EXERCICES

SUR

LA PHYSIQUE.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, nº 12.

EXERCICES

SUR

LA PHYSIQUE,

OU

RECUEIL

DE QUESTIONS, DE PROBLÈMES

ET D'ÉCLAIRCISSEMENS,

SUR LES DIFFÉRENTES PARTIES DE CETTE SCIENCE,

AVEC LES SOLUTIONS.

PAR J.-I. PIERRE,

Licencié es-sciences, Professeur de Mathématiques et de Physique.

A PARIS,

CHEZ BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE,

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, n° 55.

1838

Tout Exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas comme ci-dessous, la signature du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la Loi, les fabricans et les débitans de ces Exemplaires.

Bachelier

PRÉFACE.

Convaincu par notre propre expérience qu'il ne suffit pas, pour bien savoir la Physique, d'en avoir étudié les principales théories, nous étions dans l'habitude de faire résoudre aux élèves dont la direction nous était confiée, un grand nombre de questions, classées méthodiquement, dans le but de leur rendre ces théories plus familières.

Les questions que nous publions dans ce recueil, fruit des excellentes leçons de MM. Dulong, Pouillet, Despretz, Babinet et Lamé, et choisies parmi les nombreux exercices complémentaires dont nous venons de parler, ne fussent probablement jamais sorties de l'enceinte de notre modeste classe, sans les avis encourageans de personnes éclairées qui leur ont attribué quelque utilité.

C'est donc d'après leurs conseils que cette publication est faite, et avec l'intention d'être utile aux personnes qui se livrent à l'étude de la Physique.

Il existe un grand nombre de recueils de problèmes sur les différentes parties des mathématiques; mais je ne connais aucun ouvrage de ce genre sur la physique : peut-être cela tient-il à ce qu'on ne l'exigeait pas pour l'admission à l'École Polytechnique.

Nous avons essayé de remplir cette lacune, en présentant aux élèves qui se destinent à cette école, ou à l'École Normale, et qui ont le désir de tenir un rang distingué dans leurs classes, un grand nombre de questions du genre de celles qui peuvent être demandées dans un examen oral ou dans une composition écrite.

Ils y puiseront en outre, nous l'espérons du moins, l'avantage de se mieux préparer, par une étude plus approfondie des principes fondamentaux de la Physique, aux importantes applications de cette belle science, applications qui deviennent de jour en jour plus utiles et plus nombreuses.

Ce recueil sera divisé en deux parties :

La première renfermera les questions relatives à la Physique générale, à la Barologie, à la

Théorie de la Chaleur, à l'Hygrométrie et à la Capillarité.

La seconde renfermera celles qui sont relatives à l'Électricité, au Magnétisme, à l'Électro-Magnétisme, à l'Acoustique et à l'Optique.

Je dois rendre hommage à la vérité, en déclarant que quelques-unes des plus belles questions m'ont été communiquées par l'un de mes savans professeurs, par M. Babinet. Qu'il me soit permis de lui en témoigner ici publiquement ma sincère et vive reconnaissance.

Paris, le 20 mars 1838.

EXPLICATIONS

De quelques notations employées dans le cours de cet ouvrage.

c ou *cm*..............	centimètre,
m....................	mètre,
mm....................	millimètre,
cc....................	centimètre carré,
k ou *kil*..............	kilogramme,
ccc....................	centimètre cube,
g ou *gr*..............	gramme.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

*

SECONDE PARTIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Fautes essentielles à corriger.

Page 25,	ligne 16,	au lieu de $mg \sin 45$, *lisez* $mg \sin 45°$
186,	16,	au lieu de (*fig.* 14), *lisez* (*fig.* 44)
		La figure 63 appartient au n° 255, pages 221 et 222
258,	7	en remontaut, au lieu de (*fig.* 67), *lisez* (*fig.* 70)
259,	9	en remontant, après ces mots : du globe terrestre, *ajoutez* (*fig.* 71)
265,	7	en remontant, au lieu de (*fig.* 69), *lisez* (*fig.* 72)

EXERCICES

SUR

LA PHYSIQUE.

Sur l'Étendue.

Quest. 1. Une longueur a été mesurée avec une règle divisée en centimètres, munie d'un *vernier* donnant les dixièmes de division. La coïncidence d'une division du vernier avec une division de la règle, a lieu à la huitième division endeçà du 40^e centimètre de la règle : quelle est la longueur mesurée, à moins d'un dixième de division d'erreur?

$$R.\quad 40^c,1 = 481^{mm}.$$

Q. 2. Quelle eût été cette longueur, si le vernier donnant les vingtièmes de millimètres, et la longueur tombant entre 35 et 36 centimètres, la coïncidence d'une division du vernier avec une division de la règle eût eu lieu à la 6^e division au-delà du 36^e centimètre?

$$R.\quad 35^c + \frac{7}{20} = 353^{mm},5.$$

Q. 3. On a posé une règle sur un comparateur dans lequel le rapport du grand bras de levier au petit est celui de 15 à 1 ; la règle, qui est trop longue, a fait avancer le grand bras de levier de $11^{mm},25$: de combien la règle est-elle trop longue ?

Puisque le petit bras de levier est 15 fois moins long que le grand, il sera déplacé de $\frac{11^{mm},25}{15}$ ou de $0^{mm},75$; et comme ce dernier déplacement représente précisément l'excès de longueur de la règle ; il s'ensuit que cette dernière est trop longue de $\frac{3}{4}$ de millimètre.

Q. 4. Une lame de verre ayant été mise sur un plan horizontal, sous la pointe de la vis d'un *sphéromètre,* on a été obligé de tourner cette vis de 25 tours et ensuite de 217 des 400° qui sont tracés sur la tête de cette vis. Quelle est l'épaisseur de la lame de verre, sachant que le pas de la vis est égal à $0^{mm},5$?

Les 25 tours valent $25 \times 0,5$ millimètres $= 12^{mm},5$;

Les 217° valent $\frac{217}{400} \times 0,5$ millimètres $= 0^{mm},27125$;

L'épaisseur demandée est donc égale à

$$12,5 + 0,27125 = 12^{mm},77125.$$

Q. 5. On a mis 150 feuilles d'or sur un plan horizontal, et par-dessus, une lame de verre de $12^{mm},77125$ d'épaisseur ; on a été obligé, pour faire coïncider la pointe de la vis du sphéromètre avec la face supérieure de la lame de verre, de remonter la vis de 32 tours plus 310° au-dessus du plan horizontal. On demande quelle est alors l'épaisseur moyenne d'une des feuilles d'or, le pas de la vis étant de $0^{mm},5$?

Les 32 tours valent $32 \times 0,5 = 1,6^{mm}$;

Les 310° valent $\frac{310}{400} \times 0{,}5 = 0^{mm}{,}3875$.

L'épaisseur des 150 feuilles d'or et de la lame de verre réunies, est égale à $16^{mm}{,}3875$; retranchant l'épaisseur de la lame de verre, il reste $3^{mm}{,}61625$ pour les 150 feuilles d'or, ou $0^{mm}{,}024108$ environ, pour l'épaisseur moyenne d'une feuille.

Q. 6. On veut diviser en 100 parties égales, avec une machine à diviser, une portion de tube de verre longue de 308 millimètres; de combien de tours et de degrés devra-t-on faire avancer la vis pour chaque division; le pas de la vis étant supposé égal à $0^{mm}{,}75$ et la tête graduée en 36°.

Pour toute la longueur, il faudrait $\frac{308}{0{,}75}$ tours ou 410 tours et 240°. Et par conséquent, pour une seule division, la 100^e partie ou 4 tours, 38°24′.

Q. 7. Déterminer, au moyen du sphéromètre, le rayon d'une sphère ou d'une partie de sphère sur laquelle on peut appliquer cet instrument. Soit c (*fig.* 1) le côté du triangle équilatéral formé par les trois pieds du sphéromètre. Ces trois pieds déterminent un plan qui coupera la sphère suivant un petit cercle circonscrit à ce triangle équilatéral, et dont le rayon est égal à $\frac{2}{3}\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}}$ ou à $\frac{c\sqrt{3}}{3}$; soit, en outre, h la hauteur de la pointe de la vis au-dessus du plan de ce petit cercle, et ABE un grand cercle quelconque dont le plan soit perpendiculaire à celui du petit cercle; et, enfin, AB le diamètre de ce petit cercle, on aura

$$FD = h, \quad AD = \frac{c\sqrt{3}}{3}, \quad \text{et} \quad FE = 2R,$$

en désignant par R le rayon de la sphère;

$$AF = \sqrt{\overline{AD}^2 + h^2} = \sqrt{h^2 + \frac{c^2}{3}};$$

d'ailleurs,

$$FE : AF :: AF : FD,$$

donc, en substituant,

$$2R = \frac{h^2 + \frac{c^2}{3}}{h}, \quad \text{et} \quad R = \frac{3h^2 + c^2}{6h}.$$

Sur l'Impénétrabilité.

Q. 8. Comment pourrait-on déterminer le volume d'un corps, par la considération du volume d'eau qu'il déplace, lorsqu'on le plonge tout entier dans ce liquide?

On peut se servir, pour cela, d'un tube cylindrique AB (*fig.* 2), de substance quelconque, auquel est adapté latéralement un tube de verre d'un diamètre beaucoup plus petit BDE, gradué en parties d'égale capacité, en centimètres cubes par exemple. En b et b' sont deux buttoirs, ou mieux encore un buttoir circulaire, destiné à arrêter à une position constamment la même, un piston P qui ferme exactement le tube dans lequel il se meut. Lorsqu'on veut avec cet instrument mesurer le volume d'un corps de forme aussi irrégulière qu'on le voudra C, mais pouvant entrer dans le grand tube AB; on commence par remplir ce tube jusqu'à la hauteur du buttoir environ, de manière qu'en enfonçant le piston, celui-ci atteigne la surface du liquide et le fasse monter dans le tube latéral un peu plus haut que bb'; on note la division à laquelle s'arrête l'eau dans ce tube, soit m le nombre de divisions; on retire le piston et on place le corps dessous pour le faire plonger entièrement dans le liquide, comme le représente la figure, et l'on applique le piston par-dessus; on l'enfonce jusqu'au buttoir. Le corps, en vertu de son impénétrabilité, déplacera un volume d'eau égal au sien, lequel sera refoulé en totalité dans le tube latéral. Soit N le niveau du liquide dans ce tube, et n le nombre correspondant de divisions; $n-m$ centimètres cubes, tel sera le volume du corps soumis à l'expérience.

Si ce corps était susceptible de s'imbiber d'eau, le procédé serait inexact, parce que l'eau absorbée par le corps ne contribuerait généralement pas à l'élévation du niveau dans la branche latérale. Pour rendre le procédé applicable à un corps de cette espèce, on peut l'enduire d'abord superficiellement d'une légère couche d'un vernis imperméable, et si l'on veut tenir compte de l'augmentation de volume due à l'épaisseur de la couche de vernis, il suffira d'observer le volume d'abord après l'application de cette couche, et ensuite après l'application d'une seconde; la différence donnera le volume de la couche de vernis.

Lois de l'Attraction.

Les corps s'attirent en raison directe de leurs masses, et en raison inverse du carré de la distance de leurs centres de gravité.

Q. 9. Un corps A dont la masse est M, est placé entre deux autres corps B et C (*fig.* 3), dont les masses sont respectivement M' et M'', de telle sorte que les trois centres de gravité soient sur une même ligne droite; la distance du centre de gravité de A à celui de B est d, et celle du centre de gravité de A à celui de C est d'; de quel côté le corps A sera-t-il entraîné ?

Soit f l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse, à l'unité de distance; l'attraction du corps B sur A sera exprimée par $f\frac{MM'}{d^2}$; celle de C sur A sera représentée par $f\frac{MM''}{d'^2}$. On voit donc que si $\frac{M'}{d^2}$ est plus grand que $\frac{M''}{d'^2}$, A sera entraîné vers B; et qu'au contraire, il sera entraîné vers C, si $\frac{M''}{d'^2}$ surpasse $\frac{M'}{d^2}$.

Mouvement uniforme.

L'espace parcouru par un mobile, d'un mouvement uniforme, est égal au produit du nombre qui représente la vitesse par celui qui représente le temps pendant lequel a duré le mouvement. Soient E, V, T, l'espace parcouru, la vitesse et le temps, on a

$$E = VT.$$

Corollaire 1. Les espaces parcourus par deux mobiles semblables animés de la même vitesse sont entre eux comme les temps.

Corollaire 2. Lorsque deux mobiles semblables parcourent le même espace, leurs vitesses sont en raison inverse des temps.

Q. 10. Un corps s'est mû pendant 15″ avec une vitesse de $9^{m},8088$ par seconde, quel espace a-t-il parcouru ?

R. $9^{m},8088 \times 15 = 147^{m},1320.$

Q. **11.** Un corps a parcouru 175 mètres en 25″, quelle était sa vitesse?

$$R.\quad \frac{175^{m}}{25} = 7 \text{ mètres.}$$

Q. **12.** Un boulet a parcouru, d'un mouvement uniforme, un espace de 2000 mètres, avec une vitesse de 250^{m} par seconde, combien a-t-il mis de secondes pour faire ce trajet?

R. 8 secondes.

Q. **13.** Deux mobiles semblables, qui se meuvent avec la même vitesse, ont parcouru, l'un 200^{m}, l'autre 250^{m}. Quel est le rapport des temps employés à parcourir ces espaces?

$$200 = VT, \quad 350 = VT',$$

d'où

$$T : T' :: 200 : 350 :: 20 : 35 :: 4 : 7.$$

Q. **14.** Deux mobiles semblables ont parcouru 400^{m} chacun; l'un en 20′, l'autre en 5′. Quel est le rapport de leurs vitesses?

$$400 = V \times 20, \quad 400 = V' \times 5,$$

d'où

$$V : V' :: 5 : 20 :: 1 : 4.$$

Quelques conséquences de la loi du mouvement uniforme.

Q. **15.** Lorsque deux mobiles semblables sont animés de vitesses différentes, V, V′, pendant des temps T, T′, en désignant par E, E′, les espaces correspondans, on a la proportion

$$E : E' :: VT : V'T',$$

d'où

$$EV'T' = E'VT \quad (1).$$

Si les espaces sont en raison inverse des temps, c'est-à-dire, si

$$E : E' :: T' : T, \quad \text{ou} \quad E'T' = ET \quad (2);$$

en multipliant membre à membre les deux égalités (1) et (2), on trouve

$$EE'V'T'^2 = EE'VT^2, \quad \text{d'où} \quad V : V' :: T'^2 : T^2,$$

c'est-à-dire que, dans cette circonstance, *les vitesses correspondantes seront entre elles en raison inverse des carrés des temps.*

Si l'on eût multiplié membre à membre en ordre inverse, on eût trouvé

$$E^2V'T'T = E'^2VT'T \quad \text{d'où} \quad V : V' :: E^2 : E'^2.$$

Donc alors, *les vitesses sont entre elles comme les carrés des espaces parcourus.*

Lois du mouvement uniformément accéléré.

Q. 16. 1°. Lorsqu'un corps, partant du repos, est soumis à l'action d'une force accélératrice constante, il en reçoit *des accroissemens de vitesses proportionnels aux temps.*

2°. Soit T le temps pendant lequel s'est mû le corps, sous l'influence d'une force accélératrice constante, et représentons-le par une certaine longueur AB (*fig.* 4), qui ait avec l'unité de longueur, le même rapport que T avec l'unité de temps; si nous divisons cette ligne en m parties égales Ab, bc, etc. Il est évident qu'elles correspondront à des intervalles de temps égaux à $\frac{T}{m}$. Cela posé, si pendant chacun de ces instans $\frac{T}{m}$, le mobile reçoit une certaine vitesse représentée par la ligne bb' perpendiculaire à AB; il est évident qu'à la fin du premier instant, il aura acquis cette vitesse bb', et qu'à la fin de chacun des instans suivans, il aura acquis des accroissemens de vitesse égaux à bb', qui s'ajouteront à celle qu'il possédait déjà, en sorte que les vitesses acquises au bout des temps $\frac{T}{m}$, $\frac{2T}{m}$, $\frac{3T}{m}$, etc., croîtront comme les nombres 1, 2, 3, etc.; c'est-à-dire que le nombre de degrés de vitesse acquis successivement par le mobile est toujours égal au nombre d'instans pendant lequel a duré le mouvement. Donc, bb' représentant la vitesse acquise à la fin du premier instant, la ligne cc' parallèle à bb' et égale à $2bb'$, représentera celle qui est acquise à la fin du second; $dd' = 3bb'$ celle qui est acquise à la fin du troisième, et ainsi de suite.

Et, à cause de la proportionnalité entre les lignes bb', cc', dd',... et leurs correspondantes Ab, Ac, Ad, etc... les points A, b', c', d',... seront en ligne droite, et $AC = m.bb'$ sera la vitesse acquise au bout du temps T.

Maintenant, on peut admettre que la force accélératrice, au lieu d'agir continuellement, n'agisse que par intervalles, soit au commencement, soit à la fin des espaces de temps $\frac{T}{m}$, et que, pendant ces intervalles, le mouvement soit uniforme. Dans le premier cas, où les degrés successifs de vitesse seraient imprimés au commencement de chaque instant, l'espace total parcouru serait évidemment égal à la somme des rectangles $Aa'''b'b$, $bb'''c'c$, etc.... ou bien, en désignant par V la vitesse finale, et par $\frac{V}{m}$

la vitesse imprimée au commencement de chaque instant, cet espace total sera égal à la somme des produits

$$\frac{V}{m}\times\frac{T}{m},\quad \frac{2V}{m}\times\frac{T}{m},\quad \frac{3V}{m}\times\frac{T}{m}\ldots\quad \frac{mV}{m}\times\frac{T}{m}.$$

Cette somme est évidemment plus grande que l'espace E parcouru par le mobile pendant le temps T, puisque chacun des accroissemens de vitesse $\frac{V}{m}$ que nous avons attribués au mobile au commencement de chaque instant, il ne les acquiert réellement qu'à la fin de ces mêmes instans, et ne les possède pas pendant toute leur durée; nous aurons donc

$$\frac{VT}{m^2}+\frac{2VT}{m^2}+\frac{3VT}{m^2}+\ldots+\frac{mVT}{m^2},$$

ou

$$\frac{VT}{m^2}\cdot\frac{m\,(m+1)}{2}>\text{E.}\quad (1)$$

Si nous supposons, au contraire, que les impulsions successives qui communiquent pendant chaque intervalle la vitesse $\frac{V}{m}$ n'agissent qu'à la fin de chacun de ses intervalles $\frac{T}{m}$, il est évident que, dans cette hypothèse, l'espace total parcouru dans cette suite de mouvemens uniformes, sera égal à la somme des rectangles $bb'c''c$, $cc'd''d$, $dd'e''e$... etc., ou bien à la somme des produits :

$$\frac{0V}{m}\cdot\frac{T}{m}+\frac{V}{m}\cdot\frac{T}{m}+\frac{2V}{m}\cdot\frac{T}{m}+\ldots+\frac{(m-1)\,V}{m}\cdot\frac{T}{m},$$

ou bien à $\frac{VT}{m^2}\cdot\frac{m\,(m-1)}{2}$, mais comme la force accélératrice agit, non-seulement à la fin de chacun de ces instans, mais pendant toute leur durée, il est évident que nous négligeons actuellement une partie de l'espace réel E, c'est-à-dire qu'on a

$$\frac{VT}{m^2} \cdot \frac{m(m-1)}{2} < E. \quad (2)$$

Mais il est facile de voir que l'erreur commise, dans l'une ou l'autre de nos deux hypothèses, sera d'autant moindre que $\frac{T}{m}$ sera plus petit, ou que m sera plus grand. On voit que plus m croît, plus les deux expressions tendent à devenir égales. Si l'on divise par m^2 le numérateur et le dénominateur de chacun des premiers membres des inégalités (1) et (2), leur expression devient

$$VT\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)}{2} > E, \quad VT\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)}{2} < E.$$

Si enfin l'on y suppose m infiniment grand, ce qui correspond au cas où les intervalles de temps $\frac{T}{m}$ sont infiniment petits, chacun des premiers membres devient égal à $\frac{VT}{2}$, de sorte qu'à la limite, $E = \frac{VT}{2}$. Si nous désignons maintenant par g la vitesse acquise au bout de l'unité de temps, la vitesse V, acquise au bout du temps T, sera égale à gT; substituant donc cette valeur dans l'expression de E, il vient

$$E = \frac{gT^2}{2}.$$

Si le corps, influencé par la même force, se fût mû pendant un temps T', en partant comme dans le cas précédent de l'état de repos, l'espace E' qu'il eût parcouru eût été

$$E' = \frac{gT'^2}{2}, \quad \text{d'où} \quad E : E' :: T^2 : T'^2,$$

c'est-à-dire que *les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps* employés à les parcourir.

Si l'on suppose $T = 1$, et qu'on appelle ε la valeur correspondante de E, on a

$$\varepsilon = \frac{g}{2}, \quad \text{ou} \quad g = 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire *que la vitesse acquise au bout de l'unité de temps est le double de l'espace parcouru dans cette unité de temps.*

Si l'on suppose successivement

$$T = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

on a successivement

$$E = \frac{9}{2}, \quad \frac{g}{2}.4, \quad \frac{g}{2}.9, \quad \frac{g}{2}.16, \text{ etc.}$$

D'où cette conséquence, que *les espaces parcourus pendant la* 2ᵉ, *la* 3ᵉ, *la* 4ᵉ, *etc., unités de temps, sont entre eux comme la série des nombres impairs* 1, 3, 5, 7, etc.

Si l'on suppose que la force accélératrice cesse d'agir après le temps T sur le mobile, celui-ci continuera à se mouvoir uniformément avec la vitesse acquise gT, et parcourra pendant un second temps T égal au premier un espace $E = gT^2$ *double du premier.*

Mouvement uniformément retardé.

a, T, g, E, désignant la vitesse initiale uniforme, le temps, l'intensité de force retardatrice, et l'espace parcouru dans le temps T, on sait que

$$E = aT - \frac{gT^2}{2}.$$

Q. 17. Au bout de quel temps θ, le mobile aura-t-il perdu toute sa vitesse initiale, et quel sera alors l'espace parcouru ?

On devra avoir $g\theta = a$, g étant la diminution de vitesse pour chaque unité de temps ; d'où

$$\theta = \frac{a}{g}.$$

Pour avoir l'espace parcouru, il suffira de substituer cette valeur de θ à la place de T, dans la formule

$$E = AT - \frac{gT^2}{2};$$

elle devient alors

$$E = a\theta - \frac{g\theta^2}{2} = \frac{a^2}{2g}.$$

Q. 18. Un mobile, soumis à l'action d'une force accélératrice constante, capable de lui imprimer, dans l'unité de temps, un accroissement de vitesse égal à $5^m,75$, s'est mû pendant $15''$, quel est l'espace parcouru ?

La formule $E = \frac{gT^2}{2}$, donne

$$E = \frac{5^m,75}{2} . 15^2 = 646^m,875.$$

Q. **19**. Un autre mobile, placé dans des circonstances semblables, a parcouru un espace de $1940^m,623$, quel temps a-t-il employé à parcourir cet espace?

La formule $E = \frac{gT^2}{2}$ donne

$$T = \sqrt{\frac{2.3881,25}{5,75}} = 45''.$$

Q. **20**. Un corps a parcouru, sous l'influence d'une force accélératrice constante, un espace de $313^m,8816$ en $8''$. Quelle est l'intensité de la force accélératrice, ou la vitesse imprimée dans l'unité de temps :

$$E = \frac{gT^2}{2} \quad \text{donne} \quad g = \frac{2 \times 313,8816}{64} = 9^m,8088.$$

Q. **21**. L'intensité d'une force accélératrice constante est de $9^m,8088$ par seconde, quelle sera au bout de 17 minutes la vitesse acquise par un mobile soumis à l'action de cette force?

$$R. \quad 9^m,8088 \times 17 \times 60 = 10005^m,976.$$

Q. **22**. Un corps, partant de l'état de repos, a parcouru, d'un mouvement uniformément accéléré, 1000^m en $10''$. Quel espace parcourrait-il pendant la 18^e seconde?

$$E = \frac{g.10^2}{2} \quad \text{donne} \quad g = \frac{2000}{100} = 10;$$

l'espace parcouru dans la 18^e seconde serait égal à

$$E = \frac{g}{2}(18)^2 - \frac{g}{2}(17)^2 = 175^m.$$

Q. **23**. Un corps, après avoir été sollicité pendant $5''$ par une force accélératrice constante, a été soustrait à l'influence de cette force; et en conservant sa vitesse acquise à la fin de la 5^e^ seconde, il a parcouru, d'un mouvement uniforme, un espace de 900^{m} en 18 secondes : quelle est l'intensité de la force accélératrice, et quel espace avait-il parcouru pendant les 5 premières secondes?

Si dans $18''$ le corps a parcouru 900^{m}, dans une seule seconde, il eût parcouru 50 mètres. Donc la vitesse acquise à la fin de la 5e seconde du premier mouvement est égale à 50^{m}, et par conséquent, l'intensité cherchée est $\frac{50}{5}=10$.

L'espace parcouru pendant les 5 premières secondes est donc

$$E=\frac{10.25}{2}=125^{m}.$$

Q. **24.** Un corps, lancé avec une vitesse initiale de 500^{m}, a été soumis à l'action d'une force retardatrice constante dont l'intensité est égale à $9^{m},8088$ par seconde. On demande au bout de combien de secondes la vitesse du mobile sera réduite à $107^{m},648$, et combien alors il aura parcouru de mètres?

Soit x le nombre de secondes cherché; puisque la force retardatrice enlève à la vitesse du mobile $9^{m},8088$ par seconde, on aura

$$x=\frac{500-107,648}{9,8088}=40''.$$

L'espace qu'il aura alors parcouru sera donné par la formule

$$a\theta-\frac{g\theta^2}{2},\quad \text{ou}\quad E=20000-7847^{m},04=12152^{m},96.$$

Si l'on demandait au bout de combien de secondes le corps s'arrêtera, on trouverait

$$y = \frac{500}{9{,}8088} = 50'' \ \frac{1}{6} \text{ environ.}$$

Q. **25.** Un mobile, partant avec une vitesse de 800^{m} par seconde, s'est arrêté, sous l'influence d'une force retardatrice constante, au bout de $20''$; on demande quelle est l'intensité de cette force ?

Soit x cette intensité, on aura

$$800 - 20x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{800}{20} = 40^{m} \text{ par seconde.}$$

Q. **26.** Quelle devrait être la vitesse initiale d'un mobile soumis à l'action d'une force retardatrice constante, dont l'intensité est égale à $18^{m},5$, pour que ce mobile s'arrêtât au bout de $14''$?

R. $x - 18{,}5 \times 14 = 0$, d'où $x = 259^{m}$ par seconde.

Q. **27.** Quelle est l'intensité d'une force retardatrice constante qui a réduit à zéro la vitesse initiale d'un corps, après que celui-ci eût parcouru 1800^{m} en $6''$?

$$R. \quad 1800 = \frac{a^2}{2x} = \frac{x.6^2}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = 100^{m}.$$

Et la vitesse initiale est égale à 600^{m}.

Lois de la pesanteur.

Q. **28.** 1°. Tous les corps tombent également vite dans le vide.

2°. La direction de la pesanteur est verticale.

3°. Le mouvement des corps qui tombent à la surface du globe terrestre est un mouvement uniformément accéléré.

4°. A Paris, les corps parcourent, dans la première seconde de leur chute, $4^{m},9044$ dans le vide.

5°. Un corps tombant sur un plan incliné sans frottement, acquiert une vitesse égale à celle qu'il eût acquise en tombant verticalement d'une hauteur égale à celle du plan incliné.

Q. 29. Dans une machine d'Athood, chacun des deux poids invariables est de 100 grammes, et le poids additionnel de 5 grammes ; on demande :

1°. Dans quel rapport la gravité se trouve diminuée?

3°. Quel sera l'espace parcouru dans les 3 premières secondes par le système?

On voit d'abord par l'équation

$$g' \times (205) = 9^{m},8088 \times 5,$$

que la gravité se trouve diminuée dans le rapport de 1 à $\frac{5}{205}$; c'est-à-dire que son intensité est alors réduite à

$$\frac{9,8088}{205} \times 5 = 0^{m},23943.$$

L'espace parcouru pendant les trois premières secondes sera donc égal à

$$\frac{0^{m},23943 \times 9}{2} = 1^{m},0774 \text{ environ.}$$

Q. 30. Les deux poids étant toujours égaux à 100 gr., quel doit être le poids additionnel pour que le système parcoure 2^{m} dans $4''$?

L'intensité réduite de la pesanteur est donnée par l'équation

$$2 = \frac{g'}{2} \cdot 16\,; \quad \text{d'où} \quad g' = \frac{4}{16} = 0^{\text{m}},25.$$

Et le poids additionnel est fourni par l'équation

$$0^{\text{m}},25 = 9^{\text{m}},8088 \times \frac{x}{200 + x}\,;$$

d'où

$$x = \frac{0,25 \times 200}{9,8088 - 0,25} = 5,232 \text{ environ.}$$

Q. **51.** Un corps pesant est tombé dans le vide d'une hauteur égale à $240^{\text{m}},3156$; quelle est sa vitesse finale ?

La formule $E = g\,\frac{T^2}{2}$ donne ici

$$240^{\text{m}},3156 = 4,9044 \times T^2\,; \quad \text{d'où} \quad T = 7''.$$

Or, la vitesse acquise au bout de $7''$ est égale à

$$7 \times 9^{\text{m}},8088\,, \quad \text{ou à} \quad 68^{\text{m}},6616.$$

Q. **52.** A quelle hauteur doit s'élever un projectile lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse de $980^{\text{m}},88$ (abstraction faite de la résistance de l'air) ?

La formule $E = \frac{a^2}{2g} = \frac{gT^2}{2}$, du mouvement uniformément retardé, donne ici pour cette hauteur,

$$E \text{ ou } h = 49064,$$

parce que, comme il est aisé de le reconnaître, le mouvement a duré 100 secondes.

Q. **53.** Quelle vitesse initiale faudrait-il donner à un mobile sur un plan incliné à 45° sur l'horizon, pour qu'il remontât celui-ci sur une longueur de 5000 mètres avant de s'arrêter ?

Puisque le plan est incliné à 45°, sa longueur est à la hauteur comme $\sqrt{2}$ est à 1 ; la hauteur à laquelle doit s'élever le mobile est donnée par l'équation

$$h^2 = \frac{5000}{2} = 2500^{\text{m}}; \quad \text{d'où} \quad h = 50^{\text{m}}.$$

La vitesse cherchée sera donnée par l'équation

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{980,88} = 31^{\text{m}},319 \text{ environ.}$$

Q. 34. Quelle est la profondeur d'un puits, sachant qu'une balle de plomb qu'on y a laissé tomber, a mis 6'' pour atteindre le fond ?

$$R. \quad h = 4,9044 \times (6)^2 = 176^{\text{m}},5584.$$

Sur les mouvemens pendulaires.

35. Le temps d'une oscillation du pendule simple est donné en général par la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Si l'on fait osciller deux pendules de longueurs l et l', dans un même lieu, on aura les relations

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad t' = \pi\sqrt{\frac{l'}{g}}; \quad \text{d'où} \quad t : t' :: \sqrt{l} : \sqrt{l'}.$$

C'est-à-dire que *les temps d'une oscillation de deux pen* *dules de longueur différente, sont entre eux comme les racines carrées de ces longueurs.*

Si un même pendule oscille dans deux lieux différens, pour lesquels les intensités de la pesanteur soient g et g', on aura

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad t' = \pi\sqrt{\frac{l}{g'}}; \quad \text{d'où} \quad t^2 : t'^2 :: g' : g.$$

D'ailleurs, en désignant par N et N′ les nombres d'oscillations faites dans un même temps, on a aussi

$$t^2 : t'^2 :: N'^2 : N^2; \quad \text{d'où enfin} \quad g : g' :: N^2 : N'^2.$$

Les intensités de la pesanteur dans deux endroits différens, sont donc entre elles comme les carrés des nombres d'oscillations faites dans un même temps par un même pendule ou par des pendules d'égale longueur.

Q. 36. Quelle sera, à Paris, la durée d'oscillation d'un pendule dont la longueur est égale à $0^m,99384$?

$$t = \pi\sqrt{\frac{0,99384}{9,8088}} = \sqrt{\frac{(3,1416)^2 \times (0,99384)}{9,8088}} = 1''.$$

Q. 37. Quelle doit être, à Paris, la longueur d'un pendule, pour qu'il fasse une oscillation en $3''$?

La proportion

$$1'' : 3'' :: \sqrt{0,99384} : \sqrt{l'},$$

donne

$$l' = 9 \times 0,99384 = 8^m,94456.$$

Q. 38. Quelle est l'intensité de la pesanteur à l'équateur, où le pendule à seconde a une longueur de $0^m,991$?

La formule $1'' = \pi\sqrt{\dfrac{0,991}{g'}}$, donne

$$g' = (0^m,991)\,(3,1416)^2 = 9^m,7808 \text{ environ.}$$

Q. 39. Dans un même lieu la pesanteur doit diminuer d'intensité à mesure qu'on pénètre plus avant dans l'intérieur de la terre.

En effet, supposons un point matériel m (*fig.* 5), placé dans une enveloppe sphérique, homogène et infiniment mince. Si, comme cela a lieu pour la pesanteur, ce point est attiré par tous les points de cette enveloppe avec une intensité proportionnelle à la masse, et en raison inverse du carré de la distance; concevons, par ce point, un double cône infiniment délié, les deux élémens ab, cd, qu'il interceptera sur l'enveloppe, attireront le point m suivant des directions opposées mp, mq, qui passeront par leurs centres. Ces attractions seront proportionnelles aux surfaces ab et cd, supposées planes à cause de leur petitesse, et en raison inverse du carré des distances mp et mq. De sorte que, si nous désignons par f l'attraction de l'unité de surface sur le point matériel à l'unité de distance, l'attraction de l'élément ab sera $\dfrac{f \times \text{surf. } ab}{\overline{mp}^2}$, et celle de l'élément cd sera $\dfrac{f \times \text{surf. } cd}{\overline{mq}^2}$. Cela posé, si, par le centre q du petit élément cd, on mène un plan parallèle à celui de l'élément ab, la section $c'd'$, faite dans le cône par ce plan, sera égale à la section cd. Les sections ab, $c'd'$, étant parallèles, sont entre elles comme les carrés $\overline{mp}^2$ et $\overline{mq}^2$, de sorte que

$$\text{surf. } ab : \text{surf. } c'd', \text{ ou surf. } cd :: \overline{mp}^2 : \overline{mq}^2;$$

d'où

$$\frac{\text{surf. } ab}{\overline{mp}^2} = \frac{\text{surf. } cd}{\overline{mq}^2}.$$

Multipliant les deux membres par f,

$$\frac{f \times \text{surf. } ab}{\overline{mp}^2} = \frac{f \times \text{surf. } cd}{\overline{mq}^2}.$$

Donc le point est également attiré par ab et par cd, et comme il en est de même évidemment dans tous les sens, il en résulte que le point m est en équilibre, quelle que soit d'ailleurs sa position dans l'intérieur de l'enveloppe.

Au lieu de considérer, autour du point m, une enveloppe infiniment mince, supposons celui-ci placé dans une sphère matérielle dont les différentes couches concentriques, de densité quelconque, soient homogènes chacune dans toute son étendue; si par ce point nous faisons passer une sphère de rayon mo, concentrique à la première, la masse comprise entre les deux surfaces sphériques pourra être considérée comme formée d'une série d'enveloppes concentriques contiguës et extrêmement minces. Le point m, étant en équilibre sous l'influence de chacune d'elles, sera encore en équilibre sous l'action de toutes; de sorte qu'il ne sera réellement attiré que par la sphère intérieure de rayon mo. Mais cette dernière, si nous la supposons homogène, attirera le point m proportionnellement à son volume $\frac{4}{3}\pi r^3$, et en raison inverse du carré de son rayon, c'est-à-dire, proportionnellement à

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{r^2} = \frac{4}{3}\pi r;$$

tandis que la sphère totale, ayant pour rayon $R > r$, l'intensité de son action serait proportionnelle à

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R;$$

d'où il résulte qu'en supposant la terre sphérique, composée de couches concentriques ayant toutes la même densité, l'intensité de la pesanteur devrait décroître comme le rayon. Quoique la terre ne satisfasse pas à toutes ces conditions, il paraît qu'on a néanmoins observé une diminution.

De la force centrifuge.

Q. 40. Soit f la force centrifuge d'un corps de masse m, v sa vitesse, et r le rayon du cercle osculateur à la courbe qu'il décrit et au point où il se trouve placé, on a

$$f=\frac{v^2}{r}m,$$

c'est-à-dire que la force centrifuge est proportionnelle à la masse et au carré de la vitesse, et en raison inverse du rayon de courbure.

Si la courbe est un cercle, et que la vitesse de rotation soit uniforme, en désignant par T le temps que met le mobile à parcourir une circonférence entière, on aura

$$f=\frac{4\pi^2 r}{T^2}m;$$

c'est-à-dire que la force centrifuge dans le cercle est proportionnelle au rayon, et en raison inverse du carré du temps d'une révolution entière.

Conséquences.

1°. Les forces centrifuges de deux corps qui se meuvent avec la même vitesse, à égale distance de l'axe de révolution, sont entre elles comme les masses de ces corps.

2°. Les forces centrifuges de deux corps égaux qui se meuvent dans des temps périodiques égaux, à différentes distances du centre, sont entre elles comme ces distances.

Q. 41. A l'équateur, la force centrifuge est environ $\frac{1}{289}^{e}$ de la gravité; quelle devrait être la vitesse de rotation de la terre pour que la gravité fût complétement annulée par la force centrifuge?

On sait que, toutes choses égales d'ailleurs, la force centrifuge croît comme le carré de la vitesse, en désignant donc par v la vitesse actuelle, et par x la vitesse cherchée, on devra avoir :

$$v^2 : x^2 :: \frac{g}{289} : g,$$

d'où

$$x^2 = \frac{v^2 g}{g} \times 289 \text{ et } x = v \times 17;$$

c'est-à-dire que la vitesse devrait être 17 fois plus grande.

Q. 42. Deux sphères, l'une de plomb pesant 100 grammes, l'autre d'ivoire pesant 25 grammes, tournent simultanément, enfilées par un même fil de fer, et retenues d'ailleurs l'une à l'autre par un fil; la première est à 15 centimètres de l'axe de rotation; à quelle distance devra-t-on mettre la seconde, pour qu'en faisant faire au système 4 tours par seconde, le système ne soit entraîné ni d'un côté ni de l'autre?

(On négligera la résistance de l'air, et l'effet du fil.)

La force centrifuge de la première sera donnée par la formule

$$f = \frac{4\pi^2 r}{T^2} m = \frac{4\pi^2 \times 15 \times 100}{(0,25)^2};$$

celle de la seconde sera donnée par la même formule, ou sera

$$f' = \frac{4\pi^2 x}{(0,25)^2}\ 25$$

et comme on doit avoir $f = f'$, on aura

$$\frac{4\pi^2 x.25}{(0,25)^2} = \frac{4\pi^2.\ 100 \times 15}{(0,25)^2}\ \text{d'où}\ x = \frac{100 \times 15}{25} = 60\ \text{centim.}$$

la bille d'ivoire devra donc être à 60 centimètres de l'axe de rotation.

Q. 43. Une bille d'ivoire est maintenue dans un tube incliné à 45°, par rapport à l'horizon ; on fait tourner ce tube, en le maintenant dans la même inclinaison, avec une vitesse de 2 tours par seconde. A quelle distance de l'axe devra-t-on mettre la bille, pour qu'elle reste en équilibre ? (On ne tiendra pas compte du frottement.)

Ici $T = (0,5)''$. Soit x cette distance en mètres ; la force centrifuge sera

$$f = \frac{4\pi^2 x}{(0,5)^2} . m ;$$

m étant la masse de la bille. $mg \sin 45$ ou $mg\sqrt{2}$ est l'action de la gravité. Ces deux actions devant être égales, on doit avoir

$$\frac{4\pi^2 x}{(0,5)^2} = g\sqrt{2} = 9,8088 \times \sqrt{2},\ \text{d'où}\ x = 0^{m},2759.$$

Q. 44. On a mis dans un tube incliné faisant avec la verticale un angle I, une bille, à une distance d de l'axe, quelle doit être la vitesse pour que la bille reste en équilibre ?

Soit x cette vitesse, la force centrifuge pour l'unité de masse est $f = \frac{x^2}{d}$; l'action de la pesanteur est ici $g \cos I$.

pour que ces deux actions soient égales, on doit avoir

$$g\cos I = \frac{x^2}{d}, \quad \text{d'où} \quad x = \sqrt{d.g\cos I},$$

ou, si l'on veut savoir le temps d'une révolution périodique, on remarquera que

$$x^2 = \frac{3\pi^2 d^2}{T^2} \quad \text{et} \quad g\cos I = \frac{4\pi^2 d}{T^2}, \quad \text{d'où} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g\cos I}}.$$

45. L'équation $g\cos I = \frac{4\pi^2 d}{T^2}$ permet encore de résoudre les questions suivantes :

1°. Un corps étant situé à une distance d de l'axe de rotation, dans un tube incliné faisant une révolution en T secondes, quelle doit être l'inclinaison du tube, pour que le corps reste en équilibre, sous l'influence de la pesanteur et de la force centrifuge.

2°. Quelle devrait être l'intensité de la pesanteur pour que la bille, placée à une distance d, dans un tube faisant avec la verticale un angle I, et faisant une révolution en T secondes, fût en équilibre ?

Q. 46. Combien doit-on faire faire de tours par minute à une pierre placée à l'extrémité d'une fronde d'un mètre de longueur, pour que cette pierre s'échappe de la fronde avec une vitesse initiale de 400^m par seconde ?

Soit x le nombre de tours par minute ; $\frac{x}{60}$ sera le nombre de tours par seconde ; par conséquent, le temps T'' d'une révolution sera de $\frac{60}{x}$ secondes ; le rayon de la circonférence décrite par la fronde étant un mètre, la circonférence sera 2π mètres.

Si donc le corps parcourt 2π mètres dans $\left(\frac{60}{x}\right)''$, ou $\frac{x}{60}$ tours dans une seconde, l'espace parcouru dans une seconde sera

$$\frac{x}{60} \times 2\pi \text{ mètres,}$$

et comme cette vitesse est la même que celle du point de départ de la pierre, on aura

$$\frac{x}{60} \times 2\pi = 400\,;$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{2400}{2\pi} = 381^{\text{tours}},97 \text{ environ par minute.}$$

Q. 47. Une roue à lancer des projectiles, de deux mètres de rayon, fait 100 tours par minute. Quelle est la vitesse des projectiles qu'elle lance?

Chaque tour est égal à

$$2\pi \times 2^{\text{m}} = 12^{\text{m}},5664\,;$$

les 100 tours valent $1256^{\text{m}},64$ que le projectile parcourt par minute, ou

$$\frac{1256^{\text{m}},64}{60} = 20^{\text{m}},944 \text{ par seconde.}$$

Sur le principe d'Archimède, les pressions des liquides et les densités.

Q. 48. Une masse de cuivre, plongée dans de l'eau au maximum de densité, y perd 90 grammes de son poids. Quel est le volume de ce corps?

Au maximum de densité, un gramme d'eau représente un centimètre cube ; 90 grammes représenteront donc 90 centimètres cubes. Le volume cherché est donc égal à 90 centimètres cubes.

Q. **49.** Un piston p (*fig.* 6), de 4 centimètres carrés de base exerce une pression de 12 kilogrammes à la partie supérieure de la masse fluide contenue dans l'une des branches CD d'un tube doublement recourbé ABCD ; 1° quelle pression doit exercer, dans l'autre branche, le piston P, de 25 centimètres carrés de section, à la même hauteur que l'autre, pour lui faire équilibre ? 2° Quelle devrait être cette même pression, si la branche BA étant conique, et la section du piston P étant toujours de 25 centimètres ; la section de la colonne liquide déterminée par le plan de la base du piston p était égale à 40 centimètres carrés, et à 15 centimètres au-dessous du piston P ?

1^er^ *cas.* La pression exercée par le piston p étant de 12 kilogrammes, sera de 3 kilogrammes par centimètre carré ; et par conséquent serait de $3 \times 25 = 75$ kilogrammes pour 25 centimètres carrés, le piston P devra donc exercer une pression de 75 kilogrammes pour que l'équilibre ait lieu.

2^e^ *cas.* La pression qui doit faire équilibre à celle du piston p, se composera de deux parties : la pression de la colonne de liquide qui sera égale à $15 \times 40 \times d$ grammes sur la section liquide entière, ou $15 \times d$ grammes sur chaque centimètre carré ; il faudra donc que la pression exercée par le piston P soit de $(3000 - 15 \times d)$ grammes par centimètre carré, ou de $(3000 - 15 \times d)25$ grammes, pour la pression totale.

d désigne ici la densité du liquide.

Q. **30.** Quelle doit être, dans un siphon, la hauteur d'une colonne de mercure, pour qu'elle fasse équilibre à une colonne d'eau de $10^m,4$ de hauteur; sachant que la densité de l'eau étant prise pour unité, celle du mercure est 13,586.

Puisque les hauteurs de ces colonnes doivent être en raison inverse des densités, en désignant par x la hauteur cherchée, on aura la proportion

$$x : 10^m,4 :: 1 : 13,586, \quad \text{d'où} \quad x = 0^m,765 \text{ environ.}$$

Q. **31.** Dans un siphon parfaitement cylindrique, on met d'abord du mercure; puis, dans l'une des branches, on verse une colonne d'eau de 42 centimètres, ayant pour densité 0,998; enfin, dans l'autre branche, on verse une colonne d'alcool de 60 centimètres de hauteur, et ayant pour densité 0,81. On demande 1° quelle était la hauteur de la colonne de mercure faisant équilibre à la colonne d'eau; 2° quel est le déplacement de la colonne d'eau lorsqu'on a versé l'alcool?

La hauteur de la colonne de mercure est donnée par la proportion

$$x : 42 :: 0,998 : 13,586,$$

d'où

$$x = \frac{42 \times 0,998}{13,586} = 30^{mm},85.$$

La colonne d'alcool de 60 centimètres exerce, à elle seule, une pression de $60 \times 0,80$ grammes par centimètre carré; la colonne d'eau n'en exerçant qu'une de $42 \times 0,998$ grammes, la différence, pour qu'il y ait équilibre, devra être exercée par une colonne de mercure dont la hauteur h sera égale à

$$\frac{60 \times 0,81 - 42 \times 0,998}{13,586} = 4^{mm},92.$$

La colonne d'eau se sera donc déplacée d'abord de $\frac{30^{mm},85}{2}$, pour établir le niveau du mercure, et ensuite de $\frac{4^{mm},92}{2}$, pour établir la différence actuelle de niveau entre les deux colonnes de mercure, le déplacement de la colonne d'eau est donc de

$$15^{mm},425 + 2^{mm},45 = 17^{mm},885.$$

Q. **32.** Pour déterminer l'affleurement d'une balance de Nicholson, dans l'eau au maximum de densité, on a été obligé de la charger de 75 grammes; en mettant un fragment de carbonate de chaux sur le plateau supérieur, 52 grammes suffisaient pour déterminer l'affleurement; enfin, il fallait 62 grammes, lorsque l'échantillon de carbonate était dans le plateau inférieur de l'instrument. Quelle est la densité du corps essayé?

Il résulte des données de la question que le corps pèse 75—52 ou 23 grammes, et qu'il perd dans l'eau 62—52 ou 10 grammes. Il aura donc pour densité $\frac{23}{10} = 2,3$, puisque cette densité est égale au rapport du poids du corps à celui d'un égal volume d'eau.

Q. **33.** Une sphère de liége de 5 centimètres de rayon plonge de 3 centimètres dans de l'eau au maximum de densité, pour s'y tenir en équilibre. Quelle est la densité du liége, en ne tenant pas compte de la présence de l'air?

La sphère flottante étant en équilibre, il y a égalité entre le poids de cette sphère et le poids du volume d'eau déplacé; or, à poids égaux les volumes sont en raison inverse des densités.

Le volume de la sphère est

$$\frac{4}{3}\pi.5^3 = 523^{ccc},6,$$

le volume de l'eau déplacée est égal à

$$\frac{1}{2}3\pi\sqrt{3^2+2.5.3}+\frac{1}{6}\pi.3^3 = 49^{ccc},719,$$

x étant donc la densité du liége, on aura

$$x : 1 :: 49,719 : 523,6, \quad \text{d'où} \quad x = 0,095.$$

Q. 34. On a pesé un corps avec une balance hydro statique, et en tenant compte de l'influence de l'air, on a trouvé 30 grammes; suspendu au plateau de la balance et plongé dans l'eau, il ne pèse plus que 17 grammes. Quelle est la densité de ce corps?

Le poids du volume d'eau égal à celui du corps étant $30 - 17 = 13$ grammes; la densité cherchée sera donc

$$\frac{30}{13} = 2,3077 \text{ environ.}$$

Q. 35. Un flacon plein d'eau au maximum de densité pèse 155 grammes; lorsqu'on met à côté de lui un morceau de plomb dans le même plateau, on trouve un poids de $183^{gr},25$; enfin, lorsqu'on a introduit le corps dans le flacon, et essayé ce dernier, on trouve un poids égal à $180^{gr},761$. Quelle est la densité du plomb?

Il est aisé de voir que le poids du morceau de plomb est $183,25 - 155 = 28,25$; et le poids d'un égal volume d'eau égal à $183,25 - 180,761 = 2,489$. La densité du plomb sera donc

$$\frac{28,25}{2,489} = 11,35 \text{ environ.}$$

Q. **36.** Une sphère en liége de 3 centimètres de rayon et de 0,24 de densité est lestée par une sphère d'or ayant pour densité 19,26 ; on demande quelle doit être le rayon de cette dernière pour que le système soit en équilibre et entièrement immergé dans de l'alcool ayant pour densité 0,8 ?

Puisque le système est en équilibre et entièrement plongé dans l'alcool, la somme des volumes des deux sphères est égale au volume d'alcool déplacé, et la somme des poids de ces sphères égale au poids du liquide dont elles tiennent la place. Mais le volume de la sphère de liége est égal à

$$\frac{4}{3}\pi.(3)^3 = 113^{\text{ccc}},293 \text{ environ},$$

$$\text{et son poids} = 113^{\text{gr}},293 \times 0,24 = 27^{\text{gr}},18032.$$

En désignant par x le rayon de la sphère d'or, son volume sera

$$\frac{4}{3}\pi x^3, \quad \text{et son poids} \quad \frac{4}{3}\pi x^3 \times 19,26.$$

D'un autre côté le volume d'alcool déplacé sera

$$\frac{4}{3}(\pi x^3 + 113,293)^{\text{m}},$$

et son poids,

$$\frac{4}{3}(\pi x^3 + 113,292)^{\text{gr}} \times 0,8 = \frac{3,3}{3}\pi x^3 + 90,6344 ;$$

d'où l'équation

$$27,18032+\frac{4}{3}\pi x^3\times 19,26=\frac{3,2}{3}\pi x^3+90,6344.$$

D'où encore

$$x^3=\frac{90,6344-27,18032}{\frac{4}{3}\pi(19,26-0,8)};$$

d'où enfin,

$$x=0^{cm},94.$$

Densité d'un mélange ou d'une combinaison de corps solides, lorsque le volume du composé est égal à la somme des volumes des composans.

Q. 37. Soient p, p', p'',... etc., les poids de ces différens corps; d, d', d'',... leurs densités; leurs volumes seront respectivement,

$$v=\frac{p}{d},\quad v'=\frac{p'}{d'},\quad v''=\frac{p''}{d''},\ldots \text{ etc.};$$

de sorte que le volume total V, sera

$$V=\frac{p}{d}+\frac{p'}{d'}+\frac{p''}{d''}+\ldots \text{ etc.};$$

d'ailleurs le poids total est $P=p+p'+p''+\ldots$ etc. On aura donc, pour la densité D du mélange,

$$D=\frac{P}{V}=\frac{p+p'+p''+\ldots \text{ etc.}}{\frac{p}{d}+\frac{p'}{d'}+\frac{p''}{d''}+\ldots \text{ etc.}}.$$

Q. 38. Un alliage d'or et d'argent a pour poids spécifique d''; l'or a pour densité d, l'argent d'. Dans quel rapport les deux métaux sont-ils alliés, en admettant qu'il n'y ait eu ni contraction, ni dilatation?

Soit $\frac{x}{y}$ le rapport cherché, x étant le volume de l'or qui entre dans l'alliage, et y celui de l'argent; le volume de l'alliage sera $x+y$, et son poids $(x+y)d''$. Le poids de l'or sera xd, et celui de l'argent yd, d'où l'égalité

$$xd''+yd''=xd+yd',$$

ou

$$y(d''-d')=x(d-d''),$$

ce qui donne

$$\frac{x}{y}=\frac{d''-d'}{d-d''}.$$

Connaissant le rapport des volumes, celui des poids s'obtiendrait en multipliant ce dernier par le rapport des densités, c'est-à-dire qu'en appelant X et Y les poids, on aurait

$$\frac{X}{Y}=\frac{xd}{yd'}.$$

Supposons que la densité du mélange soit 13,00286, on trouverait pour le rapport des volumes d'or et d'argent, celui de 2 à 5, et pour le rapport des poids celui de 3852 à 5250, ou de 1926 à 2625.

Q. **39.** Un alliage d'or et de cuivre, dans lequel il n'y a eu ni contraction ni dilatation, pèse 195 grammes, déduction faite de la perte dans l'air, et pèse dans l'eau, à 4° cent., 180 grammes; quelles sont les proportions d'or et de cuivre qui le constituent?

La perte de poids de l'alliage dans l'eau étant 15 grammes, sa densité est $\frac{195}{15}=13$.

En faisant, dans la formule du numéro précédent,

$$d''=13,\quad d=19,26,\quad d'=8,895.$$

Le rapport de l'or au cuivre serait, en volumes, celui de 4105 à 6260, ou de 821 à 1252; et en poids, le rapport serait celui de 16968,06 à 11136,54, ou de 2825,01 à 1856,09. En désignant donc par x le poids de l'or contenu dans l'alliage, celui du cuivre sera $195 - x$. Nous aurons pour déterminer x, la proportion

$$x : 195 - x :: 2825,01 : 1856,09;$$

d'où

$$x = 119^{gr},865, \quad \text{et} \quad 195 - x = 75^{gr},135,$$

c'est-à-dire qu'il y a $119^{gr},865$ d'or, et $75^{gr},135$ de cuivre.

Q. 60. Un corps susceptible de s'imbiber d'eau a été placé dans la cuvette supérieure d'une balance de Nicholson, et il a fallu, pour déterminer l'affleurement, ajouter un poids de 10 grammes; lorsqu'on l'a placé dans l'eau et dans la cuvette inférieure, il a fallu 15 grammes. Replaçant ensuite le corps tout imbibé d'eau dans le plateau supérieur, il ne fallait, pour déterminer l'affleurement, qu'un poids de 7 grammes. Enfin, pour affleurer l'instrument seul, il fallait 20 grammes. Quelle est la densité, 1°. du corps sec; 2°. de la matière solide qui enveloppe les pores; 3°. quel est le rapport du volume des interstices au volume apparent du corps?

Le poids du corps est évidemment $20 - 10 = 10^{gr}$.

Le poids du corps imbibé $20 - 7 = 13^{gr}$.

Le poids d'un volume d'eau égal à celui du corps, y compris les interstices, est $15 - 7 = 8^{gr}$.

Le poids de l'eau comprise dans le corps imbibé est égal à $10 - 7 = 3^{gr}$.

Enfin, $(15 - 10)^{gr} = 5$ grammes, est le poids de l'eau déplacée par la matière solide du corps, qui forme les cloisons de ses pores.

D'après cela, $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ sera la densité du corps sec, rapportée à son volume apparent; $\frac{10}{5} = 2$, celle de la matière solide qui enveloppe les pores; enfin $\frac{3}{8}$ est le rapport du volume des interstices au volume apparent du corps soumis à l'expérience.

Q. **61.** Connaissant le poids d'un corps dans l'air, et son poids dans l'eau au maximum de densité, déterminer le vrai poids de ce corps.

Soient P le poids du corps dans l'air, P′ son poids dans l'eau au maximum de densité. La perte de poids éprouvée par le corps, en passant de l'air dans l'eau est

$$P - P'.$$

Donc, en désignant par α la densité de l'air par rapport à celle de l'eau prise pour unité, $(P - P')\alpha$ sera approximativement la perte de poids du corps dans l'air; c'est-à-dire, que son vrai poids sera à peu près

$$P + (P - P')\alpha;$$

mais alors, la perte de poids dans l'eau serait

$$P + (P - P')\alpha - P' = (P - P')(1 + \alpha),$$

d'où nous déduirions pour la valeur plus approchée de la perte dans l'air,

$$(P - P')(1 + \alpha)\alpha = (P - P')(\alpha + \alpha^2);$$

en continuant ainsi les corrections successives, on aurait pour le poids du corps

$$P + (P - P')(\alpha + \alpha^2),$$

et ensuite pour la perte dans l'eau

$$P + (P - P')(\alpha + \alpha^2) - P' = (P - P')(1 + \alpha + \alpha^2);$$

d'où, pour une nouvelle approximation de la perte dans l'air,

$$(P - P')(1 + \alpha + \alpha^2)\alpha = (P - P')(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3);$$

et pour le poids du corps

$$P + (P - P')(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3),$$

et ainsi de suite, de sorte qu'après m corrections on aurait pour la perte du poids du corps dans l'eau,

$$(P - P')(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^m),$$

pour la perte dans l'air,

$$(P - P')(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m+1}),$$

et enfin, pour le poids du corps,

$$P + (P - P')(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{m+1}).$$

Si nous supposons $m = \infty$, et que nous remarquions que α est moindre que l'unité, nous trouverons pour le vrai poids du corps

$$P + (P - P')\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{P - \alpha P'}{1 - \alpha}.$$

On eût pu arriver plus rapidement au même résultat par une méthode différente. Soit, en effet, x le vrai poids du corps; la perte réelle de poids qu'éprouve le corps dans l'eau est

$$x - P',$$

et, par conséquent, sa perte dans l'air est

$$(x - P')\alpha,$$

donc

$$P + (x - P')\alpha = x;$$

d'où

$$x = \frac{P - \alpha P'}{1 - \alpha}.$$

Q. **62.** Un corps est pesé successivement dans de l'air ayant une densité égale à 0,0012, et dans de l'alcool ayant pour densité 0,8; on demande quelle est la vraie densité de ce corps, sachant que dans l'air il pèse 45 grammes, et dans l'alcool 40 grammes?

En désignant par d la densité de l'air par rapport à l'alcool, le vrai poids du corps sera $\frac{45 - 40d}{1 - d}$; et comme dans le cas actuel $d = 0{,}0012 \times 0{,}8 = 0{,}00096$; le poids réel du corps est donc

$$\frac{45 - 40 \times 0{,}00096}{1 - 0{,}00096} = 45^{gr},0048.$$

Il perd donc dans l'alcool $5^{gr},0048$ de son poids. Dans l'eau il en perdrait $5^{gr},0048 \times \frac{10}{8} = 6^{gr},256$; il a donc pour densité vraie $\frac{45{,}0048}{6{,}256} = 7{,}1938$, celle de l'eau étant prise pour unité.

Q. 63. Un cube creux de cuivre pesant 102 grammes, et ayant 5 centimètres de côté, et lesté par une balle de plomb d'un centimètre de rayon, de manière que le système des deux corps plonge entièrement et soit en équilibre dans une dissolution saline donnée. Quelle doit être la densité de cette dissolution saline?

Le volume apparent du cube de cuivre est 125 centimètres cubes; celui de la balle de plomb est 4,1888 centimètres cubes; le volume de liquide déplacé est donc $129^{\text{ccc}},1888$, et en représentant par x sa densité, son poids sera $x \times 129,1888^{\text{gr}}$; puisqu'il y a équilibre, ce poids doit être égal à la somme des poids 102 gr. et $4,1888 \times 11,352^{\text{gr}} = 47^{\text{gr}},5512576$ du cuivre et du plomb, de là l'équation

$$x \times 129,1888 = 149,5512576,$$

d'où

$$x = 1,156.$$

Q. 64. Un cube de platine, du poids de $155^{\text{gr}},252$, plongé successivement dans l'eau et dans l'alcool, fournit les données suivantes :

Poids dans l'eau,

$$148^{\text{gr}},860\,;$$

Poids dans l'alcool,

$$149^{\text{gr}},390\,;$$

Quelle est la densité de l'alcool par rapport à l'eau?

Le poids du volume d'alcool déplacé est

$$5^{\text{gr}},862\,;$$

Celui du volume d'eau déplacé est

$$7^{\text{gr}},392\,;$$

D'où, pour la densité de l'alcool,

$$d = \frac{5,862}{7,392} = 0,793.$$

Q. 65. Un flacon, vide de toute matière pondérable, pèse $83^{gr},17$; plein d'eau, il pèse $142^{gr},78$, et plein d'acide sulfurique, 182 grammes. Quelle est la densité de l'acide sulfurique ?

Le poids de l'eau contenue dans le flacon est évidemment $59^{gr},61$, et le poids de l'acide sulfurique $98^{gr},83$.

La densité de ce dernier par rapport à l'eau est donc égale à

$$\frac{98,83}{59,61} = 1,658.$$

Q. 66. Une ampoule vide pesant dans le vide $0^{gr},978$, est en équilibre dans l'éther, lorsqu'elle y est complétement plongée ; une autre ampoule parfaitement semblable à la précédente, pour être en équilibre lorsqu'elle est entièrement plongée dans l'alcool, doit contenir $0^{gr},125$ d'eau. Quelle est la densité de l'alcool, sachant que celle de l'éther est 0,715 ?

Un volume d'éther égal à celui de l'ampoule pèse donc $0^{gr},978$; ce volume est donc égal à $\frac{0^{ccc},978}{0,715}$; or, d'après les données de l'expérience, un pareil volume d'alcool pèse $0^{gr}978 + 0^{gr},125 = 1^{gr},103$. Donc, en appelant x la densité de l'alcool, on aura l'équation

$$\frac{978}{715}x = 1,103, \quad \text{d'où} \quad x = 0,806.$$

Q. 67. Connaissant les poids P, P′, P″, d'un flacon successivement plein d'air, plein d'eau au maximum de densité; et enfin, plein d'un liquide quelconque, et la densité α de l'air rapportée à celle de l'eau prise pour unité, trouver la densité exacte du liquide en tenant compte de la présence de l'air dans le flacon lors de la première pesée.

Soit x cette densité inconnue, et appelons **V** le volume du flacon, exprimé en centimètres cubes; $V\alpha$ grammes sera le poids de l'air contenu dans le flacon.

Le vrai poids du flacon est donc

$$P - V\alpha.$$

Le vrai poids du liquide

$$P'' - (P - V\alpha).$$

Celui de l'eau

$$P' - (P - V\alpha),$$

c'est-à-dire qu'on a les équations

$$P' = P + V(1 - \alpha)$$
$$P'' = P + V(x - \alpha)$$

d'où

$$\frac{x - \alpha}{1 - \alpha} = \frac{P'' - P}{P' - P}$$

d'où, par conséquent,

$$x = \frac{P'' - P - \alpha (P'' - P')}{P' - P}.$$

Q. 68. Un aréomètre à volume constant, pesant 42 grammes, s'enfonçait jusqu'au trait d'affleurement dans de l'alcool ayant pour densité 0,82. Quelle doit être la surcharge pour déterminer l'affleurement dans de l'acide azotique ayant pour densité 1,34?

Soit x le nombre de grammes cherché; le volume d'alcool déplacé est

$$\frac{42}{0,82} = 51^{\text{ccc}},219.$$

Un égal volume d'acide azotique pèsera

$$51,219 \times 1,34 \text{ grammes} = 68^{\text{gr}},633,$$

on devra donc avoir

$$x + 42 = 68,633, \quad \text{d'où} \quad x = 26^{\text{gr}},633.$$

Q. **69.** Un aréomètre à poids constant déplace 57 centimètres cubes d'acide azotique ayant 1,34 de densité. Quel volume déplacera-t-il dans l'acide sulfurique qui a pour densité 1,842?

En désignant ce volume par x, le poids d'acide sulfurique déplacé sera $x \times 1,842$. D'ailleurs le poids d'acide azotique déplacé est $57^{\text{gr}} \times 1,34 = 76^{\text{gr}},38$. Ces poids devant être égaux, on a

$$x \times 1,842 = 76,38, \quad \text{d'où} \quad x = 41^{\text{ccc}},466.$$

Q. **70.** Combien faudrait-il mettre d'eau au maximum de densité dans 1 kilogramme d'acide azotique ayant pour densité 1,48, pour que la densité de ce dernier soit abaissée à 1,29, en supposant que le mélange se fasse sans condensation ni dilatation de volume?

Le kilogramme d'acide primitif occupe un volume de $\frac{1000}{1,48}$ centimètres cubes; si donc on désigne par x le nombre de grammes d'eau qu'il faut ajouter, le volume du mélange sera $x+\frac{1000}{1,48}$, son poids sera $\left(x+\frac{1000}{1,48}\right)1,29$; d'ailleurs, ce poids doit être égal à $(1000+x)^{gr}$, d'où l'équation

$$\left(x+\frac{1000}{1,48}\right)\times 1,29=1000+x,$$

et par suite

$$x=442^{gr},684.$$

Q. 71. On donne les poids P et P′, et les densités D et D′, de deux corps différens de nature, et l'on demande de trouver : 1° la densité de leur mélange ou combinaison, lorsque la contraction est $\frac{1}{m^e}$ de la somme des volumes composans.

2°. La densité de leur mélange ou combinaison, lorsque la dilatation s'élève à la n^e partie de la somme des volumes composans.

1er *cas*. Les volumes des deux corps sont respectivement

$$\frac{P}{D},\quad \frac{P'}{D'},$$

la m^e partie de la somme de ces volumes sera donc

$$\left(\frac{P}{D}+\frac{P'}{D'}\right)\frac{1}{m},$$

et le volume du mélange ou de la combinaison résultante sera évidemment

$$\left(\frac{P}{D}+\frac{P'}{D'}\right)\frac{m-1}{m};$$

d'un autre côté, en désignant par x la densité cherchée, le volume du composé aura aussi pour expression $\frac{P+P'}{x}$, d'où l'équation

$$\left(\frac{P}{D}+\frac{P'}{D'}\right)\cdot\frac{m-1}{m}=\frac{P+P'}{x},$$

d'où

$$x=\frac{P+P'}{\frac{P}{D}+\frac{P'}{D'}}\cdot\frac{m}{m-1}.$$

2^e *Cas*. Un raisonnement et un calcul tout-à-fait semblables conduiront aisément à la valeur

$$y=\frac{P+P'}{\frac{P}{D}+\frac{P'}{D'}}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Q. 72. Connaissant la somme V des volumes de deux corps solides ou liquides, et le volume U de leur combinaison; connaissant de plus la densité moyenne Δ de leur simple mélange sans dilatation ni contraction, la densité d de leur combinaison, déterminer le coefficient de contraction ou le coefficient de la dilatation s'il y a lieu.

Le poids du composé est $V\Delta$ ou Ud, d'où l'égalité

$$V\Delta=Ud,$$

et par suite

$$\frac{U}{V}=\frac{\Delta}{d};\quad \text{d'où}\quad \frac{V-U}{V}=\frac{d-\Delta}{d}.$$

Dans le cas de la contraction, $\frac{V-U}{V}$ représente la fraction de diminution de l'unité de volume, cette fraction, qui n'est autre chose que le *coefficient de contraction*, est égal comme on voit à $\frac{d-\Delta}{d}$. Dans le cas où il y aurait eu dilatation, $\frac{U-V}{V}=\frac{\Delta-d}{d}$ serait le coefficient de dilatation.

Q. **73.** On a mêlé 15 kilogrammes d'alcool avec 7 kilogrammes d'eau; on demande quelle doit être la densité du mélange, sachant :

1°. Que l'eau était au maximum de densité;

2°. Que la densité de l'alcool employé est 0,795;

3°. Que la contraction est ici $\frac{1}{30}$ de la somme des volumes d'eau et d'alcool réunis.

Le volume de l'eau était 7 litres, celui de l'alcool

$$\frac{15}{0,795}=18^{\text{lit.}}868.$$

Donc, en désignant par x la densité du mélange, on aura, en vertu de la première formule du n° **71**,

$$x=\frac{22}{25,868}\cdot\frac{30}{29}=0,8797.$$

Q. **74.** On a allié 100 grammes de fer dont la densité est 7,788, avec 5 grammes d'étain dont la densité est 7,291; l'alliage résultant a pour densité 7,5. Quel est le coefficient de dilatation de cette combinaison?

La densité moyenne Δ de l'alliage, s'il n'y avait eu ni dilatation ni contraction, serait

$$\Delta=\frac{P+P'}{\frac{P}{D}+\frac{P'}{D'}}=7,763.$$

La densité réelle d de la combinaison étant égale à 7,5, nous aurons pour le coefficient de dilatation cherché, en vertu du n° **72**,

$$\frac{\Delta - d}{d} = \frac{7,763 - 7,5}{7,5} = 0,035.$$

Q. **75.** Un tube de verre, cylindrique intérieurement, pèse seul 85 grammes; lorsqu'on y introduit une colonne de mercure de 8 centimètres de longueur, il pèse 128 grammes. Quel est le rayon de ce tube, en ne tenant pas compte de la présence de l'air ni de la température que nous supposerons 0°.

En désignant par R le rayon cherché, le volume du cylindre de mercure sera représenté par

$$(\pi R^2 . 8)^{ccc};$$

par conséquent son poids sera

$$\pi R^2 8 . 13,568^g = (128 - 85)^g, \quad \text{ou } 43 \text{ grammes}.$$

D'où

$$R = 1^{mm},26.$$

Q. **76.** Étant donné un tube thermométrique gradué en parties d'égale capacité, déterminer

1°. La capacité du réservoir;

2°. Le rapport de la capacité d'une division du tube à celle du réservoir.

En ne tenant pas compte de l'air, et en supposant que la température soit constamment égale à 0°.

Soit P le poids du tube vide, P′ le poids du tube lorsque le réservoir seul est plein de mercure jusqu'à l'origine de la graduation; P′ — P est le poids du mercure contenu dans le réservoir, et $\frac{P' - P}{13,568}$ est le volume de ce même réservoir. Ensuite, soit P'' le poids du tube contenant du mercure jusqu'à la m^e division. $P'' - P'$ sera le poids du mercure contenu dans m divisions ; par conséquent... $\frac{P'' - P'}{(13,568)m}$ = le volume d'une seule division, et enfin $\frac{P'' - P'}{m(P' - P)}$ sera le rapport de la capacité d'une seule division à celle du réservoir.

Mais comme il est très difficile de ne remplir de mercure que juste le réservoir, il est nécessaire de faire quelques modifications au procédé précédemment indiqué.

Soit p' le poids du mercure contenu dans le réservoir et dans les n premières divisions, p'' le poids de ce liquide contenu dans le réservoir et les n' premières divisions. (m est plus grand que n.) $p'' - p'$ est le poids du mercure contenu dans $n' - n$ divisions, et $\frac{p'' - p'}{(13,568)(n' - n)}$ le volume, en centimètres cubes, d'une seule division. Le poids du mercure étant de $\frac{p'' - p'}{n' - n}$ pour une division, sera de $\frac{n'(p'' - p')}{(n' - n)}$ pour les n' premières, et par conséquent $p'' - P - \frac{(p'' - p')n'}{n' - n}$ pour le réservoir seul dont le volume sera ainsi

$$\frac{n'(p' - P) - n(p'' - P)}{(n' - n)(13,568)},$$

et par conséquent le rapport d'une division au réservoir sera

$$\frac{p'' - p'}{n'(p' - P) - n(p'' - P)}.$$

Q. 77. Connaissant le poids P d'un vase plein d'air ayant pour densité α, et le poids P′ de ce même vase rempli d'un liquide ayant d pour densité, déterminer la capacité de ce vase.

Soit X cette capacité, le poids de l'air qu'il contenait dans la première pesée est $X\alpha$. Par conséquent, le poids du vase vide de matière pondérable serait

$$P - X\alpha;$$

et le poids du liquide contenu daus le vase serait

$$P' - P + X\alpha.$$

D'ailleurs ce poids de liquide est aussi exprimé par dX, d'où l'équation

$$P' - P + X\alpha = X.d;$$

et par conséquent

$$X = \frac{P' - P}{d - \alpha}.$$

Barologie et Pneumatologie.

Q. 78. Quelle est la pression moyenne exercée par l'atmosphère sur une surface d'un centimètre carré, au niveau des mers, en supposant la hauteur moyenne du baromètre égale à $0^m,76$?

Si la colonne de $0^m,76$ était une colonne d'eau au maximum de densité, la pression serait de 76 grammes; mais comme la densité du mercure est 13,568, la pression de cette colonne est $76 \times 13,568 = 1031^{gr},168$, c'est-à-dire, à peu près $1^{kil.},31$ grammes.

Q. 79. Quelle est la pression exercée extérieurement par l'atmosphère sur la surface du corps humain, en estimant celle-ci à 1,75 mètres carrés, et la hauteur barométrique à $0^m,76$?

Puisque, sur chaque centimètre carré, la pression est $1^{kil.},031$, sur 17500 centimètres carrés, elle serait

$$17500^{kil.} \times 1,031 = 18042^{kil.},5.$$

Q. 80. La hauteur moyenne du baromètre à mercure étant $0^m,76$ au niveau de la mer, quelles devraient être les hauteurs correspondantes d'un baromètre à eau, d'un baromètre à alcool, d'un baromètre à acide sulfurique, azotique, et, généralement, d'un baromètre construit avec un liquide ayant d pour densité?

Pour exercer des pressions égales, les hauteurs doivent être en raison inverse des densités. La colonne d'eau équivalente à $0^m,76$ de mercure sera donc

$$0^m,76 \times 13,568 = 10^m,312.$$

La colonne d'alcool sera donnée par la proportion

$$x : 0^m,76 :: 13,568 : 0,795, \quad \text{d'où} \quad x = 12^m,971.$$

La colonne d'acide sulfurique sera donnée par la proportion

$$y : 0^m,76 :: 13,568 : 1,844, \quad \text{d'où} \quad y = 5^m,592.$$

La hauteur de la colonne d'acide azotique sera donnée par la proportion

$$z : 0^m,76 :: 13,568 : 1,52, \quad \text{d'où} \quad z = 6^m,784.$$

Enfin, la hauteur h de la colonne du liquide de densité égale à d sera donnée par

$$h : 0^{m},76 :: 13,568 :: d,$$

d'où

$$h = \frac{0^{m},76 \times 13,568}{d}.$$

Q. 81. Avec un baromètre à siphon dont les deux branches sont d'égal diamètre, on a observé une variation de pression de 12 millimètres. Quels ont été les mouvemens de la colonne mercurielle dans chaque branche?

Lorsque le mercure s'élève dans la grande branche, il est évident qu'il s'abaisse d'autant dans la petite, et lorsqu'au contraire il s'abaisse dans la grande d'un certain nombre de millimètres, il s'élève de la même quantité dans la petite; de sorte que, dans tous les cas, chacune des deux colonnes de mercure concourt pour moitié dans la variation barométrique.

Donc, dans le cas actuel, les hauteurs du mercure auront varié, en sens contraire, l'une de l'autre, de 6 millimètres dans chaque branche.

Q. 82. Étant donné (*fig.* 7), un tube cylindrique recourbé en siphon, terminé à ses deux extrémités par deux réservoirs B, B′, cylindriques et d'égal diamètre, dont l'un B, communique en *o* avec l'atmosphère, et dont l'autre B′, communique par un entonnoir E avec l'air d'une chambre, sans communiquer avec l'atmosphère. On demande de trouver la différence de pression entre l'air extérieur et celui de la chambre.

La partie ACA′ du tube est remplie d'eau; le reste de chaque branche, et une partie des réservoirs sont remplis d'huile.

Soient $A'A^{\text{IV}} = E$, l'abaissement du niveau de l'eau dans la branche droite, et a l'abaissement du niveau de l'huile dans le réservoir de la même branche; soient encore d la densité de l'huile (celle de l'eau étant prise pour unité), et x la hauteur de la colonne d'eau qui mesure la différence cherchée des deux pressions; $2E$ sera la différence de hauteur des deux colonnes d'eau, et $2a$ la différence de niveau de l'huile dans les deux réservoirs.

La pression exercée dans la branche droite sur le plan $A'''A^{\text{IV}}$, est $x + ld$, en désignant par l la longueur totale de la colonne d'huile $A^{\text{IV}}H'$.

La pression exercée sur le même plan dans l'autre branche, est

$$2E + d(l + 2a - 2E),$$

de là l'équation

$$x + ld = 2E + d(l + 2a - 2E),$$

qui donne

$$x = 2E(1 - d) + 2ad.$$

Si le siphon ne renfermait qu'un seul liquide, de l'eau par exemple, on aurait

$$d = 1, \quad \text{et} \quad x = 2a;$$

c'est-à-dire que la différence de pression serait mesurée par la différence de niveau dans les deux réservoirs, ce qu'on pouvait prévoir aisément.

Mais alors, il serait très difficile de mesurer exactement ces différences, qui seraient ainsi le plus souvent très peu sensibles.

Lorsque l'abaissement a sera trop petit pour pouvoir être mesuré directement, comme les tubes sont tous supposés cylindriques, il sera facile d'obtenir cette quantité en fonction de E.

En effet, soient R le rayon du réservoir, r celui du tube recourbé, on aura la proportion

$$E : a :: \pi R^2 : \pi r^2, \quad \text{d'où} \quad a = E \times \frac{r^2}{R^2}.$$

Q. 83. L'aiguille d'un baromètre à cadran a marché de 280°. Quelle est la variation de hauteur de la colonne barométrique, sachant que la circonférence de la poulie est égale à 4 centimètres? (On suppose écartées toutes les causes d'erreur dans la marche de l'instrument, et les deux branches d'égal diamètre.)

La circonférence de la poulie ayant 4 centimètres, 1 degré représentera $\frac{4^c}{360} = \frac{1^c}{90}$; les 280° représenteront donc $3^c,1111\ldots$

La variation totale de longueur de la colonne mercurielle, étant double de celle qui s'observe dans chaque branche, sera

$$62^{mm},222\ldots$$

Q. 84. On a introduit dans un tube tt' (*fig.* 8), gradué en volume, suffisamment étroit et maintenu horizontal, de l'air sec et une petite colonne de mercure AB qui sépare cet air de l'air atmosphérique; lorsque le tube est ainsi horizontal, l'air occupe un volume b; lorsqu'on redresse le tube verticalement, l'ouverture est en haut, le volume d'air est réduit à c, et la longueur de la colonne de mercure est alors a. Quelle est la pression atmosphérique, en supposant écartée l'influence due à la variation de température ?

En désignant par x la pression cherchée, cette pression sera précisément la même que celle du volume d'air b, lorsque le tube est horizontal. La pression supportée par l'air, lorsqu'il est réduit au volume c, est égale à $x+a$. On sait d'ailleurs que les volumes occupés par une même masse de gaz soumise à différentes pressions, sont entre elles en raison inverse de ces pressions, d'où la proportion

$$x : x+a :: c : b,$$

et par suite,

$$x = \frac{ac}{b-c}.$$

Q. 85. Dans un tube de baromètre ordinaire à siphon, on a introduit du mercure, et il est resté une certaine quantité inconnue d'air dans la chambre barométrique ; le volume occupé par cet air est V, et la longueur de la colonne barométrique est h. On a ensuite ajouté du mercure dans la branche ouverte ; le volume de l'air a intérieur a été réduit à V′, et la nouvelle colonne barométrique est h'. On demande, 1° la pression atmosphérique ; 2° la force élastique primitive de l'air qui restait dans la chambre barométrique.

Soient b la pression atmosphérique, et f la force élastique primitive de l'air intérieur. On a évidemment l'équation

$$h+f=b.$$

Lorsque le volume d'air V est réduit à V′, sa force élastique est devenue, en vertu de la loi de Mariotte, $f\,\frac{V}{V'}$. On aura donc l'équation

$$f\,\frac{V}{V'} + h' = b,$$

ou bien,

$$fV + h'V = bV';$$

d'où, en éliminant f,

$$b = \frac{hV - h'V'}{V - V'},$$

et ensuite

$$f = b - h = \frac{(h - h')\,V'}{V - V'}.$$

Q. 86. Dans un tube étroit AB (*fig.* 9), fermé par une de ses extrémités, et maintenu verticalement l'ouverture en haut, on a de l'air sec qui, dans cette position, occupe un volume de 24 centimètres cubes; et par-dessus est une colonne de mercure de 6 centimètres de longueur; lorsqu'on renverse le tube verticalement l'orifice en bas, la colonne de mercure occupe une longueur de 56 millimètres. On demande quel sera le volume occupé alors par le gaz, sachant que la hauteur du baromètre, au moment de l'expérience, est 770 millimètres.

La pression supportée par l'air intérieur, dans la première position, est égale à

$$(770 + 60)^{mm} = 830^{mm}.$$

La pression que ce même air supporte dans la seconde position est

$$(770 - 56)^{mm} = 714^{mm}.$$

Les volumes occupés par une même masse de gaz étant entre eux en raison inverse des pressions, le volume x cherché sera donné par la proportion

$$x : 24 :: 830 : 714, \quad \text{d'où} \quad x = 27^{\text{ccc}},899.$$

Q. 87. Un piston de 50 centimètres de base, pesant 875 grammes, introduit dans un corps de pompe cylindrique, presse un volume d'air qu'il réduit à 2 litres, de manière à lui faire acquérir une force élastique de $1^{\text{m}},48$ de mercure. Quel sera le déplacement du piston, lorsqu'on l'abandonnera à lui-même, pour qu'il atteigne sa position d'équilibre définitif, sachant d'ailleurs que la pression atmosphérique extérieure est $0^{\text{m}},78$?

Il est évident que la longueur de la colonne d'air intérieur est

$$\frac{2000}{50} = 40 \text{ centimètres.}$$

Si donc nous désignons par x le déplacement linéaire ascensionnel du piston, le volume de l'air sera

$$(2000 + 50x)^{\text{ccc}},$$

et sa force élastique,

$$1^{\text{m}},48.\frac{2000}{2000 + 50x}.$$

Cette force élastique doit faire équilibre à $0^{\text{m}},78$ plus à la pression de 875 grammes du piston, laquelle équivaut à une colonne de mercure de

$$0^{\text{m}},\frac{875}{13,568},$$

on aura donc l'égalité

$$1^{m},48 . \frac{2000}{2000 + 50x} = 0^{m},78 + 0^{m},\frac{875}{13,568},$$

d'où

$$x = 35^{cm},439 ;$$

le piston s'élèvera donc de $35^{cm},439$ au-dessus de sa position actuelle.

Q. 88. On a de l'air dans un tube cylindrique (*fig.* 10) occupant une longueur de 18 centimètres; le niveau du mercure est le même dans le tube et dans la cuvette dans laquelle il plonge, et la pression extérieure est égale à 80 centimètres. On demande à quelle hauteur s'élèvera le mercure lorsqu'on aura soulevé le piston P de 12 centimètres.

On suppose le diamètre du réservoir très grand par rapport à celui du tube.

Soit x le nombre de centimètres dont s'élèvera la colonne mercurielle; l'air occupera alors une longueur de

$$(18 + 12 - x)^{cm} = (30 - x)^{cm}.$$

Le tube étant cylindrique, les volumes sont proportionnels aux longueurs qu'ils occupent; d'ailleurs, la pression intérieure de l'air, après l'élévation du piston, est

$$(80 - x)^{cm}.$$

On aura donc la proportion

$$18 : 30 - x :: 80 - x : 80,$$

d'où

$$x = 55 \pm 45,463.$$

Il est évident que la première valeur ne répond pas à la question, puisque le piston n'est qu'à 30 centimètres du niveau du mercure de la cuvette.

La seconde valeur

$$x = 9,547,$$

est celle qu'il convient réellement d'adopter.

Q. 89. Dans un tube ACDP recourbé en siphon renversé (*fig.* 11), fermé en A, et supposé parfaitement calibré, on a du mercure qui s'élève à la même hauteur dans les deux branches verticales; la partie AB fermée contient 100 centimètres cubes d'air sec. Dans l'autre branche, au-dessus du mercure, se trouvent 75 centimètres cubes d'air sec enfermés dans le tube par un piston P, et occupant une longueur de 15 centimètres. On demande quelle sera la différence des deux colonnes de mercure, lorsqu'on aura enfoncé le piston P de 4 centimètres, en supposant la pression primitive de l'air dans les deux branches égale à 76 centimètres.

La section du tube est évidemment

$$\frac{75^{ccc}}{15} = 5 \text{ centimètres carrés.}$$

Si donc on appelle $2x$ la différence des deux colonnes de mercure, x sera l'abaissement dans la colonne PD, et l'élévation dans la branche CA. Le volume d'air AB sera réduit à

$$(100 - 5x)^{ccc}.$$

Le volume d'air PF sera réduit à

$$(75 - 4.5 + 5x)^{ccc} = (55 + 5x)^{ccc},$$

et sa force élastique égale à

$$76 \cdot \frac{75}{55 + 5x} \text{ centimètres.}$$

On aura donc l'équation

$$76 \frac{75}{55 + 5x} = 2x + 76 \cdot \frac{100}{100 - 5x},$$

ou

$$x^3 - 9x^2 - 1550x + 3040 = 0,$$

d'où

$$x = 1^{\text{cm}},95 \text{ environ},$$

c'est-à-dire que la différence de niveau $2x$ des deux colonnes de mercure sera environ 39 millimètres.

Q. **90.** Dans un tube recourbé parfaitement calibré ABC (*fig.* 12), on a mis du mercure, et au-dessus, dans la partie fermée AD, se trouve de l'air sec. La pression étant $0^{\text{m}},760$, le mercure se tient de niveau. On demande de combien devra s'élever le mercure dans la branche fermée, pour que la pression exercée dans la branche ouverte en C, soit équivalente à n atmosphères. Le volume DA du tube AD est V, et occupe N millimètres de longueur.

(On ne tiendra aucun compte de la température.)

Soit x millimètres l'ascension de la colonne de mercure, lorsque la pression, dans la branche ouverte, sera égale à n atmosphères : la colonne de mercure descendra dans l'autre branche de la même quantité x puisque le tube est cylindrique. Alors, la longueur de la colonne d'air enfermée sera réduite à

$$\text{N} - x \text{ millimètres},$$

et son volume V sera réduit dans le rapport de

$$N - x \text{ à } N,$$

c'est-à-dire qu'il deviendra

$$\frac{V(N - x)}{N}.$$

La pression supportée par cet air sera égale à $n.760$ millimètres de mercure, diminuée de la colonne $2x$ qui presse en sens contraire, de haut en bas. On aura donc, d'après la loi de Mariotte,

$$V : \frac{V(N - x)}{V} :: n.760 - 2x : 760,$$

d'où

$$x = \frac{N + 380.n \pm \sqrt{N^2 + 380(380.n^2 + 4N - 2Nn)}}{2}.$$

Si, comme cas particulier, on suppose

$$n = 2 \text{ atmosphères}, \quad N = 100 \text{ millimètres},$$

on trouvera

$$x = 46,75 \text{ millimètres environ},$$

pour l'ascension de la colonne mercurielle.

Loi du décroissement des quantités d'air restant dans le récipient de la machine pneumatique fonctionnant toujours avec la même efficacité.

Q. 91. Soient P la capacité d'un corps de pompe, R celle du récipient, et A la quantité d'air contenue dans le récipient. Supposons le piston au bas de sa course : lorsqu'on relèvera celui-ci, l'air contenu dans le récipient se répandra uniformément dans le récipient et dans le corps de pompe, en occupant un volume égal à $R+P$; et comme la quantité d'air comprise dans ce nouveau volume est la même que celle primitivement comprise dans R, il n'en reste plus actuellement dans le récipient seul qu'une quantité x' donnée par la proportion

$$x' : A :: R : R + P,$$

d'où

$$x' = A \cdot \frac{R}{R + P};$$

lorsqu'on élève le piston pour la deuxième fois, la quantité d'air x'' restant dans le récipient seul sera donnée par la proportion

$$x'' : A \cdot \frac{R}{R + P} :: R : R + P,$$

d'où

$$x'' = A \cdot \frac{R^2}{(R + P)^2}.$$

Par des raisonnemens semblables, on aura successivement, pour les quantités d'air restant, après les 3^e, 4^e . . . n^e coups de piston,

$$x''' = A \cdot \frac{R^3}{(R + P)^3},$$

$$x^{\mathrm{IV}} = A \cdot \frac{R^4}{(R + P)^4},$$

. . . .

$$x^n = A \cdot \frac{R^n}{(R + P)^n}.$$

Loi du décroissement des quantités d'air extraites par les coups de piston successifs de la machine pneumatique, en supposant que celle-ci fonctionne toujours mathématiquement avec la même efficacité.

Q. 92. Supposons d'abord le piston au bas de sa course; lorsque ensuite on le relèvera, une partie de l'air A, contenu primitivement dans le récipient, remplira le corps de pompe P; et comme la quantité A d'air primitif occupe maintenant un volume total égal à R + P, la partie y' qui sera comprise dans le volume P sera à la totalité A dans le rapport de P à R + P, c'est-à-dire sera donnée par la formule

$$y' = \mathrm{AP} \cdot \frac{1}{\mathrm{R} + \mathrm{P}}.$$

Lorsqu'on abaissera le piston, cet air sera enlevé complétement par celui-ci; lorsque ensuite on le relèvera, la quantité x' d'air restant, ou $\mathrm{A} \cdot \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + \mathrm{P}}$, se répandra uniformément dans le volume P + R; la quantité y'' enlevée par le deuxième coup de piston, sera donnée de même par la proportion

$$y'' : \mathrm{A} \cdot \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + \mathrm{P}} :: \mathrm{P} : \mathrm{R} + \mathrm{P}, \quad \text{d'où} \quad y'' = \mathrm{AP} \cdot \frac{\mathrm{R}}{(\mathrm{R} + \mathrm{P})^2}.$$

On trouverait de la même manière, pour les quantités y''', y^{IV}, ... y^n, enlevées successivement par les coups de piston suivans,

$$y''' = \mathrm{AP}.\frac{\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}+\mathrm{P})^3},$$

$$y^{\mathrm{IV}} = \mathrm{AP}.\frac{\mathrm{R}^3}{(\mathrm{R}+\mathrm{P})^4},$$

....

$$y^{(n)} = \mathrm{AP}.\frac{\mathrm{R}^{n-1}}{(\mathrm{R}+\mathrm{P})^n}.$$

Si, comme nous l'avons supposé, la machine fonctionne toujours avec la même efficacité, et qu'on donne un nombre infini de coups de piston, la somme de ces quantités y', y'',... etc., devra être égale à A.

En effet, si dans l'expression de cette somme

$$y' + y'' + y''' + \ldots + y^n$$
$$= \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{R}+\mathrm{P}}\left(1 + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+\mathrm{P}} + \frac{\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R}+\mathrm{P})^2} + \ldots + \frac{\mathrm{R}^{n-1}}{(\mathrm{R}+\mathrm{P})^{n-1}}\right),$$

on suppose $n = \infty$, alors le dernier terme de la progression géométrique décroissante qui représente cette somme est nul, et la valeur de cette somme est

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{R}+\mathrm{P}}\left(\frac{1}{1-\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}+\mathrm{P}}}\right) = \mathrm{A}.$$

C'est-à-dire qu'après un nombre infini de coups de piston, il ne resterait plus d'air dans le récipient. Il est clair alors que la quantité

$$x^{(n)} = \mathrm{A}.\frac{\mathrm{R}^n}{(\mathrm{R}+\mathrm{P})^n},$$

d'air restant après le n^{e} coup de piston, doit être nulle lorsque $n = \infty$. Or l'expression

$$\frac{R^n}{(R+P)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{P}\right)^n},$$

dans laquelle $\frac{1}{1+\frac{R}{P}}$ est moindre que l'unité, satisfait évidemment à cette condition.

Il résulte des deux paragraphes précédens, les deux lois suivantes :

1^re^ Loi. *Les quantités d'air qui restent dans le récipient, décroissent en progression géométrique, lorsque le nombre des coups de piston croît en progression arithmétique.*

2^e^ Loi. *Les quantités d'air enlevées successivement par chaque coup de piston décroissent en progression géométrique, lorsque le nombre des coups de piston croît en progression arithmétique.*

Le rapport commun de ces deux progressions géométriques décroissantes, est celui du volume du récipient à la somme des volumes réunis du récipient et du corps de pompe.

Mesure du pouvoir raréfiant d'une machine pneumatique munie du perfectionnement de M. Babinet.

Q. 93. Soient m la masse d'air restant dans chaque corps de pompe lorsque la machine fonctionnant à la manière ordinaire, est à la limite de son efficacité ; P la capacité de chaque corps de pompe lorsque le piston est au plus haut point de sa course, et p la somme des imperfections de contact, c'est-à-dire l'espace compris sous le piston lorsqu'il est au plus bas point de sa course.

$\frac{m}{p}$ sera la quantité d'air contenue dans l'unité de volume, soit dans cette petite capacité, soit dans l'atmosphère ; $\frac{m}{P}$ sera la quantité d'air contenue dans l'unité de volume du récipient, puisque cette quantité sera la même que sous le piston quand il est au plus haut point de sa course.

La fraction $\frac{p}{P}$ peut donc être prise pour la mesure du pouvoir raréfiant de la machine ordinaire, puisqu'elle exprime le rapport des masses d'air contenues dans l'unité de volume du récipient, à la fin et au commencement de l'opération.

Cela posé, on sait qu'avec le perfectionnement de M. Babinet, l'efficacité de la machine ne cesse que lorsque le piston du corps de pompe efficace étant au plus haut point de sa course, et ce corps de pompe contenant une masse d'air égale à m, la quantité $m\,\frac{p}{P}$ contenue dans l'autre corps de pompe, et dilatée de manière à occuper l'espace $P+p'$ du corps de pompe et des imperfections du contact inférieur auxquelles il faut joindre le petit canal additionnel, aura la même densité que l'air contenu dans le récipient. Or, la quantité d'air contenue dans l'unité de volume, dans ce dernier état, est donnée par la proportion

$$x : \frac{mp}{P} :: p + p' :: P + p',$$

d'où

$$x = \frac{mp}{P} \cdot \frac{p + p'}{P + p'};$$

c'est-à-dire que la masse d'air qui reste alors est à celle qui y resterait par le procédé ordinaire, comme $p + p'$ est à $P + p'$. Le nouveau pouvoir raréfiant est donc

$$\frac{p}{P} \cdot \frac{p + p'}{P + p'}.$$

Si p' pouvait être annulé, l'air qui ne pourrait être extrait serait à celui qui resterait avec la machine ordinaire, comme celui-ci est à l'air primitivement contenu dans le récipient. Et le pouvoir raréfiant serait ainsi le carré de ce qu'il était précédemment.

Q. 94. Connaissant la somme R des capacités du récipient d'une machine pneumatique, et du canal de communication de ce récipient avec les corps de pompe, déterminer la capacité de l'un des corps de pompe.

Supposons au bas de sa course le piston de ce corps de pompe, et désignons par F la force élastique de l'air du récipient, accusée par un baromètre qui communique avec lui, et par F′ la force élastique de cet air, après un coup de piston. x étant la capacité cherchée du corps de pompe, on devra avoir la proportion

$$F' : F :: R : R + x,$$

puisque l'air du récipient s'est dilaté dans le rapport de R à $R + x$.

On déduit de là

$$x = \frac{R(F - F')}{F'}.$$

Si x' désigne la capacité du second corps de pompe, et F'' la force élastique de l'air du récipient après un second coup de piston, on aura de même la proportion

$$F'' : F' :: R : R + x',$$

d'où

$$x' = \frac{R(F' - F'')}{F''}.$$

Si la machine peut fonctionner efficacement encore deux fois, deux nouveaux coups de piston donneront pour x et x' de nouvelles valeurs

$$x = \frac{R\,(F'' - F''')}{F'''},$$

$$x' = \frac{R\,(F''' - F^{\text{IV}})}{F^{\text{IV}}},$$

qui serviront à contrôler les précédentes.

Q. 95. Connaissant les capacités P et P' des corps de pompe d'une machine pneumatique, déterminer la capacité R du récipient et du canal de communication réunis.

Soient F et F' les forces élastiques de l'air du récipient avant et après le premier coup de piston, F'' la force élastique de cet air après le deuxième coup de piston, on aura la proportion

$$F' : F :: R : R + P, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{F'P}{F - F'}.$$

On aurait de même la proportion

$$F'' : F' :: R : R + P',$$

qui donnerait

$$x = \frac{F''P'}{F' - F''}.$$

Ces deux valeurs de R se serviraient mutuellement de vérification.

Q. 96. On a vissé sur la platine d'une machine pneumatique un ballon dont la capacité est V; on demande quelle est la capacité du canal de communication des corps de pompe avec le ballon, connaissant la capacité de l'un des corps de pompe, et les supposant égaux entre eux.

x et P étant respectivement les capacités du canal de communication et du 1er corps de pompe, F, F′, F″, les forces élastiques de l'air du récipient avant le premier coup de piston, et après le premier et le second coup; on aura les proportions

$$F' : F :: V + x : V + x + P,$$
$$F'' : F' :: V + x : V + x + P,$$

qui donneront

$$x = \frac{F'(V + P) - FV}{F - F'},$$
$$x = \frac{F''(V + P) - F'V}{F' - F''},$$

valeurs qui devraient être égales.

Si les deux corps de pompe, n'étant plus égaux, avaient pour capacités, le premier P et le second P′, les valeurs de x seraient

$$x = \frac{F'(V + P) - FV}{F - F'},$$
$$x = \frac{F''(V + P') - F'V}{F' - F''}.$$

Q. **97**. Connaissant la capacité P de chacun des corps de pompe de la machine pneumatique, et la capacité R du récipient et du canal de communication réunis, déterminer la force élastique de l'air qui reste dans le récipient après n coups de piston supposés tous complétement efficaces.

Le volume occupé par cet air étant toujours le même, son élasticité doit être directement proportionnelle à sa quantité. Or, d'après le § **91**, la quantité d'air qui reste après le n^e coup de piston, est

$$A.\frac{R^n}{(R+P)^n};$$

la force élastique $x_{(n)}$ de cet air sera à la force élastique primitive F, dans le rapport de $A.\frac{R^n}{(B+P)^n}$ à A; c'est-à-dire, sera donnée par la proportion

$$x_{(n)} : F :: A.\frac{R^n}{(R+P)^n} : A;$$

d'où

$$x_{(n)} = F.\frac{R^n}{(R+P)^n}.$$

Si les deux corps de pompe n'avaient pas la même capacité, soit P la capacité du premier et P' celle du second, on trouverait successivement pour la force élastique cherchée, après le 1^er^, le 2^e^, le 3^e^, etc., coup de piston,

$$x' = F.\frac{R}{R+P},$$

$$x'' = F.\frac{R^2}{(R+P)(R+P')},$$

$$x''' = F.\frac{R^3}{(R+P)^2\,(R+P')},$$

$$x^{\text{IV}} = F.\frac{R^4}{(R+P)^2\,(R+P')^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et enfin après le n^e, suivant que l'on aurait $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$,

$$x_{(n)} = F.\frac{R^n}{(R+P)^m\,(R+P')^m},$$

ou

$$x_n = F.\frac{R^n}{(R+P)^{m+1}\,(R+P')^m}.$$

Q. 98. Connaissant la capacité P d'un corps de pompe, et celle R du récipient et du canal de communication, déterminer le volume X d'un corps que l'on place sous ce récipient.

Soit F la force élastique primitive de l'air du récipient, F' ce qu'est devenue cette force élastique après un coup de piston, on aura évidemment la proportion

$$F' : F :: R - X : R - X + P,$$

d'où

$$X = \frac{R(F - F') - F'P}{F - F'} = R - \frac{F'P}{F - F'}.$$

Supposons que, la force élastique primitive de l'air du récipient étant égale à 76 centimètres, elle ait été réduite à 60 par un coup de piston ; supposons, en outre,

$$R = 2 \text{ litres}, \quad \text{et} \quad P = 480^{ccc}.$$

On aurait

$$X = 2000 - \frac{60.480}{16} = 200^{ccc}.$$

Q. 99. On avait dans un récipient de machine à compression (*fig.* 13), une quantité A de gaz, dont la force élastique était donnée par une éprouvette à air mm' dans laquelle la colonne de mercure s'élevait de h centimètres, l'air de cette éprouvette occupant v' centimètres cubes. On demande quelle est la quantité d'air contenue dans le récipient, lorsque la colonne de mercure est élevée de h' centimètres, et que l'air intérieur du tube mm' est réduit au volume v'', sachant qu'à la pression $0^m,76$ la colonne de mercure était nulle, et le volume d'air intérieur égal à v.

La quantité A d'air contenue dans le récipient, au moment de la première observation, éprouve une pression égale à

$$76 . \frac{v}{v'} + h;$$

et au moment de l'observation finale, cette force élastique est

$$h' + 76 . \frac{v}{v''};$$

et comme les quantités d'air contenues dans le même volume sont entre elles comme leurs forces élastiques, il en résulte que la quantité d'air cherchée X sera donnée par la proportion

$$X : A :: h' + 76 . \frac{v}{v''} : h + 76 . \frac{v}{v'},$$

d'où

$$X = \frac{Av'}{v''} . \frac{h'v'' + 76v}{hv' + 76v}.$$

Q. 100. Étant données les mêmes circonstances que précédemment, quelle relation devrait-il exister entre les quantités h, h', v', v'', pour que la quantité d'air fût doublée, ou plus généralement, pour qu'elle fût n fois la quantité d'air primitive ?

Il suffirait pour cela de poser la proportion

$$2A : A :: h' + 76\frac{v}{v''} : h + 76\frac{v}{v'},$$

laquelle fournirait la relation

$$76v\,(2v'' - v') = v'v''\,(h' - 2h).$$

Dans le cas général, on trouverait

$$76v\,(nv'' - v') = v'v''\,(h' - nh).$$

Q. 101. Quelle quantité d'air a-t-on introduite dans le récipient d'une machine à compression, sachant 1° que le volume d'air de l'éprouvette de cette machine était de 50 parties au commencement de l'expérience, et qu'il était à la pression de l'air extérieur $0^m,77$; 2° qu'au bout d'un certain nombre de coups de piston, le volume d'air de l'éprouvette est réduit à 5 parties, et que le mercure s'y est élevé à 15 centimètres de hauteur ? Le volume du récipient est de 5 litres, et l'on suppose que la température soit celle de la glace fondante.

La force élastique actuelle de cet air est égale à

$$15 + 77 \cdot \frac{50}{5} = 785 \text{ centimètres}.$$

La quantité actuelle d'air est donc à la quantité primitive comme 785 est à 77, ou 10,194 fois environ cette quantité primitive. Mais celle-ci étant 5 litres à 77 centimètres de pression, eût été $\frac{77}{76}$.5 litres à la pression $0^{m},76$, et la masse d'air finale serait par conséquent, $10,194.\frac{77}{76}.5$ lit. à la pression $0^{m},76$, et comme à cette pression un litre d'air pèse $1^{gr},299$, la masse totale pèsera

$$10,194.\frac{77}{76}.5.1,299 \text{ grammes};$$

et en retranchant l'air primitif qui pèse

$$5.\frac{77}{76}.1,299 \text{ grammes},$$

il reste, pour l'air introduit

$$9,194.\frac{77}{76}.5.1,299^{gr} = 60,5008 \text{ grammes}.$$

Q. **102.** Une pompe à compression est alimentée par un réservoir plein d'air dont la capacité est R (*fig.* 14); la capacité du récipient destiné à recevoir l'air comprimé est R′. Au commencement de l'expérience, la force élastique de l'air est F dans le premier réservoir, et F′ dans le second. On demande quelle sera la force élastique dans la capacité R, lorsque celle de l'air contenu dans R′ sera égale à F″?

On suppose les deux réservoirs complétement inextensibles.

Soit Q la quantité d'air contenue dans l'unité de volume, à la pression $0^{m},76$. La quantité contenue dans le volume R à la pression F sera

$$RQ\,\frac{F}{76};$$

et le volume R′ à la pression F′, en contiendra

$$R'Q\,\frac{F'}{76},$$

et à la pression F″ il en contiendra

$$Q.R'.\,\frac{F''}{76};$$

enfin, en appelant X la force élastique cherchée, $Q.R'.\,\frac{X}{76}$ sera la quantité d'air restant dans le réservoir à cette pression X. La quantité d'air introduite dans R′ sera évidemment

$$Q.R'.\,\frac{F''}{76} - QR'\,\frac{F'}{76} = QR'\,\frac{(F'' - F')}{76}.$$

De même la quantité d'air extraite du réservoir R′ sera

$$QR\,\frac{F}{76} - QR.\frac{X}{76} = Q.R.\left(\frac{F - X}{76}\right),$$

ces deux quantités devant être égales, on a

$$R\left(\frac{F - X}{76}\right) = R'\,\frac{(F'' - F')}{76},$$

d'où

$$X = \frac{RF - R'(F'' - F')}{R}.$$

Q. 103. Le diamètre du piston d'une pompe à compression est d centimètres, et le poids de ce piston P grammes. Quelle devra être la force élastique de l'air intérieur pour s'opposer à l'introduction du nouvel air, en supposant le frottement nul et la pression atmosphérique égale à b?

Soit x cette force élastique, estimée en centimètres de mercure. La pression, estimée en grammes, qu'elle exercera sur la base du piston, sera

$$x.\pi.\frac{d^2}{4}13,568.$$

La pression totale exercée à l'extérieur se composera d'abord du poids P, et ensuite de la pression exercée par l'atmosphère, laquelle, exprimée en grammes, sera

$$b.\pi.\frac{d^2}{4}.13,568.$$

L'introduction de l'air ne sera plus possible lorsque ces deux pressions seront égales ; de là l'équation

$$b.\pi.\frac{d^2}{4}.13,568 + \mathrm{P} = x.\pi.\frac{d^2}{4}.13,568,$$

d'où

$$x = b + \frac{\mathrm{P}}{3,392.\pi.d^2},$$

Q. **104.** Un fusil à vent, dont la crosse a un litre de capacité, contenait de l'air comprimé à 8 fois la pression atmosphérique moyenne de 76 centimètres. On a tiré un coup avec ce fusil ; la quantité d'air sortie pour chasser le projectile, occupe, à la pression extérieure actuelle de 78 centimètres, un volume de 2 litres. Quelle est la force élastique de l'air restant?

L'air sorti, qui occupe 2 litres à la pression, 78 centimètres occuperait à la pression 76 centimètres, un volume de $2.\frac{78}{76}$ litres. L'air primitivement contenu dans la crosse occuperait 8 litres à la pression 76 centimètres. Le volume d'air restant occuperait donc à cette même pression, un volume égal à

$$\left(8 - 2.\frac{78}{76}\right)^{\text{lit}} = 5^{\text{lit}},9474,$$

Comme ce volume est réduit à un litre, sa force élastique sera

$$76^{\text{cm}}.5,9474 = 452^{\text{cm}},0024,$$

ou bien, en atmosphères,

$$5,9474 \text{ atmosphères.}$$

Q. 105. Quelle force devra-t-on employer pour soulever une cloche renversée pleine de mercure (*fig.* 15), dont l'ouverture circulaire plonge dans un bain du même liquide ? On sait que le rayon de l'ouverture circulaire de la cloche a 5 centimètres, que la hauteur de celle-ci est 42 centimètres, et la pression atmosphérique égale à $0^{\text{m}},75$.

La pression qui s'exerce extérieurement de haut en bas sur le fond de la cloche, et qui est due à l'atmosphère, est

$$gd.\pi.r^2.75 = 13,568.3,1416.25.75 \text{ grammes.}$$

D'une autre part, ce même fond est pressé intérieurement, et de bas en haut, par une force égale au poids d'une colonne de liquide de

$$(75 - 42)^{\text{cm}} = 33 \text{ centimètres,}$$

pression qui est égale à

$$gd.\pi r^2.33 = 13{,}568.3{,}1416.25.33 \text{ grammes},$$

la force qu'on devra employer pour soulever la cloche sera donc égale à la différence de ces pressions contraires, ou à

$$13{,}568.3{,}1416.25.42 \text{ grammes},$$

c'est-à-dire au poids 44756^{gr},489 du liquide soulevé.

Q. 106. Si l'on supposait que les différentes couches superposées de l'air atmosphérique eussent chacune une densité uniforme, et toutes la même température, à mesure qu'on s'élèverait dans l'atmosphère, les hauteurs croissant en progression arithmétique, les densités des couches correspondantes à ces hauteurs décroîtraient en progression géométrique.

En effet, supposons l'atmosphère divisée en couches d'égale épaisseur; et appelons P le poids de la colonne atmosphérique qui presse sur la surface de la terre, P′ le poids de toute la colonne d'air qui presse sur la première couche, P″ celui de toute la colonne d'air qui presse sur la seconde, et ainsi de suite.

Soient encore D la densité de la première couche, D′ celle de la seconde, D″ celle de la troisième, etc.; P — P′ sera le poids de la première couche, P′ — P″ celui de la seconde, P″ — P‴ celui de la troisième, etc.; si l'épaisseur des couches est très petite, on les pourra supposer de même volume, alors leurs poids seront proportionnels à leurs densités, c'est-à-dire qu'on aura

$$P - P' : P' - P'' :: D : D',$$

ces densités seront d'ailleurs proportionnelles aussi aux pressions, donc

$$P' : P'' :: D : D',$$

et à cause du rapport commun

$$P : P' :: P - P' : P' - P'',$$

d'où

$$PP'' = P'^2, \quad \text{ou} \quad P : P' :: P' : P'',$$

on aurait de même

$$P' : P'' :: P'' : P''' \ldots \text{etc.},$$

on aura donc la progression géométrique

$$\div\div\; P' : P'' : P''' : P^{\text{IV}} \ldots \text{etc.},$$

ou, à cause de la proportionnalité des pressions aux densités,

$$\div\div\; D : D' : D'' : D''' : D^{\text{IV}} \ldots \text{etc.},$$

progression qui est évidemment décroissante, puisque les poids P, P', P'', . . . vont en diminuant. D'ailleurs, il est évident que les hauteurs des différentes couches, à partir du sol, forment une progression arithmétique croissante; donc, . . . etc.

Q. **107.** Un siphon, dont les deux extrémités plongent dans deux vases v et v' (*fig.* 16), contenant du mercure, et qui est rempli lui-même de ce liquide, a sa plus grande branche plongée dans l'alcool à 0,795 de densité, ainsi que le vase v'. On demande quelle devra être la hauteur de la colonne alcoolique au-dessus du niveau du mercure dans v', pour que l'écoulement puisse avoir lieu d'une manière continue, soit de v' en v, soit de v en v', ou qu'il y ait équilibre?

Soit x la hauteur cherchée, et h la différence de niveau du mercure dans ν et ν'.

Le plan de niveau du liquide de ν' sera sollicité, extérieurement à la branche du siphon, par la pression atmosphérique, ainsi que le plan de niveau du liquide de ν; ces deux pressions s'entre-détruiront. Mais le premier supportera en outre de plus que le second, la pression $x\,.\,0,795$ centimètres d'eau. Cet excès de pression tendrait à faire marcher le liquide de ν' vers ν; mais en même temps, la pression exercée par le liquide contenu dans le siphon, sur ce même plan de niveau dans le vase ν', surpassera de $h\,.\,13,568$ centimètres d'eau, la pression qu'il exercera sur le plan de niveau ν; ce nouvel excès de pression tendra à détruire l'effet de l'autre.

Si l'on a

$$x\,.\,0,795 = h\,.\,13,568,$$

il y aura équilibre; mais si x surpasse $h.\frac{13,568}{0,795}$, l'écoulement aura lieu de ν' en ν; et si, au contraire, on a

$$x < h.\frac{13,568}{0,795},$$

l'écoulement aura lieu de ν en ν'. Cette valeur-limite de x, sera environ $17,07$ fois la hauteur h de la différence de niveau du mercure dans les deux vases ν et ν'.

Q. **108.** Un vase fermé de 5 litres, qui contient de l'air sec à la pression de 78 centimètres, communique avec un flacon de Mariotte contenant du mercure, dans lequel l'écoulement a lieu en vertu d'une colonne de mercure de 20 centimètres. On demande

1°. Quel sera le volume de l'air lorsque l'écoulement du mercure cessera ;

2°. Quelle sera la force élastique de cet air, sachant que le baromètre marque 76 centimètres au moment de l'expérience ?

Soit x le volume du mercure écoulé exprimé en centimètres cubes ; le volume de l'air sera réduit à $(5000 - x)$ centimètres cubes ; sa force élastique, de 78 centimètres qu'elle était, deviendra

$$78 \times \frac{5000}{5000 - x}.$$

Cette force élastique, devant faire équilibre à la pression barométrique extérieure, plus à une colonne de 20 centimètres de mercure, on aura l'équation

$$78.\frac{5000}{5000 - x} = 76 + 20 ;$$

d'où

$$x = 937^{\text{ccc}},5.$$

Il s'ensuit que le volume de l'air a été réduit à $4^{\text{lit.}},0625$, et que la force élastique est égale à

$$78 \times \frac{5000}{4062,5} = 96^{\text{cm}},$$

comme il était facile de le prévoir.

Q. **109.** Soit AB (*fig.* 17), un vase cylindrique fermé contenant de l'air et du mercure, l la hauteur du cylindre, l' celle de la colonne du mercure qu'elle contient, b la pression de l'air extérieur et celle de l'air contenu dans le vase. Combien s'écoulera-t-il de mercure avant que l'écoulement cesse, si l'on pratique une ouverture à la base du cylindre, en interdisant l'entrée de nouvel air pendant la durée de cet écoulement?

Soit x la hauteur inconnue de la colonne de mercure qui s'écoulera; il est évident que l'écoulement cessera lorsque la hauteur de la colonne de mercure restante, ajoutée à l'élasticité de l'air intérieur, fera équilibre à la pression b de l'air extérieur. Or, la colonne de mercure restante est

$$l' - x,$$

et l'élasticité de l'air intérieur

$$b \times \frac{l - l'}{l - l' + x}.$$

L'écoulement cessera donc lorsqu'on aura

$$l' - x + b.\frac{l - l'}{l - l' - x} \qquad b,$$

d'où

$$x = \frac{2l' - l - b \pm \sqrt{(l + b)^2 - 4bl'}}{2}.$$

La valeur positive est évidemment la seule qui convienne à la question proposée.

Lois du mélange des gaz qui sont sans action chimique l'un sur l'autre.

110. 1°. Lorsqu'on mêle ensemble plusieurs gaz sans action chimique l'un sur l'autre, le mélange se fait uniformément.

2°. Lorsque, dans un vase à parois inextensibles, on introduit plusieurs fluides élastiques de nature différente, on trouve qu'en écartant toutes les influences de température, la force élastique du mélange est égale à la somme des forces élastiques des gaz mélangés, rapportées au volume total d'après la loi de Mariotte.

3°. Lorsque des gaz, ayant la même élasticité que l'air extérieur, sont introduits dans un vase à parois parfaitement extensibles, de manière que la pression du mélange puisse être ramenée à la pression commune, le volume total du mélange est toujours égal à la somme des volumes primitifs des gaz qu'on a mélangés.

Q. **111**. Dans un vase vide, de 40 litres de capacité, à parois inextensibles, on a introduit :

1°. 5 litres d'oxigène à la pression $0^m,74$;
2°. 4 litres d'azote à la pression $0^m,80$;
3°. 8 litres d'hydrogène à la pression $0^m,70$.

Quelle sera la force élastique du mélange?

Les 5 litres d'oxigène occupant un volume de 40 litres, leur pression sera 8 fois moindre, ou égale à $0^m,0925$.

Les 4 litres d'azote occupant un volume 10 fois plus grand, leur pression sera dix fois moindre, ou $0^m,08$.

Enfin, la pression finale des 8 litres d'hydrogène sera 5 fois moindre que la primitive, c'est-à-dire, $0^m,14$.

La pression du mélange sera donc égale à

$$0^m,0925 + 0^m,08 + 0^m,14 = 0^m,3125.$$

Q. **112**. Dans un vase à parois parfaitement extensibles, on a introduit :

1°. 3 litres d'air à la pression $0^m,76$;

2°. 12 litres d'acide carbonique à $0^m,82$ de pression.

On demande 1° quel sera le volume du mélange, la pression extérieure étant $0^m,75$;

2°. Quelle sera la pression finale de l'acide carbonique seul ?

Les 3 litres d'air occuperaient seuls, à la pression $0^m,75$, un volume égal à

$$3^{\text{lit}}\,\frac{76}{75} = 3^{\text{lit}},04.$$

Les 12 litres d'acide carbonique, à cette même pression, occuperaient, à eux seuls, un volume de

$$12^{\text{lit}} \times \frac{82}{75} = 13^{\text{lit}},12.$$

Le volume final, devant être égal à la somme de ces deux nouveaux volumes, sera $16^{\text{lit}},16$.

Quant à la pression finale de l'acide carbonique seul, elle sera

$$0^m,82 \times \frac{12}{16,16} = 0^m,609 \text{ environ}.$$

Lois du mélange des gaz et des liquides dans lesquels ces gaz sont peu solubles.

113. 1°. Lorsqu'on met en contact pendant un temps suffisant, et d'une manière convenable, un liquide et un gaz peu soluble dans ce liquide, quelle que soit la pression, la densité du gaz absorbé par ce dernier est toujours dans le même rapport avec celle du gaz non absorbé qui est en contact avec le liquide.

2°. Lorsqu'au lieu d'un seul fluide élastique, l'atmosphère en contact avec le liquide, en contient plusieurs, chacun d'eux se comporte comme s'il était seul, quels que soient du reste le nombre et les proportions des gaz mélangés, en tenant compte de la pression propre à chacun d'eux.

3°. Si le liquide contenait déjà un ou plusieurs gaz en dissolution, les choses se passeraient comme s'il les abandonnait d'abord en totalité, pour ensuite les dissoudre concurremment avec les autres, suivant la loi précédente.

Q. **114.** L'air étant formé d'un mélange d'azote et d'oxigène dans le rapport de 79 à 21 en volume. Dans quel rapport se trouveront les quantités de ces deux gaz absorbées par l'eau, sachant que ce liquide dissout 0,042 de son volume d'oxigène, et 0,0239 de son volume d'azote?

Soient P et V la pression atmosphérique et le volume du liquide; la quantité d'oxigène absorbée par ce liquide sera proportionnelle au volume V et à la pression de cet oxigène qui est égale à $\frac{21}{100}$ P. Cette quantité d'oxigène sera donc

$$V.P.\frac{21}{100}.0,042 = V.P.0,00882.$$

La quantité d'azote sera

$$V.P.\frac{79}{100}.0,0239,$$

puisque la pression due à l'azote est $\frac{79}{100}$. P; on trouve donc, pour cette quantité,

$$V.P.0,01888\text{1}.$$

Les quantités de ces deux gaz sont donc entre elles dans le rapport de 88,2 à 188,81.

Si l'on veut déterminer combien 100 parties du mélange des deux gaz absorbés contiennent d'oxigène et d'azote, il suffira de poser les proportions

$$(88{,}2 + 188{,}81) : 88{,}2 :: 100 : x,$$
$$(88{,}2 + 188{,}81) : 188{,}81 :: 100 : x',$$

qui donneront

$$x = 31{,}84 \text{ d'oxigène}$$

et

$$x' = 68{,}16 \text{ d'azote},$$

c'est-à-dire que ce mélange est plus riche en oxigène que l'air atmosphérique.

Q. **115.** Un vase contenant 10 litres d'eau, après avoir été exposé à l'air dont la pression est $0^{m},78$, un temps suffisant pour qu'il en absorbât tout ce qu'il en pouvait absorber, a été mis en communication avec une atmosphère de 100 litres d'hydrogène à la pression $0^{m},72$. Quel sera le rapport des gaz dissous dans l'eau, lorsque l'équilibre sera établi?

(On sait que l'eau peut absorber 0,015 de son volume d'hydrogène.)

En prenant pour unité la densité de l'air à $0^{m},76$ de pression, celle de l'oxigène, prise dans les mêmes circonstances est égale à 1,1026. La densité de l'oxigène dissous, et supposé dégagé du liquide sera

$$1,1026 \times \frac{78}{76} \times \frac{10}{100} \times 0,21 \times 0,042.$$

Celle de l'azote, également dégagé et répandu dans le même volume, sera

$$0,98 . \frac{78}{76} . 0,79 . 0,0239 . \frac{10}{100}.$$

Enfin, celle de l'hydrogène, qui est 0,0688 à $0^{m},76$ de pression, sera ici égale à

$$0,0688 . \frac{72}{76}.$$

En désignant donc par x, x', x'', les densités de l'oxigène, de l'azote et de l'hydrogène, dans l'atmosphère de 100 litres avec laquelle le liquide est en communication, lorsque l'équilibre est établi ; on aura les équations suivantes entre les quantités de chacun de ces gaz avant et après la dissolution.

1°. Pour l'oxigène,

$$100 . 1,1026 . \frac{78}{76} . 0,21 . 0,042 . \frac{10}{100} = 100x + 10 . x . 0,042,$$

d'où

$$x = 0,000966.$$

2°. Pour l'azote,

$$100 . 0,98 . \frac{78}{76} . 0,79 . 0,0239 . \frac{10}{100} = 100x' + 10x' . 0,0239,$$

d'où

$$x' = 0,001885071.$$

3°. Pour l'hydrogène,

$$100.0,0688.\frac{72}{76} = 100x'' + 10x''.0,015,$$

d'où

$$x'' = 0,06518.$$

Les quantités de ces trois gaz contenues finalement dans le liquide sont donc entre elles comme les nombres

$$0,000966 \times 0,042,$$
$$0,001885071.0,0239,$$

et

$$0,06518 \times 0,015,$$

ou comme les nombres

$$13524, \ldots 15018 \quad \text{et} \quad 325900.$$

THERMOLOGIE.

Q. **116.** On a observé à Londres une température de 68° Fahreinheit. Quelle est la température correspondante en degrés Réaumur?

Le zéro du thermomètre de Réaumur correspondant au 32ᵉ degré Fahreinheit, on ne devra tenir compte que des 36 autres degrés. D'ailleurs, chaque degré Fahreinheit valant $\frac{80}{180}=\frac{4}{9}$ de degré Réaumur, les 36° restans équivaudront à $\frac{36,4}{9}=16°$ R.

Q. **117.** La température moyenne du climat de Paris est 10°,86 centigrades. Quelle serait cette même température indiquée par le thermomètre de Fahreinheit?

Un degré centigrade valant $\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$ de degré F., les 10°,86 cent. vaudront

$$10°,86.\frac{9}{5}+32=51°,548\,\text{F}.$$

Q. **118.** Deux thermomètres à liquides, construits de la même manière, et avec les mêmes substances, sont exactement comparables, c'est-à-dire qu'étant exposés aux mêmes températures, ils indiqueront toujours le même nombre de degrés.

Soient, en effet, V et V′ les volumes du liquide, à la température de la glace fondante, compris dans ces thermomètres; supposons que, dans le premier, le diamètre intérieur du tube soit R et le même partout, et que L soit l'intervalle compris entre la température de la glace fondante et celle de l'eau bouillante. Supposons que dans le second thermomètre les quantités correspondantes soient R′ et L′; supposons encore que l'on ait divisé ces deux longueurs L et L′ en un même nombre a de parties égales; si nous les exposons à une même température t, le liquide renfermé dans chacun d'eux se dilatera et portera l'extrémité de la colonne, dans le premier à une hauteur $L_{,}$, et dans le second à une hauteur $L'_{,}$ au-dessus du point correspondant à la température de la glace fondante. Ces hauteurs, quoique inégales, répondront, sur les deux thermomètres, exactement au même nombre de degrés.

En effet, désignons par δ la dilatation apparente du liquide depuis la température de la glace fondante jusqu'à celle de l'eau bouillante, pour une masse qui, à la première de ces deux températures, aurait un volume égal à l'unité; et appelons $\delta_{,}$ la dilatation apparente de cette même masse depuis la température de la glace fondante jusqu'à la température intermédiaire à laquelle on expose les deux thermomètres. Les dilatations totales dans les deux instrumens, étant proportionnelles aux volumes V et V′ du liquide à zéro seront $V\delta$ et $V\delta_{,}$ pour le premier, et $V'\delta$ et $V'\delta_{,}$ pour le second. Comme ces dilatations sont exprimées par des cylindres de liquide dont nous connaissons les hauteurs, leurs volumes seront respectivement

$$V\delta = \pi R^2 L, \qquad V'\delta = \pi R'^2 L',$$
$$V\delta_{,} = \pi R^2 L_{,}, \qquad V'\delta_{,} = \pi R'^2 L'_{,}.$$

Puisque les intervalles L et L′ sont divisés en a degrés, le nombre de ces degrés contenus dans l'intervalle L_t sera exprimé par $\frac{aL_t}{L}$; et de même $\frac{aL'_t}{L'}$ exprimera le nombre de degrés du second thermomètre, qui correspond à l'intervalle $L't$. Or les équations précédentes nous donnent

$$\frac{V.\delta_t}{V.\delta}=\frac{\pi R^2L_t}{\pi R^2L}, \quad \text{ou} \quad \frac{\delta_t}{\delta}=\frac{L_t}{L},$$

$$\frac{V'\delta_t}{V'\delta}=\frac{\pi R'^2L'_t}{\pi R'^2L'}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\delta_t}{\delta}=\frac{L'_t}{L'};$$

et par conséquent,

$$\frac{L_t}{L}=\frac{L'_t}{L'},$$

et enfin

$$\frac{aL_t}{L}=\frac{aL'_t}{L'},$$

c'est-à-dire que les températures sont les mêmes.

Q. 119. Un tube a été gradué en 260 parties d'égale capacité. Pesé d'abord vide, et ensuite contenant une colonne de mercure occupant 40 divisions, on a observé une différence de poids de 29 grammes. Quel doit être le rayon du réservoir sphérique qu'on veut souder à son extrémité, pour que les 260 divisions comprennent 180 degrés centigrades ?

Le poids du mercure qui occupe une division étant $\frac{2^{gr.}}{40}$, le poids du mercure qui occuperait tout le tube est

$$260.\frac{2}{40}=13^{gr.}$$

Si l'on veut que ces 260 divisions comprennent 180 degrés centigrades, la fraction $\frac{13^{gr.}}{180}$ sera le poids du mercure qui devrait occuper un degré. Or, cette quantité doit provenir de la dilatation apparente du mercure contenu dans le réservoir, laquelle dans le verre est, comme on sait, $\frac{1}{6480}$ du volume total de mercure pour chaque degré centigrade. En désignant donc par x le rayon de la boule, on aura

$$\frac{13}{180}=\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 . 13,568}{6480},$$

d'où

$$x = 0^{cm},94 \text{ environ.}$$

Q. **120.** Connaissant la capacité V du réservoir d'un thermomètre, exprimée en parties d'égale capacité tracées sur le tube, déterminer la quantité de mercure qu'on devrait introduire dans l'instrument pour qu'il pût servir dans des limites données de température.

Supposons, par exemple, que l'instrument doive pouvoir descendre jusqu'à $-a^\circ$.

Désignons par x le nombre de divisions du tube que devra occuper la colonne de mercure, outre le réservoir, à la température de la glace fondante, pour que cette condition soit remplie; en appelant v le volume de mercure contenu dans chaque division, le volume total du mercure contenu dans le réservoir et dans le tube, sera

$$V + vx,$$

et sa dilatation apparente, qui est, pour chaque degré,

$$\frac{V + vx}{6480},$$

ainsi que la contraction, occupera pour a° un volume marqué par

$$a\left(\frac{V + vx}{6480}\right);$$

et comme on veut avoir ce nombre a de degrés au-dessous de zéro, il faut que le volume qui représente sa contraction soit vx, de là l'équation

$$vx = \frac{a\,(V + vx)}{6480}, \text{ d'où } x = \frac{aV}{(6480 - a)\,v}. \quad (1)$$

De sorte qu'en satisfaisant à cette condition, la colonne thermométrique arriverait juste au zéro de la division, à la température de $-a^\circ$.

Si l'on demandait que le thermomètre pût servir jusqu'à $(b + 100)^\circ$, on trouverait de la même manière que les $b + 100^\circ$ occuperaient un volume de

$$\frac{(b + 100)\,(V + vx)}{6480};$$

et en désignant par m le nombre de divisions correspondant à $(b + 100)^\circ$, on aura l'équation

$$\frac{(b + 100)\,(V + vx)}{6480} = (m - x)\,v,$$

d'où

$$x = \frac{6480\,vm - (b + 100)\,V}{(6580 + b)\,v}. \quad (2).$$

Si l'on demandait, en supposant la première condition remplie, de déterminer la longueur (exprimée en divisions d'égale capacité) qu'il faudrait donner au tube pour que la seconde condition pût être remplie aussi, c'est-à-dire pour que l'instrument pût servir depuis $-a^\circ$ jusqu'à $+(100+b)^\circ$.

Désignons par N le nombre de divisions que devrait comprendre le tube, il est évident que ce nombre n'est autre que la valeur de m tirée de l'équation (2), dans laquelle on substitue à la place de x la valeur (1), on trouve ainsi

$$N = \frac{V[(b+100)(6480-a)+a(6580+b)]}{v.6480(6480-a)} = \frac{V(b+100+a)}{v.(6480-a)}.$$

Si au contraire N est connu, on en pourra déduire soit $b+100$, soit a.

Lois de la chaleur rayonnante.

121. 1°. Loi de Newton. Un corps chaud, placé dans une enceinte dont la température est constante et peu différente de la sienne, perd, dans un temps très court, une quantité de chaleur proportionnelle à l'excès de sa température sur celle de l'enceinte.

2°. Les intensités de la chaleur rayonnée à différentes distances, sont, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des carrés de ces distances.

3°. La chaleur émise par un corps, est, toutes circonstances pareilles d'ailleurs, proportionnelle à la surface du corps rayonnant.

4°. L'intensité de la chaleur émise obliquement par la surface d'un corps chaud, est proportionnelle au sinus de l'angle que fait avec cette surface la direction des rayons émergens.

Q. **122.** Dans un cube creux dont l'arète a 50 mètres, et dont l'épaisseur est un quart de millimètre, on fait arriver un courant constant de vapeur d'eau à 100° centigrades. On plonge en outre le vase dans de la glace pilée à 0°, et l'on observe que, dans 10 minutes, il a fondu 5 kilogrammes de glace. Quel est le coefficient de la conductibilité intérieure de la substance du cube, c'est-à-dire la quantité de chaleur qui traverse, dans l'unité de temps, l'unité de surface d'un mur solide, ayant pour épaisseur l'unité de longueur, lorsque les deux faces parallèles de ce mur sont entretenues à des températures constantes, différant entre elles de l'unité de température ?

Désignons par K ce coefficient de conductibilité; prenons pour unité de longueur le centimètre, pour unité de poids le kilogramme, pour unité de temps la seconde sexagésimale, et enfin, pour unité de chaleur, la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la température d'un kilogramme d'eau.

La quantité de chaleur nécessaire pour fondre un kilogramme de glace étant égale à 75 unités de chaleur, pour fondre les 5 kilogrammes il en a fallu 5×75. Or, cette chaleur ayant été fournie en 600″, par une surface égale à 15000 centimètres carrés (surface qui est sensiblement la même à l'intérieur et à l'extérieur du cube), en une seconde, l'unité de surface, un centimètre carré, en eût fourni seulement $\frac{75 \times 5}{600 \times 15000}$.

D'un autre côté, si K est la quantité de chaleur qui traverse l'unité de surface dans l'unité de temps, lorsque l'épaisseur est l'unité de longueur, et la différence de température des deux faces égales à un degré. Lorsque cette différence de température sera 100°, et l'épaisseur $0^{cm},025$, la quantité de chaleur qui traversera, dans une seconde, chaque centimètre carré de surface, sera exprimée par

$$K.\frac{100}{0,025}.$$

De là l'équation

$$K.\frac{100}{0,025} = \frac{5 \times 75}{600 \times 15000},$$

d'où

$$K = 0,0000001042 \text{ à peu près.}$$

Q. **123.** On a empli de mercure à 0°, un tube de verre AB (*fig.* 18), d'assez fort calibre, terminé par un autre tube CDE d'un très petit diamètre, dont l'extrémité ouverte plonge dans du mercure. Les deux tubes réunis contiennent 800 grammes de mercure à cette température; on demande à quelle température l'appareil doit être porté pour qu'il en sorte $3^{gr},5$ de mercure par l'effet de la dilatation?

Soit x cette température; le poids du mercure qui reste dans l'instrument, à cette température, est

$$800 - 3,5 = 796,5 \text{ grammes.}$$

Et comme, à égales températures, les volumes sont proportionnels aux poids, les $3^{gr},5$ de mercure sortis représenteront l'augmentation de volume apparent du mercure restant, et $\frac{3^{gr},5}{796,5}$ l'augmentation de l'unité de volume apparent du mercure pour l'intervalle de 0° à x° ; et comme on sait que le mercure contenu dans une enveloppe de verre se dilate de $\frac{1}{6480}$ de son volume apparent pour chaque degré centigrade, on aura l'équation

$$\frac{3,5}{796,5}=\frac{x}{6480},$$

d'où

$$x = 28^\circ,47.$$

Q. **124.** Dans un tube de verre gradué en parties d'égale capacité, on a introduit une colonne de mercure occupant, à 15°, 32 divisions. Combien de divisions occupera la colonne de mercure à 90°, sachant que le coefficient de dilatation linéaire du verre dont le tube est composé, est égal à 0,000009 ?

Si l'on n'avait pas égard à l'allongement de l'intervalle linéaire des divisions, le nombre de celles qu'occuperait la colonne mercurielle croîtrait comme le volume apparent du mercure, et serait, à 0°,

$$\left(\frac{32}{1+\frac{15}{6480}}\right) \text{ et à } 90^\circ,$$

il serait

$$\frac{32\left(1+\frac{90}{6480}\right)}{\left(1+\frac{15}{6480}\right)},$$

mais ici, nous admettons que les divisions conservent la même longueur, ce qui n'est pas vrai, puisqu'une division occupe réellement à 0°, un espace équivalent à

$$\frac{1}{1 + 0,000009.15}$$

d'une division à 15° et à 90°,

$$\frac{1.(1 + 0,000009.90)}{1 + 0,000009.15}$$

de cette même division.

Le nombre réel x de ces divisions occupées par la colonne de mercure sera donc donné par la proportion

$$x : \frac{32\left(1 + \frac{90}{6480}\right)}{1 + \frac{15}{6480}} :: 1 : \frac{1 + 0,000009.90}{1 + 0,000009.15},$$

d'où

$$x = 32,41,$$

c'est-à-dire que la colonne de mercure occuperait réellement à la température de 90°, un nombre de divisions égal à 32,41.

Q. **125**. On a introduit dans un tube semblable à celui dont il a été question (*fig* 18, n° **125**), un petit cylindre de fer pesant 77 grammes, et l'on a rempli le reste du tube avec 135 grammes de mercure, le tout à la température 0°. On demande combien de mercure il sortira si l'on porte l'appareil à 115°?

Il est clair qu'à 0°, aussi bien qu'à 115°, le volume de la capacité du tube est égal à la somme des volumes du fer et du mercure que renferme cette capacité. Or, la densité du mercure étant à 0°, 13,568, son volume à 0° sera

$$\frac{135^{ccc}}{13,568}.$$

La densité du fer étant 7,788, le volume du petit cylindre soumis à l'épreuve sera

$$\frac{77^{ccc}}{7,788}.$$

La capacité du tube à 0° sera donc

$$\frac{135}{13,568} + \frac{77}{7,788}.$$

Soit x le poids du mercure chassé du tube à 115°, son volume à 0° serait

$$\frac{x}{13,568}.$$

D'une autre part, le coefficient de dilatation du fer étant $\frac{1}{28200}$, le volume du fer à 115° sera

$$\frac{77}{7,788}\left(1 + \frac{115}{28200}\right).$$

De même, le coefficient de dilatation du mercure étant $\frac{1}{5550}$, les $\frac{135^{ccc}}{13,568}$ deviendront

$$\frac{135}{13,568}\left(1 + \frac{115}{5550}\right)^{ccc} \text{ à } 115°.$$

Enfin, le coefficient de dilatation cubique du verre étant $\frac{1}{38700}$, le volume de l'enveloppe sera

$$\left(\frac{77}{7,788}+\frac{135}{13,568}\right)\left(1+\frac{115}{38700}\right)^{\text{ccc}} \text{ à } 115^{\circ}.$$

Or, le volume de mercure chassé qui est, à cette température,

$$\frac{x}{13,568}\left(1+\frac{115}{5550}\right),$$

est évidemment la différence entre la capacité de l'enveloppe et la somme des volumes du fer et du mercure, de là l'équation

$$\frac{77}{7,788}\left(1+\frac{115}{28200}\right)+\frac{135}{13,568}\left(1+\frac{115}{5550}\right)-\left(\frac{77}{7,788}+\frac{135}{13,568}\right)$$
$$\left(1+\frac{115}{38700}\right)=\frac{x}{13,568}\left(1+\frac{115}{5550}\right);$$

d'où

$$x = 2^{\text{gr}},488 \text{ environ.}$$

Q. **126**. Un ballon de verre a été jaugé à la température t, et contenait alors P grammes de mercure. Quel sera sa capacité à la température t'°?

Le volume du mercure qui remplit le ballon à t° est évidemment $\frac{\text{P}^{\text{ccc}}}{\text{D}}$, en désignant par D la densité du mercure à t°. Or, cette densité

$$\text{D} : 13,568 :: 1 : 1+\frac{t}{5550},$$

d'où

$$\text{D}=\frac{13,568}{1+\frac{t}{5550}};$$

et par suite

$$\frac{P}{D} = \frac{P}{13,568}\left(1 + \frac{t}{5550}\right),$$

volume qui sera précisément celui du ballon ; ce dernier, à la température 0°, serait

$$\frac{P}{13,568} \cdot \frac{1 + \frac{t}{5550}}{1 + kt},$$

et à t'°,

$$\frac{P}{13,568} \cdot 1 + \frac{t}{5550} \cdot \frac{1 + kt'}{1 + kt};$$

et appelant k le coefficient de dilatation cubique du verre.

Si, à l'aide des mêmes données, on veut connaître le poids du mercure que contiendrait le ballon à la température t', on trouvera

$$P \cdot \frac{(1 + kt')}{1 + kt} \cdot \frac{1 + \frac{t}{5550}}{1 + \frac{t'}{5550}}.$$

Enfin, on pourrait de même se demander à quelle température t' le poids du mercure contenu dans le ballon serait P′, et alors on aurait l'équation

$$P \cdot \frac{1 + kt'}{1 + kt} \cdot \frac{1 + \frac{t}{5550}}{1 + \frac{t'}{5550}} = P',$$

d'où

$$t' = \frac{P'(1 + kt) - P\left(1 + \frac{t}{550}\right)}{PK\left(1 + \frac{t}{5550}\right) - \frac{P'(1 + kt)}{5550}}.$$

Q. **127**. On a fixé, par l'une de leurs extrémités, deux barres métalliques de substances différentes dont les coefficiens de dilatation linéaire sont K et K′; l'une, plus courte que l'autre, a une longueur L à la température 0°, et l'autre une longueur L′ à la même température. On demande quelle sera la différence de leurs allongemens, lorsqu'on les portera à la température t°?

La première barre à t°, aura une longueur égale à

$$L(1+Kt);$$

et la seconde une longueur égale à

$$L'(1+K't).$$

La différence cherchée sera donc

$$L'(1+K't)-L(1+Kt)=L'-L+t(K'L'-KL).$$

Q. **128.** Une règle de platine de deux mètres de longueur est divisée, à l'une de ses extrémités, en quarts de millimètres; sur cette règle on en place une autre en cuivre ayant de longueur $1^{m},950$, et qui par conséquent, à la température normale, que nous supposerons 0°, diffère de l'autre de 50 millimètres ou 200 divisions. Quelle sera la température du système, lorsque la différence apparente des deux règles sera de 164 divisions?

Le coefficient de dilatation du cuivre étant

$$\frac{1}{58200},$$

et celui du platine

$$\frac{1}{113100};$$

la grande règle de platine aura, à la température cherchée x, une longueur égale à

$$8000\left(1+\frac{x}{113100}\right) \text{ quarts de millimètres;}$$

la règle de cuivre, une longueur de

$$7800\left(1+\frac{x}{58200}\right) \text{ quarts de millimètres.}$$

Enfin, les 164 divisions apparentes occupent une longueur réelle de

$$162\left(1+\frac{x}{113100}\right) \text{ quarts de millimètres;}$$

cette longueur étant précisément la différence actuelle des longueurs des deux règles, on aura l'équation

$$8000\left(1+\frac{x}{113100}\right)-7800\left(1+\frac{x}{58200}\right)=164\left(1+\frac{x}{113100}\right),$$

d'où

$$x = 555^{\circ} \text{ environ.}$$

129. Supposons que, les circonstances étant les mêmes que précédemment, on ne connaisse pas le coefficient de la dilatation du cuivre. En admettant que la température du système soit 555°, le coefficient de dilatation du cuivre sera donné par l'équation

$$8000\left(1+\frac{555}{113100}\right)=7800(1+K.555)=164\left(1+\frac{555}{113100}\right);$$

d'où l'on déduit aisément

$$K = \frac{7836\left(1 + \frac{555}{113100}\right) - 7800}{555.7800} = \frac{1}{58200}.$$

Q. **130.** Une tige de fer est fixée par son extrémité supérieure à une lame de cuivre courbée en U renversé (*fig.* 19), et passe verticalement en f dans une fente à travers laquelle elle peut glisser longitudinalement, sans pouvoir osciller d'un côté ni de l'autre depuis son point d'insertion jusqu'à cette fente; à l'autre extrémité est fixée par son centre une lentille L, de sorte qu'on peut considérer le système comme un pendule suspendu en f. Quelle devra être la hauteur de la double lame de cuivre pour que la distance du centre de la lentille au point f soit constante à toutes les températures?

Soient C la hauteur de cette double lame à 0°, F la longueur totale de la tige de fer depuis son extrémité fixe jusqu'au centre de la lentille, K le coefficient de dilatation linéaire du cuivre, K′ celui du fer, et enfin l la distance à 0°, de la fente f au centre de la lentille.

A 0°, on aura

$$F - C = l; \quad (1)$$

comme on veut aussi avoir à t°,

$$F(1 + K't) - C(1 + Kt) = l;$$

en combinant ces deux équations, on trouvera

$$FK' = CK. \quad (2)$$

L'élimination entre (1) et (2), donne

$$C = \frac{lK'}{K - K'}.$$

Si l'on substitue à la place de l, K' et K, leurs valeurs

$$0^m,99384,\quad \frac{1}{84600}\quad \text{et}\quad \frac{1}{58200},$$

on trouve

$$C = 2^m,19096.$$

Q. **131.** La tige d'un pendule est en platine (*fig.* 20), et la lentille fixée à son extrémité par sa partie inférieure est en plomb. Quels devront être la longueur AE de la tige du pendule, et le rayon CE de la lentille, pour que la distance du centre de cette lentille au point A de suspension soit constante à toutes les températures ?

Soient l, K, K', P, P', la longueur AC à 0°, les coefficiens de dilatation du platine et du plomb, et les longueurs de la tige de platine et du rayon de la lentille de plomb à la température 0° ; on aura à cette température

$$P - P' = l, \quad (1)$$

et à la température $t°$,

$$P(1 + Kt) - P'(1 + K't) = l,$$

et, par suite de l'équation (1),

$$PK = P'K' ;$$

et enfin

$$P' = \frac{Kl}{K' - K}.$$

Et en mettant à la place de K, l, K', leurs valeurs respectives

$$\frac{1}{113100},\quad 0^m,99384\quad \text{et}\quad \frac{1}{35100},$$

on trouve que le rayon

$$P' = 0^m,44723,$$

et par suite la longueur P de la tige de platine sera

$$P = 0^m,99384 + 0^m,44723 = 1^m,44107.$$

Q. **132.** On a observé à 20° la hauteur du baromètre qu'on a trouvée égale à $0^m,758$. Quelle eût été la hauteur si l'on eût fait l'observation à la température de la glace fondante ?

En désignant par x la hauteur cherchée, on sait que les hauteurs x et $0^m,758$, doivent être entre elles en raison inverse des densités du mercure à 0° et à 20°; d'ailleurs, ces densités sont en raison inverse des volumes $1, 1+\frac{20}{5550}$ occupés à 0°, et à 20° par l'unité de volume du mercure, d'où la proportion

$$0^m,758 : x :: 1 + \frac{20}{5550} : 1,$$

d'où

$$x = 0^m,758\left(\frac{5550}{5550 + 20}\right) = 0^m,7553.$$

Plus généralement, H désignant la hauteur observée, et t la température, la proportion

$$H : x :: 1 + \frac{t}{5550} : 1,$$

d'où

$$x = H.\frac{5550}{5550 + t} = H - \frac{Ht}{5550 + t},$$

ou, si t est un très petit nombre qu'on puisse négliger auprès de 5550, on aura

$$x = \mathrm{H} - \frac{\mathrm{H}t}{5550}.$$

Q. **153.** Déterminer expérimentalement le rayon d'un tube cylindrique à t°, en ne tenant pas compte de la présence de l'air.

Soit $p^{\text{gr.}}$ le poids du tube vide, et p' le poids du tube et du mercure contenu dans une longueur H; $p' - p$ est le poids de la colonne du mercure; ce poids, divisé par la densité d du mercure à t°, donnera le volume exprimé en centimètres cubes; or,

$$d : 13{,}568 :: 1 : 1 + \mathrm{K}t,$$

ou

$$d = \frac{13{,}568}{1 + \mathrm{K}t},$$

K étant le coefficient de dilatation cubique du mercure. En désignant donc par x le rayon actuel du tube, on aura

$$\pi x^2 \mathrm{H} = \frac{(p' - p)(1 + \mathrm{K}t)}{13{,}568},$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{(p' - p)(1 + \mathrm{K}t)}{\pi . \mathrm{H}\ 13{,}568}}.$$

Connaissant le rayon x à cette température t, pour l'avoir à t'°, il suffirait de le multiplier par

$$1 + \mathrm{K}'t,$$

K′ étant le coefficient de la dilatation linéaire de la matière du tube.

Q. 134. Démontrer que, si un gaz se dilate de la 267e partie de son volume à 0°, pour chaque élévation d'un degré dans sa température, il se dilatera de $\frac{1}{267+t}$ de son volume à $t°$.

En effet, si toujours à la même pression, son volume est

$$V \text{ à } 0°, \quad V' \text{ à } t', \quad V'' \text{ à } t'',$$

on devra avoir

$$V' = V\left(1 + \frac{t'}{267}\right), \quad V'' = V\left(1 + \frac{t''}{267}\right);$$

d'où

$$\frac{V''}{267 + t''} = \frac{V'}{267 + t'} = \frac{V}{267}.$$

De sorte que la quantité constante dont un gaz se dilate, pour une élévation d'un degré de température, quantité qui est la 267e partie de son volume à 0°, est aussi la $(267 + t)^{ième}$ partie de son volume à $t°$.

Q. 135. A quelle température a été porté un ballon M de fer (*fig.* 21), qui a fourni les résultats suivans : jaugé à 0°, sa capacité jusqu'au robinet R, a été trouvée égale à V ; rempli d'air à la pression b, porté à la température x, et fermé alors, on l'a vissé, après son refroidissement, sur un siphon à branches verticales A'CDB, dont le prolongement AA' est dans le ballon. On a ensuite versé du mercure dans A'CDB, et chassé l'air qu'il contenait, avant d'ouvrir le robinet; ayant ouvert ce robinet et ajouté du mercure en quantité suffisante pour que le niveau fût le même dans les deux branches en A et B, en des points marqués d'avance, on a fermé alors le robinet et pesé le ballon ; l'excès de poids dû au mercure entré est $P^{gr.}$, et la température et la pression finales sont respectivement t° et b^{cm}.

Il est évident qu'à la température actuelle, le volume de l'air est à la pression extérieure, et égal à la différence du volume du vase vide, et du mercure qu'il contient. Or, le volume du vase est à t°,

$$V\,(1 + Kt),$$

K étant le coefficient de dilatation du fer en volume ; celui du mercure serait

$$\frac{P}{13,568} \text{ à } 0^{\circ}, \text{ et est ici } \frac{P\left(1 + \frac{t}{5550}\right)}{13,568}.$$

Donc le volume de l'air restant est

$$V\,(1 + Kt) - \frac{P\left(1 + \frac{t}{5550}\right)}{13,568};$$

et comme la pression est actuellement b', tandis qu'elle était b à la température à laquelle on a fermé l'appareil, si la pression n'eût pas changé, le volume eût été

$$\left[V\,(1 + Kt) - \frac{P\left(1 + \frac{t}{5550}\right)}{13,568}\right]\frac{b'}{b}.$$

Cet air, porté à la température x, devait occuper le volume $V(1 + Kx)$ du ballon à cette température ; de là l'équation

$$\left[V(1+Kt)-\frac{P\left(1+\frac{t}{5550}\right)}{13,568}\right]\frac{b'}{b}\cdot\frac{267+x}{267+t}=V(1+Kx),$$

d'où il serait facile de déduire la valeur de x.

Q. **136.** Un ballon de platine (*fig.* 22), a fourni les résultats suivans : lorsqu'il était plein d'air à 0° et à 75 centimètres de pression extérieure, le mercure s'élevait dans la branche verticale CD à 60 centimètres de hauteur. Lorsqu'on porta à 100° l'appareil, le mercure descendit à 15^{cm} dans le tube CD. Le tube vertical CD, dont la longueur totale est de 120^{cm}, en y comprenant la partie horizontale CR, a 1^{cc} de section, et se trouve entretenu constamment à la température de 10°, et la pression finale est 75^{cm}, comme au commencement de l'expérience. (Le tube RCD est en verre.)

Quelle est la capacité du ballon jusqu'au robinet R?

En désignant par x cette capacité, au commencement de l'expérience, lorsque le réservoir est à 0°, l'air contenu dans l'instrument occupait un volume de

$$x + 60 \text{ centimètres cubes},$$

et sa force élastique est égale à

$$75 - 60 = 15^{cm}.$$

Lorsque ensuite le réservoir est à 100°, le volume est

$$x\left(1+\frac{100}{37700}\right)+105^{ccc},$$

et sa force élastique

$$75 - 15 = 60^{cm}.$$

Or, il est évident que le tube RCD étant resté constamment à la même température, et la pression extérieure n'ayant pas changé, la différence de volume $\frac{x}{377}+45$, ramenée à la pression primitive 15^{cm} de l'air intérieur, ou

$$\left(\frac{x}{377}+45\right)\frac{60}{15}=\frac{4x}{377}+180,$$

représente la dilatation de l'air primitivement contenu dans le volume x, c'est-à-dire

$$x.\ \frac{267+100}{267},$$

diminué de la partie de cet air qui occupe à $10°$ les $105-60=45$ centimètres cubes du tube RCD, et qui à 0° occuperait

$$45.\ \frac{267}{267+10},$$

et à 100°,

$$45.\ \frac{267}{267+10}\cdot\frac{267+100}{267}=45.\ \frac{267+100}{267+10};$$

de là l'équation

$$\frac{4x}{377}+180=\left(\frac{x}{267}\ \frac{45}{267+10}\right)(267+100)+45,$$

qui donne

$$x=142^{ccc},692.$$

Densités des gaz.

Q. **137**. Une opération chimique a donné un poids d'un gaz dont le volume est V à la température t et sous la pression b. Quelle est la densité de ce gaz, en prenant pour unité celle de l'air à 0°, et sous la pression $0^m,76$?

Le volume V, que nous supposons ici évalué en litres, étant ramené à la pression $0^m,76$ en conservant sa température t, serait

$$V.\frac{b}{0,76};$$

et ramené à 0°, d deviendrait

$$V.\frac{b}{0,76}.\frac{267}{267+t};$$

le poids d'un litre de ce gaz à 0°, et sous la pression $0^m,76$, est donc

$$\frac{p}{V.\frac{b}{0,76}.\frac{267}{267+t}}=\frac{p}{V}.\frac{0,76}{b}.\frac{267+t}{267},$$

et comme d'ailleurs, le poids d'un litre d'air sec, dans les mêmes circonstances est $1^{gr},299$, en désignant par d la densité cherchée, on aura

$$d=\frac{p}{V.1,299}.\frac{0,76}{b}.\frac{267+t}{267}.$$

Q. **138.** 50 litres d'acide carbonique à 100°, et soumis à la pression $0^m,78$, ayant été mélangés avec 10 litres d'hydrogène à 10°, et soumis à la pression 0^m75, dans un vase entretenu à 60° de 50 litres de capacité; quelle sera la densité du mélange?

Les 50 litres d'acide carbonique pèseraient, à 0°, et à $0^m,76$ de pression, $50.1^{gr.},3.1,52$; puisqu'un litre d'air à cette température et à cette pression pèse $1^{gr.},3$, et que la densité de l'acide carbonique, rapportée à celle de l'air prise pour unité, dans les mêmes circonstances, est 1,52; à 100° et à $0^m,76$ de pression, ils pèseraient

$$50.1,3.1,52.\frac{267}{267+100},$$

et enfin, à 100° et à $0^m,78$ de pression, ils pèseront

$$\left(50.1,3.1,52.\frac{267}{267+100}.\frac{78}{76}\right)^{gr.},$$

de même, les 10 litres d'hydrogène pèsent

$$10.0,0688.1,3.\frac{267}{267+10}.\frac{75}{76}.$$

La somme de ces poids $74^{gr.},621$, occupant un espace de 50 litres, le poids d'un seul litre sera $1^{gr.},4924$; le poids d'un litre d'air sec à la température du mélange et à la pression $0^m,76$, serait

$$1^{gr.},3.\frac{267}{267+60}=1^{gr.},0612;$$

la densité x cherchée sera donc

$$x=\frac{1,4924}{1,0612}=1,4063.$$

Q. 139. La densité de la vapeur de carbone étant 0,4219, et celle de l'azote 0,976; quelle sera la densité du cyanogène, corps composé de carbone et d'azote, dans le rapport de 4 à 2 en volume; sachant de plus qu'il y a eu contraction des deux tiers du volume total des composans?

Puisqu'en prenant pour unité le poids d'un certain volume d'air, le poids d'un égal volume de carbone pris dans les mêmes circonstances, est 0,4219, et celui d'un pareil volume d'azote pris dans les mêmes circonstances de température et de pression, 0,976.

Le poids de 4 volumes pareils de carbone sera

$$4.0,4219 = 1,6876,$$

et celui de deux volumes d'azote

$$2.0,976 = 1,952.$$

Le poids total sera donc

$$3,6396.$$

Si le tout n'occupait qu'un volume après la combinaison, la densité du composé serait 3,6396; mais comme il y a contraction des deux tiers, le composé est réduit de six volumes à deux volumes; le poids d'un seul volume, ou la densité du cyanogène par rapport à celle de l'air, sera donc

$$\frac{3,6396}{2} = 1,8198.$$

Q. 140. La densité de l'oxigène est 1,1026, celle de l'air étant prise pour unité; la densité de la vapeur de carbone est 0,4219. Enfin, l'oxide de carbone, formé par la combinaison de deux volumes de vapeur de carbone pour un d'oxigène, a pour densité 0,9732. Quelle a dû être la contraction du volume total des deux gaz, au moment de leur combinaison?

Le poids d'un volume d'air étant pris pour unité, le poids de deux volumes de vapeur de carbone sera

$$2\,(0,4219) = 0,8438,$$

et le poids d'un volume d'oxigène

$$1,1026.$$

Si l'oxide de carbone résultant de leur combinaison n'occupait qu'un volume, sa densité serait égale à la somme des poids du carbone et de l'oxigène, et serait par conséquent 1,9464. Or, il n'en est pas ainsi, puisqu'elle est 0,9732. Si donc nous désignons par x le volume de la combinaison, son poids sera

$$x.0,9732,$$

d'où

$$0,9732x = 1,9464,$$

et

$$x = 2.$$

Le volume étant réduit de 3 à 2, il est clair qu'il y a eu contraction d'un tiers du volume total.

141. Un mélange d'oxigène et d'azote ayant été introduit dans une cloche graduée, y occupait un volume de 100 centimètres cubes, et le mercure s'élevait dans cette cloche à 15^{cm} de hauteur ; la pression extérieure indiquée alors par le baromètre était $0^{m},78$.

Lorsqu'on eut absorbé l'oxigène complétement, le mercure s'est élevé dans la cloche à 42^{cm}, et le baromètre indiquait $0^{m},76$; le volume du gaz restant était $46^{ccc},82$. Enfin, la température, qui était 12° au commencement de l'expérience, s'était élevée à la fin à 15°. Dans quel rapport en volume et en poids l'azote et l'oxigène entraient-ils dans le mélange?

Les 100^{ccc} de mélange étant ramenés à $0°$ et à la pression $0^m,76$, deviendraient

$$100.\frac{78-15}{76}.\frac{267}{267+12} \quad \text{ou} \quad 100.\frac{63}{76}.\frac{267}{267+12}.$$

Les $46^{ccc},82$ d'azote restant, ramenés à la même température et à la même pression, occuperaient

$$46^{ccc},80.\frac{34}{76}.\frac{267}{267+15}.$$

Si l'on cherche le rapport de ces deux volumes, on trouve celui de 4 à 1; c'est-à-dire que l'oxigène constitue les trois quarts du mélange, puisque l'azote n'en constitue qu'un quart à lui seul : le rapport de l'oxigène à l'azote est donc celui de 3 à 1.

Le rapport en poids se déduirait aisément du rapport en volume, et multipliant chaque terme de ce rapport par la densité du gaz qu'il représente. On trouverait ainsi pour le rapport en poids de l'oxigène et de l'azote, celui de

$$3 \times 1,1026 \quad \text{à} \quad 0,976.$$

Q. **142.** A quelle pression devrait-on amener de l'acide carbonique à $15°$, pour que la densité fût à cette température la même que celle de l'hydrogène à $0°$, et sous la pression $0^m,76$?

Désignons par x la pression cherchée : la densité de l'acide carbonique, qui est 1,52 à $0°$, et sous la pression $0^m,76$, sera

$$1{,}52 \cdot \frac{267}{267+15} \cdot \frac{x}{76},$$

à 15° et sous la pression x, on devra donc alors avoir l'équation

$$1{,}52 \cdot \frac{267}{267+15} \cdot \frac{x}{76} = 0{,}0688,$$

densité de l'hydrogène dans les circonstances exigées; d'où

$$x = 0^{m}{,}0363.$$

CHALEURS SPÉCIFIQUES.

Axiome.

143. Pour que la température d'un corps s'abaisse d'un certain nombre de degrés, il est évident qu'il doit abandonner autant de chaleur qu'il en avait absorbé pour élever sa température du même nombre de degrés entre les mêmes limites.

Et si les limites, quoique différentes, sont assez rapprochées et que le corps n'ait pas changé d'état dans l'intervalle qu'elles comprennent, on peut encore admettre le principe sans erreur sensible.

Ce principe n'est plus admissible si les limites de température sont trop éloignées, et surtout, si l'on considère le corps dans des états physiques différens, comme liquide et solide, liquide et gazeux, solide et gazeux.

Q. 144. On a mélangé $1202^{gr.},17$ de limaille de fer préalablement portée à $100°$, avec $2900^{gr.}$ d'eau, en comprenant dans ce poids d'eau le poids du vase remplacé par un poids d'eau capable d'absorber la même quantité de chaleur, dans les mêmes circonstances. La température de l'eau, qui était primitivement à $10°,832$, s'est élevée à $14°,7$. Quelle est la chaleur spécifique du fer?

Il est clair que l'élévation de température de l'eau est de 3°,868, et que l'abaissement de température du fer est de 85°,3. En appelant donc C la chaleur spécifique du fer, ou la quantité de chaleur abandonnée par l'unité de masse (qui est ici le gramme), pour une variation de température de 1°, la quantité de chaleur qu'elle abandonnera pour que sa température s'abaisse de 85°,3 sera 85,3.C; enfin celle abandonnée dans les mêmes circonstances par les 1202gr.,17, sera

$$1202{,}17 . 85{,}3 . C.$$

La chaleur spécifique de l'eau étant prise pour unité, la quantité de chaleur gagnée par les 2900 grammes pour que leur température s'élève de 3°,868, est

$$2900 . 3{,}868,$$

d'où l'égalité suivante entre la perte et le gain,

$$2900 . 3{,}868 = 1202{,}17 . 85{,}3 . C,$$

et

$$C = 0{,}1096 = \text{à peu près } \frac{1}{9}.$$

Q. 145. 1550 grammes de plomb en limaille, dont la chaleur spécifique est 0,0293, ont été mis dans un vase de cuivre pesant 50 grammes, dont la chaleur spécifique est 0,0949; le tout, après avoir été porté à 120°, fut placé dans le calorimètre de Lavoisier et Laplace. Quelle sera la quantité de glace fondue lorsque le vase de cuivre et le plomb qu'il renferme seront descendus à 0°?

Pour descendre de 120° à 0°, les 1550gr. de limaille de plomb devront abandonner 1550 . 120 . 0,0293 unités de chaleur; le vase de cuivre, pour descendre également à la température de la glace fondante, devra abandonner 50.120.0,0949 unités de chaleur. D'une autre part, chaque gramme de glace à 0° absorbant pour se fondre 75 unités de chaleur, si x représente le nombre de grammes qui seront fondus, $75x$ représentera le nombre d'unités de chaleur employées à les fondre. La perte étant égale au gain, on aura donc

$$75x = 50.120.0,0949 + 1550.120.0,0293,$$

d'où

$$x = 80^{gr.},256.$$

Q. **146.** Un anneau de fer pesant 82$^{gr.}$,228, ayant été porté à une température inconnue, et plongé ensuite dans une masse d'eau de 1800$^{gr.}$ (vase compris), a fait monter la température de cette eau de 10°,5 à 12°,5. Quelle était la température de l'anneau?

Soit x cette température; comme à la fin de l'expérience, l'eau est à 12°,5 ainsi que l'anneau, l'abaissement de température de celui-ci est

$$x - 12°,5,$$

et, par conséquent, la quantité de chaleur qu'il a dû abandonner est

$$42,228.(x - 12,5)0,1096.$$

La quantité de chaleur gagnée par la masse d'eau étant

$$1800(12,5 - 10,5),$$

on a l'équation

$$42,228(x - 12,5)0,1096 = 1800(12,5 - 10,5),$$

d'où

$$x = 90°,5 \text{ environ.}$$

Ce procédé ne serait pas propre à la détermination des températures élevées, à cause de la variation de la chaleur spécifique des corps, lorsque les variations de leur température sont trop grandes.

Q. **147.** Un vase contenant 50 grammes de limaille d'argent, a mis 12 minutes pour se refroidir de 18 à 15° dans le vide. Combien de temps mettra le vase, contenant un égal poids de limaille de zinc, pour se refroidir du même nombre de degrés, dans les mêmes circonstances de température, sachant que la chaleur spécifique de l'argent est 0,0557, et celle du zinc 0,0927?

Puisque, dans les circonstances actuelles, les quantités de chaleur perdues par les deux corps, pour un même abaissement de température, dans les mêmes limites, sont proportionnelles aux temps nécessaires pour des refroidissemens semblables; les masses étant ici les mêmes, les quantités de chaleur abandonnées seront aussi entre elles comme les chaleurs spécifiques des corps; d'où l'équation

$$\frac{0,0557}{0,0927} = \frac{12}{x},$$

ce qui donne pour le temps x du refroidissement du zinc,

$$x = 19' \ldots 58'' \text{ à peu près.}$$

Force élastique des vapeurs.

Q. **148.** Dans de l'air raréfié communiquant avec la chambre barométrique, l'eau est entrée en ébullition à la température de 91°,57. La force élastique de la vapeur d'eau étant, à cette température, 558^{mm},90, quelle doit être la hauteur de la colonne barométrique, en la supposant maintenue à 10°? La pression extérieure corrigée est $0^m,77$.

La force élastique $558^{mm},90$ dont il est ici question, est évaluée par une colonne de mercure ramenée à 0°. Si telle était la température de la colonne de mercure qui communique avec la vapeur, sa hauteur serait égale à

$$770 - 558,98 = 211^{mm},10;$$

à 10°, la hauteur de cette colonne devra être de

$$211^{mm},10 . \frac{5550 + 10}{5550} = 211,35.$$

Q. **149.** Dans un tube vertical contenant de la vapeur d'eau à saturation, à la température de 81°, le mercure s'élève à la hauteur de $372^{mm},356$ à cette température dont jouit le tube dans toute sa longueur. Quelle est la force élastique de la vapeur d'eau à cette température ? On sait que la pression extérieure donnée par un baromètre entretenu aussi à 81°, est $744^{mm},712$.

La force élastique cherchée est évidemment mesurée par la différence

$$744,712 - 372,356 = 372^{mm},365,$$

des deux colonnes de mercure, à 81°. Cette différence, ramenée à 0°, sera

$$372,356 . \frac{5550}{5550 + 81} = 367^{mm}.$$

Q. **150.** Dans un tube doublement recourbé ACDB (*fig.* 23), on a, d'un côté A, de la vapeur d'eau à saturation à 50°, et dont, par conséquent, la force élastique est égale à 9 centimètres ; de l'autre côté, le mercure se tient dans la branche B à un excès de hauteur de 4 centimètres; au-dessus de ce mercure se trouve de l'air sec, occupant une longueur h du tube, et faisant équilibre à la pression de la vapeur. On porte l'appareil de 50° à 100°, et l'on demande à combien se réduira le volume d'air pour faire équilibre à la nouvelle pression de la vapeur?

On supposera, 1° que le tube soit parfaitement cylindrique; 2° que la vapeur soit toujours en contact avec son liquide, de manière que l'espace A soit toujours saturé.

Enfin, on pourra se dispenser des corrections relatives à la variation de volume du mercure et du verre.

Soit x le nombre de centimètres dont le mercure s'élèvera dans la branche B; la différence de niveau du mercure dans les deux branches sera alors de

$$2x + 4 \text{ centimètres.}$$

La force élastique de la vapeur d'eau est d'ailleurs, comme on sait, 76^{cm}.

Le volume d'air de la branche B aura éprouvé une variation de force élastique dans le rapport de

$$h - x \text{ à } h,$$

c'est-à-dire que cette force élastique, de 5^{cm} qu'elle était, est devenue

$$5 \cdot \frac{h}{h - x};$$

mais à cause de la variation de température, cette dernière tension aura varié dans le rapport de

$$1 + \frac{3}{16} \text{ à } 1 + \frac{3}{8},$$

et sera devenue

$$5 \cdot \frac{h}{h-x} \cdot \frac{1+\frac{3}{8}}{1+\frac{3}{16}}.$$

Mais cette force élastique, jointe à la pression $(4+2x)^{cm}$, doit faire équilibre à la force élastique 76^{cm} de la vapeur de l'autre branche; de là l'équation

$$5 \cdot \frac{h}{h-x} \cdot \frac{1+\frac{3}{8}}{1+\frac{3}{16}} + 4 + 2x = 76,$$

d'où

$$x = \text{etc.}$$

Si, considérant la question d'une manière plus générale, on appelle $F_{(t)}$ la force élastique de la vapeur à $t°$, $F_{(t')}$ la force élastique de cette même vapeur à $t'°$, et H la différence primitive de niveau du mercure dans les deux branches, on trouverait, par des considérations analogues aux précédentes, l'équation

$$(F_{(t)} - H)\frac{h}{h-x} \cdot \frac{1+\frac{3t'}{800}}{1+\frac{3t}{800}} + H + 2x = F_{(t')}.$$

Mélange des gaz et des vapeurs.

151. 1°. Lorsqu'on mélange des gaz et des vapeurs sans action chimique l'un sur l'autre, la force élastique du mélange est la somme des forces élastiques des vapeurs et des gaz composans; chacune d'elle étant rapportée au volume total.

2°. La force élastique de la vapeur capable de saturer un certain espace, à une certaine température, est la même, que cet espace soit vide, ou qu'il contienne un gaz plus ou moins dilaté.

3°. Lorsqu'une vapeur n'est pas en contact avec son liquide, sa tension, sous le même volume, augmente avec la température, suivant la même loi que la pression d'un gaz placé dans les mêmes circonstances.

4°. Si l'espace n'est pas saturé, c'est-à-dire si la vapeur contenue dans cet espace n'y possède pas son maximum de tension, sa force élastique variera comme celle d'un gaz, dans les mêmes circonstances de température et de pression.

Q. 152. On a, dans un tube cylindrique vertical, de l'air sec à 30°, occupant 1000 millimètres de longueur (*fig.* 24). Le mercure, au lieu de s'élever dans ce tube à 760 millimètres, en vertu de la pression extérieure, ne s'y élève qu'à 500 millimètres. On introduit dans le tube de la vapeur d'eau à saturation à 30°, dont la force élastique est 30 millimètres, et l'on maintient la température à 30°. A quelle hauteur s'arrêtera finalement le mercure?

On pourra négliger l'effet de la température sur la matière du tube, et sur la colonne de mercure.

Avant l'introduction de la vapeur, l'air extérieur a une force élastique égale à

$$760 - 500 = 260^{\text{mm}}.$$

En désignant par x l'abaissement de la colonne de mercure après l'introduction de cette vapeur, le volume de l'air augmentera donc dans le rapport de

$$1000 + x \quad \text{à} \quad 1000,$$

et par conséquent sa force élastique diminuera dans le rapport de

$$1000 \quad \text{à} \quad 1000 + x,$$

et sera

$$260^{mm} \cdot \frac{1000}{1000 + x};$$

en y ajoutant la force élastique 30^{mm}, de la vapeur d'eau, la somme

$$260 \cdot \frac{1000}{1000 + x} + 30,$$

jointe à la pression de la colonne restante de $500 - x$ millimètres de mercure, devra faire équilibre à la pression extérieure supposée toujours de 760^{mm}, c'est-à-dire qu'on aura l'équation

$$260 \cdot \frac{1000}{1000 + x} + 30 + 500 - x = 760,$$

d'où

$$x = 6^{mm},77;$$

le mercure s'arrêtera donc à

$$500 - 6,77 = 493^{mm},23 \text{ de hauteur.}$$

Il est sous-entendu dans le problème qui précède, que la cuvette dans laquelle est plongé le tube est assez large pour que l'élévation de niveau provenant de la dépression de la colonne mercurielle soit insensible.

Q. 133. Quelle est la pression atmosphérique dans un lieu où l'eau pure entre en ébullition à $98°,7$ dans un vase métallique ?

On sait que l'eau entre en ébullition à $100°$ centigrades dans un vase de métal, lorsque la pression est $0^{m},76$, et qu'une différence de 27 millimètres en plus ou en moins dans la pression atmosphérique correspond à 1° de variation dans le même sens sur la température d'ébullition de l'eau et réciproquement; et comme ici la température d'ébullition est de 1°,3 au-dessous de 100°, la pression barométrique correspondante sera de $27 \times 1,3$ ou de $35^{mm},1$ au-dessous de $0^m,76$; elle sera donc égale à $0^m,7249$.

Q. **154.** Quel serait, à la température 0°, et sous la pression $0^m,76$, le poids d'un volume d'air, sachant que ce volume d'air complétement saturé à 18°,5 et sous la pression $0^m,78$, pèse $18^{gr.},17$? On demande en outre quel est actuellement ce volume d'air?

La force élastique de la vapeur d'eau à 18°,5 étant $0^m,01585$, la force élastique réelle de l'air seul est

$$0^m,78 - 0^m,01585.$$

En désignant donc par x le poids cherché, le poids d'un égal volume d'air sec à 18°,5 et à la pression

$$0^m,78 - 0^m,01585,$$

serait

$$x\,\frac{(0,78 - 0,01585)}{0,76}\cdot\frac{267}{267 + 18,5}.$$

Le poids du même volume de vapeur à $0^m,76$, et à la même température 0°, serait

$$\frac{5}{8}\,x;$$

et à 18°,5, sous la pression $0^m,01585$, il sera

$$x\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{0,01585}{0,76}\cdot\frac{267}{267 + 18,5};$$

la somme de ces poids devant être $18^{gr.},17$, on doit avoir

$$x^{gr.}.\frac{\left(0,78-\frac{3}{8}.0,01585\right)}{0,76}.\frac{267}{267+18,5}=18^{gr.},17;$$

d'où

$$x=19^{gr.},069.$$

Le volume exprimé en litres serait, à 0°, et sous la pression $0^m,76$, égal à

$$\frac{19,069^{lit.}}{1,3},$$

et à 18°,5, sous la pression

$$0^m,78-0^m,01585,$$

il serait

$$\frac{19,069}{1,3}.\frac{0,76}{0,76415}.\frac{267+18,5}{267}=15^{lit.},4.$$

Q. 133. On a recueilli sur l'eau 500 litres d'hydrogène, dont la pression est $0^m,745$, et la température 15°. Quel sera le volume du gaz desséché à 10°, et sous la pression $0^m,76$?

L'hydrogène ayant été recueilli sur l'eau, doit être considéré comme saturé de vapeur; et comme la force élastique de la vapeur à 15° est $0^m,012837$, la force élastique du gaz seul à 15°, lorsque la pression du mélange est $0^m,745$, n'est réellement que

$$0^m,745-0^m,012837,\quad \text{ou}\quad 0^m,732163.$$

Les 500 litres desséchés n'occuperaient donc, à $0^m,76$, qu'un volume de

$$500.\frac{0,732163^{lit.}}{0,76}\ \text{à}\ 15°,$$

et par conséquent

$$500 \cdot \frac{0,732163}{0,76} \cdot \frac{267+10}{267+15} = 475^{\text{lit.}},378 \text{ à } 10^{\circ}.$$

Q. **156.** On a introduit sur le mercure, dans une cloche cylindrique verticale de 40^{cm} de longueur, de l'oxigène humide à 50°, qui, s'il n'eût été qu'à 30°, eût été saturé de vapeur; la pression extérieure étant $0^{\text{m}},77$, le mercure s'élève de 4^{cm} dans la cloche. Quelle sera la hauteur du mercure lorsque le gaz sera complétement desséché et ramené à 15°, la pression extérieure restant la même? (On ne tiendra pas compte de l'influence de la température sur la capacité de la cloche, et sur la colonne mercurielle.)

Le gaz, qui serait saturé de vapeur à 30°, ne le sera plus à 50°, puisqu'il n'est plus en contact avec l'eau. Dès-lors, la vapeur d'eau suivant la même loi de dilatation qu'un gaz, lorsque l'espace qui la contient n'en est pas saturé, sa force élastique propre, de $0^{\text{m}},030$ qu'elle est à 30°, deviendra

$$0^{\text{m}},030 \cdot \frac{267+50}{267+30} \text{ à } 50^{\circ}.$$

De sorte que la force élastique propre de l'oxigène à 50°, n'est réellement que

$$0^{\text{m}},77 - 0^{\text{m}},04 - 0^{\text{m}},030 \cdot \frac{267+50}{267+30}, \quad \text{ou} \quad 0^{\text{m}},69798,$$

et à 15°, elle sera

$$0^{\text{m}},69798 \cdot \frac{267+15}{267+50} = 0^{\text{m}},62091.$$

Si nous désignons maintenant par x la hauteur à laquelle s'élèvera le mercure lorsque le gaz sera desséché et ramené à 15°, la pression de ce gaz sera alors

$$0^m,77 - x$$

et le volume de l'oxigène, qui occupait primitivement $40 - 4 = 36$ centimètres de longueur, à la pression $0^m,69798$, et à 50°, n'eût pu conserver ce même volume à 15°, que sous une pression égale à

$$0^m,69798.\frac{267+15}{267+50}, \quad \text{ou à} \quad 0^m,62091\,;$$

et comme en dernier lieu ce gaz n'occupe plus qu'une longueur de $(40-x)^{cm}$, et qu'à température égale, les volumes occupés par une même masse de gaz sont en raison inverse des pressions, nous aurons la proportion

$$36 : 40 - x :: 77 - x : 62,091\,;$$

d'où

$$x = 7^{cm},735.$$

Densités des vapeurs.

Q. **137.** Un gramme et demi d'éther, introduit dans une cloche verticale graduée à 0°, pleine de mercure, et portée à 80°, a occupé un volume de $0^{lit.},73299$; et le mercure s'élevait dans la cloche, à cette température, à une hauteur de $15^{cm},216$; la hauteur corrigée du baromètre était 75^{cm}. Quelle est la densité de la vapeur d'éther, celle de l'air étant prise pour unité ?

La colonne de mercure de $15^{cm},216$ qui, jointe à la force élastique de la vapeur d'éther, fait équilibre à la pression atmosphérique, n'équivaut réellement qu'à

$$15^{cm},216.\frac{5550}{5550+80} = 15^{cm}.$$

La pression supportée par cette vapeur est donc

$$75^{\text{cm}} - 15^{\text{cm}} = 60^{\text{cm}}.$$

Le volume de cette vapeur, qui est évalué d'après la capacité de chaque division de la cloche à 0°, est en réalité, à 80°,

$$0^{\text{lit.}},73299\left(1+\frac{80}{38700}\right);$$

donc

$$\frac{1^{\text{gr.}},5}{0,73299\left(1+\dfrac{80}{38700}\right)}$$

sera le poids d'un litre de cette vapeur à 80°, et sous la pression de 60^{cm}. Le poids d'un litre d'air, dans les mêmes circonstances, est

$$1^{\text{gr.}},3.\frac{60}{76}.\frac{267}{267+80};$$

la densité de la vapeur proposée est donc

$$\frac{1,5}{1.3.0,73299\left(1+\dfrac{80}{38700}\right)}.\frac{76}{60}.\frac{267+80}{267} = 2,586.$$

Q. 138. Dans un ballon à col effilé qui, jaugé à 0°, avait une capacité de 350^{ccc}, on a introduit une certaine quantité d'une substance volatilisable, on a porté le tout à 300°. Lorsqu'on a jugé que toute la matière soumise à l'expérience était réduite en vapeur, on a fermé à la lampe le col effilé du ballon, et, après l'avoir laissé refroidir, on l'a pesé; l'excès du poids ainsi trouvé sur le poids du ballon vide de toute matière pondérable fut d'un gramme. Enfin, on a reconnu ensuite que la vapeur contenue dans le ballon, y était mêlée à une certaine quantité d'air qui, à 0°, et à la pression $0^m,76$, occupe un volume de 65 centimètres cubes. Quelle est la densité de cette vapeur, sachant que la pression extérieure a été $0^m,76$ pendant toute la durée de l'expérience ?

Les 65^{ccc} d'air qui sont mêlés à la vapeur occupent, à la température de 300°, et à la pression $0^m,76$, un volume de

$$65\left(1+3.\frac{3}{8}\right);$$

et comme à cette température la capacité du ballon de verre est

$$350\left(1+\frac{300}{38700}\right)^{ccc},$$

il s'ensuit que le reste

$$350\left(1+3.\frac{1}{387}\right)-65\left(1+3.\frac{3}{8}\right)$$

du volume peut être considéré comme occupé par de la vapeur à 300°, et à $0^m,76$ de pression.

D'un autre côté, les 65^{ccc} d'air pèsent $0,065.1^{gr.},3$, de sorte que le poids de la vapeur seule est

$$1^{gr.}-0,065.1^{gr.},3=0^{gr.},9255.$$

Le poids d'un litre de vapeur à 300°, et sous la pression $0^m,76$, est donc

$$\frac{0,9255}{0,350\left(1+\frac{3}{387}\right)-0,065\left(1+\frac{9}{8}\right)}=4^{gr.},31267.$$

D'ailleurs le poids d'un litre d'air pris dans les mêmes circonstances, est

$$1^{\text{gr.}},3.\left(\frac{1}{1+\frac{9}{8}}\right) = 0^{\text{gr.}},612.$$

La densité cherchée sera donc, par rapport à celle de l'air,

$$\frac{4,31267}{0,612} = 7,047.$$

Chaleurs latentes.

Q. **159.** Ayant mis dans de l'eau à 0°, 725 grammes de glace à — 12°, on a obtenu un accroissement de poids de glace égal à $121^{\text{gr.}},575$, lorsque tout a été ramené à 0°. Quelle est la chaleur spécifique de la glace?

En désignant par x cette chaleur spécifique, la quantité de chaleur gagnée par la glace, pour monter de — 12° à 0°, est représentée par

$$725\ 12.x.$$

Et comme chaque unité de masse d'eau à 0°, pour passer de l'état de glace à 0°, doit abandonner 75 unités de chaleur, les $121^{\text{gr.}},575$ en abandonneront

$$121,575.75,$$

on aura donc l'équation

$$725.12.x = 75\ 121,575;$$

d'où

$$x = 0,94.$$

Q. **160.** On a mis dans une masse d'eau à 5°, 500 grammes de glace à -11°, qui en s'y fondant complétement l'ont refroidie à 3°. Quelle était la masse d'eau avant la fusion de la glace, sachant que la chaleur latente de fusion de la glace est 75, et sa chaleur spécifique 0,94?

Les 500 grammes de glace, pour arriver à 0°, avant de se fondre, ont dû absorber 0,94.11.500 de chaleur; et pendant la fusion, sans changer de température, ils en ont encore absorbé 500.75. Enfin, pour passer à 3°, ils en ont encore absorbé 500.3. Cette quantité de chaleur lui a été cédée par la masse inconnue M d'eau, laquelle a dû perdre M.(5 — 3) unités de chaleur. La perte étant égale au gain,

$$2M = 0,94 \cdot 11.500 + 500.75 + 500.3;$$

d'où

$$M = 44^{\text{kil.}},170.$$

Q. **161.** Dans une masse M d'eau à la température T, on a mis une masse m d'un corps à t°, fondant à la température $\tau < T$. La chaleur spécifique de ce corps à l'état solide est C, et à l'état liquide C'. La température finale du mélange est θ. Quelle est la chaleur latente de fusion de la substance soumise à l'épreuve?

Pour monter de t° à τ, la masse m a gagné

$$mC\ (\tau - t);$$

pendant la fusion elle en a absorbé mx, en appelant x la chaleur latente cherchée; après la fusion, pour monter de τ à θ, le corps m a dû gagner encore

$$mC'\ (\theta - \tau);$$

enfin, pour son abaissement de température, l'eau a perdu

$$M\ (T - \theta).$$

De là l'équation

$$M(T-\theta)=m\,[C(\tau-t)+x+C'(\theta-\tau)],$$

qui donne

$$x=\frac{M(T-\theta)-m(\tau-t)\,C-m(\theta-\tau)\,C'}{m}.$$

Q. **162**. Combien devra-t-on vaporiser d'eau sous la pression $0^m,76$, pour porter à 80° une masse de 450 kilog. d'eau primitivement à 10°, sachant que pendant l'échauffement de cette masse liquide, il y a 38 $\frac{0}{0}$ de chaleur perdue employée à échauffer le vase, ou perdue par le rayonnement, etc. ?

Soit x ce poids, la quantité de chaleur gagnée par l'eau est

$$450\,(80-10)\,;$$

et comme la chaleur latente de la vapeur d'eau est 543, la quantité de chaleur abandonnée par la vapeur pour passer de 100° vapeur à 100° liquide, sera $543.x$ unités de chaleur ; enfin, l'eau provenant de la liquéfaction de la vapeur, descendant de 100° à 80°, abandonne aussi $x\,(100-80)$ unités de chaleur. Or, d'après les données de la question, la première quantité ne représente que les $\frac{100-38}{100}$ de la chaleur abandonnée par la vapeur. De là l'équation

$$450\,(80-10)=x\,(543+100-80).\frac{100-38}{180},$$

et par conséquent

$$x=90^{\text{kil.}},24.$$

AÉROSTATIQUE.

Q. **163**. A quelle hauteur pourra-t-on s'élever avec un ballon gonflé de 145 mètres cubes de volume, emportant une nacelle d'un mètre cube. Le poids de l'enveloppe, de la nacelle, du lest, etc., étant de 168 kilogrammes?

La densité de l'air par rapport à celle de l'eau, étant 0,0013 sous la pression $0^{m},76$, celle de l'hydrogène sera

$$0,0013 . 0,0688 ;$$

le poids de l'hydrogène qui gonfle le ballon sera donc

$$45000^{kil.} . 0,0013 . 0,0688 . \frac{x}{76},$$

en désignant par x la pression atmosphérique correspondante à la hauteur cherchée. D'une autre part, le poids de l'air déplacé sera

$$(145+1)1000^{kil.} . 0,0013 . \frac{x}{76} ;$$

ce poids d'air déplacé devant, à la hauteur cherchée, faire équilibre au poids du ballon et de ses agrès, on aura l'équation

$$145000 . 0,0013 . 0,0688 . \frac{x}{76} + 168 = 146000 . 0,0013 . \frac{x}{76} ;$$

d'où

$$x = 72^{cm},74.$$

La hauteur cherchée s'en déduirait au moyen des formules barométriques.

Si cette hauteur était donnée, on en déduirait x, et

$$145^{\text{mccc}} \cdot \frac{72,74}{76},$$

serait le volume d'hydrogène à la pression de $0^{\text{m}},76$ qu'il faudrait introduire dans le ballon au moment du départ.

HYGROMÉTRIE.

Q. **164**. Quel est le poids de la vapeur d'eau contenue dans 50 litres d'air à 15°, sachant que cet air contient la moitié de la vapeur qu'il pourrait contenir à cette température ?

Si c'était de l'air sec à 0°, et sous la pression 76^{cm}, 50 litres pèseraient $50 . 1^{gr.},3$; ou, à la même pression mais à 15°, le poids serait

$$50 . 1^{gr.},3 . \frac{267}{267+15}.$$

Mais comme c'est de la vapeur d'eau qui a pour densité les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air, à pression égale, et que sa force élastique n'est que $1^{cm},2836$, si la vapeur était à saturation, son poids serait

$$50 . 1^{gr.},3 . \frac{267}{267+15} . \frac{1,2836}{76}.$$

Mais puisque l'espace donné n'en contient que la moitié de ce qu'il en pourrait contenir à saturation, le poids cherché sera

$$25 . 1^{gr.},3 . \frac{267}{267+15} . \frac{1,2836}{76} = 0^{gr.},5197.$$

Q. **165**. On a fait arriver dans un ballon de 15 litres de capacité, 4 litres d'air sec à $0^{m},77$ de pression, et 10 d'hydrogène à 12°, saturés d'humidité à $0^m,75$ de pression. Quelle est la force élastique du mélange, et en particulier celle de l'hydrogène seul, en admettant :

1°. Qu'il ne se dépose aucune trace de vapeur sur les parois intérieures du ballon;

2°. Que l'air sec, l'hydrogène et le mélange aient la même température?

Les 4 litres d'air sec occupant un volume de 15 litres après leur introduction dans le ballon, leur force élastique deviendra, en vertu de la loi de Mariotte,

$$77^{cm} \cdot \frac{4}{15} = 20^{cm},333.$$

L'hydrogène saturé, se trouvant dans un espace plus grand sans que sa température s'abaisse, la quantité de vapeur qu'il contient ne sera plus assez grande pour saturer tout l'espace qu'il occupe; le mélange d'hydrogène et de vapeur d'eau se comportera comme un gaz ordinaire, et sa force élastique deviendra

$$75^{cm} \cdot \frac{10}{15} = 50^{cm}.$$

La force élastique du mélange total sera donc égale à

$$20,333 + 50 = 70^{cm},333.$$

Quant à celle de l'hydrogène seul, remarquons que la force élastique de la vapeur d'eau à 12°, est $1^{cm},0707$, et qu'alors celle de l'hydrogène seul, avant son introduction dans le ballon, était

$$(75 - 1,0707)^{cm} = 73^{cm},9293.$$

Après son introduction elle a donc dû être réduite à

$$73^{cm},9293 \cdot \frac{10}{15} = 49^{cm},2862.$$

Q. 166. Dans un mélange à 18° d'air sec et d'hydrogène saturé de vapeur à la même température, on a pris une certaine quantité de gaz occupant 8 centimètres cubes dans l'eudiomètre à eau, sous une pression de 72^{cm}. L'analyse de gaz a donné après l'absorption complète de l'hydrogène seul, un résidu d'air occupant 5^{ccc} sous la pression 70^{cm} et à 18°. Quel est l'état hygrométrique du mélange en question?

Les 5^{ccc} d'air restant eussent occupé sous la pression 72^{cm}, et à la même température, un volume de

$$5^{ccc} \cdot \frac{70}{72} = 4^{ccc},861.$$

Le volume d'hydrogène compris dans les 8^{ccc}, à 18° et à 72^{cm} de pression étant donc

$$8^{ccc} - 4^{ccc},861 = 3^{ccc},139.$$

D'un autre côté, les $4^{ccc},861$ d'air observés ne représentent réellement que

$$4^{ccc},861 \cdot \frac{72 - 1,5353}{72} = 4^{ccc},757 \text{ d'air sec,}$$

puisque la force élastique de la vapeur dont il s'est saturé dans l'eudiomètre est, à cette température, $1^{cm},5353$. Or, il est clair que si nous représentons par v le volume d'air sec, et par u celui de l'hydrogène saturé, pour former un volume $u + v$ de mélange ayant la même température et la même pression que chacun des deux gaz, u et $v + u$ représenteront également, l'un le volume primitif de la vapeur à saturation, l'autre celui de la vapeur contenue dans le mélange qu'elle ne sature plus. Dès-lors, leurs forces élastiques étant en raison inverse de ces volumes, $\frac{u}{v+u}$ sera évidemment l'état hygrométrique du mélange, c'est-à-dire le rapport qui existe entre la quantité de vapeur actuellement contenue dans l'unité de volume du mélange, et celle qui s'y trouverait si cette unité de volume en était saturée. Mais, dans le cas actuel,

$$u : v :: 3,139 : 4,757,$$

d'où

$$\frac{u}{u+v}=\frac{3,139}{7,896}=0,397 \text{ environ};$$

ou, en d'autres termes, le mélange donné contient les 397 millièmes de la vapeur qu'il pourrait contenir dans les mêmes circonstances, s'il en était saturé.

CAPILLARITÉ.

Q. 167. Deux tubes de même substance, et parfaitement calibrés, sont maintenus verticalement; dans le premier, dont la section droite est un cercle de 2 millimètres de rayon, le mercure subit une dépression égale à d millimètres. Quelle sera la dépression d' dans l'autre tube dont la section droite est une ellipse ayant ses demi-axes principaux égaux respectivement à 3^{mm} et 1^{mm}?

On sait qu'en désignant par r et r' les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la section du premier tube, et par R et R′, les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la section du second, les dépressions d et d' satisfont à la proportion

$$d : d' :: \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right) : \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

Or, dans le cas que nous considérons,

$$r = r' = 2^{mm}; \quad R = 3^{mm} \quad \text{et} \quad R' = 1^{mm},$$

donc

$$d ; d' :: \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{1}\right),$$

et

$$d' = \frac{4}{3} d.$$

Dans un tube capillaire prismatique dont la section intérieure est un polygone circonscriptible, l'ascension ou la dépression d'un même liquide est, toutes circonstances égales d'ailleurs, la même que dans un tube cylindrique de même substance, dont la section intérieure est le cercle inscrit dans la section polygonale de ce tube prismatique.

Quelle que soit en effet la cause des phénomènes capillaires, l'intensité de l'action ascensionnelle ou dépressionnelle de la colonne liquide dans ces deux tubes doit être proportionnelle au périmètre de la section du tube faite à la partie supérieure de la colonne soulevée ou déprimée. Si donc f et f' sont les intensités des actions capillaires dans le tube prismatique et le tube cylindrique inscrit, h et h' les hauteurs des colonnes liquides soulevées ou déprimées dans ces mêmes tubes, p le périmètre du premier et r le rayon du second.

Les quantités f et f' seront évidemment proportionnelles aux volumes $p \times \frac{r}{2} h$ et $\pi r^2 h'$ de ces colonnes; comme elles sont aussi proportionnelles aux périmètres p et $2\pi r$ des sections, nous aurons donc la proportion

$$p \cdot \frac{r}{2} h \ : \ \pi . r^2 . h' \ :: \ p \ : \ 2\pi r,$$

d'où

$$h = h',$$

comme nous l'avions annoncé.

Dans un espace annulaire compris entre deux tubes cylindriques de même substance ayant le même axe, dont les rayons sont respectivement r et r', l'ascension ou la dépression est égale à celle qui aurait lieu dans un tube cylindrique de même substance que les deux précédens, et et dont le rayon serait égal à l'intervalle $r-r'$ compris entre ces deux tubes.

En appelant f et f' les mêmes quantités que précédemment, par rapport à ce tube anuulaire et au tube cylindrique de rayon $r-r'$, et par h et h' les colonnes soulevées ou déprimées correspondantes, nous aurons, par la même raison,

$$f:f'::\pi(r^2-r^2)h:\pi(r-r')^2h'::2\pi r+2\pi r':2\pi(r-r'),$$

d'où

$$h=h'',$$

ce qui confirme le théorème énoncé.

Quel doit être le rayon intérieur x d'un tube cylindrique pour que l'action capillaire y détermine une ascension ou une dépression h égale à celle qu'on observerait dans l'espace compris entre trois cylindres de même rayon r tangens deux à deux, en supposant que le liquide soit le même, ainsi que la matière du tube et des trois cylindres.

La base du canal primatoïde compris entre les trois cylindres tangens est évidemment égale à la surface $2r.\frac{r}{2}\sqrt{3}$, du triangle équilatéral formé en joignant leurs centres deux à deux, diminuée de la somme

$$\frac{1}{6}\pi r^2+\frac{1}{6}\pi r^2+\frac{1}{6}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi r^2,$$

des trois secteurs circulaires qui sont interceptés de trop par ce triangle; le volume du liquide soulevé ou déprimé par l'action capillaire est donc

$$h\left(r^2 \sqrt{2} - \frac{1}{2}\pi r^2\right),$$

dans l'espace primatoïde, et $h\pi x^2$ dans le tube; d'une autre part, les périmètres correspondans sont πr et $2\pi x$, donc

$$f : f' :: hr^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi\right) : \pi h x^2 :: \pi r : 2\pi x,$$

d'où

$$x = \frac{2r\sqrt{3}}{\pi} - r,$$

ou bien

$$x = 0,1026.r \text{ environ.}$$

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

EXERCICES

SUR

LA PHYSIQUE.

SECONDE PARTIE.

ACOUSTIQUE.

168. Avant d'indiquer quelques problèmes sur l'acoustique, nous avons pensé qu'il ne serait peut-être pas déplacé de rappeler succinctement les formules relatives au *choc direct des corps parfaitement élastiques*, dont la loi de la transmission du son dans les gaz est une application immédiate.

Soient A et B deux corps parfaitement élastiques se mouvant dans le même sens; soient M la masse du corps choquant, V sa vitesse avant le choc, et x la vitesse après le choc; M′ la masse du corps choqué, V′ la vitesse avant le choc, et x' la vitesse après le choc.

Nous devons distinguer, dans le choc de ces deux corps, deux époques distinctes : pendant la première, qui commence avec le contact, les deux mobiles se compriment mutuellement, et ils restent en contact jusqu'à ce que la force de ressort qui naît de leur élasticité ait atteint la limite correspondante à l'intensité de leur compression; à cette limite, les deux corps sont animés momentanément de la même vitesse; soit X cette vitesse, la quantité de mouvement $(M + M')X$ est alors évidemment égale à la somme des quantités de mouvement partielles MV, M'V'; on a donc l'équation

$$(M + M')X = MV + M'V',$$

d'où

$$X = \frac{MV + M'V'}{M + M'};$$

Dans ce mouvement commun, la masse M, ayant une quantité de mouvement égale à MX, en a perdu

$$(V - X)M;$$

et la masse M', dont la quantité actuelle de mouvement est M'X, en a au contraire gagné

$$M'(X - V').$$

Or comme, dans le choc des corps parfaitement élastiques, l'élasticité développe dans chacun d'eux, après la compression, et dans un sens opposé, une quantité de mouvement égale à celle qui a été employée à produire cette compression, il s'ensuit que la masse M n'aura plus, finalement, dans le sens de son mouvement primitif, qu'une quantité du mouvement marquée par

$$Mx = MV - M(V - X) - M(V - X) = MV - 2M(V - X),$$

et que M' en possédera une quantité

$$M'x'=M'V'+M'(X-V')+M'(X-V')=M'V'+2M'(X-V'),$$

d'où l'on déduit, en substituant pour X la valeur précédemment trouvée,

$$x=\frac{(M-M')V+2M'V'}{M+M'},$$

et

$$x'=\frac{2MV-(M-M')V'}{M+M'}.$$

Parmi les nombreuses conséquences qu'on peut déduire de ces formules, nous ne nous arrêterons qu'à la suivante dont nous ferons bientôt une application.

Si

$$M=M' \text{ et } V'=0,$$

les formules précédentes donnent

$$x=0, \quad x'=V,$$

c'est-à-dire que si un corps parfaitement élastique vient choquer un autre corps parfaitement élastique de même masse que lui et en repos, il lui communiquera toute sa vitesse, et restera lui-même en repos après le choc.

169. Si dans une masse gazeuse homogène de forme prismatique, on produit un ébranlement sur toute l'étendue d'une section, il se transmettra intégralement dans toute la masse et avec la même vitesse, quelle que soit du reste l'étendue de cet ébranlement élémentaire.

En effet, nous pouvons considérer cette masse de gaz comme formée d'une infinité de tranches parallèles infiniment minces et parfaitement élastiques; lors donc qu'un ébranlement quelconque est produit sur l'une des tranches, elle exerce sur celle qui la suit une compression à la manière des corps parfaitement élastiques; et comme ces tranches ont des masses égales, après le choc, la première tendra à rester en repos; et la seconde, animée de la vitesse de la première, transmettra sa vitesse à la troisième, celle-ci à la suivante, et ainsi de suite jusqu'à la dernière; de sorte que ce n'est pas une tranche qui voyage d'un point à un autre, mais c'est la compression qui passe de l'une à l'autre successivement; c'est-à-dire que c'est l'excès de densité produit par la compression due à l'ébranlement de la première qui se transmet de couche en couche.

Désignons par d la densité primitive de chaque tranche, et par e son élasticité; si αd indique l'accroissement de densité produit par la compression exercée sur la première couche; αe sera, en vertu de la loi de Mariotte, l'accroissement correspondant de son élasticité, en admettant que la température ne change pas; la force de détente de la première couche sur la seconde sera donc αe.

Si nous supposons que l'ébranlement soit plus grand, c'est-à-dire qu'il exerce sur la première tranche une compression plus forte, et que $d + n\alpha d$ soit la densité acquise par cette tranche sous l'influence de la compression; en vertu de cette même loi de Mariotte, $e + n\alpha e$ représentera l'élasticité correspondante; l'excès $n\alpha e$ de cette élasticité tendrait à communiquer à la tranche suivante une impulsion n fois plus rapide que la précédente; mais cette même tranche acquérant sous l'influence de la compression un excès de densité n fois plus considérable, exigera pour acquérir la même vitesse, une force n fois plus grande que dans le cas précédent; ce qui établit la compensation, et conduit à cette conséquence : que *dans un même gaz les sons doivent être tous transmis également vite*. Ce résultat est confirmé par l'expérience, puisqu'un morceau de musique n'est pas altéré, quelle que soit la distance de la personne qui l'entend.

Détermination de la vitesse du son dans un gaz (*).

170. Soient e l'élasticité et d la densité de ce gaz, θ la durée de la compression produite par un ébranlement quelconque sur une couche infiniment mince de ce gaz, ayant une masse m. Soit αd l'accroissement de densité de cette couche, et par suite αe celui de son élasticité sous l'influence de la compression; enfin, désignons par x la vitesse inconnue de translation de l'ébranlement, vitesse qui ne sera autre chose que celle du son, si un son en est la cause primitive.

Il est clair qu'au bout du temps θ, l'ébranlement a dû être transmis à une distance $x\theta$, et que la masse du milieu en est ébranlée dans une épaisseur $x\theta$; la force $m\alpha e$ qui produit la compression a pour mesure, comme toutes les forces motrices, le produit de la masse mise en mouvement multiplié par la vitesse qu'elle lui imprime. Or, la masse mise en mouvement pendant le temps θ est $m\alpha dx\theta$, celle qui serait mise en mouvement pendant l'unité de temps, est donc

$$\frac{m\alpha d.x\theta}{\theta},$$

on aura donc l'équation

$$m\alpha e = m\alpha dx.x \quad (1),$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

(*) Cette démonstration et le théorème précédent m'ont été communiqués par M. Babinet.

Mais, pour arriver à ce résultat, nous avons supposé que, lorsque la densité du gaz devient

$$d + \alpha d,$$

son élasticité devient

$$e + \alpha e,$$

ce qui exige que la température de la couche comprimée ne change pas. Or, il n'en est pas ainsi dans la réalité : lorsqu'un fluide élastique est comprimé ou dilaté, sa température varie, ce qui fait varier son élasticité dans un plus grand rapport que celui de la variation de densité; de sorte que αd désignant la variation de densité, $K\alpha e$ sera la variation d'élasticité (K étant > 1 et égal au rapport de la chaleur spécifique sous pression constante à la chaleur spécifique sous volume constant du gaz qui propage le son). Ce facteur K, comme il est aisé de le reconnaître, ne trouble pas l'égalité de vitesse de transmission des sons d'intensités différentes dans un même gaz. Car, si dans un cas, la force de détente est $K\alpha e$, dans un autre, elle sera $Kn\alpha e$. Le rapport de ces forces est, comme on voit, indépendant de K, et par suite, le rapport des vitesses de transmission qui était l'unité avant l'introduction du facteur K, sera encore l'unité après l'introduction de ce facteur. Au lieu de l'équation (1), nous devrons donc poser l'équation suivante,

$$m.K\alpha e = m\alpha dx.x,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{e}{d}K}.$$

Si nous désignons actuellement par h la hauteur d'une colonne de mercure capable de faire équilibre à l'élasticité

e, et par g l'intensité de la pesanteur au lieu de l'observation, la pression exercée sur l'unité de surface par cette colonne de mercure, sera

$$h.g.13,568;$$

cette pression devant faire équilibre à e, on doit avoir

$$e = h.g.13,568,$$

et par suite

$$x = \sqrt{\frac{h}{d} g \text{ K}.13,568}.$$

Si c'est dans une masse d'air que le son se transmet, à $0°$ et sous la pression $0^{m},76$, à Paris, on aura

$$K = 1,421, \quad d = 0,001299, \quad g = 9,8089,$$

et par conséquent

$$x = \sqrt{\frac{9,8089 \times 0,76 \times 13,568 \times 1,421}{0,001299}} = 333^{m},$$

par seconde sexagésimale. A une température différente de $0°$, cette vitesse sera différente de 333^{m}, et comme, à densité égale, l'élasticité varie dans le rapport de 1 à $1 + \frac{t}{266,67}$, ou qu'à élasticité égale la densité varie dans le rapport de $\frac{t}{266,67} + 1$ à 1, en passant de 0 à $t°$, la vitesse du son dans l'air à $t°$, sera

$$V = 333^{m} \sqrt{1 + \frac{t}{266,67}}.$$

Q. **171**. Quelle sera la vitesse de propagation du son dans l'acide carbonique, à la température de $10°$, sous la pression $0^{m},76$?

Dans la formule générale $x = \sqrt{\frac{e}{d}\mathrm{K}}$,

$$\mathrm{K} = 1,337, \quad h = 0^{\mathrm{m}},76,$$

$$d = 1,52 \times 0,001299 \times \frac{267}{267+10};$$

et l'élasticité e a pour mesure

$$e = 0^{\mathrm{m}},76 \times 9,8089 \times 13,568,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{0,76 \times 9,8089 \times 13,568 \times 1,337}{1,52 \times 0,001299 \times \frac{267}{267+10}}} = 220^{\mathrm{m}},6.$$

Q. **172.** Quelle devrait être la température de l'air, pour que le son s'y propageât avec la même vitesse que dans l'hydrogène à 0°?

La formule générale $\sqrt{\frac{e}{d}\mathrm{K}}$ donnant, dans le cas où le milieu propagateur est de l'air à 0°,

$$\mathrm{V} = 333^{\mathrm{m}},$$

à la température inconnue x, cette vitesse serait

$$\mathrm{V}' = 333^{\mathrm{m}} \sqrt{1 + \frac{x}{267}};$$

comme d'ailleurs la vitesse de propagation du son dans l'hydrogène est $1269^{\mathrm{m}},5$ par seconde, on doit avoir

$$333^{\mathrm{m}}. \sqrt{\frac{267+x}{267}} = 1269^{\mathrm{m}},5,$$

d'où

$$x = 3613^{\circ} \text{ environ.}$$

La vitesse $1269^m,5$ a été obtenue en faisant, dans la formule générale,

$$K = 1,409,$$

et

$$= 0,0688 \times 0,001299,$$

ce qui donne

$$V = \sqrt{\frac{0^m,76 \times 9,8089 \times 13,568 \times 1,409}{0,0688 \times 0,001299}} = 1269^m,5.$$

Q. **173.** Quelle est la profondeur d'un puits vertical, sachant qu'une pierre qu'on y a laissé tomber a produit, en rencontrant le fond de ce puits, un bruit qui s'est fait entendre à l'observateur $5''$ après le départ de la pierre ?

(On ne tiendra pas compte de la résistance que l'air oppose à la chute, et l'on supposera la température moyenne du puits égale à $10°$.)

Soit x la profondeur cherchée : comme la vitesse du son dans l'air à $10°$ est de 337^m par seconde, pour parcourir l'espace x, le son aura dû mettre $\frac{x}{337}$ secondes; alors la pierre a donc mis $5 - \frac{x}{337}$ secondes pour atteindre le fond du puits; l'espace parcouru pendant ce temps sous l'influence de la pesanteur sera donc

$$4^m,9044\left(5 - \frac{x}{337}\right)^2,$$

espace qui doit être précisément égal à x. De là l'équation

$$4^m,9044\left(5 - \frac{x}{337}\right)^2 = x,$$

et

$$x = 102 \text{ mètres environ.}$$

Q. **174.** Quelle est la vitesse du son dans l'eau, dans un lieu où l'intensité de la pesanteur est $g = 9^m,8089$, sachant que l'eau, pour une pression égale à celle de l'atmosphère, se comprime de 0,00004965 ?

On sait que la formule de Laplace, relative à la vitesse du son dans les corps solides ou liquides, est

$$a = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon}},$$

ε étant la quantité dont s'allonge ou se raccourcit une colonne du corps ayant pour hauteur l'unité de longueur, sous l'influence d'une traction ou pression égale au poids de cette colonne.

Puisque l'eau, sous l'influence d'une pression de $0^m,76$ de mercure ou de $10^m,312$ d'eau, se contracte de... 0,00004965, sous la pression d'une colonne d'eau de 1^m seulement, sa contraction serait égale à

$$\frac{0,00004965}{10,312} = \varepsilon;$$

la substitution de cette valeur dans la formule, donne

$$a = 1430^m \text{ environ.}$$

Q. **175.** A quelle distance un observateur se trouve-t-il d'un écho qui lui a répété un son au bout de $3''$, la température de l'air étant 10° ?

Pendant les trois secondes qui séparent l'instant de la production du son de l'instant de sa répétition au même point, le son a dû parcourir deux fois la distance cherchée, une fois pour l'allée, une fois pour le retour; ce double espace, parcouru en $3''$, doit d'ailleurs être égal à

$$3 \times 337^m = 1011^m;$$

la distance cherchée est donc

$$\frac{1011^{m}}{2} = 505^{m},5.$$

Q. **176.** Un écho répète 5 syllabes séparées par un intervalle de $\frac{1}{4}$ de seconde l'une de l'autre, et il s'écoule une demi-seconde entre l'instant de la dernière syllabe prononcée et celui de la première syllabe répétée. Quelle doit être la distance de cet écho?

Il est clair qu'entre le moment de la prononciation d'une syllabe et celui de sa répétition par l'écho, il s'écoule $\left(5 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$ secondes, ou $\frac{7}{4}$ de seconde; la distance de l'écho est donc

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{337^{m}}{2} = 295^{m} \text{ environ.}$$

Mesure des sons.

177. Lorsqu'une lame élastique, libre à l'un de ses bouts, est pincée dans un étau par l'autre extrémité, le nombre des vibrations exécutées par cette lame dans un temps donné, varie en raison inverse du carré de la longueur de la partie vibrante.

Q. **178.** Une lame d'acier, pincée par une extrémité, et libre par l'autre, a exécuté 24000 vibrations dans une minute, sa longueur de vibration étant 25 centimètres. Quelle longueur devrait-on donner à la partie libre pour qu'elle exécutât 2500 vibrations par seconde?

En désignant par x la longueur cherchée, et en remarquant que dans son premier état la lame exécute par seconde,

$$\frac{24000}{60} = 400 \text{ vibrations},$$

on aura la proportion

$$400 : 2500 :: x^2 : (25)^2,$$

d'où

$$x = 10 \text{ centimètres.}$$

Q. **179.** A quel poids doit être équivalente la force qui tend une corde métallique de cuivre, homogène, de $0^m,5$ de longueur, et de $0^{mm},25$ de rayon, pour qu'elle exécute 800 vibrations par seconde?

La formule générale est

$$n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{P}{\pi d}},$$

dans laquelle n désigne le nombre de vibrations par seconde, r le rayon de la corde, l sa longueur, d la densité de la substance qui la compose, et P le poids en grammes qui tend la corde. Cette formule, en remarquant qu'ayant pris pour unité de poids le gramme, nous devons prendre pour unité de longueur le centimètre, donnera dans le cas actuel,

$$800 = \frac{1}{50 \times 0,025}\sqrt{\frac{P}{3,1416 \times 8,895}},$$

équation d'où l'on déduira

$$P = 279357 \text{ grammes environ},$$

ou

$$279^{kil},357.$$

Si l'on pouvait compter assez rigoureusement sur l'exactitude de cette formule, elle pourrait servir par réciproque à déterminer la densité de la matière qui compose la corde.

Q. **180.** Une corde tendue par un poids de 25 kilogrammes rend un certain son : quelle devrait être la force de tension pour que cette corde rendît la tierce majeure du son primitif?

Le son primitif étant représenté par 1, on sait que sa tierce majeure est représentée par $\frac{5}{4}$; en d'autres termes, n étant le nombre de vibrations correspondant au son primitif, $\frac{5}{4}n = n'$ sera le nombre de vibrations correspondant à sa tierce majeure.

Or, d'après la formule citée dans le numéro précédent,

$$n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{P}{\pi d}}, \quad n' = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{P'}{\pi d}},$$

où

$$n : n' :: \sqrt{P} : \sqrt{P'},$$

ou bien encore, dans le cas actuel,

$$1 : \frac{5}{4} : \sqrt{25} : \sqrt{P'},$$

et par conséquent

$$P' = 35^{\text{kil.}},0625.$$

Telle devrait être la force de tension de la corde.

Q. **181.** Un lame élastique libre par une extrémité et fixe par l'autre, exécute 400 vibrations par seconde; dans quel rapport devra-t-on faire varier sa longueur, pour lui faire rendre l'octave aiguë de la tierce mineure du son correspondant à la longueur primitive?

D'après le (n° 177), en désignant par l la longueur primitive de la lame, et par n le nombre de vibrations par seconde correspondant à la longueur cherchée x, on a

$$400 : n :: x^2 : l^2,$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{400 \cdot l^2}{n}};$$

et comme le nombre de vibrations correspondant à la tierce mineure du son primitif, est

$$\frac{6}{5} \times 400,$$

le nombre correspondant à l'octave cherchée sera double, ou

$$\frac{12}{5} \times 400;$$

donc

$$n = 960,$$

et par suite

$$x = l \times 0{,}6455.$$

Q. **182.** Un tuyau donnait un son de 100 vibrations par seconde, lorsqu'on y soufflait de l'air à 10°. Quelle devrait être la température de l'air introduit pour que le son rendu fût la quinte majeure du premier?

On sait que le rapport des nombres de vibrations correspondans à un son fondamental et à sa quinte majeure sont entre eux comme 1 est à $\frac{3}{2}$; d'ailleurs, ces nombres de vibrations sont entre eux comme les vitesses de propagation, lesquelles sont ici comme

$$\sqrt{1+\frac{10}{267}} \text{ est à } \sqrt{1+\frac{x}{267}};$$

en désignant par x la température cherchée, on aura donc la proportion

$$100 : 100 \times \frac{3}{2} :: \sqrt{1+\frac{10}{267}} : \sqrt{1+\frac{x}{267}},$$

d'où

$$x = 356^{\circ},5 \text{ environ}.$$

OPTIQUE.

Vitesse de la lumière, déduite de l'aberration.

183. Supposons qu'un rayon de lumière venant d'un astre S (*fig.* 25), assez éloigné pour que les rayons qui en partent puissent être regardés comme parallèles, soit reçu sur un petit écran A, dans lequel est pratiquée une très petite ouverture; supposons de plus que ce rayon, après avoir traversé cette ouverture, soit reçu à une certaine distance AB sur un écran B perpendiculaire à sa direction; nommons A' et B' les points d'incidence sur les deux écrans; tout l'appareil étant supposé en repos, la ligne $A'B'$ indiquera la direction que le rayon a réellement suivie, et dans laquelle se trouve l'astre; l'angle que fait cette direction avec une autre droite donnée de position nous donnera le lieu de l'astre par rapport à cette droite fixe. Pour plus de simplicité, nous supposerons cet angle égal à zéro, ou l'astre exactement dans la verticale. Alors le point B' où tombe le rayon lumineux sera marqué par la perpendiculaire abaissée du point A', et la direction dans laquelle nous jugerons que doit se trouver l'astre sera précisément celle de la gravité : c'est là ce qui arriverait si la terre, l'appareil et l'observateur étaient en repos.

Si nous supposons l'appareil et l'observateur emportés dans l'espace *dans une direction horizontale* A'C, B'D, avec une vitesse uniforme, la droite fixe, que nous supposerons être la direction du fil à plomb, restera immobile et correspondra toujours avec le même point de l'écran au moment où le rayon SA' traversera l'ouverture A. Quand le rayon aura traversé l'ouverture, il continuera de suivre la direction SA'B' comme auparavant, indépendamment du mouvement de l'appareil; et après un temps égal à

$$t = \frac{\text{distance } A'B'}{\text{vitesse de la lumière}},$$

il atteindra l'écran inférieur. Mais pendant ce temps, l'ouverture, les écrans et le fil à plomb, auront parcouru l'espace

$$A'a = B'b' = t \times \text{vitesse de translation}$$
$$= \frac{A'B'.\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}}.$$

A l'instant donc où ce rayon frappera l'écran inférieur, le fil à plomb ne sera plus suspendu entre A' et B', mais entre a et b; et puisque a est alors l'*ouverture réelle, et* B' *le véritable point d'incidence de la lumière sur l'écran,* l'observateur, qui juge uniquement d'après ces deux points, sera naturellement porté à croire que le rayon a dévié de la verticale pour se rapprocher de la direction du mouvement de la terre, en faisant avec le fil à plomb un angle α dont la tangente est

$$tg\,\alpha = \frac{A'a}{A'B'} = \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}}.$$

Il résulte des observations astronomiques, que

$$tg\ \alpha = 0,00096049,$$

et que la vitesse de la terre est à peu près $6^{\text{lieues}},72345$ par seconde environ ; d'où l'on déduit

$$\text{vitesse de la lumière} = \frac{6,72345}{0,00096049} = 70000 \text{ lieues environ.}$$

PHOTOMÉTRIE.

L'intensité de la lumière reçue obliquement par une surface, est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle au sinus de l'angle que font les rayons de lumière avec la surface qu'ils éclairent.

L'intensité de la lumière provenant d'un point éclairant est en raison inverse du carré de la distance.

Q. **184.** Une petite surface blanche A (*fig.* 26), est posée horizontalement sur une table, et éclairée par une chandelle dont la distance CA, estimée par la projection horizontale, est égale à a. A quelle hauteur CB doit se trouver la flamme pour que l'éclairement de la surface A soit plus grand que dans toute autre position ?

Soit x la hauteur cherchée, et y la distance directe BA de la chandelle à la surface éclairée, on a

$$x = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

L'éclairement étant, toutes circonstances égales d'ailleurs, proportionnel au sinus de l'angle BAC, et en raison inverse du carré de la distance y, sera proportionnel à

$$\frac{\sin \mathrm{BAC}}{y^2}, \quad \text{ou à} \quad \frac{x}{y^3},$$

puisque

$$\sin \mathrm{BAC} = \frac{x}{y}.$$

Il faut donc déterminer la valeur de x, pour laquelle

$$\frac{x}{y^3} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y^3}$$

sera un maximum. Or, la valeur de y, qui rendra maxima cette fonction,

$$\frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y^3},$$

rendra aussi maxima la fonction

$$\frac{y^2 - a^2}{y^6} = \frac{1}{y^4} - \frac{a^2}{y^6} = y^{-4} - a^2 y^{-6}.$$

Or, on sait que lorsqu'une fonction d'une variable atteint sa valeur maxima, sa dérivée du 1er ordre, par rapport à cette variable, doit être égale à 0 ; nous devons donc avoir

$$-4y^{-5} - a^2(-6y^{-7}) = 0,$$

ou

$$\frac{-4}{y^5} + \frac{6a^2}{y^7} = 0;$$

équation qui devient, en multipliant par $\frac{y^7}{2}$ les deux membres,

$$2y^2 - 3a^2 = 0,$$

d'où

$$y = a\sqrt{\frac{3}{2}},$$

et par suite

$$x = \sqrt{y^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots\ a.$$

Si l'on voulait résoudre la question inverse, c'est-à-dire, connaissant la hauteur de la flamme de la bougie au-dessus d'une table horizontale, déterminer à quelle distance de la projection de la flamme on devrait placer un objet pour qu'il y reçût le maximum de clarté; la relation

$$x = 0,707 . a,$$

indique que l'objet devrait se trouver sur un des points de la circonférence décrite sur la table, de la projection horizontale de la flamme comme centre, avec un rayon a dont la grandeur est

$$a = \frac{x}{0,707}.$$

Q. 185. En admettant que la lumière n'éprouve aucune diminution en traversant l'air, démontrer qu'*un objet paraît également éclatant à toutes les distances,* c'est-à-dire que l'unité de surface de cet objet envoie toujours à l'œil la même quantité de lumière.

L'éclat apparent d'un objet est égal à la lumière apparente qu'il envoie divisé par l'aire de l'image qui se peint sur la rétine; mais cette aire est proportionnelle à la grandeur apparente de l'objet, c'est-à-dire à sa surface réelle A divisée par le carré de sa distance D, ou à $\frac{A}{D^2}$. De plus, la lumière apparente est proportionnelle à $\frac{A}{D^2}$ I, en désignant par I l'intensité réelle. L'intensité apparente est proportionnelle à

$$\frac{A}{D^2} I : \frac{A}{D^2},$$

ou simplement à I, et ne dépendent ni de A ni de D. Elle est donc la même à toutes les distances et reste toujours proportionnelle à l'intensité réelle.

Q. **136.** Une bougie placée à 45^{cm} de distance d'un petit écran de papier huilé, l'éclaire avec une certaine intensité; un corps lumineux, pour éclairer avec la même intensité un autre écran parfaitement semblable au précédent, doit en être éloigné de $2^m,25$. Quel est le rapport de l'intensité de cette source de lumière à celle de la bougie?

Il est clair que plus l'intensité sera grande, plus la source de lumière devra être éloignée, pour produire un éclairement donné; et comme d'ailleurs l'intensité relative de chaque corps lumineux est en raison inverse du carré de sa distance au point éclairé, en désignant par I' l'intensité absolue de la lumière de la bougie, par I'' celle de l'autre corps lumineux, et par I l'intensité relative commune de la lumière reçue par les deux petits écrans, nous aurons

$$I = \frac{I'}{45^2}, \quad I = \frac{I''}{225^2},$$

d'où

$$\frac{I''}{I'} = \frac{225^2}{45^2} = 25,$$

c'est-à-dire que le corps lumineux donné produit un éclairement égal à celui de 25 bougies semblables à celle qui a servi à l'expérience.

Si les lumières étaient diversement colorées, ce procédé serait difficilement applicable, et devrait éprouver quelques modifications.

Q. **137.** Deux corps lumineux d'intensités différentes éclairent, dans une chambre obscure, une même surface blanche translucide : on interpose entre eux et la surface un corps opaque qui projette sur cette surface deux ombres correspondantes aux deux lumières, de telle sorte que l'ombre produite par l'un des corps lumineux soit éclairée par l'autre corps lumineux.

Lorsque les deux ombres paraissent d'égale intensité, et que par conséquent les rayons venant de chacune des sources de lumière éclairent l'ombre de l'autre avec la même intensité, leurs distances sont respectivement 72^c et $2^m,16$. Quel est le rapport de leurs intensités?

Puisque les deux ombres paraissent semblables, on en peut conclure que les intensités relatives

$$\frac{I'}{72^2}, \quad \frac{I''}{216^2}$$

des deux lumières aux distances 72^{cm} et 216^{cm}, sont égales entre elles, d'où

$$\frac{I'}{72^2} = \frac{I''}{216^2},$$

ou bien

$$\frac{I''}{I'} = \frac{216^2}{72^2} = 9,$$

la lumière de la deuxième source a donc une intensité 9 fois plus grande que celle de la première.

CATOPTRIQUE.

Lois de la réflexion de la lumière.

1°. Le rayon incident, la normale à la surface du point d'incidence et le rayon réfléchi sont dans un même plan, qu'on appelle indifféremment plan d'incidence ou plan de réflexion.

2°. Le rayon incident et le rayon réfléchi font avec la normale, de part et d'autre de cette ligne, des angles égaux; ce qu'on énonce quelquefois de la manière suivante : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

188. Lorsqu'un objet ab est placé devant un miroir plan, son image, vue par réflexion, est située symétriquement derrière la surface réfléchissante et la même distance que l'objet.

Supposons en effet l'œil placé en o (*fig.* 27), et recevant par réflexion les rayons hh', kk', partis du point b, il les rapportera naturellement au point b' vers lequel concourent ces rayons réfléchis, suffisamment prolongés, de sorte qu'il jugera ces rayons partis du point b' qui sera alors le lieu de l'image du point b. Or, il résulte évidemment de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion que l'angle gfb' est égal à l'angle gfb, et que par suite le prolongement de la ligne bg menée du point b perpendiculairement sur la surface mn du miroir, ira passer par le point b' qu'il rencontrera à une distance

$$gb' = gb.$$

Le même raisonnement et les mêmes constructions étant applicables à tous les points de l'objet et à leurs images respectives, il en résulte que les points de l'objet ab, ont leurs images respectivement placées de l'autre côté du miroir, sur les perpendiculaires abaissées de ces points, et de telle sorte qu'un point quelconque et son image sont toujours placés à la même distance de la surface du miroir.

189. Un objet horizontal, placé devant un miroir incliné à 45° sur l'horizon, paraîtra vertical.

Il est clair, d'après ce qui précède, que pour trouver la position de l'image de l'objet ab (*fig.* 28), il suffira d'abaisser de ses différens points a, b, des perpendiculaires ap, bq, et de les prolonger des quantités pa', qb', égales respectivement à elles-mêmes; l'image serait ainsi représentée par $a'b'$; d'ailleurs, les triangles boq et $b'oq$ étant égaux comme rectangles et ayant les deux côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun, l'angle $b'oq$ sera aussi égal à 45°. Par conséquent, l'angle total $b'ob$ sera droit, et $b'a'$ sera verticale. $a'b'$ étant l'objet, ab serait l'image; et si l'objet $a'b'$ s'élevait perpendiculairement sans changer de direction, son image ab paraîtrait ramper horizontalement et réciproquement.

Un objet qui $\left\{\begin{matrix}\text{descendrait}\\ \text{monterait}\end{matrix}\right\}$ sur un autre plan incliné à 45° paraîtrait $\left\{\begin{matrix}\text{descendre}\\ \text{monter}\end{matrix}\right\}$ verticalement si ce plan était parallèle à celui du miroir.

190. Pour apercevoir en entier, sur un miroir plan CD (*fig.* 29), un objet placé parallèlement à ce miroir, lorsque l'œil est sur cet objet, il faut et il suffit que la longueur et la largeur du miroir soient la moitié de la longueur et de la largeur de l'objet; d'où il suit que la partie réfléchissante efficace du miroir est à la surface rayonnante comme 1 est à 4.

En effet, les rayons OG, OH, dirigés de l'œil vers les extrémités de l'image GH, donnent lieu, avec le miroir et l'image, à deux triangles semblables GOH, et C'OD', dans lesquels on a

$$\frac{GH}{C'D'} = \frac{KO}{OM};$$

et comme

$$KO = 2OM,$$

il s'ensuit que

$$GH = 2C'D' = AB;$$

ce qui se dit de la longueur peut aussi se dire de la largeur; donc, etc.

Si donc, en une certaine position, nous voyons dans un miroir un objet entier, nous le verrons de même à toute autre distance pourvu que l'œil soit toujours à la même distance que lui, et que chaque point de l'objet se meuve perpendiculairement au plan du miroir. Mais si, l'œil s'éloignant du miroir, l'objet reste toujours à la même place, la partie efficace de la surface du miroir doit être plus grande que le quart de la surface de l'objet pour que celui-ci soit vu en entier. Au contraire, si nous approchons du miroir, l'objet restant toujours à la même place, la partie réfléchissante efficace du miroir sera moindre que le quart de la surface de l'objet.

C'est donc à tort qu'on changerait de position devant une glace, pour voir une plus grande partie du corps, en restant toujours parallèle au miroir, puisque l'œil est toujours à la même distance que la personne.

Q. 191. Deux points lumineux A et B (*fig.* 30), situés sur un même plan horizontal, distans l'un de l'autre de 42 centimètres, sont placés respectivement devant deux miroirs plans verticaux inclinés l'un sur l'autre *mn*, *pq*, à des distances égales à 20^{cm} et 30^{cm}. Quelle devra être l'inclinaison de ces miroirs pour que les images des points A et B se superposent?

Soient x l'angle cherché, et S le point où se confondent les deux images; l'angle x, qui n'est autre chose que 360° moins l'angle des traces horizontales des deux plans, sera évidemment égal à

$$360^\circ - (180 - \mathrm{ASB}),$$

ou à

$$180^\circ + \mathrm{ASB}.$$

Mais dans le triangle BAS, on a

$$\cos \mathrm{ASB} = \frac{\overline{\mathrm{AS}}^2 + \overline{\mathrm{BS}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2}{2.\mathrm{AS}.\mathrm{AB}},$$

ce qui donne, par des transformations connues,

$$\sin \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ASB} = \sqrt{\frac{(\mathrm{AB} + \mathrm{AS} - \mathrm{BS})(\mathrm{AB} - \mathrm{AS} + \mathrm{BS})}{4.\mathrm{AS}.\mathrm{AB}}};$$

ou bien, si l'on se rappelle que $\mathrm{AB} = 42^{cm}$,

$$\mathrm{AS} = 2.20^{cm} = 40^{cm},$$

et

$$\mathrm{BS} = 2.30^{cm} = 60^{cm};$$

il en résulte

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{ASB} = \sqrt{\frac{22.62}{9600}}\,;$$

d'où

$$\tfrac{1}{2} \text{ASB} = 22^\circ \ldots\ 8' \ldots\ 33'',$$

ou

$$x = 180^\circ + \text{ASB} = 224^\circ \ldots\ 17' \ldots\ 6''.$$

On pourrait aussi, par réciproque, connaissant l'angle x, déterminer l'écartement AB des deux points lumineux, pour que, restant respectivement à des distances AI', BI des deux miroirs, leurs images pussent se superposer. Il suffirait pour cela de résoudre l'équation

$$\overline{\text{AB}}^2 = \overline{4\text{BI}}^2 + \overline{4\text{AI}'}^2 - 8\text{AI}'.\text{BI}.\cos(x - 180^\circ),$$

par les procédés ordinaires de la Trigonométrie, et la valeur de AB ainsi obtenue donnerait cette distance des deux points.

Q. **192.** Ayant placé la flamme d'une bougie sur l'axe d'un miroir sphérique concave, à une distance de $1^{\text{m}},54$, l'image de cette flamme s'est formée à $0^{\text{m}},45$ du miroir : quel est le rayon de ce miroir ?

La relation qui existe, dans cette sorte de miroirs, entre les distances focales conjuguées et la distance focale principale est, comme on sait,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

f désignant la distance focale principale, p la distance du point lumineux au miroir, et p' la distance de l'image à ce même miroir, et f étant d'ailleurs la moitié du rayon x. Par la substitution des valeurs connues de p et p', cette formule deviendra

$$\frac{1}{f} \text{ ou } \frac{2}{x} = \frac{1}{1,54} + \frac{1}{0,45},$$

d'où

$$x = 0^{m},686 \text{ environ.}$$

Q. **193.** Sur l'axe d'un miroir sphérique concave de 1^{m} de rayon ((*fig.* 31), on a placé un objet de 9 centimètres de hauteur, à une distance de 2^{m} de ce miroir, on demande :

1°. La distance de l'image au miroir ;

2°. La hauteur de cette image ;

3°. Si l'image est droite ou renversée.

Pour déterminer la distance de l'image au miroir, il suffira de substituer, dans la formule

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'},$$

les valeurs

$$f = 0^{m},5 \quad \text{et} \quad p = 2^{m},$$

ce qui conduira à l'expression

$$\frac{1}{0^{m},5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p'},$$

d'où

$$p' = 0^{m},667.$$

Pour trouver la hauteur de l'image, par le point p_1 le plus élevé de l'objet Pp_1 menons l'axe p_1C ; l'image du point p_1 se trouvera sur cet axe en un certain point p'_1 dont la position se détermine de la même manière que celle du point P'. D'ailleurs, les triangles semblables PCp_1, $P'Cp'_1$

donnent la proportion

$$\mathrm{PC} : \mathrm{P'C} :: \mathrm{P}p_1 : \mathrm{P'}p'_1,$$

ou, en substituant les valeurs numériques,

$$0^{m},09 : x :: (2 - 1) : 1 - 0,667,$$

et enfin

$$x = 0^{m},09 \times \frac{1}{3} = 0^{m},03.$$

L'image n'a donc que le tiers de la hauteur de l'objet.

Quant à la position de cette image, la construction géométrique fait voir d'une manière évidente que dans le cas actuel elle est renversée.

Si l'on se proposait en outre de déterminer les changemens de distance, de grandeur et de position de l'image, si l'objet s'approchait de $1^{m},3$ plus près du miroir, des considérations tout-à-fait semblables aux précédentes donneront, pour la nouvelle valeur de p',

$$p' = 1^{m},75,$$

c'est-à-dire que l'image est alors plus éloignée du miroir que l'objet lui-même. La nouvelle grandeur de l'image sera donnée par la proportion

$$0^{m},091 : x :: 0,3 : 0,75,$$

d'où

$$x = 0^{m},225.$$

L'image est donc maintenant plus grande que l'objet dans le rapport de $0^{m},225$ à $0,09$. Enfin, il est aisé de voir que cette image sera droite, c'est-à-dire tournée de la même manière que le corps qu'elle représente.

Q. 194. Trouver la relation qui existe entre les foyers conjugués par réflexion sur un miroir convexe.

Soient (*fig.* 32) P et P′ le point lumineux et son image : posons, pour abréger,

$$DP = p,\ DP' = p',\ DC = r,\ ACP = C,\ AP'D = P',\ APD = P,$$

et

$$PAR = RAR' = I,$$

l'angle d'incidence ou celui de réflexion. On a, entre les angles P, P′, I et C, les relations

$$P' = C + I,$$
$$P = I - C,$$

d'où

$$P' - P = 2C \quad (1).$$

Si, comme cela doit être, nous supposons l'arc AD très petit, on peut lui substituer sa tangente et réciproquement; ce qui conduit à

$$P' = \frac{AD}{p'},\quad P = \frac{AD}{p},\quad C = \frac{AD}{r},$$

substituant ces valeurs dans l'équation (1), divisant les deux membres par AD, et remarquant que r doit être pris négativement; il vient

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = -\frac{2}{r} \quad (2),$$

ou

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{r}.$$

Si nous supposons que les rayons incidens soient parallèles à l'axe, ou que le point lumineux soit à une distance infinie, auquel cas $p = \infty$, et si l'on désigne par f la distance correspondante p', à laquelle on donne le nom de *distance focale principale*, on trouvera alors

$$-\frac{1}{f} = \frac{2}{r};$$

de sorte que la formule (2) peut s'écrire

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Q. **195.** Le rayon d'un miroir convexe est $1^m,5$ et un objet en est à 1^m (*fig.* 33). Déterminer : 1° à quelle distance en est son image.

2°. Quel sera le changement de distance, si l'objet s'éloigne de 3 mètres.

3°. Quel est le changement linéaire de grandeur à l'image, pour le déplacement du corps.

La distance de l'image sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f},$$

qui devient dans le cas actuel

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{2}{1,5},$$

d'où

$$x = 0^m 429.$$

Si l'objet s'éloigne de 3 mètres, la nouvelle distance de son image sera donnée par

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{4} = \frac{2}{1,5},$$

d'où

$$x = 0^{m},632.$$

Dans la première position, la grandeur de l'objet sera à celle de l'image, à cause de la similitude des triangles PCq, P$'Cq'$, dans le rapport de CP à CP$'$ ou de

$$1,5 + 1 \text{ à } 1,5 - 0,429,$$

ou de

$$2,5 \text{ à } 1,071 = \frac{2,5}{1,071}.$$

Dans la seconde position le rapport de ces grandeurs est celui de

$$4 + 1,5 \text{ à } 1,5 - 0,632,$$

ou de

$$5,5 \text{ à } 0,868 = \frac{5,5}{0,868}.$$

La variation de grandeur linéaire de l'image aura donc lieu dans le rapport des fractions précédentes qui servent de mesure au grandissement de l'objet par l'effet du miroir, c'est-à-dire, dans le rapport de

$$\frac{2,5}{1,071} \text{ à } \frac{5,5}{0,868}.$$

Q. 196. Déterminer, sur un plan horizontal, le lieu des points d'où une ligne droite horizontale AB (*fig.* 34) sera vue avec la même grandeur apparente.

On sait que la grandeur apparente d'un objet est sensiblement proportionnelle à l'*angle visuel* sous lequel on l'aperçoit, c'est-à-dire, proportionnelle à l'angle que font entre eux les rayons qui, partis des extrémités de cet objet, vont concourir dans l'œil. Or, il est évident que si, sur AB comme corde, l'on décrit un arc quelconque, l'œil placé en un point de cet arc o, o', etc., verra constamment la ligne AB sous le même angle, quelle que soit d'ailleurs sa position sur cet arc. Par conséquent cette ligne lui apparaîtra toujours avec la même grandeur apparente.

Q. **197.** Un objet est situé horizontalement à une certaine distance d'un édifice vertical. A quelle hauteur faudra-t-il s'élever sur cet édifice pour que l'objet ait le maximum de grandeur apparente suivant une dimension donnée ?

Soit AB (*fig.* 35) une des dimensions de cet objet, et VV′ la verticale suivant laquelle s'élève l'observateur. Si sur AB comme corde, l'on décrit une circonférence tangente à VV′, il est facile de reconnaître que l'angle AOB dont le sommet est au point de contact, a une valeur plus grande que tout autre angle AO′B ayant son sommet sur la verticale VV′, hors de la circonférence ; c'est donc lorsque l'œil sera placé en O que AB aura le maximum de grandeur apparente. Un raisonnement analogue pourrait être appliqué à toute autre dimension linéaire de l'objet, etc...

Q. **198.** Quelle est la hauteur BH (*fig.* 36) d'une tour inaccessible, sachant qu'on a fait les deux observations suivantes :

1°. Ayant placé en m, sur le plan horizontal de la base de cet édifice, un très petit miroir horizontal, un observateur placé en O, à $1^m,5$ au-dessus du plan du miroir, a dû s'éloigner à 2 mètres de ce miroir pour voir par réflexion le sommet H de la tour.

2°. Ayant ensuite placé ce même miroir en m', 15 mètres plus loin, sur la trace horizontale du plan mHB, l'observateur, toujours à la même distance $1^m,5$ au-dessus du plan du miroir m', a été obligé de se mettre à une distance dont la projection horizontale est

$$d'm' = 3^m.$$

Soient O et O' les deux positions de l'observateur; soient aussi x la hauteur cherchée BH et $y = m$B la distance inconnue du miroir au pied de l'axe de l'édifice, à la première station; les triangles semblables Odm, mHB donneront lieu à la proportion

$$Od : HB :: dm : mB,$$

ou, en substituant les valeurs de Od et dm,

$$1,5 : x :: 2 : y.$$

De même, les triangles semblables O$'d'm'$ et mHB donnent la proportion

$$O'd' : HB :: d'm' : m'B,$$

ou, comme

$$m'B = (y + 15)^m,$$
$$1,5 : x :: 3 : y + 15,$$

d'où

$$x = 22^m,5 \quad \text{et} \quad y = 30^m.$$

On pourrait réciproquement, connaissant la grandeur d'un objet, en déterminer la distance par une seule opération de ce genre, ou mieux par deux opérations dont l'une servirait à vérifier l'exactitude de l'autre.

Q. 199. Étant donné un miroir prismatique concave DCBA (*fig.* 37), déterminer géométriquement la marche des rayons qui, partis d'un objet I donné de position, arrivent à l'œil placé aussi dans une position donnée, après 1, 2, 3, etc., réflexions.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'œil O et l'objet I soient situés dans un plan perpendiculaire aux arêtes du prisme, de sorte que les rayons qui arrivent à l'œil ne sortent pas de ce même plan, et que la partie utile du miroir se réduit aux traces de ce plan sur les faces du prisme.

Il résulte évidemment du n° 188 que l'*image d'un objet se comporte comme un objet réel occupant la même place*; en sorte que toutes les fois qu'un objet mis à la place de cette image pourra produire une image par réflexion, il en sera de même de l'image dont il est supposé ocuper la place. Si nous appliquons ces considérations à la question actuelle, l'image I′ produite par le miroir CD, provient évidemment du rayon Ii qui s'est réfléchi en faisant l'angle

$$\mathrm{O}i\mathrm{C} = \mathrm{I}i\mathrm{D}.$$

Cette image I′, d'après ce qui vient d'être dit, se trouvant placée devant le miroir BCC′, formera de l'autre côté en I″, à une distance

$$\mathrm{C'I''} = \mathrm{I'C'},$$

une nouvelle image I″. Et si nous cherchons par la construction ordinaire le point de départ i' du rayon efficace qui fait voir à l'œil cette image en I″, nous trouvons que ce rayon, qui devrait être envoyé par l'image I′, part en m' de la surface du miroir CD; mais ce rayon, ayant dû être envoyé par l'objet I a donc parcouru le chemin I$m'i'$O pour arriver à l'œil. Il est facile de reconnaître, en effet, entre les angles d'incidence et de réflexion successifs, les égalités

$$\mathrm{I}m'\mathrm{D} = i'm'\mathrm{C},$$

et

$$m'i'\mathrm{C} = \mathrm{O}i'\mathrm{B}.$$

Enfin l'image I″, placée devant le miroir ABB′, formera de même en I‴ une autre image, à une distance

$$\mathrm{B'I'''} = \mathrm{B'I''};$$

le rayon lumineux OI‴ qui fera voir cette image à l'œil partira donc réellement du point p, où il aurait dû être envoyé par l'image-objet I″, suivant la direction I″p qui rencontre en n le miroir BC ; mais comme réellement le rayon np ne vient pas de I″, et qu'il a dû se réfléchir en n, en faisant un angle

$$pn\mathrm{B} = \mathrm{C}mn,$$

il s'ensuit qu'il a dû venir suivant la direction mn, comme s'il eût été envoyé de I′ ; il est donc parti du point m de la surface DC ; mais étant nécessairement parti de I, il a donc réellement parcouru le chemin ImnpO pour arriver à l'œil après 3 réflexions. On peut d'ailleurs aussi reconnaître sans peine les égalités d'angles

$$\mathrm{I}m\mathrm{D} = \mathrm{C}mn, \quad mn\mathrm{C} = pn\mathrm{B},$$

et

$$np\mathrm{B} = \mathrm{O}p\mathrm{A}.$$

Il serait facile d'étendre ces raisonnemens et ces constructions au cas d'un plus grand nombre de réflexions.

Q. **200.** Étant donnés deux miroirs plans et leur inclinaison mutuelle, déterminer le nombre et la position des images d'un objet situé dans l'intérieur de l'angle qu'ils comprennent entre eux.

Soit ACB (*fig.* 38) l'angle donné des miroirs, angle que, pour fixer les idées, nous supposerons égal à 72°, c'est-à-dire au 5ᵉ de 4 angles droits. Admettons encore, pour simplifier, que l'objet soit un point lumineux o situé sur la bissectrice de cet angle.

Représentons les 4 autres angles ACA′, A′CA‴, A‴CA″ et A″CB, semblables à ACB contenus dans 4 angles droits: en vertu des principes exposés dans le n° 188, nous aurons en o' sur la bissectrice de l'angle ACA′ et en o'' sur la bissectrice de l'angle BCA″, deux images de l'objet o. Mais l'image o' située en avant du miroir BCB_1 donnera une autre image o''' qui sera également située sur la bissectrice de l'angle A″CA‴, à une distance $o'q'$ égale à $q'o'''$ de ce miroir. De même l'image o'', située en avant du miroir ACA_1, donnera une image o^{IV} à une distance

$$qo^{\text{IV}} = o''q$$

de ce miroir, et qui sera aussi sur la bissectrice de l'angle A′CA‴. Il est clair actuellement que l'image o^{IV} placée derrière le miroir ACA_1, ne peut plus former d'image avec ce miroir, et qu'il en est de même de o''' par rapport au miroir BCB_1. Et comme, par l'inspection de la figure, il est aisé de reconnaître l'impossibilité de la formation d'autres images que celles que nous avons déterminées, il s'ensuit que dans le cas actuel il n'y en aura que quatre, c'est-à-dire, une de moins que le nombre de fois que l'angle des miroirs est contenu dans quatre angles droits. En donnant à l'œil une position convenable dans le plan normal aux deux miroirs qui passent par l'objet, il ne sera pas difficile, par des constructions et des raisonnemens semblables à ceux qui ont été exposés dans la question précédente, d'assigner la marche des rayons lumineux qui font voir à l'œil ces quatre images.

En généralisant les considérations précédentes, on reconnaîtra *que si l'angle des deux miroirs est contenu un nombre entier* n *de fois dans quatre angles droits, et l'objet sur la bissectrice de l'angle, il peut se former* (n — 1) *images* qui déterminent, avec l'objet lui-même, les sommets d'un polygone régulier de n côtés. Ces sommets sont placés symmétriquement par rapport à chacun des miroirs.

Ces dernières remarques permettent d'assigner assez simplement la position des images. En effet, puisque l'objet est l'un des sommets du polygone régulier dont les sommets contiennent toutes les images, si, du point C comme centre, avec un rayon égal à la distance OC, on décrit une circonférence, elle contiendra toutes ces images; et pour les déterminer chacune en particulier, il suffira d'inscrire le polygone régulier dans cette circonférence en partant du point O comme sommet. Cette construction s'effectuera aisément d'après cette remarque, que les deux côtés du polygone qui se coupent au point O sont perpendiculaires aux côtés CA, CB de l'angle donné. En désignant par a le nombre de degrés qui exprime la mesure de l'angle, et par m le nombre des images, on aura toujours, si l'objet est sur la bissectrice de l'angle, la relation

$$m = \frac{360 - a}{a}.$$

La relation précitée, relative au nombre des images, se vérifie dans deux cas extrêmes :

1°. Lorsque les deux miroirs font un angle nul ou sont parallèles, il y a un nombre infini d'images ;

2°. Lorsque les deux miroirs font un angle de 180°, ou se confondent en un seul, il n'y a qu'une seule image.

Supposons maintenant que, l'angle donné étant toujours contenu un nombre entier de fois dans quatre angles droits, l'objet O ne soit plus sur la bissectrice de l'angle, mais situé d'une manière quelconque dans cet angle. Prenons d'abord pour exemple le cas où les miroirs font entre eux un angle de 120°, c'est-à-dire un angle contenu trois fois dans quatre angles droits.

Soit ABC (*fig.* 39) une section faite sur les deux miroirs par un plan normal commun passant par l'objet O. On reconnaîtra d'abord sans peine que, tant que l'angle ABO et l'angle OBC sont égaux à ABC′ ou à 60°, il n'y a que deux images possibles O′ et O″, correspondant chacune à l'un des miroirs ; cela tient à ce qu'alors les images O′ et O″ étant situées chacune derrière les deux miroirs, ne peuvent plus donner d'image ni sur l'un ni sur l'autre.

Lorsque l'angle ABO est moindre que 60°, il doit y avoir trois images en O′, O″, O‴. Mais, pour apercevoir ces trois images, il faut que l'œil soit placé en S, de telle manière que le rayon lumineux qui semble parti de l'image O‴ rencontre le miroir BC en un certain point k, attendu que cette image est le résultat d'une seconde réflexion sur ce miroir BC. Cette condition étant remplie, on constatera facilement, en opérant comme dans le n° 199, que les rayons efficaces qui produiront les images O′, O″, O‴, décriront respectivement les lignes brisées OfS, OlS, OgkS, et qu'en chacun des points f, g, k, l, a lieu l'égalité des angles d'incidence et de réflexion.

Ainsi, dans le cas que nous considérons, on peut voir *autant d'images que l'angle est contenu de fois dans quatre angles droits*. Et généralement, si l'on cherche le nombre des images produites par deux miroirs plans formant un angle

$$a = \frac{360^\circ}{n},$$

lorsque l'objet est situé hors de la bissectrice, on trouvera que :

1°. *Si* n *est pair, le nombre des images sera*

$$(n - 1),$$

ou

$$m = \frac{360 - a}{a}.$$

2°. *Si* n *est impair, le nombre des images pourra être égal à* n *et sera donné par la formule*

$$m = \frac{360^\circ}{a}.$$

Nous nous bornerons à le faire voir pour le cas de

$$a = 90^\circ, 72^\circ, 60^\circ \text{ et } 40^\circ,$$

angles auxquels correspondent

$$n = 4, 5, 6 \text{ et } 9.$$

(*V.* les *fig.* 40, 41, 42 et 43.) Les images sont, dans la première hypothèse, au nombre de trois; dans la seconde et la troisième, au nombre de cinq, et dans la quatrième au nombre de 9, c'est-à-dire *toujours en nombre impair*.

Il faut chercher la raison de cette dernière circonstance dans la symmétrie nécessaire, par rapport à chacun des miroirs, du polygone formé par les images. Cette symmétric exige évidemment un nombre pair de sommets, en y comprenant l'objet ou un nombre impair d'images.

Lorsque le point O est sur la bissectrice de l'angle, le polygone est symmétrique aussi par rapport à cette ligne, condition qui peut être remplie sans que le polygone ait un nombre pair de côtés; aussi, dans ce cas, le nombre des images peut être pair ou impair suivant les circonstances.

Miroirs coniques.

Q. **201.** Quelle forme et quelle position doit-on donner aux différentes parties d'une figure tracée sur un plan, pour qu'un œil, placé sur l'axe et à une hauteur donnée au-dessus d'un miroir conique droit à base circulaire, voie par réflexion cette figure avec sa forme naturelle?

Autour de la figure donnée, décrivez la circonférence ABCD (*fig.* 14), de grandeur arbitraire, divisez-la en un nombre quelconque de parties égales, et menez par les points de division autant de rayons. Ensuite, ayant divisé l'un de ces rayons en un certain nombre de parties égales, décrivez par les points de division autant de circonférences concentriques à la première; la figure proposée se trouvera ainsi partagée en petites parties a, b, c, d, e, f, g, h..., qu'il s'agit de grouper convenablement autour du miroir conique O.FGHI (*fig.* 45), et sur le plan de sa base. A cet effet, construisez un triangle rectangle KLM (*fig.* 46), ayant pour base KL égale au rayon OG de la base du cône, et pour hauteur KM égale à la hauteur de ce même cône; prolongez cette hauteur KM jusqu'en N, de manière que la partie MN soit égale à la distance de l'œil au sommet du cône, ou que la ligne entière KN soit égale à la hauteur de l'œil au-dessus du plan de la base du miroir. Ensuite, après avoir divisé la base KL en autant de parties égales qu'on en a supposé dans le rayon AE du prototype, joignez par des droites le point N aux points de division P, Q, R... Ces droites rencontrent l'hypoténuse ML qui représente l'arète du cône, aux points S, T, V... Si, au point V, vous faites l'angle LVR′ égal à l'angle LVR; au point T, l'angle LTQ′ = LTQ; au point S, l'angle LSP′ = LSP, et au point M, l'angle LMK′ = LMK; les points R′, Q′, P′, K′, après s'être réfléchis en V, T, S, M, seront vus en R, Q, P, K; de sorte que les plus voisins du centre de la base du cône paraîtront les plus éloignés, et réciproquement.

Cela fait, si du point O, comme centre, et avec des rayons respectivement égaux à KR′, KQ′, KP′, KK′, on décrit des circonférences qui représentent en ordre inverse celles du prototype; qu'on divise la plus grande en autant de parties égales que la circonférence ABCD, et qu'on mène des rayons aux points de division, on déterminera ainsi autant de petits espaces que dans le prototype. C'est dans ces petits espaces a', b', c', d', e', f', g', h'..., qu'il faut représenter les parties de figure contenues dans les espaces correspondans a, b, c, d, e, f, g, h..., et les tourner de telle sorte que les points de a, b, c..., les plus voisins du centre E, soient ceux de a', b', c'..., les plus éloignés du centre O. De cette manière, l'image totale, vue par réflexion, paraîtra occuper la base du miroir. La déformation sera d'autant plus bizarre que ce qui, dans la figure régulière, est contenu dans les secteurs *a*, *e*,... est renfermé, dans la déformation en a', e',... dans une portion de couronne circulaire.

Il est inutile d'ajouter que l'image réfléchie sera d'autant plus conforme au prototype, que les subdivisions seront en plus grand nombre.

Miroirs pyramidaux.

Q. 202. Quelle doit être, autour d'un miroir pyramidal, la distribution des diverses parties d'une figure donnée, pour que l'œil, placé à une certaine distance au-dessus du sommet, voie cette figure avec sa forme naturelle?

Supposons, pour fixer les idées, que la base du miroir soit un carré ABCD (*fig.* 47), et les faces des triangles isoscèles égaux. Il est évident que ce miroir ne peut réfléchir vers l'œil placé sur son axe, et au-dessus du sommet, que les images de triangles isoscèles tels que BEC, CED, OGA, AHB, situés dans le plan qui environne sa base; et qu'aucun rayon lumineux provenant de l'espace intermédiaire ne peut arriver à l'œil. D'ailleurs, ces quatre triangles occupant par réflexion, toute la surface du miroir, leurs images doivent paraître remplir tout le carré qui lui sert de base.

Il faut donc, dans le cas que nous avons choisi, dessiner la figure à déformer dans un carré ABCD (*fig.* 48) égal à la base du miroir pyramidal. Ensuite, menez par le centre C' de ce carré les diagonales $DC'B$, $AC'C$, et les perpendiculaires $C'L$, $C'M$, $C'N$, $C'P$, aux côtés du carré. Si, après avoir divisé en un certain nombre de parties égales, l'une des diagonales, $C'B$ par exemple, on construit par ces points de divisions d'autres carrés concentriques au premier, la figure donnée sera ainsi divisée en petites parties, les unes triangulaires, les autres trapézoïdales.

Maintenant si sur $XY = C'L$ comme base (*fig.* 49), on construit un triangle rectangle ayant pour hauteur celle de la pyramide; qu'on divise la base en autant de parties égales que $C'B$ ou $C'L$, et qu'après avoir pris XO égale à la distance de l'œil au-dessus de la base du miroir, on mène par les points de division les droites Oa, Ob...; enfin, si aux points V, T, Z, on fait les angles

$$YVb' = YVb,\ YTa' = YTa,\ YZX' = YZX,$$

on déterminera ainsi les distances Yb', $b'a'$, $a'X$, qu'il faut porter consécutivement, à partir du point L (*fig.* 47) sur le prolongement de IL, pour représenter les points α, 6, c'. Soient α', $6'$, E, les points ainsi rapportés; si l'on mène par ces points des parallèles à la base BC,.... et qu'on exécute une construction tout-à-fait semblable pour chacun des quatre triangles $BC'C$, $BC'A$, $AC'D$, $DC'C$, on aura déterminé de cette façon l'aire de l'image à peindre, divisée en parties correspondantes à celles de la figure vraie.

Ce qui donne à cette anamorphose quelque chose de plus piquant que la précédente, produite par un miroir conique, c'est que les parties déformées sont séparées les unes des autres, et qu'on peut peindre, dans les espaces intermédiaires, d'autres objets qui jettent complétement dans l'erreur sur ce qu'on s'attend à voir.

Il est aisé de conclure, de ce qui précède, la marche à suivre dans le cas d'un miroir pyramidal à base quelconque.

Q. 203. L'image d'*une ligne horizontale*, vue par réflexion sur un plan horizontal, est elle-même *horizontale*;

et si le plan sur lequel la réflexion s'opère étant incliné par rapport à l'horizon, le plan de réflexion est parallèle à la trace horizontale du plan incliné, l'image d'une ligne horizontale vue par réflexion sur ce plan n'est pas horizontale.

1°. Soit *mn* (*fig.* 50) le miroir plan horizontal donné, et *ab* la droite en question. Chaque point de l'image étant à la même distance du miroir que le point correspondant de l'objet, il est clair que le lieu de tous ces points ou l'image de la droite devra, comme la droite elle-même, être parallèle au plan horizontal du miroir, ou, en d'autres termes, elle devra être horizontale.

2°. Si le plan est incliné (*fig.* 51), il est clair qu'à raison de cette même loi de la formation des images par réflexion, l'image $a'b'$ de la droite *ab* fera au-dessous du plan du miroir, symmétriquement, le même angle que la droite *ab* fait au-dessus, c'est-à-dire fera avec l'horizon un angle double de celui que fait le plan avec ce même horizon : elle ne pourra donc pas être horizontale.

On reconnaîtra cependant avec facilité que l'image $a'b'$ serait encore horizontale, même dans le cas d'un miroir incliné, si le plan de réflexion était perpendiculaire à la trace horizontale du plan incliné du miroir.

Q. **204.** Sur une table parfaitement horizontale *mn*, mobile autour d'un axe horizontal en *m* (*fig.* 52), on a placé un prisme, et regardant dans le sens de ses arètes l'image d'une ligne horizontale vue par réflexion, cette image a dû paraître inclinée d'après ce qui a été dit dans le numéro précédent. Mais on est parvenu à rendre l'image horizontale en faisant tourner la table de $4° 17'$ autour de son axe. Quel est l'angle du prisme ?

Dans le mouvement de rotation de la table, la face supérieure ff' du prisme, pour devenir horizontale, a dû décrire un angle égal à celui que décrit la table elle-même; mais cet angle $f'ff''$ est égal à l'angle fnm du prisme. Ce dernier est donc égal à $4^\circ 17'$.

Q. **205.** On a vu par réflexion sur chacune des faces FH et FG d'un prisme HFG (*fig.* 53), l'image d'un point lumineux S très éloigné, d'une étoile par exemple. L'arête du prisme étant supposée perpendiculaire à la direction des rayons incidens, on a observé que les rayons efficaces réfléchis sur la face FG, faisaient un angle

$$\mathrm{SDA} = 70^\circ,$$

avec les rayons directs; et sur la face HF un angle

$$\mathrm{SCB} = 48^\circ\, 35'.$$

Quel est l'angle du prisme donné?

A cause du grand éloignement du point S, les rayons lumineux qu'il envoie vers le prisme peuvent être considérés comme parallèles.

Cela posé, en vertu de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, on aura

$$\mathrm{FAS} = \mathrm{DAS};$$

désignons, pour abréger, par α la valeur de chacun de ces deux angles; de même,

$$\mathrm{FBS} = \mathrm{CBG},$$

soit α', pour abréger; à cause du parallélisme des rayons SA, SD,

$$\mathrm{SDA} + \mathrm{DAS} = 180^\circ,$$

d'ailleurs,

$$\text{DAS} + \text{DAH} + (\text{SAF ou DAS}) = 180^\circ,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\text{SDA}}{2}.$$

D'un autre côté,

$$\text{SCB} + \text{SBC} = 180^\circ,$$

et

$$\text{SBC} + 2\alpha' = 180^\circ,$$

d'où

$$\alpha' = \frac{\text{SCB}}{2}.$$

Mais si l'on mène PF parallèle à la direction commune SA des rayons incidens, il en résulte

$$\text{HFP} = \alpha, \quad \text{PFG} = \alpha',$$

et par suite l'angle F du prisme est égal à $\alpha' + \alpha$, ou

$$\text{F} = \frac{\text{SDA} + \text{SCB}}{2};$$

ou, substituant les valeurs observées,

$$\text{F} = \frac{70^\circ + 48^\circ.35'}{2} = 59^\circ\,17'\,30''.$$

DIOPTRIQUE.

Lois de la réfraction simple.

1re Loi. Le rayon incident, la normale à la surface au point d'incidence et le rayon réfracté, sont dans le même plan.

2e Loi. Le rayon incident et le rayon réfracté se trouvent toujours l'un d'un côté, l'autre de l'autre, de la normale au point d'incidence.

3e Loi. Quelle que soit l'inclinaison du rayon incident, le sinus de l'angle que fait avec la normale le rayon incident, et le sinus de l'angle que fait avec cette même normale le rayon réfracté, sont entre eux dans un rapport constant, qu'on appelle l'*indice de réfraction* du second milieu par rapport au premier.

En prenant pour unité l'indice de réfraction du vide (et c'est le plus petit que l'on connaisse), l'indice de réfraction de l'air ayant pour densité 0,0013, est 1,00028,

celui de l'eau	1,336,
celui du crown-glass ordinaire	1,535,
celui du flint-glass	1,6,
celui du diamant	2,487,
celui du chrômate de plomb	3.

On n'a pas encore observé de corps plus réfringent que ce dernier.

206. Un rayon de lumière peut toujours passer du vide dans un milieu quelconque, sous quelque incidence qu'il rencontre le milieu.

En effet, l désignant l'*indice principal* du milieu en question, c'est-à-dire le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, lorsque la lumière passe du vide dans ce milieu, on a l'égalité

$$\frac{\sin i}{\sin r} = l,$$

égalité dont le second membre est toujours plus grand que l'unité; de là on déduit

$$\sin r = \frac{\sin i}{l},$$

et comme l'angle i d'incidence ne saurait dépasser 90°, et par suite son sinus surpasser l'unité, il s'ensuit que

$$\frac{\sin i}{l}, \quad \text{ou} \quad \sin r,$$

est toujours moindre que l'unité. Par conséquent l'angle r est toujours réel; ou, en d'autres termes, la réfraction est toujours possible.

Généralisant ces considérations, on reconnaîtra que la lumière peut toujours passer d'un milieu dans un autre, lorsque l'indice principal du premier milieu sera moindre que celui du second. Il y a cependant quelques circonstances exceptionnelles.

Q. 207. Quel est l'angle maximum de réfraction que puisse faire avec la normale au point d'incidence, un rayon lumineux qui passe du vide dans l'eau?

Comme l'indice principal de réfraction de l'eau est égal à 1,336, le rapport

$$\frac{\sin i}{\sin r} = l,$$

donne ici

$$\sin r = \frac{\sin i}{1,336}.$$

Or il est évident que la limite du rapport

$$\frac{\sin i}{1,336}, \quad \text{est} \quad \frac{1}{1,336},$$

donc

$$\text{lim. } \sin r = \frac{1}{1,336};$$

et la valeur maxima de r est l'angle dont le sinus est

$$\frac{1}{1,336}, \quad \text{ou} \quad 48^\circ\, 27'\, 40''.$$

Q. 208. Quelle sera, par rapport à sa direction primitive, la direction d'un rayon lumineux qui aura traversé un milieu quelconque terminé par des faces parallèles, et placé dans le vide?

Supposons (*fig*. 54),

$$\text{EFG} = i, \quad \text{PFK} = r,$$
$$\text{FKH} = i', \quad \text{MKN} = r';$$

en désignant par l l'indice principal de ce milieu,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = l,$$

soit ensuite

$$x = \frac{\sin i'}{\sin r'}.$$

D'après ce principe évident, qu'*un rayon de lumière qui rebrousserait chemin suivrait les mêmes directions qu'il aurait suivies dans son premier trajet, mais dans un ordre inverse*, l'angle d'incidence dans le second cas doit être le même que l'angle de réfraction dans le premier *et vice versâ*; on aurait donc dans le second cas,

$$\frac{\text{sin d'incidence}}{\text{sin de réfraction}} = \frac{1}{l};$$

et par conséquent

$$\frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{1}{x}.$$

Mais comme les milieux dans lesquels se trouvent r' et i', sont respectivement les mêmes que ceux dans lesquels sont i et r, on doit avoir

$$\frac{1}{x} = \frac{\sin r'}{\sin i'} = \frac{\sin i}{\sin r} = l,$$

et comme

$$i' = r, \quad \frac{\sin r'}{\sin r} = l;$$

d'où

$$r' = i;$$

c'est-à-dire que *le rayon émergent est parallèle au rayon incident.*

Il est évident que le même résultat s'appliquerait au cas d'un nombre quelconque de lames de substances quelconques, pourvu que chacune d'elles fût homogène et eût ses faces parallèles; d'où cette conséquence, que *dans un milieu homogène, la lumière doit se mouvoir en ligne droite.*

Q. 209. L'indice *relatif* de réfraction, lorsque la lumière passe immédiatement d'un milieu dans un autre, est égal au quotient $\frac{l'}{l}$ de l'indice principal du second milieu divisé par l'indice principal du premier.

Supposons (*fig.* 55) que les deux milieux soient terminés par des faces parallèles, et appelons i l'angle d'incidence à la surface supérieure du premier milieu, r l'angle de réfraction qui lui correspond, dans ce premier milieu; r sera aussi l'angle d'incidence à la surface du second milieu. Soit r' l'angle de réfraction dans ce second milieu; r' sera aussi l'angle d'incidence à la surface de sortie de ce même milieu. Enfin, soit i' l'angle de réfraction à la sortie, l et l' étant les indices principaux du premier et du second milieu, nous aurons

$$\frac{\sin i}{\sin r} = l \ (1).$$

D'une autre part, en supposant que le rayon émergent rebroussât chemin, nous aurions de même

$$\frac{\sin i'}{\sin r'} = l' \ (1).$$

Mais comme nous avons supposé les deux milieux terminés par des surfaces parallèles, $i' = i$ en vertu du théorème démontré dans le numéro précédent. Donc

$$\frac{\sin i}{\sin r'} = l' \ (2);$$

divisant membre à membre les égalités (2) et (1),

$$\frac{\sin r}{\sin r'} = \frac{l'}{l} \ \text{(C.Q.F.D.)}.$$

Q. 210. On fait passer un rayon lumineux du verre dans le vide : sous quelle incidence la lumière, ne pouvant plus sortir du verre, se réfléchira-t-elle en totalité à la surface de séparation, sachant que pour le verre, l'indice principal de réfraction est 1,535.

En désignant par i l'angle que fait, dans le vide, le rayon lumineux avec la normale au point d'incidence, et par r l'angle que fait dans le verre ce même rayon avec la même normale,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = 1{,}535.$$

Pour trouver la valeur de r, pour laquelle la transmission deviendra impossible, remarquons que sin i ne pouvant surpasser l'unité, la limite de la transmissibilité sera donnée par l'équation

$$\frac{1}{\sin r} = 1{,}535,$$

d'où

$$r = 41^\circ\ 6'\ 20''.$$

C'est-à-dire que si r était moindre que cet angle-limite, la lumière se réfléchirait intérieurement, sur la surface de séparation des deux milieux, au lieu de passer dans le vide.

Q. **211.** Sous quelle incidence aura lieu la réflexion totale pour de la lumière qui doit passer du flint-glass dans l'eau, sachant que l'indice principal de l'eau est 1,336, et celui du flint-glass 1,60.

En désignant par i l'angle d'incidence d'un rayon de lumière qui, après avoir traversé le flint-glass, atteint la surface de séparation des milieux, et par r l'angle de réfraction correspondant dans l'eau, le rapport trouvé précédemment n° 209,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{l'}{l} \quad \text{devient ici} \quad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1,336}{1,60}.$$

La réflexion totale commencera lorsque sin r deviendra égal à l'unité, c'est-à-dire lorsqu'on aura

$$\sin i = \frac{1,336}{1,60},$$

d'où

$$i = 56^\circ\ 37'.$$

Q. **212.** Un rayon lumineux LI (*fig.* 56) passe, sous un angle de 45°, de l'air dans une lame ABDC de flint-glass à faces parallèles, ayant 55 millimètres d'épaisseur. Quelle est la distance np du point réel d'émergence n au point p de sortie du rayon lumineux s'il eût continué à se mouvoir suivant sa direction primitive ?

L'indice principal de réfraction de l'air étant 1,00028, et celui du flint-glass 1,60, nous aurons l'égalité

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{1,60}{1,00028},$$

et comme

$$i = 45^\circ, \ \sin 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 0,707106,$$

donc

$$\sin r = \frac{0,707106 \times 1,00028}{1,60} = 0,442065,$$

Quant à la distance cherchée np, elle est évidemment la différence entre mp et mn, ou entre

$$m\mathrm{I}.tg45^\circ \text{ et } m\mathrm{I}tgr;$$

c'est-à-dire que

$$np = m\mathrm{I} - m\mathrm{I}\,tgr,$$

puisque

$$tg\,45^\circ = 1.$$

Or

$$tgr = \frac{\sin r}{\cos r},$$

et comme, de la valeur précédemment trouvée pour sin r, on déduit

$$\cos r = 0,89699,$$

et que

$$m\mathrm{I} = 55^{mm}, np = 55^{mm} - 55^{mm} \times \frac{0,442065}{0,89699} = 27^{mm},894.$$

Réciproquement, si l'on pouvait observer np directement, l'équation

$$np = m\mathrm{I}\left(1 - \frac{0,442065}{0,89699}\right)$$

pourrait servir à déterminer $m\mathrm{I}$.

Si la lame n'avait pas ses faces parallèles, et qu'on voulût baser sur une observation semblable un procédé de détermination de l'épaisseur de cette lame en un point donné, il serait bon de faire en sorte que le plan de réfraction fût à la fois perpendiculaire à l'une de deux faces et parallèle à leur intersection.

Q. **213.** Un prisme de monosilicate de plomb a pour angle réfringent $21^\circ\ 12'$. La déviation minima qu'il produit est $24^\circ\ 46'$ pour un rayon de lumière rouge homogène. Quel est l'indice de réfraction de cette substance pour la lumière rouge ?

On sait que A désignant l'angle réfringent du prisme, D l'angle de la déviation minima, et l l'indice cherché, il existe entre ces trois quantités la relation

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + D)}{\sin \frac{1}{2} A},$$

ou, substituant pour A et D les valeurs fournies par l'observation,

$$l = \frac{\sin 22^\circ 59'}{\sin 10^\circ 36'} = 2,123.$$

Q. **214.** Quelle est la puissance réfractive de l'acide carbonique, sachant que sa densité doit être réduite de 1,5245 à 0,99519, pour qu'un prisme de ce gaz produise, sur un rayon lumineux, la même déviation que de l'air ayant sa densité normale?

La puissance réfractive de l'air est égale à 0,000589171.

MM. Biot et Arago ont trouvé que, sous diverses pressions, *la puissance réfractive d'un même gaz varie proportionnellement à sa densité.*

Si donc nous désignons par x la puissance réfractive cherchée, et si nous remarquons que la puissance réfractive de l'acide carbonique à 0,99519 de densité, laquelle n'est autre chose que celle de l'air ordinaire, est égale à 0,000589171, l'application de la loi précitée nous donnera, pour déterminer cette inconnue, la proportion

$$x : 0,000589171 :: 0,99519 : 1,5245;$$

d'où

$$x = 0,000902527.$$

Si de là on voulait déduire l'indice de réfraction de l'acide carbonique, il suffirait de se rappeler que, l désignant cet indice, $l^2 - 1$ est ce qu'on appelle la puissance réfractive. Dès-lors, l'équation

$$x = 0,000902527 = l^2 - 1$$

donne

$$l = \sqrt{1,000902527} = 1,000452.$$

Formules relatives aux diverses espèces de lentilles.

215. Soient : l l'indice de réfraction de la substance qui constitue la lentille ;

r le rayon de courbure de la première face ;

r' celui de la seconde face ;

p la distance d'un point lumineux à la lentille ;

p' celle de son image ;

On aura entre les cinq quantités, l, r, r', p et p' les relations suivantes :

1°. Si la lentille est biconvexe,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{l-1}{r} + \frac{l-1}{r'} \text{ (1)};$$

2°. Si la lentille est plano-convexe, auquel cas $r' = \infty$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{l-1}{r'} \text{ (2)};$$

3°. Si la lentille est bi-concave, et alors r et r' sont négatifs,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{l-1}{r} - \frac{l-1}{r'} \text{ (3)};$$

4°. Si la lentille est plano-concave, circonstance qu'on exprimera analytiquement en prenant $r' = \infty$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{l-1}{r} \text{ (4)};$$

5°. Si la lentille est convexe-concave, c'est-à-dire, si les portions de surfaces sphériques qui la terminent tournent leur concavité du même côté; comme alors l'un des rayons est positif et l'autre négatif; soit par exemple r positif.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{l-1}{r}-\frac{l-1}{r'} \quad (5).$$

Q. 216. Quelle est la distance focale principale d'une lentille bi-convexe de diamant de 4 millimètres de rayon pour chacune des deux faces? L'indice de réfraction du diamant est 2,487.

La lentille proposée étant bi-convexe, on devra prendre la formule (1), n° 215,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{l-1}{r}+\frac{l-1}{r'}.$$

Et comme le foyer principal d'une lentille est le point de concours des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe, si nous exprimons analytiquement que les rayons incidens sont parallèles à l'axe, ce qui s'indiquera par $p=\infty$, la distance correspondante p' sera la distance focale cherchée. Mettant à la place de r et r' leur valeur commune 4 millimètres, et à la place de l, 2,487, on obtiendra

$$\frac{1}{p'}=\frac{2(2,487-1)}{4},$$

d'où

$$p'=1^{\text{mm}},34.$$

Si, pour généraliser ce résultat, nous cherchons la relation qui lie la distance focale f d'une lentille bi-convexe de diamant dont les deux faces ont un rayon commun de r millimètres, la formule

$$\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}=\frac{2\,(1,487)}{r}$$

donnera

$$f=r\times\frac{1}{2,974}=0^{mm},3363.r.$$

Q. **217.** Un objet de 8 centimètres de hauteur est placé sur l'axe d'une lentille de crown-glass ordinaire bi-concave de $0^m,4$ de rayon sur chaque face, à une mètre de distance. Quelles seront la grandeur et la position de son image par réfraction dans cette lentille ?

La lentille proposée étant bi-concave, la formule qui lui convient est n° **215** (3),

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=-\frac{l-1}{r}-\frac{l-1}{r'},$$

ou bien, comme les deux rayons sont égaux,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=-\frac{2(l-1)}{r}.$$

Si à la place de p et r on substitue leurs valeurs 1^m, et 0^m4, et si l'on remarque que pour le crown-glass l'indice l de réfraction est 1,535, on aura

$$1+\frac{1}{p'}=-\frac{2\,(0,535)}{0,4},$$

d'où

$$p=-\,0^m,272;$$

c'est-à-dire que l'image sera en avant de la lentille, dans une position droite, à une distance de $0^m,272$, et du même côté que l'objet.

Quant à la grandeur, elle sera évidemment donnée par la proportion

$$a'b' : ab :: p' : p;$$

$a'b'$ désigne ici l'image (*fig.* 57).

On tire de là :

$$a'b' = \frac{0^{m},08 \cdot 0,272}{1} = 0^{m},02176.$$

En faisant sur les formules (1), (2), (4) et (5) des calculs et raisonnemens analogues, on résoudra des questions semblables sur les espèces de lentilles auxquelles ces formules se rapportent.

Q. **218.** On a un prisme quadragulaire de verre (*fig.* 58), dont deux faces AB et AD sont perpendiculaires entre elles. Quels doivent être les trois autres angles dièdres, pour qu'un faisceau de rayons lumineux SI, reçu normalement sur la face AB, sorte normalement à la face AD après deux réflexions intérieures sur les faces BC et CD?

Soient

$$\text{ABI} = x, \quad \text{ADI}' = y, \quad \text{BCD} = z;$$

soit i l'angle d'incidence, SIB ou l'angle de réflexion CII' son égal, soit enfin i' l'angle II'C, ou son égal S'I'D.

D'après les données de la question, il est évident qu'on aura les équations

$$x + i = 90^{\circ},$$
$$x + i' = 90^{\circ},$$
$$z + i + i' = 180^{\circ},$$

et

$$x + y + z = 270^{\circ},$$

d'où

$$2i + 2i' = 90^{\circ},$$

ou bien,

$$i + i' = 45^{\circ},$$

et par suite,

$$z = 135^{\circ}.$$

Quant aux valeurs respectives des angles x et y, elles sont évidemment indéterminées, et peuvent varier chacune depuis 45 jusqu'à 90°, pourvu que leur somme soit égale à 135°. Mais si, pour préciser davantage la forme, on introduit, comme nouvelle condition que y soit égal à x, chacun de ces angles sera complétement déterminé et égal à $67° \frac{1}{2}$.

Comme, dans cette disposition, les rayons lumineux ne tombent pas sous l'incidence correspondante à la réflexion totale, une partie de la lumière se réfracte en I et I' et sort du prisme, de sorte que celle qui arrive en S' est considérablement affaiblie. Pour prévenir cet affaiblissement, il faudra faire arriver les rayons lumineux sous l'incidence qui correspond à la réflexion totale, c'est-à-dire, si le prisme est en verre, sous un angle de $(90 - 40 \frac{1}{2})°$ avec la surface en I et en I'. Alors, on aurait

$$i = 49° \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$x = 40° \tfrac{1}{2},$$

et comme, dans cette hypothèse, on a nécessairement

$$i' = i;$$

l'angle y sera aussi de $40° \frac{1}{2}$. Par conséquent

$$z = 180 - 99 = 81°.$$

Mais alors, l'angle BAD des faces d'entrée et de sortie ne pourrait pas être droit; il serait nécessairement égal à

$$360 - 172° = 198.$$

(*V. la fig.* 58 *bis.*) Telle serait, théoriquement la forme la plus avantageuse à donner au prisme quadrangulaire qui constitue la *chambre claire* de Wollaston. Mais il est aisé de reconnaître qu'en pratique cette forme serait extrêmement incommode.

Si le prisme quadrangulaire, au lieu d'être de verre, était formé d'une substance diaphane pour laquelle l'angle de réflexion totale fût n avec la surface, les valeurs des 4 angles dièdres seraient respectivement

$$x = 90^\circ - n,$$
$$y = 90^\circ - n,$$
$$z = 180^\circ - 2n,$$

et

$$\text{BAD} = 4n,$$

si l'on exigeait toujours la condition que la lumière entrât normalement dans le prisme, et en sortît de même.

Si le prisme est triangulaire et rectangle (*fig.* 59), et que l'on exige les mêmes conditions d'entrée et de sortie pour les rayons lumineux, les angles B et C sont nécessairement égaux, à cause de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion. On reconnaîtra de même que, si l'on veut que la lumière se réfléchisse totalement sur la 3^e^ face, en désignant par n l'angle que font avec la surface réfléchissante les rayons lumineux qui s'y réfléchissent totalement, les angles B et C seront tous deux égaux à $90^\circ - n$, et l'angle A, au lieu d'être droit, devra être égal à

$$180^\circ - 2\,(90^\circ - n),$$

ou égal à $2n$. Ainsi, dans le cas du verre,

$$n = 90 - 40^\circ\tfrac{1}{2} = 49\tfrac{1}{2},$$
$$\text{B} = \text{C} = 40\tfrac{1}{2},$$

et

$$\text{A} = 99^\circ.$$

Si, pour avoir le prisme rectangle, on n'exige pas que les rayons lumineux sortent normalement à la face AC, dans le cas de la réflexion totale, si le prisme est en verre, on devra avoir

$$B = 40^\circ \tfrac{1}{2},$$

et par suite

$$C = 49^\circ \tfrac{1}{2},$$

alors, l'angle DEC de sortie sera égal à 81°.

Q. **219**. Quel est le rapport du grossissement d'une loupe de diamant à celui d'une loupe de verre de même rayon ?

Nous savons qu'en général, lorsqu'on veut regarder un objet avec une loupe, on doit placer celui-ci à une très petite distance du foyer principal, entre ce foyer et la lentille. Soient d la distance de cet objet au centre de la lentille, D la distance de la vue distincte, égale à peu près à CA, l'image étant virtuelle (*fig.* 60). La formule générale $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{f}$ donne, dans le cas qui nous occupe,

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{D}=\frac{1}{f'},$$

d'où

$$d=\frac{Df'}{D+f'}.$$

Or, le rapport de la grandeur de l'image $a'b'$ à celle de l'objet ab est donné par la proportion

$$a'b' : ab :: AC : A'C :: D : d,$$

On pourra donc prendre pour la mesure du grossissement la fraction

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{D}{d} = \frac{D+f}{f},$$

c'est-à-dire, à peu près dans le rapport de la distance de la vue distincte à la distance focale principale.

Comme f est très petite par rapport à D, on la peut négliger au numérateur, ce qui réduit à $\frac{D}{f}$ le rapport précédent. Cela posé, rappelons-nous que la distance focale principale d'une lentille de diamant de rayon r est égale à

$$0,3363.r = f.$$

On trouverait de même, en remarquant que pour le verre

$$l = 1,535,$$

que la distance focale principale d'une lentille de cette substance est

$$f' = 0,9346.r.$$

Si donc nous supposons le rayon commun r des deux lentilles suffisamment petit pour que les rapports $\frac{D}{f}$ et $\frac{D}{f'}$ puissent être considérés comme des mesures assez exactes du grossissement des lentilles, le rapport des deux grossissemens sera précisément le rapport inverse des distances focales, c'est-à-dire,

$$\frac{f'}{f} \text{ ou } \frac{9346}{3363} = 2,779.$$

Une lentille de diamant de très petit rayon, ou d'un court foyer, grossit près de trois fois autant qu'une lentille de verre de même rayon.

Si f et f' n'étaient pas d'une petitesse négligeable, le rapport exact des grossissemens serait donné par l'expression

$$\frac{D+f}{f} : \frac{D+f'}{f'} = \frac{f'(D+f)}{f(D+f')}.$$

Dans les applications numériques, D, f, f' devront toujours être rapportées à une même unité de longueur, au millimètre, par exemple, ou à toute autre unité.

Mesure du grossissement dans les principaux instrumens d'optique.

1°. *Mégascope.*

Q. 220. Si f est la distance focale principale, d la distance de l'objet à la lentille, distance qui est toujours un peu plus grande que f, D la distance de la lentille au tableau qui reçoit l'image, la formule générale $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ deviendra

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f},$$

et comme le rapport de la grandeur de l'image à celle de l'objet est le même que celui de leurs distances à la lentille, la mesure du grossissement qui se déduit de cette formule est

$$\frac{D}{d} = \frac{f}{d-f}.$$

L'image sera donc d'autant plus grande que l'objet sera plus près du foyer principal, parce qu'alors le dénominateur $d-f$ aura une valeur plus petite, ce qui rendra la fraction plus grande.

2°. *Microscope composé.*

Cet instrument peut être considéré comme un mégascope dont l'image est regardée avec une loupe, au lieu de l'être à la vue simple ; dès-lors, le grossissement sera sensiblement égal à celui du mégascope, amplifié dans le rapport précédemment trouvé (n° 219) pour la loupe ; c'est-à-dire que la mesure de ce grossissement sera donnée par la formule

$$\frac{f}{d-f} \cdot \frac{f_1}{D+f_1},$$

approximativement.

3°. *Lunette astronomique.*

Dans cet instrument, la distance de l'objet à l'objectif étant très grande, et le plus souvent difficile ou impossible à déterminer, le grossissement ne peut plus être mesuré par le rapport de la grandeur de l'image à la grandeur réelle de l'objet. On a recours alors à un autre moyen d'estimation qui consiste à comparer entre eux les angles sous lesquels seraient vus, l'image par un œil situé au centre de l'oculaire, et l'objet par un œil placé au centre de l'objectif, angles qui peuvent respectivement servir de mesure aux grandeurs apparentes de l'image et de l'objet.

Ce procédé est fondé sur la propriété dont jouissent *les rayons lumineux qui passent par le centre optique d'une lentille, de sortir parallèlement à leur direction primitive, c'est-à-dire, sensiblement dans la même direction si la lentille a une épaisseur très peu considérable.*

Désignant donc par O et O′ les angles sus-mentionnés, le premier relativement à l'objectif, et le second relativement à l'oculaire; par f la distance focale principale de la première de ces deux lentilles, et par F celle de la dernière; la simple inspection de la figure de cet instrument donne immédiatement

$$tg.\tfrac{1}{2}O = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{Image}}{f}, \qquad tg.\tfrac{1}{2}O' = \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{Image}}{F},$$

d'où

$$\frac{tg.\tfrac{1}{2}O'}{tg.\tfrac{1}{2}O} = \frac{f}{F}.$$

Cette relation, entre les angles sous-tendus par l'image et par l'objet, montre que la grandeur apparente de l'image sera d'autant plus grande, par rapport à celle de l'objet, que la distance focale principale de l'objectif sera plus grande relativement à celle de l'oculaire.

4°. *Lunette de Galilée.*

Le grossissement de cette lunette se mesure de la même manière que celui de la lunette astronomique, et d'après des considérations semblables.

5°. *Télescope de Newton.*

En nous reportant à la théorie des miroirs courbes réflecteurs, il nous sera facile de reconnaître que l'angle sous lequel l'objet est vu directement est égal à celui que soustend, vue du centre, l'image réelle produite par le miroir; désignons par A cet angle, et par A′ celui que sous-tend l'image virtuelle produite par l'oculaire. Appelons en outre F la distance focale du miroir, laquelle est égale à la moitié de son rayon, et φ la distance de l'oculaire à l'image réelle, distance qui doit toujours être moindre que la distance focale principale de cet oculaire, on aura

$$tg.\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A} = \frac{\tfrac{1}{2}\ \text{image réelle produite par le miroir}}{\mathrm{F}},$$

et

$$tg.\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}' = \frac{\tfrac{1}{2}\ \text{de la même image}}{\varphi};$$

d'où

$$\frac{tg.\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}'}{tg.\,\tfrac{1}{2}\,\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{F}}{\varphi}.$$

Ici donc, comme dans la lunette astronomique, le grossissement ou le rapprochement sera d'autant plus considérable que la distance focale principale du miroir sera plus grande par rapport à celle de l'oculaire dont φ diffère très peu.

L'expression donnée plus haut pour $tg.\,\frac{1}{2}\,\mathrm{A}$ ne serait rigoureuse que si les rayons qui tombent sur le miroir étaient parallèles entre eux; mais, à cause de la grande distance des objets qu'on observe avec le télescope, on peut admettre ce parallélisme sans qu'il en résulte aucune erreur sensible.

Q. 221. A quelle distance d'une loupe de flint-glass faut-il mettre un objet pour qu'il soit vu distinctement lorsque cette loupe a 15 millimètres de rayon?

Comme l'indice de réfraction du flint-glass est 1,6, la distance focale principale de cette loupe sera

$$1 : \frac{2(l-1)}{r} = \frac{15}{2.0,6}\ m.m \text{ ou } 12^{\mathrm{mm}},5.$$

En admettant donc que la distance moyenne de la vue distincte soit 300 millimètres, et en remarquant que l'image est ici virtuelle et située à la distance de la vue distincte, la formule générale des lentilles $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ donnera, en appelant x la distance cherchée,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{300} = \frac{1}{12,5},$$

d'où

$$x = 12 \text{ millimètres.}$$

C'est donc à 12 millimètres du centre de la lentille, ou, si elle a peu d'épaisseur, à 12 millimètres environ de sa surface qu'on devra placer l'objet, pour que son image soit vue avec la plus grande netteté possible.

Q. **222.** On a construit un télescope (*fig.* 61), composé de la manière suivante : les rayons de lumière, après avoir traversé une lentille LL′ dont la distance focale principale est F, vont plus loin tomber sur un miroir concave dont la distance focale principale est F′; les rayons réfléchis par ce miroir sont reçus, après leur réflexion et avant leur point de concours, par un petit miroir plan I incliné à 45° (comme dans le télescope de Newton), qui les sort du tuyau télescopique et les amène en C′ où ils forment image; cette image est vue avec une loupe O dont la distance focale principale est F″. Quelles doivent être les relations entre les distances $AB = a$ et $BIO = b$, et les distances focales principales F, F′, F″, et quel est le grossissement ?

A cause de la grande distance de l'objet observé, nous pouvons supposer parallèles les rayons qu'il envoie sur la lentille LL′; ceux-ci iront donc, après leur réfraction, concourir sensiblement au foyer principal de la lentille; puis continuant leur route, ils iront rencontrer le miroir concave, s'y réfléchiront et iront former image à une distance b' donnée par la formule

$$\frac{1}{b'}+\frac{1}{a-F}=\frac{1}{F'}. \quad (1)$$

Cette image est observée par la loupe O, placée à une distance b'' de cette image donnée par la formule

$$\frac{1}{b''}-\frac{1}{D}=\frac{1}{F''},$$

D étant la distance de la vue distincte. De là on tire

$$b''=\frac{DF''}{D+F''}.$$

La distance b étant donnée par l'équation

$$b=b'+b''. \quad (2)$$

Éliminant b' entre les deux équations (1) et (2), on parvient finalement à la relation

$$\frac{1}{b-b''}+\frac{1}{a-F}=\frac{1}{F'};$$

d'où

$$b=b''-\frac{F'(a-F)}{F'+F-a},$$

ou, mettant à la place de b'' sa valeur,

$$b=\frac{DF''}{D+F''}-\frac{F'(a-F)}{F'+F-a}.$$

L'image produite par le miroir concave devant nécessairement être réelle, il faut que b soit positif; et comme toutes les quantités dont b dépend sont, de leur nature, positives, cette circonstance introduit la condition

$$\frac{DF''}{D+F''}-\frac{F'(a-F)}{F'+F-a}>0,$$

ou

$$\frac{DF'F''+DFF''-aDF''-aF'F''+DFF'+FF'F''}{(D+F'')(F'+F-a)}>0.$$

Cette condition pourrait être remplie de deux manières, ou parce que le numérateur et le dénominateur sont tous deux négatifs, ou parce qu'ils sont tous deux positifs.

Dans la première hypothèse, on doit avoir

$$a>F'+F; \quad (3)$$

et en même temps

$$DF'F''+DFF''+DFF'+FF'F''<a(DF''+DF'+F'F''),$$

ou

$$a>F+\frac{DF'F''}{DF''+DF'+F'F''}. \quad (4)$$

Le dénominateur du second terme du second membre étant plus grand que DF'', ce second terme sera plus petit que F', et par conséquent, si la condition (3) est remplie, la condition (4) le sera aussi *à fortiori*.

Dans la seconde hypothèse, il faudrait qu'en eût simultanément

$$a<F+F', \quad (5)$$

et

$$a<F+\frac{DF'F''}{DF''+DF'+F'F''}. \quad (6)$$

Or, il est facile de reconnaître que si la première de ces deux conditions est remplie, il ne s'ensuit pas que la seconde le soit aussi. Ainsi, l'on pourra toujours construire le télescope en faisant

$$a > F + F',$$

et pas toujours en prenant

$$a < F + F';$$

dans ce dernier cas, il faudrait avoir égard aussi à la condition (6).

Il est évident aussi que l'on ne doit jamais avoir

$$a = F + F',$$

parce qu'alors on aurait

$$b = \infty.$$

Quant au grossissement obtenu par ce télescope, il faut considérer deux cas, suivant que $a - F$ est plus grand ou plus petit que $2F'$, c'est-à-dire, suivant que l'image produite par la lentille objective sera au-delà ou en-deçà du centre, par rapport au miroir.

1er Cas :

$$a - F > 2F'.$$

En désignant par A l'angle sous lequel est vu l'objet directement du centre de la lentille, et par C l'angle sous lequel est vue la première image du centre du miroir, on a évidemment

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{\tfrac{1}{2}\text{ première image}}{a - F - 2F'},$$

et

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,A = \frac{\tfrac{1}{2}\text{ première image}}{F};$$

d'où

$$\frac{tg\,\tfrac{1}{2}\,C}{tg\,\tfrac{1}{2}\,A} = \frac{F}{a - F - 2F'}.$$

Cette image en forme une autre par réflexion de l'autre côté du centre, à une distance b' que nous pouvons sans erreur sensible supposer égale à b, ou à une distance $2F - b$ du centre, et qui est vue de ce centre sous le même angle que la précédente; vue par l'oculaire, le grossissement qu'elle éprouvera sera donné par la formule

$$\frac{tg\,\tfrac{1}{2}\,O}{tg\,\tfrac{1}{2}\,C} = \frac{2F' - b}{b''},$$

puisque

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,O = \frac{\tfrac{1}{2}\ 2^e\ \text{image}}{b''},$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{\tfrac{1}{2}\ 2^e\ \text{image}}{2F' - b}.$$

Le grossissement complet sera donc exprimé par la formule

$$\frac{tg\,\tfrac{1}{2}\,O}{tg\,\tfrac{1}{2}\,A} = \frac{F}{a - F - 2F'} \cdot \frac{2F' - b}{b''}.$$

2ᵉ Cas :

$$a - F < 2F';$$

alors

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{\text{première image}}{2F' + F - a},$$

$$tg.\,\tfrac{1}{2}\,A = \frac{\text{première image}}{F},$$

$$tg.\,\tfrac{1}{2}\,O' = \frac{\text{deuxième image}}{b''}, \quad tg.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{\text{deuxième image}}{b - 2F'},$$

d'où

$$\frac{tg.\,\tfrac{1}{2}\,C}{tg.\,\tfrac{1}{2}\,A} = \frac{F}{2F' + F - a}, \quad \frac{tg.\,\tfrac{1}{2}\,O'}{tg.\,\tfrac{1}{2}\,C} = \frac{b - 2F'}{b''};$$

et enfin

$$\frac{tg.\,\tfrac{1}{2}\,O'}{tg.\,\tfrac{1}{2}\,A} = \frac{b - 2F'}{b''} \cdot \frac{F}{2F' + F - a}.$$

Q. 223. Trouver le point M sur lequel devrait arriver un rayon venant du point A et tombant sur la surface d'une sphère, avec la condition que le rayon réfléchi vienne passer par le point B (*fig.* 62).

Il est aisé de voir, d'après la loi d'égalité des angles d'incidence et de réflexion, et d'après cette propriété connue de l'ellipse que les rayons vecteurs menés aux points de contact font avec la tangente, et d'un même côté de cette droite des angles égaux, que le point M cherché sera le point de contact de la sphère donnée et d'un ellipsoïde de révolution autour de AB, et dont les points A et B sont les foyers. D'après cette remarque, il sera facile de déterminer le point M.

Si la surface sur laquelle doit se trouver le point M, au lieu d'être une surface sphérique, était une surface plane, le point cherché M serait le point de contact du plan donné avec l'ellipsoïde en question.

Q. 224. Quel est l'indice de réfraction du spath d'Islande, sachant qu'une lame de cette substance, de $0^{mm},1$ d'épaisseur, interposée entre l'un des faisceaux lumineux d'un appareil à franges, a déplacé la bande centrale d'une quantité équivalente à la largeur de 121 franges? (La lumière monochromatique dont on a fait usage est la lumière jaune provenant de la flamme de l'alcool salé, lumière dont la longueur d'ondulation dans l'air est $0^{mm},000551$.)

En désignant par λ la longueur d'ondulation de la lumière jaune dans le spath d'Islande, par x' le nombre de longueurs d'ondulations λ contenues dans l'épaisseur de la lame, par x celui des longueurs d'ondulations comprises dans une lame d'air de $0^{mm},1$ d'épaisseur, nous aurons évidemment

$$0^{mm},1 = x . 0^{mm},000551,$$

et

$$0^{mm},1 = x'\lambda.$$

D'ailleurs, la bande centrale devant correspondre à des nombres égaux de vibrations, nous aurons aussi

$$x + 121 = x'.$$

Mais l'indice de réfraction l de la lumière jaune qui passe de l'air dans le spath n'est autre chose que le rapport inverse des vitesses dans le spath et dans l'air, c'est-à-dire le rapport inverse des longueurs d'ondulations dans ces substances, ou le rapport direct des nombres de vibrations correspondant à une même épaisseur; cette circonstance introduit l'équation

$$l = \frac{0,000551}{\lambda} = \frac{x}{x'},$$

d'où

$$lx = x' = 121 + x, \quad x = \frac{n}{l-1},$$

et par suite

$$l = \frac{121 . 0,000551}{0,1} + 1 = 1,666.$$

L'*indice principal* L de la même substance s'obtiendrait en multipliant l par l'indice principal de l'air 1,000287. (*V*. n° 209.)

Note sur la détermination des foyers conjugués par réflexion dans les miroirs concaves (*).

Q. **225**. Il est évident que des rayons qui, partis d'un

(*) Cette note et celle qui la suit m'ont été communiquées par M. Babinet.

même point, viennent se rencontrer après avoir parcouru des espaces égaux, ne s'entre-détruiront pas; au contraire, ils se renforceront mutuellement, de manière à rendre l'intensité de la lumière plus grande au point de leur rencontre qu'en tout autre point. Alors, un foyer sera un point où viennent ainsi concourir un grand nombre de rayons partis d'un même point lumineux, après avoir parcouru des chemins égaux.

On conçoit qu'il doit être possible de déterminer, à l'aide de ces considérations, la relation qui existe entre les foyers conjugués par réflexion, et le rayon du miroir réflecteur. En effet, soient aNb un miroir concave de rayon r, F un point lumineux situé sur l'axe de ce miroir, et F′ son foyer conjugué. Ce point F′ doit évidemment être situé sur l'axe, puisqu'il doit contenir le rayon lumineux incident et réfléchi suivant cet axe. Un rayon qui, parti du point F, s'est réfléchi en M pour aller au foyer F′ rencontrer le rayon qui, parti suivant l'axe FN, s'est réfléchi suivant NF′, a parcouru un espace

$$\mathrm{FM} + \mathrm{MF}';$$

et l'autre

$$\mathrm{FN} + \mathrm{F'N}.$$

Or,

$$\mathrm{FN} + \mathrm{NF}' = \mathrm{FP} + \mathrm{F'P} + 2\mathrm{NP} = \mathrm{FP} + \mathrm{F'P} + 2 . \frac{\overline{\mathrm{MP}}^2}{2r},$$

Soit δ la différence entre

$$\mathrm{FM} \text{ et } \mathrm{FN} \text{ ou } \mathrm{FM} = \mathrm{FN} + \delta,$$

δ' la différence entre

$$\mathrm{F'M} \text{ et } \mathrm{F'N} \text{ ou } \mathrm{F'M} = \mathrm{F'N} + \delta';$$

la différence entre les espaces parcourus par les deux rayons, est

$$FM+F'M-(FN+F'N)=(FM-FP)+(F'M-F'P)-2.\frac{\overline{MP}^2}{2r}$$

$$=(FN+\delta-FP)+(F'N+\delta-F'P)-2.\frac{\overline{MP}^2}{2r};$$

mais, dans le cercle de rayon $FN+\delta$, on aurait

$$F'N+\delta-FP=NP+\delta=\frac{\overline{MP}^2}{2p+2\delta};$$

de même, dans le cercle de rayon $F'N+\delta'$, on aurait

$$F'N+\delta'-F'P=NP+\delta'=\frac{\overline{MP}^2}{2p'+2\delta'}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, la différence des espaces devient

$$FM+F'M-(FN+F'N)=\frac{\overline{MP}^2}{2}.\left(\frac{1}{p+\delta}+\frac{1}{p'+\delta}-\frac{2}{r}\right);$$

pour que les chemins soient égaux, cette différence doit être nulle, et comme le facteur $\frac{\overline{MP}^2}{2}$ ne saurait l'être, on doit avoir

$$\frac{1}{p+\delta}+\frac{1}{p'+\delta'}-\frac{2}{r}=0;$$

et comme δ et δ' sont d'autant plus petits que l'arc MN est une plus petite fraction de la circonférence, si nous supposons que cette fraction soit suffisamment petite, δ et δ' peuvent être négligés sans erreur sensible, et dès-lors, l'équation de condition est

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{2}{r}.$$

L'exactitude de cette formule repose essentiellement, comme lorsqu'on la détermine par le procédé ordinaire, sur la petitesse du rapport de l'arc MN à la circonférence entière.

Q. 226. Dans une lentille bi-convexe, les rayons de lumière qui, partis de l'un des foyers conjugués, vont se réunir à l'autre, ont parcouru, dans des temps égaux, des chemins équivalens, et sont concordans.

Soient F et F′ (*fig.* 64) les deux foyers conjugués, l l'indice de réfraction de la substance de la lentille, relativement à l'air; f et f' les distances FM et F′N, r et r' les rayons MC et NC′. Si du point F comme centre, avec FM comme rayon, on décrit l'arc MM′, et de F′ comme centre, avec F′N comme rayon, l'arc NN′, les chemins FM et FM′ seront égaux et parcourus dans des temps égaux; il en sera de même de F′N et F′N′. Reste donc à démontrer que M′II′N′ équivaut à MN.

Or, MN se compose de

$$\mathrm{MP} + \mathrm{PP'} + \mathrm{P'N} = \frac{\overline{\mathrm{IP}}^2}{2r} + \mathrm{PP'} + \frac{\overline{\mathrm{I'P'}}^2}{2r'},$$

M′II′N′ se compose de

$$\mathrm{M'I} + \mathrm{II'} + \mathrm{I'N'};$$

et si les arcs MI et NI′ sont suffisamment petits, on pourra, sans erreur sensible, prendre PQ à la place de M′I, PP′ à la place de II′, P′Q′ à la place de I′N′, et écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{MII'N'} &= \mathrm{QM} + \mathrm{MP} + \mathrm{PP'} + \mathrm{P'N} + \mathrm{NQ'}\\ &= \frac{\overline{\mathrm{M'Q}}^2}{2f} + \frac{\overline{\mathrm{IP}}^2}{2r} + \mathrm{PP'} + \frac{\overline{\mathrm{I'P'}}^2}{2r'} + \frac{\overline{\mathrm{N'Q'}}^2}{2f'},\end{aligned}$$

ou, supprimant de part et d'autre la partie commune PP′

qui ne saurait avoir d'influence sur la différence des espaces parcourus, et remarquant que les suppositions précédentes nous conduisent à admettre que

$$M'Q = IP,$$

et

$$I'P' = N'Q',$$

les expressions précédemment obtenues deviennent

$$MP + P'N = \frac{\overline{IP}^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

$$PQ + P'Q', \quad \text{ou} \quad M'I + N'I' = \frac{\overline{IP}^2}{2}\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Mais, dans le milieu dont la lentille est composée, la vitesse de la lumière est l fois moindre que l'air; donc, l'espace équivalent dans ce fluide serait

$$l(MP + P'N) = \frac{\overline{IP}^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) l,$$

et par suite la différence

$$M'I + N'I' - l(MP + P'N) = \frac{\overline{IP}^2}{2}\left[\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} - (l-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right]$$

et comme il existe entre les distances focales conjuguées de la lentille la relation

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = (l-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right),$$

il en résulte

$$M'I + N'I = l(MP + P'N).$$

Les deux chemins parcourus sont donc équivalens, et par suite les rayons d'accord.

Quant à la supposition que nous avons été obligés de faire sur les lignes M'Q, IP, etc., elle correspond à celle qu'on fait nécessairement pour établir la formule

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}=(l-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

par la méthode ordinaire.

Il résulte des considérations précédentes qu'on pourrait définir les foyers conjugués *deux points tels que les rayons partis de l'un et arrivés à l'autre, aient parcouru des espaces équivalens*. Partant de cette définition, on pourrait, par des calculs et des raisonnemens analogues aux précédens, établir la relation qui existe entre les quantités f, f', l, r, et r'.

Q. **227.** Si l'angle α d'un prisme ABC (*fig.* 65) est très petit, la déviation Δ qu'il produit par réfraction sur un rayon lumineux qui le traverse presque perpendiculairement, est exprimée par $(l-1)\alpha$, en appelant l l'indice de réfraction de la substance du prisme.

Soient en effet i et r les angles d'incidence et de réfraction à la surface d'entrée, r', i' les angles d'incidence intérieure et de réfraction extérieure à la seconde surface; on aura pour la déviation à la première surface $i-r$, et à la seconde, $i'-r'$, en tout

$$\Delta=(i-r)+(i'-r'),$$

mais $\sin i = l \sin r$

$$\sin i' = l \sin r'$$

deviennent, à cause de la petitesse supposée des angles, i, i', r, r',

$$i = lr,\ i' = lr',$$

d'où

$$\Delta = (l-1)r + (l-1)r';$$

et comme d'ailleurs $\alpha = r + r'$

$$\Delta = (l-1)(r+r') = (l-1)\alpha.$$

On eût également pu déduire cette formule de celle qui sert à donner l'indice de réfraction d'après la déviation minima du prisme : en effet, si dans cette formule qui est

$$l = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\Delta}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

on suppose α et Δ très petits

$$l = \frac{\frac{\alpha+\Delta}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha+\Delta}{\alpha},$$

d'où

$$\Delta = (l-1)\alpha.$$

Q. **228.** Lorsque la lumière passe d'un milieu dans un autre d'un pouvoir réfringent très peu différent, le sinus de l'angle de déviation est proportionnel à la tangente de l'angle d'incidence.

Si l et l' sont les indices principaux de réfraction du premier et du second milieu, i l'angle d'incidence et r celui de réfraction, nous aurons n° 209

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{l'}{l}.$$

Supposons $l' > l$, et appelons φ leur différence supposée très petite, alors

$$l' = l + \varphi,$$

et

$$\sin i = \frac{l+\varphi}{l} \sin r = \left(1 + \frac{\varphi}{l}\right) \sin r,$$

ou

$$\sin r = \frac{\sin i}{1 + \frac{\varphi}{l}},$$

ou bien encore, en remarquant que φ étant très petit, $\left(\frac{\varphi}{l}\right)^2$ et les puissances supérieures de $\frac{\varphi}{l}$ peuvent être négligées,

$$\sin r = \left(1 - \frac{\varphi}{l}\right) \sin i.$$

D'un autre côté, en appelant δ la déviation, on a

$$\delta = i - r;$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sin \delta &= \sin i \cos r - \sin r \cos i \\
&= \sin i \sqrt{1 - \sin^2 r} - \left(1 - \frac{\varphi}{l}\right) \sin i \cos i \\
&= \sin i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\varphi}{l}\right)^2 \sin^2 i} - \left(1 - \frac{\varphi}{l}\right) \sin i \cos i \\
&= \sin i \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2\varphi}{l} + \frac{\varphi^2}{l^2}\right) \sin^2 i} - \left(1 - \frac{\varphi}{l}\right) \sin i \cos i,
\end{aligned}$$

ou, négligeant $\frac{\varphi^2}{l^2}$,

$$\sin \delta = \sin i \sqrt{\cos^2 i + \frac{2\varphi}{l} \sin^2 i} - \left(1 - \frac{\varphi}{l}\right) \sin i \cos i.$$

Mais, lorsqu'on veut extraire la racine carrée d'une expression de la forme

$$\sqrt{m^2+\varepsilon},$$

ε étant une quantité dont le carré, et *à fortiori* les puissances plus élevées, peuvent être négligées, on peut écrire

$$\sqrt{m^2+\varepsilon}=m+\frac{\varepsilon}{2m};$$

donc

$$\sin\delta=\sin i\left(\cos i+\frac{\varphi}{l}\frac{\sin^2 i}{\cos i}-\cos i+\frac{\varphi}{l}\cos i\right)$$

$$=\frac{\varphi}{l}\sin i\left(\frac{\sin^2 i+\cos^2 i}{\cos i}\right)$$

$$=\frac{\varphi}{l}\operatorname{tang} i;$$

ou enfin,

$$\sin\delta=\frac{l'-l}{l}\operatorname{tang} i,$$

conformément au principe énoncé.

ÉLECTRICITÉ, MAGNÉTISME, ET ÉLECTRO-MAGNÉTISME.

Lois fondamentales des actions électriques ordinaires.

229. 1°. Les attractions et les répulsions électriques s'exercent proportionnellement au produit des intensités ou des quantités d'électricité qui agissent l'une sur l'autre, et en raison inverse du carré de la distance;

2°. La longueur des supports nécessaires pour isoler une charge donnée d'électricité, varie comme le carré de l'intensité de la charge à isoler;

3°. Pour un même état hygrométrique de l'air, la perte, dans un temps très court, est proportionnelle à la charge électrique dont elle est alors une fraction constante;

4°. L'intensité de l'électricité en chaque point d'une surface électrisée, croît ou décroît dans le même rapport que la quantité totale d'électricité répandue sur toute la surface;

5°. La quantité d'électricité prise sur une surface en un point donné par le *plan d'épreuve* (c'est-à-dire par un très petit disque de clinquant isolé), est proportionnelle à la quantité totale d'électricité répandue sur la surface à l'instant du contact, et par suite, proportionnelle à l'intensité électrique de l'élément superficiel qu'il touche.

Q. 230. Après avoir appliqué successivement le plan d'épreuve sur trois points quelconques A, B, C, d'une sphère électrisée isolée, on l'a porté, à chaque épreuve, dans la balance de Coulomb, et l'on a obtenu les résultats suivans : mis dans la balance de Coulomb après son contact avec le point A, le plan d'épreuve a produit, par répulsion, sur le disque mobile, une déviation de 8°, le micromètre supérieur indiquant d'ailleurs une torsion de 68°. Quatre minutes plus tard, le plan d'épreuve, porté de nouveau dans la balance après son contact avec le point B, n'a produit la déviation de 8° que lorsqu'on eut diminué de 5° la torsion indiquée par le micromètre supérieur.

Soumettant le point A à une nouvelle épreuve après quatre autres minutes, la même déviation de 8° n'a pu être obtenue qu'en diminuant encore de 5 autres degrés, la torsion, en tournant convenablement le micromètre supérieur.

Quatre minutes plus tard, après son contact avec le point C, le plan d'épreuve a produit, dans la balance, la déviation de 8°, moyennant une détorsion de 4° 45′ en sus des précédentes.

Enfin, après le même intervalle de temps 4′, soumettant le point A à une nouvelle épreuve, il a fallu une nouvelle détorsion de 4° 45′ pour avoir la déviation normale de 8°.

Que doit-on conclure de ces observations, relativement à la distribution de l'électricité à la surface de la sphère donnée, en supposant constantes les causes de déperdition?

Puisque, d'après les expériences de Coulomb, *les forces nécessaires pour maintenir le fil tordu sont proportionnelles aux nombres de degrés de torsion*, l'intensité électrique du point A au moment du premier contact sera (d'après la loi 5, n° 229) proportionnelle à la torsion totale

$$68^\circ + 8^\circ = 76^\circ,$$

et, au moment du second contact (8 minutes plus tard) proportionnelle à

$$68^\circ + 8^\circ - 10^\circ \quad \text{ou à} \quad 66^\circ.$$

En supposant donc, ce qui est sensiblement conforme à l'expérience, que dans l'intervalle de ces deux épreuves la déperdition soit constante, l'intensité électrique moyenne du point A, au moment de l'épreuve intermédiaire relative au point B sera proportionnelle à

$$\frac{76^\circ + 66^\circ}{2} = 71^\circ.$$

D'ailleurs, à ce même instant, l'intensité électrique du point B est proportionnelle à la torsion observée

$$8^\circ + 68^\circ - 5^\circ = 71^\circ,$$

c'est-à-dire qu'au même instant, le rapport des intensités de l'électricité possédée par ces deux points est l'unité; en d'autres termes, ces intensités sont égales.

D'un autre côté, les intensités des points C et A, dans les deux dernières épreuves, sont respectivement proportionnelles à

$$8^\circ + 68^\circ - 14^\circ 45' = 61^\circ 15'.$$

et à

$$8^\circ + 68^\circ - 19^\circ 30' = 56^\circ 30'.$$

Par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait relativement aux points A et B, on sera conduit à adopter, pour la mesure de l'intensité électrique moyenne du point A, au moment de l'observation en C, le nombre

$$\frac{66^\circ + 56^\circ\, 30'}{2} = 61^\circ\, 15'.$$

Les quantités d'électricité possédées *au même instant* par les deux points A et C sont donc égales, et comme il est de même de A à l'égard de B, nous devons conclure de ces observations que sur la surface de la sphère conductrice isolée soumise à l'expérience, *la distribution de l'électricité est uniforme.*

Q. **231.** Détermination du volume de la couche électrique répandue à la surface d'une sphère.

La symmétrie de la figure, et par suite la symmétrie d'actions réciproques des molécules électriques les unes sur les autres conduisent à cette conséquence vérifiée par l'expérience, que la distribution de l'électricité doit être uniforme sur la surface de la sphère.

Par conséquent, la surface intérieure de la couche électrique doit être également sphérique et concentrique à la surface extérieure. Soit r le rayon de la surface extérieure, que nous pouvons confondre avec celui de la sphère, et $r - \delta$ celui de la surface intérieure, le volume de cette couche sera

$$\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi (r - \delta)^3 = 4\pi r^2 \delta \left(1 - \frac{\delta}{r} + \frac{\delta^2}{3r^2}\right).$$

Et comme l'expérience prouve que l'épaisseur δ de la couche électrique doit être extrêmement petite par rapport à r, on peut négliger les fractions $\frac{\delta}{r}$, $\frac{\delta^2}{3r^2}$ comparativement à l'unité; le volume de la couche électrique se trouve ainsi réduit à $4\varpi r^2\delta$, c'est-à-dire au produit de la surface de la sphère par l'épaisseur uniforme δ de la couche électrique.

Q. 232. Une sphère métallique de rayon R isolée et électrisée, mise dans la balance de Coulomb, a exercé sur le disque mobile une répulsion telle, que pour ramener celui-ci à une distance de a°, il a fallu une torsion totale de A° (en y comprenant a°). Après avoir touché cette sphère par une autre de rayon r, et placé de nouveau la première dans la balance électrique, la torsion nécessaire pour ramener le disque mobile à la distance normale a°, était A'°. Quel est le rapport des épaisseurs des couches électriques sur les deux sphères proposées, en ne supposant aucune déperdition?

Soit E la quantité d'électricité que possède la sphère de rayon R dans le premier état, E' celle qu'elle possède dans le second; ces quantités seront évidemment proportionnelles respectivement aux forces de torsions correspondantes à A° et A'°. On aura donc

$$\frac{E}{E'} = \frac{A}{A'},$$

d'où

$$E' = \frac{A'}{A}.E,$$

et

$$E - E' = \frac{E(A - A')}{A};$$

le rapport des quantités E', E — E' d'électricité que possèdent les deux sphères après le contact sera donc

$$\frac{E'}{E - E'} = \frac{A'}{A - A'}.$$

Si nous appelons δ et δ' les épaisseurs extrêmement minces des couches électriques répandues sur ces deux sphères, les volumes de ces couches (*v.* n° 231) seront respectivement

$$4\pi R^2\delta, \quad 4\pi r^2\delta',$$

le rapport de ces volumes devant être le même que celui des quantités d'électricité E', E — E', on aura

$$\frac{4\pi R^2\delta}{4\pi r^2\delta'} = \frac{A'}{A - A'},$$

d'où

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{A'}{A - A'} \cdot \frac{r^2}{R^2},$$

ce qui donne le rapport des épaisseurs des couches électriques sur les deux sphères proposées, *en les supposant assez éloignées pour qu'elles ne puissent réagir l'une sur l'autre par influence.*

Q. 233. Étant donnée une sphère conductrice électrisée, on la touche avec une autre, dont la grosseur est très petite par rapport à la première, et qu'on porte dans la balance de Coulomb; pour amener le disque mobile à une distance de 10°, il faut une torsion totale de 100°; on enlève à la petite sphère son électricité, on la met encore huit fois en contact avec la grosse, en lui enlevant après chaque contact l'électricité qu'elle a prise. Après le neuvième contact, on la laisse électrisée et on la porte dans la balance; la torsion nécessaire pour ramener à la distance normale de 10°, le disque mobile est seulement 80°. Quel est le rapport de l'électricité enlevée par chaque contact à l'électricité totale que possède la grande sphère au moment de ce contact?

Supposons d'abord la déperdition nulle; appelons E la quantité d'électricité que possède primitivement la grande sphère, et α la fraction que lui en enlève à chaque contact la petite; alors

$$E - \alpha E = E(1 - \alpha)$$

sera la quantité d'électricité qui reste à la grande sphère après le premier contact,

$$E(1-\alpha) - \alpha E.(1-\alpha) = E(1-\alpha)^2 \text{ après le second,}$$

..........,..................................

$$E(1-\alpha)^9 \text{ après le neuvième,}$$
$$E(1-\alpha)^{10} \text{ après le dixième.}$$

La petite sphère pouvant être ici assimilée au plan d'épreuve, prendra, au premier et au dixième contacts, des charges proportionnelles aux quantités E, $E(1-\alpha)^9$ que possédait la grosse immédiatement avant ces contacts: par conséquent ces quantités E, $E(1-\alpha)^9$ seront proportionnelles aux torsions 100°, et 80° qui mesurent la première et la dixième charge de la petite sphère, donc

$$\frac{E(1-\alpha)^9}{E} = \frac{80}{100} \quad \text{ou} \quad (1-\alpha)^9 = \frac{4}{5},$$

d'où

$$\log(1-\alpha) = \frac{\log 4 - \log 5}{9},$$

d'où

$$\alpha = 0,00449.$$

Plus généralement, n désignant le nombre des contacts, A_1, A_n les torsions correspondantes au premier et au $n^{\text{ième}}$, on serait arrivé à l'équation

$$(1-\alpha)^{n-1}=\frac{A_n}{A_1},$$

d'où

$$\alpha=\ldots.$$

Si, contrairement à notre supposition, il y avait une déperdition, et que cette déperdition fût constante pendant toute la durée de l'expérience, supposons que pendant les n contacts successifs la déperdition soit une certaine fraction f de la charge totale, alors avant le dernier contact, la quantité d'électricité possédée par la grande sphère ne serait plus

$$E(1-\alpha)^{n-1}, \quad \text{mais} \quad (1-f)\,E(1-\alpha)^{n-1},$$

et par suite, le rapport trouvé précédemment deviendrait

$$(1-f)\,(1-\alpha)^{n-1}=\frac{A_n}{A_1}\ldots.$$

Q. **234.** Un corps électrisé, agissant par influence à une très grande distance sur une sphère de très petit rayon non préalablement électrisée, l'attire proportionnellement à son rayon, et en raison inverse du cube de la distance?

Soient A le corps en question (*fig.* 66), M la petite sphère dont le rayon $OC = l$, et d la distance OA. Supposons, pour fixer les idées, le corps A chargé d'électricité négative avec une intensité $-b$. Puisque d est très grand par rapport à l, nous pouvons, sans erreur sensible, supposer que les quantités d'électricité positive et négative développées par influence sur le corps M ont une même intensité a.

L'action de $-b$ sur $+a$, à la distance $d-l$, est proportionnelle à

$$\frac{ab}{(d-l)^2};$$

et comme elle a lieu entre des électricités de nom contraire, elle est attractive; l'action de $-a$ sur $-b$, à la distance $d+l$, est

$$\frac{ab}{(d+l)^2};$$

et comme elle a lieu entre des électricités de même nom, elle est répulsive. Donc, en définitive, l'action réelle de A sur M sera exprimée par la différence entre

$$\frac{ab}{(d-l)^2}, \quad \text{et} \quad \frac{ab}{(d+l)^2},$$

et agira dans le sens de la plus grande force qui est ici attractive. Or,

$$\frac{ab}{(d-l)^2} - \frac{ab}{(d+l)^2} = \frac{ab(d^2+2dl+l^2)-ab(d^2-2dl+l^2)}{(d^2-l^2)^2}$$
$$= \frac{4abdl}{(d^2-l^2)^2},$$

et si nous négligeons l dans le dénominateur à cause de sa petitesse relativement à d, l'expression précédente se réduit à

$$\frac{4abdl}{d^4} = \frac{4abl}{d^3};$$

c'est-à-dire que l'attraction s'exerce proportionnellement au rayon l de la petite sphère, et en raison inverse du cube de sa distance au corps électrisé.

Q. 253. Lorsque deux corps M et N, de dimensions très petites par rapport à leur moyenne distance d (*fig.* 67), sont électrisés par l'influence d'un corps A très éloigné, ils s'attirent mutuellement en raison inverse du cube de leur moyenne distance d, et proportionnellement à la somme de leurs demi-diamètres l et l'.

Nous pouvons, comme dans la question précédente et par les mêmes raisons, supposer que dans le corps M la quantité d'électricité positive soit égale en intensité à la quantité d'électricité négative, et de même pour le corps N; soient $+a$ et $-a$ ces intensités dans le premier, $+b$ et $-b$ dans le second. Il en résultera quatre actions qui solliciteront ces corps à se mouvoir,

1°. celle de $+a$ sur $-b$ .... $\dfrac{ab}{(d-l-l')^2}$ attractive;

2°. celle de $+a$ sur $+b$ .... $\dfrac{ab}{(d-l+l')^2}$ répulsive;

3°. celle de $-a$ sur $-b$ .... $\dfrac{ab}{(d+l-l')^2}$ répulsive;

4°. celle de $-a$ sur $+b$ .... $\dfrac{ab}{(d+l+l')^2}$ attractive.

L'action résultante sera donc

$$+\frac{ab}{(d-l-l')^2}-\frac{ab}{(d-l+l')^2}-\frac{ab}{(d+l-l')^2}+\frac{ab}{(d+l+l')^2}.$$

Si après avoir remarqué que le premier terme peut se mettre sous la forme

$$\frac{ab}{d^2\left[1-\frac{2(l+l')}{d}+\frac{(l+l')^2}{d^2}\right]},$$

et les autres sous une forme analogue, et après les avoir réduits au même dénominateur, on supprime les termes de l'ordre

$$\frac{l}{d}, \frac{l'}{d}, \frac{l+l'}{d},$$

et leurs puissances supérieures dans le dénominateur, on trouvera toutes réductions faites, pour l'action résultante,

$$\frac{4ab\,(l+l')}{d^3},$$

conformément au théorème énoncé.

Q. 236. Deux surfaces électriques indéfinies agissant sur un même point électrisé, doivent produire le même effet, quelle que soit leur distance de ce point.

Prenons sur la première surface un élément quelconque ω (*fig.* 68) infiniment petit, et du point donné m comme sommet, en prenant ω pour base, décrivons une petite surface conique, prolongeons-la jusqu'à la deuxième surface électrique, et appelons ω' l'élément qui sera ainsi intercepté.

Soit f l'action de l'unité de la première surface électrique sur le point m, à l'unité de distance, et f' celle de la seconde; soient encore F et F′ les actions totales respectives des éléments ω, ω'; elles auront pour expressions

$$\mathrm{F} = \frac{\omega . f}{\overline{m\omega}^2}, \quad \mathrm{F}' = \frac{\omega' . f'}{\overline{m\omega'}^2},$$

puisqu'elles sont en raison inverse du carré de la distance; d'ailleurs

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\overline{m\omega}^2}{\overline{m\omega'}^2},$$

d'où

$$\omega' = \frac{\omega . \overline{m\omega'}^2}{\overline{m\omega}^2},$$

et par conséquent

$$\mathrm{F}' = \frac{f\omega . \overline{m\omega'}^2}{\overline{m\omega}^2\, \overline{m\omega'}^2} = \frac{f\omega}{\overline{m\omega}^2} = \mathrm{F},$$

et comme il en serait de même pour tous les autres éléments correspondants des deux surfaces proposées, il s'ensuit qu'elles produiront le même effet l'une et l'autre sur le point m. Il résulte de là évidemment que l'action simultanée de plusieurs couches électriques indéfinies, placées à différentes distances, du point m, peut être remplacée par celle d'une autre couche indéfinie quelconque, située à une distance quelconque, et ayant pour intensité la somme des intensités de celles-ci.

Q. 237. Quelle est la *force condensante* d'un appareil condensateur d'électricité dans lequel on a observé les résultats suivants : ayant touché avec le plan d'épreuve l'armure qui était en contact avec la source d'électricité, on a observé dans la balance de Coulomb une torsion de 72°, tandis que l'autre armure, traitée de la même manière, n'a donné qu'une torsion de 69°. Il est sous-entendu qu'avant les épreuves les deux armures avaient été soustraites à lenr influence mutuelle et isolée.

La force condensante est, comme on sait, le rapport de *la quantité totale d'électricité possédée* par la première armure lorsqu'elle fait partie du condensateur, à la quantité qui se trouverait sur cette même armure si elle était libre et isolée. Or, cette dernière n'est autre chose que l'excès de la quantité totale E d'électricité possédée par la première armure sur la partie de E qui est retenue par l'influence de l'armure opposée. Si e est la quantité d'électricité possédée par cette seconde armure, e sera évidemment moindre que E. Soit

$$m = \frac{e}{E} < 1;$$

si, sans déplacer les deux armures, on fait communiquer la première avec le sol en isolant la seconde, la première perdra une certaine quantité de son électricité jusqu'à ce que la quantité E′ qui en reste soit seule complétement retenue par l'influence de e. Alors on aura

$$\frac{E'}{e} = m.$$

D'après sa définition, la force condensante sera évidemment

$$\frac{E}{E - E'};$$

mais comme on a

$$E' = me, \quad e = mE,$$

la substitution de ces valeurs donne

$$\frac{E}{E - E'} = \frac{1}{1 - m^2}.$$

Or, d'après les données de la question

$$e : E :: 69 : 72,$$

donc

$$m = \frac{e}{E} = \frac{69}{72} = \frac{23}{24}.$$

Et par conséquent, la force condensante cherchée est égale à

$$\frac{1}{1-\left(\frac{23}{24}\right)^2} = 12{,}24 \text{ environ.}$$

Q. 238. Déterminer, d'après les données précédentes, et avec le même appareil, la quantité d'électricité qui se trouvera sur chaque armure isolée, lorsqu'on les aura mises en communication l'une avec l'autre à l'aide d'un excitateur isolé.

Si les deux quantités d'électricité E, e d'espèce contraire étaient égales entre elles, après la communication le système serait ramené à l'état neutre; mais comme E surpasse e, cette neutralité n'aura pas lieu, et la différence $E - mE$ se partagera entre les deux armures; chacune n'en possèdera donc que

$$\frac{E - mE}{2},$$

ou

$$\frac{E(1-m)}{2} = \frac{E}{48},$$

en mettant à la place de m sa valeur précédente. Les charges étant d'ailleurs proportionnelles aux torsions produites par le plan d'épreuve, en admettant qu'on ait touché des points homologues, comme la charge E a produit une torsion de 72°, $\frac{E}{48}$ n'en produirait qu'une de 1° 30'.

Q. 239. Loi des décroissemens successifs des quantités d'électricité répandues sur les deux plateaux du condensateur, lorsqu'on les met alternativement en communication avec le sol.

Soit A la charge totale primitive du plateau collecteur, $-B$ celle du plateau qui a communiqué avec le sol, A_1, A_2, A_3,... ce que devient A après la 1re, la 2e, la 3e... communication avec le sol, $-B_1$, $-B_2$, $-B_3$,... ce que devient $-B$ lorsqu'il a communiqué une fois, deux fois, trois fois... avec le sol. Nous aurons d'abord

$$B + mA = 0.$$

Ensuite, l'appareil étant isolé, si nous touchons A, une partie de cette électricité s'écoulera dans le sol, et ce qui en restera sera précisément la quantité que nous avons appelée A_1 et qui est neutralisée par l'influence de $-B$.

Nous aurons donc

$$A_1 + mB = 0.$$

Après ce contact, la force expansive apparaît du côté de $-B$; si l'on établit de ce côté la communication avec le sol, il n'y restera que ce qui peut être neutralisé par l'influence de A_1, et que nous avons appelé $-B_1$; on aura

$$B_1 + mA_1 = 0.$$

Alors, l'excès de force expansive se trouve du côté de A_1,... etc. En continuant d'étudier les effets successifs des différens contacts alternatifs, on trouvera une série d'équations semblables aux précédentes, et que nous allons rassembler.

Nombre des contacts.			
0	touché $-B$	$B + mA$	$= 0$,
1	touché A	$A_1 + mB$	$= 0$,
2	touché $-B$	$B_1 + mA_1$	$= 0$,

$3 \ldots\ldots\ldots$ touché $\quad A_1 \ldots\ldots A_2 + mB_1 = 0,$

$4 \ldots\ldots\ldots$ touché $\quad - B_1 \ldots\ldots B_2 + mA_2 = 0,$

....

....

$2n \ldots\ldots\ldots$ touché $\quad - B_{n-1} \ldots B_n + mA_n = 0,$

$2n + 1 \ldots$ touché $\quad A_n \ldots\ldots A_{n+1} + mB_n = 0,$

$2n + 2 \ldots$ touché $\quad - B_n \ldots\ldots B_{n+1} + mA_{n+1} = 0.$

On tire de là deux systèmes d'équations se rapportant chacnne à l'un des plateaux

$$A_1 = m^2 A, \qquad B_1 = m^2 B,$$
$$A_2 = m^2 A_1, \qquad B_2 = m^2 B_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n+1} = m^2 A_n, \qquad B_{n+1} = m^2 B_n.$$

Le premier système fait connaître les quantités d'électricité qui restent successivement sur le plateau collecteur, et le second, celles qui restent sur l'autre plateau.

Multipliant membre à membre toutes les équations d'un même système en prenant successivement, les deux premières, les trois premières, etc... on parviendra à exprimer A_1, A_2, $A_3 \ldots$ en fonction de m et de A, et B_1, B_2, $B_3 \ldots$ en fonction de m et de B, et du nombre des contacts, on trouve de la sorte

$$A_1 = m^2 A, \qquad B_1 = m^2 B,$$
$$A_2 = m^4 A, \qquad B_2 = m^4 B,$$
$$A_3 = m^6 A, \qquad B_3 = m^6 B,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n+1} = m^{2(n+1)} A, \qquad B_{n+1} = m^{2(n+1)}.$$

Il est visible que chacune de ces séries de quantités forme une progression géométrique décroissante puisque m est moindre que l'unité, et la raison de cette progression est m^2. Les pertes d'électricité faites successivement par les deux plateaux en vertu des communications réitérées avec le sol seront exprimées par les différences successives

$$\begin{aligned}
A - A_1 &= (1 - m^2)\,A,\\
A_1 - A_2 &= (1 - m^2)\,m^2A,\\
A_2 - A_3 &= (1 - m^2)\,m^4A,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_n - A_{n+1} &= (1 - m^2)\,m^{2n}A,\\[1ex]
B - B_1 &= (1 - m^2)\,B,\\
B_1 - B_2 &= (1 - m^2)\,m^2B,\\
B_2 - B_3 &= (1 - m^2)\,m^4B,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
B_n - B_{n+1} &= (1 - m^2)\,m^{2n}B.
\end{aligned}$$

Les pertes successives d'électricité qu'éprouve chacun des plateaux forment aussi une progression géométrique décroissante dont la raison est m^2; cette progression décroîtra d'autant moins rapidement que m différera moins de l'unité.

Quel que soit m, pour décharger complétement les deux plateaux de cette manière, il est clair qu'il faudrait mathématiquement un nombre infini de contacts alternatifs; car ce n'est que lorsque $m = \infty$ que les séries

$$\begin{aligned}
&(1 - m^2)\,A(1 + m^2 + m^4 + \ldots),\\
&(1 - m^2)\,B(1 + m^2 + m^4 + \ldots),
\end{aligned}$$

qui expriment la somme des pertes éprouvées par le premier et le second plateau, se réduisent respectivement à

$$(1 - m^2)\,A \cdot \frac{1}{1 - m^2} = A,$$

$$(1 - m^2)\,B \cdot \frac{1}{1 - m^2} = B,$$

mais en réalité, dans la pratique, après un nombre de contacts assez limité, la quantité d'électricité qui reste sur chaque plateau cesse d'être sensible.

Q. **240.** Déterminer le rapport de la charge d'un même système de bouteilles de Leyde lorsqu'on le charge en batterie et lorsqu'on le charge par cascade, en ne tenant pas compte des causes variables de déperdition, et en les supposant en communication avec la même source d'électricité.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il n'y ait que trois bouteilles dans le système : soient E, E', E'' les quantités d'électricité répandues sur les armures intérieures de ces trois bouteilles, lorsqu'elles font partie d'une batterie, e, e', e'' les quantités d'électricité que possèdent, dans les mêmes circonstances, les armures extérieures.

Appelons encore E_1, E'_1, E''_1 les quantités d'électricité que possèdent respectivement les mêmes armures intérieures, après la charge par cascade, e_1, e'_1, e''_1 celles qui sont répandues alors sur les armures extérieures correspondantes; on a évidemment

$$E_1 = E,\ e_1 = e,$$
$$E'_1 < E',\ E''_1 < E'',$$

et aussi

$$e'_1 < e',\ e''_1 < e''.$$

Soient

$$\frac{e}{E} = m,\ \frac{e'}{E'} = m',\ \frac{e''}{E''} = m'',$$

on aura de même

$$\frac{e'_1}{E'_1} = m' \; \frac{e''_1}{E''_1} = m'' ;$$

comme d'ailleurs, à cause de la disposition du système par cascade, la source d'électricité qui produit E′ est modifiée dans le rapport de E à e ou de 1 à m pour produire E'_1; on a

$$E'_1 : E' :: e : E :: m : 1,$$

d'où

$$E'_1 = mE',$$

et aussi

$$E''_1 : E'' :: e'_1 : E :: m'mE' : E,$$

d'où

$$E''_1 = \frac{mm'E'E''}{E};$$

on aura de la même manière :

$$e'_1 : e' :: E'_1 : E' :: mE' : E' :: m : 1,$$

d'où

$$e'_1 = me',$$

et aussi

$$e''_1 : e'' :: E''_1 : E'' :: \frac{mm'E'E''}{E} : E'',$$

d'où

$$e''_1 = mm' \frac{E'}{E} e''.$$

Si nous supposons que la source d'électricité développe de l'électricité positive, E, E′, E″ seront des charges d'électricité positive; e, e', e'' des charges d'électricité négative; E'_1, sera de même nature que e, e'_1 de nature contraire; E''_1 de même nature que e'_1, e''_1 de nature contraire.

La somme des charges d'électricité positive sera donc, sur le système en batterie,

$$E + E' + E'',$$

et sur le système chargé par cascade

$$E + e'_{1} + E''_{1} = E + me' + \frac{mm'E'E''}{E},$$

ou

$$E + mm'E' + \frac{mm'E'E''}{E};$$

le rapport des quantités d'électricité positive accumulées sera donc

$$\frac{E^2 + mm'EE' + mm'E'E''}{E(E + E' + E'')}:$$

Si l'on cherche de même le rapport des quantités d'électricité négatives, on trouvera pour le système en batterie

$$e + e' + e'',$$

et pour le système en cascade

$$e + E'_{1} + e''_{1} = e + me' + \frac{mm'E'e''}{E};$$

et par suite, pour le rapport,

$$\frac{Ee + mEe' + mm'E'e''}{E(e + e' + e'')}.$$

Il est facile de voir comment on pourrait étendre cette recherche au cas d'un plus grand nombre de bouteilles.

Si l'on supposait toutes les bouteilles parfaitement semblables, on aurait évidemment

$$E = E' = E'', \quad e = e' = e'', \quad m = m' = m'';$$

et les rapports précédens se réduiraient à

$$\frac{1 + 2m^2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1 + m + m^2}{3},$$

ce qui nous montre que la charge est moins forte par cascade qu'en batterie.

Si l'on voulait calculer la charge de l'une quelconque des bouteilles d'un système chargé par cascade, en supposant toutes les bouteilles exactement semblables, en désignant par E_1, E'_1, E''_1,... $E^{(n)}_1$, les quantités d'électricité accumulées sur les armures intérieures successives, et par e_1, e'_1, e''_1,... $e^{(n)}_1$, celles qui sont accumulées sur les armures extérieures correspondantes, on aura

$$e_1 = E'_1, \quad e'_1 = E''_1, \quad e^{(n-1)}_1 = E^{(n)}_1.$$

d'ailleurs,

$$\begin{aligned} e_1 &= mE_1, \\ e'_1 &= mE'_1, \\ e''_1 &= mE''_1, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots \\ e^{(n)}_1 &= mE^{(n)}_1, \end{aligned}$$

Si la bouteille dont on veut calculer la charge est la $n^{ième}$, les quantités d'électricité accumulées sur son armure intérieure et sur son armure extérieure seront respectivement $E_1^{(n)}$ et $e_1^{(n)}$.

Mais nous avons reconnu précédemment que

$$E^{(n)}_1 = e^{(n-1)}_1 = mE^{(n-1)}_1,$$

par la même raison,

$$E_1^{(n-1)} = e_1^{(n-2)} = mE_1^{(n-2)},$$

d'où

$$E_1^{(n)} = m^2E^{(n-2)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et enfin

$$E_1^{(n)} = m^{n-1}E_1.$$

On trouverait de la même manière

$$e_1^{(n)} = m^nE_1.$$

Si, à l'aide d'un excitateur isolé, on établit la communication entre l'armure intérieure de la première bouteille et l'armure extérieure de la $n^{ième}$, la neutralisation ne sera pas complète, même en admettant le cas où les électricités seraient de nature contraire; mais, il resterait $E_1 - m^nE_1$ après l'étincelle; et cette électricité, entièrement libre, se partagerait entre ces deux armures. Quant aux électricités intermédiaires, elles devront disparaître complétement, s'il n'y a pas eu déperdition, puisqu'elles ont été produites par influence. Quant à la possibilité ou à l'impossibilité d'une étincelle entre l'électricité de la première armure inférieure et celle de la dernière armure extérieure, il est clair que l'étincelle ne pourrait avoir lieu de la sorte, dans le cas de deux bouteilles, ou plus généralement dans le cas d'un nombre pair de bouteilles, parce qu'alors, les deux électricités seraient de même espèce. Au contraire l'étincelle pourrait avoir lieu si n était un nombre impair.

Mouvemens de deux petites boules de moelle de sureau électrisées et suspendues très près l'une de l'autre, lorsqu'elles sont plongées dans une atmosphère électrisée.

241. Supposons, pour fixer les idées, les boules et l'atmosphère chargées de la même espèce d'électricité ; d'électricité positive par exemple. Si, dans cette hypothèse, l'électricité des boules et celle de l'atmosphère qui les environne ont la même intensité, les deux boules (*fig.* 66), resteront en repos. En effet, l'action du milieu ambiant peut être assimilée aux actions d'une infinité de systèmes binaires de boules semblables aux boules proposées, agissant respectivement suivant des directions diamétralement opposées. Or, toutes ces actions s'entre-détruisent dans toutes les directions, excepté suivant le diamètre qui passe par le point de contact des deux boules ; suivant ce diamètre agissent, sur la boule a, d'une part la boule $á$, et de l'autre l'atmosphère électrisée agissant ici, suivant cette direction, comme une autre boule semblable à $á$ et lui faisant également équilibre. De sorte que la boule a restera en repos. Par des considérations analogues, on reconnaît qu'il en sera de même de la boule $á$.

Si l'atmosphère est plus fortement électrisée que les deux boules, les actions diamétralement opposées du milieu ambiant sur ces deux boules s'entre-détruiront encore toutes, excepté suivant le diamètre du contact. Dans cette direction agiront sur a, d'une part la boule $á$, et de l'autre une boule fictive plus fortement électrisée qui décomposera une partie de l'électricité neutre de a, jusqu'à ce que l'électricité positive possédée par cette boule ait la même intensité que celle de l'atmosphère ambiante. Mais, en même temps, la boule a acquerra une certaine quantité d'électricité négative à laquelle rien ne fera équilibre.

Une action semblable s'exerçant sur a', il en résultera finalement que *les deux boules se repousseront comme si elles étaient électrisées négativement*. Enfin, si les boules sont plus fortement électrisées que le milieu ambiant, des considérations semblables aux précédentes feront aisément reconnaître que les boules conserveront un excès d'électricité positive qui ne sera pas équilibré par la résultante des actions ambiantes, et que *deux boules se repousseront comme si elles étaient chargées d'électricité positive*.

Ce qui précède suffit pour indiquer la marche à suivre pour prévoir ce qui arriverait si les boules et l'atmosphère électrisée étaient chargées d'électricité négative, ou si l'atmosphère ambiante et les boules ne possédaient pas la même espèce d'électricité.

Distribution de l'électricité dans la pile isolée, à colonne, en supposant constante la différence des quantités d'électricité accumulées sur deux élémens successifs de même espèce.

242. Soit x la quantité d'électricité positive libre qui existe alors sur le dernier élément zinc. Si n est le nombre des couples métalliques, la suite des quantités d'électricité positive qui se trouve sur les élémens zinc successivement inférieurs formera la progression

$$x. \quad x - \varepsilon, \quad x - 2\varepsilon, \ldots \; x - (n - 1)\varepsilon,$$

dont la somme est

$$nx - \frac{n(n-1)\varepsilon}{2}.$$

Les quantités d'électricite libres sur les élémens cuivre forment une autre progression dont chaque terme sera moindre de ε que ceux de la précédente, c'est-à-dire

$$x - \varepsilon, \quad x - 2\varepsilon, \quad x - 3\varepsilon, \ldots \; x - n\varepsilon,$$

leur somme sera

$$nx - \frac{n(n+1)\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, pour avoir la quantité totale d'électricité positive libre qui existe dans la colonne, il faut ajouter ensemble les deux sommes précédentes, ce qui donne

$$2nx - n^2\varepsilon,$$

ce résultat doit être constamment nul, puisque la pile étant isolée, a dû conserver toute son électricité naturelle; par conséquent

$$2nx - n^2\varepsilon = 0,$$

ou

$$x = \frac{n\varepsilon}{2}.$$

Telle est la quantité d'électricité libre répandue sur l'élément supérieur quand l'équilibre est établi. Quant à l'élément cuivre inférieur, la quantité libre est

$$x - n\varepsilon,$$

ou

$$-\frac{n\varepsilon}{2};$$

elle est la même que la précédente au signe près. Généralement, pour le $m^{ième}$ élément zinc à partir du sommet de la colonne, la quantité d'électricité libre est

$$x - (m - 1)\varepsilon,$$

ou

$$\frac{n\varepsilon}{2} - (m - 1)\varepsilon.$$

Celle d'un élément cuivre également distant de l'autre extrémité de la colonne serait

$$x - n\varepsilon + (m - 1)\varepsilon,$$

ou

$$-\frac{n\varepsilon}{2} + (m - 1)\varepsilon.$$

elle est, au signe près, la même que la précédente.

Par conséquent lorsque la pile est isolée, et qu'elle n'a que sa quantité d'électricité naturelle, les élémens qui sont à égale distance de ses extrémités, se trouvent également électrisées l'un positivement, l'autre négativement. S'il y a un élément zinc qui soit dans l'état naturel, la quantité d'électricité y sera nulle, et son rang sera déterminé par l'équation

$$\frac{n\varepsilon}{1} - (m - 1)\varepsilon = 0,$$

qui donne

$$m = 1 + \frac{n}{2}.$$

m devant être un nombre entier positif, cette circonstance n'a lieu que si le nombre n des couples métalliques est pair; alors l'élément cuivre qui a la même quantité d'électricité, mais de nature contraire, est aussi dans l'état naturel, et leurs distances respectives aux deux extrémités de la pile étant

$$1 + \frac{n}{2},$$

ces deux élémens se trouveront au milieu de la colonne.

Mais l'hypothèse de Volta, sur la constance de la différence entre les quantités d'électricité que possèdent deux élémens successifs de même espèce, étant actuellement mise en doute, il en résulte que les progressions précédentes sont entachées d'inexactitude.

A la rigueur, même en admettant comme exacte l'hypothèse de Volta, pour que l'état électrique de la pile fût conforme à ces formules, il faudrait que les pièces fussent superposées avec les plus grandes précautions d'isolement, afin que les quantités totales d'électricité positive et négative fussent exactement égales entre elles. Mais, on obtiendrait les mêmes résultats en isolant une pile quelconque, après l'avoir touchée par la base; car la déperdition qu'éprouve dans l'air chacun des élémens, finirait par l'amener au même état que si on l'eût isolée dès le moment de sa construction.

Distribution de l'électricité dans une pile à colonne dont l'élément inférieur cuivre communique avec le sol.

243. En désignant toujours par n le nombre des couples métalliques, et par x la charge de l'élément supérieur zinc, les quantités d'électricité qui se trouvent sur les élémens zinc successivement inférieurs formeront la progression

$$x, \quad x - \varepsilon, \quad x - 2\varepsilon, \ldots \quad x - (n - 1)\varepsilon,$$

dont la somme est

$$nx - \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon,$$

Les quantités d'électricité que possèdent les élémens cuivre successifs, en commençant par la partie supérieure de la colonne forment la progression

$$x - \varepsilon, \quad x - 2\varepsilon, \ldots \quad x - n\varepsilon,$$

dont la somme est

$$nx - \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon,$$

et comme le dernier élément inférieur cuivre communique avec le sol, il doit être à l'état naturel, donc

$$x - n\varepsilon = 0,$$

d'où

$$x = n\varepsilon.$$

Alors l'électricité répandue sur tous les élémens zinc aura pour expression

$$n^2\varepsilon - \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon = \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon,$$

et celle qui est répandue sur les élémens cuivre

$$n^2\varepsilon - \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon.$$

La différence entre ces deux quantités d'élémens est $n\varepsilon$, c'est-à-dire proportionnelle au nombre des couples métalliques, comme il était facile de le prévoir.

Il est encore aisé de reconnaître que dans toute la longueur de la colonne, il ne saurait y avoir d'autre élément à l'état naturel que celui qui communique directement avec le sol : en effet, prenons un élément zinc quelconque, le m^{ieme} à partir du sommet de la colonne, l'électricité qu'il possède est

$$x - (m - 1)\varepsilon,$$

ou

$$n\varepsilon - (m - 1)\varepsilon,$$

si cet élément est dans l'état naturel, on doit avoir

$$n\varepsilon - (m - 1)\varepsilon = 0,$$

d'où

$$m = n + 1;$$

c'est-à-dire que cet élément zinc devrait être hors de la pile, puisqu'elle n'en renferme que n. Si nous faisons la même recherche relativement à un élément cuivre situé au m^{ieme} rang à compter du sommet, l'équation

$$x - m\varepsilon = 0,$$

ou

$$n\varepsilon - m\varepsilon = 0,$$

donnera

$$m = n.$$

c'est-à-dire que le seul élément cuivre à l'état naturel est celui qui communique avec le réservoir commun.

Q. 244. Dans un même lieu, la quatrième puissance du nombre d'oscillations que ferait l'aiguille aimantée dans sa position naturelle d'inclinaison et de déclinaison est égale à la somme des quatrièmes puissances des nombres d'oscillations faites par une aiguille horizontale et par une aiguille verticale. (Cette dernière position s'obtient aisément en plaçant l'aiguille d'inclinaison dans un plan perpendiculaire au méridien magnétique.)

Soit f la force directrice du globe ; cette force étant du genre de celles qu'on appelle forces accélératrices constantes. Lorsqu'on fera osciller une aiguille aimantée soumise à son influence, on pourra lui appliquer la formule $t = \pi \sqrt{\frac{f}{g}}$ du pendule ordinaire, en remplaçant g par f. Si donc n est le nombre d'oscillations ainsi faites par l'aiguille dans un temps donné, comme le nombre n d'oscillations est en raison inverse du temps t d'une oscillation, on aura pour n une expression de la forme

$$n = \frac{k}{t},$$

ou

$$n^2 = Kf,$$

ou bien encore

$$f = \frac{n^2}{K}.$$

Si nous décomposons la force f, représentée en grandeur et en direction par OR (*fig.* 67), suivant la ligne horizontale OQ, et suivant la verticale OP, toutes deux situées, ainsi que OR, dans le plan du méridien magnétique, en désignant par i l'inclinaison ROR, les composantes

$$OQ = f', \quad OP = f''$$

seront respectivement

$$f' = f \cos i, \quad f'' = f \sin i.$$

fig. 70

Enfin, si l'on appelle n' et n'' les nombres d'oscillations faits par une aiguille horizontale et par une aiguille verticale sous les influences respectives des composantes f' et f'' pendant un temps égal au temps employé par la précédente pour exécuter n oscillations, nous aurons

$$f' = f \sin i = \frac{n'^2}{K},$$

$$f'' = f \cos i = \frac{n''^2}{K};$$

mais, dans le rectangle QOPR,

$$\overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OR}^2.$$

Et, en mettant à la place des quantités qui entrent dans cette égalité, leurs valeurs déterminées précédemment, nous arriverons au résultat énoncé

$$n^4 = n'^4 + n''^4.$$

Q. 245. Déterminer l'inclinaison de l'aiguille aimantée d'après deux observations faites dans deux azimuts quelconques perpendiculaires entre eux.

Soient C le centre de gravité de l'aiguille, CR la direction de la force directrice du globe terrestre, f l'intensité de cette force dirigée dans le plan méridien magnétique, et Cx, Cy, Cz trois axes rectangulaires, les deux premiers horizontaux, et le troisième vertical; α, β, i les angles que CR fait avec ces trois axes, i sera l'inclinaison cherchée. $f \cos \alpha$, $f \cos \beta$, $f \cos i$ sont les composantes de la force directrice suivant les trois axes des x, des y et des z. fig(71)

Si l'aiguille d'inclinaison est forcée de se mouvoir dans le plan zCx, la composante $f\cos\beta$ sera détruite par la résistance qu'oppose le système à tout autre mouvement que celui de rotation autour de l'axe Cy. Alors l'aiguille, soumise à l'action des seules composantes $f\cos\alpha$, $f\cos i$, s'arrêtera dans une certaine position, faisant avec l'axe Cz un angle que nous appellerons i'. Cet angle sera donné par l'équation

$$tg i' = \frac{\cos\alpha}{\cos i}.$$

Si, dans une seconde observation, on force l'aiguille à se mouvoir dans le plan zCy autour de l'axe Cx, la composante $f\cos\alpha$ sera détruite par la résistance qu'oppose le système à tout autre mouvement que celui de rotation autour de l'axe Cx, et l'aiguille s'arrêtera dans une autre position, faisant avec le verticale Cz un certain angle i'' donné par l'équation

$$\frac{\cos\beta}{\cos i} = tg i''.$$

De ces deux équations on déduit

$$tg^2 i' + tg^2 i'' = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}{\cos^2 i},$$

ou bien, à cause de

$$\cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2 i = 1,$$

ou

$$\left.\begin{array}{c}\cos^2\alpha + \cos^2 6 = \sin^2 i, \\ tg^2 i' + tg^2 i'' = tg^2 i.\end{array}\right\} \quad (1).$$

Si le plan zCx était le plan méridien magnétique lui-même, on aurait

$$i'' = 0, \quad \text{et} \quad i' = i;$$

c'est-à-dire que si, par tâtonnement, on pouvait trouver l'azimut dans lequel l'aiguille d'inclinaison se tient verticale, il suffirait, pour avoir l'inclinaison véritable, de la placer dans un azimut faisant avec ce dernier un angle de 90°.

Comme application de la formule (1), si nous supposons qu'on ait observé

$$i' = 45°, \quad i'' = 30°,$$

la valeur de l'inclinaison correspondante i sera donnée par l'équation

$$R^2 + \frac{R^2}{3} = tg^2 i,$$

ou

$$tg.i = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}};$$

d'où

$$i = 49° \; 6' 27''.$$

Q. **246.** Comparaison des intensités magnétiques en différents points du globe, d'après les nombres d'oscillations faites dans un même temps par une aiguille d'inclinaison.

Soient f, f', f'' les intensités de la force directrice du globe en trois points donnés, n, n', n'' les nombres d'oscillations correspondantes faites dans un même temps normal; d'après le n° **244**, nous aurons entre f, f', f'', n, n', n'' des relations de la forme

$$n^2 = Kf,$$
$$n'^2 = Kf',$$
$$n''^2 = Kf'',$$

d'où

$$\frac{n'^2}{n^2}=\frac{f'}{f},\ \frac{n''^2}{n^2}=\frac{f''}{f}.$$

C'est-à-dire qu'on pourra déterminer ainsi, non pas les intensités absolues f, f', f'', mais les rapports de toutes les autres à l'une d'elles, à f par exemple. Si l'on cherche le rapport des accroissements $f'-f$, $f''-f$ à l'intensité f prise pour point de comparaison, ils seront donnés par les équations

$$\frac{f'-f}{f}=\frac{n'^2-n^2}{n^2},$$
$$\frac{f''-f}{f}=\frac{n''^2-n^2}{n^2}.$$

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé l'aiguille parfaitement équilibrée; si elle ne l'est pas bien, elle sera soumise à l'action de deux forces, dont l'une sera une certaine fraction Ff de la force directrice du globe, et dont l'autre sera due à la gravité. Si G est le moment de cette dernière lorsque l'aiguille est horizontale, il sera $G\cos i$ lorsqu'elle fera avec la verticale un angle i qui n'est autre chose que l'inclinaison observée. Suivant que ces deux forces concourront dans le même sens ou dans des sens opposés, on aura

$$n^2 = K(Ff \pm G\cos i),$$
$$n'^2 = K(Ff' \pm G\cos i'),$$
$$n''^2 = K(Ff'' \pm G\cos i'');$$

d'où

$$n^2\cos i' - n'^2\cos i = K(Ff\cos i' - Ff'\cos i),$$
$$n^2\cos i'' - n''^2\cos i = K(Ff\cos i'' - Ff''\cos i);$$

et par suite

$$\frac{n^2 \cos i' - n'^2 \cos i}{n^2 \cos i'' - n''^2 \cos i} = \frac{f \cos i' - f' \cos i}{f \cos i'' - f'' \cos i},$$

on trouverait semblablement

$$\frac{n'^2 \cos i - n^2 \cos i'}{n'^2 \cos i'' - n''^2 \cos i'} = \frac{f' \cos i - f \cos i'}{f' \cos i'' - f'' \cos i'};$$

ces deux équations serviront à trouver les rapports

$$\frac{f'}{f} \text{ et } \frac{f''}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{f'-f}{f} \text{ et } \frac{f''-f}{f}.$$

Q. 247. Quels sont les rapports des intensités magnétiques du globe en cinq points qui ont fourni les résultats suivants : 1° avec l'aiguille d'inclinaison :

Au premier point d'observation... 400 oscillations 15′
au second.................... 360 .... *id.*
au troisième .... 450 .... *id.*
au quatrième.................. 380 .... *id.*
au cinquième .... 410 .... *id.*;

2°. Avec l'aiguille de déclinaison :

Au premier lieu d'observation..... 380 .... *id.*
au second.................... 340 .... *id.*
au troisième .... 425 .... *id.*
au quatrième.................. 360 .... *id.*
au cinquième.................. 385 .... *id.*

On suppose prise pour unité l'intensité magnétique du troisième point.

Soient f, f' f'', f''', f^{IV} les intensités absolues du magnétisme dans ces divers points ; les intensités relatives aux trois points seront respectivement

$$\frac{f}{f''} = \frac{(400)^2}{(450)^2} = 0,7901 \text{ pour le premier,}$$

$$\frac{f'}{f''} = \left(\frac{360}{450}\right)^2 = 0,6400 \text{ pour le deuxième,}$$

$$1 \text{ pour le troisième,}$$

$$\frac{f'''}{f''} = \left(\frac{380}{450}\right)^2 = 0,7126 \text{ pour le quatrième,}$$

$$\frac{f^{\text{IV}}}{f''} = \frac{(410)^2}{(460)^2} = 0,8301 \text{ pour le cinquième.}$$

Les observations faites avec l'aiguille de déclinaison donneront les résultats suivants :

$$\frac{f}{f''} = \frac{(380)^2}{(425)^2} = 0,7994 \text{ pour le premier,}$$

$$\frac{f'}{f''} = \frac{(340)^2}{(425)^2} = 0,6400 \text{ pour le deuxième,}$$

$$1 \text{ pour le troisième,}$$

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{(360)^2}{(425)^2} = 0,7175 \text{ pour le quatrième,}$$

$$\frac{f^{\text{IV}}}{f''} = \frac{(385)^2}{(425)^2} = 0,8206 \text{ pour le cinquième.}$$

Les valeurs comparatives ne s'accordant pas rigoureusement dans les deux séries d'observations, on devra prendre les moyennes

$$\frac{0,7901 + 0,7994}{2} = 0,79475 \text{ pour le premier point,}$$

$$0,6400 \text{ pour le deuxième,}$$

$$\frac{0,7126 + 0,7175}{2} = 0,71505 \text{ pour le quatrième,}$$

$$\frac{0,8301 + 0,8206}{2} = 0,82535 \text{ pour le cinquième,}$$

Q. **248.** Une aiguille aimantée fait, sous l'influence du globe, cinquante oscillations par minute, et sous l'influence réunie du globe et d'un aimant artificiel elle en fait 60. Quel est le rapport de l'action de l'aimant à celle du globe ?

Soit f l'intensité de l'action du globe, et x celle de l'action de l'aimant artificiel, nous aurons évidemment

$$\frac{f+x}{f}=\frac{(60)^2}{(50)^2}=\frac{36}{25},$$

et par suite

$$\frac{x}{f}=\frac{36-25}{25}=0,36.$$

Si l'on cherche combien il faudrait d'aimans semblables à celui dont il est ici question, et semblablement placés pour produire le même effet que la terre, on trouvera

$$\frac{1}{0,36}=2,777\ldots;$$

c'est-à-dire que deux seraient insuffisans, et que trois produiraient une action plus énergique que celle du globe.

Q. **249.** Quelle devra être la distance d de deux barreaux aimantés parallèles entre eux et parfaitement semblables, pour qu'une molécule m située sur l'axe du barreau (*fig.* 69) à l'état naturel, perpendiculaire à leur direction, éprouve de leur part le maximum d'action ? (On suppose la molécule m placée au milieu de l'intervalle des deux barreaux, et les deux pôles agissans A et B d'espèce contraire.)

Soit a la distance AR ou BS de l'un des pôles A ou B au barreau qu'on veut aimanter, e l'épaisseur de ce bar-

fig 72

reau; $AP = BQ = a + \frac{e}{2}$ sera la distance de chaque pôle à l'axe du barreau à aimanter.

L'action directe du pôle B sur la molécule m est exprimée par une fonction de la forme $\frac{F}{\overline{Bm}^2}$, en désignant par F son intensité à l'unité de distance. La composante de cette action suivant mQ sera

$$\frac{F}{\overline{Bm}^2} \cdot \cos BmQ = \frac{F}{\overline{Bm}^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}d}{Bm} = \frac{F.d}{2\overline{Bm}^3};$$

et comme suivant la direction opposée mR, il y a une autre action égale à la précédente, l'action totale sera

$$2 \cdot \frac{F.d}{2\overline{Bm}^3} \text{ ou } \frac{F.d}{\overline{Bm}^3};$$

ou bien, comme

$$Bm = \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2},$$

en désignant, pour abréger, par h la distance $a + \frac{e}{2}$;

$$\frac{F.d}{\overline{Bm}^3} = \frac{F.d}{\left(\sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2}\right)^3} = \frac{F.d}{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour trouver le maximum de cette action, ou plutôt, pour trouver la valeur de d qui correspond à cette action maxima, il faut égaler à zéro la dérivée du premier ordre de la fonction

$$\frac{F.d}{\left(h^2 + \frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui nous donne l'équation

$$\frac{\left(h^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{F}-\frac{3}{4}\mathrm{F}.d^2.\left(h^2+\frac{d^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(h^2+\frac{d^2}{4}\right)^3}=0,$$

d'où

$$h^2+\frac{d^2}{4}-\frac{3}{4}d^2=0,$$

où

$$d=h\sqrt{2}=\left(a+\frac{c}{2}\right)\sqrt{2}.$$

C'est-à-dire que la distance la plus favorable pour aimanter de cette manière la file de molécules situées sur l'axe du barreau à aimanter, est à peu près 1,414 fois la distance de l'un quelconque des pôles à cet axe.

Q. 250. Un courant élémentaire mobile l' (*fig.* 73) est assujéti à rester constamment parallèle à un autre courant élémentaire l fixe et de même sens que lui. Quelle devra être la position du premier, par rapport au second, pour que leur action mutuelle soit nulle, en supposant constante la distance $CC'=d$ de leurs milieux?

On sait qu'en appelant α et $\mathcal{E}$ les angles que font respectivement les deux élémens l et l' avec la ligne cc' qui joint leurs milieux, et dans le sens CB; qu'en désignant de plus par i et i' leurs intensités respectives à l'unité de distance, et par γ l'angle des deux plans $C'Cm'$ et $CC'n'$, l'action mutuelle de ces deux élémens de courans à la distance d sera représentée par la formule

$$\frac{ii'll'}{d^2}(\sin\alpha\sin\mathcal{E}\cos\gamma-\tfrac{1}{2}\cos\alpha\cos\mathcal{E}).$$

Cela posé, si, dans le cas particulier qui nous occupe, nous désignons par x l'angle C'CB que fera avec la ligne fixe AB la ligne qui joint les milieux C et C' lorsque le courant ($nn' = l$) occupera la position pour laquelle l'action mutuelle des deux élémens est nulle, nous aurons

$$\alpha = x, \quad \beta = x;$$

et comme d'ailleurs

$$\gamma = 0;$$

la formule générale précédente se réduit à

$$\frac{ii'll}{d^2}(\sin^2 x - \tfrac{1}{2}\cos^2 x);$$

et comme cette action doit être nulle, nous aurons l'équation

$$\sin^2 x - \tfrac{1}{2}\cos^2 x = 0,$$

d'où

$$tg^2 x = \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad tg x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

et enfin

$$x = 35^\circ\, 15'\, 51''.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que si l'on conçoit un cône ayant son sommet situé au centre C de la sphère dont le rayon est d, et dont toutes les génératrices fassent le même angle x avec l'axe CB, tous les points du petit cercle résultant de l'intersection de la sphère et du cône jouiront de la même propriété que le point C'. Le rayon de ce petit cercle sera évidemment

$$CP' = d \sin x.$$

Q. 231. Étant donné un élément de courant fixe AB (*fig.* 74), et un autre élément de courant mobile $m'n'$ assujéti à rester constamment perpendiculaire à AB, et dans le même plan, de telle sorte que la distance de leurs milieux soit constante et égale à d. Dans quelle position devra se trouver le courant mobile pour que l'action mutuelle des deux élémens de courans atteigne sa valeur maxima ?

En désignant par x l'angle que fera, dans la position cherchée, la ligne CC' avec la direction CB du courant fixe, et en conservant la même signification à chacune des quantités qui entrent dans la formule générale

$$\frac{ii'll'}{d^2}\,(\sin\alpha\sin6\cos\gamma - \tfrac{1}{2}\cos\alpha\cos6),$$

nous devons prendre

$$\alpha = x,\ 6 = 90^\circ - x \quad \text{et} \quad \gamma = 0,$$

et la formule deviendra alors

$$\frac{ii'll'}{d^2}\,(\sin x\cos x - \tfrac{1}{2}\cos x\sin x),$$

ou

$$\frac{ii'll'\,.\,2\sin x\cos x}{4d^2} = \frac{ii'll'}{4d^2}\,.\,\sin 2x.$$

Le maximum de cette expression correspond évidemment au maximum de $\sin 2x$; et comme la plus grande valeur que puisse acquérir un sinus est l'unité, nous devrons donc avoir

$$\sin 2x = 1,$$

d'où

$$2x = 90^\circ \quad \text{et} \quad x = 45^\circ.$$

Q. 232. Étant donné de position (*fig*. 75) un élément de courant fixe AA′, et une ligne inclinée à 45° sur sa direction, comment faudrait-il placer dans son plan un autre courant élémentaire BB′ à une distance donnée d, pour que leur action mutuelle fût :

1°. égale à une certaine quantité μ ;

2°. tout-à-fait nulle.

En conservant toujours les mêmes dénominations dans la formule générale qui exprime l'action mutuelle de deux courans élémentaires, nous y devrons faire

$$\gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 45^\circ ;$$

et si x est l'angle cherché, lequel n'est autre chose que celui qui est désigné dans la formule β, cette formule, après l'introduction de ces mêmes valeurs, deviendra

$$\frac{ii'll'}{d^2} (\sin 45^\circ \sin x - \tfrac{1}{2} \cos 45 \cos x) ;$$

et comme cette expression doit être égale à μ, l'équation

$$\frac{ii'll'}{d^2} \left(\tfrac{1}{2} \sqrt{2} \sin x - \tfrac{1}{4} \sqrt{2} \cos x\right) = \mu,$$

d'où

$$tg x = \frac{\sqrt{2} + 4\mu d^2}{2\sqrt{2} . ii'll'},$$

et par suite x.

Si l'on voulait que l'action fût nulle, il faudrait poser l'équation

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{2} \sin x - \tfrac{1}{4} \sqrt{2} \cos x = 0,$$

d'où

$$2 \sin x = \cos x,$$

et par suite

$$tgx = \tfrac{1}{2},$$

et enfin

$$x = 26° \, 33' \, 54''.$$

Il est facile de voir ce que deviendraient ces deux résultats si la ligne qui joint les milieux des deux courants, au lieu de faire un angle de 45° avec la direction fixe du premier, faisait un angle donné quelconque de a°.

Nous avons cru que dans un ouvrage du genre de celui-ci il ne serait pas déplacé d'offrir des tables un peu étendues des poids spécifiques, des coefficiens de dilatation, des chaleurs spécifiques, etc...; c'est dans cette intention que nous avons réuni les tables ci-jointes :

TABLE

Du poids spécifique et du volume de l'eau depuis 0° jusqu'à + 30°, d'après Haellstroem.

Température.	Poids spécifique.	Volume.
0°	1	1
1	1,0000466	0,9999536
2	1,0000799	0,9999202
3	1,0001004	0,9998996
4	1,00010817	0,9998918
4,1	1,00010824	0,99989177
5	1,0001032	0,9998968
6	1,0000856	0,9999144
7	1,0000555	0,9999445
8	1,0000129	0,9999872
9	0,9999579	1,0000421
10	0,9998906	1,0001094
11	0,9998112	1,0001888
12	0,9997196	1,0002804
13	0,9996160	1,0003841
14	0,9995005	1,0004997
15	0,9993731	1,0006273
16	0,9992340	1,0007666
17	0,9990832	1,0009176
18	0,9989207	1,0010805
19	0,9987468	1,0012548
20	0,9985615	1,0014406

Température.	Poids spécifique.	Volume.
21	0,9983648	1,0016379
22	0,9981569	1,0018465
23	0,9979379	1,0020664
24	0,9977077	1,0022976
25	0,9974666	1,0025398
26	0,9972146	1,0027932
27	0,9969518	1,0030575
28	0,9966783	1,0033328
29	0,9963641	1,0036189
30	0,9960993	1,0039160

TABLE

Du poids spécifique et du volume de l'eau, l'unité étant prise à la température du maximum de densité, $+ 4^{\circ},1$.

Température.	Poids spécifique.	Volume.
0°	0,9998918	1,0001082
1	0,9999382	1,0000617
2	0,9999717	1,0000281
3	0,9999920	1,0000078
4	0,9999995	1,0000002
4,1	1	1
5	0,9999950	1,0000050
6	0,9999772	1,0000226
7	0,9999472	1,0000527
8	0,9999044	1,0000954
9	0,9998497	1,0001501
10	0,9997825	1,0002200
11	0,9997030	1,0002970
12	0,9996117	1,0003888
13	0,9995180	1,0004924
14	0,9993922	1,0006081
15	0,9992647	1,0007357
16	0,9991260	1,0008747
17	0,9989752	1,0010259
18	0,9988125	1,0011888
19	0,9986387	1,0013631
20	0,9984534	1,0015490
21	0,9982570	1,0017560

Température.	Poids spécifique.	Volume.
22	0,9980489	1,0019549
23	0,9978300	1,0021746
24	0,9976000	1,0024058
25	0,9973587	1,0026483
26	0,9971070	1,0029016
27	0,9968439	1,0031662
28	0,9965704	1,0034414
29	0,9962864	1,0037274
30	0,9959917	1,0040245

TABLE

Des poids spécifiques des gaz, celui de l'air étant pris pour unité.

Noms des gaz.	Densités ou poids spécifiques.
Protocarbure d'hydrogène	0,5599
Gaz oléfiant	0,9814
Bicarbure d'hydrogène	1,9628
Méthylène	0,4907
Cyanogène	1,8195
Oxide de carbone	0,9732
Mono-hydrate de méthylène	1,6100
Clorhydrate de méthylène	1,7378
Fluorhydrate de méthylène	1,1690
Acide sulfhydrique	1,1912
Acide sélénhydrique	non déterminée.
Acide tellurhydrique	*idem.*
Phosphure d'hydrogène	1,2140
Aséniure d'hydrogène	2,6950
Ammoniaque	0,5910
Chlorure de cyanogène	2,1160
Acide chloroxycarbonique	3,3990
Acide chlorhydrique	1,2474
Acide bromhydrique	2,7310
Acide iodhydrique	4,4400
Oxide de chlore	2,3156
Acide hypo-chloreux	2,9773
Protoxide d'azote	1,5269

Noms des gaz.	Densités ou poids spécifiques.
Bioxide d'azote	1,0391
Acide carbonique	1,5245
Acide sulfureux	1,1930
Acide chloroborique	3,9420
Acide fluoborique	2,3709
Acide fluosilicique	3,5735
Chlore	2,4403
Oxigène	1,1026
Azote	0,9760
Hydrogène	0,0688
Acide azoteux récemment isolé	non déterminée.

TABLE

Des poids spécifiques des principales vapeurs, celui de l'air étant pris pour unité.

Noms des vapeurs.	Poids spécifique.
Bichlorure d'étain	9,199
Vapeur d'iode	8,716
Vapeur de mercure	6,976
Vapeur de soufre	6,617
Protochlorure d'arsénic	6,300
Chlorure de silicium	5,939
Éther iodhydrique	5,4749
Vapeur du camphre ordinaire	5,408
Éther benzoïque	5,409
Éther oxalique	5,087
Protochlorure de phosphore	4,875
Essence de térébenthine	4,763
Protochlorure de soufre	4,730
Naphtaline	4,528
Vapeur de phosphore	4,355
Perchlorure de soufre	3,700
Liqueur des Hollandais	3,443
Acide hypo-azotique	3,180
Éther acétique	3,067
Sulfure de carbone	2,644
Éther azoteux	2,626
Éther sulfurique	2,586
Éther chlorhydrique	2,212
Chlorure de cyanogène	2,111
Esprit de bois	2,019
Alcool	1,6133
Acide cyanhydriqne	0,9476
Eau	0,6235

TABLE

Des poids spécifiques des liquides les plus communs, celui de l'eau au maximum de densité étant pris pour unité.

Noms des liquides.	Poids spécifique.
Eau distillée	1
Alcool absolu	0,792
Éther sulfurique	0,7155
Naphte	0,8475
Huile essentielle de térébenthine	0,8697
Éther chlorhydrique	0,874
Huile d'olive	0,9153
Vin de Bourgogne	0,9915
Vin de Bordeaux	0,9939
Lait	1,03
Eau de la mer	1,0263
Acide acétique concentré	1,063
Acide azotique du commerce	1,225
Acide concentré	1,423
Acide hypo-azotique	1,550
Acide sulfurique susceptible de cristalliser	1,780
Acide concentré	1,8484

TABLE

Des poids spécifiques des solides, celui de l'eau étant pris pour unité.

Noms des solides.	Poids spécifique.
Platine laminé	22,0690
Idem passé à la filière	21,0417
Idem forgé	20,3366
Or forgé	19,3617
Idem fondu	19,2881
Iridium	18,68
Tungstène	17,6
Mercure	13,568
Palladium laminé	11,8
Idem écroui	11,3
Plomb fondu	11,352
Rhodium	11
Argent fondu	10,4743
Bismuth fondu	9,822
Osmium	10
Urane	9
Cuivre en fil	8,8785
Cuivre rouge fondu	8,7880
Cadmium	8,6040
Arsenic	8,308
Cobalt	8,5384
Laiton	8,395
Nickel fondu	8,279
Acier non écroui	7,8163

Noms des solides.	Poids spécifique.
Fer en barres	7,788
Molybdène	7,400
Étain fondu	7,2914
Fer fondu	7,2070
Zinc	de 6,861 à 6,871
Manganèse	6,850
Antimoine	6,712
Tellure	6,115
Chrôme	5,9
Titane	5,3
Iode	4,948
Spath pesant	4,4300
Rubis oriental	4,2833
Persulfure de fer	4,2
Saphir oriental	3,9941
Saphir du Brésil	3,1308
Topaze orientale	4,0107
Topaze de Saxe	3,5640
Béril oriental	3,5489
Diamant	3,52
Flint-glass anglais	3,3293
Spath fluor (rosé)	3,1911
Tourmaline (verte)	3,1555
Asbeste raide	2,9958
Marbre de Paros	2,8376
Émeraude verte	2,7755
Perles	2,75
Carbonate de chaux cristallisé	2,7182
Cristal de roche pur	2,6530
Verre de Saint-Gobain	2,4882
Porcelaine de la Chine	2,3847
Sulfate de chaux cristallisé	2,3177

Noms des solides.	Poids spécifique.
Porcelaine de Sèvres	2,1457
Soufre natif	2,0332
Ivoire	1,917
Phosphore	1,77
Succin	1,078
Sodium	0,97223
Glace (eau congelée)	0,930
Potassium	0,86507
Liége	0,24

TABLE

Des coefficiens moyens de dilatation absolue des liquides les plus communs.

Noms des liquides.	Coefficiens de dilatation.
Eau distillée	0,000433
Eau saturée de sel	0,0005
Alcool	0,001111
Acide chlorhydrique ordinaire (densité 1,137)	0,000588
Acide azotique (densité 1,4)	0,001111
Acide sulfurique (densité 1,85)	0,000582
Éther sulfurique	0,000714
Huile d'olive	0,000833
Huile de lin	*Idem*
Essence de térébenthine	0,000714
Mercure de 0° à 100°	0,0001802
Idem de 0° à 300°	0,0001887

TABLE

Des coefficiens de dilatation linéaire des solides.

Noms des solides.	Coefficiens de dilatation.	
Plomb	0,0000028484	$\frac{1}{35600}$
Étain de Falmouth	0,000021730	$\frac{1}{45200}$
Argent de coupelle	0,000019097	$\frac{1}{53300}$
Cuivre jaune ou laiton	0,000018782	$\frac{1}{53300}$
Cuivre rouge de 0° à 300°	0,0000188	$\frac{1}{5310}$
Cuivre rouge	0,000017173	$\frac{1}{58200}$
Or au titre de Paris	0,000015515	$\frac{1}{64500}$
Or de départ	0,000014661	$\frac{1}{68200}$
Fer rond passé à la filière	0,000012350	$\frac{1}{81200}$
Fer doux forgé	0,000012205	$\frac{1}{81900}$
Acier non trempé	0,000010791	$\frac{1}{92700}$
Verre de Saint-Gobain	0,000008909	$\frac{1}{112200}$
Verre de France avec plomb	0,000008718	$\frac{1}{114700}$
Platine de 0° à 300°	0,00000924	$\frac{1}{109000}$
Platine de 0° à 100°	0,000008565	$\frac{1}{116700}$
Flint-glass anglais	0,000008117	$\frac{1}{124800}$

TABLE

Des points de fusion des substances facilement fusibles.

Substances.	Températures.
Mercure	—40°
Glace	0
Phosphore	41
Potassium	58
Sodium	90
Iode	107
Soufre	108,5
Étain	212
Bismuth	285
Plomb	324
Cadmium	400 environ.

Chaleurs latentes de vaporisation.

Eau	543
Alcool	208
Éther	91
Essence de térébenthine	77

TABLE

De chaleurs spécifiques des principaux solides et liquides.

Substances.	Chaleurs spécifiques.
Eau	1,0000
Vinaigre	0,9200
Acide azotique	0,66
Acide chlorhydrique	0,60
Acide sulfurique	0,35
Alcool	0,68
Éther sulfurique	0,66
Essence de térébenthine	0,462
Huile d'olive	0,31
Flint-glass	0,19
Bismuth	0,0288
Plomb	0,0293
Or	0,0298
Platine	0,0314
Étain	0,0314
Argent	0,0557
Zinc	0,0927
Tellure	0,0912
Cuivre	0,0949
Nickel	0,1035
Fer	0,1100
Cobalt	0,1498
Soufre	0,1880

TABLE

Des chaleurs spécifiques des principaux gaz, en prenant pour unité celle de l'air atmosphérique.

Gaz.	Chaleurs spécifiques sous pression constante.
Air	1,0000
Hydrogène	0,9033
Oxigène	0,9765
Azote	1,0000
Acide carbonique	1,2588
Protoxide d'azote	1,3503
Oxide de carbone	1,0340
Gaz oléfiant	1,5530
Vapeur d'eau	1,060

TABLE

Des chaleurs spécifiques des principaux gaz, à poids égaux, celle de l'eau étant prise pour unité.

Noms des gaz.	Chaleurs spécifiques.
Eau	1,0000
Air	0,2669
Oxigène	0,2361
Azote	0,2734
Acide carbonique	1,2210
Hydrogène	3,2936
Protoxide d'azote	0,2369
Gaz oléfiant	0,4207
Oxide de carbone	0,2883
Vapeur d'eau	0,8470

Rapport des chaleurs spécifiques des principaux gaz sous pression constante et sous volume constant.

Noms des gaz.	Rapport obtenu.
Air	1,421
Oxigène	1,417
Hydrogène	1,409
Acide carbonique	1,337
Protoxide d'azote	1,343
Oxide de carbone	1,423
Gaz oléfiant	1,240

FIN DE LA SECONDE ET DERNIÈRE PARTIE.

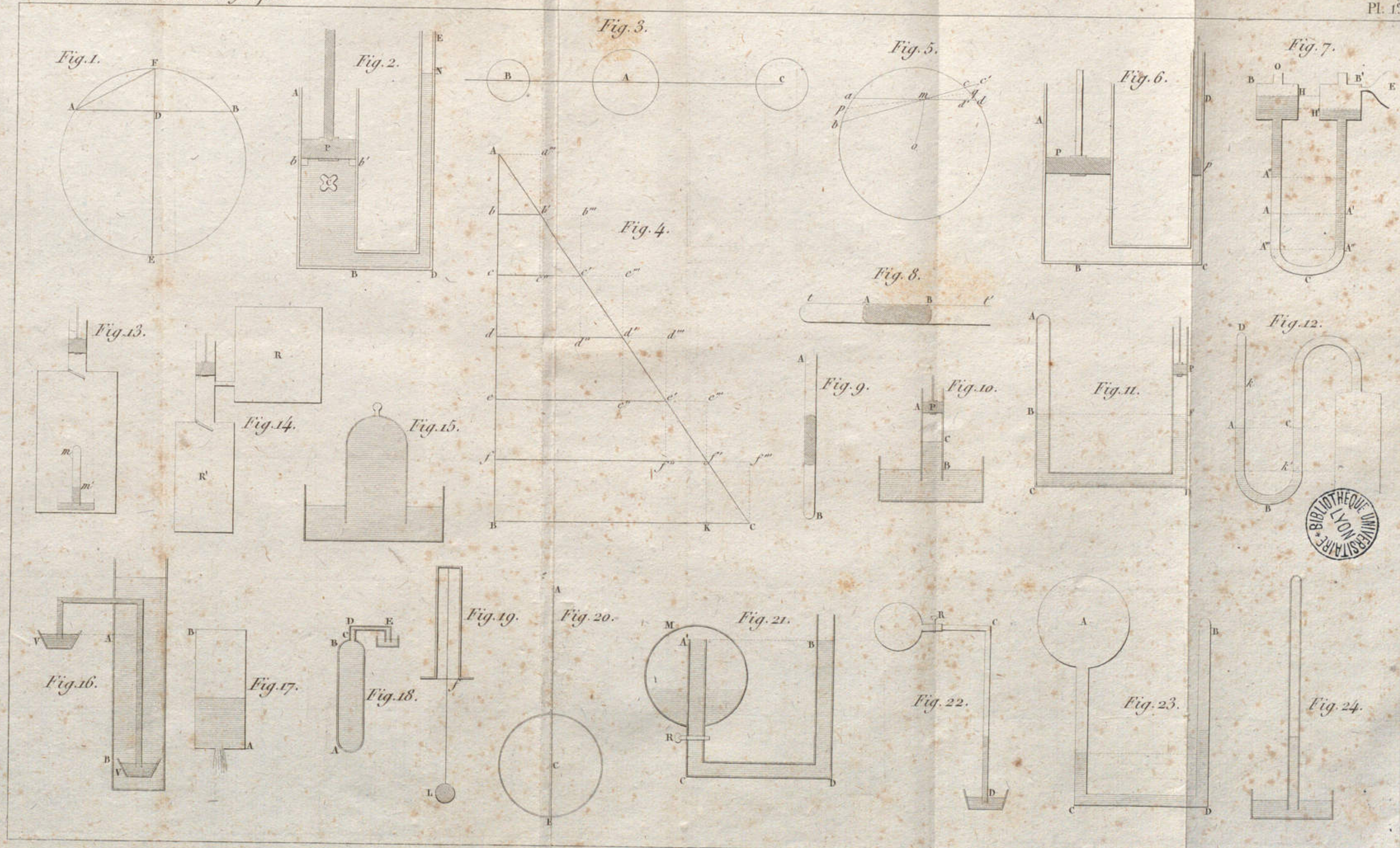
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.

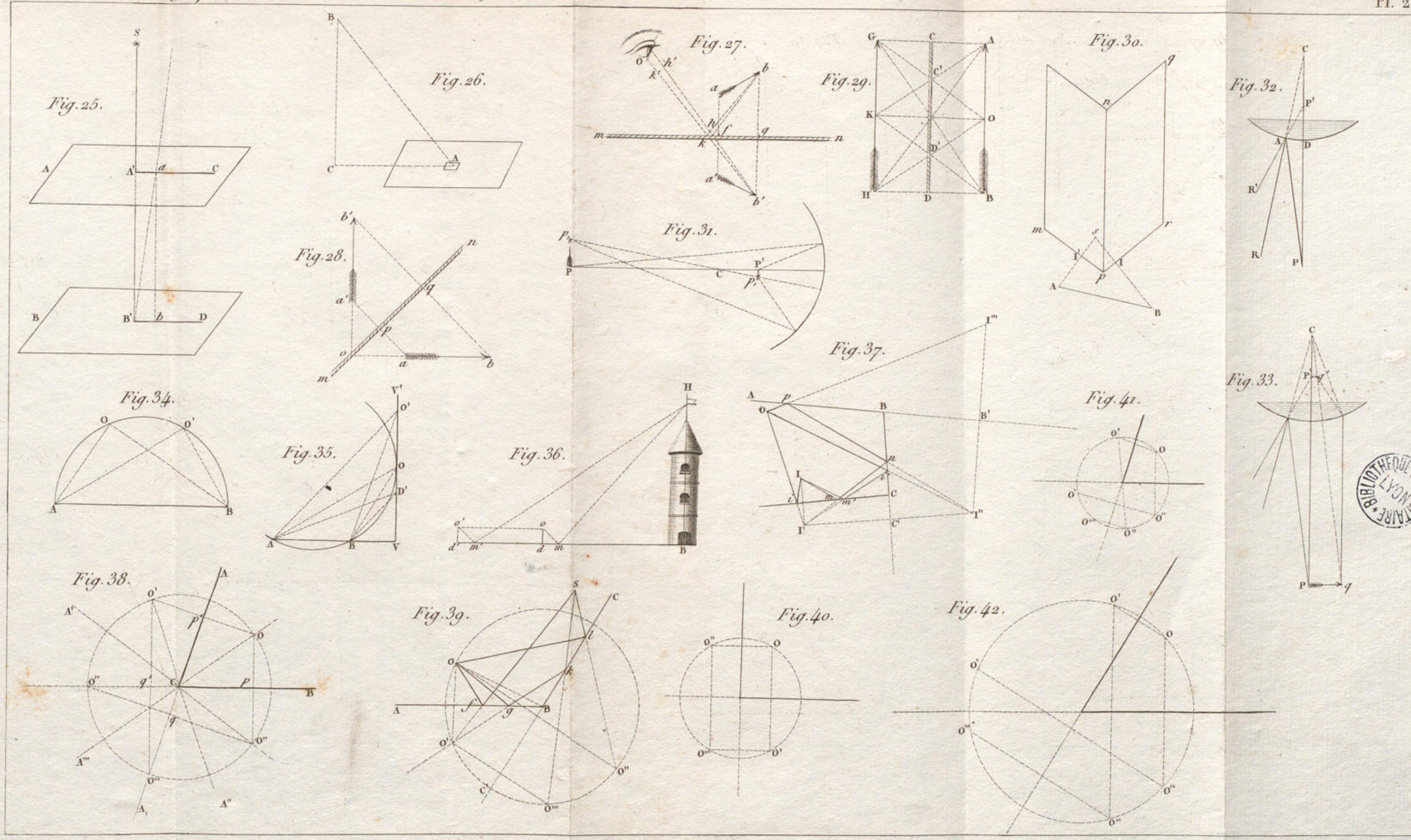
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.

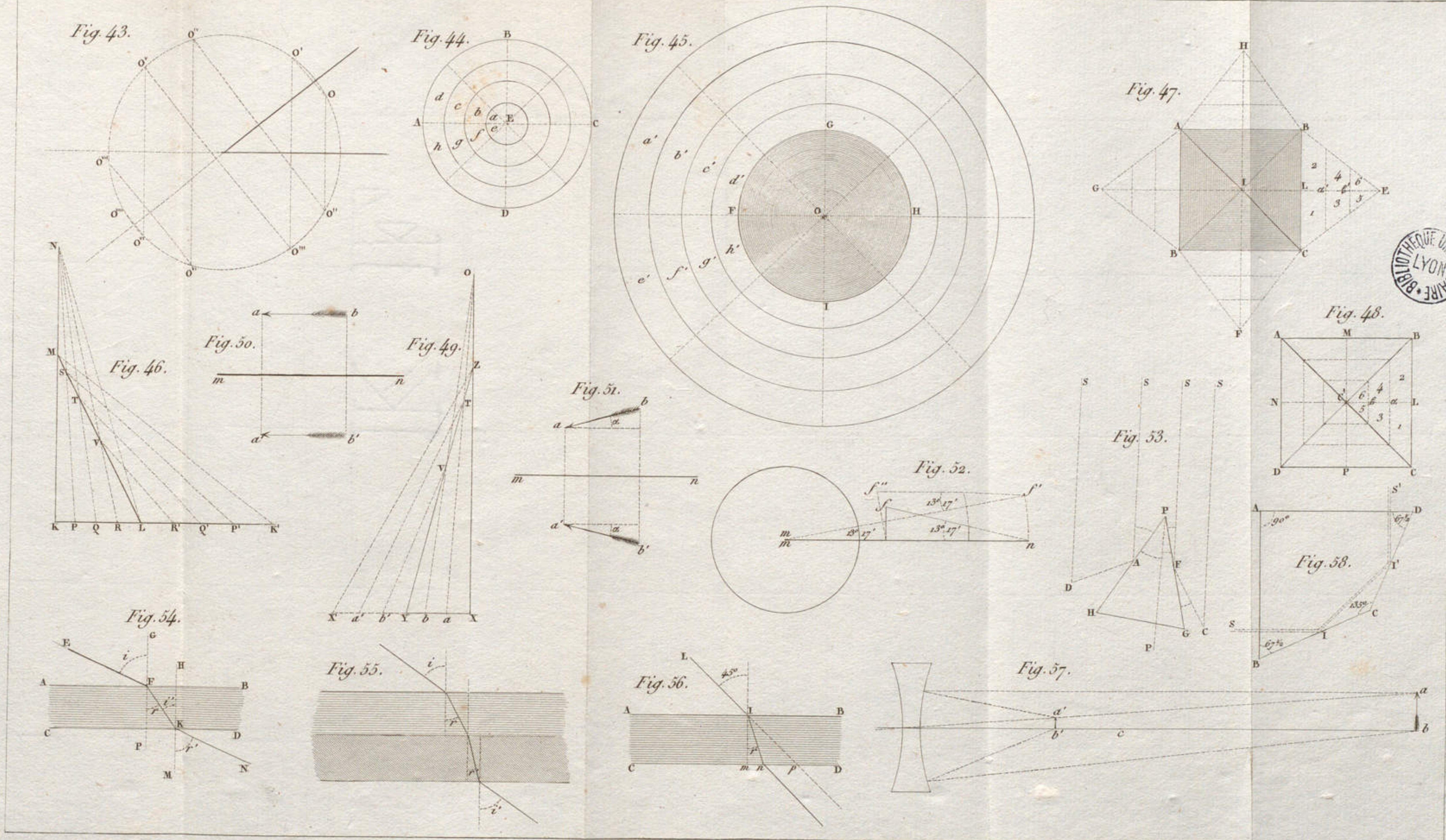
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.

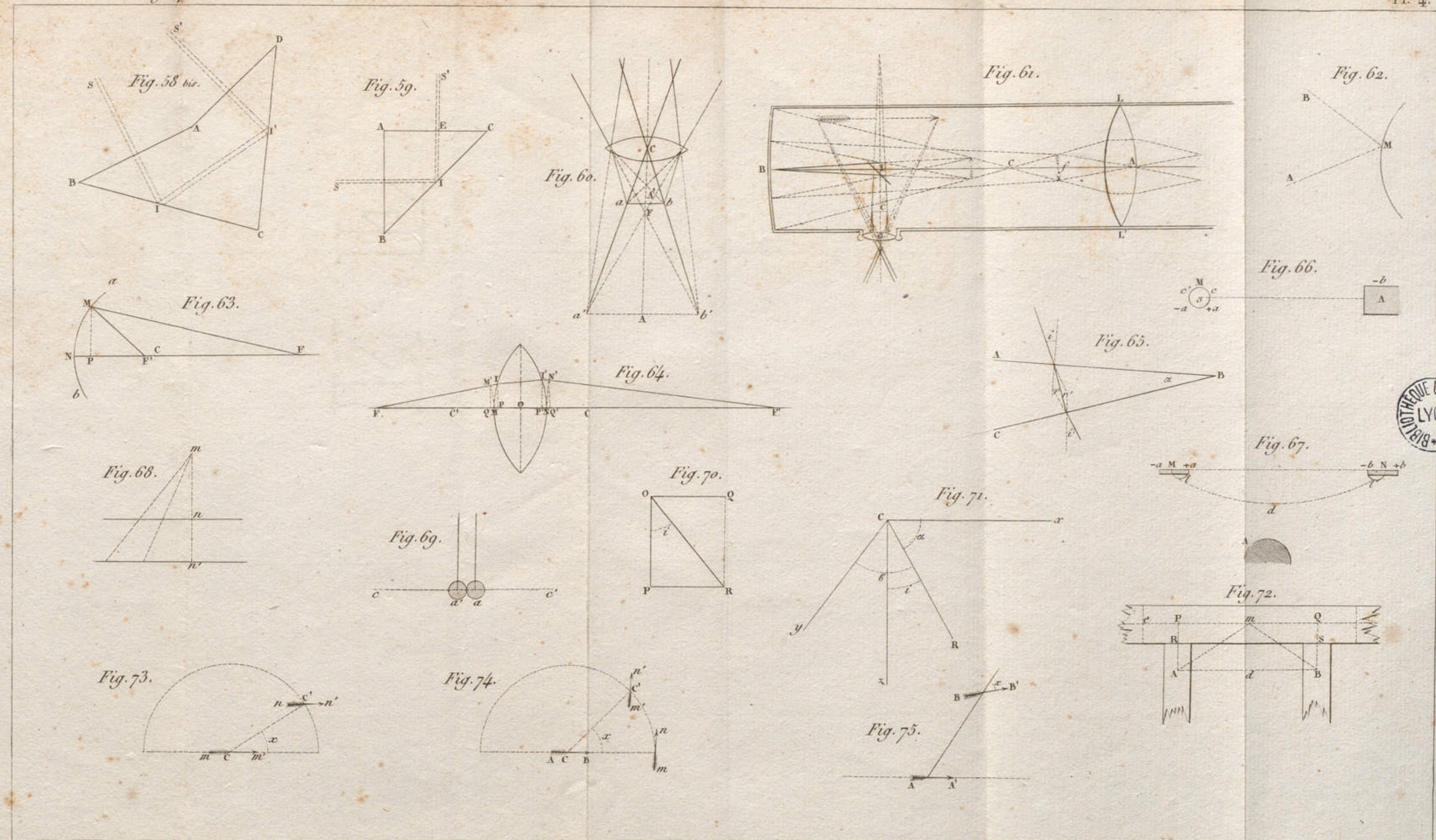
Fig. 58 bis.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.