600 fr

Rareté absolue

Voir
Chasles.
Coniques - page 174

TRAITÉ DES SECTIONS DU CYLINDRE ET DU CONE,

CONSIDERE'ES DANS LE SOLIDE & dans le Plan, avec des Démonstrations simples & nouvelles.

Par Monsieur LE POIVRE, *de la Ville de Mons.*

Perrelet en Mars 1832.

A PARIS,
Chez BARTHELEMY GIRIN, ruë saint Jacques, vis-à-vis la Fontaine saint Severin, à la Prudence.

M. DCCIV.

Avec Approbation, & Privilege du Roy.

A MONSEIGNEUR

MONSEIGNEUR

L'ABBÉ BIGNON,

CONSEILLER D'ETAT ORDINAIRE.

MONSEIGNEUR,

Si je presentois ce Livre à un autre que vous, je tâcherois à luy faire valoir l'utilité de la Géometrie. Cette Science est le fondement de toutes les autres, du moins *de celles qui ſont certaines ; elle rend l'eſprit exact, elle l'etend, & l'accoûtume à comprendre d'une ſeule vûë un grand nombre de choſes differentes. Elle apprend à diſtinguer le vray d'avec le faux, & à ne donner ſon conſentement qu'à ce qui eſt evident. Mais que ſeroit-ce ſi j'allois repreſenter les avantages des Mathematiques, à celuy qui preſide à l'illuſtre Academie des Sciences, à celuy qui a eu tant de part à ſon nouvel etabliſſement, qui luy attire tant de grâces & tant de protection, qui veille avec tant de ſoin à la conduite de ce grand corps, & qui marque par là ſi noblement ce qu'il penſe de nos etudes & de nos travaux ? La faute que je ferois ſeroit encore plus grande, MON-*

SEIGNEUR, par rapport à vos qualitez personnelles ; ce seroit faire l'éloge de la Geometrie à un homme qui est né Geometre, & qui a reçu de la nature toute la justesse d'esprit, toute l'exactitude, & toute la lumiere que les Geometres tâchent d'acquerir. Elles sont en vous d'autant plus merveilleuses, qu'elles ne sont point attachées à la Science des Nombres ou des Lignes, & que vous les portez dans toutes les differentes matieres où il vous plaît de les appliquer. C'est par là que vous vous êtes trouvé propre au Conseil d'Etat, aussi-tôt que vous y êtes entré par le choix d'un Roi qui sçait toûjours bien choisir ; des choses toutes nouvelles ne vous l'ont point été, & il seroit *deſormais bien difficile à l'Envie de marquer les bornes de vôtre capacité. Je ſuis avec un profond reſpect,*

MONSEIGNEUR,

Vôtre tres-humble, tres-obeïſſant, & tres-ſoûmis Serviteur,
LE POIVRE.

PREFACE.

SI le Public reçoit quelque utilité de ce petit Ouvrage, il en aura autant d'obligation au hazard, qu'à mes longues études.

Je ne l'ay entrepris, qu'à l'occasion d'une lettre que Monsieur Descartes écrivit autrefois à Monsieur Desargues, dans laquelle il luy mandoit, que sur ce qu'il avoit pû conjecturer du Traité de ses Sections Coniques dont le Pere Mersenne luy avoit envoyé le projet, il avoit jugé qu'il pouvoit avoir deux desseins qui seroient fort bons & fort utiles, mais qui ne demanderoient pas tous deux la même maniere de proceder.

L'un seroit d'écrire pour les Doctes, & leur enseigner quelques proprietez de ces Sections Coniques qui ne leur soient pas connuës.

L'autre seroit d'écrire pour les Curieux qui ne sont pas doctes, & de faire que cette matiere qui n'a pû être entenduë jusques icy que de fort peu de personnes, & qui est neanmoins fort utile pour la Perspective, la Peinture, l'Architecture, &c. devienne vulgaire & facile à tous ceux qui la voudront étudier dans son Livre.

Je croy avoir accompli ces deux intentions dans ce petit Traité; car non-seulement j'ay écrit en faveur des Sçavans, en leur donnant une nouvelle projection de nouvelles proprietez & de nouvelles démonstrations des Sections Coniques qu'ils ignoroient; mais aussi en faveur de ceux qui ne se piquent pas d'être Sçavans dans ces matieres que j'ay renduës si faciles, qu'il leur suffira d'avoir la connoissance de quelques propositions élementaires que j'ay citées au commencement de ce Traité, pour comprendre sans aucun effort d'esprit tout ce que j'ay dit sur cette Science.

Ceux qui n'aiment pas les longues lectures, trouveront encore icy de quoy se satisfaire; car j'ay renfermé toute la Science des Sections Coniques dans quatre ou cinq feüilles d'une grosse impression, qui n'ont pourtant pas laissé de me coûter trois années de travail, & qui renferment plus de connoissances que de fort gros Volumes qui traitent de ces matieres

J'ay crû qu'il étoit necessaire de donner icy un avis au Lecteur touchant mes Figures; car quoyque les Figures d'Optique puissent produire leur effet dans l'œil du Spectateur, sans qu'il fasse attention aux regles de l'art , cependant il sera d'un fort grand usage , de s'imaginer celles de ce Livre , lesquelles representeront differens plans , produites par des paralleles tombant de tous les points de l'objet sur le plan de la projection qui est celuy du papier. Ces paralleles seroient les raïons mêmes par lesquels l'œil verroit cet objet , s'il en étoit infiniment éloigné ; c'est pourquoy on pourroit les nommer Raïons. Il est clair que selon cetteprojection, les lignes paralleles se representeront par des paralleles , excepté celles qui se trouveront sur un plan parallele aux raïons, qui seront representées par une ligne droite de même que ce plan : Pareilles projections où les principaux plans d'un Solide sont representez par des lignes droites, & par consequent leur commune Section par des points, est la plus simple de toutes , & on l'employe souvent à regler les autres.

Il importe extrêmement de remarquer, que lorsqu'il arrive que ces raïons qui doivent produire l'image sont paralleles à une même ligne perpendiculaire à la commune Section du plan de la projection & d'un autre plan, & également incliné ſur tous les deux ; les choſes qui ſont dans ce dernier plan ne ſont du tout pas alterées par la projection. De ſorte que ce qui eſt, par exemple, angle droit, demeure angle droit, & ce qui eſt cercle, demeure cercle.

Fig. 1. Car ſoit *EDC* le plan de la projection ; *ab* un autre plan ; & *DE*, leur commune Section, à laquelle le raïon *FE* ſoit perpendiculaire & également incliné ſur les deux plans. Si d'un point quelconque *G* du plan *ab*, on mene à *EF* une parallele, qui rencontre le plan *CDE* en *I* ; il eſt bien viſible que les deux diſtances perpendiculaires *GE* & *IE* priſes depuis le même point *E* de la commune Section *DE* ſeront égales. D'où il ſuit, que tous les points comme *I*, ſeront ſituez ſur le plan *CDE* tout-à-fait de même que ceux comme *G* qu'ils repreſentent le ſont ſur le plan *ab*. De maniere que ſi l'on venoit à coucher du côté qu'il faut le plan *ab* ſur *CDE*, le point *G* tomberoit ſur *I*. C'eſt-à-dire, que chacun des points repreſentez tomberoit tout-à-fait ſur celuy qui le repreſente.

PROPOSITIONS ELEMENTAIRES.

PROPOSITIONS APPARTENANT aux Elemens de Geometrie, lesquelles on suppose dans le Traité des Sections du Cylindre & du Cone.

SI à choses égales on ajoûte d'égales, les tous seront égaux. I.

Si des choses égales on retranche d'égales, les restes seront égaux. II.

On ne peut mener par un point pris au dehors d'une ligne droite, qu'une parallele à la même ligne. III.

Deux droites qui se coupent, sont dans un même plan. IV.

Deux paralleles sont dans un même plan. V.

Deux droites qui sont dans un même plan, sans être paralleles, vont se rencontrer. VI.

Si l'une de deux paralleles est perpendiculaire à une troisiéme ligne, l'autre luy sera aussi perpendiculaire. VII.

Si deux droites qui font un angle sont paralleles à deux droites qui font un angle de même espece; ces deux angles seront égaux. VIII.

IX. Les côtez opposez d'un parallelogramme sont égaux.

X. Les lignes qui joignent les extrêmitez de deux autres lignes paralleles & égales, sont aussi paralleles & égales.

XI. Le diametre perpendiculaire à une corde de cercle, la divise en deux parties égales.

XII. Les portions de deux tangentes qui se coupent comprises entre leur intersection & leurs points d'attouchement, sont égales.

XIII. Le rectangle sous une ligne & une autre ligne divisée en plusieurs parties est égal aux rectangles sous cette premiere ligne, & toutes ces parties.

XIV. Le quarré du côté opposé à l'angle droit d'un triangle, est égal aux quarrez des deux autres côtez.

XV. Les rectangles sous les portions de deux lignes qui se coupent comprises entre leur intersection & les rencontres d'un cercle, sont égaux.

XVI. On ne peut mener par un point pris au dehors d'un plan, qu'un autre plan qui luy soit parallele.

XVII. Si deux droites qui se coupent sont paralleles à deux autres qui se coupent, leurs deux plans, quoyque differens, seront paralleles.

Si deux plans menez par deux lignes paralleles se coupent, leur commune Section sera parallele aux mêmes lignes. XVIII.

Une même grandeur a même raison à deux grandeurs égales entr'elles, & deux grandeurs ausquelles une même grandeur a même raison, sont égales entr'elles. XIX.

Si l'antecedent de l'une de deux raisons égales surpasse son consequent, l'autre antecedent surpassera aussi son consequent. XX.

Si la premiere de plusieurs grandeurs est égale à la seconde, la seconde à la troisiéme, & ainsi de suite jusqu'à la derniere; la premiere grandeur sera égale à la derniere. On peut dire la même chose de plusieurs raisons égales. XXI.

Definition. Lorsque plus de deux grandeurs sont mises de suite; la raison de la premiere à la derniere est dite composée de la raison de la premiere à la seconde, de celle de la seconde à la troisiéme, & ainsi de suite jusqu'à la raison de la penultiéme à la derniere. XXII.

Les raisons composées de raisons semblables, sont semblables entr'elles. XXIII.

Une raison composée de deux raisons, dont l'une est l'inverse de l'autre, est la raison d'égalité. XXIV.

XXV. Les triangles équiangles ont leurs côtez proportionels.

XXVI. Deux paralleles qui rencontrent deux droites qui ſe coupent, les diviſent proportionellement.

XXVII. Deux droites qui diviſent proportionellement deux autres droites qui ſe coupent, ſont paralleles.

XXVIII. Les portions de deux droites qui coupent trois paralleles ſont proportionelles.

XXIX. Une droite qui diviſe également deux paralleles compriſes entre deux autres droites qui ſe coupent, paſſe par leur interſection.

XXX. La ligne menée d'un angle qui a deux baſes paralleles, diviſe proportionellement les baſes lorſqu'elle les coupe.

XXXI. S'il y a pluſieurs raiſons ſemblables, la ſomme de pluſieurs de leurs antecedens ſera à la ſomme de leurs conſequens, comme l'un des antecedens à ſon conſequent.

XXXII. S'il y a deux raiſons ſemblables, la difference des antecedens ſera à la difference des conſequens, comme l'un des antecedens à ſon conſequent.

XXXIII. Le rectangle ſous la premiere & la derniere de quatre lignes proportionelles, eſt égal au rectangle ſous la ſeconde & la troiſiéme. Et ſi le rectangle ſous la premiere & la derniere de quatre lignes eſt égal au rectangle ſous la ſeconde & la troiſiéme, ces quatre lignes ſont proportionelles.

La raiſon de deux parallelogrammes équiangles, eſt compoſée de celles de leurs côtez. XXXIV.

Si deux côtez qui comprennent un angle d'un triangle ſont proportionels aux deux côtez qui comprennent un angle égal d'un autre triangle, ces deux triangles ſeront équiangles. XXXV.

Les parallelogrammes de même largeur, ſont entr'eux comme leurs longueurs. XXXVI.

Ce Livre ſe vend relié en veau 40. ſ. & en parchemin 30. ſ.

CATALOGUE

DES LIVRES QUI SE VENDENT chez BARTHELEMY GIRIN, ruë S. Jacques, vis-à-vis la fontaine Saint Severin, à la Prudence.

PHilosophia ad usum Scholæ accommodata, Autore Guillelmo Dagoumer.
Theodori Turquet, Mayerni, opera Medica, fol. 15. l.
Tauvry, Anatomie raisonnée, in 12. fig. 2. l.
—— Traité de la generation & du fœtus, in 12. 1. l. 10. s.
—— Traité des Medicamens selon les experiences des modernes, in 12. 2. vol. 4. l.
Le Clerc, la Chirurgie complette, in 12. derniere édition augmentée. 2. l.
—— La Medecine aisée, in 12. 1. l. 10. s.
La recherche de la verité dans la Medecine, ou le nouveau systême de l'homme, par M. Gagnon, in 12. 2. l.
L'Anatomie, les maladies & les remedes du corps humain, par S. Hilaire, in octavo 3. vol. figures. 13. l. 10. s.
Traité de la sainte Messe, par M. Brueys de Montpelier, in 12. 1. l. 10. s.
Défense des nouveaux Chrétiens & des Missionnaires de la Chine, par le P. Letellier, in 12. 2. vol. 4. l. 10. s.
De l'esprit familier de Socrate, traduction d'Apulée, par M. le Baron des Coutures, in 12. 1. l. 10. s.
Nouvelle methode pour se conserver la santé suivant les saisons & suivant les differens temperamens, in 12. 2. l.
Traité des operations de Chirurgie par la Vauguion, in octavo figures. 3. l. 10. s.
Traité des embaumemens par M. Penicher, in 12. 1. l. 10. s.
Le Journal des Saints, ou Meditations pour tous les jours de l'année, par le P. Grosez, in 12. 3. vol. 5. l.
Burnet, *Thesaurus Medicinæ practicæ, in quarto*, 5. l.
—— Le même en François, in octavo, 3. vol. 9. l.
L'art de guerir les maladies veneriennes par de Blegny, in 12. en un volume. 3. l. 10. s.

DES

DES SECTIONS DU CYLINDRE.

DEFINITIONS.

SI quelque ligne droite *f* F rencontre deux plans *a b* & C E, premier & second, qui s'entre- I.
coupent en une ligne D E, qui se nomme *Base* : Je dis, que les points F, H, M, &c. où la premiere ligne *f* F & plusieurs autres *h* H, *m* M &c. qui luy sont paralleles, rencontrent C E l'un des plans, répondent aux points *f*, *h*, *m*, où elles rencontrent l'autre *a b*. Fig. 2.

AVERTISSEMENT.

Je marquerai toûjours les points du second plan par les grandes lettres C, D &c. & les points du premier, qui seront au dehors du second, par les petites *a*, *b*, &c. l'intersection des mêmes plans, où la base sera D E.

PROBLEME.

III. *Deux points répondans f & F étant donnez; trouver son répondant à tout autre point donné.*

On propose premierement de trouver un point répondant au point donné *m*, la ligne *f m* étant parallele à D E.

Menez une autre parallele F O, & prenez du même côté que *f m* la portion F M, qui luy soit égale.

* 10. E. Il est clair, * que *m* M sera parallele à *f* F, c'est pourquoy les deux points M & *m* se répondront.

On propose secondement de trouver le point répondant à *h*, lorsque *f h* va rencontrer D E en K.

Menez à *f* F la parallele *h* H, qui
* 6. E. rencontrera K F *, puisqu'elle est dans le plan F *f* K avec *f* F sa parallele : il
* 1. est clair * que le point H, où *h* H rencontre K F, répondra à H.

COROLLAIRE.

Il s'ensuit de-là, qu'un point ne peut répondre qu'à un seul point, & que deux differens points ne peuvent répon-
IV. dre à moins de deux. Puisqu'une parallele ne détermine qu'un point répondant à un autre, & que deux paralleles n'en déterminent pas moins de deux.

DEFINITION.

Je dis, qu'une ligne répond à une au-
V.

tre ligne, si tous les points de la premiere répondent à ceux de la seconde.

PROBLESME.

Deux points repondans h & H étant donnez, trouver une ligne qui réponde à une ligne droite donnée. VI.

On propose premierement de trouver une ligne répondante à *f m* parallele à la base D E.

Par le point F, qui répond à *f*, l'un des points de la ligne donnée, tirez à la même base la parallele F O, je dis que cette ligne répond à *f m*.

Car les deux paralleles *m f* & F O sont* dans le plan *m f* F, & toute autre ligne *m* M menée d'un point quelconque de *f m* parallelement à *f* F sera dans le même plan *m f* F, & par consequent recontrera F O * dans un point M répondant à *m*.

* 5. E.

* 6. E.

On propose secondement, de trouver une ligne répondant à la droite *m* L, qui rencontre la base D E en L.

Tirez à *m* L la parallele *h* K, qui rencontre la même base en K, tirez K H & sa parallele L O. Je dis que cette ligne répond à *m* L.

Car *m* L & L O, étant paralleles à *h* K, & K H, le plan *m* L O sera* parallele au plan *h* K H : & si d'un point

* 17. E.

quelconque *m* de la ligne *m* L ou mene *m* M parallele à *h* H, le plan M *m* L sera parallele au plan H h K.

Ainsi les deux plans *m* L O & M m L, qui passent par la même ligne *m* L, & sont paralleles au même plan *h* K H,
* 16. ou H h K, ne seront * qu'un même plan, c'est pourquoy *m* M rencontrera L O, & cette ligne répondra à la ligne donnée m L.

COROLLAIRES

VII. Il s'ensuit de cette construction, qu'une ligne qui répond à une ligne droite, est droite.

VIII. Qu'une ligne qui répond à une ligne courbe est courbe. Car, si elle étoit droite, la ligne à laquelle elle répond seroit droite, contre la supposition.

IX. Que si l'une de deux lignes qui se répondent est parallele à la base, l'autre luy sera aussi parallele.

Que si l'une de deux paralleles à la base DE a un point répondant à un point de l'autre, ces deux paralleles se répondent.

XI. Que les lignes droites qui se répondent, rencontrent la base au même point, quand elles ne luy sont point paralleles.

XII. Que les droites qui se rencontrent au même point de la base, & ont deux autres points qui se répondent, se répondent tout-à-fait.

Que si deux points d'une droite répondent à deux autres points d'une autre droite, ces deux droites se répondent. XIII.

Que deux droites qui se coupent, répondent à deux qui se coupent, & que leurs intersections se répondent. XIV.

Que deux lignes droites qui répondent à deux autres paralleles entr'elles, sont paralleles entr'elles. XV.

Car une ligne qui répondra à une parallele à *m* L, sera parallele à K H, & par consequent aussi à L O.

Et que les portions répondantes de deux droites qui se répondent sont proportionelles. XVI.

Comme les portions M R & R P répondant à *mr* & *rp*, dans les lignes répondantes M L & L m seront * proportionelles. *18. E.

De maniere que deux de ces portions étant egales entr'elles, les deux autres le seront de même. XVII.

AVERTISSEMENT.

Je donnerai toûjours aux points répondant des lettres répondantes. Ainsi *h* répondra à H, & h H sera la droite XVIII.

menée de l'un à l'autre de ces deux points.

REMARQUE.

XIX. Il eſt évident que toutes les paralleles qui déterminent les points répondans à ceux d'une ligne droite, ſe trouvent ſur une ſurface plane, & par conſequent que celles qui déterminent les points répondans à ceux d'une ligne courbe, ſe trouveront ſur une ſurface courbe.

DEFINITION.

XX. Si la ligne courbe eſt la circonference d'un cercle, cette ſurface ſe nomme une ſurface *Cylindrique*, & l'eſpace qu'elle renferme; un *Cylindre*, dont ce cercle ſe nomme *la baſe*.

XXI. Et la ligne courbe qui luy répond, une *Ellipſe*.

XXII. Dont je nomme ce même cercle le *Generateur*.

AXIOME.

XXIII. La ligne droite qui répond à une tangente de ce cercle, touche l'ellipſe au point qui répond à l'attouchement de cette tangente.

Car tout autre point de cette ligne répond à un autre point de cette tangente, lequel n'eſt pas de la circonference du cercle, & par conſequent cet autre point ne serapoint de l'ellipse.

PROBLEME.

Par un point donné sur une ellipse, mener une droite qui la touche. XXIV.

Cherchez le point du cercle qui répond au point donné, par lequel point du cercle vous luy tirerez une tangente, & par le point où elle rencontre la base ; une autre ligne au point donné.

Cette ligne touchera l'ellipse, puisqu'elle répond à une tangente du cercle.

Que si la tangente du cercle est parallele à la base, ce sera la parallele à la même base, menée par le point donné, qui touchera l'ellipse.

Ou generalement, menez la ligne qui répond à la ligne touchant le cercle au point qui répond au point donné.

PROBLEME.

D'un point donné au dehors d'une ellipse sur son plan, mener les deux lignes qui la touchent. XXV.

Du point répondant au point donné, menez deux lignes qui touchent le cercle, les deux lignes menées du point donné qui répondront à ces tangentes, tocheront l'ellipse, par l'axiome precedent.

THEOREME.

Toute ligne droite terminée à l'ellipse, XXVI.

& passant par le point qui répond au centre du cercle, est divisé par ce point en deux portions égales.

Car ces deux portions répondent aux deux moitiez de quelque diametre du
* 28. cercle. C'est pourquoy elles * seront égales entr'elles aussi-bien que ces moitiez.

DEFINITION.

XXVII. Je nomme centre de l'ellipse ce point qui répond au centre du cercle generateur.

THEOREME.

XXVIII. *La corde de l'ellipse qui répond à une corde du cercle divisée en deux parties égales par son diametre, est divisée de même par la ligne qui répond à ce diametre.*

Car les deux portions de la corde de l'ellipse répondent aux deux portions de celle du cercle, qui sont égales par la supposition. C'est pourquoy, &c.

COROLLAIRE.

XXIX. Une ligne droite qui divise également l'une des cordes de l'ellipse en passant par son centre, divise de même toutes celles qui luy sont paralleles, puisqu'elles répondent à d'autres cordes qui sont paralleles dans le cercle, & par conse-
* 11. E. quent divisées * en deux parties égales par le diametre qui leur est perpendiculaire.

DEFINITIONS.

Telle ligne droite qui diviſe également toutes les paralleles appliquées dans une ligne courbe, ſe nomme un *diametre* de cette courbe. XXX.

Le mot *de diametre* ſe prend quelquefois pour cette ligne droite prolongée indéfiniment des deux côtez, & quelquefois ſeulement pour la portion terminée par la courbe, comme on le prend toûjours, quand on parle de ſon égalité ou inegalité à une autre ligne.

Ces paralleles appliquées ſe nomment les *Ordonnées* au même diametre, XXXI. mais le plus ſouvent on nomme ainſi leurs moitiez, c'eſt-à-dire, les portions compriſes entre le diametre & la courbe.

Et ſi ce diametre coupe perpendiculairement ces ordonnées, on le nomme *Axe*. XXXII.

Deux diametres dont l'un à ſes ordonnées paraelleles à l'autre, ſe nomment diametres *Conjuguez*. XXXIII.

Il eſt évident que pareils diametres dans le cercle ſe coupent toûjours à angles droits. XXXIV.

C'eſt pourquoy deux diametres conjuguez dans l'ellipſe, ſeront ceux qui répondent à deux diametres qui ſe coupent à angles droits dans le cercle generateur.

PROBLEME.

XXXV. *L'un des deux diametres conjuguez d'une ellipse étant donné, trouver l'autre.*

Trouvez dans le cercle le diametre qui répond au diametre donné, & menez à ce diametre du cercle une perpendiculaire; le diametre de l'ellipse lequel répondra à cette perpendiculaire, sera l'autre diametre de l'ellipse conjugué au donné, selon la définition precedente.

PROBLEME.

XXXVI. Fig. 4. *Deux diametres conjuguez QCR & NCO, d'une ellipse étant donnez, luy trouver un cercle generateur.*

Soit par l'extremité *O* du diametre *NO* menée à *QR* la parallele *DE*, & sa perpendiculaire On. Et soit du point *c* de cette ligne, sur un raïon *cO* égal à *QC* ou *CR* décrit un cercle, je dis, qu'il sera le generateur de l'ellipse, dont *OR* & *NO* sont deux diametres conjuguez.

Car soit prolongée *Oc*, jusqu'à la rencontre du cercle en *n*, & soit à *QR* menée par le point *c* une parallele, qui rencontre le même cercle en *q* & *r*, je dis que les quatre lignes *Qq*, & *Nn*, *Cc*, & *Rr*, sont paralleles entr'elles.

Car *Cc*, qui divise également deux côtez *No* & *on* du triangle *NOn*, sera parallele au troisiéme, par la 27. E.

Elle sera * aussi parallele à *Qq*, qui joint avec elle les extremitez de deux lignes *QC* & *qc* égales & paralleles, & elle le sera à *Rr*, par la même raison. * 10. E.

Or est-il que *DE* peut representer la commune Section de deux differens plans, & les paralleles *Cc*, *Nn*, celles qui y déterminent les points répondans.

Supposé donc, que les deux centres *C* & *c* se répondent, le diametre *NO* répondra à *on*, & le point *n*, à *N*; le diametre *QR* parallele à la base répondra à la parallele *qr*, & les points *Q* & *R* à *q* & *r*.

Ainsi ces diametres seront ceux d'une ellipse, qui sera tout-à-fait la même que celle d'un Cylindre: & cela en vertu de cette projection qui n'altere rien dans les deux plans, en la maniere que j'ay expliquée au commencement de cet Ouvrage. Ce qui servira encore de fondement aux trois Problêmes suivans.

PROBLEME.

XXXVII. *Deux diametres conjuguez NCO & QCR d'une ellipse étant donnez, en trouver les deux axes.*

Fig. 5.

Tirez *OD* parallele à *QR*, & sa perpendiculaire *Oc* égale à *QC* ou *CR*; la droite *Cc*, que vous diviserez également par la perpendiculaire *GH*, qui coupe *OD* en *H*. Décrivez sur le raïon *HC* ou *Hc* un cercle qui coupe *DE* en *D* & *E*, & tirez *CD* & *CE*, qui seront les axes cherchez.

Maintenant, si vous voulez avoir les points où ces axes doivent rencontrer l'ellipse, prenez sur *CD* & *CE* les portions *ca* & *cl* égales à *co* & menez à *Cc* les paralleles *Aa* & *Ll*, qui rencontrent *CD* & *CE* en *A* & *L*. Ces deux points seront de l'ellipse.

Car il est évident, que *DC* & *CE* sont deux diametres conjuguez de l'ellipse, puisqu'ils répondent aux deux diametres *DC* & *CE* du cercle generateur décrit sur le raïon *cO*, qui se coupent perpendiculairement dans l'une des moitiez du cercle *cDC*, & que ces deux diametres conjuguez sont les deux axes de la même ellipse, puisqu'ils se coupent perpendiculairement dans l'autre moitié.

PROBLEME.

Les deux axes NCO & QCR d'une ellipse étant donnez, trouver les deux diametres conjuguez égaux entr'eux. XXXVIII. Fig. 6.

Menez *OD* perpendiculaire à *NO*, décrivez du centre *O*, sur un raïon égal à *QC* ou *CR*, un cercle qui coupe *NO* en *c*, & *OD* en *D* & *E*, & du centre *c* sur le même raïon un autre cercle. Tirez *Dc* & *tE*, qui coupent ce cercle en *a* & *l*, desquels points menez à *cC* les paralleles *aA* & *lL*, qui coupent *DC* & *CE* en *A* & *L*.

Je dis, que les porrions *AC* & *CL* sont les moitiez des deux diametres conjuguez égaux, que l'on cherche.

Car il est clair que ces deux portions sont égales, & qu'elles répondent à deux diametres qui se coupent perpendiculairement au centre du cercle generateur *al*.

PROBLEME.

Les deux axes NCO & QCR d'une ellipse étant donnez, trouver deux diametres conjuguez qui fassent un angle égal à l'angle donné Z. XXXIX. Fig. 7.

Tirez la ligne *OE* perpendiculaire à *NO*, sur laquelle prenez la portion *Oc* égale à *QC* ou *CR*: & faites l'angle *CPE* égal au donné *Z*. Tirez *PC*, &

aux deux lignes CP & PC, les perpendiculaires CV & cT, qui coupent OE en V & T.

Décrivez du centre c, ſur un raïon égal à la moitié de TV, un cercle qui coupe OE en S, & du centre S, ſur le même raïon, un autre cercle, qui coupe OE en D & E. Enfin tirez DC & CE.

Je dis, que ces deux lignes ſont les diametres conjuguez, & que l'angle DCE eſt égal à CPE ou Z.

Car le rectangle ſous TV & OP, a-
* 1. E. vec le quarré de CO eſt égal * au rect.
ſous TV & OP avec le rect. ſous VO &
* 34. E. OP : puiſque le quarré de CO eſt * é-
gal au rect. ſous VO & OP, dans les deux
triangles ſemblables VOC & COP.

Le rect. ſous la partie TV & OP, a-
vec le rect. ſous la partie VO & OP,
* 13. E. eſt * égal au rect. ſous la toute TO &
ſous OP.

* 34. E. Ce rect. ſous TO & OP eſt égal * au
quarré de cO, dans les tr. ſembl. TOc
& cOP.

Et ce quarré de cO eſt égal au rect. ſous DO & OE, dans les tr. ſembl. DOc & tOE.

Donc le rect. ſous TV & OP avec le
* 21. E. quarré de CO ſera * égal au rect. ſous
DO & OE.

Et ajoûtant de part & d'autre le quarré de *EO*.

Le rect. ſous *TV* & *OP*, avec les quarrez de *CO* & *EO*, eſt égal au rect. ſous *DO* & *OE*, avec le quarré de *EO*.

Le rect. ſous les parties *DO* & *OE*, avec le quarré de *EO*, eſt égal au rect. ſous la toute *DE* & ſa partie *EO*.

Et le rect. ſous *DE* & la toute *EO* eſt égal au rect. ſous *DE* & la partie *EP* avec le rect. ſous *DE* & l'autre partie *PO*.

Donc le rect. ſous *TV* & *OP*, avec
les quarrez de *CO* & de *EO*, ſera * é- * 21. E.
gal au rect. ſous *DE* & *EP* avec le rect.
ſous *DE* & *PO*.

Et ſi l'on retranche les rect. ſous *TV*
& *OP* & ſous *DE* & *PO*, qui ſont é-
gaux, parce que *TV* eſt égale à *DE*,
ſelon la conſtruction; le quarré de *CO*,
avec le quarré de *EO*, c'eſt-à-dire, * le * 14. E.
quarré de *CE*, reſtera * égal au rect. ſous * 2. E.
DE & *EP*.

C'eſt pourquoy *DE* ſera * à *EC*, com- * 33. E.
me *CE* à *EP*.

Ainſi les deux triangles *CDE* &
PCE, qui ont proportionels les côtez
autour de leur angle commun *E*, ſeront
équi-angles *, & l'angle *DCE* ſera é- * 35. E.
gal à l'angle *CPE*, & par conſequent

à l'angle Z, auquel CPE a été fait égal.

AVERTISSEMENT.

XL. La ſolution du precedent Problême, dont la demonſtration eſt peut-être la plus longue de celles de cet Ouvrage, n'eſt pas neceſſaire pour l'intelligence du reſte. Comme c'eſt là la ſeule choſe dans laquelle je me ſuis conduit par le calcul analytique, & que d'ailleurs je juge neceſſaire pour contenter l'eſprit, de ne luy point cacher la methode de l'invention des choſes un peu difficiles; je vais donner icy ce calcul.

Ayant mené OE perpendiculaire à NO, & pris ſur NO la portion Oc égale à QC ou CR, je fais l'angle CPE égal au donné Z.

Alors je ſuppoſe que DC & CE ſont les deux diametres que je cherche, qui font par conſequent l'angle DCE égal à Z, & répondent aux deux diametres Dc & cE d'un cercle generateur décrit ſur le raïon Oc, leſquels diametres doivent ſe couper à angles droits.

Je ſuppoſe $CO = a$, $Oc = b$, $OP = c$, & $OE = y$.

Il s'enſuit de là que PE eſt égale à $y - c$.

Que

Que le quarré de CE est égal à $aa + yy$, & par consequent CE sera $\sqrt{(aa + ayy.)}$

Et que DO est $\frac{bb}{y}$, parce que $EO = y$ est à $Oc = b$, comme $co = b$ est à OD, dans les tr. sembl. EOc & cOD, & par consequent que DE sera $\frac{bb}{y} + y$.

Puis donc que dans les triangles semblables DEC & CEP, le côté $DE = \frac{bb}{y} + y$ est au côté $EC = \sqrt{(aa + yy)}$, comme le même côté $EC = \sqrt{(aa + yy)}$ est au côté $EP = y - c$: en multipliant entr'eux les deux termes moïens & des deux extrêmes ; j'aurai l'égalité suivante des deux produits, $aa + yy = bb + yy - \frac{bbc}{y} - cy$, qui se réduira à $aa = bb - \frac{bbc}{y} - cy$, & puis à ; $aay = bby - bbc - cyy$, & enfin à ;
$+aay$

$$yy - \frac{\overset{c}{bb}\,y}{c} + bb = 0$$

Dont la construction, pour avoir la valeur de l'inconnuë y, selon ma methode ordinaire, sera la même que cy-dessus.

On peut juger, qu'afin que cette construction soit possible, il faut que TV soit pour le moins égale à cO, ou

$\frac{bb-aa}{2c}=b$, ou enfin $b-\frac{aa}{b}=2c$. Et c'eſt le cas des deux diametres conjuguez égaux entr'eux.

DEFINITIONS

pour la methode des Plans.

Fig. 8.
XLI. SI pluſieurs paralleles *fF*, *hH*, &c. coupent en *G*, *I*, &c. une ligne droite *DE*, que je nomme baſe, & qu'on prenne à côté de cette baſe ſur chacune de ces paralleles, deux portions *fG*, *GF*, *hI*, *IH* &c. qui gardent toûjours entr'elles une même raiſon donnée de *n* à *m* : je dis que les extrêmitez *f*, *h*, &c. des termes antecedens répondent aux extrémitez *FH* &c, des conſequens.

AVERTISSEMENT.

XLII. On donnera aux points répondans des lettres répondantes, dont les grandes *F*, *H* &c. ſeront toûjours aux extrémitez des conſequens, & les petites *f*, *h*, &c. aux extrêmitez des antecedens, & l'on nommera *DE* la baſe.

PROBLEME.

XLIII. *Deux points répondans f & F étant donnez, trouver un point répondant à tout autre point donné.*

On propose premierement de trouver un point répondant au point donné *m*, la ligne *f m* étant parallele à la base *D E*.

Menez à cette base une autre parallele *FO*, sur laquelle vous prendrez du même côté de *f F* la portion *F M* égale à *f m*.

Je dis, que le point *M* répondra à *m*.

Car, si vous tirez *m M*, qui coupe *DE* en *N*, elle sera * parallele à *f F*, & les portions *m N* & *N M* seront égales à *f G* & *G F*, & par consequent en raison de *n* à *m*. * 10. E.

On propose secondement de trouver le point répondant à *h*, la ligne *fh* coupant la base en *K*.

Tirez à *f F* la parallele *h H*, qui coupe en *I* la même base, & *K F* en *H*. Ce point répondra à *h*.

Car il est clair, que * *h I* est à *I H*, comme *f G* à *G F*, ou *n* à *m*. * 31. E.

Et l'on propose troisiémement de trouver un point répondant à *t*, qui soit sur *f F*. Fig. 9.

Menez à un point *K* de la base les deux lignes *f K* & *F K*; à *f K*, la parallele *TV*, qui coupe *D E* en *V*; & à *K F*, la parallele *VT*, qui coupe *f F* en *T*, ce point répondra à *t*.

* 25. E. Car il eſt clair que tG * eſt à GT; comme fG à GF ou n à m.

COROLLAIRES.

XLIV. On peut de ce Problême tirer les mêmes Corollaires que cy-deſſus dans la methode des Solides. Celuy où il eſt dit que les portions répondantes de deux droites qui ſe répondent ſont proportionelles, lorſque ces droites ne ſont qu'une même ligne ſe prouvera ainſi.

Fig. 9. Pour avoir dans le dernier cas du Problême précedent, un point répondant à un autre point x pris ſur la même ligne fF, on menera à fK une autre parallele xY, qui coupe DE en Y, & à KF la parallele XY qui coupe fF en X. Ce point répondra à x.

* 28. E. Car alors tf ſera * à fx, comme VK à KY, & VK eſt à KY comme TF à FX.

* 21. E. Donc tf ſera * à fx comme TF à FX.

DEFINITIONS.

XLV. Je dis qu'une ligne répond à une autre ligne, ſi tous les points de la premiere répondent à ceux de la ſeconde.

Si cette ſeconde eſt la circonference d'un cercle, la ligne qui luy répond ſe nommera une ellipſe, &c.

Et ce peu ſuffira, ce me ſemble, pour faire entendre de quelle maniere on peut appliquer le reſte de la methode des

Solides à celle des Plans. Voici maintenant une nouvelle deſcription de l'ellipſe, qu'on peut rapporter aux deux methodes. XLVI.

Si l'on conçoit, que le point *h* ſe meut le long de la circonference d'un cercle *hh*, en traînant avec luy la droite *hH*, toûjours parallele à la droite *fF*, & la droite *fK* mobile autour du point fixe *f*, & qu'en même tems cette ligne *fK* entraîne avec elle par le point *K*, où elle rencontre la ligne *DE*, la droite *KF* mobile autour d'un autre point fixe *F*, il eſt clair, que l'interſection continuelle *H* des deux droites *hH* & *KF* décrira dans ce mouvement une ellipſe, ſelon les définitions des deux methodes. Fig. 10.

Car la portion *hI* ſera toûjours à *IH*, comme *fG* à *GF*.

La ligne *DE* repreſentera la commune Section du premier & ſecond Plan. La ligne *fF*, une des paralleles à la ſurface cylindrique; les points *f* & *F*, ceux où cette ligne rencontreroit le premier & ſecond Plan; *fK*, l'une, & *FK*, l'autre des deux lignes, où un Plan mobile autour de la ligne fixe *fF* couperoit l'un & l'autre de ces deux Plans; & *hH*, une des lignes où il rencontreroit la ſurface cylindrique, & par conſequent l'interſection de ces deux lignes *bH* & *KF* repreſenteroit un point commun au ſecond Plan & à la ſurface cylindrique, c'eſt-à-dire, un point de l'ellipſe.

DES SECTIONS DU CONE.

DEFINITIONS.

S'Il y a deux Plans, *bacD* & *CDE*, premier & second, qui s'entrecoupent en une ligne *DE*, que je nomme base, & au dehors d'eux un point fixe *s*, que je nomme sommet, duquel soient menées plusieurs lignes droites *sf*, *sg*, *sh*, &c. que je nomme Verticales : Je dis que les points *F*, *G*, *H*, &c. où elles rencontrent l'un de ces Plans, répondent aux points *f*, *g*, *h*, &c. où elles rencontrent l'autre. Fig. 11. I.

La Directrice de l'un des Plans, est la Section qui luy est commune avec le Plan mené par le sommet parallelement à l'autre. II.

Comme si l'on mene au second Plan *CDE* le Plan parallele *sab*, qui coupe le premier en *ab*; cette ligne se nommera la directrice du premier Plan.

Pareillement, si l'on mene au premier *Dab*, le plan parallele *sIK*, qui coupe le second en *IK* ; cette ligne se nommera la directrice du second plan.

REMARQUES.

III. Tout point tel que *D* pris sur la base, répond à lui-même.

Un point de la directrice de l'un des deux plans, n'a pas de point qui luy répond dans l'autre : puisqu'une verticale qui passe par la directrice ne sçauroit rencontrer cet autre plan auquel elle est parallele.

Et un point *g* pris au dehors de *ab* l'une des deux directrices, du côté de la base *DE*, a son point répondant *G* hors de l'autre directrice *IK*, & pris de l'autre côté aura son point répondant de l'autre côté.

AVERTISSEMENT.

IV. Je marquerai les points du second plan par les grandes lettres, & tous les autres points qui seront au dehors de ce plan, par les petites : La base se nommera toûjours *DE*, le sommet *s* & la directrice du premier plan, *ab*. Ainsi *a* & *b* seront toûjours deux points de cette directrice, les points *D* & *E* seront de la base, & toute ligne qui aura la lettre *s* sera une verticale.

PROBLEME.

Un point étant donné dans l'un des plans, trouver celuy qui luy répond dans l'autre. V.

On propose premierement de trouver dans le second plan le point répondant à *f* donné dans le premier.

Menez une verticale quelconque *sa*, qui rencontre en *a* la directrice du premier plan ; la droite *fa*, qui rencontre la base en *E* ; & à *sa*, la parallele *EH*, qui sera * dans un plan *DEH* parallele * 17. E.
au plan *sab*, & par consequent dans le second plan. Menez *fs*, qui * rencontrera *EH*, laquelle est * dans le plan * 6. E. * 5. E.
afs avec sa parallele *sa* : Il est clair que le point *F*, où *fs* rencontrera *EH*, répondra à *f*, par la définition.

On propose au contraire, de trouver dans le premier plan le point répondant au point *F* donné dans le second.

Menez une droite quelconque *FE*, qui coupe la base en *E*, & à cette droite la parallele verticale *sa*, qui rencontre la directrice du premier plan en *a*, & menez *Ea* qui rencontre la verticale *Fs* en *f*. Il est encore clair, que ce point répondra à *F*.

DEFINITION.

Je dis, qu'une ligne répond à une VI.
autre ligne, si les points de la premie-

re répondent à ceux de la ſeconde.

PROBLEME.

VII. Fig. II. *Trouver la ligne qui répond à une droite donnée.*

Si la ligne donnée *f h* rencontre la directrice en *a*, & la baſe en *E*, je dis que ſi à la verticale *s a* vous menez la parallele *E H*, cette ligne répondra à *f h*.

Car il eſt clair, par la ſolution du premier Probleme, que les points qui répondent à ceux de la ligne *f h*, ſe trouveront tous ſur *E H*.

Que ſi la baſe étoit parallele à la ligne donnée *f m*, cherchez à *f*, l'un de ſes points, le point répondant *F*, par lequel vous menerez à cette baſe la parallele *FM*, qui répondra à *f m*.

Car *s f* & toutes les autres verticales qui paſſeront par *f m*, ſeront dans le plan *s f m*, & parce que le ſecond plan paſſe par la baſe *D E*, qui eſt parallele à *f m*; il rencontrera le plan *m f s* en
* 18. E. une ligne parallele * à la même baſe. Dont l'un des points de cette parallele ſera *F*, & la ligne cherchée *FM*.

COROLLAIRES.

VIII. L'une de deux lignes droites qui ſe répondent étant parallele à la baſe, l'autre luy ſera auſſi parallele.

Deux lignes droites qui ſe répondent, paſſent neceſſairement par un même point de la baſe, lorſqu'elles ne luy ſont pas paralleles. IX.

Deux droites qui répondent à deux autres qui paſſent par un même point de la directrice, ſont paralleles entr'elles. X.

Car elles ſe déterminent, en menant deux paralleles à une même verticale paſſant par ce point. XI.

Deux droites, qui ſe coupent au dehors de la directrice, répondent à deux lignes qui ſe coupent, & les deux interſections ſe répondent. XII.

AVERTISSEMENT.

Je donnerai aux points répondans des lettres répondantes. Ainſi *F* répondra à *f*, & *Ff* ſera une verticale. XIII.

REMARQUE.

Il eſt évident, que toutes les verticales qui déterminent les points répondans à ceux d'une ligne droite, ſe trouvent ſur une Surface plane. XIV.

D'où il ſuit que celles qui déterminent les points répondans à ceux d'une ligne courbe, ſe trouveront ſur une Surface courbe.

DEFINITIONS.

Si la ligne courbe eſt la circonferen- XV.

ce d'un cercle, cette Surface ſe nomme une Surface Conique, & le Solide qu'elle renferme ſe nomme un Cone, dont ce cercle ſe nomme la baſe.

XVI. Et la ligne courbe qui luy répond, une Section Conique, dont je nomme ce cercle le Generateur.

XVII. Si ce même cercle ne rencontre pas la directrice du plan dans lequel il eſt; Fig. 12. 13. 14. la Section ſe nomme une ellipſe; s'il la touche, en *t*, une Parabole; & s'il la coupe, en *t* & *u*, une Hyperbole.

XVIII. Il eſt aiſé de voir, que dans l'hyperbole, la portion qui répond à l'arc *tfu* qui eſt d'un côté de la directrice *ab*, ſera tout-à fait ſeparée de la portion qui répondra à l'arc *thu*, qui eſt de l'autre côté, ce qui produira une double hyperbole, dont l'une ſera d'un côté de la directrice *IK* du ſecond plan, & l'autre, de l'autre côté. On prend quelquefois cette double hyperbole pour une ſeule ligne, quelquefois pour deux, & alors on les nomme hyperboles oppoſées.

XIX. Fig. 15. Si par les deux points *t* & *u*, ou la directrice coupe le cercle, ou luy mene deux tangentes *cD* & *cE*; les deux lignes *CD* & *CE* qui leur répondent ſe nomment les Aſymptotes de l'hyperbole.

Il faut que ces deux Aſymptotes ſe coupent, puiſqu'elles ſont paralleles à deux lignes *t s* & *s u* qui ſe coupent au ſommet. XXI

Elles ſe nomment ainſi d'un mot grec, qui ſignifie *non-coincidentes* ou *non-concurrentes*, parce qu'elles ne peuvent jamais rencontrer l'hyperbole, quoyqu'elles s'en approchent de plus en plus à l'infini. XXI.

Car ſoit dans le cercle generateur l'arc *thnu*, répondant à l'hyperbole *H N*, ſur lequel arc ſoient pris deux points *h* & *n*, dont *h* ſoit le plus éloigné du point *u*. Fig. 16.

Je dis, que ſi des points *H* & *N*, qui leur répondent, on mene à la directrice deux paralleles *H G* & *N P* qui coupent l'aſymptote *C E* en *G* & *P*; la diſtance *P N* ſera moindre que *G H*.

Soient menées *h u*, qui coupe *p n* en *o*, & à la tangente *u E*, les paralleles *Gq* & *Pr*, qui coupent la verticale *s u* en *q* & *r*.

La raiſon de *r P* à *P N* eſt * égale à la raiſon de *u p* à *p n*, qui ſurpaſſe la raiſon de *up* à *p o*. * 25. E.

La raiſon de *up* à *p o* eſt * égale à la raiſon de *u g* à *g h*. * 25. E.

Et la raiſon de *u g* à *g h* eſt * égale à * 25. E.

la raiſon de qG à GH.

Donc la raiſon de rP à PN ſurpaſſera la raiſon de qG à GH.

Puis donc que l'antecedent rP eſt égal à qG, le conſequent PN ſera moindre que GH.

La même choſe ſe prouvera des points de l'hyperbole oppoſée, qui répond à l'autre arc.

REMARQUES.

XXII. On pourroit définir autrement les trois Sections Coniques, en diſant que l'hyperbole eſt produite par un plan qui rencontre toutes les verticales de la Surface Conique, hormis deux, ſçavoir celles qui paſſent par les deux points où la directrice de l'autre plan coupe le cercle.

Que la parabole eſt produite par un plan qui rencontre toutes les verticales hormis une, ſçavoir celle qui paſſe par le point où la directrice touche le cercle.

Et que l'ellipſe eſt produite par un plan, qui rencontre toutes les verticales, en quoy elle convient avec l'ellipſe du Cylindre, lequel on peut regarder comme un Cone dont le ſommet eſt infiniment éloigné de la baſe, duquel par conſequent toutes les verticales sont paralleles entr'elles.

DEFINITIONS
pour la methode des Plans.

DEux paralleles *ab*, *DE*, dont je nomme *Directrice* la premiere, & *Base*, la seconde, étant données dans un plan, avec un point fixe *s* pris au dehors d'elles, lequel je nomme *Sommet*: Je dis, qu'un point *F* répond à un autre point *f*, si la distance du premier au second est quatriéme proportionelle à la distance de la directrice, à celle de la base, & à celle du sommet. XXIII. Fig. 12.

PROBLEME.

Un point f étant donné, trouver celuy qui luy répond. XXIV. Fig. 12.

Tirez *fs* & *fa*, qui coupe la base au point *E*, par lequel menez à *sa* la parallele *EF*, qui coupe *fs* en *F*.

Il est clair, que ce point répondra à *f*, par la définition precedente, puisque *af* est à *fE*, comme *sf* à *fF*.

DEFINITIONS.

Je dis, qu'une ligne répond à une autre ligne, si les points de la premiere répondent à ceux de la seconde. XXV.

Si l'une des lignes est la circonference d'un cercle ; celle qui luy répond se nommera une Section Conique, &c.

Il sera aisé de faire l'application du reste à la methode des plans. Tout le discours suivant, & même toutes les Figures serviront également aux deux methodes. Il faudra seulement dans celle des plans s'imaginer, que les ellipses qui representent le cercle generateur sont de veritables cercles, ce qui est facile. Ce cercle generateur pouvoit semble-t-il être mieux representé par un cercle, mais les Figures seroient devenuës par-là trop embroüillées.

Description des trois Sections Coniques sur le plan.

XXVI. Fig. 12. 13. 14. Si l'on conçoit, que le point *f* se mêut le long de la circonference du cercle *fh*, entraînant avec luy les deux droites *fs* & *sa* mobile autour des points fixes *s* & *a*, & qu'en même temps la ligne *fa* entraîne avec elle par le point *E*, où elle rencontre la ligne *DE*, la droite *EF* toûjours parallele à *sa* ; il est clair, que l'intersection continuelle *F* des deux droites *sf* & *EF*, décrira dans ce mouvement une Section Conique *HF*, qui sera une hyperbole ; lorsque la ligne *ab* parallele à *DE* traverse le cercle,

cle; une parabole, lorſqu'elle la touche; & une ellipſe lorſqu'elle tombe entierement au dehors. Car la diſtance *af* eſt à *fE*, comme *sf* à *fF*.

Voila donc une maniere generale de décrire les trois Sections Coniques ſur le plan, par un mouvement continu, qui répond parfaitement à celle qui ſe fait dans le Cone.

Car le cercle *fh* repreſente la baſe du Cone; *s*, le ſommet; *DE*, la baſe de la Section; *sa*, une parallele au plan de la même Section; *a*, le point où cette parallele rencontre le plan de la baſe du Cone; *af*, une des lignes où un plan mobile autour de la ligne fixe *sa* couperoit le plan de la même baſe; *EF*, une des lignes où il couperoit le plan de la même baſe; *EF*, une des lignes où il couperoit le plan de la Section; & *sf*, une des lignes où il rencontreroit la Surface Conique.

Par conſequent, l'interſection *F* de ces deux lignes *sf* & *EF* repreſenteroit un point commun au plan de la Section, & à la Surface Conique; c'eſt-à-dire, un point de la Section Conique, qui ſera une hyperbole, lorſque *ab*, qui repreſente la directrice du premier plan traverſera le cercle, &c.

DES TANGENTES.

AXIOME.

XXVII. La ligne droite qui répond à une tangente du cercle generateur, touche la Section Conique au point qui répond à l'attouchement de cette tangente, pourvû qu'il ne soit pas sur la directrice.

Car tout autre point de cette ligne répond à un autre point de cette tangente, lequel n'est pas de la circonference du cercle, & par consequent il ne sera pas de la Section Conique.

PROBLEME.

XXVIII. Fig. 18. 19. *Mener une ligne droite, qui touche une Section Conique en un point donné L.*

Tirez au cercle generateur la tangente *la* par le point *l*, où *la* verticale *sL* le rencontre, il est clair, que la ligne *DL*, qui répondra à cette tangengente, touchera la Section.

PROBLEME.

XXIX. Fig. 18. 19. *D'un point donné, qui réponde à un autre point exterieur au cercle generateur, tirer deux lignes qui touchent la Section.*

Menez de ce dernier point les deux lignes qui touchent le cercle, il est clair que les deux autres lignes qui répondront aux deux tangentes, seront aussi tangentes de la Section.

PROBLEME.

Une ligne droite M N étant donnée dans le plan d'une Section Conique, lui trouver une, ou deux tangentes paralleles, quand il se peut. XXX. Fig. 17. 18.

Menez la verticale *s a* parallele à *M N*, les deux lignes *a D*, *a E*, touchant le cercle en *f* & *l*, & à *M N* ou *s a*, les paralleles *D F* & *E L*, qui répondront aux tangentes du cercle, & par consequent toucheront la Section.

COROLLAIRE.

Il est évident par cette construction; que si des points *f* & *l*, ou deux verticales tirées par les attouchemens de deux paralleles *D L* & *E F* vont rencontrer le cercle, on mene deux lignes qui le touchent, elles se rencontreront en un même point de la directrice. XXXI.

THEOREME.

Si deux paralleles F G, K L, qui touchent une ellipse, ou hyperbole M L F, coupent une autre ligne G K, qui la touche en M; les quatre portions F G, G M, L K, K M, comprises entre les trois points d'attouchement & les deux intersections de ces tangentes seront proportionelles. XXXII. Fig. 19. 20.

Soient tirées *s a* & *s b*, paralleles à *F G* & *G K*, & deux autres paralleles *g o* & *g q* rencontrant *s F* & *s M* en *o* & *q*.

1°. Dans les deux triangles semblables SGF & sgo, le côté GF est * à go,
* 25. E. comme Gs à sg, & dans les tr. sembl. sGM & sgq, le côté Gs est à sg, com-
* 11. E. me gM à gq. Donc le côté GF sera * à go, comme GM à gq.

Et, par échange, le côté GF sera à GM, comme go à gq.

2°. Dans les deux tr. sembl. fgo &
* 25. E. fas, le côté og est * à gf, comme sa à af, & dans les tr. sembl. mgq & mbs, le côté mg est à gq, comme mb à bs.

3°. La raison de la portion og à gq
22. E. est composée * des raisons de og à gf & de gf ou gm à gq : car les tangentes gf
* 12. E. & gm sont égales. *

Puis donc que, comme on l'a prouvé, la raison de og à gf est la même que la raison de sa à af, & la raison de mg à gq, la même que de mb à bs; la raison de og à gq sera composée des raisons de sa à af, & de mb à bs.

XXXIII. C'est pourquoy la raison de GF à GM, qui est la même que celle de go à gq, comme on l'a prouvé, sera aussi composée des raisons de sa à af, & de mb à bs.

On prouvera pareillement, que la raison de LK à KM est composée des raisons de mb à bs & de sa à af; puisque la verticale que l'on tirera parallele à KL, sera la même ligne sa, & la tangente al égale à af.* * 12. E.

Donc la portion FG sera à GM, comme LK à KM.

COROLLAIRE.

Dans l'hyperbole, plus le point d'attouchement de la troisiéme tangente GK, sera éloigné des paralleles FG & KL, plus la raison des portions GM & MK de cette troisiéme approchera de l'égalité. De maniere qu'elles seront tout-à-fait égales, lorsque le point d'attouchement M sera infiniment éloigné des tangentes paralleles : & c'est le cas du Theoreme suivant. Fig. 20.

THEOREME.

Les deux portions FG, KL de deux paralleles qui touchent les hyperboles opposées, & sont comprises entre les deux points d'attouchement F & L, & CD, l'une des asymptotes sont égales. Fig. 21. XXXIV.

Soient tirées à Dt, qui touche le cercle au point t, où la directrice le coupe, les paralleles Gp & Kq, qui coupent la verticale st en p & q; la ligne sa parallele à FG & KL; & à sa, la parallele go, qui coupe Fs en o.

Dans les deux tr. sembl. Gps & gts,

* 25. E. le côté *Gp* eſt * à *gt*, comme *Gs* à *sg*, & dans les tr. ſembl. *GFs* & *gos*, le côté *Gs* eſt à *sg*, comme *FG* à *go*.

* 21. E. Donc le côté *Gp* eſt * à *gt*, comme *FG* à *go*, &, par échange, la portion *Gp* ſera à *FG*, comme *gt* à *go*.

* 19. E. Or *gt* eſt * à *go*, comme *gf* à *go*,
* 12. E. parce que les deux tangentes *gt* & *gf* ſont * égales, & *gf* eſt à *go* comme *af* à *as*. Donc la portion *Gp* ſera * à *FG*
* 21. E. comme *af* à *as*.

On prouvera pareillement, que *qK* eſt à *KL*, comme *al* à *as*, or *al* eſt * à
* 19. E. *as* comme *af* eſt à *as*, parce que les deux tangentes *al* & *af* ſont * égales;
* 12. E. & l'on vient de voir, que *af* eſt à *as*,
* 21. E. comme *Gp* à *FG*. * Donc *qK* eſt à *KL*, comme *Gp* à *FG*. Ainſi la portion *KL*
* 19. E. ſera * égale à *FG*, de même que *qK*
* 9. E. l'eſt à *Gp*. *

COROLLAIRES.

XXXV. Une ligne *FL*, qui joint les points
Fig. 21. d'attouchement de deux paralleles touchant les hyperboles oppoſées, eſt diviſée également par le point *C*, où elle coupe l'aſymptote *CD*.

Car, dans les deux tr. ſembl. *FGC* & *LKC*, le côté *FG* étant égal à *KL*, le
* 25. E. côté *FC* * le ſera auſſi à *CL*.

XXXVI. La même ligne *FL* ſera pareillement divisée par l'autre asymptote, en deux parties égales, c'est pourquoy elle passera par l'intersection des mêmes asymptotes.

THEOREME.

Une ligne HI, qui appliquée dans une ellipse ou les hyperboles opposées, divise également en C une autre ligne AB terminée aux points d'attouchement de deux tangentes paralleles, y est divisée en deux parties égales HC, CI. XXXVII. Fig. 22. 23.

Tirez par *H* la tangente *FD* & sa parallele *EG* touchant la Section en *K*, & tirez *DE*.

Ces quatre raisons sont semblables, * de *AG* à *GK*, de *BF* à *FH*, de *AD* à *DH*, & de *BE* à *EK*. * 34.

Donc la somme $AG + Bf$ des deux premiers antecedens est à la somme $GK + FH$ des deux premiers consequens, comme la somme $AD + BE$ des deux derniers antecedens à la somme $DH + EK$ des deux derniers consequens. * 31. E.

Et, en prenant pour l'hyperbole la difference des deux antecedens de cette nouvelle proportion, & la difference des consequens, on aura la raison de GA à AD, $+ FB - BE$, à $GK - KE + FH - HD$, ou plûtôt de la moitié $GA - AD$ à la moitié $GK - KD$ semblable à la raison de AG à GK. Fig. 23. * 31. E.

* 32. E. Or la raiſon de AG à GK eſt ſemblable à la raiſon de $AG - BE$ à $GK - KE$, puiſque AG eſt à GK, comme BE à EK.

* 21. E. Donc $GA - AD$ ſera * à $GK - KE$, comme $AG - BE$ à $GK - KE$.

C'eſt pourquoy $GA - AD$ ſera égale à $AG - BE$, ainſi AD & BE ſont égales ;
* 25. E. DE ſera diviſée * & diviſera également AB & paſſera par C.

On prouvera pareillement, que DH eſt égale à EK, c'eſt pourquoy KH, ſera diviſée & diviſera également AB & paſſera par C.

Fig. 22. Cette démonſtration s'ajuſtera à l'ellipſe, en y changeant ſeulement le mot de *difference* en celuy de *ſomme* & le Signe $-$ en $+$.

DEFINITION.

XXXVIII. Ce point C, où ſont diviſées également toutes les droites terminées à l'ellipſe ou aux hyperboles oppoſées, ſe nomme le *centre* de cette ellipſe ou de ces hyperboles.

COROLLAIRES.

XXXIX. Le centre des hyperboles eſt à l'interſection de leurs aſymptotes : cela ſuit de l'article 38.

XL.
Fig. 22 23. Si une ligne HK paſſe par le centre, & que par les deux points où elle rencontre l'ellipſe ou les hyperboles, on

tire deux tangentes, elles seront paralleles.

THEOREME.

Si deux paralleles K L, F G qui touchent une ellipse ou deux hyperboles opposées, coupent une autre ligne G K, qui la rencontre en M; & que les deux portions K M, M G faites par cette troisiéme ligne avec ces paralleles soient proportionelles aux portions K L & F G des mémes paralleles; la troisiéme ligne G K touchera cette ellipse ou l'une de ces hyperboles. XLI. Fig. 24.

Car si elle ne la touche pas, soit menée par le point *M* une autre ligne qui la touche, & rencontre *FG* & *KL* en *Q* & *P*, & aux mêmes tangentes une parallele *MN*, qui coupe *LF* en *N*.

La portion *KL* est à *FG*, comme *KM* à *MG*, par la supposition.

La portion *KM* est à *MG*, comme * *LN* à *NF*, à cause des trois paralleles *KL*, *MN* & *FG*. * 28. E.

La portion *LN* est à *NF*, comme *PM* à *MQ*, pour la même raison.

Et la portion *PM* est * à *MQ*, comme *PL* à *FQ*, puisque *PO* est supposée toucher la Section. * 34.

Donc la portion *KL* sera * à *FG*, comme *PL* à *FQ*, ce qui est impossible, * parceque l'antecedent *KL* surpasse l'an- * 21. E. * 20. E.

tecedent *P L*, & que le conſequent *FG* eſt ſurpaſſé du conſequent *F Q*.

Donc nulle autre ligne que *G K* ne touchera l'ellipſe ou l'hyperbole.

PROBLEME.

XLII. Fig. 25. 26. *Deux paralleles F G & L K touchant une ellipſe ou deux hyperboles oppoſées étant données, tirer d'un point donné M ſur cette ellipſe ou l'une de ces hyperboles, une ligne droite qui la touche.*

Tirez *M N* parallele aux tangentes *F G* & *L K*, & par leurs points d'attouchement, une ligne *L F*, qui coupe *M N* en *N*. Prenez ſur *L F* la portion *N O* égale à *N F*, & tirez *O P* parallele aux tangentes, la ligne *L M*, qui coupe cette parallele *O P* en *P* : enfin *P F*, & ſa parallele *M C*, qui coupe *F G* en *G*, *L K* en *K*, & *L F* en *C*. Je dis, que cette ligne *M C* touchera la Section.

Car le côté *L K* eſt à *F G* comme *L C* à *C F*, dans les triangles ſemblables *K L C* & *G F C*.

Le côté *L C* eſt à *C F* comme *L M* à *M P*, dans les tr. ſembl. *M L C* & *P L F*.

Le côté *L M* eſt à *M P*, comme *L N* à *N O*, dans les tr. ſembl. *M L N* & *P L O*.

*. 19. E. La portion *L N* eſt * à *N O*, comme *L N* à *N F*, parce que *N O* a été priſe égale à *N F*.

Et la portion *LN* eſt * à *NF* comme * 28. E.
KM à *MG* dans les trois paralleles *LK*,
MN & *FG*. Donc le côté *LK* ſera * à * 21. E.
FG, comme *KM* à *MG*, & par conſequent *MC* touchera la Section.

COROLLAIRE.

Lorſque le point *L* ſera infiniment é- Fig. 27.
loigné de *F*, comme il arrivera, l'ellipſe ou hyperbole devenant parabole; la ligne *LM* ſera parallele à *LF*.

Alors la portion *FC* ſera égale * à *M* * 9. E.
P, & *MP* à *NO*: c'eſt pourquoy *FC*
ſera * égale à *NO* & par conſequent auſſi * 21. E.
à *NF* à laquelle *NO* a été priſe égale,
ainſi *CG* ſera égale à *GM* *, comme on * 25. E.
va le démontrer poſitivement.

THEOREME.

Si deux lignes FG & GM touchent une XLIII.
parabole, & que par le point d'attouchement Fig. 28.
F de l'une on mene une parallele à la verticale st menée au point t, où la directrice touche le cercle generateur; la portion MC de l'autre tangente, compriſe entre ſon point d'attouchement & cette parallele, ſera diviſée en deux parties égales MG, GC par la premiere tangente MG.

Suppoſé la même preparation que cydeſſus, art. 34. ſoit de plus tirée à *sa* ou *GF* la parallele *bu*, qui rencontre *st* en *u*.

1°. La raison de $s\,b$ à $b\,t$ est la même que la raison de sb à bm, parce que bt & $b\,m$, qui touchent le cercle sont égales.

* 25. E. 2°. La raison de bt à bu est la même * que de ta à as, à cause des paralleles bu & as, & la raison de ta à as, la même que de ta à $a\,s$, parce que ta & at qui touchent le même cercle, sont encore égales.

* 21. E. Donc la raison de $b\,t$ à $b\,u$ sera * la meme que la raison de ta à as.

3°. La raison du côté CG à GF, dans le triangle CGF, qui a ses côtez paral-

* 25. E. leles à ceux du triangle $s\,b\,u$, est * la même que la raison de $s\,b$ à $b\,u$.

Puis donc que la raison de sb à bu

* 22. E. est composée * des raisons de $s\,b$ à $b\,t$, & de bt à bu; que, comme on l'a prouvé, la raison de $s\,b$ à bt est la même que de sb à $b\,m$; & la raison de bt à bu, la même que de fa à as; la raison de $s\,b$ à bu sera composée des raisons de sb à bm & de fa à as.

C'est pourquoy la raison de CG à GF, qui est la même que de $s\,b$ à bu, comme on l'a prouvé, sera pareillement composée des raisons de sb à bm & de fa à as.

Or la raison de MG à GF est aussi

composée des mêmes raisons de sb à bm & de fa à as, comme on l'a prouvé cy-dessus, art. 35.

Donc la portion CG sera * à GF, comme MG à GF, ainsi les deux portions CG & GM seront égales. * 23. E.

COROLLAIRES.

XLIV. Fig. 29. Si de quelque point C de cette parallele CF, on tire deux tangentes CM, CN; la ligne MN, qui joindra les points d'attouchement M & N, sera divisée par la premiere CF en deux parties égales.

Car, si par le point d'attouchement M, on mene à st une autre parallele MQ qui coupe NC en Q; la tangente MC divisera QN en deux parties égales QC & CN, par le precedent Theoreme. Ainsi les deux paralleles QM & CF, qui font QC égale à CN, feront * aussi MP égale à PN. * 26. E.

XLV. Et, si par le point F, où la premiere ligne CF coupe la parabole, on tire une tangente; elle sera parallele à cette ligne MN, qui joint les points d'attouchement M & N.

Soient G & H, les points où cette tangente rencontre les deux autres; la portion MG sera * égale à GC & CH à HN. * 45.

C'est pourquoy GH & MN, qui diviſent proportionellement les deux côtez de l'angle *MCN*, ſeront paralleles entr'elles.

THEOREME.

XLVI. Fig. 29. *Si une ligne GH touche une parabole, & que par le point d'attouchement F, on mene une parallele CF, a la verticale st menée au point t, où la directrice touche le cercle generateur; elle diviſera en deux parties égales MP, PN, toute ligne MN appliquée à la parabole parallelement à la tangente.*

Soit du point *N* menée une tangente qui rencontre *FC* en *C*, & du point *C*, une autre tangente en *O*; la ligne *ON*, qui ſera diviſée également par *CF*, de même que l'eſt *NQ* ſera * parallele à *GH*, & par conſequent, la même * que *MN*.

* 47.
* 3. E.

DEFINITIONS.

XLVII. Une ligne droite, comme *CF*, qui diviſe également toutes les paralleles appliquées dans une ligne courbe, ſe nomme un *Diametre* de cette courbe.

XLVIII. Et ces paralleles ſe nomment les *Ordonnées* au même Diametre, mais le plus ſouvent on nomme ordonnées leurs moitiez, c'eſt-à-dire, leurs portions compriſes entre le diametre & la courbe.

XLIX. Et, ſi ce diametre coupe perpendiculairement ces ordonnées, on le nomme l'*Arc* de la même ligne courbe.

PROBLEME.

Trouver dans la parabole un diametre, qui fasse avec sa tangente tel angle donné qu'on voudra. L. Fig. 30.

Faites l'angle *t s a* tel qu'il vous plaira.

Tirez au cercle l'autre tangente *a f* differente de la directrice, & du point d'attouchement *f* la ligne *f t*. Menez des points *D* & *E* où ces deux lignes coupent la base, à *t s* & *s a* deux paralleles *E F* & *D F*, qui se coupent en *F*. Il est clair que *D F* qui répond * à *D f** tangente du cercle, sera * tangente de * la parabole, que *E F* répond à *E f*, c'est pourquoy la commune Section *F* des lignes *E F* & *D F* répondra * à la commune Section *f* des lignes *E f* & *D f*: & la ligne *E F* sera un diametre qui fera avec sa tangente *F D* l'angle *E F D* évidemment égal à *t s a*.

THEOREME.

Si des extremitez d'une ligne M N appliquée dans une Section Conique M F N, on tire deux tangentes M C, N C, & une troisiéme tangente G H parallele à l'appliquée; elle sera divisée en deux parties egales G F, F H, par les deux autres & son point d'attouchement F. LI. Fig. 31. 32.

Soient aux trois tangentes *GH*, *MC*, & *CN* menées les trois paralleles *sa*, *sb* & *sp* qui rencontrent la directrice en *a*, *b* & *p*, desquels points soient menées vers le cercle generateur les trois tangentes *af*, *bm*, & *pn*.

La raison de *FG* à *GM* est compo-
* 35. sée * des deux raisons de *sa* à *af* &
de *mb* à *bs*.

La raison de *GM* à *NH* est la mê-
* 26. E. me * que la raison de *MC* à *CN*, qui
* 35. est composée * des raisons de *sb* à *bm*
& de *np* à *ps*.

Et la raison de *NH* à *HF* est compo-
* 35. sée * des raisons de *sp* à *pn* & de *fa* à
as.

Puis donc que la raison de *FG* à *H*
* 22. E. *F*, est composée * des trois raisons, de
FG à *GM*, de *GM* à *NH*, & de *NH* à *HE*; en substituant à chacune d'elles les deux raisons dont elle est composée ; comme on vient de voir ; on trouvera la raison de *FG* à *HF* composée de six raisons, sçavoir de *sa* à *af*, de *mb* à *bs*, des *sb* à *bm*, de *np* à *ps*, de *sp* à *pn*, & de *fa* à *as*.

Et parce que les deux raisons de *mb*
* 24. E. à *bs*, & de *sb* à *bm* constituent * une
raison d'égalité, comme aussi les deux de *np* à *ps* & de *sp* à *pn*, & les deux

de

de sa à af & de fa à as; les six raisons se réduiront à trois raisons d'égalité.

C'est pourquoy la raison de FG à HF, qui est composée de trois raisons d'égalité sera aussi une raison d'égalité, c'est-à-dire, que FG sera égale à HF.

COROLLAIRE.

Lorsque la ligne MN appliquée dans l'hyperbole sera infiniment éloignée de la tangente GH sa parallele, les deux autres tangentes seront les asymptotes, comme on le prouvera positivement dans le Theoreme suivant.

THEOREME.

Une ligne GH, qui touche une hyperbole en F, est divisée en deux parties égales FG, FH, par le point d'attouchement & les deux asymptotes DC, CE. LII. Fig. 33.

Soient menées, aux deux lignes qui touchent le cercle en t & u, où la directrice le coupe, les paralleles Hq & Gp, qui coupent les verticales st & su en q & p; & à GH les paralleles sa, & go, qui rencontre sF en o.

La portion Gp est * égale à Eu, Eu * à Dt, & Dt à Hq. Donc la portion Gp sera * égale à Hq. * 9. E. * 26. E. * 9. E. * 21. E.

On prouvera comme cy-dessus art. 36. que Gp est à FG, comme af à as,

& que *af* eſt à *as* comme *Hq* à *FH*.

* 21. E. Donc *Gp* ſera * à *FG* comme *Hq* à *FH*, où l'antecedent *Gp* étant égal à l'antecedent *Hq*, comme on vient de dire; le conſequent *FG* ſera auſſi égal au conſequent *FH*.

COROLLAIRE.

LIII. Une ligne *GH* qui eſt diviſée également par le point *F*, où elle rencontre l'hyperbole, & par ſes deux aſymptotes, touche la même hyperbole.

Car ſi elle ne la touchoit pas, en tirant une autre ligne qui la touchât au même point *F*; elle y ſeroit diviſée, ſelon le precedent Theoreme, en deux parties égales auſſi-bien que *GH*. D'où il s'enſuivroit, que les deux aſymptotes, qui ſe rencontreront au centre *C*, ſont paralleles entr'elles, comme il eſt aiſé de le prouver. Cela poſé.

PROBLEME.

LIV. Fig. 33. *Mener une ligne droite qui touche en un point donné une hyperbole, dont on a les deux aſymptotes.*

Tirez à l'aſymptote *CE* la parallele *FI*, qui coupe en *I* l'autre aſymptote *CD*, ſur laquelle prenez la portion *IG* égale à *IC*, & menez *GF*, qui rencontre l'aſymptote *CE* en *H*: Je dis, que *GF* touche l'hyperbole en *F*.

Car, à cauſe de FI parallele au côté CH, du triangle CGH, dont le côté GC eſt diviſé également en I; l'autre côté GH le ſera * auſſi en F. C'eſt pour- * 26.
quoy GF, touchera l'hyperbole en F, par le precedent Corollaire.

THEOREME.

La ligne FL, qui joint les deux points d'at- LV.
touchement de deux paralleles touchant une el- Fig. 31. 32.
lipſe ou les deux hyperboles oppoſées; diviſe également toute ligne MN appliquée dans la Section parallelement aux tangentes.

Tirez des points M & N deux autres tangentes GM & HN, qui ſe rencontrent en C. La ligne FL, qui diviſe * * 53.
également les deux paralleles tangentes GH & IK, compriſes dans l'angle
MCN, ou GCH, paſſera * par C, & di- * 29. E.
viſera MN * en deux parties égales, de * 30. E.
même qu'elle diviſe GH & IK.

COROLLAIRE.

Lorſque l'une des deux paralleles tangentes ſera infiniment éloignée de l'autre, comme il arrivera, l'ellipſe ou l'hyperbole devenant parabole; la ligne FL qui joint les deux attouchemens deviendra parallele à la verticale qui paſſe par le point où la directrice touche le cercle generateur.

C'eſt pourquoy toute parallele à cette verticale, qui passe par le point d'attouchement d'une ligne quelconque touchant la parabole, divise également toutes les paralleles à cette tangente, appliquées dans la même parabole, comme on a vû cy-dessus, art. 48.

THEOREME.

LVI. Fig. 35. *La parallele C B à deux tangentes F G & L K, tirée par le centre de deux hyperboles opposées, divise également en B toute ligne A D terminée à ces hyperboles, & parallele à la ligne F L, qui joint les attouchemens de ces tangentes.*

Soient tirées *A C*, qui rencontre en *M*; l'hyperbole opposée, & aux tangentes *s* la parallele *M N*, qui rencontre *L F* en *O* & la même hyperbole en *N*.

Dans le triangle *A M N*, la ligne *C F*, qui divise * également en *C* & *O* les côtez *A M* & *M N*, est * parallele au troisiéme côté *A N*. Donc ce côté *A N* est le même que *A D* *, auquel *C F* est aussi parallele, & le point *N*, le même que *D*. Ainsi *C B* parallele au côté *M N* du même triangle, *A M N* divisera son côté *A D*, de même qu'elle divise *A M*.

* 37. & 57.
* 27. E.
* 3. E.

PROBLEME.

LVII. Fig. 36. *Les deux asymptotes C D, C E d'une hyperbole étant données, trouver un diametre qui fasse avec ses tangentes un angle égal* *à l'angle donné* IZL.

Prolongez LZ, ſur laquelle vous prendrez les deux portions égales ZK & ZL. Décrivez ſur KL un arc de cercle capable de l'angle DCE au dedans duquel eſt l'hyperbole.

Tirez du point I, où la ligne ZI coupe cet arc, deux lignes IK & IL, qui feront l'angle KIL égal à DCE.

Prenez ſur CD & CE les deux portions CN & CO égales à IK & IL, la ligne NO ſera égale à KL, c'eſt pourquoy, ſi vous prenez ſur cette ligne NO, la portion NM égale à KZ; elle ſera diviſée en deux parties égales NM & MO, & ſi vous tirez CM, l'angle CMO ſera égal à IZL.

Enfin, ſi par le point F, où CM rencontre l'hyperbole, on tire à NO une parallele GH, qui coupe les aſymptotes en G & H; la ligne CM, qui diviſe NO également en M, diviſera * pareillement GH en F. C'eſt pourquoy * 3ʼ. E.
GH ſera * une tangente, qui fera avec * 55.
le diametre CF l'angle CFH égal à CMO ou IZL.

DEFINITION.

Une ligne paſſant par le centre & LVIII.
terminée aux deux hyperboles oppoſées, ſe nomme leur *premier diametre*.

Et une tangente à l'une ou l'autre extrémité de cette premiere ligne, & terminée aux aſymptotes, ſe nomme le *ſecond diametre* des mêmes hyperboles.

De la comparaiſon des Parallelogrammes.

THEOREME.

LIX. Fig. 37. 38. 39. *Si une ligne MN & deux paralleles FH & IL, qu'elles coupent, rencontrent une Section Conique; les deux rectangles FGH & IKL ſous les portions des mêmes paralleles ſeront proportionelles aux deux rectangles MGN & MKN ſous les portions de l'autre ligne MN.*

Soient menées sa & sb paralleles à FH & MN, & par le point g deux autres paralleles op & qr, dont la premiere rencontre sF & sH en o & p, & la ſeconde rencontre sM & sN en q & r.

* 23. E. 1°. Le rectangle FGH eſt * au rect. ogp, comme le quarré de Gs au quarré de sg. & le quarré de Gs eſt au quarré de sg comme le rect. MGN au rect. qgr.

* 21. E. Donc le rect. FGH eſt * au rect. ogp, comme MGN à qgr.

Et, par échange, le rect. FGH ſera à MGN, comme ogp à qgr.

* 34. E. 2°. La raiſon du rect. ogp à fgh eſt * compoſée des raiſons de og à fg, & de

gp à *gh*, qui ſont * les mêmes que les raiſons de *sa* à *fa*, & de *as* à *ah*, deſquelles eſt * composée la raiſon du quarré de *sa* au rect. *fah*. * 25. E. * 34. E.

Donc le rect. *ogp* ſera * à *fgh*, comme le quarré de *sa* au rect. *fah*. * 23. E.

On prouvera pareillement, que le rect. *mgn* eſt à *qgr*, comme le rect. *mbn* au quarré de *sb*.

3°. La raiſon du rect. *ogp* à *qgr*, eſt * composée des raiſons de *ogp* à *fgh*, & de *fgh*, ou * *mgn* à *qgr*. * 22. E. * 15. E.

Puis donc que la raiſon de *ogp* à *fgh*, eſt la même, que la raiſon du quarré de *sa* au rect. *fah*, & la raiſon du rect. *mgn* à *qgr* la même que du rect. *mbn* au quarré de *sb*, comme on l'a prouvé, la raiſon du rect. *ogp* à *qgr* ſera composée des raiſons du quarré de *sa* au rect. *fah*, & du rect. *mbn* au quarré de *sb*.

C'eſt pourquoy la raiſon du rect. *FGH* à *MGN*, qui eſt la même que la raiſon de *ogp* à *qgr*, comme on l'a prouvé, ſera composée auſſi des raiſons du quarré de *sa* au rect. *fah*, & du rect. *mbn* au quarré de *sb*.

On prouvera pareillement, que la raiſon du rect. *IKL* à *MKN* eſt composée des raiſons du rect. *mbn* au quar-

ré de bs, & du quarré de sa à un rectangle égal à fah : puisque la parallele que l'on tirera à IL sera toûjours la même ligne sa, & le rectangle sous les portions, de la ligne que l'on tirera du point a, faites par le cercle generateur,
* 15. E. toûjours égal * au rectangle fah.
* 23. E. Donc le rect. FGH sera * à MGN, comme IKL à MKN.

COROLLAIRES.

LX. Fig. 40. 41. La raison du rect. FGH à MGN, qui est composée des raisons du quarré de sa au rect. fah, & du rect. mbn au quarré de sb, sera composée dans l'hyperbole de la raison du quarré de sa au rect. tau, & du rect. tbu au quarré de
* 15. E. sb, puisque le rect. fah est * égal à tau,
LXI. & mbu égal à tbu.

Lorsque MN sera un diametre, & FH l'une de ses ordonnées, il est évident que le rectangle FGH sera un quarré, que ce diametre MN sera la somme des deux côtez de l'autre rectangle MGN dans l'ellipse, & la difference des mêmes côtez dans l'hyperbole.

Lorsque toutes les trois lignes toucheront la Section Conique, les points M, F & I seront les mêmes que N, H & L, & les quatre rectangles seront des quarrez proportionels, dont par consequent les quatre côtez seront aussi proportionels, comme on l'a fait voir à l'art. 34.

Et la premiere ligne *M N* touchant l'hyperbole, plus le point d'attouchement *M* ou *N* sera éloigné des paralleles, *FG* & *IK*; plus la raison des portions *MG* & *MK* & de leurs quarrez *MGN* & *MKN*, & par consequent des rectangles *FGH* & *IKL* approchera de la raison d'égalité. Fig. 41.

De maniere que ces deux rectangles seront égaux, lorsque le point d'attouchement *M* ou *N* sera infiniment éloigné des paralleles, c'est pourquoy

THEOREME.

LXII. Fig. 42.

Les rectangles FGH & IKL sous les portions des paralleles comprises entre l'hyperbole FL, & l'une ou l'autre de ses asymptotes sont égaux.

Soient comme cy-dessus menées les lignes *sa* & *op*, & à la tangente *Eu*, la parallele *Gq*, qui coupe en *q* la verticale *su*.

Le rectangle *FGH* est * à *ogp*, comme le quarré de *Gs* au quarré de *sg*. * 23. E.

Et le quarré de *Gs* est * au quarré de *sg*, comme le quarré de *Gq* au quarré de *gu*. * 23. E.

Donc le rect. *FGH* sera * à *ogp*, * 21. E.

comme le quarré de *Gq* au quarré de *gu*.

Et par échange, le rect. *FGH* sera au quarré de *Gq*, comme le rect. *ogp* au quarré de la tangente *gu*, ou au rect. *fgh*, qui luy est égal. *

* 15. E. Ou le rect. *ogp* est au rect. *fgh*, comme le quarré de *sa* au rect. *fah*, puisque les raisons de *og* à *fg*, & de *gp* à *gh*, qui composent * la raison du rect. *ogp* à *fgh*, sont * les mêmes que celles de *sa* à *fa*, & de *as* à *ah*, qui composent la raison du quarré de *sa* au rectangle *fab*.

* 34. E.

* 25. E.

* 21. E. Donc le rect. *FGH* sera * au quarré de *qG* ou *Eu*, comme le quarré de *sa* au rect. *fah* ou *tau*.

On prouvera pareillement, que le quarré de *sa* sera au rect. *tau*, comme le rect. *IKL* au quarré de *Eu*.

* 21. E. C'est pourquoy le rect. *FGH* sera * au quarré de *Eu*, comme le rect. *IKL* au même quarré de *Eu*.

Ainsi les deux rectangles *FGH* & *IKL* seront égaux. *

* 19. E.

THEOREME.

LXIII. Fig. 43. 44. *Si des points M & N, où une ligne MK rencontre une Section Conique FL, ou tire deux lignes MF & NH, aux points F & H, ou une des deux autres lignes paralleles entr'el-*

les rencontrent cette Section ; le rect. IKL sous les deux portions de l'autre parallele, comprises entre la premiere MK & la Section, sera égal au rect, OKP sous les deux portions comprises entre la même ligne MK & les autres lignes tirées de ses deux extremitez M & N.

Car la raison du rect. *MGN* à *FGH* est composée * des raisons du côté *MG* à *FG*, & de *GN* à *GH*, qui sont les mêmes * que les deux raisons de *MK* à *OK* & de *KN* à *KP*, desquelles est composée la raison du rect. *MKN* à *OKP*. * 34. E. *

C'est pourquoy le rect. *MKN* sera * à *OKP*, comme *MGN* à *FGH*. Or le rect. *MGN* est * à *FGH*, comme *MKN* à *IKL*. Donc le rect. *MKN* sera * à *OKP* comme *MKN* à *IKL*. Ainsi le rect. *OKP* sera * égal à *IKL*. * 23. E. * 61. * 21. E. * 19. E.

COROLLAIRE.

Lorsque le point *N* sera infiniment éloigné de *M*, ce qui arrivera à la parabole, quand *MN* sera un diametre, & à l'hyperbole, quand *MN* sera parallele à l'une ou l'autre des asymptotes ; la ligne *NH* sera parallele à *MN*, par consequent *KP* égale à *GH*, & le rectangle *IKL* toûjours égal à *OKP*. Fig. 45. 46.

Or le rectangle *FGH* est * à *OKP* comme *FG* à *OK*, à cause de l'égalité * de *GH* & de *KP* : & *FG* est * à *OK*, * 36. E. * 9. E. * 25. E.

comme *GM* à *KM*. Donc le rect. *FGH*
* 21. E. sera * à *IKL* ou *OKP* comme *GM* à *KM*. Ce que l'on prouvera positivement dans le Theoreme suivant.

THEOREME.

LXIV. Fig. 47. 48.

Si à la verticale su, passant par le point où la directrice rencontre le generateur d'une parabole ou hyperbole, on mene une parallele MG; ses deux portions GM, KM comprises entre la Section & deux autres paralleles entr'elles qui luy soient appliquées, seront proportionelles aux deux rectangles FGH, IKL soue les portions det mêmes paralleles.

Soient à *FH* menées les paralleles *sa*, & *ogp* coupant *sF* & *sH* en *o* & *p*; & à *mn* les paralleles *qGr* & *xKy* coupant *sM* & *su* en *q* & *r*, & en *x* & *y*.

* 23. E. Le rect. *FGH* est * à *ogp* comme le quarré de *Gs* au quarré de *sg*, & le quarré de *Gs* est au quarré de *sg* comme le rect. *qGr* à *mgu*.

* 21. E. Donc le rect. *FGH* sera * à *ogp* comme *qGr* à *mgu*.

Et, *par echange*, le rect. *FGH* sera à *qGr*, comme *ogp* à *mgu*.

* 15. E. Or le rect. *ogp* est * à *mgu* comme à *fgh*, parce que les deux droites *fh* & *mu* se coupent dans le cercle.

Le rect. *ogp* est à *fgh*, comme le quarré de *sa* au rect. *fah*, ce qui se prouvera comme cy-dessus art. 61.

Et le quarré de *sa* est * au rect. *fab*, * 19. E.
comme au rect. *tau*. * * 15. E.

Donc le rect. *FGH* sera * à *qGr* com- * 21. E.
me le quarré de *sa* au rect. *tau*.

On prouvera pareillement que le quarré de *sa* sera au rect. *tau*, comme le rect. *IKL* à *xKy*.

Donc le rect. *FGH* sera * à *qGr* com- * 21. E.
me *IKL* à *xKy*.

Et, *par échange* le rect. *FGH* sera à *IKL*, comme *qGr* à *xKy*.

Or *qGr* est * à *xKy* comme *qG* à *xK*, * 36. E.
à cause de l'égalité * de *Gr* & *Ky*, & *qG* * 9. E.
est * à *xK* comme *GM* à *Km*. * 25. E.

Donc le rect. *FGH* sera * à *IKL*, * 21. E.
comme *GM* à *KM*.

Fin des Sections du Cone.

AVERTISSEMENT.

LEs Traitez des Sections du Cylindre & du Cone seront divisez par articles marquez par un nombre Romain, dont la citation aura le simple nombre Arabique qui luy répond.

Mais lorsque le nombre Arabique sera suivi de la lettre *E*, la citation sera celle de l'une des propositions précedentes des Elemens.

PRIVILEGE DU ROY.

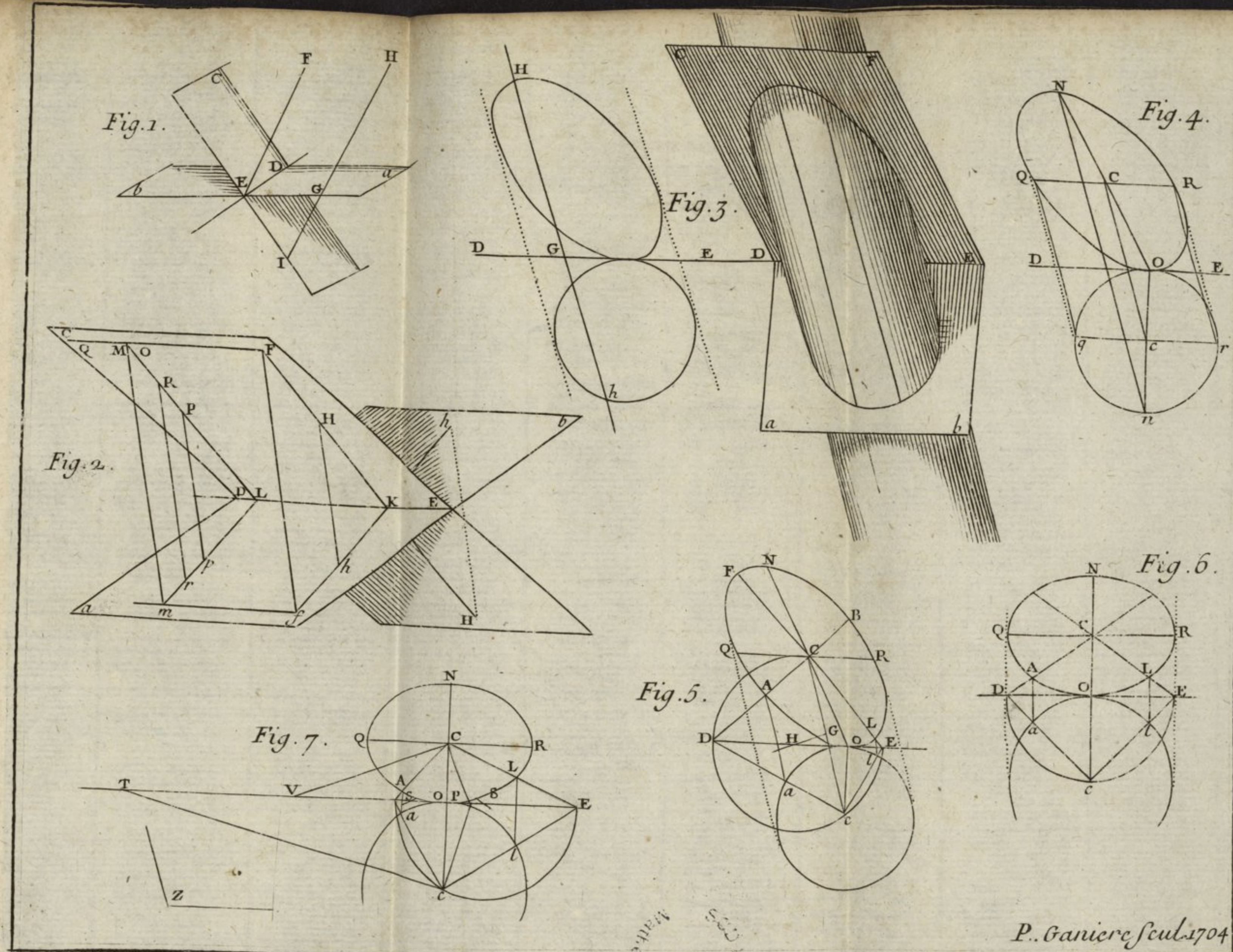
LOUIS par la Grace de Dieu, Roy de France & de Navarre : A nos Amez & Feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maistres des Requestes ordinaires de nostre Hostel, grand Conseil, Prevost de Paris, Baillifs, Sénechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra : Salut. BARTHELEMY GIRIN Libraire à Paris, nous ayant fait supplier de luy accorder nos Lettres de permission pour l'Impression d'un Livre intitulé, *Elemens de Geometrie démontrez sans le secours des proportions, accompagnez d'un Traité des Sections du Cylindre & du Cone, & d'une nouvelle Gnomonique*. Nous luy avons permis & permettons par ces Presentes, de faire imprimer ledit Livre en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon luy semblera, & de le vendre & faire vendre par tout nostre Royaume pendant le temps de quatre années consecutives, à compter du jour de la datte desdites Presentes ; à la charge qu'elles seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de la datte d'icelles ; que l'Impression dudit Livre sera faite dans nostre Royaume, & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformement aux Reglemens de la Librairie. Et qu'avant que de l'exposer en vente, il en sera mis deux Exemplaires dans nostre Bibliotheque publique, un dans celle de nostre Château du Louvre, & un dans celle de nostre tres-cher & feal Chevalier Chancelier de France, le Sieur Phelypeaux Comte de Pontchartrain, Commandeur de nos Ordres, à peine de nullité des Presentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir l'Exposant ou ceux qui auront droit de luy pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre foy soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier nostre Huissier ou Sergent, de faire pour l'execution d'icelles, tous actes requis & necessaires sans autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande, & lettres à ce contraires. Car tel est nostre plaisir. DONNE' à Versailles le treiziéme jour de Janvier l'an de grace mil sept cens quatre. Et de nostre Regne le soixante-uniéme. Par le Roy en son Conseil.

LE COMTE.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, no. XCIV. page 117. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du Conseil du 13. Aoust 1703. A Paris ce 23. Janvier 1704.

Signé, P. EMERY, *Syndic.*

Pl. 1



Pl. II

Fig. 8.

Fig. 9.

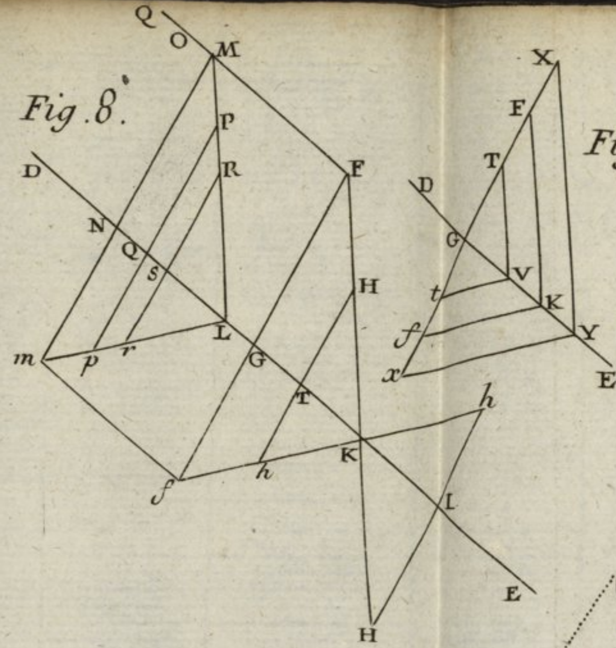


Fig. 11.

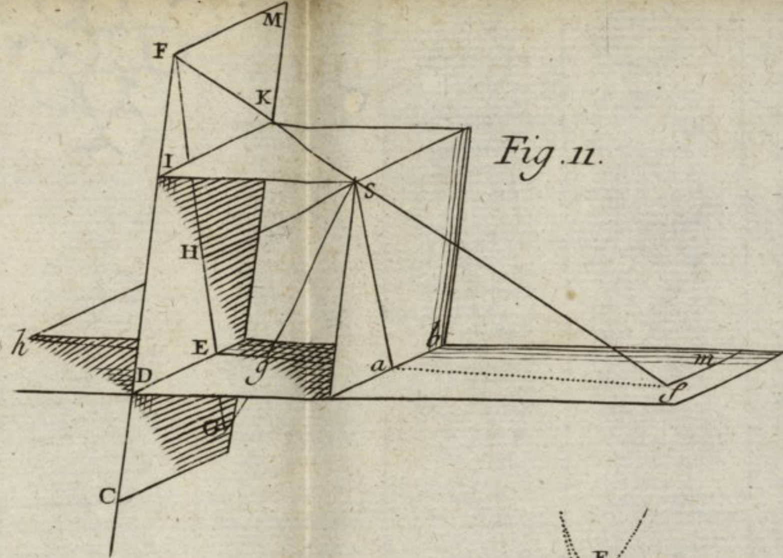


Fig. 12.

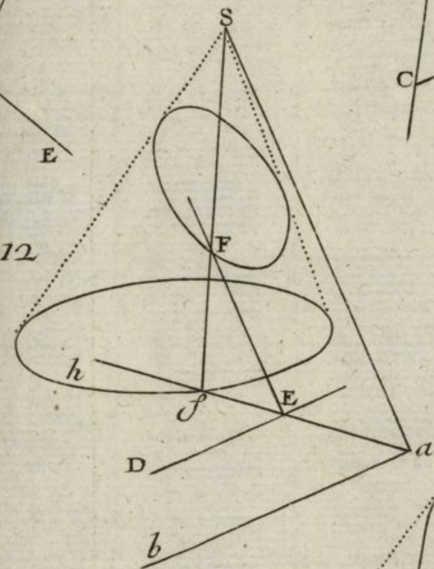


Fig. 10.

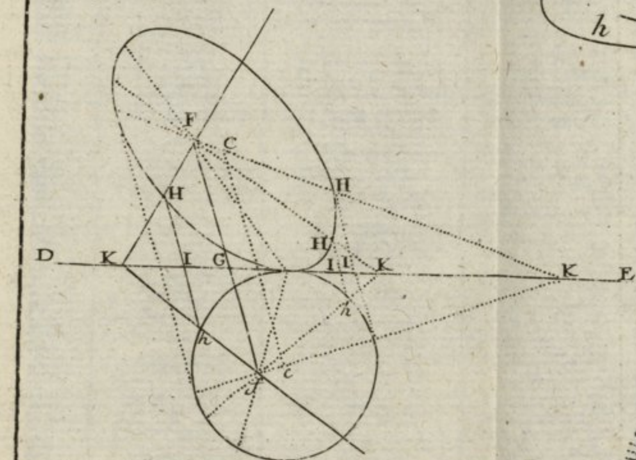


Fig. 13.

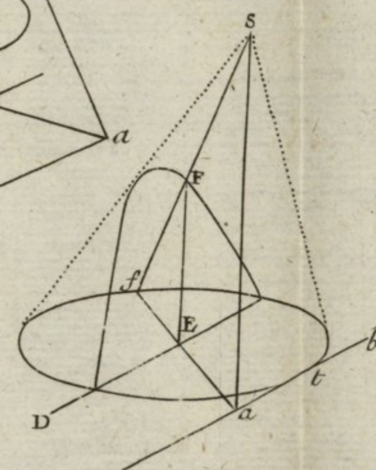
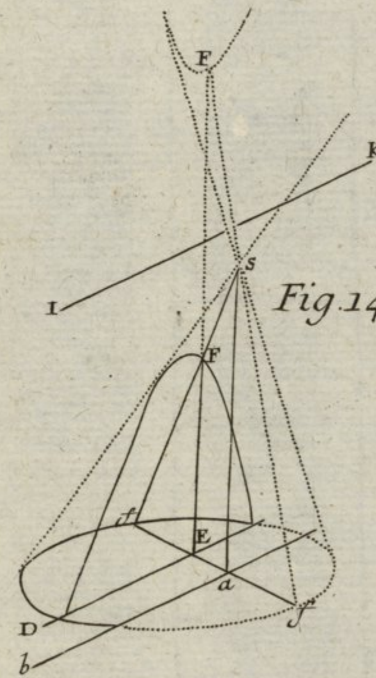
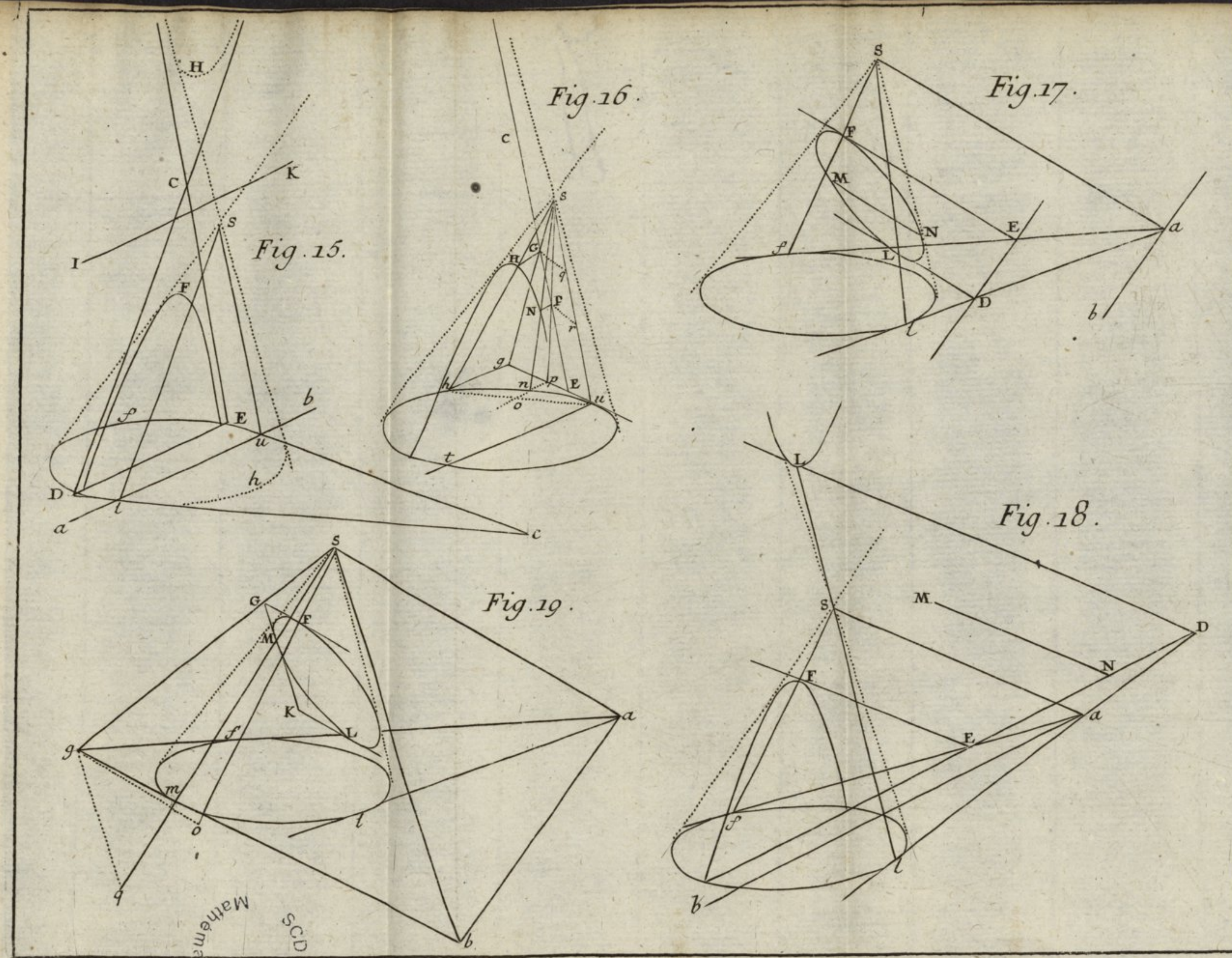


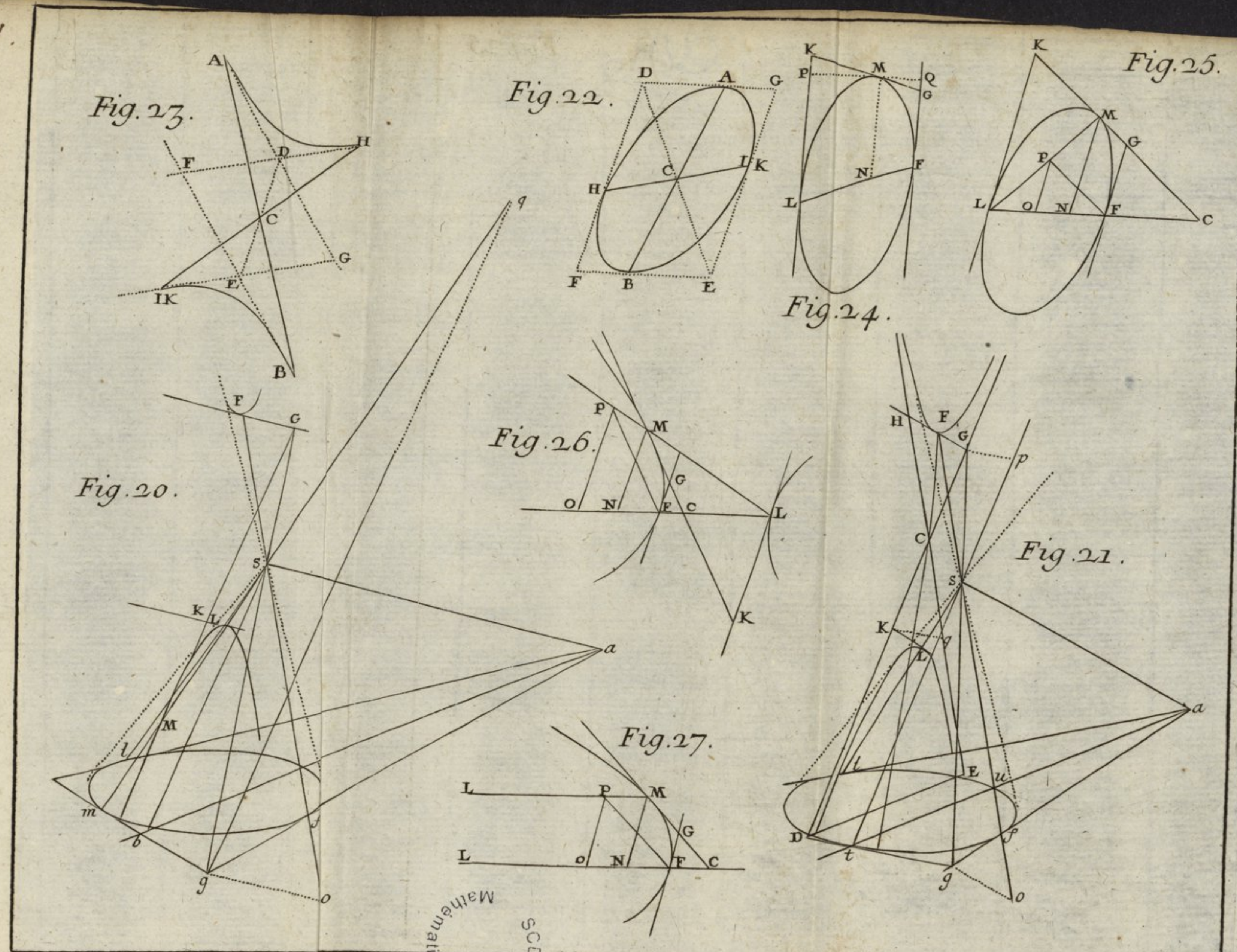
Fig. 14.



Pl. III.



Pl. IV.



Pl. V.

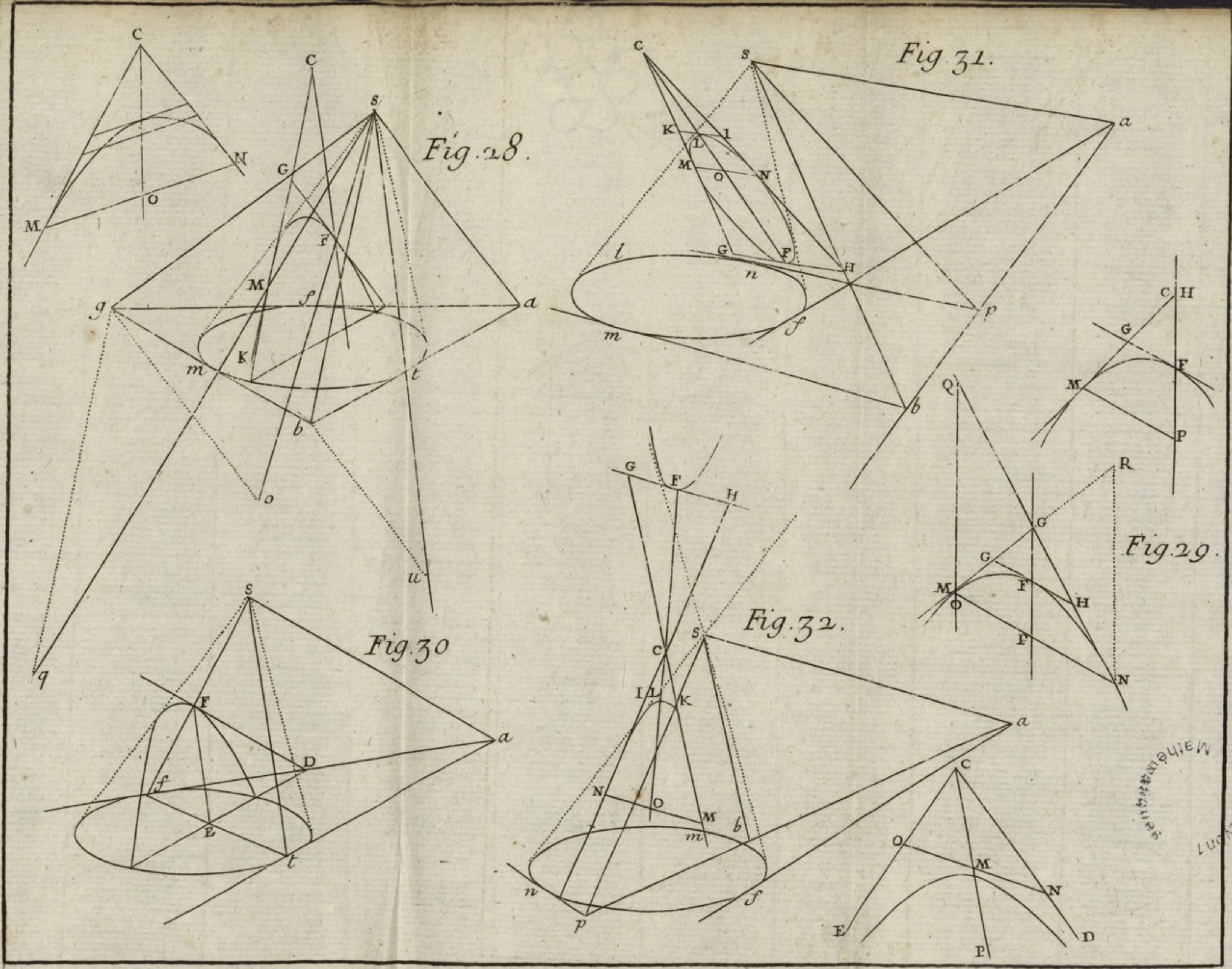


Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30

Fig. 31.

Fig. 32.

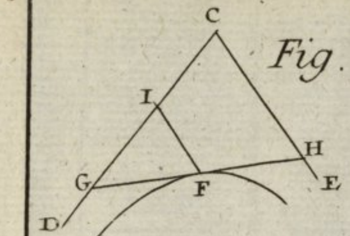


Fig. 33.

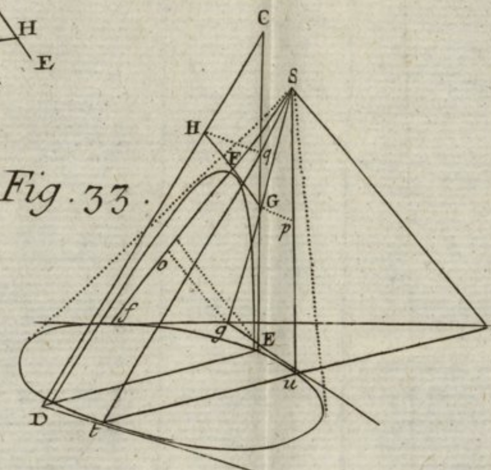


Fig. 33.

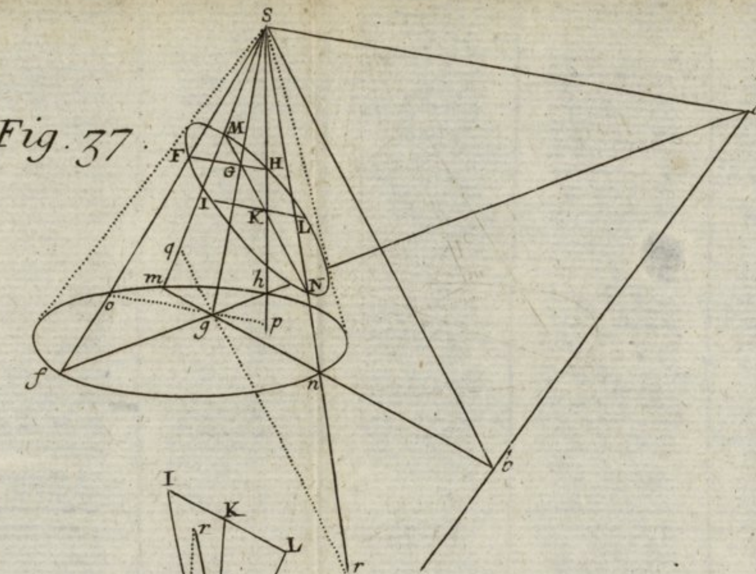


Fig. 37.

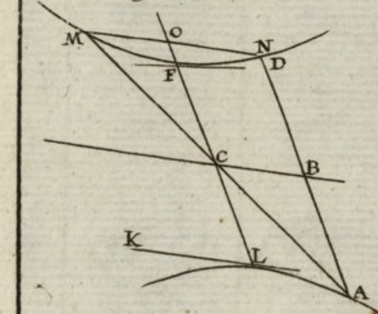
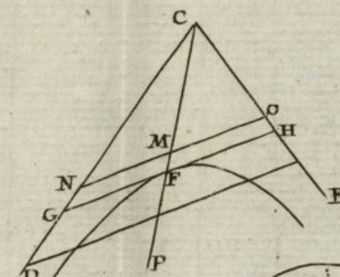


Fig. 35.



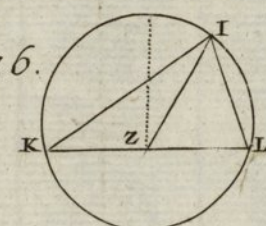


Fig. 36.

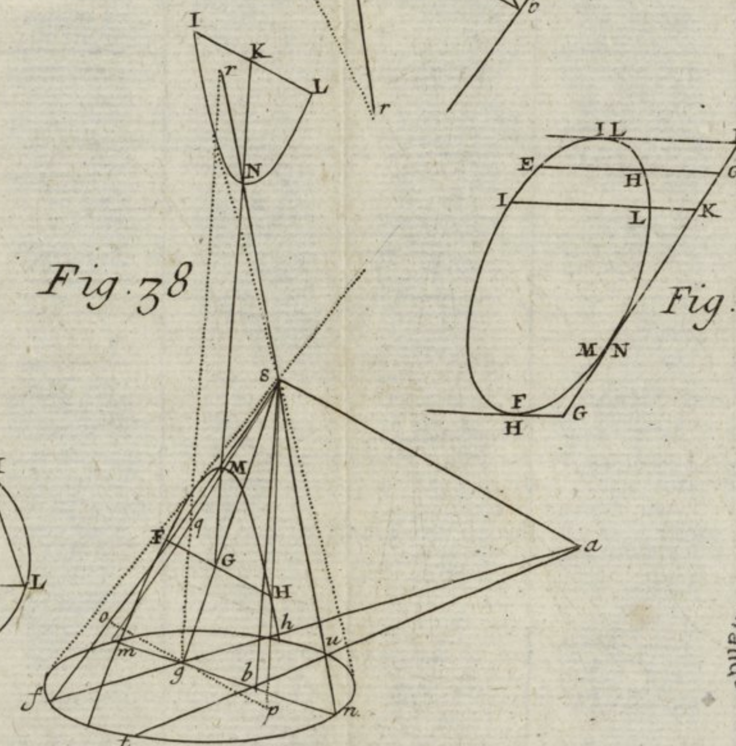
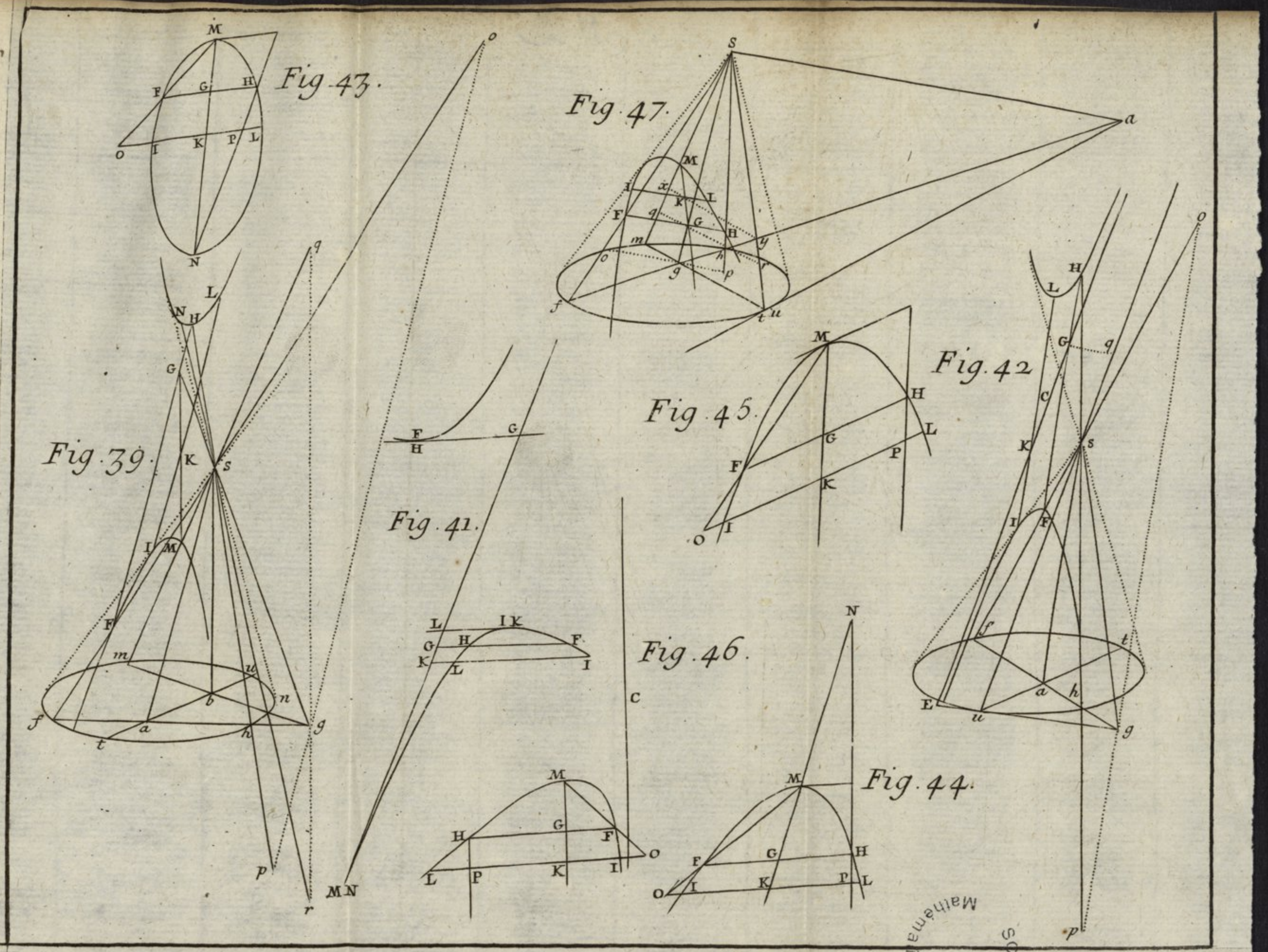


Fig. 38.

Fig. 40.

P. VII.



pl. VIII

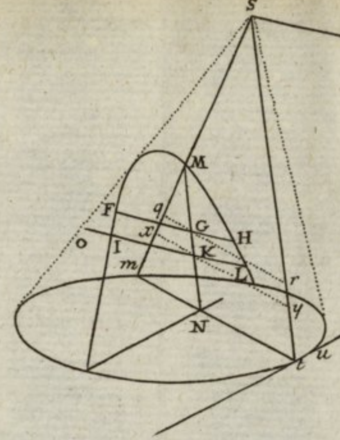


Fig. 49.

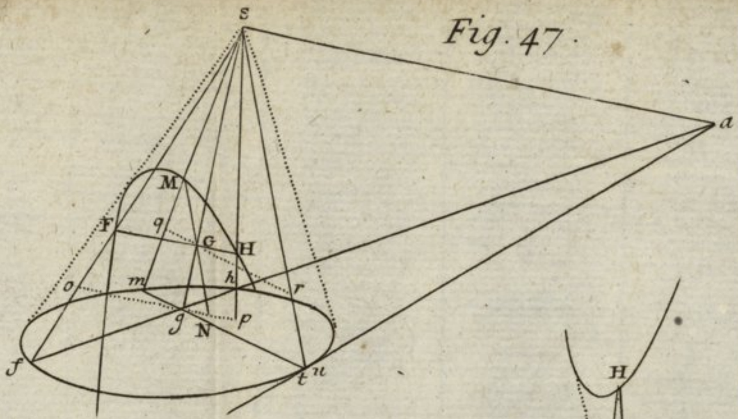


Fig. 47.

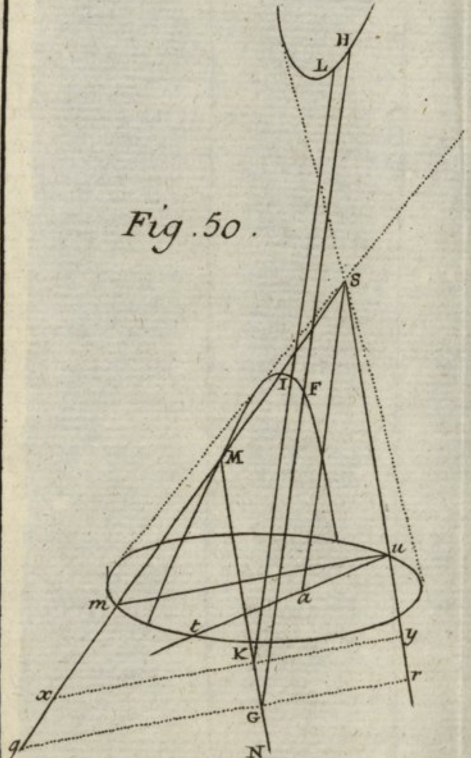


Fig. 50.

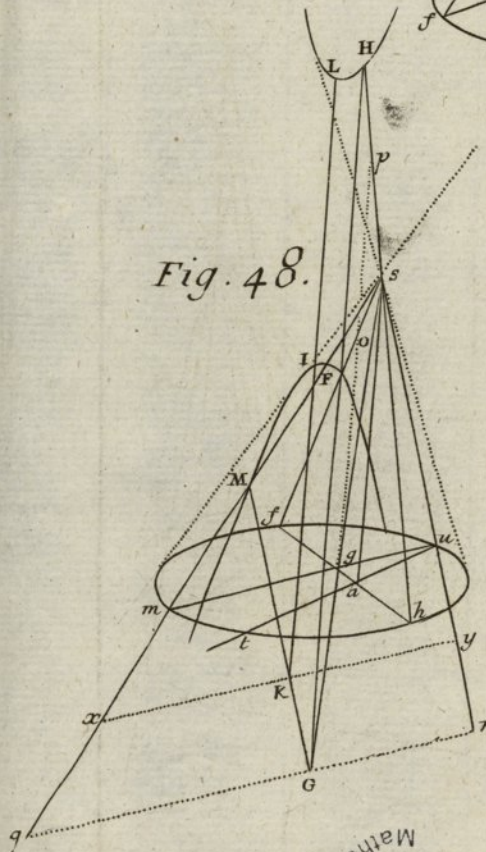


Fig. 48.

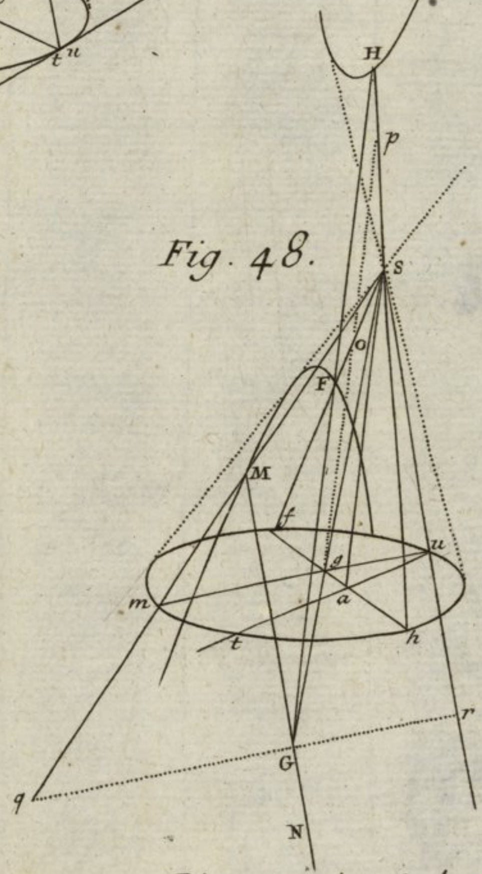


Fig. 48.

Pierre Ganiere Sculp.