergo, cùm arcus VX [e] similis sit arcui AB, erit arcus CD eidem AB similis. Eadémque ratione arcus FG, neque non & arcus EL, HM eidem AB similes ostendentur. *Q. E. D.*

Prop. XIV. Probl.

Fig. 44.

Dato in sphæra circulo (AB), qui minor sit maximo, datóque in ejus circumferentia aliquo puncto (A), per illud punctum describere circulum maximum, qui tangat datum circulum (AB).

a 20. 1 huj.
b 17. 1 huj.
c 3. 2 hujus.

Per A, & C (polum circuli AB) [a] describatur circulus maximus CABE, è quo sumatur quadrans AD. Polo D per A ducatur circulus AZE; [b] hic maximus est, [c] & tangit datum AB in A. *Q.E.F.*

Prop. XV. Probl.

Fig. 45.

Dato in sphæra circulo (AB), qui minor sit maximo; & dato aliquo puncto (G) in sphæræ superficie, quod sit inter datum circulum (AB), & alium ei æqualem & parallelum CD; per punctum illud datum (G) describere circulum maximum, qui tangat datum circulum (AB), maximo minorem.

a 20. 1 hujus. & coroll. schol. 10. 1. huj.

Per E, F [a] polos parallelorum, & punctum G [a] describatur circulus maximus EAC, in quo capiatur quadrans BH; & polo E per H describatur circulus HI. Sumatur etiam quadrans GK, polóque G per K describatur circulus KL (qui certè maximus erit) secans circulum HI in L (secabit verò, quia punctum K cadit inter H, & I; ob arcum

arcum G H minorem, & arcum G I majorem quadrante G K: illud, quia B H est quadrans; hoc quia A F D, ipsi E A F æqualis, est semicirculus; & A I ([b]=B H) est quadrans; & proinde D I est quadrans) tum per L & polos E, F ducatur maximus circulus E L F secans circulum A B in M; polóque demum L per M ducatur circulus M N: dico factum. Nam arc. L M [b] æquatur arcui H B quadranti, [c]ergo M N est maximus circulus. Item, quia circ. K L transit per polum L circuli M N, [d]transibit hic vicissim per polum illius, hoc est per G: denique quia circuli A B, G N secant maximum circulum E F, in quo polos habent, in eodem puncto M, [e] ipsi se contingent mutuò. Itaque factum.

b 2, & 10. 2 *hujus.*
c 17. 1 *huj.*
d 1 *sch.* 15. 1 *hujus.*
e 3 *hujus.*

Scholium.

Simili discursu, aliud punctum, quo circulus K L secat circulum H I, polus erit alterius circuli maximi transeuntis per G, tangentísque circulum A B.

Prop. XVI. Theor.

Maximi circuli, qui similes circumferentias parallelorum circulorum auferunt, aut per parallelorum polos transeunt, aut eundem unum parallelum tangunt. Fig. 46. 47. 48.

1°. Auferant circuli maximi A B C, D B E (ex parallelis A D C, F G) similes arcus A D, F G; & alter A B C transeat per polos parallelorum; erit maximorum intersectio B, polus parallelorum. Si negas, sit H polus ipsorum, & per H, G ducatur maximus H G I (secans ipsum A D C in I), unde arcus A I, F G [a]similes sunt. ergo cùm A D, F G similes ponantur, erunt A I, A D similes, adeóque pares. *Q. E. A.*

a 10. 2 *huj.*

2°. Auferant maximi A B C, D E F similes arcus A D, B E; & neuter per polos transeat, sed alter A B C unum B E tangat (in B); etiam D E F eundem B E tanget in E. Vis secare? [b] itaque per E describatur circulus maximus G E H. [c] ergo arcus A G, B E similes sunt; proinde verò arcus A D, A G similes erunt. *Q. E. A.*

b 14. 2 *huj.*
c 13. 2 *huj.*

3°. Auferant (ex parallelis A D C, G H) maximi A B C, D E F similes arcus A D, G H, & neuter per polos transeat, aut unum tangat parallelorum; [d] ergo circulus A B C parallelis obliquus est; [e] ergo tanget aliquem, puta (B E) ipsis A D C, G H parallelum; eundem B E tanget circulus D E F: si negas; per H, [f] describatur circulus maximus K H I tangens ipsum B E in I, [g] ergo arcus A K, G H similes, itidémque arcus A K, A D similes erunt. *Q. E. A.*

d 13. 1. *huj.*
e 8. 2 *hujus.*
f 15. 2 *huj.*
g 13. 2 *huj.*

Prop. XVII. Theor.

Fig. 49. In sphæra paralleli circuli (A B, E F), inter quos, & parallelorum maximum (C D) æquales circumferentiæ (A C, C E) maximorum circulorum intercipiuntur, sunt inter se æquales; illi verò (A B), inter quos & maximum parallelorum (C D) majores maximorum circulorum circumferentiæ (A C) intercipiuntur, sunt minores.

Nam primò transeat circulus maximus A C E F D B per polos pa-
a 15. 1 huj. rallelorum; ergo communes sectiones A B, E F [a] erunt diametri cir-
b 10. 2 huj. culorum A B, E F. Jam si arc A C ([b]B D) = arc C E ([b]D F); ob
c 11. 1 huj. arc C G D [c] = arc C H D; erit arc A G B = arc E H F; [d] unde
d 29. 3. subtensæ A B, E F pares erunt, & proinde circuli A B, E F etiam pares. *Q. E. D.* Quod si arc A C (B D) $\sqsubset$ arc C E (D F) erit arc A G B $\sqsupset$ arc E H F, & subtensa A B $\sqsupset$ E F, & circulus A B $\sqsupset$ E F. *Q. E. D.*

Fig. 50. Non transeat secundò circulus maximus A C E F D B per parallelorum polos (G,H); verùm per hos, & polos circuli A C E F D B
e 20. 1 hujus. [e] describatur circulus G I H K. [f] Itaque poli circuli G I H K erunt in
f 1 sch. 15. 1 h. utroque maximo circulo A C E F D B, & C D. ergo ad intersectiones
g 5. def. 1 huj. & 28. 3. C, D; [g] proinde arcus C I, C K æquantur.

Jam si arc C A = arc C E, erit arc A I = arc E K. Item (ob se-
h 12. 2 huj. micirculos I K, G H) arc G I = H K; [h] ergo rectæ G A, H E pares
k 2 sch. 20. 1. h. sunt, & [k] consequenter circuli A B, E F pares erunt. *Q. E. D.*

Sin arc C A $\sqsubset$ arc C E; sit arc C L = arc C E. Ergo parallelus
l 6. 1 hujus. per L æquabitur (uti mox ostensum) parallelo E F. [l] Quare parallelus A B minor erit ipso E F. *Q. E. D.*

Prop. XVIII. Theor.

In sphæra maximorum circulorum circumferentiæ (A C, E C) interceptæ inter maximum parallelorum (C D), & duos alios circulos (A B, E F) æquales & parallelos, sunt æquales. Illæ verò (A C) quæ intercipiuntur inter majorem parallelum (A B) & maximum C D, sunt minores.

a 17. 2 huj. Nam in 1[a] hyp. si dicas esse A C $\sqsubset$ C E, [a] erit idcirco circ A B $\sqsupset$ circ C D: in 2[a] hyp. si dicas esse A C = vel $\sqsubset$ C E, [a] erit ergo circ A B = vel $\sqsubset$ circ C D, contra hypothesin.

Prop.

Prop. XIX. Theor.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) parallelos aliquot circulos (E F, G H, I K) in ſphærica ſuperficie deſcriptos ſecet quidem, non tamen per polos, in partes inæquales eos ſecabit, excepto parallelarum maximo (G H): de parallelorum autem ſegmentis in hemiſphæriorum uno (G Q H) interceptis, ea (L F M), quæ ſunt inter maximum parallelorum (G H) & polum conſpicuum (Q) ſunt majora ſemicirculo, reliqua verò (O P K), quæ ſunt inter maximum parallelorum & polum occultum (R) ſunt ſemicirculo minora; æqualium denique ac parallelorum circulorum (E F, I K) alterna ſegmenta (L F M, O I P; & L E M, O K P) ſunt inter ſe æqualia. Fig. 51.

1. Per polos Q, R & punctum B deſcribatur circulus maximus (Q B R; is [a] tranſit etiam per D, unde arc B H D = arc B G D: [b] item arc S F T = arc S E T, [b] & arc X K V = arc X I V. ergo arc L F M ⊏ arc L E M, & arc O I P ⊏ arc O K P.

a 11. 1 huj.
b 15. 1 huj.

2. Si circulus E F = circ I K, per polos parallelorum Q, R, & polos circuli A B C D, ducatur circulus A G H: [c] iſtius circuli poli ſunt B, D: ergo arcus B A, B C æquantur. [d] Item arc B L = arc B O; ergo arc L A = arc O C. ergo arc L A M [e] (2 L A) = arc O C P (2 O C): unde ſubtenſa L M = O P. Ergo arc L E M = arc O I P. arc G E M = arc O K P. Q.E.D.

c 1 ſch. 15. 1 hujus.
d 18. 2 huj.
e 9. 2 huj.

Prop. XX.

Si in ſphæra maximus circulus (G L) parallelos aliquot circulos (A B, C D, E F) ſecet, non tamen per polos; de parallelorum aſſumptis circumferentiis in uno hemiſphærio, illæ (O B H), quæ propiùs accedunt ad polum conſpicuum (P) erunt majores, quàm ut ſimiles eſſe poſſint illis (N D I), quæ ab eodem conſpicuo polo longiùs abſunt. Fig. 52.

Nam ſi per P, I; & P, N ducantur circuli maximi ſecantes ipſum A B in R, S; erit arcus H B O major arcu R B S, [a] qui ſimilis eſt arcui I D N; unde liquet propoſitum.

a 10. 2 huj.

Prop. XXI.

Si in ſphæris æqualibus maximi circuli (B N D, F O H) ad maximos circulos (A B C D, E F G H) inclinentur; ille (B N D) cujus polus Fig. 53. 54.

polus (P) sublimior est supra planum subjectum, inclinatior erit; illi verò circuli, quorum poli æqualiter distant à subjectis planis, æqualiter inclinantur.

Per L, P polos circulorum A B C D, B N D; perque M, Q polos circulorum E F G H, F O H ducantur maximi circuli A L C, E M G;
a 6. 1 *hujus.* [a] intersectiones A C, B D, M I concurrunt in sphæræ centro I. Et
b 19, & 3 *def.* 11. quoniam anguli A I D, N I D [b] recti sunt, (quippe cùm planum A N C [c] rectum sit planis A B C D, B H D), [d] erit ang A I N inclina-
c 15. 2 *huj.* tio plani B N D ad planum A B C D; paritérque ang E K O est in-
d 6 *def.* 11.
e *hyp.* clinatio circuli F O H ad planum EFGH. Cùm igitur sit arc C P [e] $\sqsubset$ G Q, & arc P N = Q O, & proinde arc C N $\sqsubset$ G O, erit arc N A
f 27. 3. $\sqsupset$ arc O E; [f] quare ang A I N $\sqsupset$ ang E K O: *Q.E.D.*

Quòd si arc C P = G Q, simili discursu liquet angulos A I N, E K O æquari. *Q.E.D.*

Facilè convertitur hoc Theorema.

Schol, 1. Theor.

Fig. 55. Circuli maximi (A B, C B) tangentes eundem parallelum (A C), æqualiter inclinantur ad maximum parallelorum (D E); qui vero (G H) majorem parallelum I G tangit, inclinatior est ad parallelorum maximum (D E); & circuli (A B, C B) æqualiter inclinati ad parallelorum maximum (D E) tangunt eundem parallelum (A C). Qui verò (G H) inclinatior est ad maximum parallelum, majorem parallelum (I G) tangit.

1. Per F polum parallelorum, & contactus A, C describantur
a 5. 2 *hujus.* maximi circuli F A D, F C E; [a] transeunt hi per polos circulorum
b 15. 1 *huj.* A B, C B, [b] secántque adeò ipsos perpendiculariter: ergo F A est altitudo poli F supra circulum A B; & F C altitudo ejusdem supra circu-
c 5. *def.* 1 *huj.* & 28. 3. lum C B; quare cùm sit F A [c] = F C, liquet primum.

2. Per polum F, & contactum G describatur maximus circulus F G E; ergo (ut priùs) F G est altitudo poli F supra circulum GH:
d 21. 2 *huj.* atqui F G $\sqsubset$ F A: [d] unde liquet secundum.

3. Per F, & polos circulorum A B, C B describantur maximi circuli F A D, F C E; [b] hi secant illos perpendiculariter; ergo arcus FA,
c *hyp.* F C sunt elevationes poli F supra circulos A B, C B; [c] ergo arcus FA,
d 3. 2 *huj.* F C pares sunt. [d] itaque circulus intervallo F A, vel F C descriptus tanget circulos A B, C B: quod erat tertium.

4. Per F, & polum circuli G H describatur circulus maximus F G E.

F G E. ergo arcus F G eſt elevatio poli F ſupra circulum G H. Atqui arc F G [c] ⊏ arc F A. ergo circ [d] tangens, polo F per G deſcriptus major erit quàm A C. Quod erat ultimum.

Schol. 2. Theor.

Circuli maximi (A B, C D) ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinati, polos (E, F) habent in circumferentiâ ejuſdem paralleli. Et circuli maximi (A B, C D) qui polos (E, F) habent in circumferentia ejuſdem paralleli (E F), ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinantur. Fig. 56.

1. Deſcriptis per G polum parallelorum, & per E, F polos circulorum A B, C D circulis maximis G E, G F; quia hi [a] recti ſunt illis, [b] erunt arcus G E. G F pares. [c] ergo circulus polo G per E, F deſcriptus parallelus eſt circulo D B. *Q.E.D.* — a 15.1 *hujus.* b *hyp.* c 2. 2 *hujus.*

2. Ob arc G E [d] = G F, [e] erunt circuli A B, C D æqualiter inclinati ad ipſum B D. *Q. E. D.* — d 5. *def.* 1 *h.* 2. e *ſch.* 21. *h.*

Schol. 3. Theor.

Si ſuper circuli (A B D E) diametro A D conſtituatur rectum circuli ſegmentum (A F D), dividatur autem ſegmenti inſiſtentis circumferentia (A F D) in duas inæquales partes (A F, F D); & à ſectionis puncto (F) ad circumferentiam circuli primi plurimæ rectæ lineæ (F A, F I, F H, F B, F C, F D, F E) cadant; erit recta (F A) ſubtendens minorem partem (F A) inſiſtentis ſegmenti omnium minima: quæ autem majorem (F D) ſubtendit, omnium maxima: reliquarum verò maximæ propinquior (F C) remotiore (F B) ſemper major eſt; duæ verò rectæ æquales (F E, F C) ab eodem puncto (D) in circumferentiam circuli (A B D E) à maxima (F D) æqualiter diſtantes. Fig. 57. 58.

Ducatur F G normalis plano A B D E, & connectantur G C, G B, G H, G I, G E; [a] liquet punctum G eſſe in recta A D; & ob F A [b] ⊐ F D, [c] erit G A ⊐ G D; [c] item G A ⊐ G I ⊐ G H &c. [c] & G D ⊏ G C ⊏ G B &c. — a 38. 11. b *hyp.* c 7. *vel* 8. 3.

Ergo in triangulis rectangulis F G A, F G I, F G H, [d] erit F A ⊐ F I ⊐ F H; at in triangulis rectangulis F G D, F G C, F G B, [d] erit F D ⊏ F C ⊏ F B. Demum ob G E [b] = G C, [d] erit F E = F C. Quæ *E. D.* — d 47. 1.

Si

Schol. 4. Theor.

Fig. 59. Si in ſphæræ ſuperficie intra cujuſq; circuli peripheriam (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G B, G E, G C, G D) circulorum maximorum ducantur ſemicirculo minores; maximus eſt (G F A, qui per polum circuli ducitur; minimus autem, qui (G D) ei adjacet; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore (G C) ſemper major eſt; duo verò arcus (G E, G B) ab eodem maximo (G A) vel minimo (G D) æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

a 15. 1 *hujus.* b 3. *ſch.* 21 *h.* Nam quoniam arcus A G D [a] perpendiculariter inſiſtit ſemicirculo A C D, [b]erit ſubtenſa G A major ſubtenſâ G B; [b]& G B ipſâ G C: ergo arcus G A major eſt arcu G B; & G B ipſo G C. & ſic in reliquis, juxta Scholium præcedens.

Schol. 5.

Fig. 60. Si in ſphæræ ſuperficie extra peripheriam cujuſq; circuli (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G G , G B, G E) ducantur ſemirculo minores, ſecantéſque circumferentiam circuli: maximus eſt qui (G F A) per circuli polum ducitur; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore ſemper major eſt: minimus autem eſt ille (G D) maximi, qui inter punctum (G) & circuli circumferentiam extra circulum interjicitur: reliquorum verò minimo propinquior (G H) remotiore (G I) ſemper minor eſt. Duo verò arcus (G B, G E; & G H, G K) ab eodem maximo vel minimo æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

Itidem patet hoc ex Scholio penultimo, ex ſubtenſis ad arcus diſcurrendo.

Prop. XXII.

Fig. 61. Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) unum quidem circulum (A F) tangat, alium verò ei parallelum (G B H D) ſecet, poſitum inter ſphæræ centrum, & eum circulum quem tangit maximus circulus; polus autem (E) maximi circuli fuerit inter utrumque parallelorum (A F, G B H D), deſcribantúrque maximi circuli (G L, H K, M P, N K,

N K, O L) tangentes duorum parallelorum majorem (G B H D): hi omnes erunt inclinati ad maximum circulum (A B C D), & eorum rectiſſimus quidem erit ille (H K), cujus contactus erit in eo puncto (H), in quo majus ſegmentum (B H D) paralleli majoris biſariam dividitur; humillimus verò & maximè inclinatus (G L) cujus contactus erit in eo puncto (G), in quo minus ſegmentum (B G D) biſariam dividitur; reliquorum autem illi quidem (M P, N K) qui æqualiter diſtant ab alterutro eorum punctorum (H, G) in quibus ſegmenta biſariam ſecantur, ſunt ſimiliter inclinati; qui verò (O L) contactum remotiorem habet à puncto (H), in quo majus ſegmentum biſecatur, inclinatior perpetuò eſt eo (N K), qui contactum eidem puncto propiorem habet. Poli denique maximorum circulorum erunt in uno circulo, qui & minor erit eo circulo (A F) quem tangit maximus in principio circulus, & eidem parallelus erit.

Per I polum parallelorum, & E polum circuli A B C D, ducatur circulus; is [a]biſecat ſegmenta B G D, B H D, [b]tranſitque per conta- a *9. 2 huj.*
ctum A: ſit itaque circulus G A I E H C, fiat arcus H Q æqualis b *4. 2 hujus.*
quadranti E A. ergo H Q $\sqsubset$ H I; atque Q cadit inter I, & A; itaque polo I per Q deſcriptus circulus Q T R, erit parallelus circulo A F, eóque minor. Per I, & puncta contactuum ducantur maximorum circulorum arcus M I S, N I T, O I V, qui [c] tranſibunt per c *5. 2 hujus.*
polos tangentium: ac ob arcus I H, I M, I N, I O, I G [d] æquales; d *5 def. 2 h.*
& arcus I Q, I S, I T, I V, I R [d] etiam pares; erunt toti arcus H Q, M S, N T, O V, G R æquales; ergo cùm H Q ſit quadrans, erunt reliqui omnes etiam quadrantes; [e] ergo puncta Q, S, T, V, R erunt e *16. 1 huj.*
poli tangentium *Q. E D.*

Porro, quoniam arcus H M, H N [f] pares ſunt, erunt iſtis [g] ſimiles f *hyp.*
arcus R φ, R Ψ pares. ergo oppoſiti arcus Q T, Q S pares ſunt (nam g *10 hujus.*
ductæ rectæ R Q, φ S, Ψ T eſſent [h] diametri circuli Q T R) [k] ergo h *15. 1 hujus.*
ducti arcus E T, E S pares erunt; & arcus E T $\sqsubset$ E V; & E Q k *4. sch. 21. 2 h.*
maximus, ac E R minimus horum: [l] ergo circulus H K minimè in- l *21. 2 huj.*
clinatur ad circulum A B C D, & G L maximè; & M P, N K æqualiter, & O L magis quàm N K. *Q. E. D.*

Prop. XXIII.

Iiſdem poſitis, ſi circumferentiæ (M O, N P) circulorum tangentium (M O, N P) à contactibus (M, N) ad nodos (O, P) ſint æquales, Fig. 62.
prædicti circuli maximi (M O, N P) ſimiliter inclinati erunt.

Nam per E polum circuli A B C D, & I polum parallelorum ducatur circulus maximus G A C; & per I, ac contactus M, N describantur circuli maximi I M, I N: & quoniam hi [a] per polos tangentium M O, N P transeunt, [b] insistunt ipsis M O, N P diametricè & rectò; & inæqualiter secantur in I, & arc M O [c] = N P; [d] ergo ductæ rectæ I O, I P æquantur: ergo circulus O K P polo I per O descriptus transibit per P; sunt etiam arcus M O, M Q, & arcus S O, S Q [e] æquales; itidémque arcus N P, N R, & arcus T P, T R pares sunt; ergo (ob arc M O = N P) erunt toti O M Q, P N R pares; [f] ideóque subtensæ O Q, P R; & [g] propterea arcus O S Q, P T R, & horum dimidii S O, T P pares erunt. Item arcus K O, [e] æquantur; ergo reliqui arcus K S, K T, hisque [h] similes arcus H M, H N æquabuntur: [k] ergo circuli M O, N P similiter inclinantur ad circulum A B C D. *Q. E. D.*

a 5. 2 *huj.*
b 15. 1 *huj.*
c *hyp.*
d 12. 2 *h.*
e 9. 2 *huj.*
f 29. 3.
g 28. 3.
h 10. 2 *huj.*
k 22. 2 *hujus.*

LIB.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER TERTIUS.

Prop. I.

SI circulum (A C B D) inæqualiter ſecet recta linea (A B); ſuper qua conſtituatur rectum circuli ſegmentum (A F B), non majus ſemicirculo; dividatur autem inſiſtentis ſegmenti circumferentia in duas partes inæquales (F A, F B); recta linea (F B) ſubtendens earum minorem, minima eſt linearum rectarum (F G, F H, F K, &c.) ductarum ab eodem puncto (F) ad majorem partem (A C H) circumferentiæ primi circuli: rectarum verò ductarum ab eo ipſo puncto ad circumferentiam (B C) interceptam inter illam minimam rectam (F B) & diametrum (C D) in quam cadit perpendicularis (F L) deducta ab illo puncto (F), ſemper minimæ propior (F G) remotiore (F H) minor eſt. Omnium autem maxima eſt ea (F C) quæ ab illo eodem puncto ducitur ad extremitatem ejuſdem diametri. Item recta (F A) ſubtendens majorem circumferentiam ſegmenti inſiſtentis, minima eſt earum (F A, F I, F K, &c.) quæ cadunt in circumferentiam (A C) interceptam inter ipſam & diametrum (C D), ſempérque huic propior (F I) remotiore (F K) minor eſt. Si verò recta linea (A B) ſubjectum circulum ſecans ſit ejus diameter, & reliqua omnia eadem ſint ut ſuprà; recta linea (F B) ſubtendens minorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis, minima eſt rectarum ductarum ab illo eodem puncto ad primi & ſubjecti circuli circumferentiam; ea verò (F A) quam majorem partem circumferentiæ ſegmenti inſiſtentis ſubtendit, maxima eſt. Fig. 63.

Connectantur rectæ L G, L H, L I, L K. Et quoniam L B [a] $\sqsupset$ L G [a] $\sqsupset$ L H, erit (in triangulis rectangulis F L B, F L G, F D H) F B [b] $\sqsupset$ F G [b] $\sqsupset$ F H. Similiter, ob L A $\sqsupset$ L I $\sqsupset$ L K, erit F A $\sqsupset$ F I $\sqsupset$ F K. Et quoniam L C eſt [a] maxima omnium ab L ad circumferentiam A C B, [b] erit F C maxima omnium ab F ad eandem

a 7. 3.
b 47. 1.

 Sin

Sin arcus A C B, A D B pares sint, patet res ex 3° Scholio 21æ secundi hujus.

Prop. II.

Fig. 65. Si recta linea (A B) secans circulum (A C B D) auferat segmentum (AC B) non minus semicirculo; super ipsâ verò recta linea (AB) statuatur aliud circuli segmentum A F B quod & semicirculo majus non sit, & inclinatum sit ad alterum segmentum (A D B), semicirculo non majus: dividatur autem insistentis segmenti circumferentia in partes inæquales (AF, FB): recta linea (F B) subtendens minorem circumferentiæ partem, minima est rectarum omnium (F B, F G, FH, &c.) ductarum ab illo puncto (F), à quo ipsa ducitur, ad subjecti circuli circumferentiam illam, quæ semicirculo minor non est: & reliqua omnia, quæ in præcedenti, sequuntur.

Ex casu vario perpendicularis F L varii casus emergunt.

Iterum demissâ rectâ F L ad planum A C B D rectâ F L, ductisq; rectis C E L D, L B, LG, L H, L A, L I, L K; liquet fore F B ⊐ F G ⊐ F H ⊐ F C; & FA ⊐ F I ⊐ F K ⊐ FC, ut præcedenti.

Prop. III.

Fig. 65. 66. Si in sphæra duo circuli maximi (A B C, D B E) se mutuò secent, ab eorum verò utroque sumantur æquales circumferentiæ (B A, B C; & B D, B E) utrinque à puncto (B), in quo se secant: rectæ lineæ (A D, C E), quæ extrema puncta circumferentiarum connectunt ad easdem partes, æquales sunt inter se.

Sint primùm omnes B A, B C, B D, B E æquales; & polo B ducatur circulus A D C E; [a] ergo sectiones A C, D E sunt ejus diametri; & F centrum; & radii F A, F B, F D, F E pares. Item ang. E F C [b] = ang A F D. [c] ergo E C = A D.

a 15. 1 hujus. b 11. 1. c 4. 1.

Sin omnes non æquentur, polo B per A, & C ducatur circulus A G C H, cui occurrat utrinque productus arcus D B E in G, & H. [d] ergo B G = B H, item B D = B E. ergo D G = E H. Atqui etiam (sicut in priori parte) subtensæ G A, C H, adeóque arcus G A, C H æquantur; quare cum circuli segmentum GBH [a] rectum sit circulo ACCH; [a] & arcus G A H, G C H sint semicirculi; [e] liquet rectas A D, C E æquari.

d 28. 3. e 12. 2 hujus.

Prop.

Prop. IV.

Si in ſphæra duo maximi circuli (A B C, D B E) ſe mutuò ſecent, ab eorúmque altero (A B C) ſumantur æquales circumferentiæ (B A, B C) utrinque à puncto interſectionis (B); & per puncta (A, C) terminantia æquales circumferentias ducantur duo plana parallela (A F G, C H I), quorum alterum (A F G) conveniat cum communi ſectione (K B) ipſorum circulorum, extra ſphæram, versùs prædictum punctum (B): ſit verò una illarum æqualium circumferentiarum (B A, B C) major utralibet circumferentiarum (B F, B H) in altero maximo circulo (D B E) interceptarum inter prædictum punctum (B) & utrumque planorum parallelorum: ea circumferentia (B H) quæ eſt inter illud punctum (B) & planum (C H I) quod non convenit cum communi ſectione (K B) ipſorum circulorum, major eſt quàm ea ejuſdem circuli circumferentia (B F), quæ eſt inter idem punctum (B) & planum (A F G) quod convenit cum communi ſectione circulorum. Fig. 67.

Polo B per A, C ducatur circulus A D C E, habens A G, I C ſectiones cum parallelis planis A F C, I H C; & A C, D E ſectiones
cum maximis circulis A B C, D B E; unde harum interſectio (K) a 15. 1 *huj.*
[a] erit centrum circuli A D C E.

Jam, ob A G, C I [b] parallelas, [c] erit ang K A M = ang K C N: b 16. 11.
item ang A K M [d] = ang C K N. & K A = K C. [f] ergo K M = c 28. 1.
K N; [g] adeóque M D = N E. Porro K B (communis ſectio cir- e 15. 1. f 26. 1.
culorum A B C, D B E) [h] recta eſt circulo A D C E; & propterea g 3. *ax.* 1.
[k] ang L K M rectus eſt; [l] ergo ang L M K acutus eſt, & ei æqualis h 19. 11.
H N E; angulus autem D M F obtuſus. ergo arc E H $\sqsupset$ arc D F; k 3. *def.* 11.
& ideo reciprocè (cùm æquales ſint arcus B D, B E) arc B H $\sqsubset$ arc l 17. 1.
B F. *Q.E.D.*

Obſ: quòd arc E H $\sqsupset$ arc D F patet. Nam quia M D, N E æquantur, perpendiculares ab M, N auferent æquales arcus in circumferentia D B E; quorum alter minor eſt arcu D F, ob angulum D M F obtuſum, alter major arcu E H, ob angulum E N H acutùm: ergo liquet arcum D F eſſe majorem arcu E H.

Prop. V.

Si in circumferentiâ maximi circuli (A B C D) ſit polus (A) parallelorum; húncque circulum maximum ſecent ad angulos rectos Fig. 68.
duo

duo alii maximi circuli (B D, E C); quorum alter (B D) ſit unus parallelorum, alter verò (E C) obliquus ſit ad parallelos: ab hoc autem obliquo circulo (E C) ſumantur æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad eandem partem maximi parallelorum, perque illa puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli (I K, L M, N O): circumferentiæ (I L, L N) maximi illius circuli primò poſiti inter parallelos interceptæ, inæquales erunt; ſempérque ea (I L) quæ propior fuit maximo parallelorum, remotiore (L N) major erit.

Per polum A, & punctum G ducatur maximus circulus A G P, liquet arcus G P, G F eſſe minores ſemicirculo (nam G P eſt minor quadrante A K, unde G F non ſecat G P inter G & P, & proinde G F
a 5. ſch.21.2 b. etiam minor eſt ſemicirculo). Item G P tranſit per polos circuli I K, ergo arc G P ⊐ G F. Simili diſcurſu arc G Q ⊐ arc G H. Item recta per G ad centrum ſphæræ (hoc eſt communis ſectio circulorum A P, E C) ſecat interjectum planum circuli I K intra ſphæram; ergo eadem ſecabit planum paralleli N O extra ſphæram. Ergo, juxta præ-
b 10.2 *hujus.* cedentem arc G P major eſt arcu G Q; quare cùm ſit arc I L [b] = G P; & arc L N [b] = G Q; erit arc I L major arcu L N. *Q. E D.*

Prop. VI.

Fig. 69. Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) ſit polus (A) parallelorum, húncque maximum circulum ad angulos rectos ſecent duo alii circuli maximi (B D, E C), quorum alter (B D) ſit unus parallelorum, alter verò (E C) ſit obliquus ad parallelos: ſumantur autem ab obliquo circulo (E C) æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad eaſdem partes maximi illius paralleli; & per puncta (F, G, H) terminantia æquales circumſerentias, pérque polum (A) deſcribantur maximi circuli (A I, A K, A L): hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum, quorum propior (K L) maximo circulo primò poſito (A B C D) ſemper erit major remotiore (K I).

a 5. 3 *hujus.* Per puncta F, G, H deſcribantur paralleli M N, O P, Q R; [a] ergo
b 10. 2 *hujus.* arc O M ⊏ O Q; & [b] proinde arc G V ⊏ G X: fiat arc G Y = G X, & per Y deſcribatur parallelus S T; cùm igitur arcus G Y,
c 3. 2 *hujus.* G X, & arcus G H, G F pares ſint, [c] erunt ductæ rectæ H X, Y F
d 15.1. *hujus.* æquales. Porro circulus S Z T [d] circulo A I rectò inſiſtit, & biſecatur ab eo (ductâ ab Z ad alteram ſectionem rectâ) & ſegmentum circuli A I ab Z per I ad alteram ſectionem majus eſt ſemicirculo; &

arcus

arcus Y Z eſt quadrante minor, (nam quia circulus A B C D rectus eſt circulis B D, E C, tranſibit per eorum polos, & [c] biſecabit eorum ſegmenta; unde arcus B φ, E φ erunt quadrantes; quare K I quadrante minor eſt; & proinde ipſi [f] ſimilis Y Z quadrante minor eſt). [g] ergo recta Y Z eſt minima cadentium in circumferentiam Z I; adeóque minor ipſâ Y F, [h] hoc eſt ipſâ H X. ergo cùm circulus Q R minor ſit circulo S T, erit arcus H X major quàm ut ſit ſimilis arcui Y Z. (Major enim ſubtenſa ex minore circulo majorem proportione arcum aufert, quàm minor ex majore,) ergo arcus L K ([f] ſimilis arcui H X) major eſt, quàm ut ſimilis ſit arcui K I (qui ſimilis eſt arcui Y Z). quare cùm arcus L K, K I ſint in eodem circulo, erit ſimpliciter arc L K major arcu K I. *Q. E. D.*

c 9. 2 *hujus.*
f 10. 2 *hujus.*
g 1 *hujus.*
h *prius.*

Prop. VII.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) tangat aliquem ſphæræ circulum (A E); alius autem maximus circulus (G H) ad parallelos obliquus ſit, tangátque circulos majores illis, quos tangit maximus circulus primò poſitus; fuerintque eorum contactus (G, H) in maximo circulo primò poſito; & ſumantur à circulo obliquo circumferentiæ (I K, K L) æquales, & continuæ ad eaſdem partes maximi (B D) parallelorum: per puncta autem (I, K, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli (M N, O P, Q R); hi circumferentias inæquales (M O, O Q) intercipient de maximo circulo (A B C D) primò poſito; quarum ea (M O) quæ propior erit maximo parallelorum, erit major remotiore (O Q). Fig. 70.

Per S polum parallelorum, & punctum K deſcribatur circulus maximus S K, ſecans parallelos punctis T, V: item per K [a] deſcribatur circulus maximus K E tangens parallelum A E in E verſùs partes G (unde K E cadit inter S V, & G I; nam ſi extra G I caderet, non tangeret circulum A E, quoniam ipſi K G non priùs occurrit quàm in puncto quod opponitur puncto K). ergo cùm arcus S V tranſeat polum circuli M N, [b] erit K V minimus arcus omnium à K ad M N cadentium, & K Y minor quàm K I; pariterque K X ⊐ K L; ergo (ut in 5tâ hujus) erit arcus K Y major arcu K X; ſed arcus M O [c] æquatur arcui K Y, [c] & arcus O Q arcui K X; ergo arcus M O major eſt arcu O Q. *Q. E. D.*

a 15. 2 *h.*
b 5 *ſch.* 21. 2 *h.*
c 13. 2 *huj.*

Prop.

Prop. VIII.

Fig 71. Si in ſphæra maximus circulus (A B) tangat aliquem ſphæræ circulum (A C;) aliquis autem alius maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos majores illis, quos tangebat maximus circulus primò poſitus; fuerítque eorum contactus in maximo circulo primò poſito: ſumantur autem de obliquo circulo æquales circumferentiæ continuæ (F G, G H) ad eaſdem partes maximi parallelorum, pérque puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur maximi circuli (M N, K L, C I), qui & tangant eundem circulum (A C) quem tangebat maximus circulus primò poſitus, & ſimiles parallelorum circumferentias intercipiant; habeántque eos ſemicirculos, qui tendunt à punctis contactuum (C, K, M) ad puncta (F, G, H) terminantia æquales obliqui circuli circumferentias, per quæ deſcribuntur, ejuſmodi ut minimè conveniant cum illo circuli maximi primò poſiti ſemicirculo, in quo eſt contactus (A) obliqui circuli inter apparentem polum, & maximum parallelorum. Inæquales intercipient circumferentias (I L, L N) de maximo parallelorum (B D), quorum propior (I L) circulo maximo (A B) primò poſito, ſemper erit major remotiore (L N).

Per puncta F, G, H deſcribantur paralleli P F, Q G, R H ſecantes
a 7. 3 hujus. circulum K L in O, S; [a] ergo arc Q P ⊏ Q R, & [b]ideo arc G O ⊏
b 13. 2 hujus. G S; fiat arc G T = G S, & per T deſcribatur parallelus V T ſecans circulum M N in X: Jam circulus M N ſecans parallelum V X non per polos aufert ſegmentum, ab X per V ad alteram ſectionem, minus ſemicirculo; etiam, ſegmentum circuli M N ab X per N ad oppoſitam ſectionem eſt majus ſemicirculo. Item ſegmentum V X in-
c 15. 1 huj. clinatur ad M X versùs partes R. (Nam circulus B E [c] rectus eſt circulo N Y per polum incidenti parallelorum; ergo B E inclinatur ad circulum M N, ergo V X ad eundem N M inclinatur); denique ſeg-
* Vid. Not. mentum paralleli X V, ab X per V ad alteram ſectionem, *ſecatur in-
d 2. 3 hujus. æqualiter in T: è quibus recta T X [d] minor eſt rectâ T F, [e] hoc eſt
e 3. 3 hujus. rectâ H S; unde, ſicut in 6tâ hujus, erit arcus I L major arcu L N. Q. E. D.

Fig. 72. *Not.* Quòd ſegmentum ab X per V ad alteram ſectionem pro-
f 5 2 hujus, & tenſum, ſecetur inæqualiter in T, ita patebit. Ducatur circulus maxi-
conſt. mus E Z tangens parallelum A C in Z; & quoniam circulus maximus
g 9 2 huj. Z Y [f] tranſit per polos circulorum E Z, & B E, [g] biſecabit is horum ſeg-

ſegmenta ; ergo arcus E Z eſt quadrans ; paríque de cauſa arcus E D eſt quadrans ; ergo circulus polo E per Z deſcriptus tranſit per Y, & D.

Simili diſcurſu N M eſt quadrans, & circulus maximus polo N per M deſcriptus tranſibit per Y, [f] pérque polos tangentis N M ; [g] ergo circulus M Y biſecabit ſegmenta tangentis N M, & circulorum E B, X Y ; ergo ſecabit circulum E B ad intervallum quadrantis ex N ; hoc eſt ultra quadrantem ex E, hoc eſt extra circulum D B. ergo ſegmentum ab X per V ad alteram ſectionem biſecatur extra V ; & arcus X V minor eſt ſemiſſe iſtius ſegmenti, magíſque arcus T X eſt minor ejuſdem ſemiſſe.

Lemma Probl.

Propoſitis duabus inæqualibus magnitudinibus (A B, A C,) reperire aliam mediam, quæ datæ cuicunque magnitudini (D G) commenſurabilis ſit. Fig. 73.

Biſecetur D G, & ejus ſemiſſis biſecetur, ac ita continuò [a] donec aliqua pars D F ſit minor quam C B ; & ſit E multiplex ipſius D F proximè major quàm A C ; ergo E ⊐ A B : (nam ſi æqualis eſſet, poſſet detrahi una magnitudo æqualis ipſi D F, ſic ut ſupereſſet multiplex ipſius D F major quàm A C, contra conſtructionem), atqui E & D G commenſurabiles ſunt, [b] propter D F communem menſuram : ergo liquet propoſitum.

a 1. 10.

b *conſtr.*

Prop. I X.

Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli B C, D C ad rectos angulos ſecent ; quorum circulorum alter (B C) ſit unus parallelorum, alter verò (D C) ad parallelos obliquus ſit : hoc obliquo circulo ſumantur æquales circumferentiæ (E F, G H) quæ continuæ quidem non ſint, ſed tamen ſint ad eaſdem partes maximi illius paralleli : per polum autem (A) & ſingula puncta (E, F, G, H) æquales circumferentias terminantia deſcribantur maximi circuli (A E I, A F K, A G L, A H M) : inæquales intercipient circumferentias ; quarum ea (M L) quæ propior erit maximo circulo primùm poſito, ſemper erit major remotiore (K I) Fig. 74.

Sit primùm arcus intermedius F G commenſurabilis arcui E F, vel G H ; & [a] dividantur arcus E F, F G, G H in partes æquales communi menſuræ : pérque diviſionum puncta Q, P, N, & polum A ducantur circuli maximi A Q V, A P T, A N R ; ergo arc MR [b] ⊏
F RL

a 4. 10.

b *6. 3. huj.*

R L [b] $\sqsubset$ L S, & ſic continuò ; ergo arc M L $\sqsubset$ K I. *Q. E. D.*

Fig. 75. Sit ſecundò arc F G incommenſurabilis utrique arcui EF, FG ; tum ſi arcus M L non ſit major arcu K I ; ſit primò minor, & ſumatur K N æqualis ipſi M L ; & ducatur circulus maximus A N ſecans circulum
c lem. 8.3.b. C D in O ; tum [c] capiatur arcus F P major quàm F O, & minor quàm F E, ipſique F G commenſurabilis ; & huic æqualis ſit G Q, ducantúrque maximi circuli A P R, A Q S. Hinc ob arcus P F, G Q æquales, & commenſurabiles intermedio F G, erit (ut modò oſtenſum eſt) arc S L $\sqsubset$ arc K R $\sqsubset$ arc K N. Ergo arc M L $\sqsubset$ arc K N:
d ſuppoſ. atqui arc M L [d] $=$ arc K N, quæ repugnant.

Fig. 76. *Q*uòd ſi dicatur arcus M L æqualis arcui K I, biſecentur arcus E F, G H in N, O ; ducantúrque maximi circuli A N P, A O Q ; [e] ergo
e 6. 3 huj. arc M Q $\sqsubset$ arc Q L ; [e] & arc K P $\sqsubset$ P I ; unde *Q* L $\sqsupset$ $\frac{1}{2}$ M L ($\frac{1}{2}$ K I) ; & K P $\sqsubset$ $\frac{1}{2}$ K I. quare arc *Q* L $\sqsupset$ K P. atqui, cùm arc. G O $=$ F N, non erit *Q* L $\sqsupset$ *Q* P, ut modò oſtenſum eſt ; ergo malè ponitur arc M L æqualis arcui K I.

Igitur arcus M L non eſt minor arcu K I ; nec æqualis ei ; ergo major. *Q. E. D.*

Scholium.

Planè ſimili diſcurſu, quæ de arcubus continuis oſtenſa ſunt in propoſitionibus 5, 7, 8, etiam de non-continuis oſtendi poſſent. Valeant igitur.

Prop. X.

Fig. 77. Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli (AB), quem duo alii maximi circuli (B D, C D) ad angulos rectos ſecent ; quorum alter (B D) ſit unus parallelorum, alter verò (C D) ſit obliquus ad parallelos : in hoc autem obliquo circulo (C D) ſumantur duo quælibet puncta (E, F) ad eaſdem partes maximi illius paralleli ; pérque polum (A) parallelorum, & per utrumque illorum punctorum deſcribantur maximi circuli (A G, A H) : erit ut circumferentia (B H) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò poſitum, & proximum maximum circulum per polum & per unum punctorum deſcriptum, ad circumferentiam (C F) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam ; ita circumferentia (H G) maximi parallelorum intercepta inter duos maximos circulos per polum pérque utrumque punctorum deſcriptos ad circumferentiam aliquam, quæ ſit minor, quàm circumferentia (F E) obliqui circuli inter utrumque punctum intercepta.

Sint

Sint primùm arcus C F, F E commenſurabiles, & dividantur in arcus æquales communi menſuræ, perque puncta diviſionum & polum A ducantur circuli maximi I M, K N, L O.

Quum igitur arcus C L, L K, K F, F I, I E æquentur; ſitque ideò arc B O [a]⊏ O N [a]⊏ N H, & ſic porro: [b] erit arc B O. C L ⊏ O N. L K ⊏ N H. K F. [c] ergo compoſitè arc B O + O N + N H ad arc C L + L K + K F. ⊏ arc N H. K F; hoc eſt arc B H. C F ⊏ arc N H. K F [b]⊏ H M. F I, verùm arc H M. F I ⊏ H G. F E ([c] ob H M. F I ⊏ M G. I E) ergo arc B H. C F ⊏ arc H G. F E. Sit arc B H. C F :: H G. P. quare H G. P ⊏ H G. F E. [d] ergo P ⊐ arc. F E. *Q.E.D.* a 6.3 *hujus.* b 8.5. c 34.5. d 10.5.

Quòd ſi arcus C F, F E ſint incommenſurabiles: ſit primò B H. C F :: H G. F I. & arcus F I major (ſi fieri poteſt) arcu F E: tum inter F I. F E medius arcus F K [e] ſit ipſi C F commenſurabilis; ac per polum A & K ducatur maximus circulus K L; ergo è mox oſtenſis, eſt B H. C F (hoc eſt H G. F I) ⊏ H L. F K. [f] ⊏ H G. F K. [g] ergo F I ⊐ F K. *Q.E.A.* Fig. 78. e *lem.* 8.3 *huj.* f 8.5. g 10.5.

Sin dicatur arc B H. C F :: H G. F E; biſecetur arcus F E in X, pérque polum A & X ducatur circulus maximus X Y; [h] ergo arc H Y ⊏ Y G; adeóque H Y ⊏ $\frac{1}{2}$ H G. [k] ergo H Y. F X ⊏ $\frac{1}{2}$ H G. F X ($\frac{1}{2}$ F E) :: H G. F E. ergo H Y. F X ⊏ B H. C F; [l] unde H Y ad arcum majorem arcu F X ſe habebit ut B H ad C F; quod fieri non poſſe modò demonſtratum eſt. Fig. 79. h *6.3 hujus.* k 8.5. l 10.5.

Igitur potiùs ut B H ad C F, ita erit H G ad arcum minorem ipſo F E. *Q.E.D.*

Coroll. arc. B H. C F ⊏ H G. F E. & permutatim.

Prop. XI.

Si polus (A) parallelorum ſit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli (B C, D E) ad angulos rectos ſecent; quorum alter (B C) ſit unus parallelorum, alter verò (D E) ſit obliquus ad parallelos, alius autem maximus circulus (A E) per polos parallelorum tranſiens obliquum circulum ſecet (in E) inter maximum parallelorum, & eum (D F) quem obliquus circulus (D E) tangit: diameter ſphæræ (D L) ad diametrum (D M) ejus circuli, quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò poſitum, & maximum circulum per polos paralle- Fig. 80.

 lorum

lorum transeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam.

Sint A G, B G, D L, D M communes sectiones circuli A B cum circulis A C, B C, D E, D F; item C G, F N communes sectiones circuli A E, cum circulis B C, D F. Ex polo A per E describatur parallelus O E; sintque O H, E H, E I communes ejus sectiones cum circulis A B, A C, D E.
a 10. 1 *huj.* Quoniam igitur A G [a] recta est plano
b 19. 1. paralleli O E, caditque in ejus centrum, erit ang G H I rectus; [b] er-
c 19. 11. go I G $\sqsubset$ I H: Fiat I K = I H, & connectatur E K; ergo (cum
d 4. 1. circulus uterque D E, O E rectus sit circulo A B, ac [c] ideò commu-
e 15. 5. nis ipsorum sectio E I recta plano A B; ideoque anguli E I H, E I K
f 4. 6. recti sint, & latera E I, I H æquentur lateribus E I, I K) [d] erunt an-
g 7. 5. guli I H E, I K E æquales. Jam D L. D M [e] :: D G. D N :: I G. I H
* *Vid. Not.* [g] :: I G. I K* $\sqsubset$ ang I K E ([h] hoc est ang. I H E, [k] vel B G C).
h *priùs.* I G E. Est verò ang B G C. ang G E (vel D G E) [l] :: arc B C.
k 10. 11. D E. ergo D L. D M $\sqsubset$ arc B C. D E. *Q. E. D.*
l 33. 6.

Fig. 81. *Not.* Quòd I G. I K $\sqsubset$ ang I K E. I G E, sic patet.

Ducatur G X ad K E parallela, cui occurrat I E protracta in X, centroque G per E ducatur arcus circuli Z E Y, ipsis G I (protractæ)
m 1. 6. & G X occurrens punctis Z. Y. Estque X E. E I [m] :: triang X G E.
n 8. 5. triang E G I [n] $\sqsubset$ sector Y G E. triang E G I [n] $\sqsubset$ sector Y G E.
o 33. 6. Sector E G Z [o] :: ang X G E. ang E G I. [p] ergo componendo X I.
p 28. 5. E I $\sqsubset$ ang X G I. ang E G I. [q] hoc est G I. K I $\sqsubset$ ang E K I. ang.
q 4. 6. E G I. *Q. E. D.*

Scholium.

Iisdem positis, diameter sphæræ ad diametrum paralleli (G E) per punctum (E) obliqui circuli, per quod maximus circulus (A C) è polo transit, descripti, minorem rationem habet, quam circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum, & maximum circulum per polos parallelorum transeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam.

a 13. 1 *huj.* Nam quoniam uterque circulus B C, D E transit [a] per polos circuli A B, erit istorum intersectio Q polus circuli A B; ergo segmentum
b 3 *sch.* 21. 2 *b.* D E L (rectò insistens circulo A B) dividitur inæqualiter in E; [b] ergo ducta recta E D minor est ductâ E O; ergo (cùm circulus E O
c 8. 5. minor sit circulo E D) erit arcus E O major arcu E D; [c] ergo arc B C. E O $\sqsupset$ B C. E D; ergo tota peripheria circuli B C ad totam periph. circuli E O (hoc est diameter B R ad diametrum O D) minorem rationem habet quàm B C ad E D. *Q. E. D.*

Prop.

Prop. XII.

Si in ſphæra maximi circuli (A B, C D) tangant unum eundémque parallelorum (A C), intercipiántque ſimiles parallelorum circumferentias (P K, B D) inter utrumque maximorum circulorum interjectas; alius autem maximus circulus (E F) ad parallelos obliquus circulos tangat majores (B G) illis, quos tangunt maximi circuli primò poſiti; ſecétque obliquus idem circulus eoſdem maximos circulos primò poſitos in punctis (I, K) poſitis inter maximum parallelorum, & circulum quem tangunt circuli maximi primò poſiti: diameter ſphæræ ad diametrum circuli (E G), quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B D) maximi paralleli (H F) intercepta inter circulos (A B, C D) primò poſitos, eundémque circulum tangentes, ad circumferentiam (I K) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam. Fig. 82.

Per L polum parallelorum & puncta E, I, K deſcribantur maximi circuli L H, L M, L N; & per K parallelus K O ſecans A B in P: quum igitur [a]ſit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major quàm ratio arcûs H M ad E I, [b] & hæc major ratione arcûs M N ad I K; ſitque arcus B D minor arcu M N (nam arcus P K, [c]ſimilis arcui B D, minor eſt arcu O K, [d] qui ſimilis eſt arcui M N); [e]erit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major ratione arcûs B D ad arcum I K. *Q. E. D.*

a 11. 3 *hujus.*
b *cor.* 10. 3. *h.*
c *hyp.*
d 10. 2 *hujus.*
e 8. 5.

Prop. XIII.

Si in ſphæra paralleli circuli (C D, E F) intercipiant circumferentias (G C, G F) maximi alicujus circuli (A F) utrinque æquales ab illo puncto (G) in quo ipſe maximus circulus (A F) ſecat maximum parallelorum (B G); per puncta verò (C, F) terminantia æquales circumferentias, & per parallelorum polos deſcribantur maximi circuli; aut ſi deſcribantur maximi circuli, qui unum eundemque parallelorum tangant, æquales intercipient circumferentias (G H, G I) de maximo parallelorum. Fig. 83. 84.

Ob arcus G C, G F pares, [a]erunt paralleli C D, E F pares. [b] ergo arcus G K, G L æquantur; [c]ergo ductæ ſubtenſæ C K, F L æquales erunt; [d] unde arcus C K, F L æquantur; ergo, quum arcus G H [e] ſimilis ſit arcui C K, [e] & arcus G I arcui F L, erunt arcus G H, G I ſimiles, & proinde æquales. *Q.E.D.*

a 17. 2 *huj.*
b 18. 2 *huj.*
c 3. 3 *huj.*
d 28. 3.
e 10, *vel* 13. 2. *huj.*

Coroll.

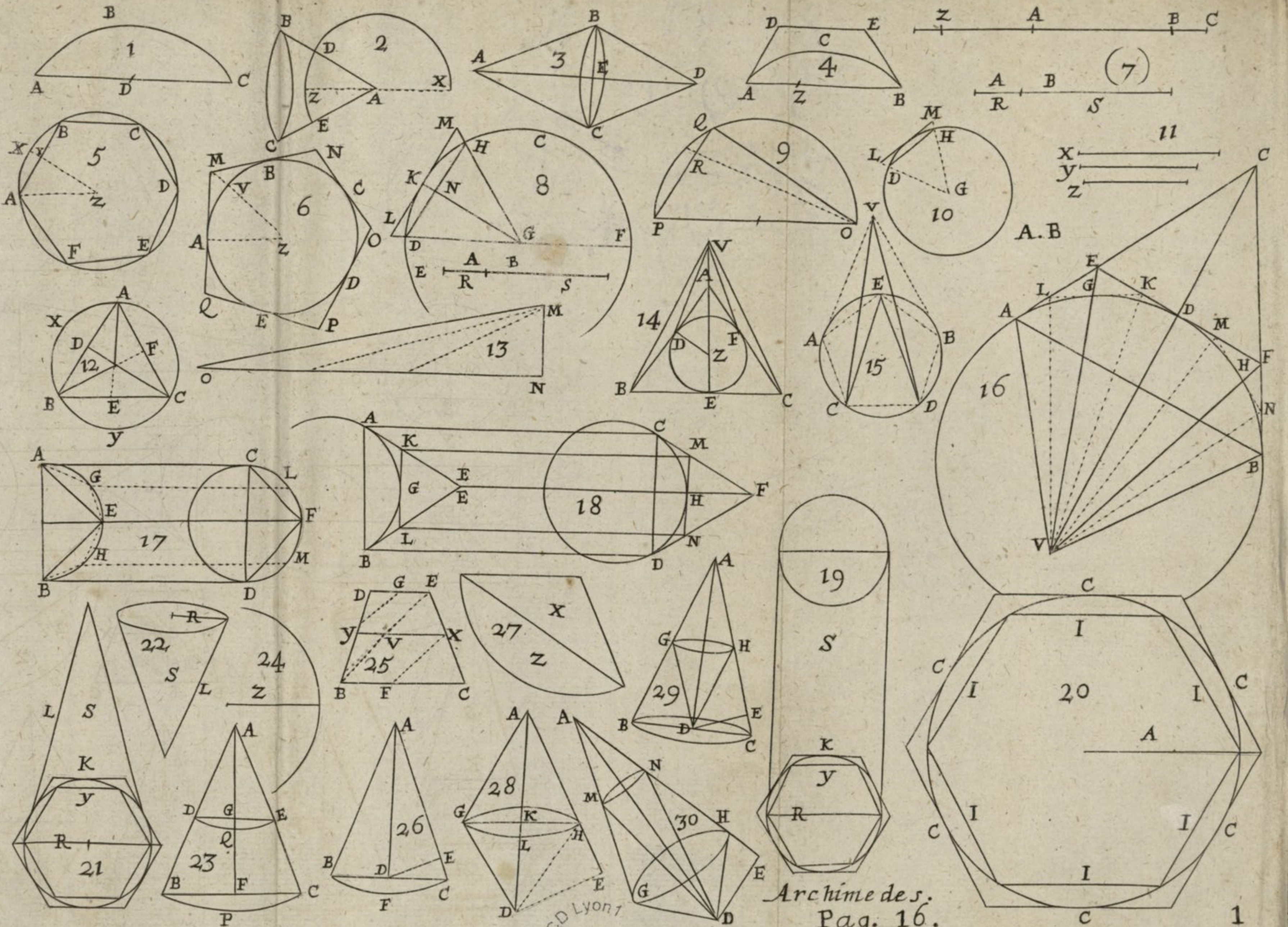
Coroll. Hinc arcus C H, H E, & similiter intercepti æquales sunt. Nam rectæ C H, H E æquantur.

Prop. XIV.

Si in sphæra maximus circulus (A B) aliquem circulum (A C) tangat; alius autem maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos (D F) majores illis, quos tangebat maximus circulus (A B) primò positus; inæquales intercipient circumferentias (K H, E I) parallelorum circulorum, quorum propiores (K H, vel B E) utrivis polorum majores erunt, quàm ut similes sint remotioribus (E I, vel G K).

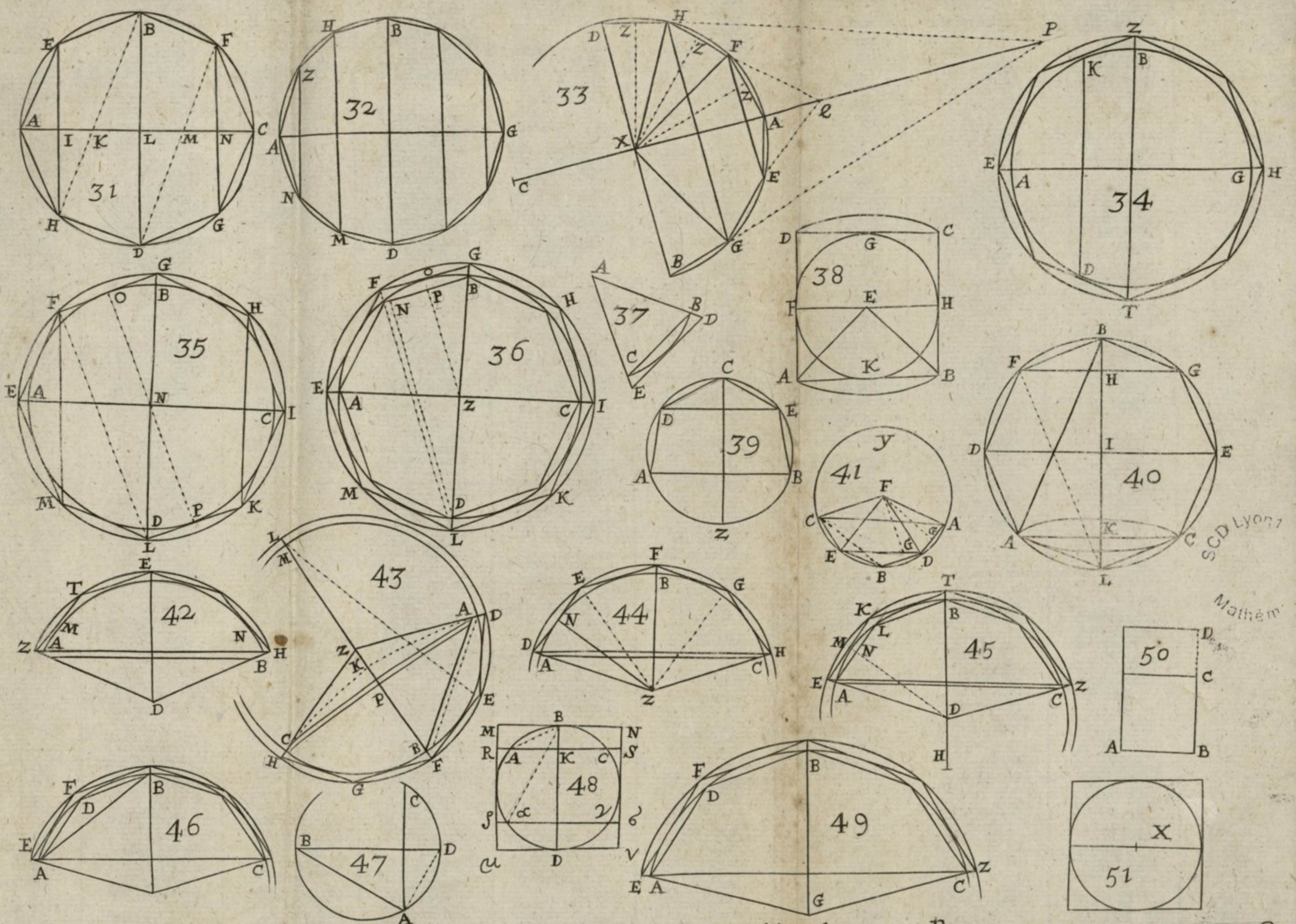
a 15. 2 huj. b 13. 2 huj. Per puncta E, K [a] describantur maximi circuli L E, C K tangentes circulum A C in C, & L: [b] ergo arcus M H, E I similes sunt; quare K H major est, quàm ut similis sit arcui E I; paritérque similes sunt arcus B N, G K, ergo B E (propior alteri polo) major est quàm ut similis sit arcui G K, unde liquet propositum.

FINIS.

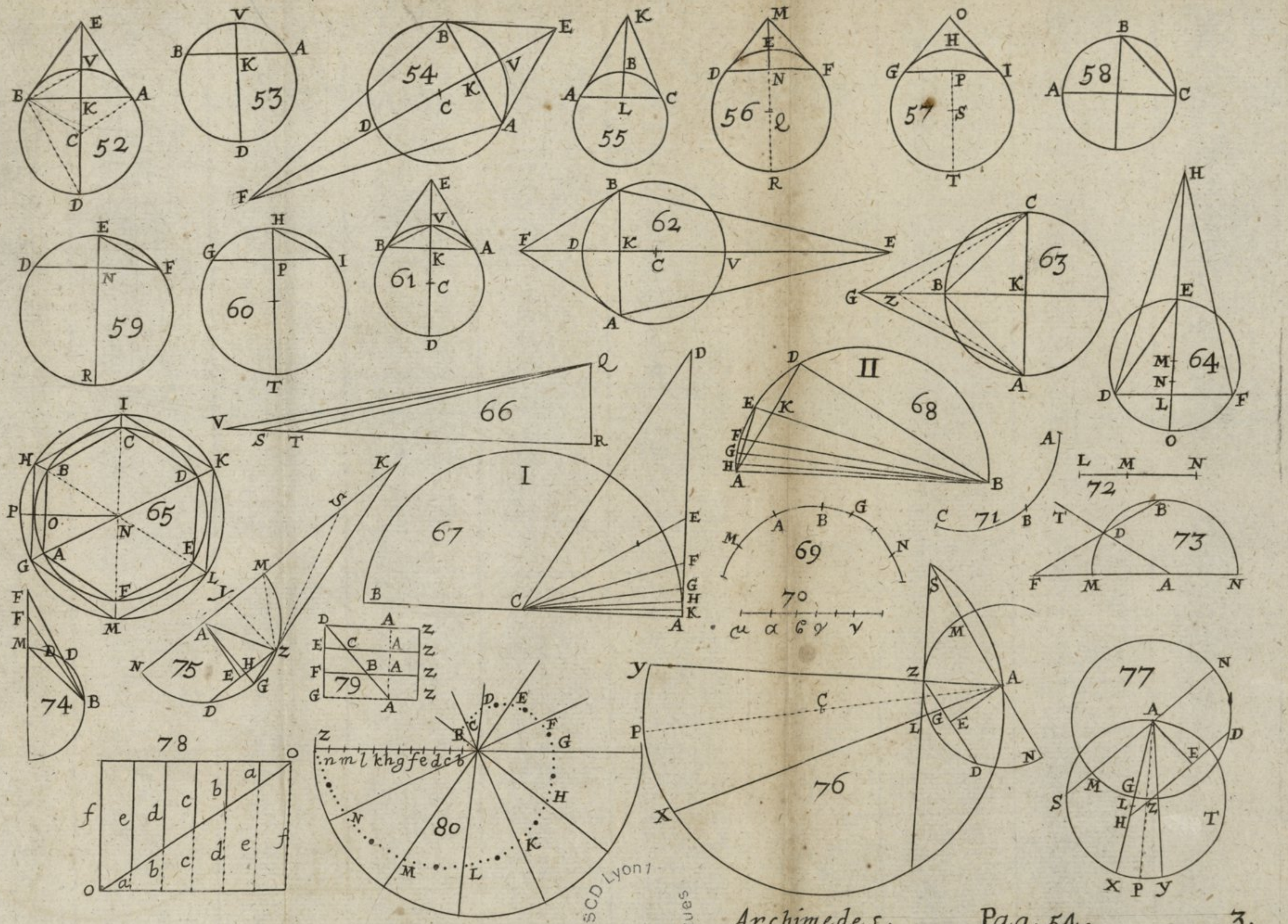


Archimedes.
Pag. 16.

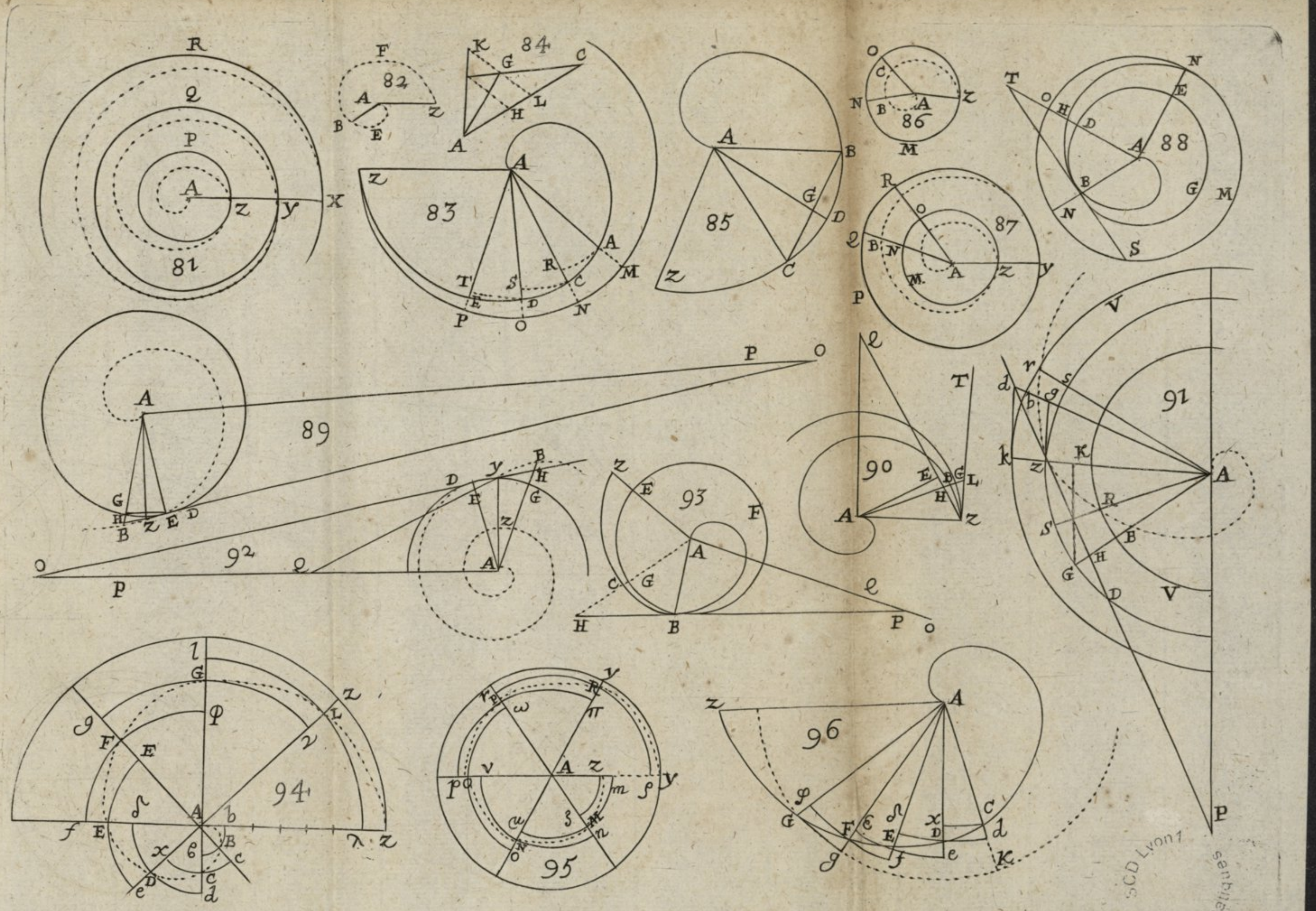
1

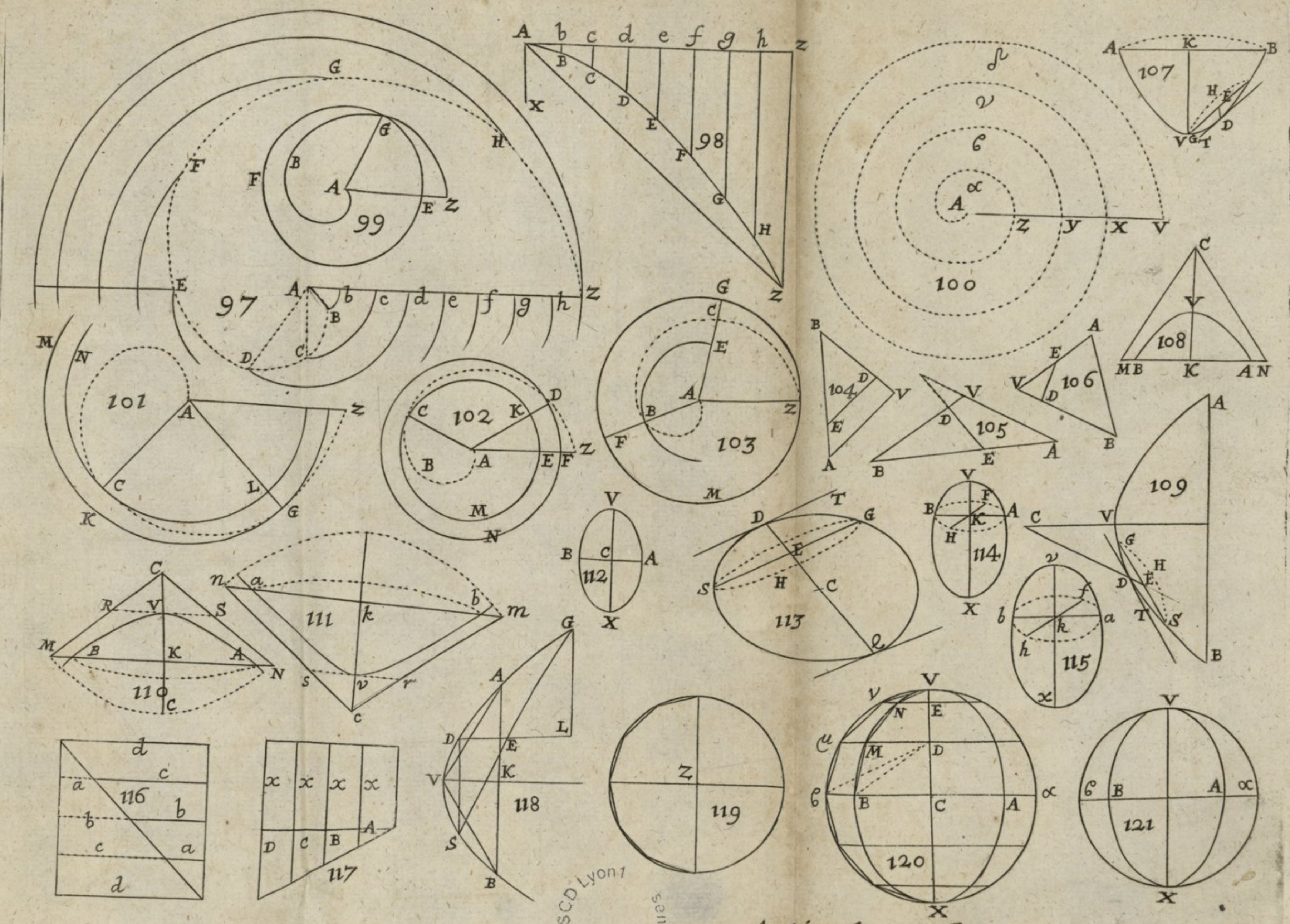


Archimedes. Pag. 32. 2.

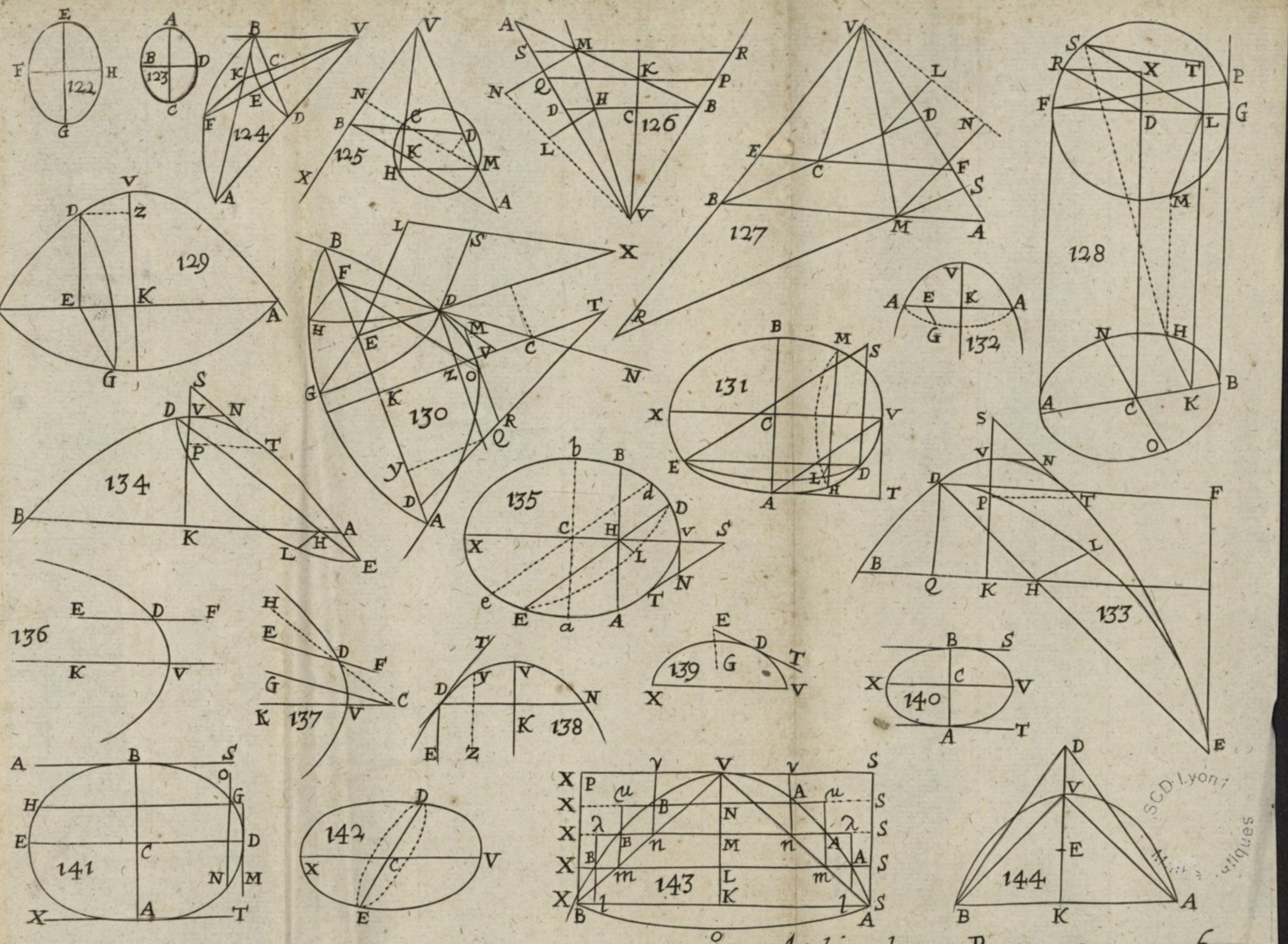


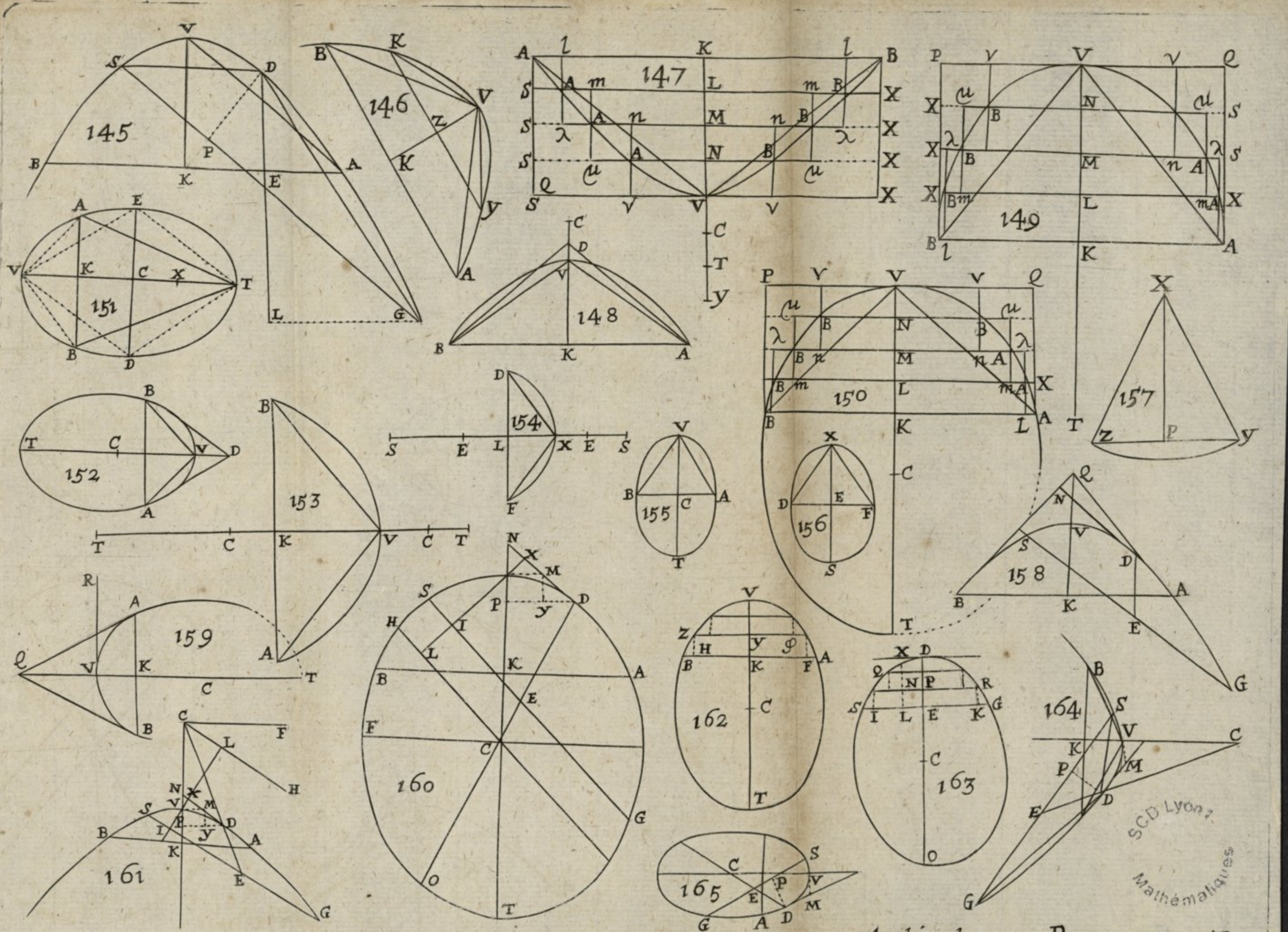
Archimedes. Pag. 54. 3.



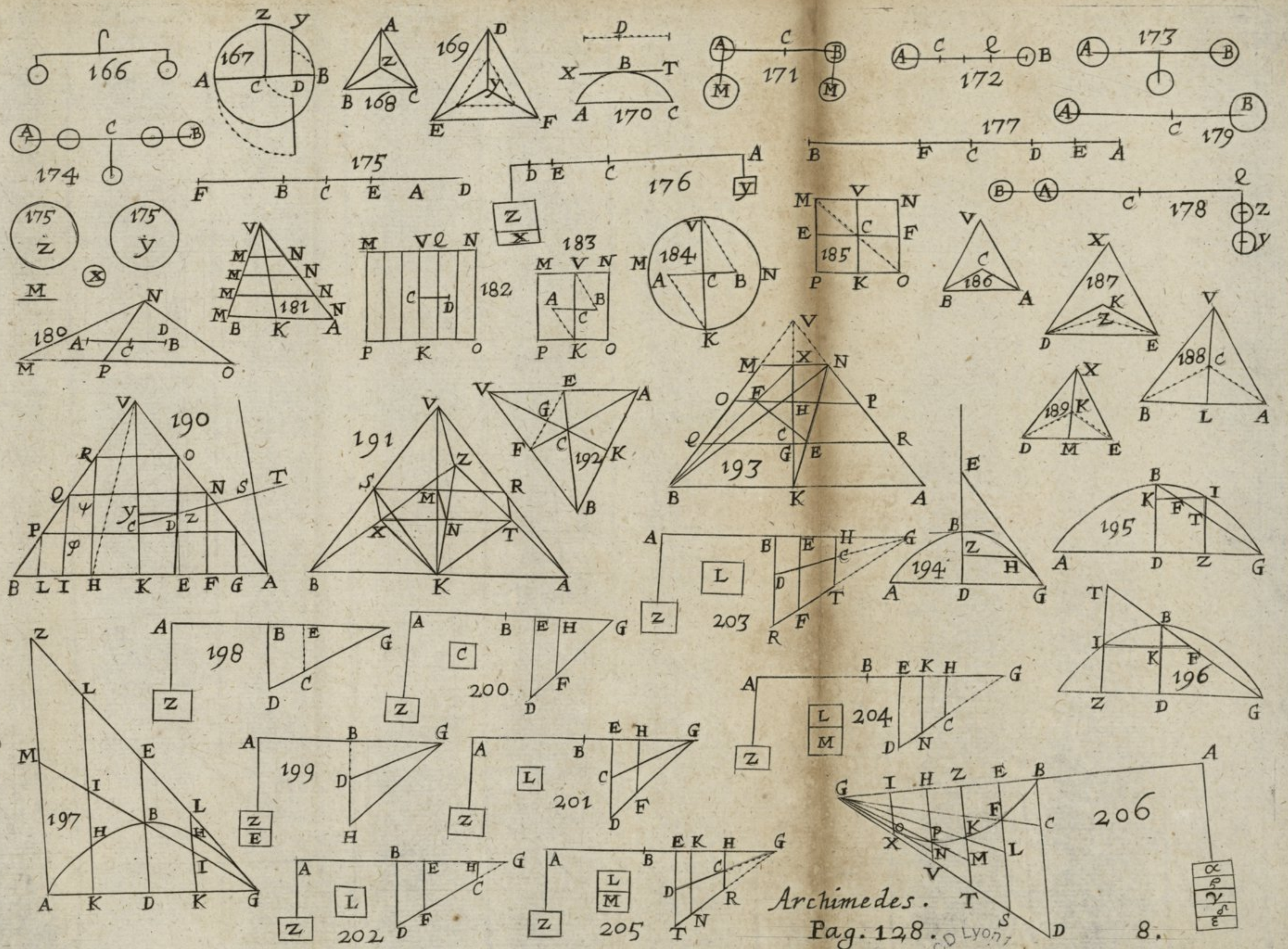


Archimedes. Pag. 78.


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144

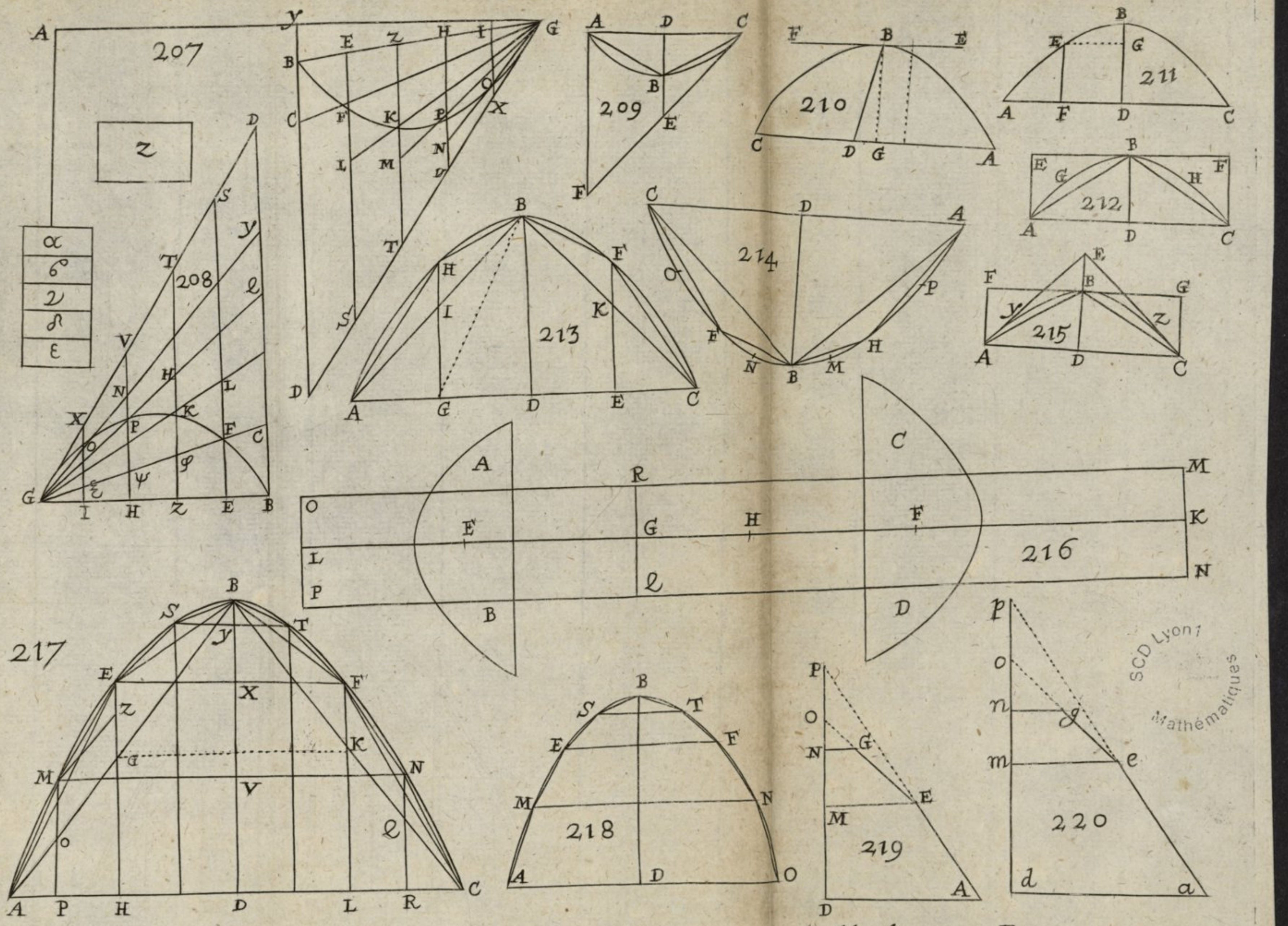


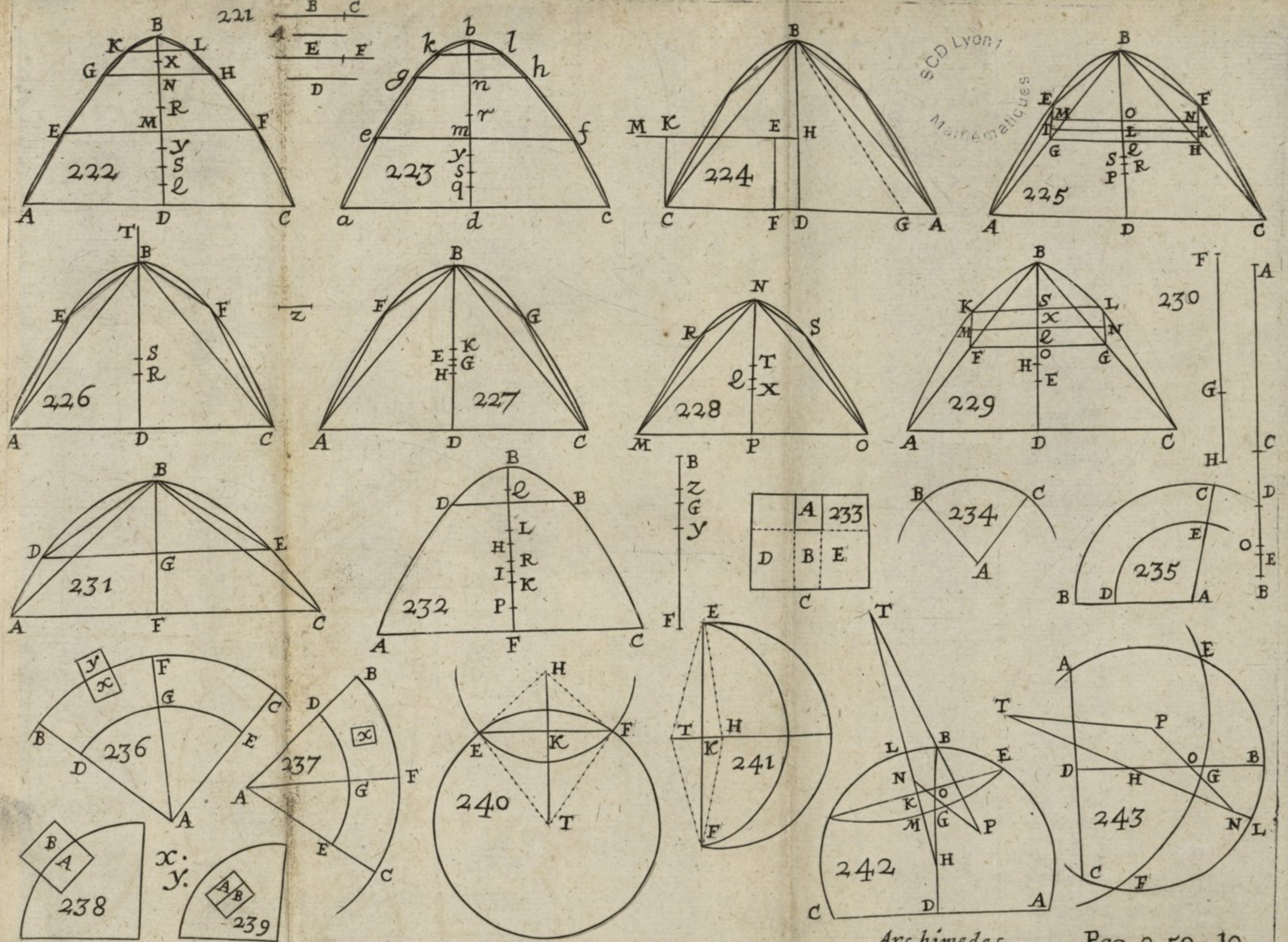
Archimedes. Pag. 104. 7.



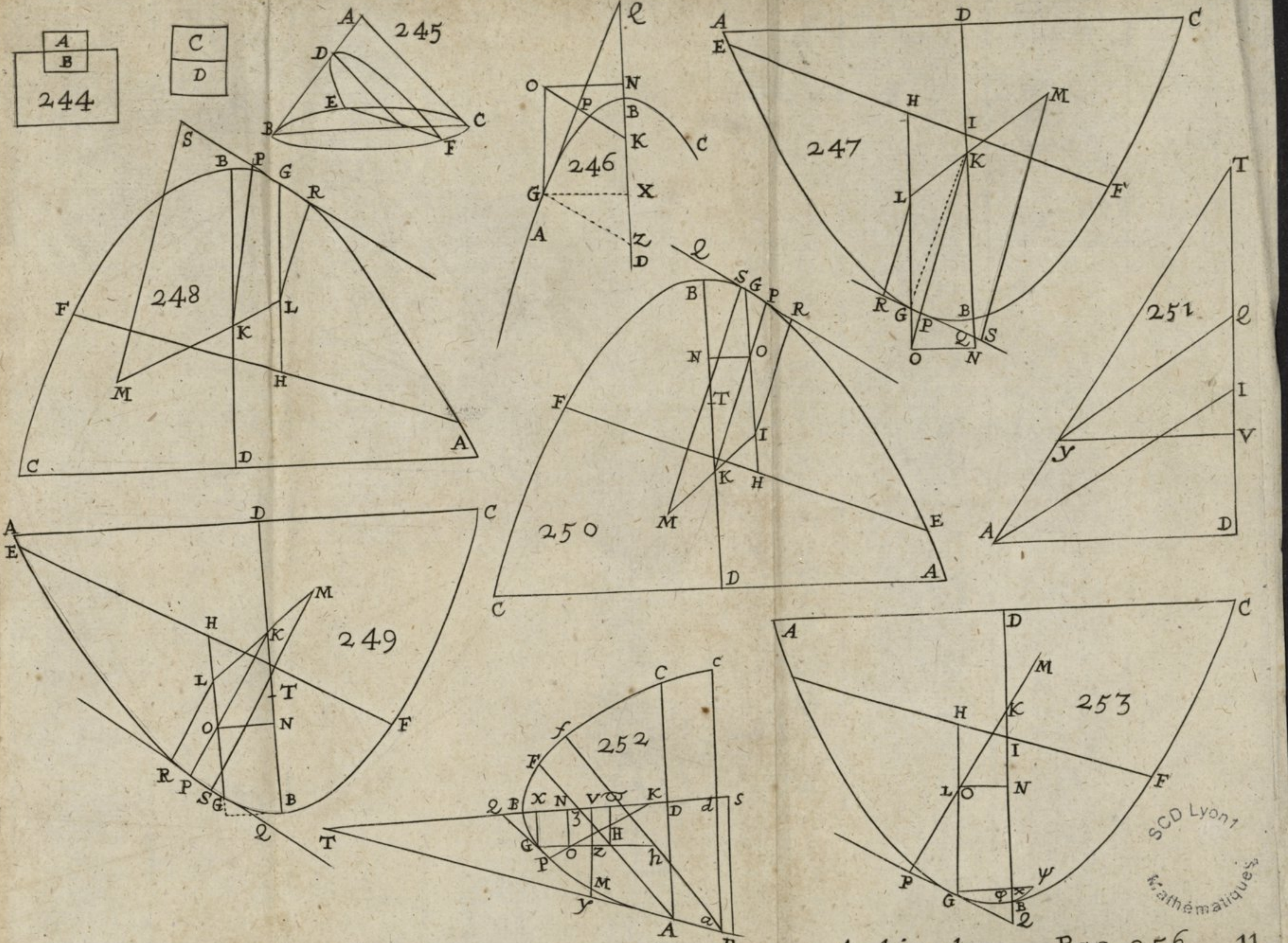
Archimedes.

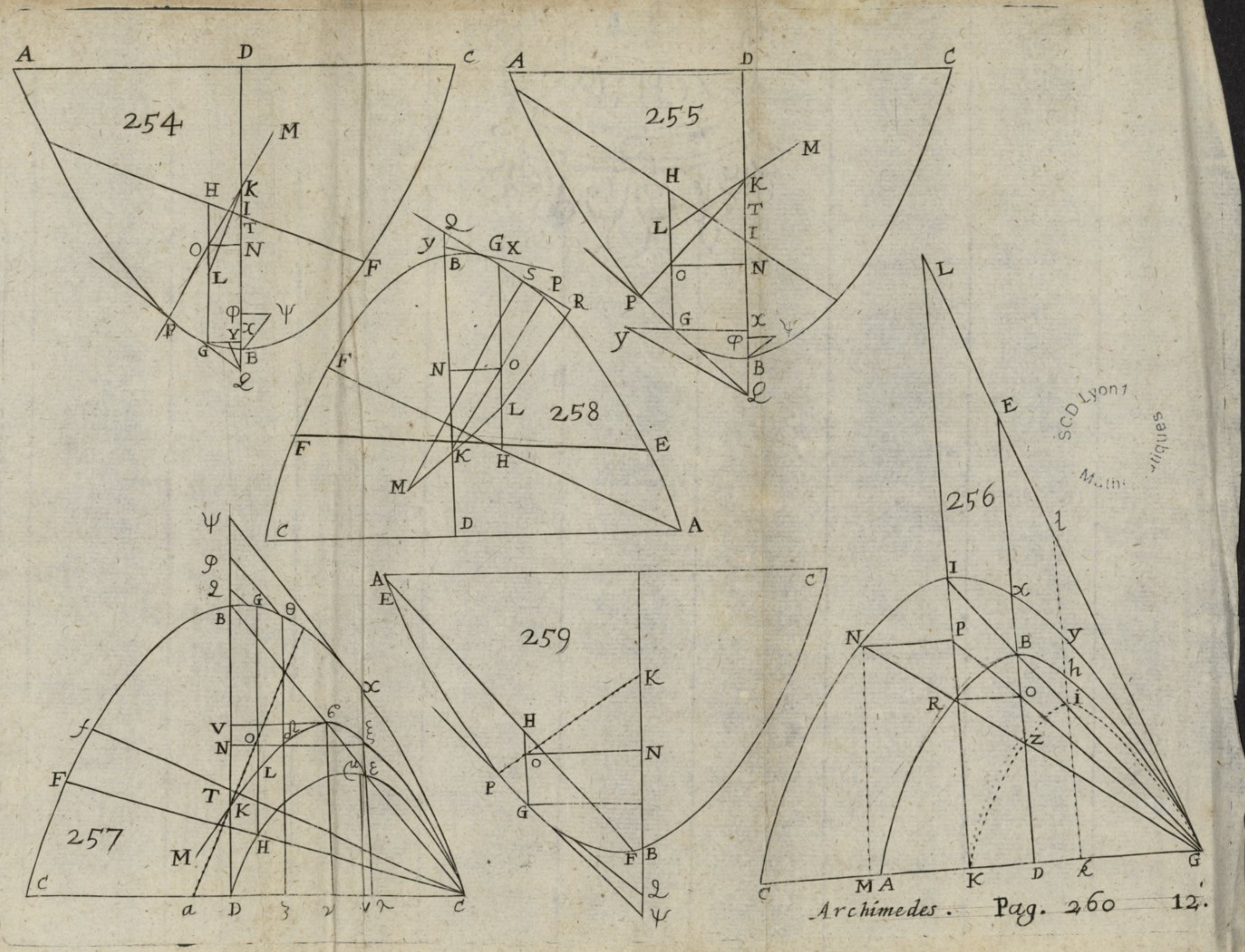
Pag. 128. 8.

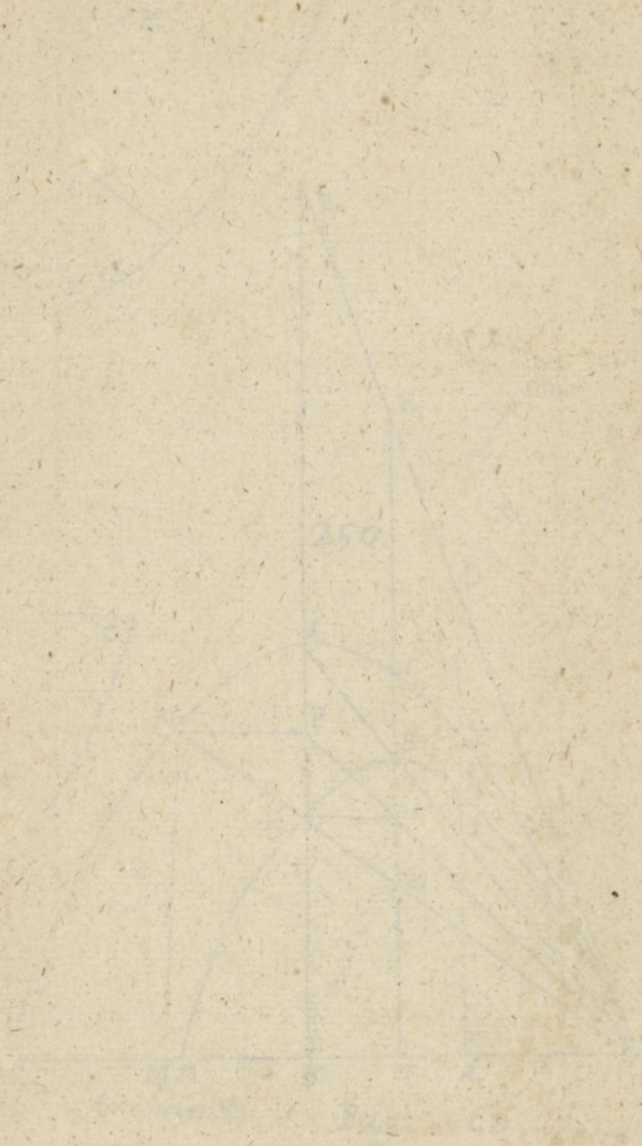

207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220



Archimedes. Pag. 2. 50. 10.


244
245
246
247
248
249
250
251
252
253


254
255
256
257
258
259


250

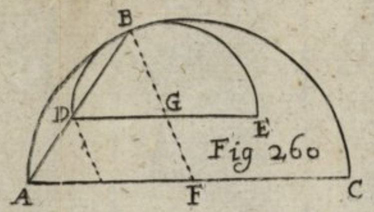


Fig 260

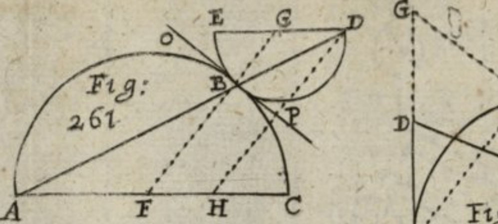



Fig: 261

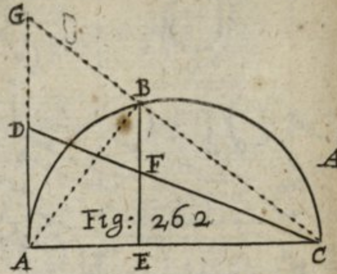



Fig: 262

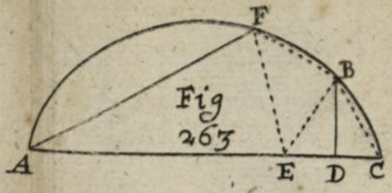



Fig 263

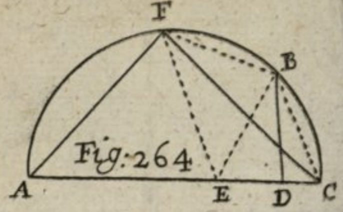



Fig:264

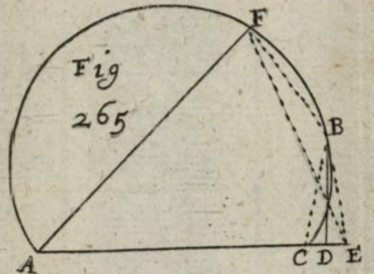



Fig 265

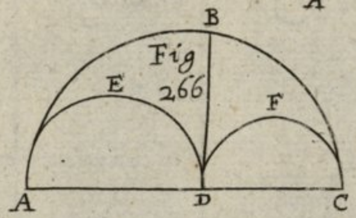



Fig 266

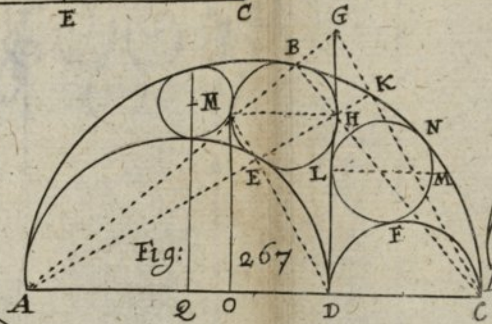



Fig: 267

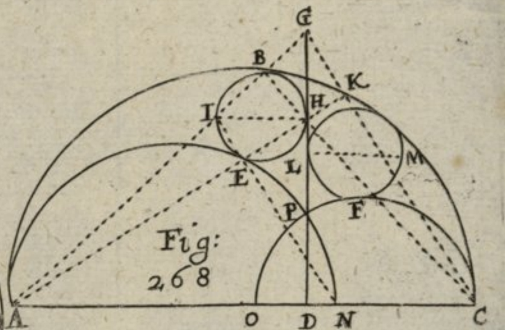



Fig: 268

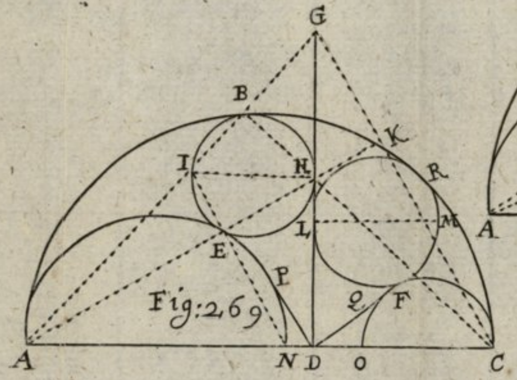



Fig:269

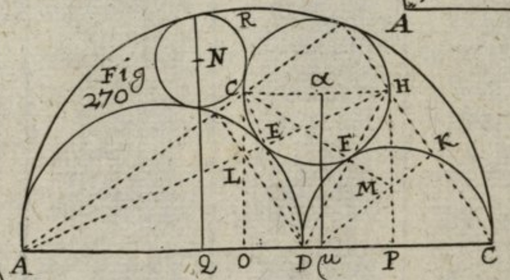



Fig 270

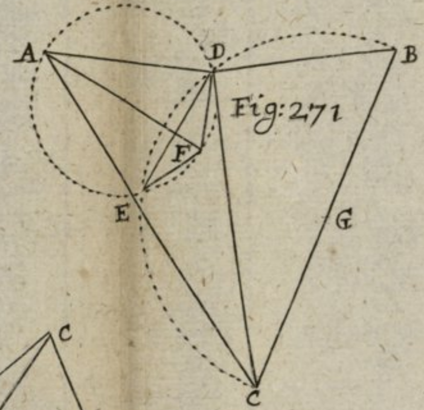



Fig:271

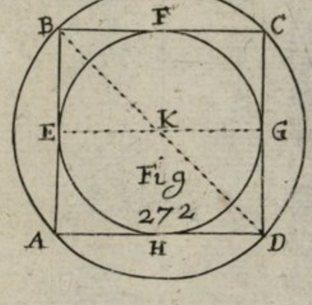



Fig 272

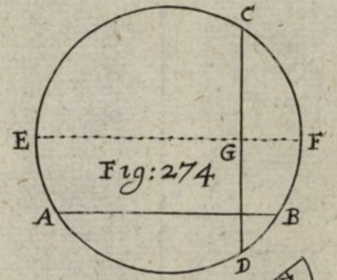



Fig:274

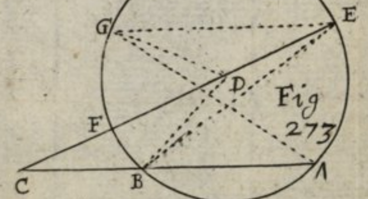



Fig 273

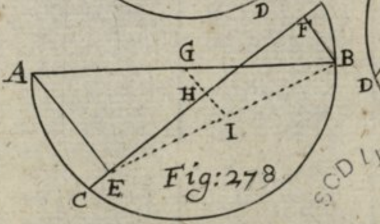



Fig:278

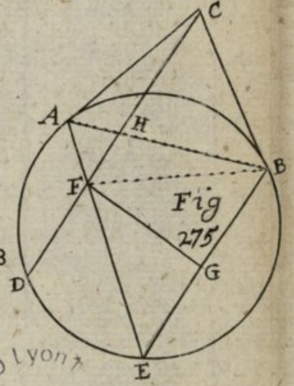



Fig 275

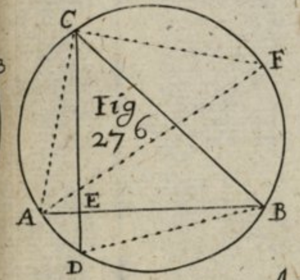



Fig 276

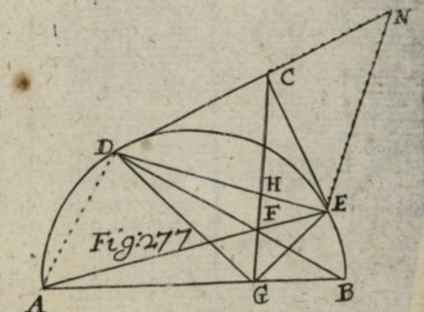
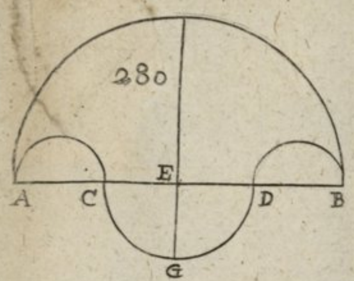
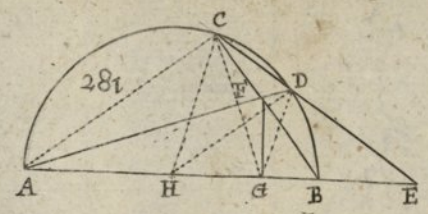
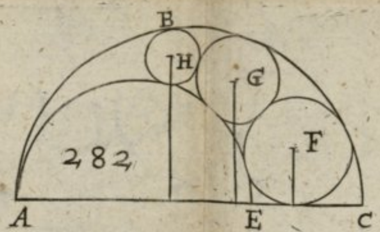
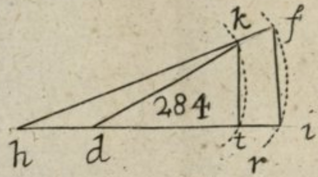



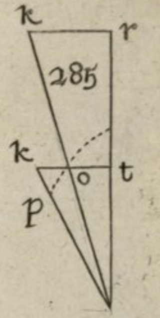
Fig:277

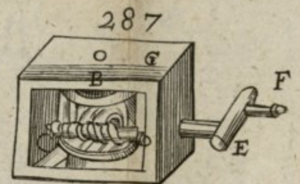


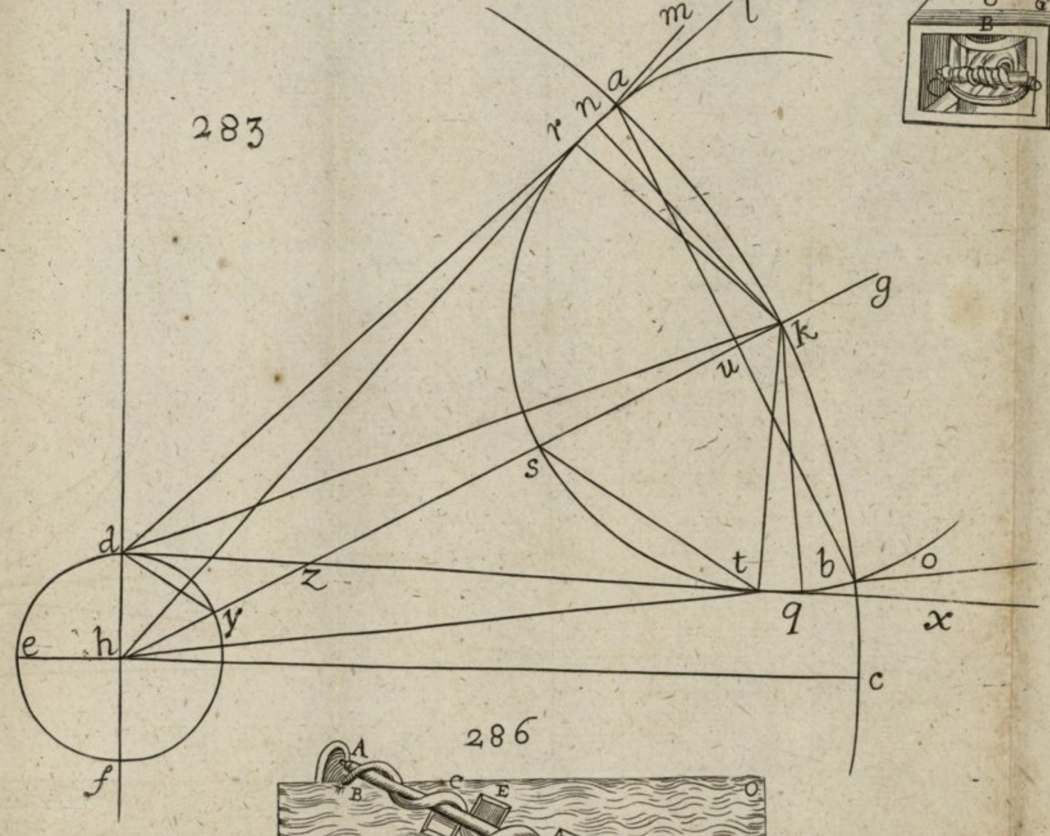


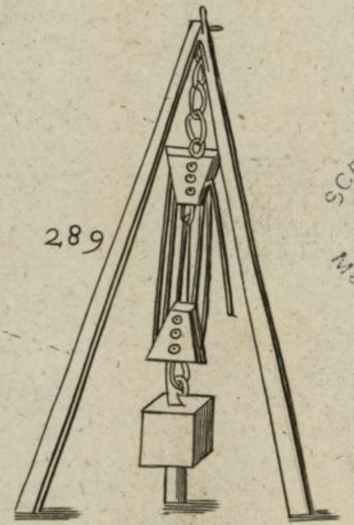


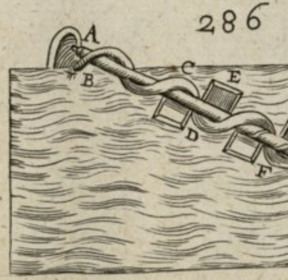


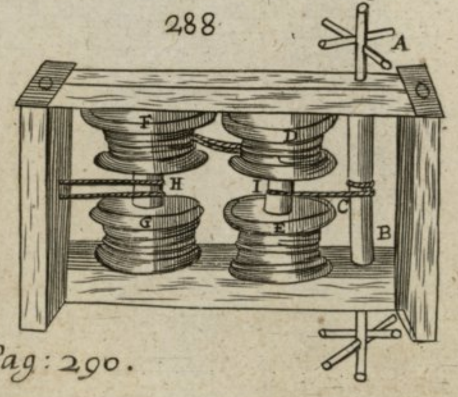




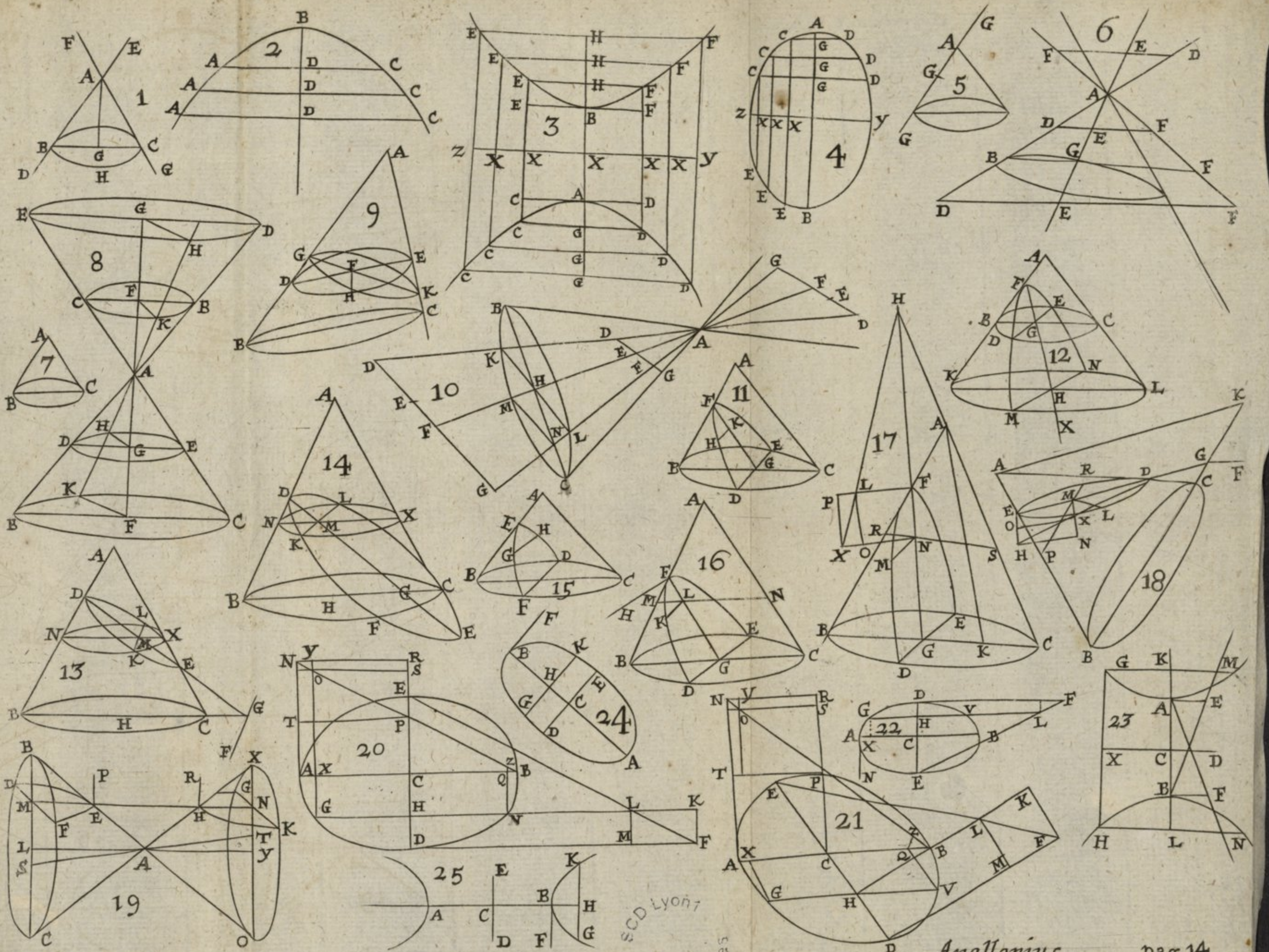






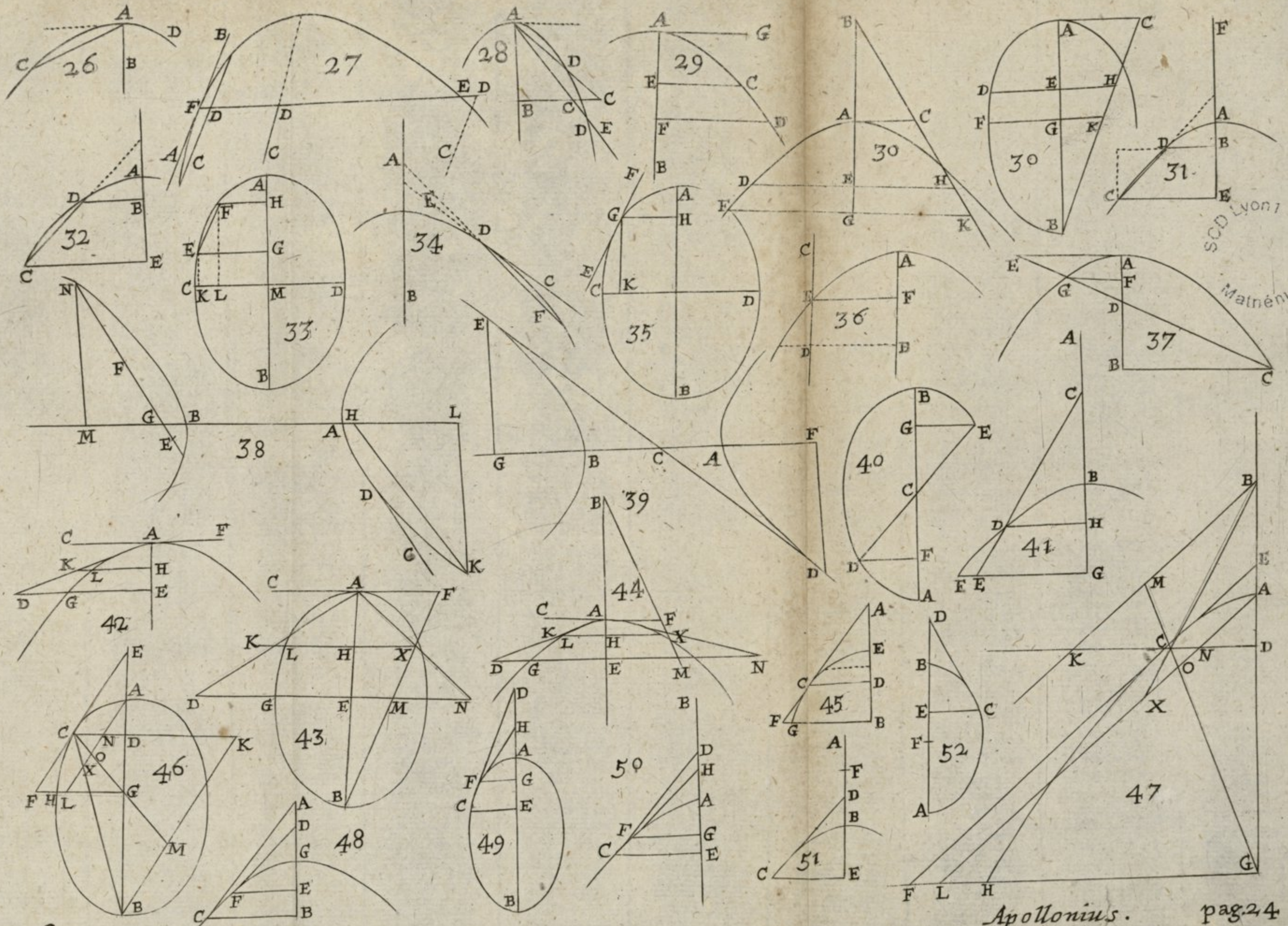


Archimed: Pag: 290.



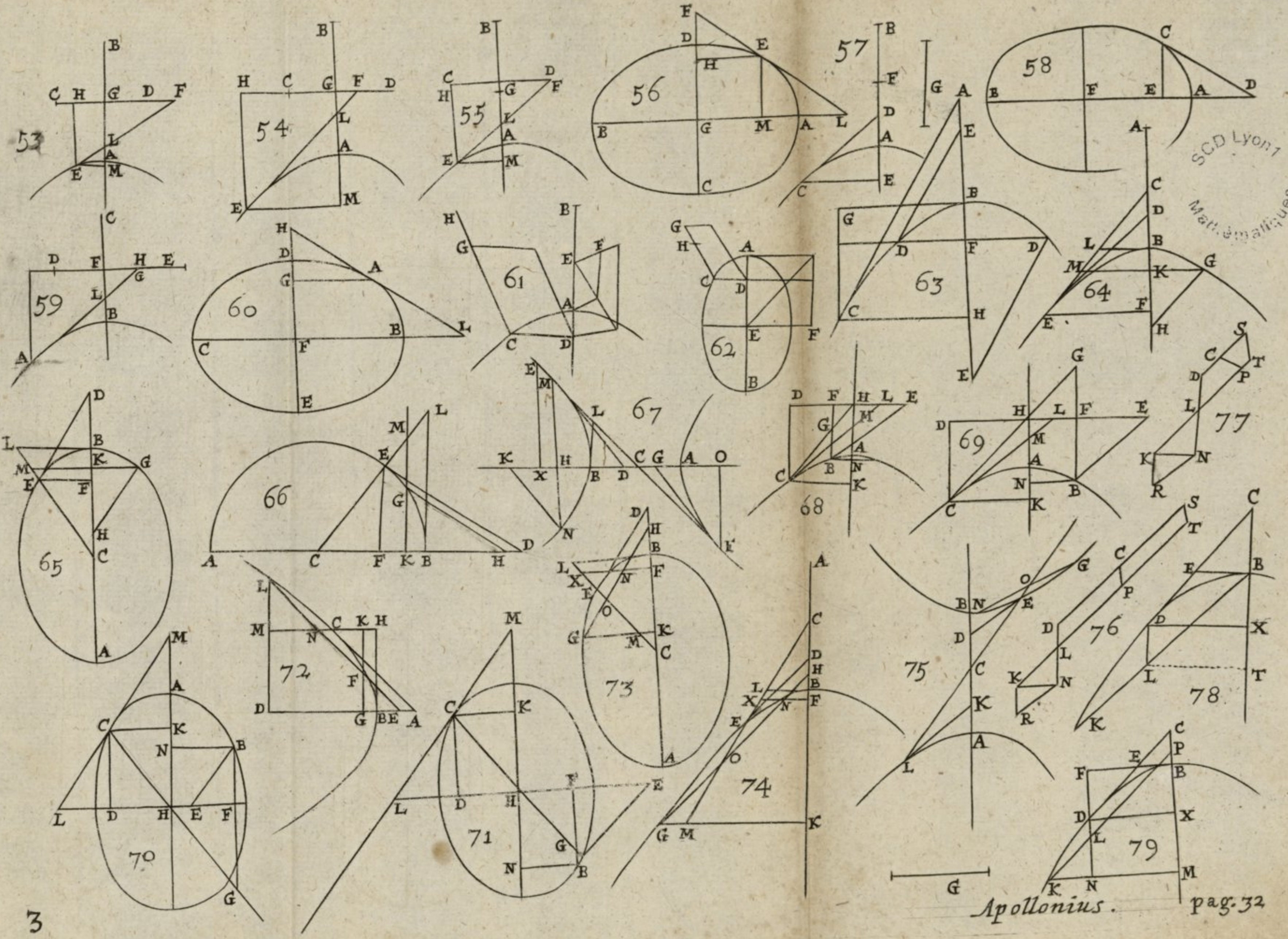
Apollonius. pag. 14

1

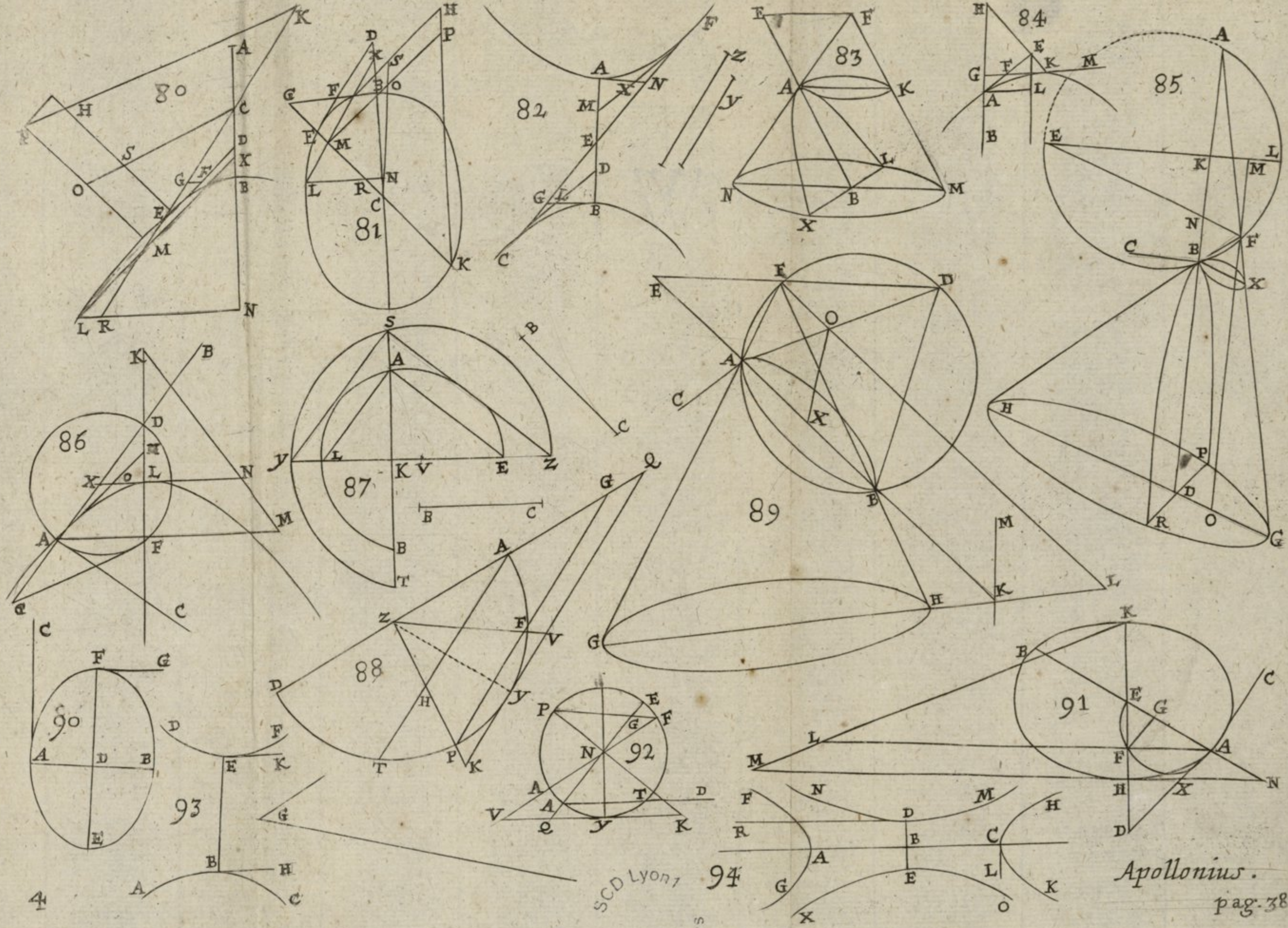


2

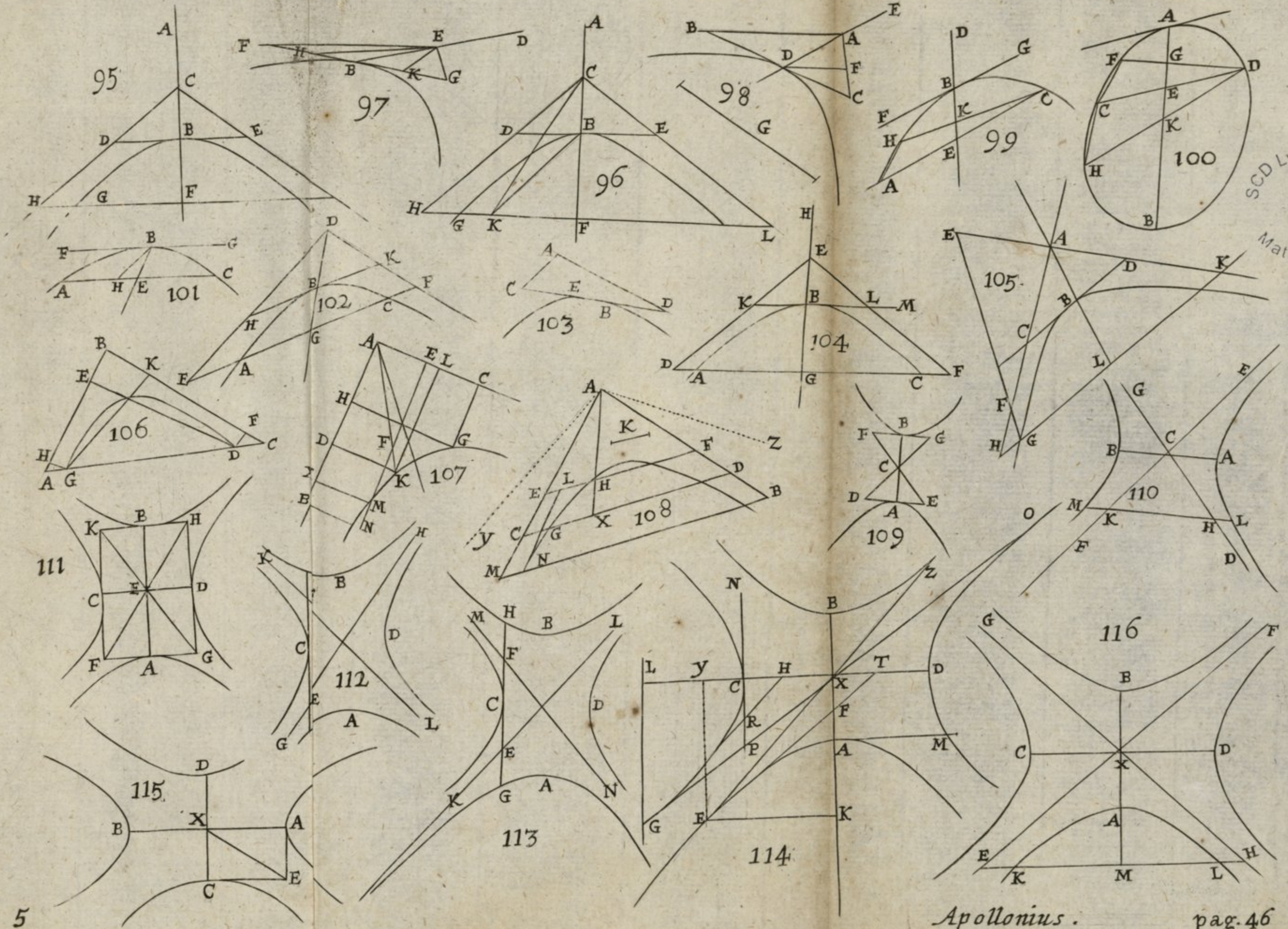
Apollonius. pag.24

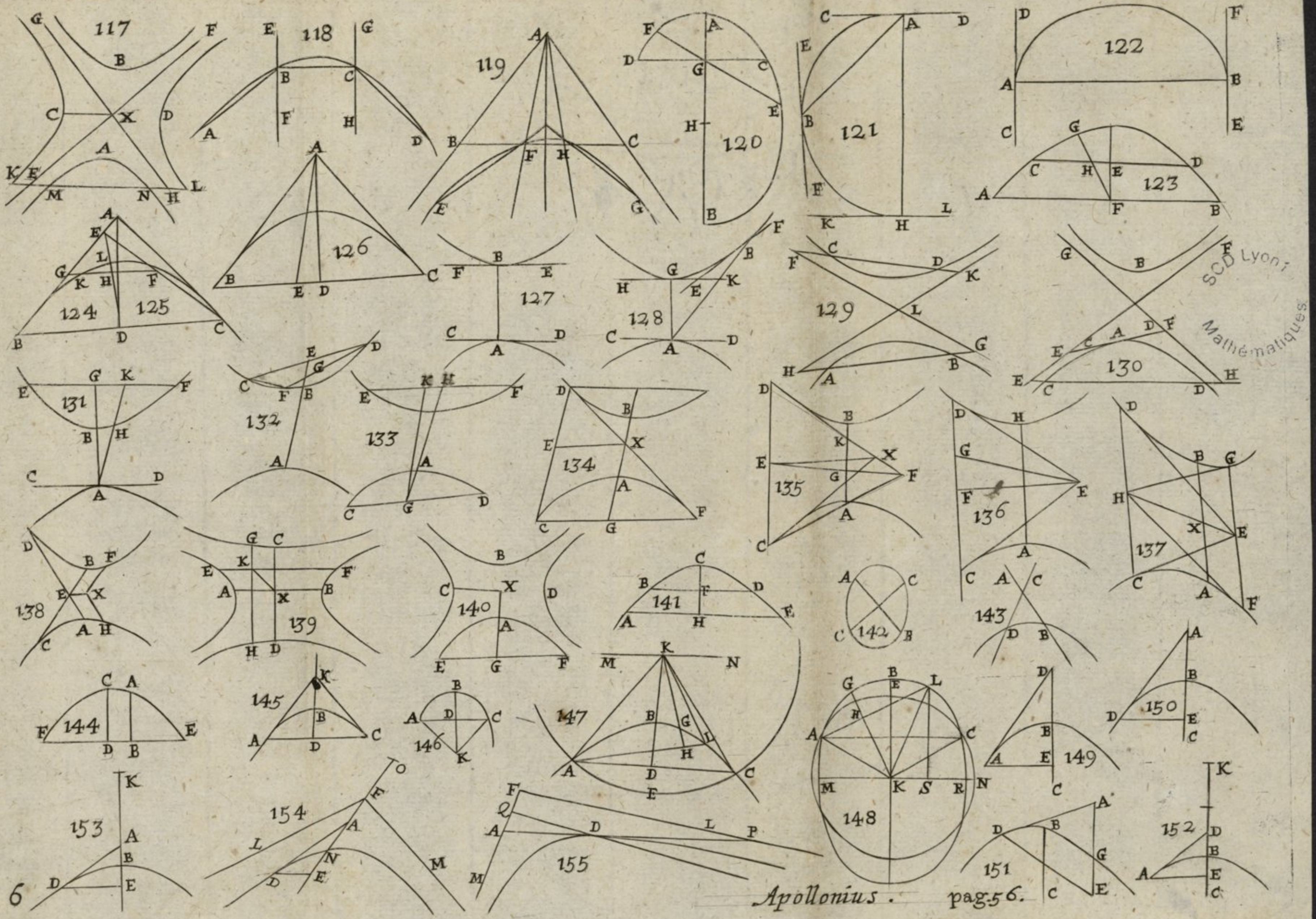

53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79

3

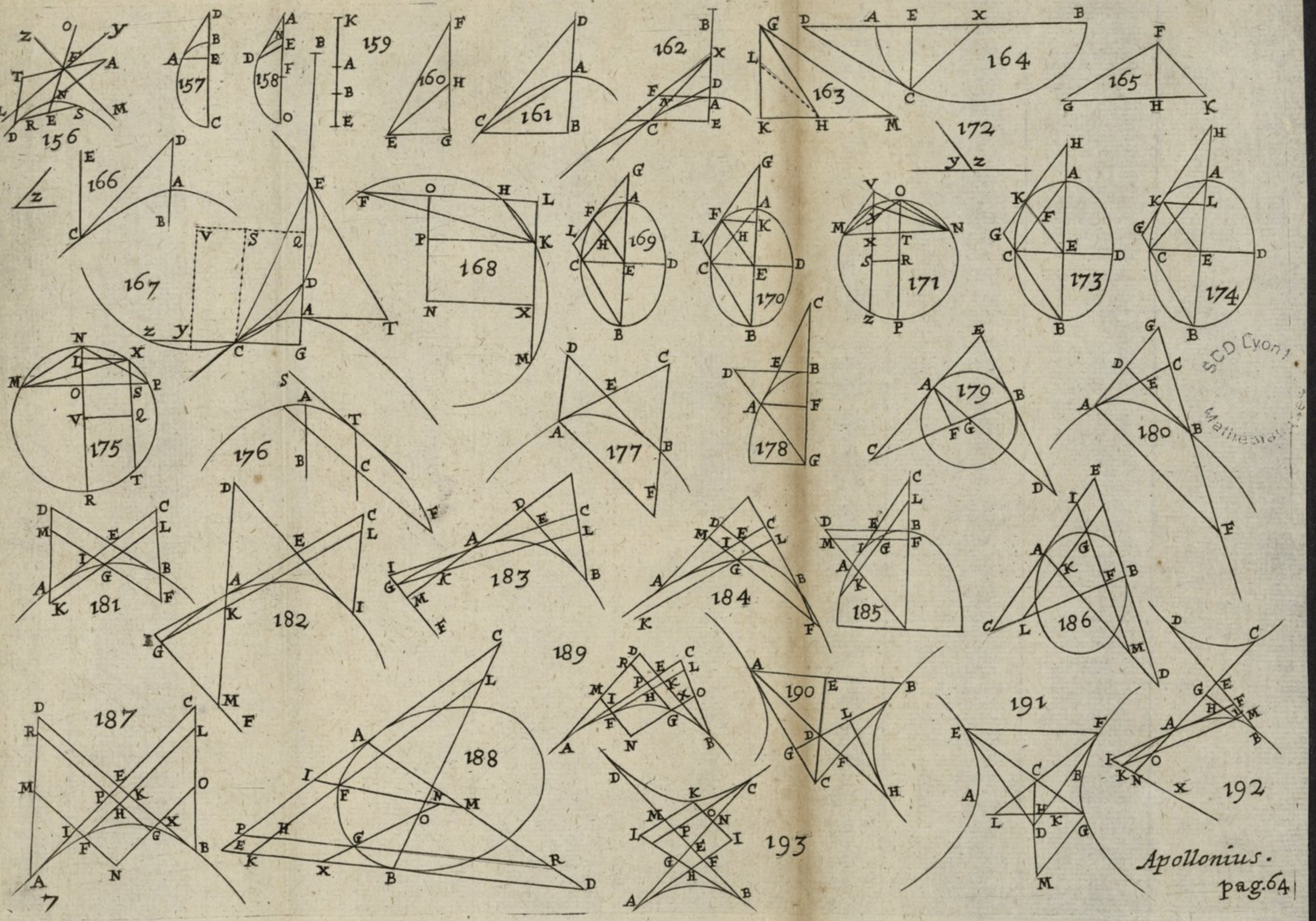


Apollonius.

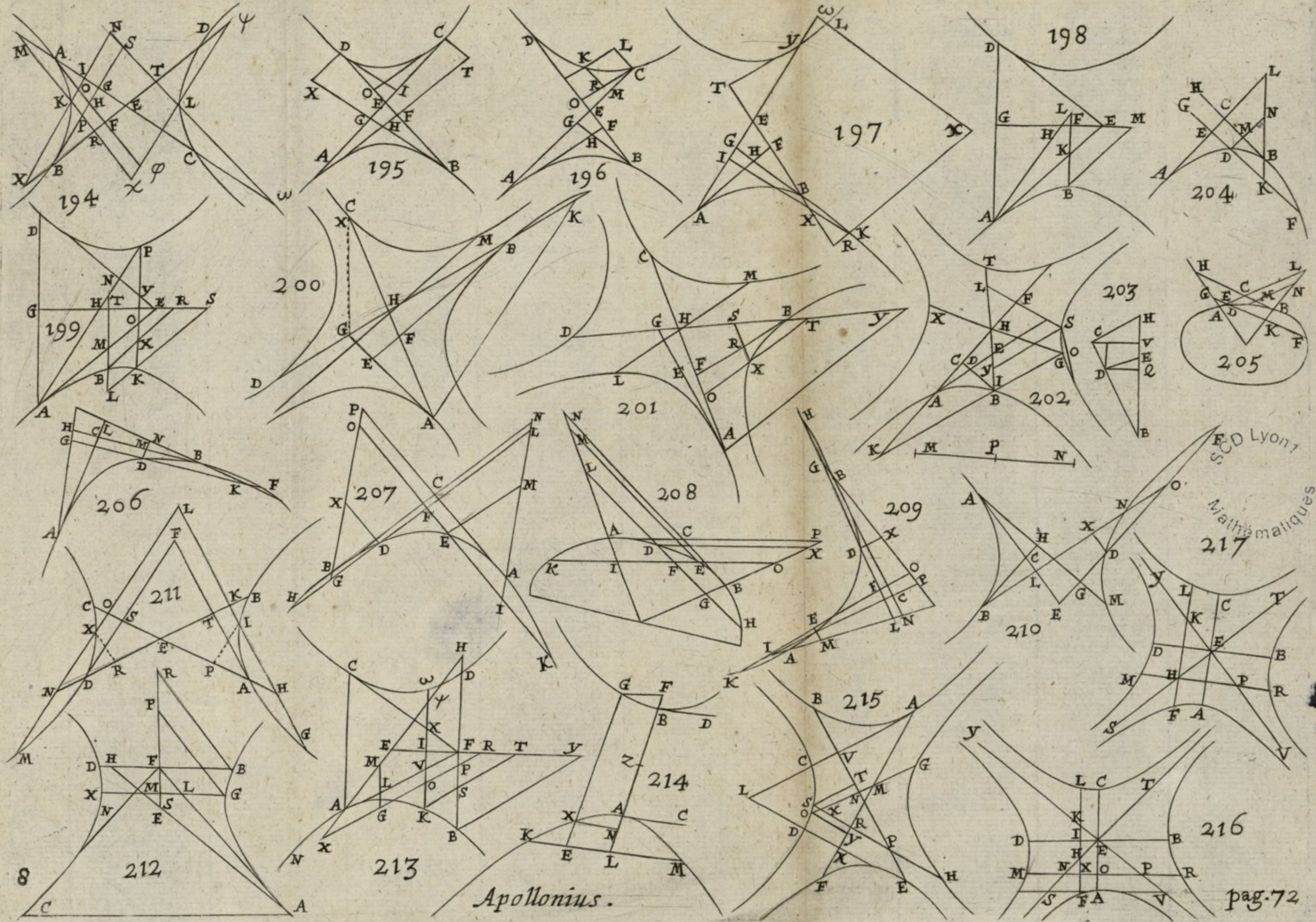

95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116



6 *Apollonius*. pag.56.

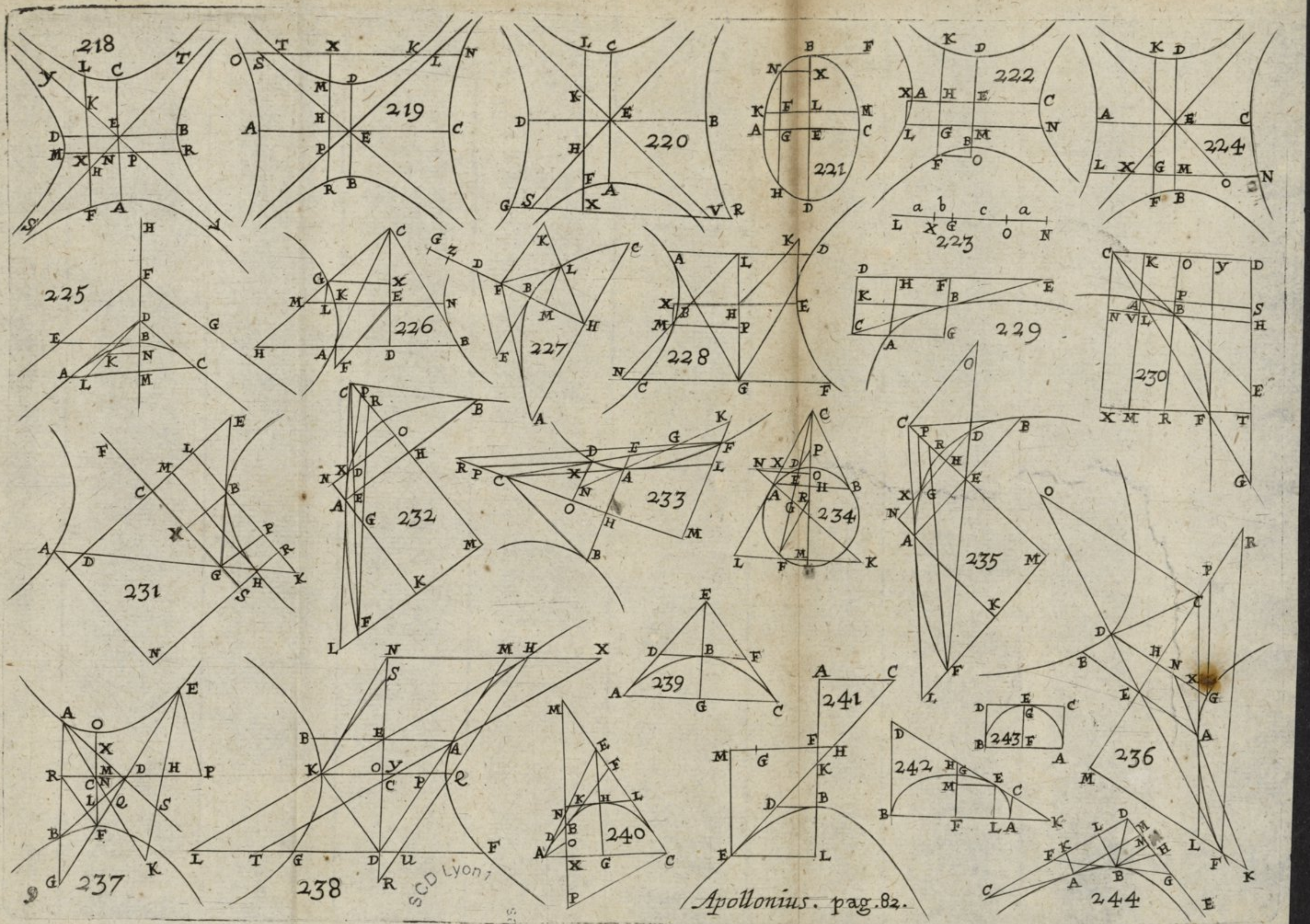


Apollonius.
pag. 64

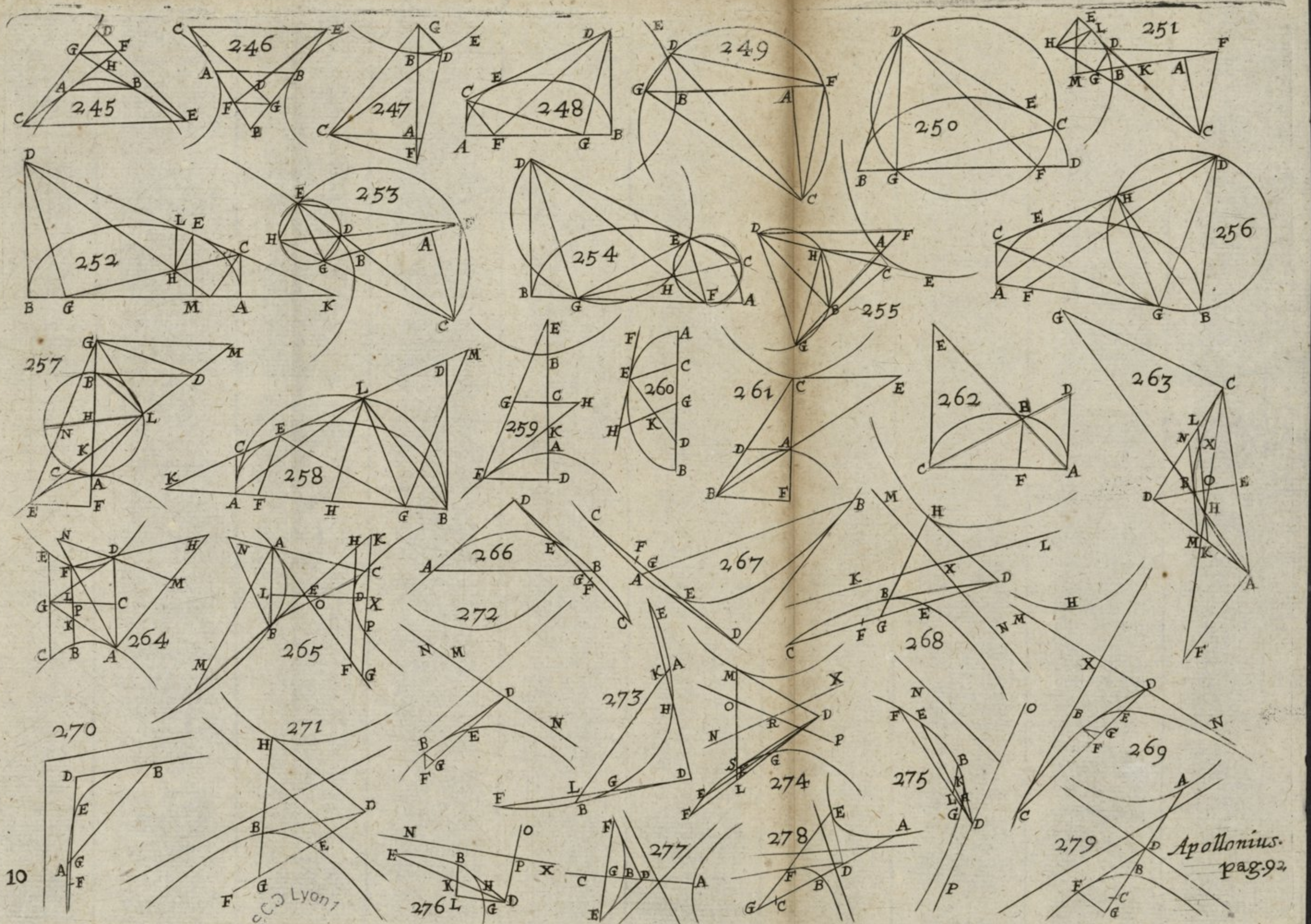


8

Apollonius.

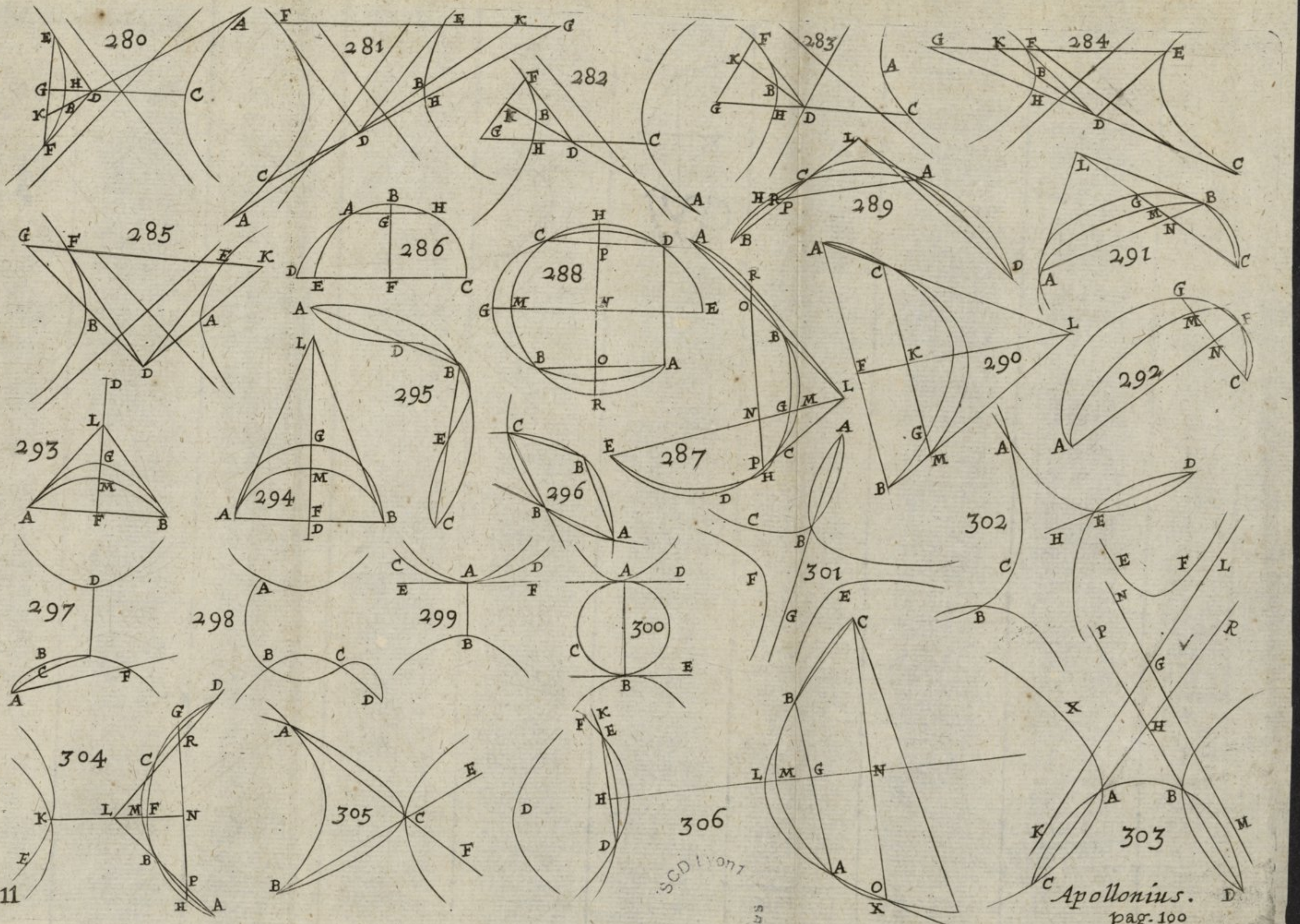


Apollonius. pag. 82.



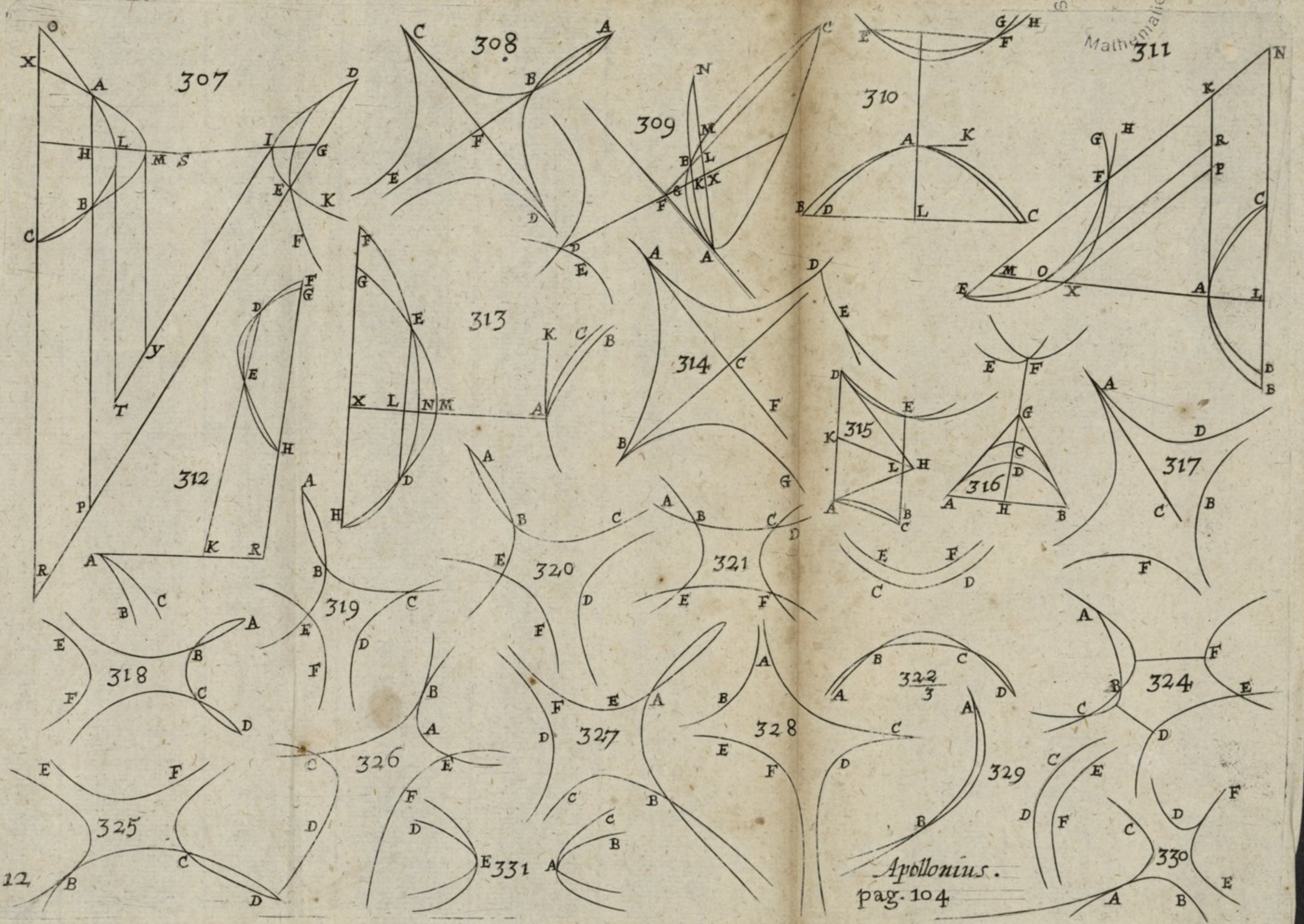
10

Apollonius. pag.92

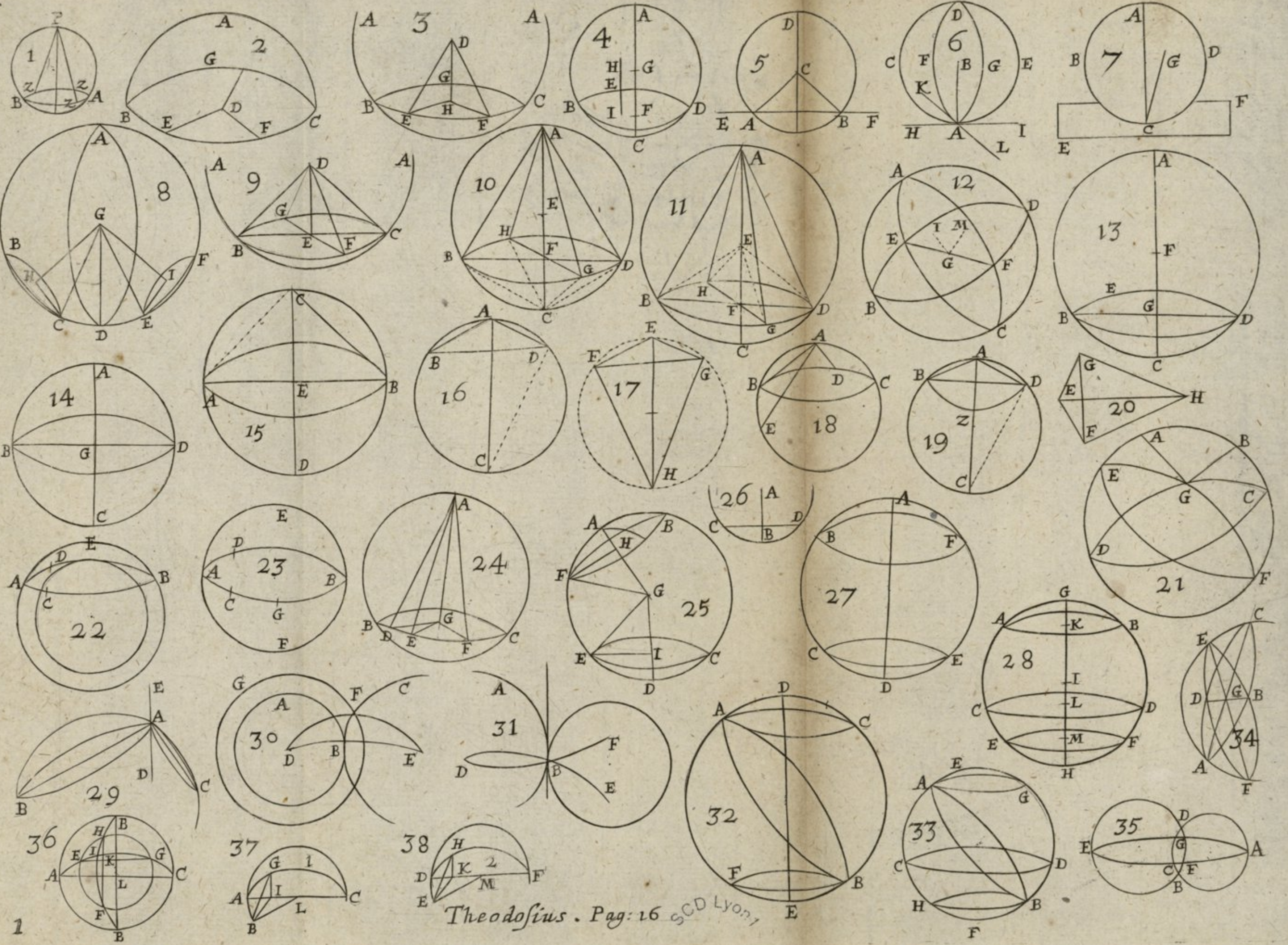


11

Apollonius.
pag. 100

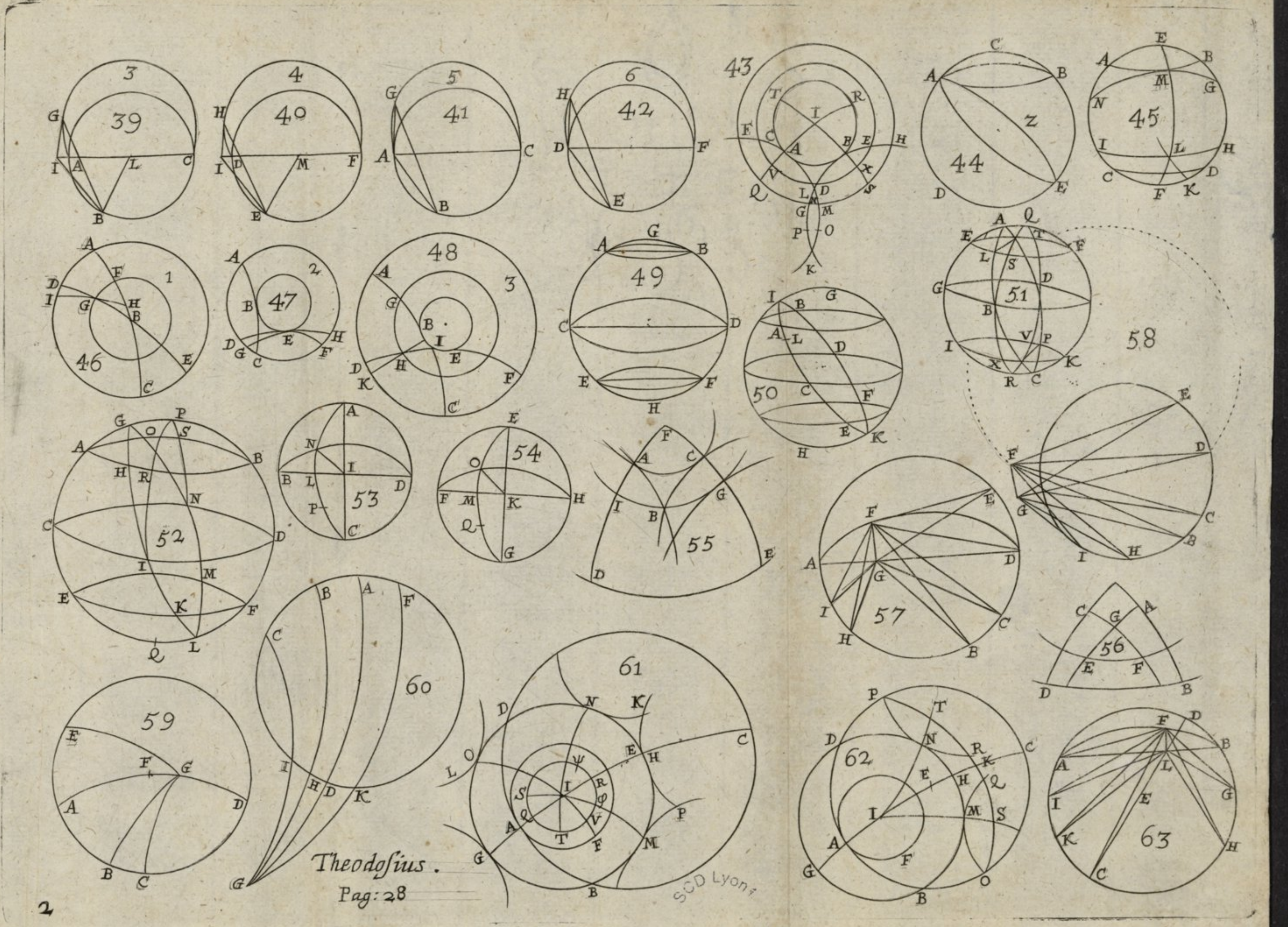


Apollonius.
pag. 104



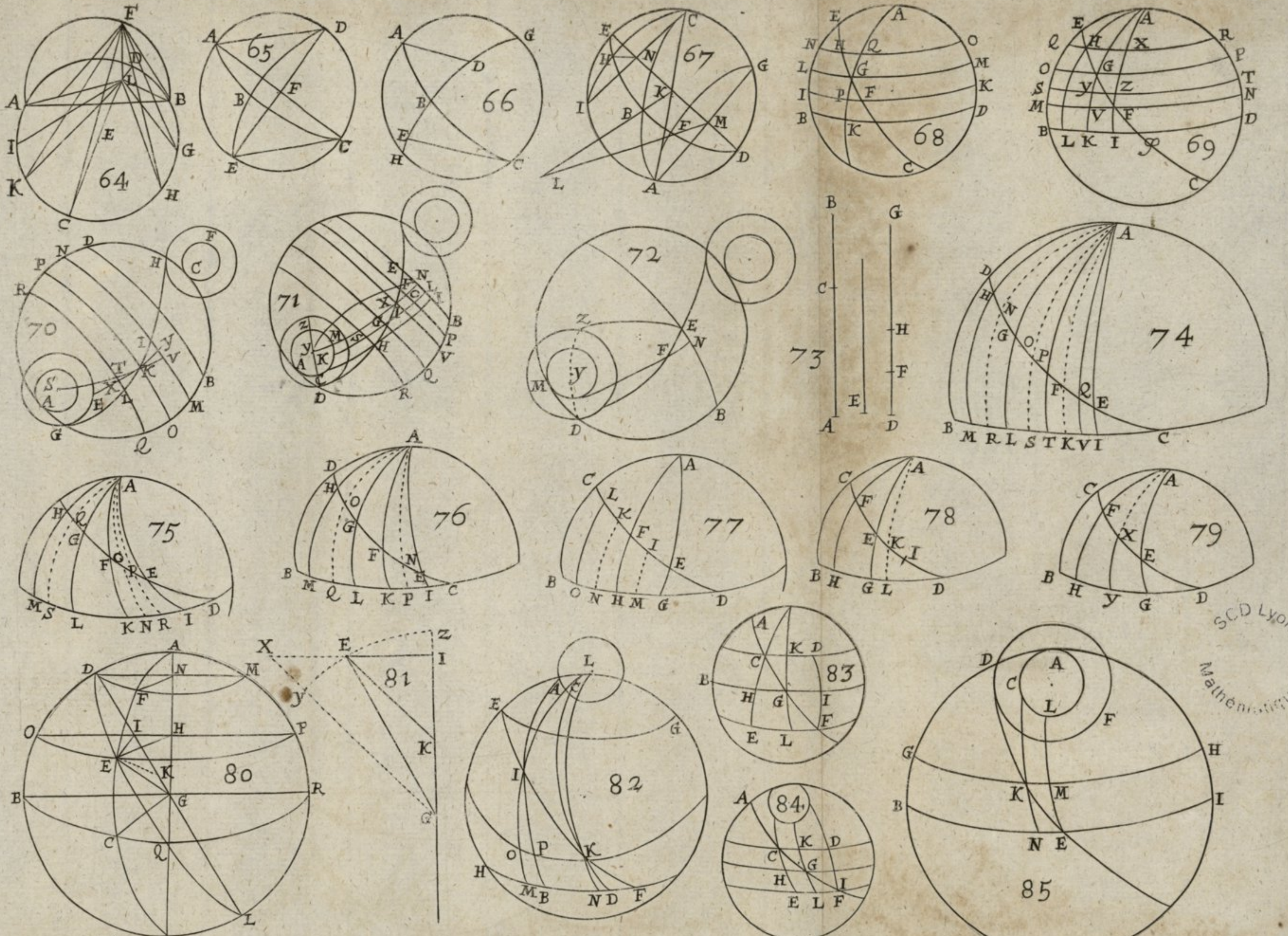
Theodosius . Pag: 16

1



Theodosius.
Pag: 28

2



3 *Theodosius.* Pag:38