3tt — f.re Fouquet —

LA SCIENCE
DU CALCUL
DES GRANDEURS EN GENERAL,
OU
LES ELEMENS
DE MATHEMATIQUE.

Par le R. P. REYNEAU, *Prêtre de l'Oratoire.*

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez [illegible], Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université,
[illegible], près la Place Maubert,
[illegible]

M. DCC. [illegible]

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

LA SCIENCE
DU CALCUL
DES GRANDEURS EN GENERAL,
OU
LES ÉLÉMENS
DES MATHÉMATIQUES.

Par le R. P. REYNEAU, *Prêtre de l'Oratoire.*

TOME SECOND.

A PARIS,
Chez QUILLAU, Imprimeur - Juré - Libraire de l'Université,
rue Galande, près la Place Maubert,
à l'Annonciation.

M. DCC. XXXVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

ÉLOGE
DU PERE REYNEAU.

DEPUIS que la Congrégation de l'Oratoire est établie en France, on en a vû sortir un grand nombre de Sujets d'un mérite distingué, qui ont mérité les suffrages du Public éclairé, & dont les travaux ne cesseront de mériter les éloges de la Postérité. On y a vû des Orateurs du premier ordre, des Poëtes délicats, d'habiles Critiques, de subtils Métaphysiciens, des hommes versés dans toute sorte de Littérature, des Historiens exacts & judicieux, de profonds Mathématiciens. Charles-René REYNEAU, l'un des plus célébres entre ces derniers, nâquit à Brissac, Ville & Duché en Anjou, & au Diocèse même d'Angers, l'an *1656*. Il étoit fils de Charles REYNEAU, Chirurgien habile dans sa profession, & d'Anne Chauveau. Les premieres années de sa vie nous sont inconnues. On sçait seulement qu'appliqué à l'Etude, il y réussit, & qu'il fit de grands progrès dans les Humanités. La piété l'avoit prévenu dès son enfance ; & conduit par sa lumiere, on sçait de lui-même qu'il évita les piéges dangereux que le monde & les passions tendent presque toujours à la jeunesse naturellement imprudente. Pour s'y affermir davantage, il chercha la solitude, & la trouva dans la Congrégation de l'Oratoire, où il entra à Paris à l'âge de vingt ans. Il ne s'y retira pas cependant avec le dessein de s'y fixer. C'étoit proprement une épreuve qu'il vouloit faire de sa vocation. Il a souvent dit à ses amis qu'il n'avoit été attiré que par la piété qu'il voyoit régner dans cette Congrégation, & par le goût de la bonne Littérature qui commençoit à y dominer, & que tout son but étoit de se former pendant quelques années dans une telle école. La paix qu'il y goûta, & que l'on trouve rarement au milieu du monde, les liaisons qu'il y forma, son amour pour l'étude qui y prit de nouveaux accroissemens, ne tarderent pas à l'y attacher, & il résolut de ne plus penser à un autre état. Il y prit les Ordres sacrés par obéissance à ses Supérieurs, & se livra par inclination & par goût à l'étude de la Philosophie nouvelle, c'est-à-dire, à celle de Descartes qu'il trouva infiniment plus raisonnable que l'ancienne, qui avoit encore plus d'un partisan dans sa Congrégation.

Ses Supérieurs se hâtans de faire valoir ses talens, l'envoyerent professer la Philosophie à Toulon d'abord, & ensuite à Pezenas; & dans ces deux Villes le Pere REYNEAU se fit autant estimer par le succès qui accompagna l'exercice de l'emploi qui lui étoit confié, qu'il se fit aimer par la douceur de ses mœurs, & respecter par sa piété. Il joignit à l'étude de la Philosophie moderne, celle de la Géométrie que l'on ne peut en séparer, si l'on veut réussir dans la premiere. Les élémens ne lui coûterent presque aucun travail : son génie vif & pénétrant en eut bientôt dissipé toutes les difficultés, & peu après il pénétra dans ce que cette science semble avoir de plus difficile. Les Officiers municipaux d'Angers, ayant fondé dans cette Ville une Chaire de Mathématiques, la firent remplir par le P. Prestet, confrere du P. REYNEAU, & qui a tant fait d'honneur au P. Malbranche dont il avoit été disciple : ils la conférent ensuite en 1683 au P. REYNEAU, qui l'a occupé avec tout l'éclat possible pendant environ vingt-deux ans. Tout l'engageoit à remplir l'attente de ceux qui l'avoient chargé de cette fonction; son goût pour ces sciences, sa propre réputation, le plaisir naturel à tout homme de communiquer & de répandre ce qu'il sçait, le desir de servir sa Patrie selon les talens qu'il avoit reçus de la Providence, l'amour de son devoir. Il fut si goûté, il s'acquit une telle estime, que l'Académie d'Angers, qui étoit alors récente, se fit honneur de le recevoir au nombre de ses Membres : Distinction singuliere que son mérite seul lui avoit attirée ; car tout occupé de l'étude & du desir d'être utile aux autres, jamais on ne l'a vû demander, ni desirer même aucune place, aucune prérogative : Distinction d'autant plus remarquable, que l'Académie qui vouloit l'avoir dans son sein, n'avoit jamais accordé cette marque de préférence à aucune personne de Congrégation, & qu'elle ne l'a donné depuis à aucune.

Ce fut le quatorziéme de Mai 1694, que cette Société littéraire en fit l'acquisition, & elle s'est toujours applaudie de son choix. Ce fut un nouvel aiguillon pour le P. REYNEAU : il croyoit que chaque marque nouvelle de considération que l'on avoit pour lui, étoit comme un nouvel engagement qui l'obligeoit à une étude plus profonde, & à un travail plus assidu. Il se rendit familier tout ce que la Géométrie moderne, si féconde & déja si immense, a produit de découvertes ingénieuses, & de hautes spéculations. Il lut, il médita avec soin les écrits des plus célébres Mathématiciens modernes; il dévoila leurs systêmes, il réfléchit sur leurs principes, il dévéloppa leurs idées. Tout ce qu'il trouva de mieux pensé, de plus suivi, de plus digne d'attention dans les Ouvrages du grand Descartes, du célébre Newton, de M. de Leibnitz, des sçavans Bernouilli, dans les actes de Leipsic, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, dans un grand nombre d'autres écrits, il l'adopta, il l'éclaircit même, & ayant en vûe l'utilité de ses disciples, & de tous ceux qui voudroient dans la suite être initiés aux Mathématiques, il entreprit de réunir en un corps, les principales théories répandues dans ces differens Ouvrages. Ce travail, digne de ses soins, mais qui ne pouvoit se trouver que dans un homme aussi laborieux, a produit le Livre de *l'Analyse démontrée, ou la Méthode de résoudre les Problêmes des Mathématiques*, qui parut en 1708 à Paris, en deux vol. *in*-4°. Cet Ouvrage fit beaucoup d'honneur à son Auteur; mais le P. REYNEAU qui n'avoit eu en vûe que le bien d'un certain Public destiné à profiter de ces ſortes de Livres, ne s'applaudit point des louanges qu'il s'attiroit de toute part. Il convenoit avec ſimplicité de ce qu'il y trouvoit de bon; & ne connoiſſoit point ces rafinemens de l'amour propre qui ne ſemble s'abbaiſſer qu'afin d'être élevé plus haut : mais il parloit rarement de ſon ouvrage, & ſeulement quand la néceſſité ou l'utilité le demandoit. Son Analyſe, dit M. de Fontenelles dans ſon Eloge, porte le titre de *Démontrée*, parce qu'il y démontre en effet pluſieurs Méthodes qui ne l'avoient pas été par leurs Auteurs, ou du moins qui ne l'avoient pas été aſſez clairement, ou aſſez exactement : car il arrive quelquefois en ces matieres, ajoute ce judicieux Académicien, qu'on eſt bien ſûr de ce qu'on ne pourroit pourtant pas démontrer à la rigueur, & plus ſouvent qu'on ſe réſerve des ſecrets, & qu'on ſe fait une gloire d'embarraſſer ceux qu'il ne faudroit qu'inſtruire.

Quoiqu'il y eût déja un grand nombre d'Ouvrages eſtimés ſur les Mathématiques, lorſque celui du P. REYNEAU parut, quoique le nombre de ceux qui s'appliquent à ces ſciences, ne fût peut-être pas alors auſſi grand qu'il l'a été depuis, & qu'on le voit aujourd'hui, cependant ſon Livre fut reçu avec beaucoup d'avidité, & on le regarda preſque comme un Livre qui avoit manqué juſques-là. Cette eſtime n'a fait que croître avec le temps. L'Analyſe démontrée eſt devenue le guide de ceux qui veulent commencer l'étude des Mathématiques, ou du moins de la Géométrie moderne. C'eſt le premier Ouvrage que l'on conſeille en France, & ſouvent même ailleurs, à ceux qui veulent marcher ſûrement dans ces routes, & le P. REYNEAU, dit M. de Fontenelles, eſt regardé comme le premier Maître, comme l'Euclide de la haute Géométrie. Il faut cependant avoir déja quelque teinture de cette ſcience, pour bien profiter de cet Ouvrage : ce ſont, ſi l'on veut, des élémens, mais trop forts pour ceux qui ne ſeroient encore aucunement Géométres. Mais pour peu que l'on ait fait déja quelques pas heureux dans cette voie, & que l'on veuille avoir d'application, cet ouvrage n'a plus que de légéres difficultés, qu'avec un peu de patience on a bientôt applanies ; & les grands avantages que l'on retire de cette lecture, dédommagent amplement du peu de peine que l'on peut avoir eu en la faiſant.

Le P. REYNEAU qui ſe ſouvenoit toujours qu'il avoit été diſciple avant que d'être maître, qui n'avoit point oublié combien l'étude des Mathématiques lui avoit d'abord coûté de peine & d'application, qui étoit convaincu par ſa propre expérience combien il eſt utile aux commençans de trouver des routes déja toutes frayées, dans leſquelles ils puiſſent marcher avec facilité, entreprit de travailler pour eux, & il y réuſſit. Il fit dans cette vûe *la Science du Calcul des Grandeurs en général*, *ou les Elémens des Mathématiques*, Ouvrage qui parut en 1714 à Paris, en un ſeul volume *in*-4°. C'eſt véritablement l'Ouvrage d'un Maître habile qui connoît toutes les difficultés de la ſcience ſur laquelle il écrit, qui en a pénétré toutes les profondeurs, mais qui ſçait ſe rabbaiſſer juſqu'à la portée de ceux qui n'en ont encore aucune idée, & qui n'apportent à cette étude qu'une heureuſe diſpoſition de l'eſprit, &

& un grand desir de réussir. Le sçavoir & la modestie du P. REYNEAU s'accordoient pour le rendre propre à ce travail. Ceux qui croyent pouvoir briller dans des Ouvrages plus profonds, croiroient souvent se rabbaisser en n'écrivant que des Elémens; ils veulent toujours paroître des génies supérieurs, & ils ne font point attention, que pour faire des Méthodes utiles, des Elémens dignes d'être conseillés, il faut être soi-même un génie élevé, & souvent profond, ou au moins qu'il faut en sçavoir beaucoup plus que ce que ces Méthodes & ces Elémens contiennent. Mais un Auteur qui n'est flatté de cette qualité, qu'autant qu'il peut s'en servir pour être utile aux autres, ne considére que le bien public, & sans examiner s'il augmentera sa propre réputation, il n'est attentif qu'à envisager ce qui pourra le rendre plus utile au prochain. Ce fut-là l'unique motif qui engagea le P. REYNEAU à donner sa Science du Calcul qui n'a pas été reçue avec moins d'applaudissement que son Analyse démontrée. C'est proprement une introduction à ce dernier Ouvrage, mais une introduction nécessaire pour l'entendre facilement. Le P. REYNEAU, sollicité par plusieurs personnes, voulut y ajouter un 4^e Livre sur l'usage de la Science du Calcul. Il y auroit montré en abregé l'Art d'employer le Calcul à résoudre les Problêmes des Mathématiques, & à y faire des découvertes. On y auroit vû qu'après s'être rendu familier le Calcul des Grandeurs en général, on a la clef qui ouvre l'entrée à toutes les découvertes des Mathématiques, & avec ce secours on auroit aussi pénétré dans l'invention même des Mathématiques.

Ce nouveau projet étoit digne de l'Auteur : il étoit capable de le bien remplir : tant de preuves réitérées de sa grande habileté dans ces Sciences, répondoient par avance de la bonté d'un tel Ouvrage. Il le commença ; mais il en est demeuré à une légére ébauche, trop imparfaite pour que l'on ait pû en faire le moindre usage.

Lorsque par le Réglement de 1716, l'Académie des Sciences de Paris eut de nouveaux Membres sous le titre d'Associés libres, le P. REYNEAU fut aussi-tôt de ce nombre. On se fit honneur de le recevoir dans cet illustre Corps, & sa modestie faisoit qu'il s'étonnoit que l'on eût seulement pensé à lui. Il y avoit déja du tems qu'il vivoit à Paris dans la Maison de sa Congrégation, rue S. Honoré : la Priere & l'étude y partageoient son tems : il y observoit une retraite rigoureuse, & s'y occupoit beaucoup des années éternelles qui ont fait toute sa vie l'objet de sa méditation : cependant dès qu'il eut été reçu à l'Académie, il se fit un devoir & un plaisir de se rendre assidu à ses Assemblées. Il y prêtoit, à tout ce qui s'y disoit, une oreille attentive, & cette contention devoit lui coûter d'autant plus, que depuis quelque tems il lui étoit survenu une assez grande difficulté d'entendre. Mais c'est aussi ce qui manifestoit davantage son goût & son ardeur pour toutes les Sciences qui sont l'objet de cette Académie. On voyoit que tout l'y intéressoit ; que tout ce qui servoit au progrès des Arts & des Sciences, le touchoit sensiblement, qu'il y concouroit autant qu'il étoit en lui. Aussi aimoit-il beaucoup les jeunes gens en qui il appercevoit beaucoup de goût & d'inclination pour l'étude, & il avoit soin de favoriser ces heureux penchans selon son pouvoir. Quand on étoit de ce caractere, on étoit toujours bien venu à l'interroger, à lui demander des avis, à chercher à profiter de ses lumieres. Mais il falloit être de ce caractere pour jouir de sa conversation; car il ne recevoit guères de visites, que de ceux avec qui il ne perdoit pas son tems, parce qu'ils avoient besoin de lui. Dans sa Maison même il avoit peu de commerce; il estimoit tous ses confreres, il les voyoit autant que la charité ou la nécessité le demandoit; mais il étoit fort avare de son tems, & il n'y avoit guères que le P. Mallebranche avec qui il eût une liaison suivie. Il étoit fort attaché à cet illustre Philosophe, & il en adoptoit presque tous les principes. Au-dehors il ne voyoit presque que M. d'Aguesseau, Chancelier de France, en qui il trouvoit un goût universel, & cette pénétration d'esprit propre à toutes les Sciences, que peu de personnes ont dans un degré si éminent. Du reste, le P. REYNEAU se tenoit fort à l'écart de toute affaire, & encore plus de toute intrigue. Il comptoit pour beaucoup cet avantage si peu recherché, parce qu'il est peu connu, de n'être de rien. Jamais personne n'a plus craint que lui d'incommoder les autres, & prêt de mourir, il refusoit les soins d'un petit domestique qu'il auroit peut-être gêné. Quelques années avant sa mort, il sentit qu'il étoit nécessaire d'être moins assidu au travail: les forces de son corps ne répondoient plus à son ardeur pour l'étude; la Priere en profita davantage; il lui donnoit tout le tems qu'il pouvoit ôter à ses autres occupations. On peut dire même que sa Priere étoit continuelle, puisqu'il ne faisoit rien que pour Dieu & dans l'ordre de ses devoirs. Enfin, après s'être toujours affoibli pendant quelque tems, il mourut le 24e de Février 1728. M. de Fontenelles a composé son Eloge, qui fut lû dans une Assemblée publique de l'Académie des Sciences, & qui a été imprimé ensuite. On en trouve aussi un article dans le Supplément au Dictionnaire de Moreri, imprimé à la fin de 1735, dans lequel on lit quelques circonstances qui ne se trouvent point dans l'Eloge donné par M. de Fontenelles.

AVERTISSEMENT.

Le troisiéme Livre de la Science du Calcul que nous donnons au Public, est la fin de l'Ouvrage que le Pere Reyneau avoit entrepris sur cette matiere. Le dessein de ce fameux Mathématicien avoit été d'y ajouter un quatriéme Livre en faveur des Commençans : mais ses incommodités l'ont empêché d'exécuter son projet, & nous ne nous sommes pas mis en peine de le faire remplir par une autre main : d'autant plus que M. Guinée a renfermé dans son application de l'Algébre à la Géométrie, ce qui peut manquer à l'Ouvrage du Pere Reyneau.

LA SCIENCE

LA SCIENCE DU CALCUL DES GRANDEURS EN GÉNÉRAL.

LIVRE III.

Où l'on explique les progressions arithmétiques & géométriques, & leur union pour le calcul des puissances par les exposans; les suites ordonnées qui comprennent toutes les puissances parfaites & imparfaites d'une suite infinie de grandeurs, & les nombres figurés; l'invention des logarithmes, leur usage pour faciliter les calculs, & les manieres aisées d'en construire les tables à tel nombre de rangs de chiffres qu'on voudra.

SECTION I.

Où l'on explique les progressions arithmétiques & géométriques.

Les progressions arithmétiques.

DÉFINITION I.

483. ON a déja dit * que quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d* faisoient une proportion arithmétique lorsque l'excès de la seconde *b* sur la premiere *a* étoit égal à l'excès de la quatriéme *d* sur la troisiéme *c*; ou, ce qui est la même chose, quand la différence de la seconde *b* & de la premiere *a* est égale à la différence de la quatriéme *d* & de la troisiéme *c*. Il n'importe pas que ce soit la premiere *a* qui * 44.

ſoit plus grande ou plus petite que la ſeconde b, pourvû que la troiſiéme c ſoit auſſi plus grande ou moindre que la quatriéme d, & que la différence de a & de b ſoit égale à la différence de c & de d. Par exemple 5, 3, 9, 7 eſt une proportion arithmétique. De même 3, 5, 7, 9 eſt une proportion arithmétique.

Avertissement.

On marquera ici la proportion arithmétique par deux points l'un ſur l'autre entre les deux rapports arithmétiques égaux, pour la diſtinguer de la proportion géométrique.

Corollaire.

484. D'où l'on voit que $a \,.\, a+d : b \,.\, b+d$ peut repréſenter en général toutes les proportions arithmétiques, où les antécédens a & b ſont moindres que leurs conſéquens $a+d$, $b+d$, & où d repréſente la différence qui eſt la même dans les deux rapports arithmétiques égaux. De même $a \,.\, a-d : b \,.\, b-d$ repréſente en général toutes les proportions arithmétiques dans leſquelles les antécédens a & b ſurpaſſent leurs conſéquens $a-d$, $b-d$, de la différence égale d, quelle que puiſſe être cette différence. Chacune même de ces proportions arithmétiques peut repréſenter toutes les autres, en la prenant d'abord en allant de gauche à droite pour les unes, & enſuite de droite à gauche pour les autres.

La premiere proportion arithmétique $a \,.\, a+d : b \,.\, b+d$ peut même repréſenter ſeule toute proportion arithmétique, en ſuppoſant que a & b repréſentent telles grandeurs qu'on voudra poſitives ou négatives, entieres ou rompues, ou même que l'une ou l'autre repréſente zéro; & en ſuppoſant que d repréſente auſſi telle grandeur qu'on voudra, & que le ſigne $+$ qui précéde la différence d, repréſente le ſigne $-$, quand d eſt négative.

Définition II.

485. Une proportion arithmétique dont le ſecond terme ſert de conſéquent au premier terme, & d'antécédent au troiſiéme, s'appelle *continue*; & quand elle s'étend à plus de trois termes, on la nomme une *progreſſion arithmétique*, ainſi $3 \,.\, 5 : 5 \,.\, 7$ eſt une proportion arithmétique continue. $\div$ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . &c. & $\div$ 13 . 11 . 9 . 7 . 5 . 3 . 1, ſont des

progressions arithmétiques. De même $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d$, &c. $\div a . a - d . a - 2d . a - 3d$, &c. représentent toutes les progressions arithmétiques; la premiere, celles qui vont en augmentant; la seconde, celles qui vont en diminuant, & même les deux n'en font qu'une générale, $\div$ &c. $a - 5d . a - 4d . a - 3d . a - 2d . a - d . a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d$, &c. dans laquelle le terme a est entre les termes qui vont vers la droite en augmentant à l'infini, & entre les termes qui vont vers la gauche en diminuant à l'infini; la différence d qui regne dans la progression marque telle grandeur qu'on voudra.

COROLLAIRE.

486. SI l'on suppose dans la progression arithmétique générale, $a = 0$ & $d = 1$, on aura la progression arithmétique des nombres naturels, ou de tous les nombres entiers pris de suite, $\div$ &c. $- 6 . - 5 . - 4 . - 3 . - 2 . - 1 . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .$ &c. zéro est entre les nombres entiers positifs qui vont de suite à droite, & entre les nombres entiers négatifs qui vont vers la gauche.

Si l'on suppose dans la progression arithmétique générale $a = 0$ & d égale à telle grandeur qu'on voudra; ou bien si supposant que a est une grandeur quelconque, on suppose en même temps que d est une aliquote de a; il est évident que dans l'une & l'autre de ces suppositions, zéro sera toujours un terme de la progression arithmétique, situé entre les termes positifs & entre les termes négatifs. Car dans la seconde supposition, si, par exemple, $+ d = + \frac{1}{3} a$, il est clair que le terme $a - 3d$, ou $a - \frac{3}{3} a$ sera égal à zéro; & si $+ d = - \frac{1}{3} a$, le terme $a + 3d$ deviendra égal à $a - \frac{3}{3} a = 0$.

Corollaires de la premiere & seconde définition.

I.

487. EN toute proportion arithmétique la somme des deux extrêmes est égale à la somme des deux moyens.

Démonstration. On peut représenter toute proportion arithmétique par * $a . a + d : b . b + d$. Or la somme des extrêmes *484. est $a + b + d$, & la somme des moyens est aussi $a + b + d$. S'il y avoit $- d$ dans l'une de ces sommes, il y auroit aussi

$-d$ dans l'autre. Donc la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

COROLLAIRE II.

488. DANS une proportion arithmétique continue $\div a . a + d . a + 2d$, la somme des extrêmes qui est $2a + 2d$ est égale au double du moyen, le double du moyen étant aussi $2a + 2d$.

D'où l'on voit que la somme $2a + 2d$ du premier & du troisiéme terme d'une proportion arithmétique continue $\div a, a + d . a + 2d$, étant divisée par 2; le quotient $\frac{2a + 2d}{2} = a + d$, est le moyen arithmétique entre a & $a + 2d$.

COROLLAIRE III. PROBLÊME I.

489. *TROIS termes d'une proportion arithmétique étant donnés* a, b, c, *trouver la quatriéme, qu'on nommera* x.

Opération. Si le quatriéme terme x qu'on cherche est l'un des extrêmes, & que la proportion arithmétique soit $a . b : c . x$, il faut prendre la somme des deux moyens qui est $b + c$, & en retrancher l'extrême donné a, & le reste $b + c - a$ sera le quatriéme terme x que l'on cherchoit.

Si le quatriéme terme x qu'on cherche est l'un des moyens, & que la proportion arithmétique soit $a . b : x . c$; il faut prendre la somme des extrêmes qui est $a + c$, & en retrancher le moyen donné b, & le reste $a + c - b$ sera le quatriéme terme x que l'on cherchoit.

* 487. *Démonstration.* Puisque $a . b : c . x$, l'on aura * $a + x = b + c$; & en retranchant de chacune de ces grandeurs égales la même grandeur a, on aura $x = b + c - a$. On peut aisément appliquer la démonstration au second cas.

COROLLAIRE IV. PROBLÊME II.

490. LORSQUE zéro est l'un des termes de la proportion arithmétique dont deux autres termes sont donnés, & que la proportion arithmétique est $0 . a : b . x$, il faut simplement ajoûter les deux termes donnés, & leur somme $a + b$ fera le qua-
* 487. triéme terme x que l'on cherche. Car * $a + b = 0 + x$, c'est-à-dire $a + b = x$. Si la proportion arithmétique est $a . b : x . 0$, il faut retrancher le second terme b du premier a, & la différence $a - b$ sera le quatriéme terme x que l'on

cherche. Car * $a + 0 = b + x$; & en retranchant b de chacune de ces sommes égales, on aura $a - b = x$. * 487.

COROLLAIRE V. PROBLEME III.

491. *Les deux premiers termes* a, b *d'une proportion arithmétique continue étant donnés, laquelle est* $\div$ a . b . x, *trouver le troisiéme* x.

Opération. Il faut ôter le premier terme a du double du moyen $2b$, & le reste $2b - a$ sera le troisiéme terme x que l'on cherche. Car * $a + x = 2b$; & en retranchant a de chacune de ces grandeurs égales, on aura $2b - a = x$. * 488.

Quand zéro est le premier terme, & que la proportion arithmétique continue est $\div 0 . a . x$, le troisiéme terme x est égal au double du moyen $2a$. Car * $0 + x = 2a$, c'est-à-dire $2a = x$. * 488.

COROLLAIRE VI. PROBLEME IV.

492. *Les deux premiers termes d'une progression arithmétique* a & b *étant donnés; trouver de suite tous les termes suivans.*

Premiere méthode. Il faut employer la méthode du Problême précédent, & par le moyen du premier & du second terme a & b, trouver le troisiéme terme $2b - a$; & ensuite avec le second terme b & le 3ᵉ $2b - a$, trouver le 4ᵉ $3b - 2a$; & avec le 3ᵉ $2b - a$ & le quatriéme, trouver le 5ᵉ $4b - 3a$; & ainsi de suite, & l'on aura $\div a . b . 2b - a . 3b - 2a . 4b - 3a . 5b - 4a$, &c. la différence qui regne dans la progression est $b - a$.

Quand le premier terme est zéro, alors $a = 0$, & la progression est $\div 0 . 1b . 2b . 3b . 4b$, &c. la différence qui regne dans la progression est b.

Seconde maniere. Comme il doit y avoir une même différence de chaque terme à celui qui le précéde immédiatement, & que tous les termes d'une progression arithmétique vont de suite en augmentant de cette même différence, ou en diminuant de la même différence; il est évident que les deux premiers termes étant donnés, la différence est aussi donnée, & que si la progression arithmétique va en augmentant, il ne faut qu'ajoûter cette différence au second terme pour avoir le 3ᵉ; ajoûter ensuite la différence au 3ᵉ terme pour avoir le 4[e], & ainsi de suite; & que si la progression arithmétique va en diminuant, il ne faut que retrancher la différence donnée du second terme, & le reste sera le troisiéme terme; retrancher la différence du 3[e] terme, & le reste sera le 4[e], & ainsi de suite.

Quand le premier terme de la progression arithmétique est zéro, le second terme est lui-même la différence qui regne dans la progression, & les termes sont de suite l'unité & tous les nombres entiers multipliés chacun par la différence ÷ &c. — $5d$. — $4d$. — $3d$. — $2d$. — $1d$. 0. $1d$. $2d$. $3d$. $4d$. $5d$, &c.

COROLLAIRE VII.

493. LES termes d'une progression arithmétique, entre lesquels il y a un même nombre de termes interposés, sont aussi entr'eux une progression arithmétique. Par exemple le premier terme, le 3[e], le 5[e], & ainsi de suite, en laissant un terme entre deux, feront une progression arithmétique. De même le premier terme, le 4[e], le 7[e], le 10[e], & ainsi de suite, en passant deux termes, feront une progression arithmétique, & ainsi des autres. Car il est évident que la différence qui est entre les deux premiers de ces termes, sera aussi la différence qui est entre le second & le troisiéme, & ainsi de suite.

COROLLAIRE VIII.

494. CHAQUE terme d'une progression arithmétique, après le premier terme, n'est que le premier terme plus ou moins, la différence prise autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre des termes depuis le premier, non compris jusqu'à ce terme-là.

Par exemple a est le premier terme d'une progression arithmétique; la différence est d; un autre terme quelconque soit nommé t, & le nombre des termes depuis le premier a non compris soit appellé n; il est évident que $t = a + nd$, ou bien $t = a - nd$; ainsi supposé qu'on cherche le quatriéme terme après le premier a, alors $t = a + 4d$, ou bien $t = a - 4d$; le 5[e] terme après a sera $t = a + 5d$, ou bien $t = a - 5d$, & ainsi des autres.

* 485. Ce Corollaire est une suite évidente de la définition * d'une
* 492. progression arithmétique, & de la formation * d'une progression arithmétique.

COROLLAIRE IX.

495. QUAND le premier terme eſt zéro, chaque terme t n'eſt que le produit nd de la différence par le nombre des termes depuis zéro non compris juſqu'à ce terme t compris; ainſi le 4e terme après zéro eſt $t = 4d$; le 5e terme $t = 5d$, & ainſi des autres.

COROLLAIRE X. PROBLÊME V.

496. *SUPPOSANT que zéro eſt le premier terme d'une progreſſion arithmétique, & qu'une grandeur quelconque donnée* d *en eſt le ſecond terme, trouver le terme quelconque on voudra* t *de la progreſſion arithmétique. On ſuppoſe que* n *marque le quantiéme terme eſt le terme qu'on cherche; c'eſt-à-dire que* n *marque le nombre des termes depuis zéro non compris juſqu'au terme* t *compris. Par exemple ſi l'on demande le quatriéme terme après zéro,* n *marque 4.*

Il eſt évident * qu'il n'y a qu'à multiplier d par le nombre des termes, & que le produit nd ſera le terme t qu'on demande; ainſi le 4e terme après zéro ſera $4d$; le 5e ſera $5d$, &c. * 495.

Quand le premier terme n'eſt pas zéro, mais une grandeur réelle donnée a, alors le ſecond terme d moins le premier a, eſt la différence qui regne dans la progreſſion, ſi elle va en augmentant; & le premier terme a moins le ſecond terme d eſt la différence, ſi elle va en diminuant. Dans ces deux cas il faut ajoûter au produit $n \times \overline{d - a}$, ou $n \times \overline{a - d}$, le premier terme a, & la ſomme $a + n \times \overline{d - a}$, ou $a - n \times \overline{a - d}$ * ſera le terme t qu'on demande; c'eſt-à-dire $t = a + n \times \overline{d - a}$, ou $t = a - n \times \overline{a - d}$. * 494.

Si par exemple $a = 10$, $d = 12$, $n = 4$; on trouvera $t = 18$. Si $a = 10$, $d = 8$, $n = 4$; on trouvera $t = 2$.

COROLLAIRE XI. PROBLÊME VI.

497. *UN terme* t *d'une progreſſion arithmétique dont zéro eſt le premier terme, étant donné, & ſçachant de plus le quantiéme terme après zéro eſt ce terme* t; *c'eſt-à-dire le nombre* n *étant donné qui marque combien il y a de termes dans la progreſſion après zéro juſqu'au terme* t *compris; trouver le terme (qu'on nommera* d*) de la progreſſion arithmétique qui eſt le plus proche de zéro, &*

qui eſt auſſi la différence qui regne dans la progreſſion arithmétique.

Opération. Il n'y a qu'à diviſer la grandeur donnée t par le nombre n, & le quotient $\frac{t}{n}$ ou $\frac{1}{n}t$ ſera le terme d le plus proche de zéro que l'on cherche. Par exemple pour trouver le terme le plus proche de zéro d'une progreſſion arithmétique, dont zéro eſt le premier terme, & 10 le 5[e] terme, (ainſi $10 = t$, & $5 = n$), il faut diviſer 10 par 5, & le quotient $2 = \frac{1}{n}t$ ſera le premier terme d après zéro.

Quand le premier terme n'eſt pas zéro, mais une grandeur réelle donnée a, il faut retrancher ce premier terme a du terme donné t, & diviſer le reſte $t - a$ par n, & le quotient
*494. $\frac{t-a}{n} = \frac{1}{n} \times \overline{t - a}$ * ſera la différence qui regne dans la progreſſion ; elle ſera poſitive cette différence $\frac{1}{n} \times \overline{t - a}$ quand la progreſſion va en augmentant ; mais elle ſera négative quand la progreſſion va en diminuant. Il faut ajoûter le premier terme a à la différence qu'on vient de trouver, & la ſomme ſera le terme le plus proche du premier ; & le
*492. nommant d, on aura * $d = \frac{t-a}{n} + a \cdot d = \frac{t + \overline{n-1} \times a}{n}$. Par exemple ſi $t = 18$, $n = 4$, $a = 10$, on aura $d = 12$. Si $t = 2$, $n = 4$, $a = 10$, on aura $d = 8$.

Ce Corollaire eſt une ſuite évidente du 10[e] Corollaire qui précede.

REMARQUE.

498. ON peut remarquer ici que diviſer t par n, ce qui donne $\frac{1t}{n}$, eſt la même choſe que multiplier t par $\frac{1}{n}$, ce qui donne $\frac{1t}{n}$.

COROLLAIRE XII. PROBLÊME VII.

499. *UNE grandeur quelconque étant donnée, (elle peut être un nombre entier ou rompu, poſitif ou négatif, elle peut même être une grandeur incommenſurable), on la repréſentera en général par* l ; *former une progreſſion arithmétique dont le premier terme ſoit zéro & dont la grandeur donnée* l *ſoit le quantiéme terme on voudra de cette progreſſion arithmétique. On nommera* n *le nombre qui marquera le quantiéme terme après zéro eſt la grandeur donnée* l. *Par exemple ſi* l *doit être le* 4[e] *terme,* n *ſera égale à* 4 ; *ſi* l *doit être le* 5[e] *terme,* n *ſera égale à* 5, *& ainſi des autres.*

*497. *Opération.* On trouvera, par le * Problême précédent, $\frac{1}{n}l$ pour

pour le premier terme après zéro, & $\frac{1}{n}l$ * ſera auſſi la différence de la progreſſion arithmétique. On en trouvera de ſuite tous les termes par le Problême 4^e^, * & la progreſſion arithmétique ſera $\div\, 0 . \frac{1}{n}l . \frac{2}{n}l . \frac{3}{n}l . \frac{4}{n}l$, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'on ſoit arrivé au terme dont le numérateur ſoit égal à n, & ce terme ſera égal à l. On pourra continuer enſuite la progreſſion arithmétique autant qu'on voudra. * Par exemple ſi $n = 4$, la progreſſion ſera $\div\, 0 . \frac{1}{4}l . \frac{2}{4}l . \frac{3}{4}l . \frac{4}{4}l = l . \frac{5}{4}l$, &c. *492. *492. *492.

Ce Corollaire eſt une ſuite évidente de ceux qui précédent.

Si l'on vouloit que le premier terme de la progreſſion arithmétique ne fût pas zéro, mais une grandeur donnée a, il faudroit retrancher a de l, ce qui donneroit $l - a$; diviſer $l - a$ par n, & $\frac{l-a}{n}$ ſeroit * la différence de la progreſſion arithmétique, à laquelle ajoûtant le premier terme a, l'on auroit $\frac{l-a}{n} + a = \frac{l + \overline{n-1} \times a}{n}$ pour le ſecond terme de la progreſſion. Le premier & le ſecond termes étant connus, * il eſt facile de trouver tous les ſuivans. *497. *492.

REMARQUE.

CE Corollaire 12^e^ & le 11^e^ contiennent la méthode de trouver, entre 0 & une grandeur donnée l, comme auſſi entre deux grandeurs données a & l, tant de moyens proportionnels arithmétiques qu'on voudra. Car nommant $n - 1$ le nombre des moyens, $\frac{1}{n}l$ ſera le premier de ces moyens dans le premier cas, & $\frac{l + \overline{n-1} \times a}{n}$ ſera le premier des moyens qu'on cherche dans le ſecond cas. On doit auſſi remarquer que les deux termes extrêmes 0 & l, ou a & l étant déterminés avec le nombre $n - 1$ des moyens, chacun des moyens eſt auſſi déterminé; c'eſt-à-dire il ne peut pas y avoir deux grandeurs inégales pour le premier moyen, ni deux différentes pour le ſecond, &c.

COROLLAIRE XIII.

500. EN deux progreſſions arithmétiques différentes, qui commencent chacune à zéro, ſi l'on nomme *termes correſpondans* le ſecond de la premiere & le ſecond de la deuxiéme, le troi-

siéme de la premiere & le troisiéme de la seconde, & ainsi de suite; le rapport géométrique qui est entre deux termes correspondans, est le même que celui qui se trouve entre deux autres termes correspondans quelconques. Car il est évident que le second terme de la premiere de ces deux progressions est la différence qui regne entre les termes de la premiere, & que le second terme de la seconde est la différence qui regne dans la seconde: mais deux termes correspondans quelconques contiennent leur différence chacun un même nombre de fois; ainsi leur rapport géométrique est égal au rapport qui est entre leurs différences.

Par exemple la premiere étant $\div$ 0 . d . 2 d . 3 d . 4 d, &c. la seconde $\div$ 0 . *d* . 2 *d* . 3 *d* . 4 *d*, &c. il est clair que d . *d* :: 4 d . 4 *d* :: *n* d . *n d*, en supposant que *n* marque un nombre entier quelconque.

D'où l'on voit clairement que si deux progressions arithmétiques différentes commencent à zéro, que l'on ait un seul terme de la premiere en sçachant le quantiéme terme il est, par exemple le onziéme terme; mais que l'on ait tous les termes de l'autre, on pourra trouver tous les termes de la premiere l'un après l'autre, par des regles de trois, par le moyen des termes connus de la seconde progression arithmétique. Par exemple 10 d est le onziéme terme de la premiere, & il est donné, on voudroit trouver le sixiéme terme de la premiere. Puisqu'on suppose que tous les termes de la seconde sont connus, il est évident qu'on aura une proportion géométrique; dont le premier terme sera l'onziéme terme 10 *d* de la seconde, le second terme de la proportion sera l'onziéme terme donné 10 d de la premiere progression arithmétique; le troisiéme terme de la proportion sera le 6e terme 5 *d* de la seconde progression arithmétique; ainsi on trouvera par la regle de trois le 6e terme de la premiere progression arithmétique. 10 *d*. 10 d :: 5 *d*. $\frac{5d \times 10d}{10d} = 5$ d.

COROLLAIRE XIV.

501. EN toute progression arithmétique qui a un nombre déterminé de termes, la somme du premier & du dernier terme est égale à la somme de deux autres termes, dont l'un est autant éloigné du premier terme, que le dernier terme est distant de l'autre. Par exemple dans la progression arithmé-

tique $\div a . b . c . d . e . f . g . h . j . k . l . m$, la somme du premier & du dernier terme $a + m = b + l = c + k = d + j = e + h = f + g$. Car il est évident que $a . b : l . m$; que $a . c : k . m$; que $a . d : j . m$; que $a . e : h . m$; que $a . f : g . m$, étant visible que la même différence qui est entre le premier & le second terme de chacune de ces proportions arithmétiques, se trouve aussi entre le troisiéme & le quatriéme terme. Par conséquent * la somme du premier & du dernier terme est égale, &c. * 487.

COROLLAIRE XV.

502. SI le nombre des termes de la progression arithmétique étoit impair, il est clair que le double du terme du milieu seroit égal à la somme du premier & du dernier terme. Par exemple. $a + l = 2f$.

COROLLAIRE XVI.

503. IL suit du 14 & du 15[e] Corollaires que la somme du premier & du dernier terme d'une progression arithmétique étant multipliée par la moitié du nombre des termes de la progression, le produit est égal à la somme de tous les termes de la progression atithmétique.

Car la somme de la progression arithmétique $\div a . b . c . d . e . f . g . h . i . k . l . m$, est $a + b + c + d + e + f + g + h + j + k + l + m$; mais * $a + m = b + l = c + k = d + j = e + h = f + g$. Par conséquent $\overline{a + m} \times \frac{12}{2}$, ou $\overline{a + m} \times 6 = a + m + b + l + c + k + d + j + e + h + f + g = a + b + c + d + e + f + g + h + j + k + l + m$. * 501.

Si le nombre des termes étoit impair comme dans $\div a . b . c . d . e . f . g . h . j . k . l$, l'on auroit * $a + l = b + k = c + j = d + h = e + g = 2f$. Par conséquent $\overline{a + l} \times \frac{11}{2} = \overline{a + l} \times 5\frac{1}{2} = a + l + b + k + c + j + d + h + e + g + f = a + b + c + d + e + f + g + h + j + k + l$. * 501 & 488.

Quand le premier terme est zéro, le seul dernier terme est la somme du premier & du dernier terme.

COROLLAIRE XVII.

Où l'on donne les formules pour résoudre les principaux Problêmes sur la progression arithmétique.

DÉFINITION.

On nommera a le premier terme de la progression arithmétique ; d la différence qui regne dans la progression ; t le dernier terme de la progression ; n le nombre des termes depuis le premier compris jusqu'au dernier aussi compris ; (ainsi le nombre des termes qui suivent le premier, ce premier non compris, est $n - 1$) ; s la somme des termes de la progression. Cela supposé.

504. $t = {}^{*}a + \overline{n - 1} \times d$ sera *la formule pour trouver le dernier terme* t, *lorsque le premier* a, *la différence* d, *& le nombre*
*494. *des termes* n *sont donnés.*

505. En retranchant le produit $+ \overline{n - 1} \times d$ de chacune des grandeurs égales $t = a + \overline{n - 1} \times d$, on aura $a = t - \overline{n + 1} \times d$ pour *la formule qui sert à trouver le premier terme* a, *lorsque le dernier terme* t, *la différence* d, *& le nombre des termes* n *sont donnés.*

506. Si l'on ôte de chacune des grandeurs égales $t = a + \overline{n - 1} \times d$, la grandeur a, & qu'on divise ensuite les deux grandeurs égales $t - a = nd - 1\,d$ par $n - 1$, on aura $d = \frac{t - a}{n - 1}$ pour *la formule qui doit servir à trouver la différence* d, *lorsque le premier terme* a, *le dernier* t, *& le nombre des termes* n *sont donnés.*

507. Si l'on ajoûte a à chacune des grandeurs égales $d = \frac{t - a}{n - 1}$; on aura $a + d = \frac{t - a}{n - 1} + a = \frac{t + na - 2a}{n - 1} = \frac{t + \overline{n - 2} \times a}{n - 1}$. C'est *la formule pour trouver le premier d'autant de moyens proportionnels arithmétiques entre le premier terme* a *qui est donné & le terme* t *qui est aussi donné, qu'il y a d'unités dans* n — 2, *qui est un nombre donné* ; car n marque le nombre de tous les termes de la progression, sçavoir le premier terme a compris, tous les moyens $n - 2$, & le dernier t. Quand on a le premier de ces moyens proportionnels, on
*492. trouve * facilement tous les autres.

508. En ajoûtant aux deux grandeurs égales $t - a = nd - 1\,d$, la grandeur $+ 1\,d$, on aura $t - a + 1\,d = nd$; & divisant

ensuite chacune de ces deux grandeurs égales par d, on aura $n = \frac{t - a + 1d}{d}$ pour *la formule qui doit servir à trouver le nombre des termes* n *d'une progression arithmétique, quand le premier terme* a, *la différence* d, *& le dernier terme* t *sont donnés*.

509. $s = {}^*\overline{a + t} \times \frac{n}{2}$ est *la formule pour trouver la somme des termes* s, *lorsque le premier terme* a, *le dernier* t, *& le nombre des termes* n *sont donnés*. * 503.

510. Si on multiplie chacune des grandeurs égales $s = \frac{an + nt}{2}$ par 2, qu'on retranche $+ nt$ de chacune des grandeurs égales $2s = an + nt$, on aura $2s - nt = an$. Si l'on divise ensuite chacune de ces grandeurs égales par n, on trouvera $a = \frac{2s - nt}{n}$. C'est *la formule pour trouver le premier terme* a *lorsque la somme des termes* s, *le dernier terme* t, *& le nombre des termes* n *sont donnés*.

511. Si l'on divise chacune des grandeurs égales $2s = an + nt$ par $a + t$, il viendra $n = \frac{2s}{a + t}$. C'est *la formule pour trouver le nombre des termes* n, *lorsque la somme des termes* s, *le premier terme* a, *& le dernier* t *sont donnés*.

512. En retranchant de chacune des grandeurs égales $2s = an + nt$, la grandeur an, & divisant ensuite chacune des grandeurs égales $2s - an = nt$ par n, on aura $t = \frac{2s - an}{n}$ pour *la formule qui sert à trouver le dernier terme* t, *lorsque la somme des termes* s, *le premier terme* a, *& le nombre des termes* n *sont donnés*.

513. Si l'on substitue dans $^* s = \frac{an + nt}{2}$, la valeur de t, qui * 509.
est $^* a + nd - 1d$, on trouvera $s = \frac{2an + n^2d - nd}{2}$. C'est *la* * 504.
formule pour trouver la somme des termes s, *lorsque le premier terme* a, *la différence* d, *& le nombre des termes* n *sont donnés*.

514. Si l'on multiplie chacune des grandeurs égales $s = \frac{2an + n^2d - nd}{2}$ par 2, qu'on retranche des grandeurs egales $2s = 2an + n^2d - nd$ la grandeur $2an$, & qu'on divise ensuite chacune des grandeurs égales $2s - 2an = n^2d - nd$ par $n^2 - n = n \times \overline{n - 1}$, on trouvera $d = \frac{2s - 2an}{n \times \overline{n - 1}}$ pour *la formule qui sert à trouver la différence* d, *lorsque la somme des termes* s, *le premier terme* a, *& le nombre des termes* n *sont donnés*.

515. En retranchant de chacune des grandeurs égales $2s = 2an + n^2d - nd$, les grandeurs $+ n^2d - nd$, on aura $2s - n^2d + nd = 2an$; en divisant chacune de ces grandeurs égales par $2n$, on trouvera $a = \frac{2s - n^2d + nd}{2n}$ pour *la formule qui sert à trouver le premier terme* a, *lorsque la somme des termes* s, *la différence* d, *& le nombre des termes* n *sont donnés.*

516. Si dans $2s = 2an + n^2d - nd$, l'on ordonne la grandeur où est n par rapport à la lettre n, on aura $n^2d + 2an - 1nd = 2s$; en divisant chaque grandeur par d, on aura $n^2 + \frac{2a}{d}n - 1n = \frac{2s}{d}$; en ajoûtant à chacune de ces deux grandeurs égales, la grandeur $\frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}$, qui est le quarré de $\frac{a}{d} - \frac{1}{2}$; on aura $n^2 + \frac{2a}{d}n - 1n + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} = \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2s}{d}$. La premiere de ces deux grandeurs égales est un quarré parfait, dont la racine est $n + \frac{a}{d} - \frac{1}{2}$: ainsi en tirant la racine
* 211. quarrée des deux grandeurs égales, on aura * $n + \frac{a}{d} - \frac{1}{2} = \sqrt[2]{\frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2s}{d}}$; en retranchant de chacune de ces grandeurs égales, la grandeur $+ \frac{a}{d} - \frac{1}{2}$, on trouvera $n = - \frac{a}{d} + \frac{1}{2} + \sqrt[2]{\frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2s}{d}}$. C'est *la formule pour trouver le nombre des termes* n, *lorsque le premier terme* a, *la différence* d, *& la somme des termes* s *sont donnés.*

517. Comme le dernier terme t de la progression arithméti-
* 504. que * est égal au premier terme plus au produit du nombre des termes moins un par la différence, c'est-à-dire $t = a + \overline{n - 1} \times d$; si l'on substitue dans $t = a + \overline{n - 1} \times d$, la valeur de $n - 1$ prise de $n = - \frac{a}{d} + \frac{1}{2} + \sqrt[2]{\frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2s}{d}}$, on trouvera $t = a - \frac{ad}{d} + \frac{1d}{2} - 1d + d \times \sqrt{\frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2s}{d}} = - \frac{1}{2}d + d\sqrt{\frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2s}{d}}$. C'est *la formule pour trouver le dernier terme* t, *lorsque le premier terme* a, *la différence* d, *& la somme des termes* s *sont donnés.*

REMARQUE.

518. Si l'on efface dans toutes les formules qui précédent, chaque grandeur où se trouve le premier terme a, en supposant que $a = 0$, les formules après ce retranchement serviront pour les progressions, dont le premier terme est zéro.

Application des formules à la résolution des Problêmes.

519. QUAND on voudra résoudre quelque Problême sur la progression arithmétique qui se rapportera à quelqu'une des formules, il faudra substituer dans cette formule les grandeurs données à la place des lettres qui représentent ces grandeurs données, en faisant les opérations prescrites par la formule; & après ces substitutions on aura la résolution que l'on cherche.

Par exemple, si l'on veut trouver la somme d'une progression arithmétique dont le premier terme est 2, la différence 2, le nombre des termes 5; il faut prendre la formule * $s = \frac{2an + n^2d - nd}{2}$; supposer que s représente la somme des termes que l'on cherche, que $a = 2$, $d = 2$, $n = 5$; & substituer ces valeurs de a, d, n dans la formule, & l'on trouvera que $s = \frac{2 \times 2 \times 5 + 25 \times 2 - 5 \times 2}{2} = \frac{20 + 50 - 10}{2} = 30$; ainsi la somme qu'on cherche est $s = 30$. En effet la progression est ÷ 2 . 4 . 6 . 8 . 10, dont la somme est 30. * 513.

Deux nombres étant donnés 3 & 13, si l'on veut trouver quatre moyens proportionnels arithmétiques entre ces deux nombres; il faut substituer dans la formule * $a + d = \frac{t + \overline{n-2} \times a}{n-1}$, 3 à la place de a, 13 à la place de t, & 6 à la place de n, & l'on aura le premier de ces moyens $a + d = \frac{13 + 4 \times 3}{5} = 5$, les autres sont faciles à trouver *; & la progression arithmétique sera ÷ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13. * 507. * 492.

Quand le premier terme est zéro, le second terme est la différence même $d = \frac{t}{n-1}$.

Ces exemples suffisent pour faire concevoir la maniere d'appliquer les formules à la résolution des Problêmes.

REMARQUE.

520. ON peut par le moyen de ces formules découvrir des propriétés particulieres à quelques progressions arithmétiques; par exemple, en supposant dans la formule $s = \frac{2an + n^2d - nd}{2}$, que $a = 1$, $d = 2$, la formule devient $s = n^2$; c'est-à-dire, la somme des termes dans la progression arithmétique des nombres impairs ÷ 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11, &c. (dans laquelle le premier terme est 1, & la différence 2), est toujours égale

au quarré du nombre des termes; ainsi en prenant successivement le premier terme seul, la somme des deux premiers termes, la somme des trois premiers termes, & ainsi de suite; ces sommes sont les quarrés 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36, &c. des nombres entiers 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6, &c. pris de suite.

AVERTISSEMENT.

LES formules précédentes conviennent à toute progression arithmétique qui va en augmentant. Quand on voudra les appliquer aux progressions arithmétiques qui vont en diminuant, il est évident qu'il n'y a autre chose à faire qu'à prendre le premier terme de ces progressions pour celui qui est nommé le dernier dans les formules, & le dernier terme de ces progressions pour celui qui est nommé le premier dans les formules.

Les Progressions géométriques.

AVERTISSEMENT.

* 346. ON a déja expliqué * la maniere de former une progression géométrique, dont les deux premiers termes sont connus, en
* 395 se servant de la regle de proportion. On a aussi démontré *
& suiv. plusieurs propriétés, & on † a résolu des Problêmes qui ap-
† 404. partiennent aux progressions géométriques. On va ajoûter ici d'autres manieres de former une progression géométrique, & donner les formules pour résoudre les principaux Problêmes des progressions géométriques.

PROBLÊME.

521. *DEUX termes d'une progression étant donnés, trouver tous les autres tant en allant de gauche à droite, que de droite à gauche; & le seul premier terme étant donné avec le rapport commun de la progression, trouver tous les autres termes.*

PREMIERE MANIERE.

Opération. Il faut faire une fraction dont le numérateur soit le second terme donné, & dont le dénominateur soit le premier terme donné, elle sera le rapport qui regne dans la progression. Il faut multiplier le second terme donné par cette fraction, & le produit sera le 3e terme de la progression en en allant vers la droite. Il faut multiplier le 3^e terme par la même fraction, & le produit sera le 4^e terme. Il faut multiplier le 4^e terme par la même fraction, & le produit sera le 5^e terme. On trouvera ainsi de suite tous les termes de la progression à l'infini.

Pour avoir les termes qui vont de droite à gauche, il faut diviser le premier terme donné par la même fraction, le quotient sera le second terme vers la gauche; il faut le diviser par la même fraction, & le quotient sera le 3^e terme. On trouvera de même par la division tous les termes de la progression qui vont de droite à gauche à l'infini.

Par exemple, si a & b représentent les deux premiers termes donnés d'une progression géométrique, on multipliera par $\frac{b}{a}$ le second terme b, & le produit $\frac{b^2}{a}$ sera le troisiéme; on le multipliera par $\frac{b}{a}$, & le produit $\frac{b^3}{a^2}$ sera le 4^e terme; & ainsi de suite.

Pour découvrir les termes de la progression qui vont vers la gauche, on divisera a par $\frac{b}{a}$, & le quotient $\frac{a^2}{b}$ sera le second terme vers la gauche; on divisera $\frac{a^2}{b}$ par $\frac{b}{a}$, & le quotient $\frac{a^3}{b^2}$ sera le 3^e terme; & ainsi de suite.

Par ces opérations on aura la progression suivante,

$$\div\!\div \text{ \&c. } \frac{a^5}{b^4} \cdot \frac{a^4}{b^3} \cdot \frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot a \cdot b^1 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \frac{b^3}{a^2} \cdot \frac{b^4}{a^3} \cdot \frac{b^5}{a^4} \cdot \frac{b^6}{a^5} \cdot \frac{b^7}{a^6} \cdot \frac{b^8}{a^7} \cdot \frac{b^9}{a^8}, \text{ \&c.}$$

COROLLAIRE.

QUAND $a = 1$, la progression devient $\div\!\div$ &c. $\frac{1}{b^4} \cdot \frac{1}{b^3} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{b} : 1 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4$, &c.

SECONDE MANIERE DE FORMER UNE PROGRESSION.

522. QUAND le premier terme a est seul donné avec le rapport du premier au second terme, qu'on nommera $\frac{r}{q}$, qui est le rapport qui doit regner dans la progression; il faut multiplier a par $\frac{q}{r}$, & le produit $\frac{aq}{r}$ sera le second terme; on multipliera $\frac{aq}{r}$ par $\frac{q}{r}$, & on aura le 3^e terme $\frac{aq^2}{r^2}$; on trouvera de même le 4^e terme $\frac{aq^3}{r^3}$, le 5^e $\frac{aq^4}{r^4}$; & ainsi de suite.

On trouvera, en divisant a par $\frac{q}{r}$, le second terme $\frac{ar}{q}$

qui est de l'autre côté de a; on trouvera le 3e terme $\frac{ar^2}{q^2}$ en divisant $\frac{ar}{q}$ par $\frac{q}{r}$, & l'on aura de même le 4e terme $\frac{ar^3}{q^3}$, le 5e $\frac{ar^4}{q^4}$, & ainsi de suite; & la progression sera $\div$ &c. $\frac{ar^5}{q^5} . \frac{ar^4}{q^4} . \frac{ar^3}{q^3} . \frac{ar^2}{q^2} . \frac{ar^1}{q^1} . a . \frac{aq}{r} . \frac{aq^2}{r^2} . \frac{aq^3}{r^3} . \frac{aq^4}{r^4} . \frac{aq^5}{r^5}$, &c.

Quand a est l'unité, le rapport $\frac{r}{q}$ du premier au second terme (en le supposant réduit aux moindres termes) a l'unité pour numérateur, ainsi $r = 1$; le second terme est q, & la progression est $\div$ &c. $\frac{1}{q^5} . \frac{1}{q^4} . \frac{1}{q^3} . \frac{1}{q^2} . \frac{1}{q^1} . 1 . q . q^2 . q^3 . q^4 . q^5$, &c.

On remarquera que pour abréger l'expression de chaque terme de la progression, il est bon de prendre le rapport $\frac{r}{q}$ du premier au second terme, qui regne dans la progression, réduit aux moindres termes.

Définition.

523. On nommera s la somme de tous les termes d'une progression; le premier terme, a; le dernier terme de la progression, t; le nombre des termes, depuis le premier non compris, n; le rapport du premier terme au second, $\frac{r}{q}$. Quand le premier terme a sera moindre que le dernier t, on le marquera ainsi $a < t$, & la progression ira alors en augmentant; quand le premier terme a surpassera le dernier t, on le marquera ainsi $a > t$, & dans ce cas la progression ira en diminuant.

Corollaire I.

524. Dans une progression représentée par $\div a . b . c . d . t$, ou $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{t}$, on aura, 1°. $s = a + b + c + d + t$; 2°. $s - t =$ à tous les antécédens; 3°. $s - a =$ à tous les conséquens; 4°. si la progression va en augmentant, $a < t$; si elle va en diminuant, $a > t$; 5°. $n = 4$ dans cet Exemple; 6°. le rapport qui regne dans la progression sera $\frac{a}{b} = \frac{r}{q}$; & quand elle ira en augmentant, $r < q$; quand elle ira en diminuant, $r > q$.

COROLLAIRE II.

Où l'on donne les formules pour résoudre les principaux Problêmes des progressions.

525. 1. *Les formules pour trouver le dernier terme* t, *lorsque le premier* a, *le second terme* b, *& le nombre des termes* n, *depuis le premier non compris, sont donnés; ou lorsque le premier terme* a, *le rapport* $\frac{r}{q}$ *qui regne dans la progression, & le nombre des termes* n *sont donnés.*

Si l'on éleve le rapport $\frac{b}{a}$ du second terme b de la progression au premier terme a, à la puissance n, & qu'on multiplie $\frac{b^n}{a^n}$ par a, on aura $t = \frac{a\,b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^{n-1}}$ pour *la formule* * qui sert à trouver le dernier terme t d'une progression, ou tel terme t qu'on voudra, en supposant que le nombre n marque quel rang il occupe depuis le premier non compris; lorsque le premier terme a, le second b, & le nombre des termes n depuis le premier non compris, sont donnés. Par exemple, si l'on demande le sixiéme terme après a, on aura $t = \frac{b^6}{a^5}$. *521.

Si l'on éléve $\frac{b}{a}$ à la puissance n, & qu'on divise a par $\frac{b^n}{a^n}$, on aura $t = \frac{a^{n+1}}{b^n}$ pour *la formule* * qui sert à trouver le terme t, autant éloigné de l'autre côté du premier terme a, que n contient d'unités; lorsque a, b, & n sont donnés. *521.

Si l'on veut se servir de la seconde formation de la progression, on trouvera * $t = \frac{a\,q^n}{r^n}$ pour *la formule* qui sert à découvrir le terme t, en supposant ces trois choses données, le premier terme a, le rapport $\frac{q}{r}$ du second terme au premier, & le nombre des termes n depuis le premier a non compris. *522.

On trouvera $t = \frac{a\,r^n}{q^n}$ pour *la formule* qui sert à découvrir le terme t, qui est également éloigné de a du côté opposé, les mêmes choses étant données.

526. 2. *Les formules pour trouver le second terme* b, *comme aussi le rapport* $\frac{r}{q}$ *qui regne dans la progression, lorsque le premier terme* a, *le dernier* t, *& le nombre des termes* n, *depuis le premier non compris, sont donnés.*

*525. En multipliant chacune des grandeurs égales * $t = \frac{b^n}{a^{n-1}}$ par a^{n-1}, on aura $a^{n-1}t = b^n$; & tirant la racine n de chacune de ces grandeurs égales, on trouvera $b = \sqrt[n]{a^{n-1}t}$. C'est *la formule* pour trouver le second terme b, lorsque a, t & n sont donnés, & $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}t}}$ est *la formule* qui représente le rapport commun $\frac{r}{q}$.

Quand $a = 1$, alors $b = \sqrt[n]{t} = t^{\frac{1}{n}}$, & le rapport commun est $\frac{1}{\sqrt[n]{t}} = t^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{q}$.

En divisant chacune des grandeurs égales $t = \frac{a\,q^n}{r^n}$ par a, il viendra $\frac{t}{a} = \frac{q^n}{r^n}$; prenant ensuite la racine n de chacune de ces grandeurs égales, on aura $\sqrt[n]{\frac{t}{a}} = \frac{t^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{q}{r}$. C'est *la formule* pour trouver le rapport commun $\frac{q}{r}$, lorsque a, t, n, sont donnés.

Si l'on multiplie chacune des grandeurs égales $\sqrt[n]{\frac{t}{a}} = \frac{q}{r}$ par

*522. le premier terme a, on aura $a\sqrt[n]{\frac{t}{a}} = \sqrt[n]{a^{n-1}t} = \frac{a\,q}{r} =$ * b.

*522. Quand $a = 1$, $\sqrt[n]{t} = \frac{q}{1}$; & $\sqrt[n]{t} = q =$ * b.

527. 3. *La formule pour trouver le rapport commun* $\frac{r}{q}$, *comme aussi le second terme* b, *lorsque la somme* s *de la progression, le premier terme* a, *& le dernier* t *sont donnés.*

*324. La somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, * étant à la somme des conséquens comme un seul antécédent

*524. à son seul conséquent, on aura $\frac{a}{b} =$ * $\frac{s-t}{s-a}$; comme aussi $\frac{r}{q} = \frac{s-t}{s-a}$. C'est *la formule* pour trouver le rapport qui regne dans la progression; comme aussi le second terme b inconnu; quand ces trois choses sont données, le premier terme a, le dernier terme t, & la somme des termes s. Car $\frac{s-t}{s-a}$ est egal au rapport $\frac{r}{q}$ qui regne dans la progression,

& l'on a les trois premiers termes connus de la proportion $s - t . s - a :: a . b$, dont le second terme b de la progression est le quatriéme terme.

528. 4. *Les formules pour trouver la somme des termes* s *d'une progression, quand le premier terme* a, *le second* b, *& le dernier* t, *sont donnés ; comme aussi quand* a, t *& le rapport commun* $\frac{r}{q}$ *de la progression sont donnés.*

1°. QUAND $a > t$.

SI l'on multiplie les grandeurs égales * $\frac{a}{b} = \frac{s-t}{s-a}$ par la même grandeur $\overline{s-a} \times b$, on trouvera $as - a^2 = bs - bt$; retranchant de chacune de ces grandeurs égales la même grandeur $bs - a^2$, il viendra $as - bs = a^2 - bt$; enfin divisant ces grandeurs égales par $a - b$, on aura $s = \frac{a^2 - bt}{a - b}$. C'est *la formule* pour trouver la somme s d'une progression, le premier terme a, le second b & le dernier t étant connus. * 527.

Si l'on multiplie chacune des grandeurs égales * $\frac{r}{q} = \frac{s-t}{s-a}$ par $s - a$, on aura $s \times \frac{r}{q} - a \times \frac{r}{q} = s - t$; ajoûtant à chacune de ces deux grandeurs égales la grandeur $+ a \times \frac{r}{q} - 1s$, il viendra $s \times \frac{r}{q} - 1s = a \times \frac{r}{q} - t$; enfin en divisant chacune de ces dernieres grandeurs égales par $\frac{r}{q} - 1$, on trouvera * 527.

$$s = \frac{a \times \frac{r}{q} - t}{\frac{r}{q} - 1}.$$

C'est *la formule* pour trouver la somme s, lorsque a, t & le rapport commun $\frac{r}{q}$ sont donnés.

2°. QUAND $a < t$.

MULTIPLIANT chacune des grandeurs égales * $\frac{b}{a} = \frac{s-a}{s-t}$ par $\overline{s-t} \times a$, on trouvera $bs - bt = as - a^2$; ajoûtant à chacune de ces grandeurs égales $+ bt - as$, il viendra $bs - as = bt - a^2$; enfin divisant chacune de ces grandeurs égales par $b - a$, on aura $s = \frac{bt - a^2}{b - a}$. C'est *la formule* pour trouver s quand a, b, t sont donnés. * 527, & 324.

Les grandeurs égales $\frac{q}{r} =$ * $\frac{s-a}{s-t}$ étant multipliées chacune par $s - t$, il en naîtra $s \times \frac{q}{r} - t \times \frac{q}{r} = s - a$; ajoûtant à chacune de ces grandeurs égales $+ t \times \frac{q}{r} - 1s$, on aura $s \times \frac{q}{r} - 1s = t \times \frac{q}{r} - a$; enfin divisant chacune par $\frac{q}{r} - 1$, * 527, & 324.

on trouvera $s = \frac{t \times \frac{q}{r} - a}{\frac{q}{r} - 1}$. C'est *la formule* pour trouver la somme s, lorsque a, t, $\frac{q}{r}$ sont données.

529. *5. La formule pour trouver celui des deux termes* a *ou* t *qui est le plus grand lorsque l'autre est donné, & que la somme des termes* s *& le rapport* $\frac{r}{q}$ *sont aussi donnés. On supposera ici* $t > a$.

*528. En ajoûtant à chacune des grandeurs égales * $s \times \frac{q}{r} - 1s = t \times \frac{q}{r} - a$, la grandeur $+a$, il viendra $s \times \frac{q}{r} - 1s + a = t \times \frac{q}{r}$; en divisant chacune de ces grandeurs égales par $\frac{q}{r}$, on trouvera $t = \frac{s \times \frac{q}{r} - 1s + a}{\frac{q}{r}}$. C'est *la formule* pour trouver le plus grand terme t, lorsque la somme s, le premier terme a, & le rapport commun $\frac{q}{r}$ sont donnés. Si a étoit le plus grand terme, il n'y auroit qu'à mettre dans la formule a à la place de t, & t à la place de a, & $\frac{r}{q}$ à la place de $\frac{q}{r}$.

530. *6. La formule pour trouver le moindre terme* a, *lorsque le plus grand terme* t, *la somme* s, *& le rapport commun* $\frac{q}{r}$ *sont donnés.*

*529. En ajoûtant à chacune des grandeurs égales * $s \times \frac{q}{r} - 1s + a = t \times \frac{q}{r}$, la grandeur $+ 1s - s \times \frac{q}{r}$, on aura $a = t \times \frac{q}{r} + 1s - s \times \frac{q}{r}$. C'est *la formule* pour trouver le moindre terme a, lorsque s, $\frac{q}{r}$, & t sont donnés. Si t étoit le moindre terme, & a le plus grand, il n'y auroit qu'à mettre dans la formule t à la place de a, & a à la place de t, & $\frac{r}{q}$ au lieu $\frac{q}{r}$.

La maniere d'appliquer les formules à la résolution des Problêmes.

531. QUAND on voudra résoudre un Problême sur la progression géométrique, qui aura rapport à quelqu'une des formules précédentes, il faudra substituer dans cette formule les grandeurs données à la place des lettres qui représentent ces grandeurs données, en faisant les opérations qui sont marquées par la formule; & après ces substitutions on aura la résolution que l'on cherche.

Par exemple, pour trouver la somme s de la progression dont 128 eſt le plus grand & le premier terme a ; 1 eſt le dernier terme t, & le rapport du premier au ſecond terme eſt $\frac{2}{1} = \frac{r}{q}$. Il faut ſubſtituer dans la formule * $s = \frac{a \times \frac{r}{q} - t}{\frac{r}{q} - 1}$ les grandeurs données à la place des lettres qui les repréſentent, & l'on trouvera $s = \frac{128 \times \frac{2}{1} - 1}{\frac{2}{1} - 1} = 255$. En effet la progreſſion eſt ∺ 128 . 64 . 32 . 16 . 8 . 4 . 2 . 1, dont la ſomme eſt 255. * 528.

Cet Exemple ſuffit pour faire voir la maniere de ſe ſervir des formules précédentes.

REMARQUES.

I.

532. LORSQU'UNE progreſſion géométrique va en diminuant, pendant que le nombre des termes eſt fini, le dernier & plus petit terme eſt toujours une grandeur finie. Mais ſi l'on conçoit que la progreſſion s'étend à un nombre infini de termes, on apperçoit alors que le terme qui eſt, pour ainſi dire, l'infinitiéme, eſt d'une petiteſſe infinie, qu'il eſt moindre qu'aucune grandeur finie & déterminée, & qu'on le peut regarder comme zéro par rapport à une grandeur finie & déterminée.

Il ſuit de-là qu'en mettant zéro à la place du dernier terme t dans les deux formules * $s = \frac{a^2 - bt}{a - b}$, $s = \frac{a \times \frac{r}{q} - t}{\frac{r}{q} - 1}$, elles deviendront $s = \frac{a^2}{a - b}$ & $s = \frac{a \times \frac{r}{q}}{\frac{r}{q} - 1}$, & elles ſeront les formules pour trouver la ſomme d'une progreſſion qui a un nombre infini de termes, leſquels vont en diminuant. * 528.

Par exemple, pour trouver la ſomme d'une progreſſion infinie double, dont le rapport commun eſt $\frac{2}{1}$, le premier terme $2 = a$, & le ſecond terme $1 = b$; on ſubſtituera dans $s = \frac{a^2}{a - b}$, 2 à la place de a, & 1 à la place de b, & la ſomme de la progreſſion double infinie ſera $s = 4$.

En ſubſtituant de même dans $s = \frac{a \times \frac{r}{q}}{\frac{r}{q} - 1}$, 2 à la place de a, & $\frac{2}{1}$ à la place de $\frac{r}{q}$, on trouvera $s = \frac{2 \times \frac{2}{1}}{\frac{2}{1} - 1} = 4$.

On trouvera de la même maniere la somme de toute progression infinie qui va en diminuant; & l'on voit que cette somme d'un nombre infini de termes est finie.

II.

Les Commençans doivent remarquer dans l'invention des formules qui contiennent la résolution des principaux Problêmes sur les progressions arithmétiques & géométriques, la facilité avec laquelle le calcul fait découvrir les résolutions des Problêmes des Mathématiques; & combien ces résolutions sont simples & générales.

SECTION II.

Où l'on compare la proportion géométrique & la progression géométrique avec la proportion arithmétique & la progression arithmétique; & l'on explique la maniere de joindre ensemble les progressions géométriques & arithmétiques dans le calcul des grandeurs.

REMARQUES.

I.

533. LORSQU'ON cherche le quatriéme terme x d'une proportion arithmétique $a . b : c . x$, dont les trois premiers ter-
*489. mes a, b, c sont connus, * il faut faire l'addition des deux moyens b & c, & ôter par la soustraction l'extrême connu a de la somme des moyens $b + c$, & le reste $b + c - a$ est le terme x que l'on cherche.

*490. Si le premier terme est zéro, $o . b : c . x$, * la seule addition $b + c$ du second & troisiéme terme donne $b + c = x$.

*490. Si le dernier terme est zéro, $a . b : x . o$, * la seule soustraction $a - b$, par laquelle on retranche le second terme b du premier a, donne $a - b = x$.

II.

534. Quand on cherche le 4[e] terme d'une proportion géométrique a . b :: c . x, dont les trois premiers termes sont con-
*341. nus, * il faut faire la multiplication des deux moyens b & c, & faire la division du produit bc par l'extrême connu (a); & le quotient $\frac{bc}{a} = x$ est le 4[e] terme x.

Quand le 1[er] terme de la proportion est l'unité 1 . b :: c . x, (ce (ce qui arrive * en toute multiplication) la ſeule multiplication des deux moyens donne $bc = x$. * 72.

Lorſque le 4e terme de la proportion eſt l'unité $a . b :: x . 1$, (ce qui arrive * en toute diviſion) la ſeule diviſion du premier terme par le ſecond donne $\frac{a}{b} = x$. * 106.

III.

535. D'où l'on voit que l'addition & la ſouſtraction font dans la proportion arithmétique, ce que la multiplication & la diviſion font dans la proportion géométrique.

IV.

536. Dans la progreſſion arithmétique, le premier terme a & la différence d de la progreſſion étant donnés, ſi l'on veut chercher un terme t qui ſoit autant éloigné du premier non compris, que le nombre entier n contient d'unités, * il faut multiplier la différence d par n; ajoûter le premier terme a au produit nd, & $a + nd$ ſera le terme t qu'on cherchoit quand la progreſſion va en augmentant; il faut ôter nd du premier terme a, & $a - nd$ * ſera le terme t quand la progreſſion va en diminuant. * 494 & 496. * 496.

Si le premier terme eſt zéro, * la ſeule multiplication de la différence d par le nombre des termes n, donne $\pm nd = t$. * 496.

V.

537. Dans la progreſſion géométrique, le premier terme (a) étant donné avec le ſecond (b), ou bien le rapport du premier terme (a) au ſecond (b), c'eſt-à-dire $\frac{a}{b}$ ou $\frac{r}{q}$, ſi l'on veut un terme (t) qui ſoit autant éloigné du premier (a) non compris, que le nombre (n) contient d'unités, il faut élever * le rapport $\frac{b}{a}$ ou $\frac{q}{r}$ à la puiſſance (n), & multiplier $\frac{b^n}{a^n}$ ou $\frac{q^n}{r^n}$ par le premier terme (a), & $\frac{ab^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^{n-1}}$; comme auſſi $\frac{aq^n}{r^n}$ ſera le terme (t) que l'on cherche. Si l'on veut celui qui eſt également éloigné du côté oppoſé, on trouvera $\frac{a^{n+1}}{b^n}$, ou bien encore $\frac{ar^n}{q^n}$ pour le terme (t) que l'on cherche. * 525.

Si le premier terme (a) eſt l'unité, il ſuffit d'élever le ſecond terme, qui eſt (b) ou q, à la puiſſance (n), & l'on aura b^n ou $q^n = t$. Si l'on veut le terme (t) qui eſt de l'autre côté également éloigné du premier (1), on trouvera $\frac{1}{b^n} = b^{-n}$, ou

$\frac{1}{q^n} = q^{-n}$; ce qui est évident en substituant l'unité à la place de a.

VI.

538. D'où l'on voit que le rapport commun $\frac{b}{a}$ ou $\frac{q}{r}$, qui regne dans la progression géométrique, tient lieu de la différence d qui regne dans la progression arithmétique. Mais dans la progression arithmétique pour avoir un terme t autant éloigné du premier a non compris, que le nombre n contient d'unités, il ne faut que multiplier d par n, & ajoûter le terme a au produit nd, ou retrancher nd de a; ce qui donnera $a \pm nd = t$; ou quand le premier terme est zéro, $\pm nd = t$: dans la progression géométrique il faut élever le rapport commun $\frac{b}{a}$ ou $\frac{q}{r}$ à la puissance (n), & multiplier $\frac{b^n}{a^n}$ ou $\frac{q^n}{r^n}$ par le premier terme (a), ou diviser (a) par $\frac{b^n}{a^n}$ ou par $\frac{q^n}{r^n}$; ce qui donnera $\frac{a\,b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^{n-1}} = t$, ou $\frac{a\,q^n}{r^n} = t$, quand t est le terme qui est vers la droite; ou $\frac{a^{n+1}}{b^n} = t$, ou $\frac{a\,r^n}{q^n} = t$, quand t est le terme du côté opposé. Et quand a = 1, il suffit d'élever $\frac{b}{1}$ ou $\frac{q}{1}$ à la puissance (n), & l'on aura $b^n = t$, ou $q^n = t$; & quand c'est le terme t également éloigné de l'autre côté, $\frac{1}{b^n} = b^{-n} = t$, ou $\frac{1}{q^n} = q^{-n} = t$.

Ainsi la multiplication fait dans la progression arithmétique, ce que la formation des puissances fait dans la progression géométrique; parce qu'un terme quelconque t dans la premiere, n'est que l'addition de la différence d répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre des termes n, (en joignant par + ou —, nd au premier terme a quand il n'est pas zéro); & dans la seconde, le rapport d'un terme
* 397 quelconque (t) au premier (a)* étant composé d'autant de rap-
& 399. ports égaux à $\frac{b}{a}$ ou $\frac{q}{r}$ qu'il y a d'unités dans le nombre (n) qui marque l'éloignement où (t) est du premier terme (a), la multiplication de $\frac{b}{a}$ par $\frac{b}{a}$, ou de $\frac{q}{r}$ par $\frac{q}{r}$ réitérée autant de fois qu'il y a d'unités dans (n), c'est-à-dire l'élévation de $\frac{b}{a}$ ou de
* 389 $\frac{q}{r}$ à la puissance (n)* est le rapport composé $\frac{t}{a}$; ainsi $\frac{q^n}{r^n} = \frac{t}{a}$;
& 399. & en multipliant chacune de ces grandeurs égales par (a), on a le terme $t = \frac{a\,q^n}{r^n}$. Quand a = 1 (& par conséquent $r = 1$), l'on a $t = q^n$.

VII.

539. Dans la progreſſion arithmétique, le premier terme a, le terme t, & le nombre n qui marque le nombre des termes depuis a non compris, juſqu'à t compris, étant donnés, ſi l'on veut la différence commune d de la progreſſion, * il faut ôter le premier terme a du dernier t, & diviſer $t - a$ par le nombre des termes n, & * $\frac{t-a}{n} = d$; & ſi l'on ajoûte le premier terme a, le ſecond terme b ſera $\frac{t-a}{n} + a = \frac{t + \overline{n-1} \times a}{n}$. * 506. * 506.

Quand le premier terme $a = 0$, il faut ſimplement diviſer t par n, & $\frac{t}{n}$ ſera la différence d, & en même temps le ſecond terme. Ce qui eſt évident en ſubſtituant 0 à la place de a.

On doit remarquer que diviſer $t - a$ par n, ou $t + \overline{n-1} \times a$ par n, ou enfin t par n, * eſt la même choſe que de multiplier ces mêmes grandeurs par $\frac{1}{n}$; car on aura par la diviſion faite par n, & par la multiplication faite par $\frac{1}{n}$, les mêmes grandeurs $\frac{t-a}{n}$, $\frac{t + \overline{n-1} \times a}{n}$, $\frac{t}{n}$. * 498.

VIII.

540. Dans la progreſſion géométrique, le premier terme (a), un terme (t) étant donnés avec le nombre (n) qui marque combien (t) eſt éloigné de (a) non compris, ſi l'on veut, le rapport commun $\frac{q}{r}$, il faut diviſer (t) par (a), & enſuite tirer la racine (n) de $\frac{t}{a}$, & l'on aura * $\frac{q}{r} = \sqrt[n]{\frac{t}{a}}$. Et ſi l'on multiplie chacune de ces grandeurs égales par (a), on aura le ſecond terme * $b = \frac{aq}{r} = a\sqrt[n]{\frac{t}{a}} = \sqrt[n]{a^{n-1}t}$. * 526. * 526.

Lorſque $a = 1$, le rapport commun eſt $\frac{q}{1} = \sqrt[n]{\frac{t}{1}}$, & le ſecond terme $b = \frac{1q}{1} = \sqrt[n]{t}$. Ce qui eſt évident en ſubſtituant (1) à la place de (a).

IX.

541. D'où l'on voit que ce qui ſe fait dans la progreſſion géométrique par l'extraction des racines, ſe fait dans la progreſſion arithmétique par la diviſion, ou, ce qui revient au même, * par la multiplication des fractions. * 498.

La maniere dont les deux progressions géométrique & arithmétique se joignent ensemble.

THÉOREME.

542. A $\div\div$ a^0 ou bien $1 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 . a^7$, &c.

B $\div\div$ &c. $\frac{1}{a^7} . \frac{1}{a^6} . \frac{1}{a^5} . \frac{1}{a^4} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^2} . \frac{1}{a^1} . 1$ ou a^0.

TOUTES les puissances d'une même grandeur représentée par a, dont les exposans sont de suite tous les nombres entiers 1 . 2 . 3 . 4, &c. font une progression géométrique A, dont le premier terme est l'unité, & le rapport commun de deux termes consécutifs est $\frac{1}{a}$ en allant de gauche à droite, & $\frac{a}{1}$ en revenant de droite à gauche. Tous les exposans 1 . 2 . 3, &c. font une progression arithmétique, qui a pour premier terme zéro, en supposant que zéro est l'exposant de l'unité, laquelle est le premier terme de la progression géométrique; & pour mieux représenter cet exposant zéro de l'unité, on met a^0 à la place de l'unité dans la progression géométrique A. La différence commune de la progression arithmétique est 1.

543. Les mêmes puissances de a étant mises de suite pour les dénominateurs de fractions dont l'unité est le numérateur, de façon qu'elles aillent de droite à gauche depuis l'unité ou a^0, font aussi une progression géométrique B; le rapport commun de deux termes consécutifs, en allant de droite à gauche, est $\frac{a^1}{1}$, & en allant de gauche à droite ce rapport est $\frac{1}{a^1}$.

COROLLAIRE I.

544. C $\div\div$ &c. $\frac{1}{a^6} . \frac{1}{a^5} . \frac{1}{a^4} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^2} . \frac{1}{a^1} . a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6$, &c.

D $\div\div$ &c. $a^{-6} . a^{-5} . a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6$, &c.

LES deux progressions géométriques A & B étant jointes ensemble ne font qu'une même progression géométrique C; le rapport commun est $\frac{1}{a}$ en allant de gauche à droite, & $\frac{a}{1}$ en allant de droite à gauche.

DÉFINITION OU SUPPOSITION.

545. POUR joindre la progression arithmétique à la géométrique (ce qui est de grand usage dans les calculs), au lieu d'écrire les termes qui sont à la gauche de a^0 comme ils sont

dans C, on les écrit comme on les voit en D; c'est-à-dire au lieu de $\frac{1}{a^1}.\frac{1}{a^2}.\frac{1}{a^3}$, &c. on écrit a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, &c. par ce moyen les deux progressions géométrique & arithmétique sont jointes ensemble en D.

Les puissances de a sont la progression géométrique; les exposans de ces puissances de a font la progression arithmétique; l'unité ou a^0 dans la progression géométrique, est entre les puissances positives de a, & entre les puissances négatives de a; zéro dans la progression arithmétique est entre les termes positifs & entre les termes négatifs de cette progression arithmétique.

546. On pourroit aussi marquer l'union des deux progressions géométrique & arithmétique d'une maniere générale, comme on le voit en E.

E ∺ &c. $a^{-6d}.a^{-5d}.a^{-4d}.a^{-3d}.a^{-2d}.a^{-1d}.a^0.a^{1d}.a^{2d}.a^{3d}.a^{4d}.a^{5d}.a^{6d}$, &c.

La lettre d, qui est la différence de la progression arithmétique, représente telle grandeur qu'on voudra, qui est l'exposant de la puissance de a qui fait le second terme à droite d'une progression géométrique dont a^0 ou l'unité est le terme d'où commencent les termes positifs qui vont à droite, & les négatifs qui vont à gauche; le rapport commun est $\frac{1}{a^d}$ de la gauche à la droite, & $\frac{a^d}{1}$ dans le sens opposé.

COROLLAIRE II.

547. SUPPOSANT que n représente, dans les deux progressions unies géométrique & arithmétique, le rang d'un terme quelconque depuis a^0 non compris; il est évident qu'en prenant ce terme quelconque, qu'on nommera T dans la progression géométrique, & le terme correspondant t dans la progression arithmétique, il y a autant de rapports composans égaux chacun au rapport commun, entre a^0 & T, que la différence est contenue de fois dans t.

Par exemple si $T = a^4$ pris dans D, * dans ce cas $n = 4$, * 544. & $t = 4$; la différence 1 est 4 fois dans l'exposant 4 de a^4, & il y a quatre rapports composans égaux chacun à $\frac{1}{a^1}$ dans le rapport du terme a^0 au terme $T = a^4$; ou, si l'on veut, il y a quatre rapports égaux chacun au rapport $\frac{1}{a^1}$ interposés entre a^0 & le terme quatriéme a^4 depuis a^0 non compris.

* 546. De même dans E * le 4^e terme après a^0 est $a^{4d} = T$; l'on a $n = 4$; la différence commune de la progression arithmétique est $1d$; le rapport commun de la géométrique est $\frac{1}{a^d}$; le 4^e terme de l'arithmétique est $t = 4d$: ainsi comme $1d$ est 4 fois dans $t = 4d$, il y a de même quatre rapports égaux chacun à $\frac{1}{a^d}$ interposés entre 1 ou a^0 & a^{4d}.

COROLLAIRE III. *Supposition ou demande.*

548. DANS la progression géométrique C ou D, outre les termes qui y sont marqués, c'est-à-dire outre les puissances parfaites de a prises de suite vers la droite de a^0, & les mêmes puissances de a mises de suite vers la gauche au dénominateur d'autant de fractions dont le numérateur est l'unité; outre ces termes, dis-je, on peut concevoir entre deux termes consécutifs un nombre indéfini d'autres termes de la même progression géométrique, de maniere qu'entre deux termes consécutifs il y ait un même nombre indéfini de moyens proportionnels géométriques, sçavoir un nombre indéfini de ces moyens proportionnels entre a^0 & a^1, & entre a^0 & $\frac{1}{a^1}$; le même nombre indéfini de moyens proportionnels entre a^1 & a^2, & entre $\frac{1}{a^1}$ & $\frac{1}{a^2}$; & ainsi des autres.

On peut concevoir en même-temps dans la progression D, le même nombre indéfini de moyens proportionnels arithmétiques, dont chacun soit le correspondant du terme de la progression géométrique, qui est dans un même éloignement du terme a^0 tant vers la droite que vers la gauche, de maniere que chaque terme de la progression arithmétique soit l'exposant du terme correspondant de la géométrique.

Voici la maniere dont on le peut voir clairement. On conçoit évidemment qu'entre a^0 & a^1 il peut y avoir un
* 404. moyen géométrique proportionnel * $\sqrt[2]{a^1}$; deux moyens $\sqrt[3]{a^1}$, $\sqrt[3]{a^2}$; trois moyens $\sqrt[4]{a^1}$, $\sqrt[4]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$; quatre moyens $\sqrt[5]{a^1}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^4}$; & ainsi à l'infini.

En concevant ces mêmes moyens chacun au dénominateur d'une fraction dont le numérateur soit l'unité, on concevra clairement le même nombre indéfini de moyens proportionnels géométriques du côté de la gauche entre a^0 & $\frac{1}{a^1}$.

Par exemple $\frac{1}{\sqrt[2]{a^1}}$ eſt un moyen entre a^0 & $a^{\frac{1}{1}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{a^1}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ ſont deux moyens entre a^0 & $\frac{1}{a^1}$, & ainſi à l'infini.

Ce qu'on vient de dire pour faire voir comment on peut concevoir un nombre infini de moyens géométriques proportionnels entre a^0 & a^1, & vers la gauche entre a^0 & $\frac{1}{a^1}$, ſuffit pour faire clairement appercevoir qu'on peut concevoir le même nombre indéfini de moyens géométriques proportionnels entre a^1 & a^2, entre $\frac{1}{a^1}$ & $\frac{1}{a^2}$; entre a^2 & a^3, & entre $\frac{1}{a^2}$ & $\frac{1}{a^3}$, & ainſi à l'infini, tant vers la droite que vers la gauche de a^0.

Voici la maniere d'appercevoir clairement les moyens arithmétiques proportionnels dans la progreſſion arithmétique des expoſans qui ſont correſpondans aux moyens géométriques qu'on vient d'expliquer, & qui leur ſervent d'expoſans. Il eſt évident qu'on peut concevoir dans la progreſſion arithmétique des expoſans de la progreſſion D, * un * 507
moyen arithmétique proportionnel entre 0 & 1, qui eſt $\frac{1}{2}$; & 499.
qu'on peut concevoir deux moyens $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$; trois moyens $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$; quatre moyens $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$; & ainſi à l'infini.

Il eſt clair que les mêmes moyens chacun avec le ſigne — feront le même nombre indéfini de moyens arithmétiques proportionnels à la gauche de zéro dans la progreſſion des expoſans de D entre 0 & — 1. Car * $\div\ 0 . -\frac{1}{2} . -\frac{2}{2} = -1$; *485.
$\div\ 0 . -\frac{1}{3} . -\frac{2}{3} . -\frac{3}{3} = -1$; $\div\ 0 . -\frac{1}{4} . -\frac{2}{4} . -\frac{3}{4} . -\frac{4}{4} = -1$, &c. On peut donc concevoir le même nombre indéfini de moyens arithmétiques proportionnels entre 0 & 1, qu'entre 0 & — 1, & de même entre 1 & 2, — 1 & — 2; entre 2 & 3, — 2 & — 3; & ainſi à l'infini.

Ce qu'on vient de faire voir ſur la maniere de concevoir un nombre indéfini de moyens arithmétiques proportionnels entre les expoſans 0 & 1, 0 & — 1, égal au nombre indéfini de moyens géométriques proportionnels entre a^0 & a^1, a^0 & $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$, & de même entre deux autres termes conſécutifs de D, ſuffit pour faire appercevoir clairement qu'on peut concevoir dans la progreſſion arithmétique des expoſans de D, un nombre indéfini de termes correſpondans au nombre indéfini de termes de la progression géométrique; & que chacun des termes de la progression arithmétique est l'exposant du terme correspondant de la géométrique.

On peut aisément appliquer à la progression générale E, tout ce qu'on vient de faire voir sur la progression D.

Pour faire voir plus distinctement aux Commençans ce qu'on vient de dire, on a mis ici la progression géométrique F, dans laquelle ils verront entre les termes de la progression géométrique C, trois autres termes moyens proportionnels géométriques, c'est-à-dire trois termes dans F, entre deux termes consécutifs de C, & cela suffira pour leur faire appercevoir qu'on y en peut concevoir un nombre infini au lieu de trois.

Ils verront dans G les deux progressions géométrique & arithmétique jointes ensemble; la géométrique est celle des puissances & des racines de a, & l'arithmétique est celle des termes arithmétiques qui sont les exposans des termes géométriques; & quoiqu'il n'y ait que trois moyens dans G entre deux termes consécutifs de D, cela suffit pour leur faire concevoir les autres qu'on y peut supposer.

$$\text{F} \div \&c.\ \frac{1}{\sqrt[4]{a^9}} . \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^8}} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^6}} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{1}{a^1} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^2}} . \frac{1}{\sqrt[4]{a^1}} . 1 =$$

$$a^0 . \sqrt[4]{a^1} . \sqrt[4]{a^2} . \sqrt[4]{a^3} . \sqrt[4]{a^4} = a^1 . \sqrt[4]{a^5} . \sqrt[4]{a^6} . \sqrt[4]{a^7} . \sqrt[4]{a^8} = a^2 . \sqrt[4]{a^9}, \&c.$$

$$\text{G} \div \&c.\ a^{-\frac{9}{4}} . a^{-2} = a^{-\frac{8}{4}} . a^{-\frac{7}{4}} . a^{-\frac{6}{4}} . a^{-\frac{5}{4}} . a^{-1} = a^{-\frac{4}{4}} . a^{-\frac{3}{4}} . a^{-\frac{2}{4}} . a^{-\frac{1}{4}} . 1 =$$

$$a^0 . a^{\frac{1}{4}} . a^{\frac{2}{4}} . a^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{4}{4}} = a^1 . a^{\frac{5}{4}} . a^{\frac{6}{4}} . a^{\frac{7}{4}} . a^{\frac{8}{4}} = a^2 . a^{\frac{9}{4}}, \&c.$$

Les Commençans, après avoir étendu par l'esprit le nombre de trois moyens proportionnels marqués dans G entre deux termes consécutifs de D, à tel autre nombre qu'ils pourront imaginer de moyens proportionnels, pourront appercevoir les termes infinis de deux progressions géométrique & arithmétique jointes ensemble dans la progression H. On y suppose que $n - 1$ représente le nombre tant grand qu'on voudra des termes moyens qu'on peut concevoir entre deux termes consécutifs de D, comme entre a^0 & a^1; & ôtant $- 1$, n représente ce nombre de moyens entre a^0 & a^1, & de plus le terme a^1. On y suppose encore que p représente successivement tous les nombres entiers

1 . 2 . 3 . 4, &c. jusqu'à ce qu'on soit arrivé au nombre n, & aux nombres multiples de n; ainsi chaque terme où est p représente autant de termes moyens entre deux termes consécutifs de D, qu'il y a d'unités dans $n - 1$.

549. $H \div \&c.\ a^{-\frac{3n}{n}} = a^{-3} . a^{-\frac{2n-p}{n}} . a^{-\frac{2n}{n}} = a^{-2} . a^{-\frac{n-p}{n}} . a^{-\frac{n}{n}} =$
$a^{-1} . a^{-\frac{p}{n}} . a^{0} . a^{\frac{p}{n}} . a^{\frac{n}{n}} = a^{1} . a^{\frac{n+p}{n}} . a^{\frac{2n}{n}} = a^{2} . a^{\frac{2n+p}{n}} . a^{\frac{3n}{n}} = a^{3}, \&c.$

Explication de cette progression H. Dans cette progression, 1°. n marque tel nombre entier qu'on voudra, c'est-à-dire, l'on peut concevoir que n représente successivement tous les nombres entiers : ainsi cette progression représente toutes les progressions possibles de toutes les puissances possibles d'une grandeur quelconque représentée par a.

2°. a^{0} représente l'unité à la droite de laquelle sont de suite tous les termes de la progression qui surpassent l'unité dont les exposans sont positifs, & à la gauche de laquelle sont de suite tous les termes de la progression moindres que l'unité, dont les exposans sont négatifs. Tous les termes dont l'exposant n'a que n & les multiples $2n$, $3n$, &c. de n, au numérateur, & n au dénominateur, sont visiblement les termes de la progression D. Car $a^{\frac{n}{n}} = a^{1}$, $a^{\frac{2n}{n}} = a^{2}$, $a^{\frac{3n}{n}} = a^{3}$, &c. De même $a^{-\frac{n}{n}} = a^{-1}$, $a^{-\frac{2n}{n}} = a^{-2}$, &c.

3°. Dans la progression H, il y a entre deux termes consécutifs de la progression D, un terme interposé dans l'exposant duquel se trouve p; chacun de ces termes interposés dans l'exposant duquel se trouve p, marque tous les termes moyens proportionnels entre les deux termes consécutifs entre lesquels ce terme est interposé. Voici comment.

Il faut supposer que p représente successivement tous les nombres entiers pris de suite, 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'au nombre entier qui est égal au nombre qu'on suppose représenté par n exclusivement. Par exemple, dans la progression G, où l'on suppose $n = 4$, il faut concevoir que p représente successivement les nombres 1 . 2 . 3; & tous les termes moyens entre $a^{\frac{n}{n}} = a^{1}$, & $a^{\frac{2n}{n}} = a^{2}$, représentés par le terme moyen $a^{\frac{n+p}{n}}$, sont $a^{\frac{4+1}{4}}$, $a^{\frac{4+2}{4}}$, $a^{\frac{4+3}{4}}$, ou bien $a^{\frac{5}{4}}$, $a^{\frac{6}{4}}$, $a^{\frac{7}{4}}$. Il en eſt de même de toutes les autres progreſſions dans leſquelles *n* repréſentera un autre nombre entier quelconque au lieu de 4 qu'on vient de lui faire repréſenter.

4°. D'où l'on voit clairement qu'en ſuppoſant dans la progreſſion H, que *n* repréſente le nombre entier le plus grand, pour ainſi parler, qu'on puiſſe concevoir, chaque terme dans l'expoſant duquel eſt *p* repréſentera le plus grand nombre de moyens proportionnels, entre deux termes conſécutifs, qu'on puiſſe concevoir. Et c'eſt ce que l'on ſuppoſe dans la progreſſion H.

COROLLAIRE IV.

550. TOUTES les puiſſances poſſibles d'une grandeur quelconque repréſentée par *a*, & toutes les racines poſſibles de cette même grandeur & de ſes puiſſances, ſont contenues dans la progreſſion géométrique H qu'on vient d'expliquer, & ſe trouvent parmi ſes termes; à la droite de a^0 elles ſont au numérateur de fractions dont l'unité eſt le dénominateur; leurs expoſans, qui font une progreſſion arithmétique, ſont poſitifs; à la gauche de a^0 ces puiſſances ſont cenſées au dénominateur de fractions dont l'unité eſt le numérateur; & les expoſans, qui font une progreſſion arithmétique, ſont négatifs. Tous les nombres poſſibles, ſoit entiers, ſoit rompus, poſitifs & négatifs, ſe trouvent parmi les termes de la progreſſion arithmétique.

DÉFINITIONS.

551. TOUS les termes de la progreſſion géométrique contenue dans H qu'on vient d'expliquer, s'appellent *les puiſſances* de la grandeur repréſentée par *a*; les expoſans de chacune de ces puiſſances, qui font la progreſſion arithmétique contenue dans H, déterminent ces puiſſances, & font voir quel rang chacune occupe dans la progreſſion géométrique depuis l'unité ou a^0.

Les puiſſances dont les expoſans ſont des nombres entiers, s'appellent *parfaites* ou entieres; celles dont les expoſans ſont des nombres rompus, s'appellent *imparfaites* ou rompues; celles dont les expoſans ſont poſitifs, s'appellent *poſitives*; celles dont les expoſans ſont négatifs, s'appellent *négatives*.

REMARQUE.

552. D'où l'on voit que quand une grandeur a un exposant, cela marque qu'il faut la regarder comme uue puissance, & la concevoir dans une progression géométrique infinie H, dans laquelle la grandeur proposée est représentée par a, & son exposant marque le quantiéme terme, elle est de cette progression, en comptant depuis l'unité vers la droite quand l'exposant est positif; & vers la gauche quand il est négatif.

Quand l'exposant est un nombre rompu comme $a^{\frac{3}{4}}$, ou en général $a^{\frac{p}{q}}$, si on veut rapporter cette puissance aux expressions incommensurables par le signe $\sqrt{}$, le dénominateur de l'exposant marque l'exposant du signe $\sqrt{}$, & le numérateur marque l'exposant de la puissance de la grandeur qui est sous le signe. Ainsi $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

COROLLAIRE V.

553. DANS la progression H on doit entendre que le terme le plus proche de l'unité ou de a^0 dans la progression géométrique, est une grandeur qui ne surpasse l'unité que d'une grandeur la plus petite qu'on puisse concevoir, de maniere que le rapport de l'unité à ce terme qui la suit, ne differe presque point du rapport d'égalité. Ce rapport si peu différent du rapport d'égalité, est le rapport commun qui regne dans la progression géométrique; & l'éloignement où est un terme quelconque T dans la progression géométrique, de l'origine a^0 ou 1, se compte par le nombre des petits rapports égaux au rapport commun qui sont interposés entre a^0 & T. S'il y a, par exemple, 100 de ces petits rapports égaux interposés entre a^0 & T, le terme T est le centiéme après a^0.

Dans la progression arithmétique des exposans, le terme qui suit zéro, & qui est l'exposant du terme correspondant qui suit a^0 dans la progression géométrique, est aussi une grandeur la plus petite qu'on puisse concevoir; & c'est la différence qui regne dans la progression arithmétique des exposans. Un terme quelconque t de la progression arithmétique des exposans correspondant au terme T de la progresſion géométrique, contient autant de fois la différence commune qu'il y a de petits rapports égaux interpoſés entre a^0 & T dans la progreſſion géométrique.

Ce Corollaire eſt évident par l'explication de la progreſſion H. On ne le doit entendre que de la progreſſion H complette, c'eſt-à-dire lorſqu'on conçoit qu'elle contient tous ſes termes. Car les termes entre leſquels il y a un même
*398. nombre de termes interpoſés, * faiſant auſſi une progreſſion, quand on prend une de ces progreſſions particulieres, comme D, ou comme G dans la générale, & que a^0 eſt l'un de ſes termes, le rapport commun de cette progreſſion particuliere eſt celui de a^0 au terme qui le ſuit, & la différence commune de la progreſſion arithmétique des expoſans des termes de cette progreſſion géométrique particuliere, eſt le terme ou l'expoſant qui ſuit zéro.

COROLLAIRE VI.

554. IL ſuit du Corollaire précédent, que deux termes quelconques, qu'on nommera T & L, étant pris dans la progreſſion géométrique H, & leurs deux termes correſpondans t & l étant pris dans la progreſſion arithmétique H; le nombre des petits rapports égaux interpoſés entre a^0 ou 1 & T, qu'on nommera N, eſt au nombre des petits rapports égaux interpoſés entre a^0 ou 1 & L qu'on nommera n, comme t eſt à l. Car nommant d la différence qui regne dans la pro-
*495. greſſion arithmétique, il eſt évident * que $t = \mathrm{N}d$, & $l = nd$. Or $\frac{\mathrm{N}}{n} = \frac{\mathrm{N}d}{nd}$. Par conſéquent $\frac{\mathrm{N}}{n} = \frac{t}{l}$.

COROLLAIRE VII.

555. ON ne ſçauroit prendre dans la progreſſion géométrique H quatre termes ſoit proches, ſoit éloignés les uns des autres, qui faſſent entr'eux une proportion géométrique, que leurs quatre expoſans dans la progreſſion arithmétique ne faſſent une proportion arithmétique.

On ne ſçauroit prendre dans la progreſſion géométrique pluſieurs termes ſoit de ſuite, ſoit éloignés les uns des autres, qui faſſent entr'eux une progreſſion géométrique, que les expoſans de ces termes, pris dans le même ordre, ne faſſent auſſi entr'eux une progreſſion arithmétique.

On ne ſçauroit prendre auſſi dans la progreſſion arithmé-

tique H quatre termes ſoit proches, ſoit éloignés les uns des autres, qui faſſent une proportion arithmétique; ni pluſieurs termes ſoit proches, ſoit éloignés les uns des autres, qui faſſent une progreſſion arithmétique; que les termes correſpondans de la progreſſion géométrique H pris dans le même ordre, ne faſſent auſſi une proportion ou une progreſſion géometrique. Car les termes pris de la progreſſion géométrique ne ſçauroient faire une proportion ou une progreſſion géometrique, qu'il n'y ait entre les termes de cette proportion ou progreſſion, qui font des rapports égaux, * le * 397.
même nombre de petits rapports égaux au rapport commun; ce qui doit faire que les expoſans de ces mêmes termes, pris dans le même ordre, ſe ſurpaſſeront d'un même nombre de différences égales chacune à la différence commune. Par conſéquent les expoſans feront auſſi une proportion ou une progreſſion arithmétique. D'où il eſt évident que ſi les expoſans font auſſi une proportion ou une progreſſion arithmétique, les termes correſpondans pris dans le même ordre, feront une proportion ou une progreſſion géométrique.

COROLLAIRE VIII.

556. UNE même grandeur, telle qu'elle puiſſe être, repréſentée par a, élevée à une puiſſance quelconque, ne change point de valeur lorſqu'on lui donne des expoſans différens qui ſont tous équivalens.

Par exemple $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{4}{8}}$; en général $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1 \times n}{2 \times n}}$ en ſuppoſant que n repréſente un nombre quelconque. De même $a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{2 \times 5}{2 \times 4}} = a^{\frac{3 \times 5}{3 \times 4}} = a^{\frac{4 \times 5}{4 \times 4}}$; en général $a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{n \times 5}{n \times 4}}$.

1°. Ce Corollaire eſt évident quand l'expoſant eſt équivalent à un nombre entier. Par exemple, il eſt clair que $a^3 = a^{\frac{6}{2}} = a^{\frac{9}{3}} = a^{\frac{12}{4}}$, & en général qu'en ſuppoſant que n & p repréſentent chacun un nombre entier quelconque, $a^{\frac{n}{1}} = a^{\frac{np}{1p}} = \sqrt[p]{a^{np}}$.

2°. Quand l'expoſant donné eſt une fraction, il faut la réduire aux moindres termes; & il eſt clair après cela qu'en écrivant 0, & de ſuite les fractions dont les numérateurs ſeront les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. & dont le dénominateur commun ſera celui de l'expoſant réduit aux moindres termes, on aura une progreſſion arithmétique. Par exemple, ſi l'expoſant réduit aux moindres termes eſt $\frac{5}{4}$, on aura la progreſſion arithmétique K $\div 0 . \frac{1}{4} . \frac{2}{4} . \frac{3}{4} . \frac{4}{4} = 1 . \frac{5}{4} . \frac{6}{4} . \frac{7}{4} . \frac{8}{4} = 2$. Elle ſuffit pour faire concevoir que c'eſt la même choſe de tous les expoſans rompus.

Dans cette progreſſion arithmétique, l'expoſant donné eſt parmi les moyens entre 0 & le nombre entier le plus proche en deſſus de l'expoſant qui eſt ici $\frac{8}{4} = 2$. Le rang qu'occupe l'expoſant $\frac{5}{4}$ dans cette progreſſion arithmétique, eſt marqué par le nombre des unités du numérateur, c'eſt-à-dire le numérateur 5 marque que l'expoſant eſt le 5^e^ moyen proportionnel arithmétique entre 0 & $\frac{8}{4} = 2$. Le nombre des moyens de cette progreſſion arithmétique entre 0 & le nombre entier le plus proche en deſſus de l'expoſant qui eſt ici 2, eſt toujours égal au produit du dénominateur de l'expoſant donné (lequel dénominateur eſt ici 4) par le nombre entier le plus proche en deſſus, en diminuant ce produit d'une unité. (Dans cet exemple le nombre des moyens entre 0 & 2 eſt $4 \times 2 = 8$, en diminuant 8 d'une unité; c'eſt-à-dire il y a 7 moyens entre 0 & 2).

Les termes de la progreſſion géométrique H, correſpondans aux termes de la progreſſion arithmétique K dont
*555. on vient de parler, * font auſſi une progreſſion géométrique d'un même nombre de termes; le 1^er^ eſt 1 ou a^0; le dernier eſt $a^{\frac{8}{4} = 2}$. Il y a le même nombre de moyens géométriques entre ces deux extrêmes, qu'entre les extrêmes 0 & $\frac{8}{4} = 2$ de l'arithmétique; & le rang qu'occupe le moyen géométrique, qui a pour expoſant l'expoſant donné dans notre Exemple $a^{\frac{5}{4}}$, eſt auſſi le 5^e^ après a^0. Cette progreſſion géométrique jointe à l'arithmétique K, eſt

$$L \div\!\!\div a^0 . a^{\frac{1}{4}} . a^{\frac{2}{4}} . a^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{4}{4}} = a^1 . a^{\frac{5}{4}} . a^{\frac{6}{4}} . a^{\frac{7}{4}} . a^{\frac{8}{4}} = a^2.$$

Qu'on multiplie à préſent les deux termes de l'expoſant propoſé, qui eſt ici $\frac{5}{4}$, par un même nombre entier, tel qu'on voudra, qu'on nommera n, (ce qui donnera à l'expoſant toutes les expreſſions équivalentes qu'il peut avoir) & qu'on conçoive en même-temps l'antécédent & le conſéquent de chaque autre terme de la progression arithmétique multipliés par n, on aura $M \div a^0 . a^{\frac{1n}{4n}} . a^{\frac{2n}{4n}} . a^{\frac{3n}{4n}} . a^{\frac{4n}{4n}} = a^1 . a^{\frac{5n}{4n}} . a^{\frac{6n}{4n}} . a^{\frac{7n}{4n}} . a^{\frac{8n}{4n}} = a^2$.

Il est clair que la progression arithmétique dans M demeure la même que dans L, les termes de L conservant chacun la même valeur dans les termes correspondans de M, & l'exposant préposé devenu $\frac{5n}{4n}$ demeure le 5^e de sept moyens arithmétiques entre les mêmes extrêmes 0 & $\frac{8n}{4n} = 2$.

Les extrêmes a^0 ou 1 & $a^{\frac{8n}{4n}} = a^2$ de la progression géométrique dans M, sont aussi les mêmes que dans L; le 5^e moyen géométrique $a^{\frac{5n}{4n}}$ dans M est * donc le même *408. que le 5^e $a^{\frac{5}{4}}$ dans L.

Par conséquent toutes les expressions équivalentes d'un exposant ne changent point la valeur de la puissance dont il est l'exposant.

COROLLAIRE IX.

557. Il est évident qu'entre les puissances d'une même grandeur a qui surpasse l'unité, la puissance dont l'exposant est plus grand surpasse la puissance dont l'exposant est moindre. Car la puissance dont l'exposant est plus grand, est un terme de la progression géométrique H plus reculé de l'unité ou a^0, que n'est pas la puissance dont l'exposant est moindre; & il est clair que la progression géométrique va en augmentant quand le terme qui suit l'unité est plus grand que l'unité.

REMARQUE.

558. Quand une puissance a un exposant incommensurable, comme $a^{\sqrt{3}}$, & en général $a^{\sqrt[p]{\frac{m}{n}}}$, (ce qui arrive quelquefois dans la géométrie des courbes méchaniques, comme on le peut voir dans l'Analyse Démontrée, page 862, Remarque 5^e), on peut la concevoir cette puissance parmi les termes de la progression générale H, c'est-à-dire on peut concevoir cette puissance parmi les termes de la progression géométrique H, & la grandeur incommensurable, qui est l'exposant de cette puissance, parmi les termes de la progression arith-

métique H. Voici comment. La grandeur incommensurable, qui est l'exposant de cette puissance, qu'on nommera j, & la puissance a^j, cette incommensurable, dis-je, est une véritable grandeur, & elle ne differe d'un nombre qu'en ce qu'elle ne contient pas exactement l'unité comme les nombres entiers, ni une partie aliquote de l'unité comme les nombres rompus. Mais en concevant l'unité divisée en un très-grand nombre de petites parties égales ou d'aliquotes, l'incommensurable j en contiendra un certain nombre avec un petit reste moindre qu'une de ces aliquotes. Nommant r ce petit reste, & s la petite grandeur qui manque à ce reste r pour être égal à l'une de ces petites aliquotes de l'unité, $r + s$ sera une de ces petites aliquotes, & $j - r$ sera le nombre exact immédiatement plus petit que l'incommensurable j, & $j + s$ sera le nombre exact immédiatement plus grand que j; de sorte qu'on pourra concevoir l'incommensurable j comme située entre les nombres $j - r$, & $j + s$.

Il est évident qu'en concevant l'unité partagée en aliquotes plus petites que les précédentes, le reste r, dont l'incommensurable j surpasse le nombre en dessous $j - r$, deviendra plus petit; le nombre en dessous $j - r$ augmentera & s'approchera davantage de l'incommensurable j, & le nombre en dessus $j + s$ diminuera en s'approchant aussi de j.

En continuant de partager par l'esprit ces dernieres aliquotes de l'unité de plus petites en plus petites, le nombre en dessous $j - r$ deviendra de plus grand en plus grand, & s'approchera toujours de plus en plus de l'incommensurable j; & le nombre en dessus $j + s$ diminuera toujours, & s'approchera de plus en plus de j; si bien qu'après des partages infinis, c'est-à-dire en concevant l'unité divisée en un nombre infini de petites parties égales ou d'aliquotes, on apperçoit clairement que le nombre en dessous $j - r$, & le nombre en dessus $j + s$ se réuniront en la grandeur j; & ces nombres étant conçus comme tous les autres nombres compris dans la progression arithmétique des exposans de H, on peut aussi concevoir que l'incommensurable j y est comprise.

D'où il suit qu'on peut concevoir la puissance a^j qui a pour exposant l'incommensurable j, comprise parmi les termes de la progression géométrique H.

Usage

Usage de l'union des deux progressions géométrique & arithmétique dans les calculs.

Le calcul général des puissances d'une même grandeur par le moyen des exposans.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

559. LORSQU'UNE grandeur est donnée, par exemple a; & que l'exposant de la puissance à laquelle on la veut élever est connu, par exemple n, il n'y a qu'à écrire l'exposant donné au-dessus de a vers la droite, & a^n est la puissance qu'on demande.

LA MULTIPLICATION.

560. POUR multiplier les puissances d'une même grandeur les unes par les autres, il faut ajoûter les exposans de ces puissances, & écrire leur somme pour l'exposant de la grandeur, & ce sera le produit que l'on cherche.

Pour multiplier a^3 par a^5, il faut ajoûter les exposans 3 & 5; & écrire a^8 pour le produit de a^3 par a^5.

De même le produit de $a^{\frac{1}{3}}$ par $a^{\frac{1}{2}}$ est $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$.

Le produit de a^3 par a^{-2} est $a^{3-2} = a^1$.

Le produit de a^4 par $a^{-\frac{1}{2}}$ est $a^{4-\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$.

Le produit de a^5 par $a^{\frac{1}{3}}$ est $a^{5+\frac{1}{3}} = a^{\frac{16}{3}}$.

Le produit de $a^{-\frac{2}{3}}$ par $a^{-\frac{4}{5}}$ est $a^{-\frac{22}{15}}$.

Le produit de $a^{\frac{n}{p}}$ par a^q est $a^{\frac{n}{p}+q} = a^{\frac{n+pq}{q}}$.

Le produit de a^n par $a^{\frac{1}{2}}$ est $a^{n+\frac{1}{2}} = a^{\frac{2n+1}{2}}$.

Le produit de $\overline{a+b}^{n}$ par $\overline{a+b}^{-p}$ est $\overline{a+b}^{n-p}$.

Le produit de $a^{\frac{n}{p}}$ par $a^{\pm\frac{q}{r}}$ est $a^{\frac{n}{p}\pm\frac{q}{r}} = a^{\frac{nr\pm pq}{pr}}$.

LA DIVISION.

561. POUR diviser la puissance quelconque d'une grandeur par telle puissance qu'on voudra de la même grandeur, il faut retrancher l'exposant du diviseur de l'exposant du di-

vidende, écrire le reste pour l'exposant de la grandeur, & ce sera le quotient.

Ainsi le quotient de a^4 divisée par a^2 est $a^{4-2} = a^2$.

Le quotient de a^4 divisée par a^{-3} est $a^{4+3} = a^7$.

Le quotient de a^4 divisée par $a^{\frac{1}{2}}$ est $a^{4-\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{2}}$.

Le quotient de a^3 divisée par $a^{-\frac{3}{4}}$ est $a^{3+\frac{3}{4}} = a^{\frac{15}{4}}$.

Le quotient de $a^{-\frac{1}{2}}$ divisée par $a^{-\frac{2}{3}}$ est $a^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{6}}$.

Le quotient de a^n divisée par a^p est a^{n-p}.

Le quotient de $\overline{a+b}^{n}$ divisée par $\overline{a+b}^{\frac{1}{p}}$ est $\overline{a+b}^{n-\frac{1}{p}} = \overline{a+b}^{\frac{np-1}{p}}$.

Le quotient de $a^{\frac{1}{n}}$ divisée par $a^{-\frac{1}{3n}}$ est $a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{3n}} = a^{\frac{4}{3n}}$.

Le quotient de $a^{-\frac{n}{p}}$ divisée par $a^{\frac{p}{q}}$ est $a^{-\frac{n}{p}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{-nq-p^2}{pq}}$.

La formation des puissances, ou la maniere d'élever une puissance donnée à une puissance quelconque dont l'exposant est donné, & en même-temps l'extraction de la racine quelconque d'une puissance proposée telle qu'elle puisse être.

562. POUR élever une puissance donnée à une puissance quelconque dont l'exposant est donné, qui peut être un nombre entier positif ou négatif, ou bien un nombre rompu positif ou négatif dont le numérateur est l'unité; il faut multiplier l'exposant de la puissance proposée par l'exposant donné, & écrire le produit des deux exposans pour l'exposant de la grandeur, & ce sera la puissance qu'on demande.

On remarquera qu'élever une puissance quelconque à la puissance dont l'exposant donné est un nombre rompu, qui a
* 417. l'unité pour numérateur, c'est la même chose * qu'en extraire la racine dont le signe radical $\sqrt{}$ auroit pour exposant le dénominateur du nombre rompu, qui est l'exposant donné. Par exemple, élever a^2 à la puissance $\frac{1}{3}$, c'est la même chose qu'extraire la racine 3ᵉ marquée par $\sqrt[3]{}$, de a^2.

Pour élever a^2 à la puissance dont l'exposant est $+3$, il faut multiplier 2 par 3, & écrire $a^{2\times 3} = a^6$ pour la puissance qu'on cherche.

Ainsi a^2 élevée à la puissance -3 est $a^{2\times -3} = a^{-6}$.

a^{-2} élevée à la puissance -3 est $a^{-2\times -3} = a^{+6}$.

$a^{\frac{1}{2}}$ élevée à la puiſſance $+ 4$ eſt $a^{\frac{1}{2} \times 4} = a^2$.

$a^{-\frac{1}{3}}$ élevée à la puiſſance $+ 2$ eſt $a^{-\frac{1}{3} \times 2} = a^{-\frac{2}{3}}$.

$a^{-\frac{1}{4}}$ élevée à la puiſſance $- \frac{1}{3}$ eſt $a^{-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{3}} = a^{+\frac{1}{12}}$.

$a^{-\frac{3}{4}}$ élevée à la puiſſance $+ \frac{1}{2}$ eſt $a^{-\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}} = a^{-\frac{3}{8}}$.

$a^{\frac{2}{3}}$ élevée à la puiſſance $+ \frac{1}{4}$ eſt $a^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{12}} = a^{\frac{1}{6}}$.

$a^{\frac{2}{3}}$ élevée à la puiſſance $- \frac{1}{2}$ eſt $a^{\frac{2}{3} \times -\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{3}}$.

a^{n} élevée à la puiſſance p eſt a^{np}.

a^{n} élevée à la puiſſance $- p$ eſt a^{-np}.

a^{-n} élevée à la puiſſance $- p$ eſt a^{+np}.

$a^{\frac{1}{m-n}}$ élevée à la puiſſance p eſt $a^{\frac{p}{m-n}}$.

$a^{\frac{1}{n}}$ élevée à la puiſſance $\pm \frac{1}{p}$ eſt $a^{\pm \frac{1}{np}}$.

$a^{\frac{2}{3}}$ élevée à la puiſſance $\pm n$ eſt $a^{\pm \frac{2n}{3}}$.

$a^{\pm n}$ élevée à la puiſſance $- \frac{2}{3}$ eſt $a^{\mp \frac{2n}{3}}$.

$a^{-\frac{m}{n}}$ élevée à la puiſſance $1 - \frac{1}{p}$ eſt $a^{-\frac{m}{n} \times \overline{1 - \frac{1}{p}}} = a^{-\frac{m}{n} + \frac{m}{np}}$.

Démonſtration des trois Regles ou Opérations qui précédent.

563. DANS la multiplication & dans la diviſion d'une puiſſance donnée par une autre puiſſance donnée de la même grandeur, * il y a une proportion géométrique : dans la pre- * 72 &
miere, l'unité eſt le premier terme, les deux puiſſances don- 106.
nées le ſecond & le troiſiéme termes, & le produit qu'on cherche eſt le 4e : dans la ſeconde, l'unité eſt le 4e terme; le dividende eſt le premier terme; le diviſeur, le ſecond; le quotient, le 3e. Les expoſans des termes de la proportion géométrique, pris dans le même ordre, * font auſſi une * 555.
proportion arithmétique : zéro eſt le premier terme dans la multiplication, & le dernier dans la diviſion. Par conſéquent * la ſomme des deux expoſans dans la multiplication * 490.
eſt l'expoſant du produit de la multiplication, & ce qui reſte après avoir retranché l'expoſant du diviſeur de l'expoſant du dividende, * eſt l'expoſant du quotient. * 490.

Dans l'élévation (pour ainſi dire) d'une puiſſance donnée

à une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt donné, &
* 155 eſt un nombre entier poſitif ou négatif, il y a * une progreſ-
& 157. ſion géométrique dont l'unité eſt le premier terme; la puiſ-
ſance donnée à élever, le ſecond terme; & la puiſſance pro-
poſée étant élevée à la puiſſance dont l'expoſant eſt le nom-
bre donné, doit être le terme autant éloigné de l'unité ou a^0
qu'il y a d'unités dans l'expoſant donné. Par exemple ſi on
veut élever a^2 à la puiſſance 3, on aura la progreſſion géomé-
trique $\div 1$ ou $a^0 . a^{2\times1} . a^{2\times2} . a^{2\times3} = a^6$; & les deux pre-
miers termes étant connus, on cherche le dernier terme a^6,
qui eſt le 3^e de la progreſſion géométrique après l'unité.

Lorſque l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut éle-
ver la puiſſance donnée eſt un nombre rompu dont le numé-
rateur eſt l'unité, il y a de même une progreſſion géométri-
* 156 que. * Par exemple, ſi l'on veut élever a^2 à la puiſſance $\frac{1}{3}$,
& 158. on doit concevoir la progreſſion $\div 1$ ou $a^0 . a^{\frac{2\times1}{3}} . a^{\frac{2\times2}{3}}$
$. a^{\frac{2\times3}{3}} = a^2$.

Dans cette progreſſion a^0 où l'unité eſt le premier terme;
la puiſſance donnée a^2 eſt le dernier terme autant éloigné
du premier a^0 qu'il y a d'unités dans le dénominateur 3 de
l'expoſant donné $\frac{1}{3}$, ces deux termes ſont donnés, & l'on
cherche le terme $a^{\frac{1\times2}{3}}$ le plus proche de a^0, qui eſt le pre-
mier d'autant de moyens proportionnels entre l'unité & la
puiſſance donnée a^2 qu'il y a d'unités moins une dans le dé-
nominateur 3 de l'expoſant donné: d'où l'on voit que le ter-
* 156 me que l'on cherche * eſt la racine de la puiſſance donnée,
& 158. & que le dénominateur 3 eſt l'expoſant de la racine.

Les expoſans des termes de chacune de ces progreſſions
*555. géométriques, * font une progreſſion arithmétique, (o) eſt le
premier terme de chacune, & l'expoſant 2 de la puiſſance
donnée eſt le terme le plus proche de zéro dans la premie-
re, le plus éloigné dans la ſeconde, & ces deux termes ſont
connus; l'expoſant donné 3 dans la premiere, & le dénomi-
nateur 3 de l'expoſant donné $\frac{1}{3}$ dans la ſeconde, marquent
combien il doit y avoir de termes dans la progreſſion arith-
métique après zéro. Ainſi on ſçait que le terme (c'eſt-à-dire
l'expoſant) qu'on cherche, eſt dans le premier cas le 3^e après
zéro, & qu'il eſt dans le ſecond cas le premier des trois ter-

mes après zéro qui doivent être dans la seconde progression arithmétique ; c'est pourquoi pour avoir l'exposant qu'on cherche dans le premier cas, * il faut multiplier l'exposant * 496.
donné 2 de la puissance donnée a^2 par le nombre des termes après zéro qui est 3 ; & dans le second cas, * il faut diviser * 497.
l'exposant 2 de la puissance donnée par le dénominateur 3 de l'exposant donné $\frac{1}{3}$. Mais diviser une grandeur 2 par le dénominateur d'une fraction $\frac{1}{3}$ dont le numérateur est l'unité, * est la même chose que de multiplier cette grandeur par * 498.
la fraction même $\frac{1}{3}$. Car $1 . \frac{1}{3} :: 2 . \frac{2}{3}$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{3}$ est le tiers de 1, $\frac{2}{3}$ est le tiers de 2. Par conséquent dans l'un & l'autre cas, c'est-à-dire pour élever une puissance donnée à la puissance dont l'exposant donné est un nombre entier ou rompu qui a l'unité pour numérateur, il faut prendre le produit de l'exposant 2 de la puissance donnée par l'exposant donné 3 ou $\frac{1}{3}$, pour l'exposant de la puissance qu'on cherche.

Elever une puissance donnée quelconque à une puissance dont l'exposant est donné, & est un nombre rompu tel qu'il puisse être dont le numérateur est un nombre différent de l'unité.

564. Il faut, comme dans la troisiéme opération précédente, multiplier l'exposant de la puissance donnée par l'exposant donné, & écrire le produit pour l'exposant de la grandeur, & ce sera la puissance qu'on cherche.

On n'a séparé cette 4e opération de la 3e dont elle n'est qu'un cas, que pour débarrasser la démonstration des trois premieres opérations, qui auroit été un peu plus difficile pour les Commençans.

Pour élever $a^{\frac{2}{3}}$ à la puissance $\frac{3}{4}$, il faut multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$, & le produit sera $\frac{6}{12}$. Il faut écrire $a^{\frac{6}{12}} = a^{\frac{1}{2}}$ pour la puissance qu'on demande.

De même a^2 élevée à la puissance $\frac{3}{4}$ est $a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{3}{2}}$.

a^n élevée à la puissance $\frac{p}{q}$ est $a^{\frac{np}{q}}$.

$a^{\frac{n}{m}}$ élevée à la puissance $-\frac{p}{q}$ est $a^{-\frac{np}{mq}}$.

565. *Démonstration.* Quand on veut élever une puissance donnée, comme $a^{\frac{2}{3}}$, à une puissance dont l'exposant donné est

une fraction $\frac{3}{4}$ qui a un numérateur différent de l'unité, on doit concevoir une progression géométrique $\div$ 1 ou $a^0 . a^{\frac{2\times 1}{3\times 4}} . a^{\frac{2\times 2}{3\times 4}} . a^{\frac{2\times 3}{3\times 4}} . a^{\frac{2\times 4}{3\times 4}} = a^{\frac{2}{3}}$, dont 1 ou a^0 est le premier terme, le dénominateur 4 de l'exposant donné $\frac{3}{4}$, marque que la puissance donnée $a^{\frac{2}{3}}$ est le 4^e^ terme après a^0 ou l'unité de cette progression; & le numérateur 3 de l'exposant donné $\frac{3}{4}$ marque que le terme qu'on cherche en est le 3^e^ terme. Dans cette progression géométrique, l'unité, le terme 4^e^ marqué par le dénominateur 4 de $\frac{3}{4}$, qui est la puissance donnée $a^{\frac{2}{3}}$, sont connus; le premier terme après a^0, ou le plus proche de l'unité, est aussi connu *par l'art.* 562, c'est $a^{\frac{2\times 1}{3\times 4}}$; & il faut trouver le terme de cette progression géométrique autant éloigné de a^0 que le numérateur 3 de l'exposant donné $\frac{3}{4}$ contient d'unités, c'est-à-dire le 3^e^ terme.

Les exposans des termes de la progression géométrique supposée font aussi une progression arithmétique $0 . \frac{2\times 1}{3\times 4} . \frac{2\times 2}{3\times 4} . \frac{2\times 3}{3\times 4} . \frac{2\times 4}{3\times 4} = \frac{2}{3}$, laquelle commence à zéro; le 4^e^ terme $\frac{2}{3}$ en est connu; ainsi le premier terme après zéro en est aussi connu *par l'art.* 562, & c'est $\frac{2\times 1}{3\times 4}$; il en faut trouver le
*496. troisiéme terme. Il est évident * qu'il ne faut que multiplier le premier terme $\frac{2\times 1}{3\times 4}$ par le nombre 3 qui marque le rang après zéro du terme qu'on cherche. Or il est clair que multiplier $\frac{2\times 1}{3\times 4}$ par 3 est la même chose que de multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$. Ainsi pour avoir l'exposant qu'on cherche, il faut multiplier l'exposant $\frac{2}{3}$ de la puissance donnée $a^{\frac{2}{3}}$ par l'exposant donné $\frac{3}{4}$ de la puissance à laquelle on veut élever la puissance donnée.

REMARQUE I.

Sur les signes + & — des puissances par les exposans.

566. LE calcul des puissances par le moyen des exposans ne se fait, comme on l'a vû dans les quatre opérations précédentes, que sur les termes de la progression arithmétique formée des exposans, & unie à la progression géométrique des

puiſſances ; c'eſt ce qui rend ce calcul ſi ſimple & ſi aiſé.

Or quand quatre termes d'une progreſſion arithmétique ſont une proportion arithmétique dont zéro eſt le premier ou le dernier terme, & que le ſecond & le 3e termes ſont connus dans le premier cas ; que le premier & le ſecond termes ſont connus dans le ſecond cas ; il eſt évident * que l'addition dans le premier cas, & la ſouſtraction dans le ſecond cas, faites ſelon les regles ordinaires, font découvrir le terme qu'on cherche. C'eſt pourquoi dans ces opérations les regles des ſignes + & — * de l'addition & de la ſouſtraction ordinaires font connoître le ſigne + ou — du terme que l'on cherche. *490. *26 & 27.

Lorſque dans une progreſſion arithmétique qui a zéro & l'unité parmi ſes termes, on connoît un terme quelconque, & en même-temps en quel rang il eſt depuis zéro, ou le quantiéme il eſt depuis zéro non compris, ſoit vers la droite s'il eſt poſitif, ſoit vers la gauche s'il eſt négatif ; on trouve, comme on l'a fait voir, * le premier terme ou le plus proche de zéro (qui eſt la différence commune de la progreſſion arithmétique) en multipliant le terme t par la fraction qui a pour numérateur l'unité, & pour dénominateur le nombre des termes, qu'on nommera n, depuis zéro juſqu'au terme t compris. *563, vers la fin.

Quand le premier terme après zéro (qui eſt la différence commune) eſt connu, on trouve tel autre terme qu'on veut dont on ſçait le rang après zéro, * en multipliant ce premier terme par le nombre qui marque le rang du terme qu'on cherche depuis zéro. *564.

Ces multiplications ne différent pas des multiplications ordinaires ; * l'unité y eſt au multiplicateur, comme le multiplié au produit. Ainſi la regle des ſignes + & — eſt la même que * celle de la multiplication ordinaire. Par conſéquent s'il ſe trouve par la regle * que le produit ait le ſigne +, il eſt parmi les termes poſitifs de la progreſſion arithmétique ; s'il a —, il eſt parmi les négatifs. *72. *95. *95.

REMARQUE II.

567. ON a pris pour les exemples du calcul des puiſſances par le moyen de leurs expoſans, des grandeurs incomplexes, afin que l'attention des Commençans fût toute entiere aux

regles & aux démonstrations de ces calculs. Mais quand ils les auront conçues clairement, & qu'ils se seront rendu ce calcul très-familier, ils l'appliqueront sans trouver de difficulté aux grandeurs complexes d'autant de termes qu'ils voudront, & aux grandeurs incomplexes de différentes dimensions, comme $a^2 b^3 c$.

REMARQUE III.

568. DANS les calculs des Mathématiques, les grandeurs élevées à des puissances se trouvent ordinairement mêlées avec d'autres grandeurs entieres & rompues; & ces puissances peuvent elles-mêmes être considérées comme entieres ou rompues, selon qu'elles se trouvent au numérateur d'une fraction dont le dénominateur n'est que l'unité, ou qu'elles sont dans le numérateur ou le dénominateur d'une fraction. On ne trouvera pas non plus de difficulté dans tous ces calculs, en observant les regles particulieres aux calculs de toutes les différentes grandeurs qui y entrent, toutes les regles de tous ces calculs ayant été expliquées & démontrées. En voici quelques Exemples pris de l'Analyse démontrée.

I. Exemple pris de l'Analyse démontrée, page 736, ligne 14.

DANS $x^{\overset{A}{\frac{m-n+1}{p+1}}} \times \overset{B}{\overline{a+bx^n}}$ il faut diviser la grandeur A par elle-même, & multiplier B par la grandeur A, on trouvera d'abord $1 \times x^{\overset{A}{\frac{m-n+1-m+n-1}{p+1}}} \times \overset{B}{\overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bn^{\overset{C}{n+\frac{m-n+1}{p+1}}}}}$; on réduira l'exposant de C au même dénominateur, ce qui changera C en $bx^{\overset{D}{\frac{pn+n+m-n+1}{p+1}}}$; & effaçant les lettres qui se détruisent dans les exposans de A, B, D, on trouvera $x^0 \times \overline{ax^{\frac{m-n+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+1}{q+1}}} \overset{D}{=} 1 \times \overline{ax^{\overset{E}{\frac{m-n+1}{p+1}}} + bx^{\overset{F}{\frac{m+np+1}{p+1}}}}$.

Supposé qu'on veuille multiplier la grandeur D par $x^{\frac{m-n+1}{p+1}}$,

&

& diviser E & F par la même grandeur, on trouvera $1\, x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times \overline{a x^{\frac{m-n+1-m+n-1}{p+1}} + b x^{\frac{m+np+1-m+n-1}{p+1}}}$, qui se réduit (à cause des lettres qui se détruisent dans les exposans) à $G . x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times \overline{a+bx^{\frac{np+1n}{p+1}}}$; & parce qu'en divisant $np+1n$ par $p+1$, le quotient est n, l'expression G se réduit enfin à $x^{\frac{m-n+1}{p+1}} \times \overline{a+bx^{n}}$.

II. Exemple pris de l'Analyse démontrée, page 471, lig. 15 & suivantes.

Il faut diviser chaque membre de l'égalité $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} r y^3 = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1} b^2 y^3 + c y^3$ par $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} \times y^3$: on trouvera d'abord $\frac{n}{n} a^{\frac{n-1-n+1}{n}} y^{\frac{n-1-n+1}{n}} r y^{3-3} = -\frac{1}{n \times n} \times \frac{n-1}{2} a^{-1 \frac{-n+1}{n} = \frac{-2n+1}{n}} b^2 y^{3-3 \frac{-n+1}{n}} + \frac{1}{n} c a^{\frac{-n+1}{n}} y^{3-3 \frac{-n+1}{n}}$, qui se réduit (à cause des lettres qui se détruisent dans les exposans) à $r = -\frac{1}{n} \times \frac{n-1}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} b^2 y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} c y^{\frac{1-n}{n}}$.

III. Exemple pris de l'Analyse démontrée, page 425, lig. 24 & les suivantes.

PREMIERE PARTIE.

Il faut substituer dans l'égalité $A \frac{n}{1} g^{n-1} y^{n-1} k = -\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times g^{n-3} y^{n-1} b^3 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} g^{n-2} y^{n-1} h i + d$, les valeurs de $g = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}}$, de $h = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b y^{\frac{1-n}{n}}$, & de $j = \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} a^{\frac{1-2n}{n}} b^2 y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} c y^{\frac{1-n}{n}}$.

1°. On élévera les grandeurs égales $g = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}}$ à la puissance $n-1$, & l'on aura $g^{n-1} = a^{\frac{1}{n} \times \overline{n-1}} y^{\frac{1-n}{n} \times \overline{n-1}} = a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{-n^2+2n-1}{n}}$; on multipliera ces dernieres grandeurs égales par y^{n-1}, & il viendra $g^{n-1} y^{n-1} = a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{-n^2+2n-1}{n} + n - 1} = a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}}$.

On élévera encore les deux grandeurs égales $g = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}}$ à la puissance $n - 2$, & l'on trouvera $g^{n-2} = a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{1-n}{n} \times n-2} = a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{-n^2+3n-2}{n}}$; on multipliera ces grandeurs égales par y^{n-1}, & il viendra $g^{n-2} y^{n-1} = a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{-n^2+3n-2}{n}+n-1} = a^{\frac{n-2}{n}} y^{\frac{2n-2}{n}}$.

Enfin on élévera les grandeurs égales $g = a^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1-n}{n}}$ à la puissance $n - 3$, & l'on trouvera $g^{n-3} = a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{1-n}{n} \times n-3} = a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{-n^2+4n-3}{n}}$; on multipliera ces dernieres grandeurs égales par y^{n-1}, & il viendra $g^{n-3} y^{n-1} = a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{-n^2+4n-3}{n}+n-1} = a^{\frac{n-3}{n}} y^{\frac{3n-3}{n}}$.

2°. On déduira de la valeur de $h = \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} b y^{\frac{1-n}{n}}$; $h^3 = \frac{1}{n^3} a^{\frac{3-3n}{n}} b^3 y^{\frac{3-3n}{n}} = \frac{1}{n^3} a^{\frac{3-3n}{n}} b^3 y^{3 \times \frac{1-n}{n}}$, & $g^{n-3} y^{n-1} h^3 = \frac{1}{n^3} a^{\frac{n-3+3-3n}{n}} b^3 y^{\frac{3n-3+3-3n}{n}} = \frac{1}{n^3} a^{-\frac{2n}{n}} b^3 y^0$; & $g^{n-2} y^{n-1} h = \frac{1}{n} a^{\frac{n-2+1-n}{n}} b y^{\frac{2n-2+1-n}{n}} = \frac{1}{n} a^{-\frac{1}{n}} b y^{\frac{n-1}{n}}$; & enfin multipliant cette grandeur par la valeur de j, il viendra $g^{n-2} y^{n-1} h \times j = \frac{1}{n^2} \times \frac{1-n}{2n} a^{-\frac{2n}{n}} b^3 y^0 + \frac{1}{n^2} a^{-\frac{n}{n}} b c y^0$.

Après ces préparations, on substituera facilement les valeurs de g, de h & de j dans l'égalité A; & après les substitutions, l'égalité A deviendra B $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} k = \frac{1}{n^3} \times -\frac{n}{1} \times \overset{C}{\frac{n-1}{2}} \times \frac{n-2}{3} a^{-\frac{2n}{n}} b^3 y^0 + \frac{1}{n^2} \times \frac{1-n}{2n} \times \overset{D}{-\frac{n}{1}} \times \frac{n-1}{1} a^{-\frac{2n}{n}} b^3 y^0 + \frac{1}{n^2} \times \overset{E}{-\frac{n}{1}} \times \frac{n-1}{1} a^{-\frac{n}{n}} b c y^0 + \overset{F}{d}$.

Le coëfficient de C se réduit, en faisant les multiplications qui y sont marquées, à $C \frac{-n^3+3n^2-2n}{1n \times 2n \times 3n}$; le coëfficient de D se réduit de même à $D \frac{+n^3-2n^2+n}{1n \times 2n^2}$; & pour ajoûter ces coëfficiens il faut réduire le ſecond au même dénominateur que le premier, ce qui ſe fera en multipliant le numérateur & le dénominateur du ſecond coëfficient par 3, & il deviendra $D \frac{3n^3 - 6n^2 + 3n}{1n \times 2n \times 3n}$. On ajoûtera enſuite les deux coëfficiens $C + D$, & l'on aura pour leur ſomme $\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{1n \times 2n \times 3n}$. On réduira de même le coëfficient de E à $E \frac{n - n^2}{1n^2} = \frac{n}{n} \times \frac{1 - n}{n}$. Il faut mettre dans l'égalité $B = C + D + E + F$, les coëfficiens $C + D$, E à la place de ceux qui y ſont, auſquels ils ſont équivalens, & cette égalité deviendra $A \frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}} \times$

$$k = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{1n \times 2n \times 3n} a^{-\frac{2n}{n}} b^3 y^0 + \frac{n - n^2}{1n^2} a^{-\frac{n}{n}} b c y^0 + d.$$

SECONDE PARTIE.

Il faut diviſer chaque membre de l'égalité A par $\frac{n}{1} a^{\frac{n-1}{n}} y^{\frac{n-1}{n}}$, & l'on trouvera l'égalité (a)

$$k = \overset{G}{\frac{2n^2 - 3n + 1}{1n \times 2n \times 3n}} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{n} a^{\frac{1-2n}{n}} b c y^{\frac{1-n}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1-n}{n}} d y^{\frac{1-n}{n}}.$$

Le coëfficient G eſt égal au produit $+ \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n}$; c'eſt pourquoi on peut exprimer l'égalité (a) de cette maniere

$$k = + \frac{1}{n} \times \frac{1-n}{2n} \times \frac{1-2n}{3n} a^{\frac{1-3n}{n}} b^3 y^{\frac{1-n}{n}} + \&c.$$

IV. Exemple pris de l'Analyſe démontrée, page 734, lignes 11, 12, 17, 18, 19, 20 & 21.

LORSQU'UNE grandeur complexe comme A, * contient une infinité de termes E, F, &c. diſtingués les uns des autres par les puiſſances d'une grandeur comme x, on la nomme une *ſuite infinie*.

* Page 53 qui ſuit.

Il faut diviſer la ſuite infinie A, qui eſt *le dividende*, par la ſuite infinie B, qui eſt *le diviſeur*, & trouver *le quotient* C que l'on conçoit devoir auſſi contenir une infinité de termes.

On ſe bornera à trouver les trois premiers termes du quotient C, les opérations que l'on fera pour ces trois termes ſuffiſant pour apprendre aux Commençans la maniere de faire ces ſortes de diviſions qui contiennent des grandeurs entieres, des grandeurs rompues & des puiſſances ſoit parfaites, ſoit imparfaites de grandeurs différentes, mêlées enſemble.

Les termes du dividende & du diviſeur ſont ordonnés par rapport à la lettre x, & même, ſi l'on veut, par rapport aux trois lettres différentes a, b, x, dont les puiſſances, qui font par leurs expoſans des progreſſions arithmétiques, diſtinguent les termes.

1°. Pour trouver le premier terme du quotient, on dira le premier terme D du dividende étant diviſé par le premier terme G du diviſeur, le quotient eſt L, qu'on écrira pour le premier terme du quotient C.

On multipliera enſuite par L les termes G, H, K du diviſeur, il eſt même inutile de multiplier le premier, il ſuffit d'écrire zéro ſous le premier terme D du dividende pour marquer qu'il ne doit plus ſervir; on écrira les autres produits, qui ſeront *E*, *F*, ſous les termes qui leur conviennent avec des ſignes oppoſés aux leurs, pour marquer qu'ils ſont ſouſtraits du dividende. On a tiré une ligne ponctuée pour faire diſtinguer les termes donnés du dividende A, des grandeurs dont ils ſe trouvent augmentés par les opérations de la diviſion.

On multiplie par le quotient L tout autant de termes du diviſeur B, qu'on ſe propoſe de trouver de termes du quotient C; ſi l'on en multiplioit davantage, ces produits de ſurplus ſeroient inutiles pour découvrir les termes du quotient C auſquels on s'eſt borné. Cette remarque doit ſervir pour les opérations ſuivantes.

2°. Pour découvrir le ſecond terme du quotient C, on commencera par réduire les deux grandeurs E + *E*, qui compoſent à préſent le ſecond terme du dividende, en une ſeule. (Ce qui ſe fait en les réduiſant à un même dénominateur, & en les joignant enſuite enſemble avec leurs ſignes); & l'on trouvera $E + E = e. - \frac{\overline{m+1} + \overline{np+n}}{\overline{m+1} \times \overline{m+1+n}} g a^{p-1} b x^{m+1+n}$.

C'eſt le ſecond terme du dividende ſur lequel il faut opérer.

Après cette préparation, on diviſera (e) par le premier terme G du diviſeur, & on trouvera que le quotient eſt M. Il faut l'écrire pour le ſecond terme du quotient C; marquer un zéro au-deſſous du ſecond terme (e) du dividende, pour faire ſouvenir qu'il ne doit plus ſervir.

Quatriéme Exemple pris de l'Analyse démontrée, page 734.

Dividende.

$$\text{A. } \overset{D}{\underset{\circ}{\frac{1}{m+1}}} ga^p x^{m+1} + \overset{E}{\underset{\circ}{\frac{p}{m+1+n}}} ga^{p-1} b x^{m+1+n} + \overset{F}{\underset{\circ}{\frac{p \times \frac{p-1}{2}}{m+1+2n}}} ga^{p-2} b^2 x^{m+1+2n} + \&c.$$

$$- \overset{E}{\underset{\circ}{\frac{p-1}{m+1}}} ga^{p-1} b x^{m+1+n} - \overset{F}{\underset{\circ}{\frac{\overline{p-1} \times \frac{p}{2}}{m+1}}} ga^{p-2} b^2 x^{m+1+2n} - \&c.$$

$$+ \overset{f}{\underset{\circ}{\frac{m+1+pn+n \times \overline{p+1}}{m+1 \times \overline{m+1+n}}}} ga^{p-2} b^2 x^{m+1+2n} + \&c.$$

Diviseur.

$$\text{B. } \overset{G}{a^{p+1}} \quad + \overset{H}{\overline{p+1} \times a^p b x^n} \quad + \overset{K}{\overline{p+1} \times \frac{p}{2}\, a^{p-1} b^2 x^{2n}} \quad + \&c.$$

Quotient.

$$\text{C. } \overset{L}{\frac{1}{m+1}} ga^{-1} x^{m+1} - \overset{M}{\frac{m+1+pn+n}{m+1 \times \overline{m+1+n}}} ga^{-2} b x^{m+1+n} + \overset{N}{\frac{\overline{m+1+pn+n} \times \overline{m+1+pn+2n}}{m+1 \times \overline{m+1+n} \times \overline{m+1+2n}}} ga^{-3} b^2 x^{m+1+2n} - \&c.$$

On multipliera par le quotient M les termes H, K, &c. du diviseur B, & on écrira les produits avec des signes oppoſés aux leurs (pour marquer la ſouſtraction) ſous les termes du dividende A qui leur conviennent. Mais comme on s'eſt borné à trouver les trois premiers termes du quotient C, il ſuffit d'écrire le ſeul produit (f) du quotient M par le ſecond terme H du diviſeur, les autres devant être inutiles pour trouver le 3^e terme du quotient C.

3°. Pour découvrir ce 3^e terme du quotient C, il faut réduire d'abord les trois grandeurs F + *F* + f qui compoſent à préſent le 3^e terme entier du dividende A, en une ſeule grandeur; ce qui ſe fera en multipliant le numérateur & le dénominateur de F par $\overline{m+1} \times \overline{m+1+n}$, le numérateur & le dénominateur de *F* par $\overline{m+1+n} \times \overline{m+1+2n}$, le numérateur & le dénominateur de (f) par $\frac{2}{2} \times \overline{m+1+2n}$, & F deviendra

$$\frac{+m^2p^2+2mp^2+p^2+mnp^2+np^2-m^2p-2mp-p-mnp-np}{2\times\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times\overline{m+1+2n}} \times g a^{p-2} \text{ \&c.}$$

F deviendra

$$\frac{-m^2p^2-2mp^2-p^2-3mnp^2-3np^2-2n^2p^2-m^2p-2mp-p-3mnp-3np-2n^2p}{2\times\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times\overline{m+1+2n}} \times g a \text{ \&c.}$$

(f) deviendra

$$\frac{\begin{matrix}+2m^2p+4mp+2p+2mnp^2+2np^2+6mnp+6np+4n^2p^2+4n^2p \\ +2m^2+4m+2+2mnp+2np+6mn+6n+4n^2p+4n^2\end{matrix}}{2\times\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times\overline{m+1+2n}} \times g a^{p-2} b^2 x^{m+1+2n}.$$

On remarquera que les produits qui occupent les deux lignes qui ſont ſur la ligne droite qu'on a tirée ne ſont enſemble que le numérateur de (f), & que les grandeurs qui ſont au-deſſous de la ligne droite, font le dénominateur.

On ajoûtera enſemble les trois numérateurs de F, *F*, f, & après avoir effacé dans la ſomme les grandeurs qui ſe détruiſent par des ſignes oppoſés, & diviſé enſuite le numérateur & le dénominateur par 2, on trouvera que le troiſiéme terme entier du dividende ſe réduit à F + *F* + f =

$$\varphi\, \frac{m^2+2m+1+2mnp+2np+n^2p^2+3mn+3n+3n^2p+2n^2}{\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times\overline{m+1+2n}}\, g a^{p-2} b^2 x^{m+1+2n},$$

qu'on peut exprimer ainſi

$$\varphi\, \frac{\overline{m+1+pn+n}\times\overline{m+1+pn+2n}}{\overline{m+1}\times\overline{m+1+n}\times\overline{m+1+2n}}\, g a^{p-2} b^2 x^{m+1+2n}.$$

Après cette préparation, on diviſera le troiſiéme terme φ

du dividende A par le premier terme G du diviseur B, & l'on trouvera le quotient N qu'on écrira pour le 3[e] terme du quotient C; & comme l'on s'est borné à trois termes, la division est finie. On voit aisément comment on pourroit la continuer tant qu'on voudroit.

SECTION III.

Où l'on explique les suites ordonnées, la maniere de faire les formules générales qui servent à élever toutes les grandeurs complexes d'un nombre fini ou infini de termes à toutes les puissances qu'on peut imaginer. On explique aussi les nombres figurés, & leurs usages.

DÉFINITION.

569. On appelle une *suite* une grandeur complexe de plusieurs termes: quand le nombre des termes est infini ou va à l'infini, on la nomme une *suite infinie*.

Dans chaque *suite* on distingue ordinairement les termes les uns des autres par les puissances d'une ou deux lettres, lesquelles puissances vont d'ordinaire en augmentant ou en diminuant, suivant la progression arithmétique, c'est-à-dire, les exposans de ces puissances font une progression arithmétique, comme on le voit dans les suites A * & B où les puissances de *b* vont en augmentant suivant la progression arithmétique ÷ 1 . 2 . 3, &c. & où les puissances de *a* vont en diminuant, suivant la même progression arithmétique. * Page 57 qui suit.

Toutes les grandeurs dans une *suite* qui contiennent la même puissance de la lettre ou des deux lettres qui en distinguent les termes, ne font *qu'un même terme*, comme on le voit dans la suite C; & on écrit toutes ces grandeurs d'un même terme les unes sous les autres.

Dans chaque terme toutes les grandeurs par lesquelles est multipliée la même puissance de la lettre qui distingue les termes, ou par lesquelles est multiplié le même produit des puissances des deux lettres qui distinguent les termes, s'appellent *le coëfficient* de ce terme-là. Par exemple dans C, $\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} + \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}$ est le coëfficient du 3[e] terme; & ainsi des autres.

Il y a un grand nombre de *suites* qui n'ont aucun ordre

dans leurs termes que celui des puiſſances d'une ou de pluſieurs lettres qui diſtinguent ces termes; & quand pluſieurs termes de ces *ſuites* ſont déja découverts, on ne ſçauroit découvrir les ſuivans par le rapport d'un terme à l'autre, ou par une même propriété ou une même *loi* qui convienne de ſuite
*294 à tous les termes. Telles ſont les ſuites * qui expriment les
& 295. quotiens approchés dans les diviſions imparfaites des gran-
*311. deurs littérales; telles ſont auſſi * *les ſuites* qui ſont les valeurs approchées des puiſſances littérales imparfaites. Il faut pour trouver chaque terme, employer la même méthode qui a fait découvrir les termes qui les précédent.

570. Il y a d'autres *ſuites* dans leſquelles *regne une même loi*, c'eſt-à-dire dans leſquelles une même propriété convient à tous les termes. Dans ces *ſuites*, pourvû qu'on ſçache *la loi*, il ſuffit d'avoir le premier terme ou les deux premiers termes, & l'on trouve facilement les autres en allant par ordre. Ainſi le premier terme & *la loi* de la *ſuite* étant donnés, on a tous les autres termes. On pourra les nommer *les ſuites ordonnées.* C'eſt de ces dernieres *ſuites* dont on va parler dans cette Section.

On nommera t un terme quelconque d'une *ſuite;* T le terme qui le ſuit immédiatement; n le nombre des termes depuis le premier compris juſqu'au terme t compris, c'eſt-à-dire n marquera le quantiéme terme de la *ſuite* eſt t. Par exemple, ſi l'on veut que t ſoit le 6^e^ terme, T ſera le 7^e^ terme, & n ſera égale à 6; & le 7^e^ rang du terme T ſera marqué par $n+1$. *Voyez la ſuite* A *ou* p, *&c. p.* 57.

Remarques ſur ces ſuites, *qu'il faut ſe rendre très-familieres.*

Sur les trois ſuites A, B, D.

I.

575. LA *loi* qui regne dans les ſuites A, B & D, eſt qu'un terme quelconque t eſt au terme T qui le ſuit immédiatement, comme le produit na du nombre des termes n depuis le premier $1a^0$ compris juſqu'au terme t auſſi compris, par la grandeur a, eſt au produit $\overline{\pm p - n + 1} \times b$, dans la *ſuite* A; comme na eſt à $\overline{\pm q - n + 1} \times b$, dans la *ſuite* B; comme na eſt à $\overline{\pm p + q - n + 1} \times b$, dans la *ſuite* D; c'eſt-à-dire t eſt à T comme na eſt au produit qui vient de la multiplication de l'expoſant p ou q, ou $p+q$ moins le nombre des termes n plus

Suite A ou p.

571. $1a^{p} \pm \frac{p}{1} b^{1} a^{p-1} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^{2} a^{p-2} \pm \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} b^{3} a^{p-3} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} b^{4} a^{p-4} \pm \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} \times \frac{p-4}{5} b^{5} a^{p-5} +$ &c.

Suite B ou q.

572. $1a^{q} \pm \frac{q}{1} b^{1} a^{q-1} + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} b^{2} a^{q-2} \pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} b^{3} a^{q-3} + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4} b^{4} a^{q-4} \pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4} \times \frac{q-4}{5} b^{5} a^{q-5} +$ &c.

Suite C qui est le produit de la suite A par la suite B.

573. $1a^{p+q} \pm \frac{p}{1} b^{1} a^{p+q-1} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^{2} a^{p+q-2} \pm \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} b^{3} a^{p+q-3} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} b^{4} a^{p+q-4} \pm \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} \times \frac{p-4}{5} b^{5} a^{p+q-5} +$ &c.

$\pm \frac{q}{1} b^{1} a^{p+q-1} + \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} b^{2} a^{p+q-2} \pm \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^{3} a^{p+q-3} + \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} b^{4} a^{p+q-4} \pm \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} b^{5} a^{p+q-5}$

$+ \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} b^{2} a^{p+q-2} \pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{p}{1} b^{3} a^{p+q-3} + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^{4} a^{p+q-4} \pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} b^{5} a^{p+q-5}$

$\pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} b^{3} a^{p+q-3} + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{p}{1} b^{4} a^{p+q-4} \pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^{5} a^{p+q-5}$

$+ \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4} b^{4} a^{p+q-4} \pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4} \times \frac{p}{1} b^{5} a^{p+q-5}$

$\pm \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4} \times \frac{q-4}{5} b^{5} a^{p+q-5}$

Suite D ou $p + q$.

574. $1a^{p+q} \pm \frac{p+q}{1} b^{1} a^{p+q-1} + \frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2} b^{2} a^{p+q-2} \pm \frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2} \times \frac{p+q-2}{3} b^{3} a^{p+q-3} + \frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2} \times \frac{p+q-2}{3} \times \frac{p+q-3}{4} b^{4} a^{p+q-4}$

$\pm \frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2} \times \frac{p+q-2}{3} \times \frac{p+q-3}{4} \times \frac{p+q-4}{5} b^{5} a^{p+q-5} +$ &c.

plus l'unité par la grandeur $\pm b$. Ainsi dans A, $t.T :: na.$
*340. $\overline{\pm p - n + 1} \times b$, ce qui donne * $T = t \times \pm \frac{p-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$. Dans B, $t.T :: na. \overline{\pm q - n + 1} \times b$, ce qui donne $T = t \times \pm \frac{q-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$. Dans la suite D, $t.T :: na. \overline{\pm p + q - n + 1} \times b$, ce qui donne $T = t \times \pm \frac{p+q-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$.

On peut donc exprimer la propriété ou la *loi* qui convient à chacune de ces *suites* par le rapport qu'on vient d'exprimer, qui se trouve entre chaque terme & celui qui le suit; ou bien (après avoir nommé e l'exposant p, ou q, ou $p + q$ du premier terme a^p ou a^q, ou a^{p+q}, en supposant que e représente d'une maniere indéterminée l'exposant du premier terme a^p, ou a^q, ou a^{p+q} de laquelle on voudra des trois *suites* A, B, D,) on peut exprimer la *loi* de ces *suites*, en disant que chacun des termes qui suit le premier (on nommera ce terme par l'indéterminée T) est toujours égal au produit fait du terme t, qui le précéde immédiatement, multiplié par $\pm \frac{e-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$.

On n'a qu'à examiner tous les termes des *suites* A, B, D, & l'on verra que cette *loi* regne en tous. On ne doit avoir égard à présent qu'au signe $+$ par tout où il y a $\pm$, on verra ci-après quels sont les cas où il faut avoir égard au signe $-$. Les Commençans doivent former eux-mêmes chacune de ces *suites* A, B, D, en supposant le premier terme donné avec son exposant, comme aussi *la loi* de la *suite*; & s'ils veulent mettre des nombres entiers, comme 2, 3, 4, 5, &c. à la place des exposans p, q, $p + q$, ils trouveront des *suites* particulieres représentées par les *suites* générales, lesquelles *suites* particulieres n'auront qu'un nombre fini de termes quand ils prendront un nombre entier positif pour exposant. Mais on doit les avertir qu'ils ne comprendront bien les remarques qui suivent, qu'après avoir formé eux-mêmes les *suites* A, B, D, & s'être rendu cette formation très-familiere.

II.

576. En supposant toujours que l'indéterminée e représente l'exposant du premier terme de laquelle on voudra des trois *suites* A, B, D; il est clair qu'on peut exprimer un terme quelconque t, dont n marque le rang, par $1 \times \frac{e}{1} \times \frac{e-1}{2} \times \frac{e-}{3} \times$ .... jusqu'à $\frac{e-n+2}{n-1} \times b^{n-1} a^{e-n+1}$; & le terme T qui le suit

immédiatement, par $1 \times \frac{e}{1} \times \frac{e-1}{2} \times \frac{e-2}{3} \times \overset{\text{jusqu'à}}{\ldots\ldots} \frac{e-n+2}{n-1} \times \frac{e-n+1}{n} \times b^n a^{e-n}$. Les points qu'on a marqués tiennent lieu des multiplicateurs $\frac{e-3}{4} \times \frac{e-4}{5}$, &c. qu'on sous-entend facilement.

III.

577. En prenant l'unité pour le premier des multiplicateurs du coëfficient d'un terme quelconque t, il est évident que chaque coëfficient d'un terme quelconque t contient autant de multiplicateurs $1, \frac{e}{1}, \frac{e-1}{2}, \frac{e-2}{3}$, &c. qu'il y a d'unités dans le nombre n, qui marque le rang qu'occupe ce terme dans la *suite*. Par exemple, le second coëfficient est formé des deux multiplicateurs $1, \frac{e}{1}$; le troisiéme coëfficient contient les trois multiplicateurs $1, \frac{e}{1}, \frac{e-1}{2}$; le quatriéme contient les quatre $1, \frac{e}{1}, \frac{e-1}{2}, \frac{e-2}{3}$; & ainsi de suite : mais l'unité pouvant toujours être sous-entendue comme l'un des multiplicateurs d'un produit, il est inutile de la marquer; c'est pourquoi ne comprenant point l'unité parmi les multiplicateurs du coëfficient d'un terme quelconque t, il est clair qu'il y a autant de ces multiplicateurs dans le coëfficient du terme t, qu'il y a d'unités dans $n-1$.

Sur la suite C.

IV.

578. LES Commençans doivent former eux-mêmes la *suite* C, en multipliant la *suite* A par la *suite* B, & en prenant les termes de B pour les multiplicateurs, & les termes de A pour les multipliés. Ils commenceront par multiplier $1a^p$ par $1a^q$, ce qui donnera le premier terme $1a^{p+q}$ de C. Ensuite ils multiplieront $\pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1}$ par $1a^q$, puis $1a^p$ par $\pm \frac{q}{1} b^1 a^{q-1}$, & ils auront le second terme $\pm \frac{p}{1} b^1 a^{p+q-1} \pm \frac{q}{1} b^1 a^{p+q-1}$ de C. Après cela ils multiplieront $+\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^2 a^{p-2}$ par a^q, puis $\pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1}$ par $\pm \frac{q}{1} b^1 a^{q-1}$; enfin $1a^p$ par $+\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} b^2 a^{q-2}$, & ils auront $+\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^2 a^{p+q-2} + \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} b^2 a^{p+q-2} + \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} b^2 a^{p+q-2}$ pour le troisiéme terme de C; & ainsi de suite.

Après s'être rendu familiere la formation de la *suite* C, ils feront les remarques suivantes, qui en sont une suite évidente.

579. I. Chaque terme t de C contient autant de produits partiels qu'il y a d'unités dans le nombre n, qui marque le rang de ce terme ; car il est évident par la formation de C, que le second terme contient deux produits particuliers ; le troisiéme en contient trois ; le quatriéme, quatre ; & ainsi de suite. On ne comprend point l'unité parmi ces produits, parce que le produit des puissances de a & b, qui distingue chaque terme, n'est pas multiplié à part par l'unité ; par exemple, dans le 3[e] terme il n'y a pas de produit $1 \times b^2 a^{p+q-2}$.

580. II. Tous les produits partiels d'un terme quelconque t de la *suite* C (le nombre n marque le rang de ce terme ou le quantiéme il est) peuvent être représentés par les produits partiels qu'on voit ici : il n'y a qu'à comparer tel terme qu'on voudra de C avec cette expression générale des produits partiels d'un terme quelconque t de C, pour voir clairement qu'elle représente tous les produits partiels qui composent chaque terme de C.

Produits partiels d'un terme quelconque t *de la suite* C.

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \overset{\text{jusqu'à}}{\ldots\ldots} \times \frac{p-n+2}{n-1} \\
2.\ \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \ldots\ldots \times \frac{p-n+3}{n-2} \\
3.\ \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \ldots\ldots \times \frac{p-n+4}{n-3} \\
\text{\& ainsi de suite jusqu'au dernier, qui} \\
\text{est } \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{q-3}{4} \times \ldots \times \frac{q-n+2}{n-1}
\end{array}\right\} \times b^{n-1} a^{p+q-n+1}$$

581. III. Tous les produits partiels du terme T qui suit immédiatement le terme t (le nombre $n+1$ marque le rang de ce terme T ou le quantiéme il est) peuvent être représentés en général par les produits partiels qu'on voit ici.

Produits partiels du terme T *qui suit le terme* t *dans la suite* C.

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \overset{\text{jusqu'à}}{\ldots\ldots} \times \frac{p-n+2}{n-1} \times \frac{p-n+1}{n} \\
2.\ \frac{q}{1} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \ldots\ldots \times \frac{p-n+3}{n-2} \times \frac{p-n+2}{n-1} \\
3.\ \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \ldots \times \frac{p-n+4}{n-3} \times \frac{p-n+3}{n-2} \\
\text{\& ainsi de suite jusqu'au dernier, qui} \\
\text{est } \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \ldots\ldots \times \frac{q-n+2}{n-1} \times \frac{q-n+1}{n}
\end{array}\right\} \times b^{n} a^{p+q-n}$$

Sur la suite D.

V.

582. CHACUN des multiplicateurs $\frac{p+q}{1}$, $\frac{p+q-1}{2}$, $\frac{p+q-2}{3}$, &c. du coëfficient d'un terme quelconque t, peut être autant de fois partagé en deux parties, lesquelles jointes ensembles sont égales à ce multiplicateur, & en sont la valeur, qu'il y a d'unités dans le dénominateur de ce multiplicateur ; c'est-à-dire chacun de ces multiplicateurs peut avoir autant d'expressions (dont chacune lui sera équivalente ou aura la même valeur, & chacune de ces expressions équivalentes aura deux parties) qu'il y a d'unités dans le dénominateur de ce multiplicateur. Par exemple $\frac{p+q}{1}$, dont le dénominateur est 1, ne peut être partagé qu'une fois en deux parties $\frac{1}{1}\times\frac{p}{1}+\frac{1}{1}\times\frac{q}{1}$, dont la somme est égale à $\frac{p+q}{1}=\frac{1}{1}\times\frac{p}{1}+\frac{1}{1}\times\frac{q}{1}$.

$\frac{p+q-1}{2}$ dont le dénominateur est 2, peut être partagé deux fois en deux parties qu'on voit ici, de maniere que la somme de ces deux parties soit égale à $\frac{p+q-1}{2}$.

$$\frac{p+q-1}{2}=\begin{cases}1^{\circ}.\ \frac{2}{2}\times\frac{p-1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{q}{1}, & 1^{re}\text{ valeur.}\\ 2^{\circ}.\ \frac{1}{2}\times\frac{p}{1}+\frac{2}{2}\times\frac{q-1}{2}, & 2^{e}\text{ valeur.}\end{cases}$$

$\frac{p+q-2}{3}$ peut être partagé en trois fois deux parties égales à $\frac{p+q-2}{3}$.

$$\frac{p+q-2}{3}=\begin{cases}1^{\circ}.\ \frac{3}{3}\times\frac{p-2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{q}{1}, & 1^{re}\text{ valeur.}\\ 2^{\circ}.\ \frac{2}{3}\times\frac{p-1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{q-1}{2}, & 2^{e}\text{ valeur.}\\ 3^{\circ}.\ \frac{1}{3}\times\frac{p}{1}+\frac{3}{3}\times\frac{q-2}{3}, & 3^{e}\text{ valeur.}\end{cases}$$

$\frac{p+q-3}{4}$ en quatre fois deux parties égales à $\frac{p+q-3}{4}$.

$$\frac{p+q-3}{4}=\begin{cases}1^{\circ}.\ \frac{4}{4}\times\frac{p-3}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{q}{1}, & 1^{re}\text{ valeur.}\\ 2^{\circ}.\ \frac{3}{4}\times\frac{p-2}{3}+\frac{2}{4}\times\frac{q-1}{2}, & 2^{e}\text{ valeur.}\\ 3^{\circ}.\ \frac{2}{4}\times\frac{p-1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{q-2}{3}, & 3^{e}\text{ valeur.}\\ 4^{\circ}.\ \frac{1}{4}\times\frac{p}{1}+\frac{4}{4}\times\frac{q-3}{4}, & 4^{e}\text{ valeur.}\end{cases}$$

$\frac{p+q-4}{5}$ en cinq fois deux parties égales à $\frac{p+q-4}{5}$.

$$\frac{p+q-4}{5}=\begin{cases}1^{\circ}.\ \frac{5}{5}\times\frac{p-4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{q}{1}, & 1^{re}\text{ valeur.}\\ 2^{\circ}.\ \frac{4}{5}\times\frac{p-3}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{q-1}{2}, & 2^{e}\text{ valeur.}\\ 3^{\circ}.\ \frac{3}{5}\times\frac{p-2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{q-2}{3}, & 3^{e}\text{ valeur.}\\ 4^{\circ}.\ \frac{2}{5}\times\frac{p-1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{q-3}{4}, & 4^{e}\text{ valeur.}\\ 5^{\circ}.\ \frac{1}{5}\times\frac{p}{1}+\frac{5}{5}\times\frac{q-4}{5}, & 5^{e}\text{ valeur.}\end{cases}$$

On peut facilement faire de la même maniere le partage des suivans.

583. Pour avoir une expression générale de ce partage, on nommera m le dénominateur de chacun de ces multiplicateurs; & chacun de ces multiplicateurs étant représenté par $\frac{p+q-m+1}{m}$, l'expression générale du partage de $\frac{p+q-m+1}{m}$ en autant de fois deux parties, dont la somme est égale à $\frac{p+q-m+1}{m}$, sera celle qui est ici marquée.

Expression générale du partage de $\frac{p+q-m+1}{m}$ *en autant de fois deux parties, dont la somme* $= \frac{p+q-m+1}{m}$, *qu'il y a d'unités dans* m.

Premieres parties. Secondes parties.

$$\frac{p+q-m+1}{m} = \begin{cases} 1^{o}.\ \frac{m}{m} \times \frac{p-m+1}{m} + \frac{1}{m} \times \frac{q}{1}, \ 1^{re} \text{ valeur.} \\ 2^{o}.\ \frac{m-1}{m} \times \frac{p-m+2}{m-1} + \frac{2}{m} \times \frac{q-1}{2}, \ 2^{e} \text{ valeur.} \\ 3^{o}.\ \frac{m-2}{m} \times \frac{p-m+3}{m-2} + \frac{3}{m} \times \frac{q-2}{3}, \ 3^{e} \text{ valeur.} \\ 4^{o}.\ \frac{m-3}{m} \times \frac{p-m+4}{m-3} + \frac{4}{m} \times \frac{q-3}{4}, \ 4^{e} \text{ valeur.} \\ \text{\& ainsi de suite jusqu'aux deux dernieres, qui sont} \\ \frac{m-m+1}{m} \times \frac{p-m+m}{m-m+1} + \frac{m}{m} \times \frac{q-m+1}{m}, \text{dern. val.} \end{cases}$$

Comparaison de la suite D *avec la* suite C.

VI.

584. CHAQUE terme de la *suite* D est précisément égal au terme correspondant de la *suite* C; c'est-à-dire le premier terme de D est égal au premier terme de C; le second terme de D est égal au second terme de C; & ainsi de suite.

Car, 1°. il est clair par la formation des *suites* C & D, que les puissances de b & de a, qui en distinguent les termes, sont exactement les mêmes en tous les termes correspondans de C & de D.

2°. Il ne s'agit donc que de faire voir que le coëfficient de chaque terme de D est précisément égal au coëfficient du terme correspondant de C: c'est ce qu'il est aisé de déduire clairement de la cinquiéme Remarque qui précéde, en comparant par ordre le premier terme de D avec le premier terme de C; le second terme de D avec le second terme de C; & ainsi de suite, & en faisant voir que chaque coëfficient des termes de D se réduit sans changer sa valeur aux produits partiels qui composent le coëfficient du terme correspondant de C.

Il est déja évident que l'unité est le coëfficient du premier terme de D & du premier de C ; & que le coëfficient $\frac{p+q}{1}$ du second terme de D se réduit à $\frac{1}{1} \times \frac{p}{1} + \frac{1}{1} \times \frac{q}{1}$, qui sont les deux produits partiels du coëfficient du second terme de C.

Le coëfficient $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2}$ du troisiéme terme de D, est le produit de $\frac{p+q}{1}$ coëfficient du second terme de D, par $\frac{p+q-1}{2}$.

Les trois produits partiels qui font le coëfficient du troisiéme terme de C, sont aussi le produit de $\frac{p}{1} + \frac{q}{1}$ (qui sont les deux produits partiels du coëfficient du second terme de C) par la valeur de $\frac{p+q-1}{2}$; car le premier de ces trois produits partiels $\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2}$ est le produit de $\frac{p}{1}$ par $\frac{2}{2} \times \frac{p-1}{2}$ premiere partie de la premiere valeur de $\frac{p+q-1}{2}$. Le second de ces trois produits partiels $\frac{q}{1} \times \frac{p}{1}$ est la somme du produit de $\frac{p}{1}$ par $\frac{1}{2} \times \frac{q}{1}$ seconde partie de la premiere valeur de $\frac{p+q-1}{2}$, & du produit de $\frac{q}{1}$ (second produit partiel du second terme de C) par $\frac{1}{2} \times \frac{p}{1}$ premiere partie de la seconde valeur de $\frac{p+q-1}{2}$. Enfin le troisiéme de ces produits partiels $\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}$ est le produit de $\frac{q}{1}$ (second produit partiel du second terme de C) par $\frac{2}{2} \times \frac{q-1}{2}$ seconde partie de la seconde valeur de $\frac{p+q-1}{2}$. Ainsi le coëfficient du troisiéme terme de D est égal au coëfficient du troisiéme terme de C.

Le coëfficient du quatriéme terme de D est le produit de $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2}$ (qui forment le coëfficient du 3^e terme de D) par $\frac{p+q-2}{3}$. Les quatre produits partiels qui composent le coëfficient du 4^e terme de C, sont aussi le produit des trois produits partiels du coëfficient du 3^e terme de C (qui sont égaux au coëfficient $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2}$ du 3^e terme de D) par la valeur de $\frac{p+q-2}{3}$.

Car le premier de ces quatre produits partiels $\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$, est le produit du premier des trois produits partiels $\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2}$ du troisiéme terme de C par la premiere partie $\frac{3}{3} \times \frac{p-2}{3}$ de la premiere valeur de $\frac{p+q-2}{3}$.

Le second de ces quatre produits $\frac{q}{1} \times \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2}$ est la somme du produit de $\frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2}$ par $\frac{1}{3} \times \frac{q}{1}$ (seconde partie de la premiere valeur de $\frac{p+q-2}{3}$), & du produit de $\frac{q}{1} \times \frac{p}{1}$ (second produit partiel du troisiéme terme de C) par $\frac{2}{3} \times \frac{p-1}{2}$ (premiere partie de la seconde valeur de $\frac{p+q-2}{3}$).

Le 3ᵉ de ces quatre produits $\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{p}{1}$ est la somme du produit de $\frac{q}{1} \times \frac{p}{1}$ (second produit partiel du 3ᵉ terme de C) par $\frac{2}{3} \times \frac{q-1}{2}$ (seconde partie de la seconde valeur de $\frac{p+q-2}{3}$), & du produit de $\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}$ (troisiéme produit partiel du 3ᵉ terme de C) par $\frac{1}{3} \times \frac{p}{1}$ (premiere partie de la 3ᵉ valeur de $\frac{p+q-2}{3}$).

Enfin le 4ᵉ de ces quatre produits $\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3}$ est le produit de $\frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}$ (troisiéme produit partiel du 3ᵉ terme de C) par $\frac{3}{3} \times \frac{q-2}{3}$ (seconde partie de la 3ᵉ valeur de $\frac{p+q-2}{3}$).

Par conséquent le coëfficient du 4ᵉ terme de D est égal au coëfficient du 4ᵉ terme de C.

Les Commençans doivent continuer la comparaison du coëfficient du 5ᵉ terme de D avec le coëfficient du 5ᵉ terme de C ; & de même du 6ᵉ, 7ᵉ termes, &c. Ils doivent se rendre cette comparaison très-familiere, & ne se pas lasser de la réïtérer jusqu'à ce qu'ils voyent clairement que les coëfficiens des termes correspondans t & t, des *suites* C & D, sont exactement égaux, en commençant par le coëfficient $\frac{p+q}{1}$ du second terme de D qui est égal à $\frac{p}{1} + \frac{q}{1}$, qui sont les deux produits partiels du coëfficient du second terme de C.

Le coëfficient du 3ᵉ terme de D est fait de $\frac{p+q}{1}$ multiplié par $\frac{p+q-1}{2}$, & la multiplication des deux produits partiels $\frac{p}{1}$ & $\frac{q}{1}$ qui sont le coëfficient du second terme de C, faite dans l'ordre qu'on a marqué par la valeur de $\frac{p+q-1}{2}$ qui a deux expressions équivalentes, donne les trois produits partiels qui sont le coëfficient du 3ᵉ terme de C.

Le coëfficient du 4ᵉ terme de D est fait de $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2}$ multipliés par $\frac{p+q-2}{3}$, & la multiplication des trois produits partiels qui sont le coëfficient du 3ᵉ terme de C, & qui sont égaux à $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2}$, faite dans l'ordre qu'on a marqué par la valeur de $\frac{p+q-2}{3}$ qui a trois expressions équivalentes, donne les quatre produits partiels qui composent le coëfficient du quatriéme terme de C.

Le

Le coëfficient du 5ᵉ terme de D est fait de $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2} \times \frac{p+q-2}{3}$ multiplié par $\frac{p+q-3}{4}$, & la multiplication des quatre produits partiels dont est composé le coëfficient du 4ᵉ terme de C, & qui sont égaux à $\frac{p+q}{1} \times \frac{p+q-1}{2} \times \frac{p+q-2}{3}$, faite dans l'ordre qu'on a marqué par la valeur de $\frac{p+q-3}{4}$ qui a quatre expressions équivalentes, donne les cinq produits partiels qui composent le coëfficient du 5ᵉ terme de C; & ainsi de suite, étant évident que le même raisonnement doit convenir à tous les termes suivans en allant par ordre.

Après quoi les Commençans verront clairement que de l'égalité du coëfficient d'un terme quelconque t de D, dont n marque le rang, avec le coëfficient du terme correspondant t de C, se déduit évidemment l'égalité du coëfficient du terme T qui suit t dans D dont $n+1$ marque le rang, avec le coëfficient du terme correspondant T qui suit t dans C.

Sur les quatre suites A, B, C, D.

VII.

585. Il est évident que l'exposant p & l'exposant q dans les *suites* A, B, C, D, peuvent être telle grandeur qu'on voudra, sçavoir un nombre entier quelconque positif ou négatif, ou un nombre rompu quelconque positif ou négatif, & même une grandeur incommensurable quelconque positive ou négative. Car il est clair que tout ce que l'on a dit dans les Remarques précédentes convient généralement à toutes les *suites* qui ont la même *loi*, & dans lesquelles p & q sont telles grandeurs qu'on peut imaginer.

Après s'être rendu familieres les Remarques précédentes, on entendra facilement tout ce que l'on doit expliquer dans cette Section.

Définition.

586. On désignera, pour abréger & pour aider l'imagination, une *suite* dans laquelle regne la *loi* marquée dans la premiere Remarque, par la lettre qui est l'exposant de son premier terme. Ainsi la *suite* * A sera nommée la *suite* p; la *suite* B * sera nommée la *suite* q; la *suite* D † sera nommée la *suite* $p+q$.

* 571.
* 572.
† 574.

PROPOSITION FONDAMENTALE.

587. *La* suite p + q, * *qu'on a nommée* D, *est égale au produit*
*574. *des* suites p *&* q *multipliées l'une par l'autre.*

*584. *1re Démonstration.* La *suite* $p+q$ est égale * à la *suite* C.
Or la *suite* (C) est, par la construction, le produit de la *suite*
p par la *suite* q. Donc la *suite* $p+q$ est égale au produit de
la *suite* p par la *suite* q. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*574. *2e Démonstration.* Dans la *suite* $p+q$ * un terme quelcon-
*575. que * $T = t \times \pm \frac{p+q-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$, par la construction. Or dans
*573. la *suite* C * qui est, par la construction, le produit de la *suite* p
par la *suite* q, on a aussi la même propriété $T = t \times \pm \frac{p+q-n+1}{n} \times$
$\frac{b}{a}$. Par conséquent le premier terme de $p+q$ & de C étant le
même, sçavoir $1a^{p+q}$, si la même *loi* qui regne dans la *suite*
$p+q$, regne aussi dans la *suite* C, chaque terme de la *suite*
$p+q$ est égal au terme correspondant de la *suite* C. Ainsi la
suite $p+q$ est égale au produit de la *suite* p par la *suite* q.

Il ne s'agit donc que de faire voir clairement que dans C,
chaque terme $T = t \times \pm \frac{p+q-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$. Il ne faut pour cela que
se rendre bien familiers les produits partiels qui composent
le terme t dans C, qui sont marqués dans le second article
*580. de la quatriéme Remarque, * & de plus les produits partiels
du terme T dans C, qui sont représentés dans le troisiéme
*581. article de la 4e Remarque, * & ensuite réduire $\frac{p+q-n+1}{n} \times$
*583. $\frac{b}{a}$ * par la 5e Remarque en toutes ses expressions équivalentes,
dont chacune a deux parties, comme on le voit ici.

$$\frac{p+q-n+1}{n} \times \frac{b}{a} = \left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ}.\ \pm \frac{n}{n} \times \frac{p-n+1}{n} \times \frac{b}{a} \pm \frac{1}{n} \times \frac{q}{1} \times \frac{b}{a},\ 1^{re}\ \text{valeur.} \\ 2^{\circ}.\ \pm \frac{n-1}{n} \times \frac{p-n+2}{n-1} \times \frac{b}{a} \pm \frac{2}{n} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{b}{a},\ 2^{e}\ \text{valeur.} \\ 3^{\circ}.\ \pm \frac{n-2}{n} \times \frac{p-n+3}{n-2} \times \frac{b}{a} \pm \frac{3}{n} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{b}{a},\ 3^{e}\ \text{valeur.} \\ 4^{\circ}.\ \pm \frac{n-3}{n} \times \frac{p-n+4}{n-3} \times \frac{b}{a} \pm \frac{4}{n} \times \frac{q-3}{4} \times \frac{b}{a},\ 4^{e}\ \text{valeur.} \\ \qquad\qquad \text{\& ainsi de suite jusqu'à} \\ \text{enfin}\ \pm \frac{n-n+1}{n} \times \frac{p-n+n}{n-n+1} \times \frac{b}{a} \pm \frac{n}{n} \times \frac{q-n+1}{n} \times \frac{b}{a},\ \text{dern. val.} \end{array} \right.$$

Après cela comparant les produits partiels du terme T aux
produits partiels du terme t, on verra clairement que le pre-

mier produit partiel de T est le produit du premier produit partiel de t par $\pm \frac{n}{n} \times \frac{p-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$.

Que le second produit partiel de T est la somme des produits du premier produit partiel de t par $\pm \frac{1}{n} \times \frac{q}{1} \times \frac{b}{a}$, & du second produit partiel de t par $\pm \frac{n-1}{n} \times \frac{p-n+2}{n-1} \times \frac{b}{a}$.

Que le 3e produit partiel de T est la somme des produits du second produit partiel de t par $\pm \frac{2}{n} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{b}{a}$, & du 3e produit partiel de t par $\pm \frac{n-2}{n} \times \frac{p-n+3}{n-2} \times \frac{b}{a}$.

Et ainsi de suite jusqu'au dernier produit partiel de T, qu'on trouvera être le produit du dernier terme partiel de t par $\pm \frac{n}{n} \times \frac{q-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$.

On verra donc évidemment par cette comparaison, que $T = t \times \pm \frac{p+q-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$.

Puisque tous les produits partiels de t (qui font le terme total t) étant multipliés suivant l'ordre qu'on a marqué par la valeur de $\pm \frac{p+q-n+}{n} \times \frac{b}{a}$, qui a autant d'expressions équivalentes qu'il y a d'unités dans n, la somme des produits qui en vient, est exactement le terme T. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

588. POUR multiplier une *suite* représentée par * la *suite p*, * 571.
par une autre *suite* * représentée par la *suite q*; il ne faut * 572.
que former la *suite* * $p+q$, dont le premier terme sera * 574.
a^{p+q}, & former cette *suite* en suivant * la *loi* des *suites*; & * 575.
la *suite* $p+q$ sera le produit qu'on cherche.

COROLLAIRE II.

589. POUR diviser la *suite* * p par la *suite* q, il ne faut que * 571.
former une *suite* $p-q$ faisant le premier terme $= a^{p-q}$,
& trouver les suivans * par la *loi* des *suites*; & l'on aura * 575.
$a^{p-q} \pm \frac{p-q}{1}\, 1\, a^{p-q-1} +$ &c. pour le quotient.

Démonstration. Imaginant la *suite* $p-q+q$, il est évident qu'elle est * le produit de la *suite* $p-q$ par la *suite* $+q$. Il est * 587.
aussi évident que la *suite* $p-q+q$ est la *suite* même p, parce que $-p$ & $+q$ se détruisent dans tous les coëfficiens & dans tous les exposans. On voit donc clairement qu'en multipliant la *suite* $p-q$ par la *suite* q, le produit qui en vient est la

* 72. *suite p*. Ainsi * l'unité est à la *suite q*, comme la *suite* $p - q$
* 323, est à la *suite p* égale à la *suite* $p - q + q$. Donc * la *suite p*
& 326. est à la *suite q*, comme la *suite* $p - q$ est à l'unité. Par con-
* 106. séquent * la *suite* $p - q$ est le quotient de la *suite p* divisée par la *suite q*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

590. IL est évident que les exposans p & q peuvent être une grandeur quelconque, & même une grandeur incommensurable, & que tout ce que l'on a démontré dans la Proposition fondamentale, & dans les deux Corollaires précédens, convient aux *suites* p, q, $p + q$, $p - q$, quelque grandeur que représentent p & q.

COROLLAIRE III.

591. DANS la *suite* * $p + q$, qui est † le produit de la *suite p*
* 574. par la *suite q*, les lettres p & q pouvant représenter succes-
† 587. sivement toutes les grandeurs qu'on peut imaginer; si l'on suppose $p = q$, la *suite* $p + q$ deviendra la *suite* $q + q$ ou
* 143. $2q$, & elle sera * la seconde puissance de la *suite q*. Et si l'on conçoit que p représente successivement $2q, 3q, 4q$, &c.
* 143. les *suites* $3q, 4q, 5q$, &c. qui en naîtront * seront successivement les puissances 3^e, 4^e, 5^e, &c. de la *suite q*. Et en général si $p = \overline{n - 1} \times q$, la *suite* $p + q$, en substituant $\overline{n - 1} \times q$ à la place de p, deviendra $nq - 1q + 1q = nq$; & cette *suite* nq sera la puissance n de la *suite q*.

592. De même si dans la *suite* $p + q$, l'on conçoit que p & q représentent chacune $\frac{1}{2}q$, la *suite* $p + q$ deviendra, par la substitution de $\frac{1}{2}q$ à la place de p & q, la *suite* $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q = q$.
* 143. Ainsi la *suite q* * est la seconde puissance de la *suite* $\frac{1}{2}q$; & la *suite* $\frac{1}{2}q$ est par conséquent la racine quarrée de la *suite q*.
* 574. Si l'on suppose dans la *suite* $p + q$ *, $p = \frac{1}{3}q$, & de même
* 143. $q = \frac{1}{3}q$; la *suite* $+ \frac{1}{3}q + \frac{1}{3}q = \frac{2}{3}q$ qui en viendra * sera la 2^e puissance de la *suite* $\frac{1}{3}q$. Et si après cela on suppose dans la suite $p + q$, que $p = \frac{2}{3}q$ & $q = \frac{1}{3}q$, la *suite* qui
* 143. en naîtra $\frac{2}{3}q + \frac{1}{3}q = \frac{3}{3}q = q$, * sera la 3^e puissance de la *suite* $\frac{1}{3}q$, & par conséquent la *suite* $\frac{1}{3}q$ est la racine 3^e de la *suite q*.

On prouvera de même que les *suites* $\frac{1}{4}q$, $\frac{1}{5}q$, $\frac{1}{6}q$, &c. sont les racines 4^e, 5^e, 6^e, &c. de la *suite q*, & en général que la *suite* $\frac{1}{n}q$ est la racine dont l'exposant est n, (c'est-à-dire un nombre entier quelconque) de la *suite* q.

593. Si l'on suppose $p=\frac{n}{2}q$ & $q=\frac{n}{2}q$ dans la *suite* $p+q$*, on * 574.
aura la *suite* $\frac{n}{2}+\frac{n}{2}q=\frac{2n}{2}q=nq$,* qui est la puissance 2^e * 143.
de la suite $\frac{n}{2}q$; & par conséquent la *suite* $\frac{n}{2}q$ est la racine 2^e de
la *suite* nq, c'est-à-dire * de la *suite* q élevée à la puissance n. * 591.

On prouvera de même que les *suites* $\frac{n}{3}q$, $\frac{n}{4}q$, $\frac{n}{5}q$, sont les racines 3^e, 4^e, 5^e, &c. de la *suite* q élevée à la puissance quelconque dont n est l'exposant; & qu'en général la *suite* $\frac{n}{m}q$ est la racine dont l'exposant est m, c'est-à-dire un nombre entier quelconque, de la suite q élevée à la puissance n; ou, ce qui revient au même, la *suite* $\frac{n}{m}q$ est la puissance dont l'exposant est la fraction quelconque $\frac{n}{m}$, de la *suite* q. Car, par exemple, $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, & $\sqrt[m]{a^{nq}}\ a^{\frac{n}{m}q}$.

COROLLAIRE IV.

594. Si l'on suppose $p=1$ dans la *suite* $a^p \pm \frac{p}{1}b^1a^{p-1}+\frac{p}{1}\times\frac{p-1}{2}b^2a^{p-2}\pm\frac{p}{1}\times\frac{p-1}{2}\times\frac{p-2}{3}b^3a^{p-3}+$ &c. il est évident qu'après la substitution de 1 à la place de p, la *suite* p devient simplement $a^1\pm b^1$; parce que dans tous les termes qui suivent le second, l'un des multiplicateurs du coëfficient, sçavoir $p-1$, devient zéro, c'est-à-dire $1-1=0$; & par conséquent tous les termes qui suivent le second sont zéro.

Si l'on supposoit de même $q=1$ dans la *suite* q, cette suite q deviendroit $a^1\pm b^1$.

Comme aussi en supposant dans la *suite* $p+q$, que $p=1-q$, la *suite* $p+q$, après la substitution de $1-q$ à la place de p, deviendra la *suite* $1-q+q=1$, & elle sera réduite aux deux seuls premiers termes $a^1\pm b^1$, tous les termes suivans devenans zéro, parcequ'un des multiplicateurs de leur coëfficient sera $0=1-q+q-1$.

COROLLAIRE V.

595. D'où il suit que si, dans la *suite* $p+q$ * qui est le produit * 574.
des *suites* p & q, on supose $p=1$ & $q=1$, la *suite* $p+q$,
après la substitution de 1 à la place de p & de q, sera * la 2^e * 143.

puissance de $\overline{a+b}^1$; & par conséquent la *suite* $p+q$, après cette substitution, sera égale à $\overline{a+b}^2$.

Supposant à présent dans la *suite* $p+q$, $p=2$ & $q=1$, il est évident, qu'après la substitution, la *suite* sera égale à $\overline{a+b}^3$.

Enfin si l'on suppose, pour rendre ce 5ᵉ Corollaire général, que n représente un nombre entier quelconque, $\frac{n}{m}$ une fraction quelconque, que q demeure toujours égal à 1, & que l'on substitue successivement $n-1$, $\frac{1}{n}-1$, & $\frac{n}{m}-1$ à la place de p dans la *suite* $p+q$; la *suite* $p+q$ deviendra successivement la *suite* n, la *suite* $\frac{1}{n}$, la *suite* $\frac{n}{m}$. La *suite* n sera la puissance n de $\overline{a+b}^1$, c'est-à-dire la *suite* n sera $\overline{a+b}^1$ élevée à la puissance n, égale à $\overline{a+b}^n$; la *suite* $\frac{1}{n}$ sera la puissance $\frac{1}{n}$ de $\overline{a+b}^1$, c'est-à-dire la *suite* $\frac{1}{n}$ sera la puissance $\frac{1}{n}$ de $\overline{a+b}^1$, ou égale à $\overline{a+b}^{\frac{1}{n}}$; enfin la *suite* $\frac{n}{m}$ sera la puissance $\frac{n}{m}$ de $\overline{a+b}^1$, c'est-à-dire la *suite* $\frac{n}{m}$ sera $\overline{a+b}^1$ élevée à la puissance dont $\frac{n}{m}$ est l'exposant; ou, ce qui est la même chose, elle sera la puissance $\overline{a+b}^{\frac{n}{m}}$. Tout cela est évident par le 3ᵉ Co-
591, rollaire; car ces *suites* n, $\frac{1}{n}$, $\frac{n}{m}$ seront les puissances de la
592 & *suite* q, devenue la *suite* $\overline{a+b}^1$ par la supposition de $q=1$;
593. desquelles les exposans sont n, $\frac{1}{n}$, $\frac{n}{m}$.

COROLLAIRE VI. PROBLÊME I.

Où l'on donne la formule générale pour élever une grandeur complexe quelconque, représentée en général par a + b, *à une puissance quelconque, dont l'exposant soit un nombre quel qu'il puisse être, entier ou rompu, positif ou négatif, représenté par* n.

596. POUR élever une grandeur complexe quelconque $a+b$ à une puissance quelle qu'elle puisse être, dont l'exposant est représenté en général par p; il n'y a qu'à former la *suite*
*575, p suivant * la *loi* des *suites*, dont le premier terme soit a^p,
576 & & dans laquelle un terme quelconque T, dont le rang soit
577. marqué par $n+1$, soit égal au produit du terme t qui le précéde, (dont le rang soit marqué par n) multiplié par

$\pm \frac{p-n+1}{n} \times \frac{b}{a}$; & l'on trouvera la formule générale

$$\overline{a \pm b}^p = a^p \pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^2 a^{p-2} \pm \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} b^3 a^{p-3} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{p-3}{4} b^4 a^{p-4} \pm \&c.$$

Car il est évident par le Corollaire précédent *, que cette *595.
suite p est la *suite* $\overline{a \pm b}^1$ élevée à la puissance dont l'exposant est p.

REMARQUES.

I.

Sur les signes + & — des termes de la formule des puissances.

597. LA *suite* $a^p \pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1} + \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} b^2 a^{p-2} \pm$ &c. étant la puissance p de $a + b$; il est évident que quand b est précédé de +, tous les termes doivent avoir +; quand b a le signe —, tous les termes de la puissance p de $a - b$, dans lesquels le nombre des dimensions de b est impair, comme b^1, b^3, b^5, &c. doivent être précédés du signe —; ces termes sont le 2^e, le 4^e, le 6^e, &c. c'est-à-dire tous les termes dont le rang est marqué par un nombre pair.

II.

Sur l'étendue de la formule à toutes les puissances de a $\pm$ b *dont l'exposant est un nombre quelconque positif ou négatif, entier ou rompu.*

598. LES raisonnemens par lesquels on a démontré que $a^p \pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1} +$ &c. est la puissance p de $a \pm b$, démontrent aussi que quelque nombre entier ou rompu, positif ou négatif, qu'on puisse imaginer, représenté par la lettre p, cette *suite p* est toujours la puissance de $a \pm b$, dont l'exposant est p, quelque nombre que puisse représenter p.

III.

Extension de la formule à toutes les puissances de a $\pm$ b, *dont l'exposant* p *est une grandeur incommensurable.*

599. UNE grandeur incommensurable comme $\sqrt{3}$, ou en général $\sqrt[n]{a^m}$, qu'on supposera représentée par p, peut être conçûe parmi les termes de la progression arithmétique de l'art. 549, qui comprend tous les nombres, comme on l'a fait voir dans l'art. 558. Car on peut concevoir l'unité divisée en un si grand nombre de petites parties égales, que l'incommensu-

rable quelconque p contiendra exactement un certain nombre de ces parties aliquotes, & de plus un petit reste plus petit que l'une de ces parties égales, & même plus petit qu'aucune grandeur donnée. Nommant r ce petit reste, & s la petite grandeur qui manque à ce reste pour être égal à l'une de ces petites parties égales de l'unité, $r + s$ feront une de ces petites aliquotes de l'unité, & $p - r$ sera le nombre en-dessous de l'incommensurable p, & $p + s$ le nombre en-dessus, chacun le plus approchant qu'on puisse concevoir de la grandeur incommensurable p. Cela supposé,

* 596. La *suite* $a^{p-r} \pm \frac{p-r}{1} b^1 a^{p-r-1} + \&c.$ est * la puissance de $a \pm b$ dont l'exposant est le nombre $p - r$. Cette *suite* $p - r$ est évidemment plus petite que la suite $a^p \pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1} + \&c.$ les termes de la premiere étant visiblement chacun plus petit que son correspondant dans la seconde.

* 596. La *suite* $a^{p+s} \pm \frac{p+s}{1} b^1 a^{p+s-1} + \&c.$ est * la puissance de $a \pm b$ dont l'exposant est le nombre $p + s$ le plus proche du nombre $p - r$ qu'on puisse concevoir. Cette *suite* $p + s$ est évidemment plus grande que la *suite* $a^p \pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1} + \&c.$

La *suite* $a^p \pm \frac{p}{1} b^1 a^{p-1} + \&c.$ qui est entre les deux puissances $\overline{a \pm b}^{p-r}$ & $\overline{a \pm b}^{p+s}$ de $a \pm b$, peut donc être regardée comme la puissance de $a \pm b$ dont l'exposant est l'incommensurable p; & même en concevant l'unité divisée en un nombre infini d'aliquotes, les puissances $\overline{a \pm b}^{p-r}$, $\overline{a \pm b}^{p+s}$, & leurs *suites* se réunissent en la puissance $\overline{a \pm b}^p$ & en sa *suite* par l'art. 558.

IV.

Sur la multiplication & la division des puissances d'une grandeur complexe a ± b *réduites en* suites.

600. POUR multiplier une *suite* p, qui est la puissance p de $a \pm b$, par une autre *suite* q, qui est la puissance q de $a \pm b$;
* 588. il n'y a qu'à former * la *suite* $p + q$. Et pour diviser la premie-
* 589. re par la seconde, il n'y a qu'à * former la *suite* $p - q$, & $a^{p+q} \pm \frac{p+q}{1} b^1 a^{p+q-1} + \&c.$ sera le produit qu'on demande; & $a^{p-q} \pm \frac{p-q}{1} b^1 a^{p-q-1} + \&c.$ sera le quotient qu'on cherche.

V.

V.

Sur l'usage de la formule des puissances.

601. LA Formule * des puissances sert à élever toute grandeur, qui peut être représentée par $a \pm b$, à toutes les puissances qu'on peut imaginer, dont l'exposant soit un nombre entier ou rompu, positif ou négatif, ou même une grandeur incommensurable; ainsi elle sert à former toutes les puissances des grandeurs, & à en extraire toutes les racines. Elle est d'un extrême usage dans l'application des Regles de l'Analyse à la résolution des Problêmes les plus composés des Mathématiques. * 596.

Pour l'appliquer à l'usage, quand une grandeur comme $r^2 - x^2$ est proposée à élever à une puissance dont l'exposant est donné, quel qu'il puisse être, par exemple $\frac{1}{3}$; il n'y a qu'à supposer que r^2 est représentée par a de la formule, $-x^2$ par $-b$, & $\frac{1}{3}$ par p; & substituer dans la formule r^2 & les puissances de r^2, à la place de a & des puissances de a; $-x^2$ & ses puissances à la place de $-b$ & de ses puissances; $\frac{1}{3}$ à la place de p dans tous les exposans & dans tous les coëfficiens de la formule; & la *suite* qui viendra de ces substitutions sera la grandeur proposée $r^2 - x^2$ élevée à la puissance dont l'exposant est l'exposant proposé $\frac{1}{3}$. Cette *suite* sera $\overline{r^2 - x^2}^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} x^2 r^{\frac{2}{3} - 1} + \&c.$

Cet exemple suffit pour faire voir la maniere d'appliquer la formule à l'usage, & qu'il n'y a rien de plus facile. Quand l'exposant donné est un nombre entier, on trouve que le nombre des termes que donne la formule devient borné, & que tous les termes de la formule qui suivent les termes réels qu'on a trouvés sont zéro, ayant chacun dans leur coëfficient un multiplicateur qui est zéro.

V I.

602. QUELQUE puissance p qu'on puisse proposer d'une grandeur représentée par $a \pm b$, si l'on en veut un terme quelconque t dont le rang est marqué par le nombre n, on le trouvera toujours immédiatement par l'article 576, comme aussi le coëfficient de ce terme.

On trouveroit de même le terme quelconque t (dont n

marque le rang) du produit ou du quotient d'une puiſſance quelconque p de $a \pm b$ multipliée ou diviſée par une autre puiſſance quelconque q de la même grandeur $a \pm b$.

COROLLAIRE VII.

Où l'on déduit de la formule générale des puiſſances de toutes les grandeurs complexes repréſentées par a ± b, *les autres formules générales des puiſſances des grandeurs complexes qui ont une infinité de termes.*

603. IL y a d'ordinaire dans chaque grandeur complexe de pluſieurs termes, & même d'une infinité de termes, une lettre inconnue qu'on repréſentera par y, qui diſtingue les termes de la grandeur complexe par ſes puiſſances dont les expoſans ſont en progreſſion arithmétique. Cette lettre inconnue dans quelques-unes ne ſe trouve pas dans le premier terme, & dans les autres elle ſe trouve dès le premier terme. On repréſentera les premieres par $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 +$ &c. & les autres par $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6 + gy^7 + hy^8 +$ &c. Ces deux grandeurs complexes chacune d'une infinité de termes repréſenteront toutes les grandeurs complexes poſſibles; & les formules de leurs puiſſances quelconques ſeront les formules générales pour élever toutes les grandeurs poſſibles complexes à toutes les puiſſances qu'on peut imaginer.

Ces formules générales ne ſont gueres d'uſage que dans *l'Analyſe*, on les peut voir dans la *Table de la page* 410, *article* 206, *de l'Analyſe demontrée.* Il ſuffira d'en faire ici concevoir clairement la conſtruction, de maniere qu'on les puiſſe former ſoi-même. La lettre n ayant été priſe pour l'expoſant des puiſſances dans cette Table, on s'en ſervira auſſi ici, & la formule générale des puiſſances des grandeurs repréſentée par $a+b$, ſera $\overline{a+b}^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} a^{n-5} b^5 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} a^{n-6} b^6 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} \times \frac{n-6}{7} a^{n-7} b^7 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} \times \frac{n-6}{7} \times \frac{n-7}{8} a^{n-8} b^8 +$ &c.

Pour élever $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 +$ &c. à la puiſſance quelconque repréſentée par l'expoſant indéterminé n, 1°. il faut conſidérer les deux premiers termes $a + by$ comme s'ils étoient seuls, & les élever à la puissance n par la formule des puissances, & en écrire d'abord autant de termes qu'on voudra qu'en contienne la formule générale; & si l'on veut se borner à cinq termes, on aura $a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 y^1 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 y^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 y^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 y^4 +$ &c. on distingue les termes par les puissances de y, ce qu'on fera dans toute la suite.

2°. Il faut à présent considérer qu'on a la grandeur $a + by + cy^2$, composée de trois termes, à élever a la puissance n, & que l'on a déja la puissance n des deux premiers $a + by$, & qu'il faut chercher les autres termes de la puissance n de $a + by + cy^2$ dans lesquels cy^2 doit se trouver. Pour cela il faut supposer dans la formule des puissances, que les deux premiers termes $a + by$ de la grandeur proposée sont représentés par la seule premiere lettre a de la formule, & que le 3^e terme cy^2 est représenté par b de la formule. Il faut aussi supposer que le premier terme a^n de la formule * représente les termes déja trouvés, & ne doit plus servir dans le reste de l'opération, il ne faut employer que le second & les termes suivans. * 172.

Ainsi la puissance qu'on cherche est $\overline{a + by^1 + cy^2}^n$; l'on a déja découvert les termes de $\overline{a + by}^n$ représentés par a^n de la formule; il faut trouver les termes suivans, représentés par les termes de la formule $\frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 +$ &c.

Le terme $\frac{n}{1} a^{n-1} b^1$ devient par la substitution de $a + by$ à la place de a, & de cy^2 à la place de b, $\frac{n}{1} \times \overline{a + by}^{n-1} \times cy^2$, & il marque qu'il faut élever par la formule, $a + by$ à la puissance $n - 1$, & multiplier chaque terme par $\frac{n}{1} \times cy^2$; & l'on trouvera $\frac{n}{1} \times \overline{a + by}^{n-1} \times cy^2 = \frac{n}{1} a^{n-1} cy^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} a^{n-2} bcy^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b^2 cy^4$. Comme on s'est borné au 5^e terme de la puissance qu'on cherche, le terme $\frac{n}{1} a^{n-1} b^1$ de la formule ne fournit pas d'autres termes pour la puissance qu'on cherche. Il faut passer au terme suivant de la formule.

Ce terme $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2$ devient par la substitution, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \overline{a + by}^{n-2} \times c^2 y^4$, & il marque qu'il faut élever par la formule, $a + by$ à la puissance $n - 2$, & multiplier cette puisſance par $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times c^2y^4$ & l'on trouvera $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\,\overline{a+by}^{\,n-2}\times c^2\,y^4$ $=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}\times c^2\,y^4+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{1}a^{n-3}\,bc^2\,y^5+$ &c. La premiere de ces grandeurs appartient ſeule au 5ᵉ terme de la puiſſance qu'on cherche ; la ſeconde eſt inutile, appartenant au 6ᵉ terme.

Et comme en employant les termes ſuivans de la formule, on trouveroit des grandeurs qui paſſeroient le cinquiéme terme de la puiſſance qu'on cherche, auquel on s'eſt borné, on a tous les termes que l'on vouloit de la grandeur $a+by+cy^2$ élevée à la puiſſance n.

3°. Pour continuer l'opération, il faut ſuppoſer $a+by+cy^2$ repréſentée par a de la formule, & dy^3 par b de la formule, & la puiſſance qu'on cherche eſt $\overline{a+by+cy^2+dy^3}^{\,n}$. Les termes de cette puiſſance repréſentés par a^n de la formule, ſont déja découverts ; il faut trouver le termes repréſentés par les termes ſuivans de la formule, ſçavoir par $\frac{n}{1}a^{n-1}b^1$ $+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+$ &c. Le ſecond de ces termes eſt inutile, parce que $b^2=d^2y^6$ donne une puiſſance de y qui ſurpaſſe la puiſſance y^4 qui eſt celle du 5ᵉ terme de la puiſſance qu'on cherche.

Le terme de la formule $\frac{n}{1}a^{n-1}b^1$ devient par la ſubſtitution, $\frac{n}{1}\times\overline{a+by+cy^2}^{\,n-1}\times dy^3$, que l'on trouvera par le moyen de la formule, égal à $\frac{n}{1}a^{n-1}dy^3+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}a^{n-2}bdy^4+$ &c. Dans les grandeurs qui ſuivent ces deux premieres, les puiſſances de y ſurpaſſeroient y^4 ; ainſi elles paſſeroient le cinquiéme terme de la puiſſance qu'on cherche.

L'on a donc déja tous les termes qu'on cherche de la puiſſance n de $a+by+cy^2+dy^3$.

4°. Pour continuer l'opération, on ſuppoſera $a+by+cy^2$ $+dy^3$ repréſentée par a de la formule, ey^4 par b de la formule, & la puiſſance qu'on cherche eſt $\overline{a+by+cy^2+dy^3+ey^4}^{\,n}$. Les termes déja découverts ſont repréſentés par a^n de la formule, & les termes ſuivans de la formule $\frac{n}{1}a^{n-1}b^1+$ &c. repréſentent ceux qu'on cherche, & l'on n'a beſoin que de $\frac{n}{1}\times a^{n-1}b^1$, par la raiſon qu'on a donnée dans l'art. précédent. Or $\frac{n}{1}a^{n-1}b^1$ devient par la ſubſtitution, $\frac{n}{1}\,\overline{a+by+cy^2+dy^3}^{\,n-1}\times ey^4$, que l'on trouvera par le moyen de la formule générale, égal à $\frac{n}{1} a^{n-1} e y^4 + \&c.$

Comme l'on s'est borné au 5e terme de la puissance qu'on cherche, on a toutes les grandeurs qui composent ces cinq termes, on a dû les écrire, à mesure qu'on les trouvoit, dans le terme qui leur convenoit, c'est-à-dire écrire les unes sous les autres toutes celles dans lesquelles y étoit élevé à un même dégré; & la puissance qu'on vient de trouver étant ainsi ordonnée par rapport à y, est la formule pour élever toute grandeur complexe représentée par $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \&c.$ à la puissance quelconque dont l'exposant est la lettre indéterminée n qui représente toutes sortes de grandeurs.

La maniere dont on a enseigné à découvrir les cinq premiers termes de cette formule, suffit pour apprendre aux Commençans à en trouver autant de termes qu'il leur plaira.

On élevera de la même maniere par le moyen de la formule générale des puissances, la grandeur complexe $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.$ à la puissance dont l'exposant est l'indéterminée n; 1°. supposant seulement d'abord $ay + by^2$ représentés par $a + b$, & en écrivant tous les termes trouvés par la formule jusqu'à celui auquel on voudra se borner; ces termes seront distingués par les puissances de y, & l'on trouvera que les cinq premiers termes sont $\overline{ay + by^2}^{\,n} = a^n y^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 y^{n-1+2=n+1} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 y^{n-2+4=n+2} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 y^{n-3+6=n+3} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 y^{n\ 4+8=n+4} + \&c.$

2°. On supposera que la puissance qu'on cherche est $\overline{\overline{ay + by^2} + cy^3}^{\,n}$, & que a^n de la formule représente les termes déja découverts; & par les termes de la formule $\frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2$, qui deviendront $\frac{n}{1} \times \overline{ay + by^2}^{\,n-1} \times cy^3$ & $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \overline{ay + by^2}^{\,n-2} \times c^2 y^6$, on trouvera les grandeurs $\frac{n}{1} a^{n-1} c \times y^{n+2} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} a^{n-2} bc \times y^{n+3} + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} a^{n-3} b^2 c \times y^{n+4}$, & $+ \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} c^2 \times y^{n+4} + \&c.$ de la puissance qu'on cherche; on écrira ces grandeurs dans les termes qui leur conviennent.

3°. On supposera que la puissance qu'on cherche, est

$\overline{ay+by^2+cy^3+dy^4}^{\,n}$, & que les termes de $ay+by^2+cy^3$ élevée à la puiſſance n, & marquée par a^n, ſont déja découverts; & le ſecond terme de la formule des puiſſances $\frac{n}{1}a^{n-1}b^1$ qui deviendra $\frac{n}{1}\times\overline{ay+by^2+cy^3}^{\,n-1}\times dy^4$, fera découvrir les grandeurs $\frac{n}{1}a^{n-1}\,d\times y^{n-1+4=n+3}+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{1}\,a^{n-2}\,bd\times y^{n-2+2+4=n+4}$ + &c. de la puiſſance qu'on cherche; on les écrira dans les termes qui leur conviennent.

4°. Enfin s'étant borné à cinq termes, on ſuppoſera que l'on cherche la puiſſance $\overline{ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5}^{\,n}$, & qu'on en a déja les termes de $ay+by^2+cy^3+dy^4$ élevée à la puiſſance n, qui ſont repréſentés par a^n de la formule; & le ſecond terme $\frac{n}{1}a^{n-1}\,b$ de la formule, qui deviendra $\frac{n}{1}\times\overline{ay+by^2+cy^3+dy^4}^{\,n-1}\times ey^5$, fera trouver la grandeur $\frac{n}{1}a^{n-1}\,e\times y^{n-1+5=n+4}$ + &c. qui acheve le cinquiéme terme de la puiſſance qu'on cherche.

La puiſſance qu'on vient de trouver étant ordonnée par rapport à y, ſera une formule générale pour élever toute grandeur complexe de tant de termes qu'on voudra, qui peut être repréſentée par $ay+by^2+cy^3$ + &c. à une puiſſance quelconque dont l'expoſant, quel qu'il puiſſe être, eſt repréſenté par l'indéterminée n.

Seconde maniere d'élever les grandeurs complexes a + by + cy² + &c. *&* ay + by² + cy³ + &c. *à une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt repréſenté par l'indéterminée* n.

604. ON peut immédiatement élever les grandeurs complexes d'une infinité de termes $a+by+cy^2$ + &c. & $ay+by^2+cy^3+dy^4$ + &c. à une puiſſance quelconque dont l'expoſant eſt
*575. l'indéterminée n, par la *loi* * des *ſuites*, en partageant chacune de ces grandeurs en deux termes, dont le premier ſera la premiere grandeur de ces grandeurs complexes & le ſecond terme ſera la ſomme de toutes les autres; la premiere ſera ainſi partagée $a+\overline{by+cy^2+dy^3+ey^4}$ + &c. la ſeconde ſera $ay+\overline{by^2+cy^3+ay^4+ey^5}$ + &c. Et l'on formera
*575. par la *loi* * des *ſuites* $\overline{a+\overline{by+cy^2+dy^3+ey^4}+\text{\&c.}}^{\,n}=a^n$ $+\frac{n}{1}\times a^{n-1}\times\overline{by+cy^2+dy^3+ey^4+\text{\&c.}}^{\,1}+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times a^{n-2}\times$

$\overline{by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \&c.}^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times a^{n-3} \times$
$\overline{by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \&c.}^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times a^{n-4} \times$
$\overline{by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \&c.}^4 + \&c.$

Il est évident que la *loi* * qui regne dans les termes de cette suite, est (en nommant T un terme quelconque, t le terme qui le précéde immédiatement, & N le nombre qui marque le rang de t) qu'on trouvera par tout $T = t \times \frac{n - N + 1}{N} \times \frac{by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \&c.}{a}$. Ainsi cette *suite* est * la puissance n de $a + \overline{by + cy^2 + dy^3 + \&c.}$ * 575. * 596.

On réduira ensuite tous les termes qui suivent le premier dans cette puissance, chacun en toutes les grandeurs qui lui conviennent, par la méthode expliquée dans l'article 172, ou, si l'on veut, par le moyen de la formule générale * des *suites*, & on ordonnera tous les termes de la puissance par rapport à y, & l'on aura la puissance n de $a + by + cy^2 + \&c.$ toute ordonnée. * 596 & 603.

On élevera de même $ay + \overline{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}$ à la puissance n en formant par la *loi* des *suites*, la *suite* suivante

$$\overline{ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}^n = a^n y^n + \frac{n}{1} \times a^{n-1} y^{n-1} \times \overline{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}^1 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times a^{n-2} y^{n-2} \times \overline{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times a^{n-3} y^{n-3} \times \overline{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times a^{n-4} y^{n-4} \times \overline{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}^4 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times a^{n-5} y^{n-5} \times \overline{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}^5 + \&c.$$

Il est évident que dans cette *suite* $T = t \times \frac{n - N + 1}{n} \times \frac{by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + \&c.}{ay}$, & qu'elle est par conséquent * la puissance n de la grandeur $ay + \overline{by^2 + cy^3 + \&c.}$ * 595.

On réduira, comme on l'a enseigné dans l'article précédent, chacun des termes de cette *suite* en toutes les grandeurs qui lui conviennent; & après qu'on en aura ordonné tous les termes, elle sera la puissance ordonnée de $ay + by^2 + \&c.$

Remarque.

605. Les puissances n qu'on vient de faire découvrir des grandeurs $a + b$, $a + by + cy^2 + dy^3 + \&c.$ $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \&c.$

seront trois formules générales des puissances de toutes les grandeurs complexes qu'on peut imaginer : Elles serviront à élever par de simples substitutions, toutes les grandeurs complexes particulieres à une puissance quelconque dont l'exposant n représente tous les nombres entiers & rompus, positifs & négatifs, & même les grandeurs incommensurables.

Quand les grandeurs complexes particulieres représentées par les grandeurs complexes générales qu'on vient de marquer, auront quelques termes négatifs, il faudra supposer négatifs les termes correspondans des grandeurs générales ; & dans les formules des puissances, les produits où il y aura de ces grandeurs négatives, dont les dimensions jointes ensemble feront un nombre impair, seront regardés comme négatifs.

Quand il y aura des termes de manque dans les grandeurs complexes particulieres, il faudra supposer égaux à zéro les termes correspondans des grandeurs complexes générales.

APPLICATION DE CE QU'ON A EXPLIQUÉ ET DÉMONTRÉ sur les *suites*, aux *nombres figurés*.

COROLLAIRE VIII.

Sur les coëfficiens des termes des suites.

606. LES coëfficiens des termes d'une *suite* * p, † q, ¶ $p+q$, § n
* 571. (qui est la puissance p, ou q, ou $p+q$, ou n de $a \pm b$) étant pris
† 572. par ordre, c'est-à-dire les coëfficiens du premier terme, du
¶ 574. second, du troisiéme, &c. font eux-même une *suite* dont
§ 603. les termes suivent la même *loi* qui regne parmi * les termes
* 575. de la *suite* dont ils sont les coëfficiens, en y supposant a & b
égales chacune à l'unité.

* 575. Ce Corollaire est évident par la * formation même des *suites*.

On prendra ici pour exemple la *suite* qui est la puissance n de $a \pm b$, parce qu'on s'est servi de l'exposant n dans l'*Analyse démontrée* *.

* Table de la page 410.

Cette *suite* des coëfficiens est $1, 1 \times \frac{n}{1}, 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}, 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$, Pour abréger, on peut ne pas mettre l'unité pour le premier des multiplicateurs de chacun des

des termes de la *ſuite* des coëfficiens qui ſuivent le premier terme, lequel eſt toujours l'unité.

Il eſt inutile de faire voir ici qu'on peut aiſément trouver le quantiéme terme on voudra de cette ſuite, & déterminer les multiplicateurs $\frac{n}{1}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{3}$, &c. qui le compoſent, les Commençans n'y ſçauroient trouver de difficulté.

Corollaire IX.

607. La *ſuite* $1, \frac{n+q}{1}, \frac{n+q}{1} \times \frac{n+q-1}{2}, \frac{n+q}{1} \times \frac{n+q-1}{2} \times \frac{n+q-2}{3}$, &c. eſt le produit de la *ſuite* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. multipliée par la *ſuite* $1, \frac{q}{1}, \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}, \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3}$, &c.

La *ſuite* $1, \frac{n-q}{1}, \frac{n-q}{1} \times \frac{n-q-1}{2}, \frac{n-q}{1} \times \frac{n-q-1}{2} \times \frac{n-q-2}{3}$, &c. eſt le quotient de la *ſuite* $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, &c. diviſée par la *ſuite* $1, \frac{q}{1}, \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2}, \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3}$, &c. Ce Corrollaire eſt évident par ce qui précéde*. *588,

Corollaire X. 589.

608. La *ſuite* qu'on formeroit en élevant $a^1 \pm b^1$ à la puiſſance dont $n - 1 + 1$ eſt l'expoſant, eſt le produit* de la *ſuite* qui *588. eſt la valeur de $\overline{a \pm b}^{n-1}$ par la *ſuite* $\overline{a \pm b}^1$; & il eſt évident que le produit de $\overline{a \pm b}^{n-1}$ par $\overline{a \pm b}^1$ eſt égal à la *ſuite* qui eſt la valeur de $\overline{a \pm b}^n$; car $\overline{a \pm b}^{n-1+1} = \overline{a \pm b}^n$. Ainſi les coëfficiens des termes de la *ſuite* qui eſt la valeur de $\overline{a \pm b}^{n-1+1}$, ſont équivalens aux coëfficiens des termes correſpondans de la *ſuite* qui eſt égale à $\overline{a \pm b}^n$.

Pour avoir les coëfficiens de la *ſuite* $\overline{a \pm b}^{n-1+1}$, il n'y a qu'à multiplier la *ſuite* $\overline{a \pm b}^{n-1}$ par $a \pm b$, comme on le voit ici.

La ſuite $\overline{a \pm b}^{n-1}$.

$$1a^{n-1} \pm \frac{n-1}{1} b^1 a^{n-2} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} b^2 a^{n-3} \pm \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} b^3 a^{n-4} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-4}{4} b^4 a^{n-5}.$$

La ſuite $\overline{a \pm b}^{n-1}$ *multipliée par* $\overline{a \pm b}^1$.

$$1a^n \pm \frac{n-1}{1} b^1 a^{n-1} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} b^2 a^{n-2} \pm \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} b^3 a^{n-3} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-4}{4} b^4 a^{n-4} + \&c.$$

$$\pm 1 b^1 a^{n-1} + \frac{n-1}{1} b^2 a^{n-2} \pm \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} b^3 a^{n-3} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} b^4 a^{n-4}.$$

Ce produit eſt égal à $\overline{a \pm b}^{n-1+1} = \overline{a \pm b}^n$.

Remarques sur la comparaison des coëfficiens des termes de $\overline{a \pm b}^{n-1+1} = \overline{a \pm b}^{n}$ *avec les coëfficiens des termes de* $\overline{a \pm b}^{n-1}$.

I.

609. Il est évident par la formation du produit de $\overline{a \pm b}^{n-1}$ par $\overline{a \pm b}^{1}$ que le coëfficient d'un terme quelconque de $\overline{a+b}^{n-1+1} = \overline{a+b}^{n}$ est la somme du coëfficient du terme correspondant de $\overline{a+b}^{n-1}$ & du coëfficient du terme qui le précéde à gauche. Par exemple, le coëfficient $+\frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2}$ du quatriéme terme de $\overline{a+b}^{n-1+1}$, est la somme du coëfficient $\frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3}$ du 4^e terme de $\overline{a+b}^{n-1}$ & du coëfficient $\frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2}$ du 3^e terme de $\overline{a+b}^{n-1}$.

Mais le coëfficient d'un terme quelconque de $\overline{a-b}^{n-1+1} = \overline{a-b}^{n}$ est la différence du coëfficient du terme correspondant de $\overline{a+b}^{n-1}$, & du coëfficient du terme de $\overline{a+b}^{n-1}$ qui le précéde à gauche.

II.

610. D'où l'on déduit, en nommant $1, c, d, e, f$, &c. les coëfficiens de $\overline{a+b}^{n-1}$ pris de suite, & $1, g, h, i, k$, &c. les coëfficiens de $\overline{a+b}^{n-1+1} = \overline{a+b}^{n}$, que $g = 1 + c$; $h = c + d$; $i = d + e$; $k = e + f$; par conséquent $1 + g + h + i + k = \left\{ \begin{matrix} +1+c+d+e+f \\ +1+c+d+e \end{matrix} \right. = 2 \times \overline{1+c+d+e} + f$, c'est-à-dire que quand le coëfficient f d'un terme de $\overline{a+b}^{n-1}$ est zéro, la somme des coëfficiens de tous les termes correspondans dans $\overline{a+b}^{n-1+1} = \overline{a+b}^{n}$ depuis le premier 1 compris jusqu'au terme k correspondant à f ou zéro aussi compris, est double de la somme des coëfficiens correspondans de $\overline{a+b}^{n-1}$.

III.

611. En mettant dans les *suites* $\overline{a+b}^{n-1+1} = \overline{a+b}^{n}$ & $\overline{a+b}^{n-1}$, l'unité à la place de a & de b, on aura les *suites* des seuls coëfficiens, ausquelles conviennent les choses qu'on vient de faire remarquer.

La formation des nombres figurés *ou des nombres de* différens ordres.

612. LA *suite* générale des coëfficiens $1 . \frac{n}{1} . \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} . \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} . \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} . \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} . \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6}$. &c. peut servir à former les nombres *figurés*, de cette maniere.

1°. Il faut supposer $n = 0$, & écrire le seul premier terme 1, & des zéros ensuite, parce que tous les termes suivans seront égaux à zéro.

2°. Il faut supposer $n = 1$, & écrire sous les termes précédens les deux premiers termes 1 & 1, & les autres qui seront des zéros.

3°. Il faut supposer $n = 2$, & écrire les termes 1 . 2 . 1 . 0 . 0, &c. sous les mêmes termes précédens.

4°. Il faut supposer $n = 3$, & écrire les termes 1 . 3 . 3 . 1 . 0 . 0, &c. sous les termes précédens.

5°. Enfin en supposant ainsi dans la suite générale des coëfficiens, que n est successivement égale à 4, 5, 6, 7, &c. on formera la Table des nombres figurés.

PREMIERE TABLE DES NOMBRES *figurés* *ou des* différens ordres.

	Unités.	1. ordre.	2 ordre.	3 ordre.	4 ordre.	5 ordre.	6 ordre.	7 ordre.	8 ordre.	9 ordre.	10 ordre.	11 ord.	12 ord.
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1er rang parallèle.	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2d	1	2	$\overset{q}{1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3e	1	3	$\overset{p}{3}$	$\overset{l}{1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4e	1	4	$\overset{n}{6}$	$\overset{k}{4}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5e	1	$\overset{c}{5}$	$\overset{m}{10}$	$\overset{j}{10}$	5	1	0	0	0	0	0	0	0
6e	1	6	$\overset{b}{15}$	$\overset{h}{20}$	15	6	1	0	0	0	0	0	0
7e	1	7	21	$\overset{d}{35}$	35	21	7	1	0	0	0	0	0
8e	1	8	28	56	$\overset{e}{70}$	56	28	8	1	0	0	0	0
9e	1	9	36	84	126	$\overset{f}{126}$	84	36	9	1	0	0	0
10e	1	10	45	120	210	252	$\overset{g}{210}$	120	45	10	1	0	0
11e	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0
12e	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

DÉFINITIONS.

613. On nommera *rangs parallèles* chacune des *suites* qui vont de gauche à droite ; le rang supérieur qui commence où il n'y a qu'un terme réel qui est l'unité & des zéros, sera le terme d'où l'on comptera les rangs parallèles, sans y comprendre ce rang : on nommera le premier rang parallèle celui qui n'a que deux termes réels, qui sont chacun l'unité, le second rang parallèle, celui qui est au-dessous, & ainsi de suite.

Chaque colonne de ces *suites* prise en descendant, sera nommé *un rang perpendiculaire*.

La colonne des unités sera le terme d'où l'on comptera les rangs perpendiculaires ; le rang perpendiculaire qui la suit à droite sera le premier ; le suivant, le second ; & ainsi de suite.

Les termes du premier rang perpendiculaire sont les nombres naturels, on les appelle les nombres du *premier ordre* ; les nombres du second rang perpendiculaire sont les nombres du *second ordre* ; & ainsi de suite en allant de gauche à droite.

Quelques-uns nomment les nombres du *second ordre*, les nombres *triangulaires* ; ceux du *troisiéme ordre*, les nombres *pyramidaux* ; ils donnent ainsi d'autres noms aux nombres *des ordres* suivans, qu'il est inutile de sçavoir : mais tous ces nombres des *différens ordres* ainsi rangés s'appellent les nombres *figurés*.

COROLLAIRES QUI SUIVENT LA FORMATION des nombres *figurés*.

I.

Les formules indéterminées des termes d'un même rang paralèlle, pris de suite.

614. En supposant que n représente le quantiéme est un rang parallèle, c'est-à-dire que n représente 2, si c'est le second rang parallèle ; 3, si c'est le 3^e^ ; 8, si c'est le 8^e^, &c. $\frac{n}{1}$ est la formule qui représente le nombre du premier ordre de ce même rang parallèle ; $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ est la formule qui représente le nombre du *second ordre* du même rang parallèle ; $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ est la formule qui représente le nombre du *troi-*

ſiéme ordre de ce même rang paralèlle, & ainſi de ſuite.

D'où l'on voit que, ſuivant cette ſuppoſition, n repréſente le nombre du *premier ordre* d'un rang parallèle en même tems qu'elle repréſente le quantiéme eſt ce rang.

615. D'où il ſuit qu'en déterminant n à un des nombres entiers qu'elle repréſente; par exemple ſi $n=4$, & en ſubſtituant 4 à la place de n, 1°. le nombre des termes de ce rang parallèle déterminé ſera fini, & il aura autant de termes qu'il y a d'unités dans $n+1$. Car il eſt clair que tous les termes qui ſuivront celui dont le rang eſt marqué par $n+1$, ſeront zéro. 2°. Les termes d'un même rang parallèle pris deux à deux, l'un & l'autre à une même diſtance du premier & du dernier, comme le terme qui ſuit la colonne des unités & le pénultiéme, ſont égaux; de même le terme éloigné de deux rangs de la colonne des unités, & le terme antépénultiéme ſont égaux, & ainſi des autres. Il n'y a qu'à ſubſtituer ſoi même ſucceſſivement 2, 3, 4, 5, &c. à la place de n dans la formule, & l'opération même en fera connoître la raiſon.

II.

616. Quand on a déterminé n à repréſenter un rang parallèle déterminé, comme le 5^e^ rang; ſi l'on veut ſe ſervir de la même n pour repréſenter le rang précédent, ſçavoir le 4^e^, il eſt évident qu'il faut prendre $n-1$; ſi l'on veut exprimer le rang ſuivant, ſçavoir le 6^e^, il faut prendre $n+1$. Il en eſt de même des autres. Pour avoir enſuite l'expreſſion du nombre de *tel ordre* qu'on voudra, en ſuppoſant par exemple que $n-1$ repréſente le quantiéme eſt le rang parallèle où il ſe trouve; par exemple pour avoir le nombre du *premier ordre* du rang $n-1$, il eſt évident qu'il faut écrire $\frac{n-1}{1}$; pour avoir le nombre du *ſecond ordre*, il faut écrire $\frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2}$; celui du *troiſiéme ordre*, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-3}{3}$. Il en eſt de même des autres; c'eſt-à-dire qu'il faut ſubſtituer $n-1$ à la place de n dans les formules de l'art. 614.

III.

617. D'où l'on voit clairement qu'en déterminant n à repréſenter le quantiéme eſt un rang parallèle quelconque, le précédent étant $n-1$, les termes du rang n ſeront les coëffi-

ciens de la *suite* égale à $\overline{a+b}^{n}$, & les termes du rang précédent $n-1$, les coëfficiens de la *suite* $\overline{a+b}^{n-1}$.

IV.

Les propriétés *principales des nombres* figurés.

618. Un nombre quelconque de la Table* pris dans tel rang
*612. parallèle, & dans tel rang perpendiculaire qu'on voudra, comme 15 pris dans le 6e rang parallèle & dans le 2e rang perpendiculaire, est toujours égal au nombre qui est immédiatement au-dessus, dans le rang parallèle qui le précéde (dans cette supposition 10) plus au nombre 5 qui est au-dessus à gauche dans le rang parallèle précédent. C'est une suite évidente des articles 609 & 611.

Quelques-uns déduisent de cette *propriété* la formation des nombres *figurés*, & il est visible qu'il suffit que la colonne perpendiculaire des unités soit donnée avec le seul premier terme de la colonne du *premier ordre*, pour trouver tous nombres *figurés* par cette *propriété*.

V.

619. Il suit de la *propriété* précédente, qu'un terme quelcon-
612. que de la Table, comme 20 pris dans le 6e rang parallèle & dans le 3e rang perpendiculaire, est égal à la somme de tous les termes qui sont au-dessus de lui, dans le rang perpendiculaire qui le précéde à gauche depuis l'unité comprise jusqu'au terme qui est à côté de lui non compris. Par exemple $20 = 10 + 6 + 3 + 1$.

Car soit nommé h un terme quelconque comme 20, & ceux qui sont au-dessus dans le même rang perpendiculaire, j, k, l, les termes qui sont au-dessus à gauche, m, n, p, q; on aura par la propriété précédente $h = j + m$; $j = k + n$; $k = l + p$; $l = 0 + 1$. Donc $h = m + n + p + 1$. Il est facile d'appliquer cette démonstration à tout autre terme.

C'est par le moyen de cette seconde *propriété*, qu'on forme ordinairement la Table des nombres *figurés*, la seule colonne des unités étant donnée: car il n'y a qu'à ajouter les unités pour trouver de suite les nombres du *premier ordre*; l'addition faite de suite des nombres du *premier ordre*, donnera ceux du *second ordre*; & ainsi de suite.

620. On voit encore par ce Corollaire, que n exprimant un nombre du *premier ordre*, exprime en même tems la

somme de la colonne des unités jusqu'au rang parallèle de ce nombres non compris ; $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ est l'expression de la somme de la colonne des nombres du *premier ordre* jusqu'au rang parallèle n non compris ; & de même $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ est la somme des nombres du *second ordre* qui sont depuis 1 compris jusqu'au rang parallèle n non compris ; & ainsi de suite.

VI.

621. La somme entiere des termes d'un rang parallèle quelconque est double * de la somme du rang parallèle qui le précéde, & elle est la moitié de la somme du rang parallèle qui la suit, ou qui est immédiatement au-dessous ; ainsi les sommes des rangs parallèles prises de suite depuis l'unité, sont une progression double. D'où il suit que pour avoir la somme de tous les termes d'un rang parallele quelconque dont le rang soit marqué par n, il n'y a qu'à élever 2 à la puissance dont l'exposant soit n. Par exemple la puissance 12^e de 2 est égale à la somme des termes du 12^e rang parallèle.

* 610.

SECONDE TABLE.

Seconde disposition des nombres figurés.

622.

Rangs parallèles.	Unités.	1. ordre.	2. ordre.	3. ordre.	4. ordre.	5. ordre.	6. ordre.
1^{er}	1	1	$\overset{m}{1}$	1	1	1	1
2^e	1	2	$\overset{l}{3}$	4	5	6	7
3^e	1	3	$\overset{k}{6}$	10	15	21	28
4^e	1	4	$\overset{j}{10}$	$\overset{h}{20}$	35	56	84
5^e	1	$\overset{c}{5}$	$\overset{b}{15}$	$\overset{d}{35}$	$\overset{e}{70}$	$\overset{f}{126}$	$\overset{g}{210}$
6^e	1	6	21	56	126	252	462

SUPPOSITIONS.

I.

623. ON donne encore aux nombres *figurés* cette seconde disposition ; sçavoir, on met dans le premier rang parallèle, qui est dans cette seconde disposition, tout le premier en haut, tous les premiers termes réels qui sont les unités des nombres *figurés* ; dans le second rang parallèle, tous les

ſeconds termes des nombres *figurés* ; dans le 3ᵉ rang parallèle, tous leurs 3ᵉˢ termes réels ; & ainſi de ſuite.

II.

624. DANS cette ſeconde diſpoſition un terme quelconque d a au-deſſus de lui le même nombre h que dans la premiere diſpoſition ; mais il a à côté de lui à gauche dans le même rang parallèle, le même nombre b qu'il avoit au-deſſus de lui à gauche dans le rang parallèle qui le précédoit dans la premiere diſpoſition.

COROLLAIRE VII.

Les propriétés *des nombres* figurés *dans la ſeconde diſpoſition.*

625. D'où il ſuit que dans la ſeconde diſpoſition un terme quel-
* 618. conque d eſt égal *, 1°. à la ſomme du terme h qui eſt au deſſus de lui, & du terme b qui eſt à côté de lui à gauche ; c'eſt-à-dire $d=h+b$: 2°. que ce même terme quelconque d
* 619. eſt égal * à la ſomme $b+j+k+l+m$ de tous les termes de la colonne perpendiculaire qui le précéde immédiatement à gauche, depuis l'unité compriſe juſqu'au terme b compris qui eſt à côté de ce terme d dans le même rang parallèle.

C'eſt par l'une ou l'autre de ces deux *propriétés* qu'on forme la Table des nombres *figurés* dans la ſeconde diſpoſition par de ſimples additions, la colonne perpendiculaire des unités étant donnée avec le ſeul premier terme 1 de la colonne qui contient les nombres naturels ou du *premier ordre*.

REMARQUE.

626. AYANT pris n pour marquer un rang parallèle quelconque des nombres *figurés* dans la premiere diſpoſition, par exemple le 5ᵉ, & pour marquer en même tems le nombre du *premier ordre* de ce même rang parallèle, qui eſt, par exemple 5, qu'on nommera c ; il eſt évident que dans la ſeconde diſpoſition, n marque encore le même rang parallèle, c'eſt-à-dire le 5ᵉ qu'on a pris pour exemple, & le nombre 5 ou c du *premier ordre* qui eſt dans ce rang parallèle ; mais que pour rapporter les termes ſuivans b, d, e, f, g de la ſeconde diſpoſition aux rangs parallèles qui leur conviennent dans la premiere diſpoſition, il faut marquer le rang parallèle

parallèle du terme ſuivant b, par $n+1$; celui de d par $n+2$; celui de e par $n+3$; celui de f par $n+4$; celui de g par $n+5$, &c.

COROLLAIRE VIII.

Où l'on donne la formule générale des termes de chaque rang parallèle des nombres figurés *de la ſeconde diſpoſition.*

627. ON déduit de là que pour avoir la formule générale des termes de chaque rang parallèle de la ſeconde diſpoſition, par le moyen de la formule qui ſert à les exprimer en général dans la premiere diſpoſition, $\frac{n}{1}$ doit demeurer l'expreſſion d'un nombre c du *premier ordre* dans l'une & l'autre diſpoſition : mais $\frac{n+1}{1}$ étant l'expreſſion du rang parallèle du terme ſuivant b dans la ſeconde diſpoſition, il faut mettre dans $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ (qui exprime le terme du *ſecond ordre* de la premiere Table du rang parallèle n) $\frac{n+1}{1}$ à la place de n ; & l'on aura $\frac{n+1}{1} \times \frac{n+1-1}{2} = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ pour l'expreſſion du terme b dans la ſeconde Table ; ainſi $b = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$.

On trouvera, par des raiſonnemens ſemblables, que $d = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$; $e = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$; $f = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5}$; $g = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}$; & ainſi de ſuite.

Ainſi la formule qui exprime les termes d'un même rang parallèle de la ſeconde Table, eſt $1, \frac{n}{1}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, &c.

COROLLAIRE IX.

628. ET comme un terme quelconque d'un rang parallèle de la ſeconde Table * eſt la ſomme de tous les termes de la colonne perpendiculaire qui précéde immédiatement à gauche depuis l'unité compriſe juſqu'au terme qui eſt à gauche dans le même rang parallèle auſſi compris ; il eſt évident que les termes de la formule générale précédente expriment auſſi les ſommes des termes des colonnes perpendiculaires. * 625.

On doit remarquer que dans la ſeconde diſpoſition des *nombres figurés* de la ſeconde Table, le premier rang perpendiculaire eſt égal au premier rang parallèle ; le ſecond rang perpendiculaire eſt égal au ſecond rang parallèle ; le troisiéme rang perpendiculaire eſt égal au 3^{e} rang parallèle; le 4^{e} rang perpendiculaire eſt égal au 4^{e} rang parallèle, & ainſi de ſuite. On en trouvera aiſément la raiſon en ſubſtituant le nombre qui convient à chaque rang parallèle, à la place de n, dans la formule qui exprime chaque rang parallèle.

De la diverſité qu'on peut mettre dans les nombres figurés, *en conſervant pourtant la même formule.*

629. ON peut diverſifier les nombres *figurés* dans la premiere & dans la ſeconde diſpoſition, d'une infinité de façons, en conſervant néanmoins les formules qui en expriment d'une maniere indéterminée chaque rang parallèle : voici comment. Il faut ſuppoſer une lettre a qui marque d'une maniere indéterminée telle grandeur qu'on voudra, & multiplier chaque terme de la premiere & de la ſeconde Table par a; il eſt évident qu'en ſubſtituant un même nombre ou une même grandeur, qui ſoit telle qu'on voudra, au lieu
* 612. de a dans tous les termes de l'une * & de l'autre † Table, ils
† 622. ſeront tous changés. Cependant il eſt clair que $1 \times a$, $1 \times a \times \frac{n}{1}$, $1 \times a \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, $1 \times a \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, $1 \times a \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$, &c. ſera la formule qui exprimera d'une maniere indéterminée
* 614. les termes pris de ſuite de chaque rang parallèle de la * 1re Table après ſon changement; & que $1 \times a$, $1 \times a \times \frac{n}{1}$, $1 \times a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $1 \times a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, $1 \times a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$, &c. ſera la formule qui exprimera d'une maniere indéterminée les
* 627. termes pris de ſuite de chaque rang parallèle de la * ſeconde Table après ſon changement.

Cette maniere de diverſifier les nombres *figurés*, & d'en avoir la formule générale, peut ſervir pour les réſolutions de différens Problêmes, & pour rendre ces réſolutions générales. Les nombres *figurés* de la premiere & de la ſeconde Table ſeront nommés *ſimples*; & lorſqu'ils ſeront diverſifiés, on les nommera *changés*.

De l'union des nombres figurés *les uns avec les autres, & des formules générales qui expriment ces nombres joints enſemble.*

630. L'UNION des nombres *figurés* d'un *ordre* avec les nombres *figurés* d'un autre *ordre* ou du même *ordre*, peut ſervir

à trouver les résolutions de plusieurs beaux Problêmes ; & les formules qui expriment ces nombres *figurés* joints ensemble, servent à rendre ces résolutions générales. Cette union se peut faire par l'addition, la soustraction, la multiplication & la division.

Par addition.

631. 1°. On a déja fait voir* qu'en ajoûtant ensemble deux termes de différens *ordres* d'un même rang parallèle, qui sont immédiatement l'un après l'autre dans la premiere Table, comme b & h, leur somme $b+h=d$; c'est-à-dire, les sommes prises de suite des termes de deux *ordres* qui se suivent, sont elles-mêmes les nombres de celui de ces deux *ordres* qui est le plus à droite. Par exemple, les sommes des termes du *premier ordre*, & des termes correspondans du *second ordre*, sont elles-mêmes les nombres du *second ordre*; les sommes des termes du *second ordre* & des termes correspondans du *troisiéme ordre*, sont les nombres du *troisiéme ordre*, &c. * 618.

D'où l'on voit que la formule des termes d'un rang parallèle de la premiere Table étant 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-3}{3}$, &c. la formule des nombres des différens *ordres* formés par l'addition qu'on vient d'expliquer, sera $1+\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1}+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}+\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, &c. Mais comme les termes d'un rang parallèle qui viennent de la formation précédente, sont les termes d'un rang parallèle qui suit immédiatement le rang parallèle qui a servi à les former, il est évident* qu'il n'y a qu'à mettre $n+1$ à la place de n dans la formule de chaque rang parallèle de la premiere Table, & l'on aura encore 1, $\frac{n+1}{1}$, $\frac{n+1}{1}\times\frac{n}{2}$, $\frac{n+1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n-1}{3}$, $\frac{n+1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n-1}{3}\times\frac{n-2}{4}$, &c. pour la formule des nombres que donne la formation précédente. * 616.

632. 2°. Supposé qu'on change les nombres des différens *ordres* de la premiere Table, & ceux de la seconde Table* en multipliant chacun des termes par l'indéterminée a, & qu'on fasse un second changement* en multipliant chacun des termes par une autre indéterminée b; on pourra ajouter les termes de chaque colonne perpendiculaire d'un même *ordre*, qui ont reçu le premier changement, avec les termes d'une colonne perpendiculaire du même *ordre* ou d'un *ordre* différent qui ont reçu le second changement, & trou- * 629. * 629.

ver la formule générale qui exprimera de ſuite les termes de chaque rang parallèle après cette addition.

Ces additions ſe peuvent faire de différentes manieres; mais il ſuffira d'en mettre quelques exemples pour faire voir aux Commençans la maniere de faire ces unions de toutes les façons qu'ils pourront imaginer.

TROISIEME TABLE.

Colonnes perpendiculaires.

Rangs. parallèles.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1er	$1a + 0$	$1a + 0$	$1a + 0$	$1a + 0$	$1a + 0$	$1a + 0$
2d	$1a + b$	$2a + b$	$3a + b$	$4a + b$	$5a + b$	$6a + b$
3e	$1a + 2b$	$3a + 3b$	$6a + 4b$	$10a + 5b$	$15a + 6b$	$21a + 7b$
4e	$1a + 3b$	$4a + 6b$	$10a + 10b$	$20a + 15b$	$35a + 21b$	$56a + 28b$
5e	$1a + 4b$	$5a + 10b$	$15a + 20b$	$35a + 35b$	$70a + 56b$	$126a + 84b$

REMARQUES.

I.

633. DANS cette Table chaque colonne perpendiculaire contient, 1°. une colonne perpendiculaire de la ſeconde Table, dont chaque terme eſt multiplié par a; elle contient, 2°. une colonne perpendiculaire de la ſeconde Table qui ſuit immédiatement la précédente en allant vers la droite, dont chaque terme eſt multiplié par b; les termes où eſt b ſont ajoutés aux termes où eſt a; & dans chaque colonne les termes b ſont d'un ſeul rang plus bas que les termes a; c'eſt-à-dire zéro eſt le premier terme des b.

II.

634. La formule qui exprime de ſuite un rang parallèle des a
629. eſt $1 \times a, a \times \frac{n}{1}, a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}, a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, &c. mais les termes b étant d'un rang plus bas que les termes a, pour avoir la formule qui exprime les termes d'un rang parallèle des b (en retenant n pour repréſenter le quantiéme eſt un rang parallèle des a), il eſt évident qu'il faut employer $n - 1$ pour repréſenter le quantiéme eſt le rang parallèle des b correſpondant au rang parallèle des a repréſenté par n; ainſi la formule qui exprimera le rang parallèle des termes b qui ſont dans le rang parallèle des a marqué par n, ſera $b \times \frac{n-1}{1}, b \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}, b \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}, b \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}$, $b \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} \times \frac{n+3}{5}$; & ainſi de ſuite, parce qu'il faut mettre $n - 1$ à la place de n dans la formule des a.

En ajoutant ensemble les termes correspondans de la formule des a & de la formule des b, on aura $1\times a + b\times\frac{n-1}{1}$, $a\times\frac{n}{1} + b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2} + b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3} + b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}$, &c. pour la formule qui exprime les termes de suite de chaque rang parallèle de la 3e Table.

III.

635. Si l'on met successivement dans la troisiéme Table les nombres 1, 2, 3, 4, &c. ou tels nombres qu'on voudra à la place de a; & si l'on met en même-temps le même nombre ou un autre tel qu'on voudra à la place de b, on formera une infinité de Tables où les nombres des différens *ordres* diversifiés seront joints deux à deux les uns avec les autres; & en substituant successivement les mêmes nombres, sçavoir ceux qu'on a pris pour a, & ceux qu'on a pris pour b dans la formule qui précéde, l'on aura les formules qui exprimeront d'une maniere indéterminée chaque rang parallèle de ces Tables.

IV.

636. Voici encore un exemple pour rendre plus familiere cette union des nombres *figurés* faite par addition.

QUATRIEME TABLE.

$1a + 0$.	$1a + 0$.	$1a + 0$.	$1a + 0$.	$1a + 0$.	$1a + 0$
$2a + 1b$.	$3a + 1b$.	$4a + 1b$.	$5a + 1b$.	$6a + 1b$.	$7a + 1b$
$3a + 2b$.	$6a + 3b$.	$10a + 4b$.	$15a + 5b$.	$21a + 6b$.	$28a + 7b$
$4a + 3b$.	$10a + 6b$.	$20a + 10b$.	$35a + 15b$.	$56a + 21b$.	$84a + 28b$
$5a + 4b$.	$15a + 10b$.	$35a + 20b$.	$70a + 35b$.	$126a + 56b$.	$210a + 84b$

Dans chaque colonne perpendiculaire de cette quatriéme Table, les nombres *figurés* de la seconde Table d'une même colonne perpendiculaire, chacun multiplié par a, sont joints avec les nombres *figurés* de la même colonne perpendiculaire de la même seconde Table, chacun multiplié par b; c'est-à-dire les nombres d'un *ordre* multiplié par a, sont ajoutés dans cette quatriéme Table aux nombres du même *ordre* multipliés par b, de façon pourtant que les termes b sont dans la même colonne perpendiculaire d'un rang plus bas que les termes a ausquels ils sont ajoutés.

La formule qui exprime chaque rang parallèle des a sera donc* $a\times\frac{n}{1}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}$, &c. la formule qui * 629,
exprime les termes du rang parallèle des b qui se trouvent & 634.

dans le rang parallèle des *a* marqué par *n*, (& qui doit être marqué pour les *b* par $n-1$ selon la ſuppoſition), ſera donc*
* 634. $b\times\frac{n-1}{1}$, $b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$, $b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}$, $b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}$, &c.

Joignant enſemble les termes correſpondans de ces deux formules, on trouvera $a\times\frac{n}{1}+b\times\frac{n-1}{1}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}+b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}+b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}$, $a\times\frac{n}{1}\times\frac{n+1}{2}\times\frac{n+2}{3}\times\frac{n+3}{4}+b\times\frac{n-1}{1}\times\frac{n}{2}\times\frac{n+1}{3}\times\frac{n+2}{4}$, &c. pour la formule qui exprime d'une maniere indéterminée chaque rang parallèle de la quatriéme Table.

Si l'on ſuppoſe, dans la quatriéme Table & dans la formule précédente, *a* & *b* chacune égale à l'unité, l'on aura l'union des nombres ſimples de chaque *ordre*, avec ceux du même *ordre*; on aura auſſi la formule qui exprime les termes de chaque rang parallèle de ces nombres ainſi joints enſemble.

En mettant ſucceſſivement d'autres nombres que l'unité à la place de *a* & de *b*, dans la quatriéme Table & dans ſa formule, on aura les unions des nombres de chaque *ordre* aux nombres du même *ordre*, avec toutes les diverſités qu'ils peuvent recevoir; on aura auſſi les formules qui expriment chaque rang parallèle de ces nombres *figurés changés* ainſi joints enſemble.

De l'union des nombres figurés *par la ſouſtraction.*

637. ON peut ôter, en allant de ſuite, les nombres d'un *ordre*, ſimples ou changés, des nombres d'un autre *ordre* ou du même *ordre*, ſimples ou changés, cette ſouſtraction donne leurs différences; on peut enſuite trouver la formule qui exprime d'une maniere indéterminée les termes de chacun des rangs parallèles qui réſulteront de cette union; on va donner deux Exemples, qui ſuffiront pour faire concevoir cette ſorte d'union.

CINQUIEME TABLE.

1. ordre.	2. ordre.	3. ordre.	4. ordre.	5. ordre.	6. ordre.
1 — 0 := 1.	1 — 0 := 1.	1 — 0 := 1.	1 — 0 := 1.	1 — 0 := 1.	1 — 0 := 1
2 — 1 := 1.	3 — 1 := 2.	4 — 1 := 3.	5 — 1 := 4.	6 — 1 := 5.	7 — 1 := 6
3 — 2 := 1.	6 — 3 := 3.	10 — 4 := 6.	15 — 5 := 10.	21 — 6 := 15.	28 — 7 := 21
4 — 3 := 1.	10 — 6 := 4.	20 — 10 := 10.	35 — 15 := 10.	56 — 21 := 35.	84 — 28 := 56
5 — 4 := 1.	15 — 10 := 5.	35 — 20 := 15.	70 — 35 := 35.	126 — 56 := 70.	210 — 84 := 126
6 — 5 := 1.	21 — 15 := 6.	56 — 35 := 21.	126 — 70 := 56.	252 — 126 := 126.	462 — 210 := 252

Dans chaque colonne perpendiculaire de cette Table, les nombres d'un *ordre* sont retranchés de suite des nombres du même *ordre*, & les différences sont les nombres de *l'ordre* qui doit le précéder à gauche par les *propriétés* * des * 625.
nombres *figurés*; c'est ce qu'on a rendu sensible en mettant les différences entre les colonnes. En supposant que n marque le quantiéme est un rang parallèle, (c'est-à-dire que si l'on veut le 4e rang parallèle, alors $n = 4$; si l'on veut le 6e, $n = 6$, &c.) la formule des termes positifs d'un rang parallèle * sera $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, &c. mais les termes né- * 627.
gatifs d'un rang parallèle étant d'un rang plus bas que les positifs, il est évident que $n - 1$ marque le rang parallèle des termes négatifs qui se trouvent dans le rang n des positifs; ainsi en mettant $n - 1$ au lieu de n dans la formule précédente, on aura la formule des termes négatifs du rang parallèle désigné par n pour les positifs. La formule des termes négatifs d'un rang parallèle sera donc $\frac{n-1}{1}$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}$, $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}$, &c.

En joignant ensemble les termes correspondans de la formule des termes positifs & de la formule des négatifs, on trouvera $\frac{n}{1} - \frac{n-1}{1}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} - \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}$, &c. pour la formule qui exprime les termes d'un rang parallèle de la cinquiéme Table.

638. On peut remarquer dans chaque rang parallèle, que le terme positif d'une colonne & le négatif faisant ensemble un terme de *l'ordre* qui précéde à gauche dont le rang parallèle est désigné par n, les termes de la formule précédente de la 5e Table doivent être équivalens, pris par ordre, à ceux-ci, 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$, &c.

SIXIEME TABLE.

	1. ordre.	2. ordre.	3. ordre.	4. ordre.	5. ordre.	6. ordre.
	$1a - 0$.	$1a - 0$.	$1a - 0$.	$1a - 0$.	$1a - 0$.	$1a - 0$
639.	$2a - 1b$.	$3a - 1b$.	$4a - 1b$.	$5a - 1b$.	$6a - 1b$.	$7a - 1b$
	$3a - 2b$.	$6a - 3b$.	$10a - 4b$.	$15a - 5b$.	$21a - 6b$.	$28a - 7b$
	$4a - 3b$.	$10a - 6b$.	$20a - 10b$.	$35a - 15b$.	$56a - 21b$.	$84a - 28b$

Cette Table est faite de la précédente en multipliant tous les termes positifs de chaque colonne par a, & les négatifs par b; ainsi la formule qui exprime de suite les termes de chaque rang parallèle est $a \times \frac{n}{1} - b \times \frac{n-1}{1}$, $a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} - b \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$, $a \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} - b \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}$, &c.

REMARQUES.

I.

640. LES Exemples qu'on vient de donner sur l'union des nombres *figurés* simples & changés, faite par l'addition & par la soustraction, suffisent pour faire concevoir aux Commençans toutes les autres unions qu'on en pourroit faire par la multiplication & par la division, sans qu'il soit nécessaire d'en prolonger ce traité; & ils suffisent aussi pour leur faire concevoir qu'on peut joindre ensemble non-seulement deux *ordres*, mais trois, quatre, &c. & même les joindre ensemble par des opérations différentes d'addition, de soustraction, de multiplication & de division; & qu'on peut toujours trouver les formules qui exprimeront d'une maniere indéterminée chaque rang parallèle des termes qui résulteront de ces unions.

II.

641. La formule qui exprime l'union des nombres d'un *ordre* avec les nombres du même *ordre* ou d'un autre *ordre*, faite par addition, peut servir à exprimer l'union des mêmes nombres faite par soustraction; & cela, en supposant que le signe + qui joint les deux parties de chacun des termes de la formule, représente d'une maniere indéterminée les signes + ou — des unions particulieres représentées par la formule.

III.

La connoissance des nombres *figurés* simples & diversifiés, de la maniere de les unir ensemble, & de trouver les formules qui expriment de suite les termes de chaque rang parallèle, sert dans les Mathématiques à résoudre beaucoup de Problêmes qui sont fort composés, & qui renferment chacun un grand nombre de cas; on en va mettre ici quelques Exemples, pour donner aux Commençans une idée de ces nombres.

Usages des nombres figurés pour les combinaisons.

QUAND on propose d'arranger ensemble plusieurs choses deux à deux, trois à trois, on désigne chacune de ces choses par

par une lettre ; & l'on arrange les lettres, & leurs arrangemens représentent les arrangemens proposés.

Les arrangemens qui ne contiennent que les mêmes lettres, & ne different qu'en ce qu'une même lettre occupe une place, comme la premiere dans l'un, & une autre place, comme la derniere dans l'autre, & qui ne font qu'un même produit répété, retiennent le nom d'arrangemens ; comme *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*. On a expliqué dans l'art. 93 la maniere de trouver le nombre des arrangemens de deux lettres, de trois lettres, & de tant de lettres qu'on voudra déterminer.

642. Les arrangemens de tant de lettres qu'on voudra, prises deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. qui font autant de produits différens (dans lesquels on n'a point d'égard aux places qu'occupent les lettres), s'appellent *combinaisons*. Tous les six produits qui précedent ne font qu'une seule combinaison des trois lettres a, b, c; c'est-à-dire, il n'y a qu'une combinaison de trois lettres prises toutes trois ensemble, qu'on exprime par celui des six arrangemens précédens qu'on voudra. Cependant pour se faire un ordre, on mettra dans les combinaisons les lettres selon l'ordre qu'elles ont dans l'alphabet. On suppose que toutes les lettres dont on cherche les combinaisons sont différentes.

THEORÊME.

643. LA formule * $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, &c. qui exprime chaque rang parallèle * de la premiere Table, exprime aussi le nombre des combinaisons d'autant de lettres qu'on voudra en déterminer, en supposant ce nombre de lettres représenté par n. Voici comment : * 614. * 612.

Le nombre des choses ou des lettres dont on veut les combinaisons (par exemple 6 s'il y a six lettres différentes) doit être supposé représenté par n ; le premier terme de la formule, qui est $\frac{n}{1}$, représente combien de fois ces lettres peuvent être prises une à une ; par exemple, que six choses ne peuvent être prises une à une que six fois.

Le second terme de la formule $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ représente combien de fois ces lettres peuvent être combinées deux à deux ; par exemple, que six lettres peuvent être combinées 2 à 2, 15 fois, parce qu'en substituant 6 à la place de n, il vient $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} = 15$.

Le 3^e terme $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$ représente combien de fois elles peuvent être prises 3 à 3. Dans cet exemple il y a 20 combinaisons de six lettres, parce qu'en mettant 6 à la place de n, on trouve $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} = 20$; & ainsi de suite.

Démonstration. Pour former toutes les combinaisons, par exemple de cinq choses représentées par a, b, c, d, e, prises une à une, ensuite deux à deux, puis trois à trois, & ainsi de suite jusqu'à cinq à cinq; 1°. il est évident qu'il faut écrire les cinq lettres de suite, ou dans une colonne; & qu'on aura le nombre de fois que ces cinq lettres peuvent être prises une à une, qui est $5 = n$.

2°. Qu'en prenant le produit ab de la premiere par la seconde; les deux produits ac, bc des deux premieres par la 3^e c; les trois produits des trois premieres par la 4^e d; enfin les quatre produits des quatre premieres par la 5^e e, on formera toutes les combinaisons deux à deux : & la somme de ces produits est, par l'opération même, & par les articles 619 & 620, le terme du *second ordre* de la premiere Table qui est dans le cinquiéme rang parallèle; & la formule de ce terme est $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

$$\left\{\begin{array}{l} ab \\ ac, bc \\ ad, bd, cd \\ ae, be, ce, de \end{array}\right.$$

3°. Qu'on formera toutes les combinaisons trois à trois, en prenant le produit abc, des trois premieres lettres; les trois produits abd, acd, bcd, formés des combinaisons ab, ac, bc, des trois premieres, prises deux à deux, multipliées par la 4^e d; enfin les six produits abe, ace, bce, ade, bde, cde, formés des combinaisons ab, ac, bc, ad, bd, cd, des quatre premieres, prises deux à deux, par la 5^e e. La somme de tous ces produits est, par l'opération même & par les articles 619 & 620, le terme du *troisiéme ordre* de la premiere Table du rang parallèle désigné par $n = 5$; & la formule de ce terme
*614. est * $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} = 1 + 3 + 6 = 10$.

4°. Qu'on formera toutes les combinaisons des mêmes lettres quatre à quatre, en prenant le produit $abcd$, des quatre premieres, & les quatre produits $abce$, $abde$, $acde$, $bcde$, formés des combinaisons abc, abd, acd, bcd, des quatre

premieres lettres prises trois à trois, multipliées par la 5^e *e*. La somme de ces produits est, par l'opération qui les fait découvrir, & par les articles 619 & 620, le terme du 4^e *ordre* de la premiere Table du même rang parallèle désigné par $n=5$; & la formule de ce terme est * $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ *614.
$=1+4=5$.

5°. Enfin qu'on ne peut avoir qu'une combinaison *abcde* des cinq mêmes lettres prises cinq à cinq; comme aussi le terme du 5^e *ordre* de la premiere Table du rang parallèle désigné par $n=5$, est $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} = 1$.

Ce sont là toutes les combinaisons possibles de cinq lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, cinq à cinq; & l'on verra clairement, en se rendant familiere la méthode de former les combinaisons expliquées dans les cinq articles précédens, qu'en prenant quelque nombre de lettres qu'on voudra, & supposant ce nombre égal à n, & prenant en même tems le rang parallèle de la premiere Table désigné par n; le nombre du *premier ordre* de ce rang, qui est représenté par $\frac{n}{1}$, marquera combien de fois ces lettres peuvent être prises une à une; le nombre du *second ordre* du rang parallèle n, dont la formule est $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, marquera combien de fois ces lettres peuvent être prises deux à deux; le nombre du *troisiéme ordre* $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, marquera le nombre de leurs combinaisons trois à trois; & ainsi de suite. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

644. UN nombre de lettres différentes quelconque étant représenté par n, si on le partage en deux parties p, $n-p$, telles que leur somme $p+n-p$ soit égale à n; le nombre des combinaisons de ces lettres (dont le nombre est n) prises autant ensemble qu'il y a d'unités dans p, (c'est-à-dire prises 3 à 3, si $p=3$; prises 4 à 4, si $p=4$) est toujours égal au nombre des combinaisons de ces même lettres prises autant ensemble qu'il y a d'unités dans $n-p$.

Par exemple, s'il y a cinq lettres, le nombre de leurs combinaisons une à une est égal au nombre de leurs combinaisons 4 à 4, parce que $1\ (p) + 4\ (n-p) = 5\ (n)$. De même le nombre de leurs combinaisons 2 à 2 est égal au nombre de leurs combinaisons 3 à 3, parce que $2+3=5$. De même s'il y a sept lettres différentes, le nombre de leurs combinaisons 3 à 3 est égal au nombre de leurs combinaisons 4 à 4, parce que $3\,(p)+4\,(+n-p)=7\,(n)$; & ainsi des autres.

Pour le voir clairement, il n'y a qu'à faire attention qu'en prenant le produit de toutes les lettres, par exemple des cinq lettres $a\,b\,c\,d\,e$, & effaçant successivement de ce produit les lettres a, b, c, d, e, prises une à une; les cinq produits qui resteront seront exactement les combinaisons de ces cinq lettres prises 4 à 4; & qu'en effaçant successivement du même produit $a\,b\,c\,d\,e$ des cinq lettres, chacun des produits des mêmes cinq lettres prises 2 à 2; les produits restans seront toutes les combinaisons des cinq lettres prises 3 à 3; ce qu'il est facile d'appliquer à tout autre Exemple.

D'où l'on voit que pour trouver toutes les combinaisons d'un nombre de lettres déterminé, comme de six ou sept, prises une à une, 2 à 2, 3 à 3, &c. jusqu'à 6 à 6, s'il y en a 6; il suffit de former les combinaisons de ces lettres prises une à une, 2 à 2, 3 à 3, jusqu'à la moitié du nombre six des lettres qui est pair, & jusqu'à la moitié, moins un, du nombre des lettres s'il est impair, comme jusqu'à 3 à 3 s'il y a sept lettres: car les combinaisons suivantes se trouveront toutes par le moyen de celles qui sont déja découvertes.

645. *Seconde Démonstration du Théorême.* Si on multiplie de suite les grandeurs complexes $\overline{x+a}\times 1$, $\overline{x+a}\times\overline{x+b}$, $\overline{x+a}\times\overline{x+b}\times\overline{x+c}$, $\overline{x+a}\times\overline{x+b}\times\overline{x+c}\times\overline{x+d}$, $\overline{x+a}\times\overline{x+b}\times\overline{x+c}\times\overline{x+d}\times\overline{x+e}$, & ainsi de suite; & qu'on distingue les termes des produits par les puissances de x; on formera la septiéme Table; & après s'être rendue familiere la formation de ces produits, on verra clairement, 1°. que chacun de ces produits contient, dans les coëfficiens de ses termes, toutes les combinaisons d'autant de lettres prises une à une, deux à deux, trois à trois, &c. qu'il y a d'unités dans l'exposant de la plus haute puissance de x; par exemple dans le produit D, le coëfficient du second terme contient les quatre lettres a, b, c, d prises une à une; le coëfficient du troisiéme terme contient toutes les combinaisons de ces quatre lettres prises deux à deux; le coëfficient du quatriéme terme

SEPTIEME TABLE.

A $1x + a$

B $1x^2 \left\{\begin{matrix} +a \\ +b \end{matrix}\right\} \times x + ab$

C $1x^3 \overset{F}{\left\{\begin{matrix} +a \\ +b \\ +c \end{matrix}\right\}} \times x^2 \overset{G}{\left\{\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\}} \times x + abc$

D $1x^4 \left\{\begin{matrix} +a \\ +b \\ +c \\ +d \end{matrix}\right\} \times x^3 \overset{H}{\left\{\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \end{matrix}\right\}} \times x^2 \left\{\begin{matrix} +abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \end{matrix}\right\} \times x + abcd$

E $1x^5 \left\{\begin{matrix} +a \\ +b \\ +c \\ +d \\ +e \end{matrix}\right\} \times x^4 \left\{\begin{matrix} +ab \\ +ac \\ +bc \\ +ad \\ +bd \\ +cd \\ +ae \\ +be \\ +ce \\ +de \end{matrix}\right\} \times x^3 \left\{\begin{matrix} +abc \\ +abd \\ +acd \\ +bcd \\ +abe \\ +ace \\ +bce \\ +ade \\ +bde \\ +cde \end{matrix}\right\} \times x^2 \left\{\begin{matrix} +abcd \\ +abce \\ +abde \\ +acde \\ +bcde \end{matrix}\right\} \times x + abcde$

HUITIEME TABLE,

Qui contient les puissances de $x + a$.

a $1x + 1a$

b $1x^2 + 2ax + 1a^2$

c $1x^3 + \overset{f}{3ax^2} + \overset{g}{3a^2x} + 1a^3$

d $1x^4 + 4ax^3 + \overset{h}{6a^2x^2} + 4a^3x + 1a^4$

e $1x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + 1a^5$

terme contient les combinaiſons de ces quatre lettres priſes trois à trois; enfin le dernier terme contient la ſeule combinaiſon de ces quatre lettres priſes toutes quatre enſemble. 2°. Que le coëfficient de tel terme qu'on voudra de ces produits, par exemple le coëfficient H du 3e terme du produit D, contient autant de combinaisons quil y en a dans le coëfficient G du terme du produit C qui est immédiatement au dessus de H, & dans le coëfficient F du terme du produit C, qui est à gauche au-dessus de H; car le coëfficient H est formé des coëfficiens G & F.

Si après cela on suppose que toutes les lettres $a,b,c,d,e,$&c. des produits de la 7e Table sont toutes égales entr'elles, par exemple qu'elles sont toutes égales à a; les produits A, B, C, D, E, &c. de la 7e Table deviendront les produits a, b, c, d, e, &c. de la 8e Table, & ces produits sont les puissances parfaites prises de suite de $x+a$. Si l'on se rend familier ce changement des produits de la 7e Table en ceux de la 8e, on appercevra clairement, 1°. que les nombres qui sont les coëfficiens des termes des produits de la 8e Table, expriment exactement le nombre des combinaisons des coëfficiens des termes correspondans de la 7e Table; par exemple, le coëfficient (h) du 3e terme du produit (d), qui est 6, exprime les six combinaisons du coëfficient H du 3e terme du produit D. 2°. Que chaque coëfficient numérique, comme (h) de la 8e Table, est la somme des deux coëfficiens numériques (g) & (f) qui sont au-dessus de (h), sçavoir (g), est immédiatement au-dessus de (h), & (f) est à gauche au-dessus.

Il suit de-là & des articles 619 & 620, que les coëfficiens numériques de la 8e Table sont exactement les nombres de la 1re Table, & que les rangs parallèles sont les mêmes.

Par conséquent la formule des termes de chaque rang pa-
*614. rallèle de la 1re Table, qui est * $\frac{n}{1}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$, &c. est aussi la formule des coëfficiens numériques de chaque rang parallèle de la 8e Table. Ainsi cette formule exprime le nombre des combinaisons d'autant de lettres differentes qu'on en voudra déterminer, prises une à une, deux à deux, &c. en supposant ce nombre de lettres représenté par n. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

Il y a d'autres combinaisons de plusieurs lettres differentes, dans lesquelles la même lettre peut être répétée plusieurs fois, de façon cependant que toutes les combinaisons soient différentes les unes des autres; on en a vû un Exemple *dans l'art.* 268, *page* 251. Le nombre de ces combinaiſons peut auſſi s'exprimer d'une maniere indéterminée & générale par le moyen des formules des nombres *figurés :* mais l'Exemple qu'on vient de donner ſuffit pour faire voir aux Commençans comment on peut ſe ſervir des formules des nombres *figurés* pour trouver les expreſſions indéterminées & générales des autres ſortes de combinaiſons.

Uſage de l'union des nombres figurés.

ON va mettre ici deux Exemples de cet uſage pour en donner une idée aux Commençans.

646. *PREMIER EXEMPLE.*

NEUVIEME TABLE.

Rangs parallèles.		Expreſſions équivalentes.
1er	$1x$	$1x \mid -0-0.+0+0.-0-0.+0+0$
2d	$1x^2-2$	$1x^2-1\times2-0.+0+0.-0-0.+0+0$
3e	$1x^3-3x$	$1x^3-1\times2-1\times x.+0+0.-0-0.+0+0$
4e	$1x^4-4x^2+2$	$1x^4-1\times2-2\times x^2+1\times2+0.-0-0.+0+0$
5e	$1x^5-5x^3+5x$	$1x^5-1\times2-3\times x^3+2\times2+1\times x.-0-0.+0+0$
6e	$1x^6-6x^4+9x^2-2$	$1x^6-1\times2-4\times x^4+3\times2+3\times x^2-1\times2-0.+0+0$
7e	$1x^7-7x^5+14x^3-7x$	$1x^7-1\times2-5\times x^5+4\times2+6\times x^3-3\times2-1\times x.+0+0$
8e	$1x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2$	$1x^8-1\times2-6\times x^6+5\times2+10\times x^4-6\times2-4\times x^2+1\times2+0$
&c.		

Chacun des rangs parallèles de cette 9^e Table, qu'on peut continuer à l'infini (c'eſt-à-dire, on peut y ajouter de nouveaux rangs parallèles), eſt un cas d'un Problême qui en contient une infinité. On peut réduire tous ces cas à une ſeule expreſſion générale qui exprime d'une maniere indéterminée chacun des rangs parallèles, par le moyen de l'union des nombres *figurés*. Voici comment.

1°. Les puiſſances de x diſtinguent les termes de chaque rang parallèle; l'expoſant de la plus haute puiſſance de x eſt égal au nombre qui exprime le quantiéme eſt le rang parallèle; par exemple x^4 eſt le premier terme du 4^e rang parallèle; x^5 eſt le premier terme du 5^e, & ainſi des autres. Les expoſans de x vont en diminuant de 2 d'un terme à l'autre en allant de gauche à droite dans le même rang parallèle. D'où il ſuit qu'en ſuppoſant que le nombre qui déſigne chaque rang parallèle eſt égal à n, c'eſt-à-dire que $n = 3$ pour le 3^e rang parallèle, que $n = 4$ pour le 4^e rang, &c. les puiſſances de x, dans les termes d'un même rang parallèle pris de ſuite, ſeront x^n, x^{n-2}, x^{n-4}, &c. & quand on trouvera x^0,

* 154. alors * $x^0 = 1$, c'eſt-à-dire x ne ſera point dans ce terme-là.

2°. Les coëfficiens de la premiere colonne perpendiculaire ſont les unités; les coëfficiens de la ſeconde, de la 3^e^, de la 4^e^, &c. ſont de ſuite les colonnes perpendiculaires de
* 633. la * 3^e^ Table, à commencer par la premiere, après y avoir ſubſtitué 2 à la place de a & 1 à la place de b, & après avoir rendu négatifs les termes de la premiere colonne, de la 3^e^, de la 5^e^, de la 7^e^, &c. de la troiſiéme Table, comme on le peut voir par les expreſſions équivalentes de la 9^e^ Table.

3°. La formule qui exprimera d'une maniere indéterminée les coëfficiens des colonnes perpendiculaires de la 9^e^ Table, à commencer par la ſeconde colonne en allant à
* 634. droite, devroit donc être celle de la * 3^e^ Table. Cette formule de la 3^e^ Table eſt, en mettant 2 au lieu de a & 1 au lieu de b, $-1 \times 2 - 1 \times \frac{n-1}{1}$, $2 \times \frac{n}{1} + 1 \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$, $-2 \times \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} - 1 \times \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3}$, &c.

4°. Mais dans la 9^e^ Table, le premier rang parallèle de la ſeconde colonne perpendiculaire commence d'un rang plus bas que celui de la premiere colonne; le premier rang parallèle de la 3^e^ colonne commence de deux rangs plus bas que le premier rang de la ſeconde; le premier rang parallèle de la 4^e^ commence de deux rangs plus bas que le premier rang de la 3^e^; & cela continue de colonne en colonne en allant de gauche à droite, la plus à droite commençant à deux rangs plus bas que la précédente.

5°. C'eſt pourquoi il faut, pour rendre la formule de la 3^e^ Table propre à la 9^e^ Table, après y avoir mis 2 au lieu de a & 1 au lieu de b, & après avoir ſuppoſé que n marque le quantiéme eſt un rang parallèle de la 9^e^ Table, c'eſt-à-dire que $n=4$ pour le 4^e^ rang, que $n=5$ pour le 5^e^ rang parallèle, &c. il faut, dis-je, faire attention que le terme de la ſeconde colonne de la 9^e^ Table qui eſt dans le rang parallèle n, doit être marqué par $n-1$; que le terme de la troiſiéme colonne du même rang parallèle doit être marqué par $n-1-2=n-3$; celui de la 4^e^ colonne par $n-3-2=n-5$; celui de la 6^e^ par $n-5-2=n-7$; celui de la 7^e^ par $n-9$; & ainſi de ſuite.

6°. D'où il ſuit qu'en ſubſtituant partout dans la formule de la 3^e^ Table, 2 au lieu de a, 1 au lieu de b; & ſubſtituant enſuite

ensuite dans le second terme de cette formule, $n-1$ au lieu de n; dans le 3^e terme, $n-3$ au lieu de n; dans le 4^e, $n-5$ au lieu de n; dans le 5^e, $n-7$ au lieu de n; & ainsi de suite en diminuant de 2 d'un terme à l'autre qui le suit à droite, & rendant négatifs les termes impairs, sçavoir le premier, le 3^e, le 5^e, &c. on aura la formule qui exprime de suite les coëfficiens des termes d'un rang parallèle de la 9^e Table, à commencer par le second terme, & allant de suite au 3^e, 4^e, &c. On ne dit rien du coëfficient du premier terme, qui est toujours l'unité.

7°. Cette formule des coëfficiens sera donc 1 pour le premier terme de chaque rang parallèle, $-1 \times 2 - 1 \times \frac{n-2}{1}$ pour le second terme, $+2 \times \frac{n-3}{1} + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2}$ pour le 3^e terme; $-2 \times \frac{n-5}{1} \times \frac{n-4}{2} - 1 \times \frac{n-6}{1} \times \frac{n-5}{2} \times \frac{n-4}{3}$ pour le 4^e terme; $+2 \times \frac{n-7}{1} \times \frac{n-6}{2} \times \frac{n-5}{3} + 1 \times \frac{n-8}{1} \times \frac{n-7}{2} \times \frac{n-6}{3} \times \frac{n-5}{4}$ pour le 5^e, &c.

En abrégeant l'expression de ces coëfficiens, c'est-à-dire en réduisant les deux parties dont chaque coëfficient est composé en une somme, on aura la formule des coëfficiens 1, $-1 \times \frac{n}{1}$, $+\frac{n}{1} \times \frac{n-3}{2}$, $-\frac{n}{1} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-5}{3}$, $+\frac{n}{1} \times \frac{n-5}{2} \times \frac{n-6}{3} \times \frac{n-7}{4}$, &c.

8°. L'expression indéterminée de tous les termes de chaque rang parallèle de la 9^e Table, sera donc $1\,x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} + \frac{n}{1} \times \frac{n-3}{2} x^{n-4} - \frac{n}{1} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-5}{3} x^{n-6} + \frac{n}{1} \times \frac{n-5}{2} \times \frac{n-6}{3} \times \frac{n-7}{4} x^{n-8} -$ &c.

En mettant successivement dans cette expression indéterminée les nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c. à la place de n tant dans les coëfficiens que dans les exposans, on la réduira successivement aux termes du second rang parallèle, du troisiéme, du quatriéme, &c. de la 9^e Table. *Ce qui étoit proposé.*

647. SECOND EXEMPLE.

DIXIEME TABLE.

Rangs parallèles.						
1er	$1\,x^2$					
2d	$4\,x^2 -$	$1\,x^4$				
3^e	$9\,x^2 -$	$6\,x^4 +$	$1\,x^6$			
4^e	$16\,x^2 -$	$20\,x^4 +$	$8\,x^6 -$	$1\,x^8$		
5^e	$25\,x^2 -$	$50\,x^4 +$	$35\,x^6 -$	$10\,x^8 +$	$1\,x^{10}$	
6^e	$36\,x^2 -$	$105\,x^4 +$	$112\,x^6 -$	$54\,x^8 +$	$12\,x^{10} -$	$1\,x^{12}$
&c.						

Expressions équivalentes.

$$\left.\begin{array}{r}1+0\\3+1\\6+3\\10+6\\15+10\\21+15\end{array}\right\}\times x^2 \left\{\begin{array}{r}-0-0\\-1-0\\-5-1\\-15-5\\-35-15\\-70-35\end{array}\right\}\times x^4 \left\{\begin{array}{r}+0+0\\+0+0\\1+0\\7+1\\28+7\\84+28\end{array}\right\}\times x^6$$

$$\left\{\begin{array}{r}-0-0\\-0-0\\-0-0\\-1-0\\-9-1\\-45-9\end{array}\right\}\times x^8 \left\{\begin{array}{r}+0+0\\+0+0\\+0+0\\+0+0\\+1+0\\+11+1\end{array}\right\}\times x^{10} \left\{\begin{array}{r}-0-0\\-0-0\\-0-0\\-0-0\\-0-0\\-1-0\end{array}\right\}\times x^{12}$$

Chacun des rangs parallèles de cette 10^e Table (qu'on peut continuer à l'infini) exprime un cas d'un Problême qui en a une infinité. On peut réduire tous ces cas à une seule expression indéterminée par le moyen de l'union des nombres *figurés*; de cette maniere,

1°. Les puissances de x distinguent les termes de chaque rang parallèle, & ces puissances de x sont de suite x^2, x^4, x^6, &c.

2°. Les coëfficiens de la premiere colonne perpendiculaire sont formés par l'union des nombres du *second ordre* avec les nombres du même *ordre* pris d'un rang plus bas; les coëfficiens de la seconde colonne sont formés de l'union des nombres du 4^e *ordre* avec les nombres du même *ordre* pris d'un rang plus bas; les coëfficiens de la 3^e colonne sont faits de l'union des nombres du 6^e *ordre* avec les nombres du même *ordre* pris d'un rang plus bas; & ainsi de suite en sautant un *ordre* d'une colonne à l'autre: mais les coëfficiens des colonnes dont le nombre est pair, de la 2^e, 4^e, 6^e, &c. sont négatifs. Tout cela se voit clairement par les expressions équivalentes des coëfficiens.

3°. Pour faire la formule de ces unions, il n'y a qu'à prendre la formule de chacun des *ordres* dont on a besoin dans
* 627. la formule * de la seconde Table; & l'on aura (en supposant que n exprime le quantiéme est un rang parallèle) $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$ pour l'expression de chaque nombre du *second ordre*; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}$ pour le 4^e *ordre*; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}$ pour le 6^e *ordre*; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6} \times \frac{n+6}{7} \times \frac{n+7}{8}$ pour le 8^e *ordre*; & ainsi de suite.

Après cela il faut supposer $n = n - 1$, & substituer $n - 1$ au lieu de n dans toutes les expressions précédentes, & elles deviendront les expressions indéterminées des mêmes *ordres*, mais pris d'un rang plus bas; & l'on aura $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ pour le *second ordre*; $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}$ pour le 4^e *ordre*; $\frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} \times \frac{n+3}{5} \times \frac{n+4}{6}$ pour le 6^e *ordre*; & ainsi de suite.

Enfin il faut joindre les termes correspondans d'un même *ordre* de la premiere & de la seconde expression, & l'on aura l'expression indéterminée d'un nombre de chacun des *ordres* ici marqués, uni au nombre du même *ordre* pris d'un rang plus bas. Ainsi $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ sera l'expression de l'union du *second ordre* ; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4}$ sera l'expression de l'union du 4^e *ordre* ; $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} \times \frac{n+3}{5} \times \frac{n+4}{6}$ sera l'expression de l'union du 6^e *ordre* ; & ainsi de suite.

4°. Mais dans les colonnes perpendiculaires de la dixiéme Table, 1°. les rangs parallèles baissent d'un rang d'une colonne à l'autre ; 2°. les coëfficiens des colonnes, dont le nombre est pair, de la 2^e, 4^e, 6^e, &c. sont négatifs. Il ne reste donc plus que deux choses à faire pour rendre la formule précédente de l'union des nombres des mêmes *ordres*, propre à la dixiéme Table ; sçavoir, 1°. en supposant que n représente le quantiéme est un rang parallèle de la premiere colonne de la 10^e Table, il faut supposer $n - 1$ pour représenter le rang parallèle de la seconde colonne, $n - 2$ pour la 3^e colonne, $n - 3$ pour la 4^e, $n - 4$ pour la 5^e, & ainsi de suite ; & sans toucher à l'expression de l'union du *second ordre*, substituer $n - 1$ à la place de n dans l'expression de l'union du 4^e *ordre* ; $n - 2$ au lieu de n dans l'expression de l'union du 6^e *ordre* ; $n - 3$ au lieu de n dans l'expression de l'union du 8^e *ordre*, & ainsi de suite ; &, 2°. rendre négatives les expressions qu'on trouvera du 4^e *ordre*, du 8^e, du 12^e, &c. & l'on aura la formule des coëfficiens de chaque rang parallèle de la 10^e Table.

Cette expression sera $\frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2}$ pour la premiere colonne, qui se réduit à $\frac{n^2}{1}$.

$- \frac{n-1}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n+1}{3} \times \frac{n+2}{4} - \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n}{3} \times \frac{n+1}{4}$ pour la seconde, qui se peut réduire à $- \frac{n^2 \times n^2 - 1}{3 \times 4}$.

$+ \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n}{3} \times \frac{n+1}{4} \times \frac{n+2}{5} \times \frac{n+3}{6} + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3} \times \frac{n}{4} \times \frac{n+1}{5} \times \frac{n+2}{6}$ pour la 3^e, qui peut se réduire à $+ \frac{n^6 - 5n^4 + 4n^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6}$, & qu'on peut encore réduire à $+ \frac{n^2 \times n^2 - 1 \times n^2 - 4}{3 \times 4 \times 5 \times 6}$.

La maniere de trouver ces trois expressions suffit pour faire concevoir qu'on trouvera de même les expressions qui conviennent aux colonnes suivantes.

5°. Ainsi l'expression indéterminée de tous les termes de chaque rang parallèle de la dixiéme Table pris de suite, sera $n^2 x^2 - \frac{n^2 \times n^2 - 1}{3 \times 4} x^4 + \frac{n^2 \times n^2 - 1 \times n^2 - 4}{3 \times 4 \times 5 \times 6} x^6 -$ &c.

REMARQUES.

I.

648. Dans le Problême dont la 10^{e} Table, continuée à l'infini, contient tous les cas, l'expression qu'on vient de trouver, qui exprime seule tous les cas d'une maniere indéterminée, est le quarré de la grandeur qui convient à chaque cas; ainsi pour avoir l'expression indéterminée de la grandeur même qui convient à chaque cas, il faut tirer la racine quarrée de l'expression qu'on vient de trouver; ou, ce qui revient au même, il faut élever cette expression indéterminée à la puissance dont l'exposant est $\frac{1}{2}$. Cela est facile par la 3^{e} formule générale * des puissances de toute grandeur complexe d'un nombre infini de termes, représentée par $ay+by^2+cy^3$ + &c. car il n'y a qu'à substituer dans la 3^{e} formule générale des puissances, l'exposant $\frac{1}{2}$ à la place de l'exposant indéterminé n, & à la place de $ay+by^2$ &c. la grandeur complexe ci-dessus $n^2x^2 - \frac{n^2 \times n^2 - 1}{3 \times 4} x^4$ + &c.

* Table de la page 410 de l'Analyse démontrée, dont la construction est dans les articles 603 & 604 ci-dessus.

II.

On pourroit déduire des *suites* que l'on a expliquées dans cette Section, les propositions fondamentales de l'*Arithmétique des infinis*, par lesquelles on démontre la *Géométrie des indivisibles*. Mais depuis l'heureuse découverte du calcul différentiel & du calcul intégral, (lesquels calculs sont expliqués & démontrés dans le commencement de la seconde & de la troisiéme Partie du second Volume de l'*Analyse démontrée*), on trouve d'une maniere bien plus aisée & plus générale, & pour ainsi dire par de simples traits de plume en employant ces calculs, les mêmes choses que l'on trouvoit par la Géométrie des indivisibles: cela est cause que la Géométrie des indivisibles est devenue inutile, & par conséquent l'Arithmétique des infinis qui ne servoit qu'à cette Géométrie.

SECTION IV.

Où l'on explique deux usages de l'union de la progression arithmétique avec la géométrique. Le premier sert dans le calcul des nombres, réduits en parties décimales, à trouver le rang où l'on doit mettre chaque chiffre. Le second comprend l'invention & l'usage des logarithmes.

AVERTISSEMENT.

LE calcul des grandeurs numériques réduites en parties décimales, surpasse tellement en facilité le calcul des nombres ordinaires, & des fractions qui en naissent, que de notre tems on n'employe presque plus que le calcul décimal dans la résolution des Problêmes mathématiques qui ont besoin du calcul des nombres & de leurs fractions. Pour peu qu'on se soit rendu familier ce calcul décimal, on trouve sans peine les rangs où l'on doit placer les chiffres qui naissent des multiplications, des divisions, des formations de puissances, & des extractions de racines des grandeurs décimales. Les Commençans peuvent se servir de l'union de la progression arithmétique avec la géométrique, pour distinguer ces rangs, de la maniere qu'on va expliquer.

SUPPOSITION.

649. (a) +6. +5. +4. +3. +2. +1. +0. −1. −2. −3. −4. −5. −6
A 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3

EN supposant une grandeur numérique réduite en parties décimales, comme la grandeur A, on peut, à cause * de la propriété de l'expression des nombres entiers & de * celle des parties décimales, regarder tous les chiffres de la grandeur A chacun dans le rang qu'il occupe, comme étant, pour ainsi dire, les termes d'une progression géométrique décuple; c'est-à-dire qu'en allant de droite à gauche, le rapport d'un chiffre, selon la valeur qu'il a dans le rang où il se trouve, au même chiffre pris avec la valeur qu'il auroit s'il étoit dans le rang précédent à gauche; ce rapport, dis-je, est $\frac{1}{10}$; & en allant de gauche à droite, ce rapport est $\frac{10}{1}$.

* 11.
* 12.

Quand le même chiffre est dans tous les rangs, la progression géométrique décuple est exacte, & les chiffres (qui sont le même chiffre répété) en sont les termes. Mais quand tous les chiffres sont différens, comme il arrive ordinairement; alors on n'a d'égard qu'aux rangs des chiffres, ces rangs tiennent lieu des termes de la progression décuple. Le rang des unités est le premier; ceux qui le précédent vers la gauche sont les rangs des dixaines, centaines, &c. les rangs qui sont vers la droite du rang des unités, sont les rangs des dixiémes parties de l'unité, des centiémes, &c. comme on le voit ici dans la progression décuple B.

La progression décuple dont les termes représentent par ordre les rangs des nombres entiers à gauche de l'unité, & les rangs des parties décimales à la droite de l'unité.

$$+5 \,.\, +4 \,.\, +3 \,.\, +2 \,.\, +1 \,.\, 0 \,.\, -1 \,.\, -2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5$$

$$B\ 100000 \,.\, 10000 \,.\, 1000 \,.\, 100 \,.\, 10 \,.\, 1 \,.\, \frac{1}{10} \,.\, \frac{1}{100} \,.\, \frac{1}{1000} \,.\, \frac{1}{10000} \,.\, \frac{1}{100000}$$

650. On peut joindre la progression arithmétique à cette espéce de progression géométrique, qu'on peut concevoir dans l'expression d'un nombre entier qui a des parties décimales, (dans laquelle les rangs tiennent lieu des termes de la progression géométrique) en concevant ou écrivant zéro sur le rang des unités; $+1$, $+2$, $+3$, &c. sur les rangs vers la gauche des dixaines, centaines, &c. & -1, -2, -3, &c. sur les rangs des dixiémes, centiémes, &c.

On nommera les termes de la progression arithmétique les *indices* des rangs de la géométrique.

COROLLAIRE.

651. Il suit de la Supposition précédente, 1°. que dans la multiplication des nombres réduits en parties décimales, il n'y a qu'à ajouter les *indices* des chiffres multiplians & multi-
*560. pliés, & * la somme sera l'*indice* du rang du produit. 2°. Dans la division il n'y a qu'à ôter l'*indice* du chiffre qui est le diviseur de l'*indice* du chiffre qui est le dividende, & le reste sera
*561. l'*indice* * du rang du quotient. 3°. Quand on éleve un chiffre d'un nombre décimal à une puissance dont l'exposant est un nombre entier donné, il faut multiplier l'*indice* du chiffre qu'on veut élever à la puissance donnée par l'exposant

donné, & le produit sera * l'*indice* du rang de la puissance * 562.
qu'on cherche. 4°. Quand on veut extraire la racine (dont l'exposant est un nombre entier donné) d'un chiffre d'un nombre décimal, il n'y a qu'à diviser l'*indice* du chiffre dont on veut extraire la racine par l'exposant donné, & le quotient sera * l'*indice* du rang de la racine qu'on cherche ; par- * 562.
ce que c'est la même chose de diviser le premier de ces deux *indices* par le second, que de multiplier le premier de ces *indices* par la fraction dont le numérateur seroit l'unité, & le dénominateur seroit le second *indice*.

Par exemple si on multiplie $\overset{+3}{4}000$ par $0.0\overset{-2}{2}$; la somme $+3-2=+1$ des *indices* $+3$ & -2 du multiplié 4 & du multipliant 2, est l'*indice* du rang du produit 8, qu'on doit écrire de cette sorte $\overset{+1}{8}0.00$.

Si l'on multiplie $0.00\overset{-3}{2}$ par $0.00000\overset{-6}{4}$; il faut ajouter les *indices* -3 & -6, & la somme -9 marque qu'il faut écrire le produit $0.00000000\overset{-9}{8}$.

Si l'on divise $0.00000000\overset{-9}{8}$ par $0.00000\overset{-6}{4}$; il faut ôter l'*indice* -6 du diviseur, de l'*indice* -9 du dividende, & le reste -3 est l'*indice* du rang du quotient, lequel est $0.00\overset{-3}{2}$.

De même si l'on divise $0.0\overset{-2}{4}0$ par $\overset{+1}{2}0$; il faut ôter l'*indice* $+1$ du diviseur, de l'*indice* -2 du dividende ; & le surplus, qui est -3, est l'*indice* du rang du quotient qui est $0.00\overset{-3}{2}$.

REMARQUE.

QUAND le chiffre du diviseur n'est pas contenu même une fois dans le chiffre du dividende ; par exemple s'il falloit diviser $0.0\overset{-2}{1}0$ par $\overset{+1}{2}0$, l'*indice* du rang du quotient doit être augmenté d'une unité négative. Dans cet exemple le quotient de $0.0\overset{-2}{1}0$ divisé par $\overset{+1}{2}0$, est $0.000\overset{-4}{5}$. De même $0.\overset{-1}{1}0$ étant divisé par $\overset{0}{2}$, le quotient est $0.0\overset{-2}{5}$; $0,00\overset{-3}{1}0$ étant divisé par $\overset{0}{3}$, le quotient est $0.000\overset{-4}{3}333$, &c. La raison est que le chiffre du diviseur n'étant pas contenu dans le chiffre du dividende, il faut ſuppoſer ce chiffre du diviſeur avancé d'un rang vers la droite ſous le dividende ; ainſi le rang du dividende augmente d'une unité négative.

Si l'on veut élever $0.0000\overset{-5}{2}$ à la puiſſance 2^e ; il faut multiplier l'*indice* -5 par l'expoſant $+2$, & le produit -10 eſt l'*indice* du rang de la puiſſance 2^e qu'on cherche, laquelle eſt $0.000000000\overset{-10}{4}$.

Si l'on veut extraire la racine quarrée de $0.000000000\overset{-10}{4}$; il faut diviſer l'*indice* -10 du rang du chiffre $\overset{-10}{4}$ par l'expoſant donné $+2$ de la 2^e puiſſance, & le quotient -5 ſera l'*indice* du rang de la racine qu'on cherche, laquelle eſt $0.0000\overset{-5}{2}$.

REMARQUE.

QUAND il arrive dans l'extraction des racines, que la diviſion de l'*indice* du rang du chiffre dont on cherche la racine, par l'expoſant donné de cette racine, eſt une fraction, comme $\frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$, il faut, quand la fraction ſurpaſſe l'unité, prendre la ſomme des unités, & de plus une unité pour l'*indice* du rang qu'on cherche. Ainſi $\frac{-5}{2} = -2\frac{1}{2}$ marque le troiſiéme rang, & $\frac{-5}{2}$ eſt équivalente à -3. Quand la fraction eſt moindre que l'unité, comme $-\frac{2}{3}$, il la faut prendre pour l'unité -1 ; ainſi $-\frac{2}{3}$ marque le premier rang des parties décimales à droite du point qui les diſtingue des entiers. La raiſon en eſt que dans l'extraction des racines, une tranche entiere dans la puiſſance numérique dont on
*191. cherche la racine qui contient * deux rangs pour la racine quarrée, trois rangs pour la racine 3^e, &c. ne donne qu'un
*191. rang * pour la racine.

La raiſon de ces opérations eſt évidente, après tout ce qui a été démontré ſur l'union de la progreſſion arithmétique avec la géométrique, & ſur le calcul des puiſſances par leurs expoſans. Car les opérations qu'on vient de preſcrire font découvrir les termes de la progreſſion décuple B, & ces termes repréſentent les rangs qu'occupent les chiffres dans l'expreſſion d'un nombre qui contient des entiers & des parties décimales.

Explication

EXPLICATION DES LOGARITHMES.

$$(a) \div\ \underset{T}{\overset{t}{-8}}.-7.-6.-5.-4.-3.-2.-1.\,0.\,\underset{B}{\overset{b}{1}}.\,2.\,3.\,\underset{R}{\overset{r}{4}}.\,5.\,6.\,7.\,\underset{T}{\overset{t}{8}}.\,9$$

$$A \because\ \tfrac{1}{256}.\tfrac{1}{128}.\tfrac{1}{64}.\tfrac{1}{32}.\tfrac{1}{16}.\tfrac{1}{8}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}.1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.\&c.$$

DÉFINITION.

652. (A) eſt une progreſſion géométrique double; mais on la regardera comme une progreſſion géométrique quelconque, qui a l'unité parmi ſes termes. Ceux de ſes termes qui ſont plus grands que l'unité, ſont de ſuite vers la droite de l'unité, & ceux qui ſont moindres que l'unité, ſont de ſuite vers la gauche de l'unité.

Si l'on joint une progreſſion arithmétique quelconque (a) à cette progreſſion géométrique, de maniere que zéro ſoit écrit ſur l'unité, & les termes poſitifs de la progreſſion arithmétique ſoient écrits de ſuite ſur les termes de la progreſſion géométrique plus grands que l'unité, & que les termes négatifs de la progreſſion arithmétique ſoient écrits de ſuite ſur les termes de la progreſſion géométrique moindres que l'unité; les termes de la progreſſion arithmétique s'appellent les *logarithmes* des termes de la progreſſion géométrique; zéro eſt le *logarithme* de l'unité, & chaque terme de la progreſſion arithmétique eſt le *logarithme* du terme correſpondant de la progreſſion géométrique ſur lequel il eſt écrit.

COROLLAIRE I.

653. SI l'on prend dans la progreſſion géométrique un terme quelconque T à droite ou à gauche de l'unité; que $\frac{1}{B}$ ou $\frac{B}{1}$ ($\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{1}$ dans la progreſſion A) ſoit le rapport ſimple qui regne dans la progreſſion; & que n marque le rang du terme T depuis l'unité non compriſe, c'eſt-à-dire le quantiéme eſt le terme T depuis l'unité non compriſe; (par exemple $n = 8$ ſi T eſt le 8ᵉ terme après l'unité non compriſe, ou ſi T eſt au 8ᵉ rang au-devant de l'unité), il eſt évident qu'il y a autant de rapports égaux à $\frac{1}{B}$ ou $\frac{B}{1}$ d'interpoſés entre 1 & T, qu'il y a d'unités dans n; c'eſt-à-dire que le rapport $\frac{1}{T}$ eſt composé de huit rapports égaux à $\frac{1}{B}$ vers la droite, & à $\frac{B}{1}$ vers la gauche.

Ces rapports ſimples compoſans, égaux entr'eux, peuvent être regardés comme les parties du rapport compoſé $\frac{1}{T}$; de maniere que ſi l'on prend un terme R, entre lequel & l'unité il n'y ait que la moitié $\frac{n}{2}$ des rapports compoſans égaux, on pourra dire que le rapport compoſé $\frac{1}{R}$ n'a que la moitié des parties du rapport $\frac{1}{T}$, &c.

Dans la progreſſion arithmétique; il eſt évident que la différence b qui y régne, & qui eſt le terme qui ſuit zéro, répond au rapport ſimple compoſant $\frac{1}{B}$ de la progreſſion géométrique; & que cette différence b eſt répétée autant de fois dans le logarithme t, qui répond au terme T, qu'il y a de rapports compoſans égaux entre 1 & T; c'eſt-à-dire que $t = nb$.

Il ſuit de-là que les logarithmes peuvent être regardés comme les *meſures* du nombre des rapports compoſans égaux, ou raiſons compoſantes égales qui ſont entre l'unité & les termes T dont ils ſont les logarithmes; & c'eſt ce que marque leur nom compoſé des mots Grecs ἀριθμὸς & λόγος, qui veut dire *nombre* ou *meſure des raiſons ou des rapports*; c'eſt-à-dire que, par exemple, $nb = t$ marque que $\frac{1}{T}$ contient autant de rapports compoſans égaux à $\frac{1}{B}$, qui eſt celui auquel répond b, qu'il y a d'unités dans n.

On doit appliquer ce qu'on vient d'expliquer du rapport de l'unité au nombre T de la progreſſion géométrique, au rapport d'un nombre quelconque R à un autre nombre T; le rapport $\frac{R}{T}$ eſt compoſé d'autant de rapports égaux à $\frac{1}{B}$, qu'il y a de termes entre R & T depuis R non compris juſqu'à T compris. Dans la progreſſion géométrique A, $\frac{R}{T}$ eſt compoſé de quatre rapports égaux à $\frac{1}{B}$, parce que T eſt le 4^e^ terme après R.

Et dans la progreſſion arithmétique, en ôtant le logarithme r du logarithme t, le reſte $t-r$ eſt le logarithme qui meſure le nombre des rapports compoſans égaux qui ſont interpoſés entre R & T, dont $\frac{R}{T}$ eſt compoſé; & $t-r$ contient autant de fois la différence b, qu'il y a de ces rapports compoſans dans le rapport compoſé $\frac{R}{T}$.

COROLLAIRE II.

654. IL est évident, par ce qu'on vient d'expliquer, que les logarithmes, comme t & r de deux termes quelconques, comme T & R de la progression géométrique, * ont entr'eux le même rapport géométrique qui est entre le nombre des petits rapports égaux qui sont entre 1 & T, qu'on nommera N, & le nombre n des petits rapports égaux qui sont entre 1 & R; car $t = Nb . r = {}^* nb :: N . n$. * 554. * 495.

Cette propriété des logarithmes doit être remarquée: car quand des nombres auront entr'eux les mêmes rapports géométriques qu'ont entr'eux les nombres des petits rapports interposés entre les termes d'une progression géométrique; ces nombres-là pourront être pris pour les logarithmes des termes de la progression géométrique.

COROLLAIRE III.

655. IL suit encore de ce qu'on a établi dans le premier Corollaire, que si l'on prend quatre termes dans la progression géométrique A qui fassent une proportion géométrique, comme $4 . 16 :: 64 . 256$, leurs quatre logarithmes $2 . 4 : 6 . 8$ feront * une proportion arithmétique; & que si l'on prend plusieurs termes dans la progression géométrique, comme $\div\div 1 . 4 . 16 . 64 . 256$. &c. qui fassent une progression géométrique, leurs logarithmes $\div 0 . 2 . 4 . 6 . 8$. &c. * seront en progression arithmétique. * 555. * 555.

Les propriétés & les usages des logarithmes pour la commodité du calcul.

(a) $\div$ &c. $- \text{l}. \frac{1}{g}. - \text{l}. \frac{1}{f}. - \text{l}. \frac{1}{e}. - \text{l}. \frac{1}{d}. - \text{l}. \frac{1}{c}. - \text{l}. \frac{1}{b}. - \text{l}. \frac{1}{a}. 0. \text{l}.a.\text{l}.b.\text{l}.c.\text{l}.d.\text{l}.e.\text{l}.f.\text{l}.g.\text{l}.h.\text{l}.i.\text{l}.k.$ &c.

A $\div\div$ &c. $\frac{1}{g} . \frac{1}{f} . \frac{1}{e} . \frac{1}{d} . \frac{1}{c} . \frac{1}{b} . \frac{1}{a} . 1 . a . b . c . d . e . f . g . h . i . k.$ &c.

SUPPOSITION.

656. ON peut concevoir une progression géométrique infinie A dans laquelle l'unité soit entre les termes qui surpassent l'unité & vont en augmentant, & les termes moindres que l'unité qui vont en diminuant; de maniere que le rapport $\frac{1}{a}$ qui regne dans la progression ne différe du rapport d'égalité que d'une grandeur indéfiniment petite; ce qui est cause qu'on peut concevoir que tous les nombres possibles entiers

& rompus se trouvent parmi les termes de cette progression.

On peut concevoir en même tems une progression arithmétique infinie (a) jointe à la progression géométrique; de maniere que zéro soit écrit sur l'unité & en soit le logarithme. Cette progression (a) contiendra les logarithmes de tous les nombres; & on nommera l.a le logarithme de a, l.b le logarithme de b; & ainsi des autres: Les logarithmes des nombres moindres que l'unité seront négatifs, comme l.$\frac{1}{a}$, ainsi que l'exige la progression arithmétique qui a zéro parmi ses termes.

Il est évident que si l'on avoit en effet les logarithmes des nombres écrits sur ces nombres, ou dans une colonne à côté des nombres aussi écrits en colonnes, ce qui feroit la Table des logarithmes, quand on sçauroit le logarithme d'un nombre, on auroit ce nombre-là, puisque se seroit le nombre qui est à côté du logarithme connu dans la Table; & de même quand on sçauroit un nombre on en auroit à côté le logarithme connu dans la Table.

COROLLAIRE IV.

Premiere Propriété.

657. *La somme des logarithmes de deux nombres est égale au logarithme du produit de ces nombres.* $l.a + l.b = l.ab$.

Et de même la somme des logarithmes de tant de nombres qu'on voudra est égale au logarithme du produit qui vient de la multiplication de tous ces nombres les uns par les autres. $l.a + l.b + l.c + l.d = l.abcd$.

Cette premiere propriété & les suivantes sont des suites évidentes de l'article 655, & des propriétés de la proportion & de la progression arithmétique, lesquelles ont été
* 483. démontrées au commencement de la premiere Section *,
& les suiv. & dont les principales ont été répétées au commencement
* 533. de la seconde Section. * Ainsi les Commençans doivent re-
& les suiv. voir ces deux endroits, & se rendre familieres les propriétés de la proportion & progression arithmétiques qui y sont expliquées. Elles sont aussi les suites de l'union de la progression arithmétique & géométrique: Et ils doivent aussi revoir ce que l'on a dit de l'union des deux progressions arithmétique & géométrique dans toute la seconde Section.

COROLLAIRE V.

Premier usage.

658. CETTE propriété change dans le calcul les multiplications des nombres en de simples additions des logarithmes de ces nombres-là. Car pour multiplier deux ou plusieurs grands nombres il n'y a qu'à ajouter leurs logarithmes, & la somme sera le logarithme du produit qu'on trouvera dans la Table des logarithmes à côté de ce logarithme qui est la somme des autres.

COROLLAIRE VI.

Seconde Propriété.

659. *Si l'on ôte le logarithme d'un nombre* a *du logarithme d'un autre nombre* b, *le reste est le logarithme du quotient qui vient de la division de* b *par* a. *Ainsi* $l.b - l.a = l.\frac{b}{a}$.

COROLLAIRE VII.

Second usage.

660. CETTE propriété change dans le calcul des nombres la division des nombres en une simple soustraction des logarithmes de ces nombres-là. Car pour diviser un nombre par un autre, il ne faut qu'ôter le logarithme du diviseur du logarithme du dividende, & le reste sera le logarithme du quotient. Ainsi on trouvera dans la Table ce quotient à côté de son logarithme qui vient d'être trouvé.

La seconde propriété fait aussi découvrir le logarithme d'une fraction $\frac{b}{a}$, lorsque les logarithmes $l.b$, $l.a$ du numérateur b & du dénominateur a sont connus. Car il n'y a qu'à ôter $l.a$ de $l.b$, & le reste $l.b - l.a$ sera le logarithme $l.\frac{b}{a}$ de la fraction $\frac{b}{a}$.

COROLLAIRE VIII.

Troisiéme usage.

661. IL suit des deux propriétés précédentes & du 3e Corollaire, que quand on cherche le 4e terme d'une proportion géométrique dont les trois premiers termes sont connus, il n'y a qu'à ajouter les logarithmes des deux termes moyens, & ôter de la somme le logarithme de l'extrême qui est connu, & le reste sera le logarithme du 4e terme qu'on cherche.

Ainſi $l.b + l.c - l.a = l.\frac{bc}{a}$. Et cherchant dans la Table ce logarithme qu'on vient de découvrir, on trouvera à côté le nombre qu'on cherche.

COROLLAIRE IX.

Troiſiéme Propriété.

662. *Le logarithme d'un nombre* a *étant multiplié par l'expoſant d'une puiſſance tel qu'on voudra* m *qui marque un nombre entier ou rompu quelconque, le produit ſera le logarithme de ce nombre* a *élevé à la puiſſance dont le nombre* m *eſt l'expoſant. Ainſi* $m \times l.a = l.a^m$.

COROLLAIRE X.

Quatriéme uſage.

663. QUAND on a le logarithme d'un nombre a, on peut avoir les logarithmes de toutes les puiſſances parfaites de ce nombre-là. Car en multipliant $l.a$ par 2, par 3, par 4, &c. les produits ſeront les logarithmes de a^2, a^3, a^4, &c. & on trouvera dans la Table ces puiſſances numériques à côté de leurs logarithmes.

COROLLAIRE XI.

Cinquiéme uſage.

664. QUAND on a le logarithme $l.a$ d'un nombre a, on peut avoir les logarithmes des racines 2^e, 3^e, 4^e, &c. de a en diviſant le logarithme $l.a$ par 2, 3, 4, &c; les quotients ſeront les logarithmes des racines 2^e, 3^e, 4^e, &c. du nombre a, & on trouvera dans la Table ces racines numériques à côté de leurs logarithmes. Ainſi $\frac{l.a}{2}$ ou $\frac{1}{2}\, l.a = l.\sqrt[2]{a} = l.a^{\frac{1}{2}}$; $\frac{l.a}{3} = l.\sqrt[3]{a} = l.a^{\frac{1}{3}}$, &c.

COROLLAIRE XII.

Sixiéme uſage.

665. LES logarithmes $l.a$, $l.e$ de deux nombres a & e étant donnés, on peut trouver les logarithmes d'autant de moyens proportionnels géométriques entre a & e qu'on en voudra déſigner par le nombre entier indéterminé $n-1$, par la pratique ſuivante.

1°. $n-1$ déſignant le nombre des moyens proportionnels entre a & e, il eſt clair que n marque le quantiéme terme eſt e après a non compris.

2°. Si donc l'on ôte le logarithme $l.a$ du logarithme $l.e$, le reſte $l.e - l.a$ ſera la différence entre ces deux logarithmes, laquelle étant partagée en autant de parties égales qu'il y a de rangs ou de termes depuis a non compris jusqu'à e compris ; c'eſt-à-dire, cette différence $l.e - l.a$ étant diviſée par n, le quotient $\frac{l.e - l.a}{n}$ ſera * la différence dont le logarithme du premier moyen proportionnel après a doit ſurpaſſer le logarithme $l.a$. *499 & 539.

3°. C'eſt pourquoi ajoutant à cette différence, qui doit régner entre les moyens arithmétiques, le logarithme $l.a$, la ſomme $\frac{l.e - l.a}{n} + l.a = \frac{l.e + \overline{n-1} \times l.a}{n}$ * ſera le logarithme du premier moyen proportionnel géométrique entre a & e, & en même-tems le premier moyen proportionnel arithmétique entre $l.a$ & $l.e$; après quoi il eſt facile de trouver les logarithmes des termes moyens qui ſuivent le premier, en ajoutant au logarithme $\frac{l.e + \overline{n-1} \times l.a}{n}$, la différence $\frac{l.e - l.a}{n}$ une fois, deux fois, &c. *499 & 539.

4°. Si l'on vouloit le logarithme de celui des moyens entre a & e, qui eſt le plus proche du terme e, il faudroit ôter la différence $\frac{l.e - l.a}{n}$ du logarithme $l.e$, & $l.e - \frac{l.e + l.a}{n} = \frac{\overline{n-1} \times l.e + l.a}{n}$ ſeroit le logarithme du moyen qui eſt le plus proche de e; ôtant cette même différence deux fois, trois fois, &c. du logarithme $l.e$, les reſtes ſeroient de ſuite les logarithmes des autres termes moyens qui précedent le terme e, en retournant du terme e au terme a.

5°. Si l'on vouloit les logarithmes des termes au-delà du terme e qui continuent la progreſſion géométrique dont a eſt pris pour le premier terme, e pour le dernier, & qui ont entr'eux autant de moyens proportionnels qu'il y a d'unités dans $n - 1$; il n'y auroit qu'à ajouter la différence $\frac{l.e - l.a}{n}$ une fois, deux fois, trois fois, &c. au logarithme $l.e$, & l'on auroit les logarithmes du premier terme, du ſecond terme, troiſiéme, &c. qui ſuivent le terme e dans la même progreſſion géométrique.

6°. Enfin s'il falloit trouver les logarithmes des termes de la même progreſſion géométrique qui précéderoient le terme a, il n'y auroit qu'à retrancher la même différence $\frac{l.e - l.a}{n}$ de $l.a$ une fois, deux fois, trois fois, &c. & les restes seroient les logarithmes des termes qui précéderoient de suite le terme a dans la même progression géométrique.

La démonstration de tous les cas de ce Corollaire est une suite évidente des articles 655, 408 & 499; car dans la progression géométrique dont a est le premier terme & e le dernier, ces trois choses étant déterminées, le premier terme a, le dernier e, & le nombre des moyens $n-1$; le rapport
*526. qui doit y régner est déterminé, & ce rapport est $\frac{a}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}$ *. Dans la progression arithmétique des logarithmes qui lui est jointe, ces trois choses $l.a$, $l.e$, & le nombre $n-1$ des logarithmes moyens arithmétiques, étant aussi déterminées, la
*506. différence qui doit y régner * est aussi déterminée, & c'est $\frac{l.e - l.a}{n}$. Ainsi les termes de la progression arithmétique doivent se surpasser de l'un à l'autre en allant de $l.a$ vers $l.e$, de cette différence; ou diminuer de l'un à l'autre, en retournant de $l.e$ vers $l.a$, de cette même différence, comme il est marqué dans tous les cas du Corollaire.

Usage de la formule $\frac{\overline{n-1} \times l.a + l.e}{n}$.

666. POUR trouver le logarithme d'un seul moyen proportionnel géométrique entre a & e, il faut supposer $n-1=1$, c'est-à-dire $n=2$, & l'on trouvera que le logarithme du moyen proportionnel entre a & e est $\frac{l.a + l.e}{2}$; c'est-à-dire la moitié de la somme des logarithmes de a & de e.

Pour trouver le logarithme du premier de deux moyens proportionnels entre a & e, il faut supposer $n=3$, & l'on trouvera que ce logarithme est $\frac{2 \times l.a + l.e}{3}$; c'est-à-dire le tiers de la somme du logarithme de e, & du double du logarithme de a.

On trouvera de même que le logarithme du premier de trois moyens proportionnels entre a & e est $\frac{3 \times l.a + l.e}{4}$; que celui du premier de quatre moyens est $\frac{4 \times l.a + l.e}{5}$; & ainsi de suite.

DÉFINITION.

DÉFINITION.

667. DEUX termes pris dans la progreſſion géométrique * A, comme d & $\frac{1}{d}$, l'un (d) parmi les termes qui ſurpaſſent l'unité, & l'autre ($\frac{1}{d}$) parmi les termes qui ſont moindres que l'unité, mais l'un & l'autre à une égale diſtance de l'unité, s'appellent termes *réciproques*; & puiſqu'il y a, par la ſuppoſition, le même nombre de petits rapports égaux entre l'unité & chacun des termes réciproques, il eſt clair que $1 . \frac{1}{d} :: d . 1$, ou bien $d . 1 :: 1 . \frac{1}{d}$, & que $d \times \frac{1}{d} = 1 \times 1 = 1$. * 656.

COROLLAIRE XIII.

Quatriéme Propriété.

668. *Les logarithmes de deux termes* réciproques *de la progreſſion géométrique, ſont égaux; c'eſt-à-dire* l.d $=$ *—l.*$\frac{1}{d}$, *avec cette ſeule différence que le logarithme du plus grand de ces termes eſt poſitif, & que le logarithme de l'autre eſt negatif.*

Car par la ſuppoſition * l.d. o : o. —l.$\frac{1}{d}$. Donc † l.d. — l.$\frac{1}{d}$ $=$ o. Or ils ne ſçauroient, étant joints enſemble, ſe trouver égaux à zéro, que le poſitif ne ſoit égal au négatif. * 655. † 487.

COROLLAIRE XIV.

669. IL ſuit de cette propriété, 1°. que la Table des logarithmes des nombres qui ſurpaſſent l'unité, ſert également pour ces nombres & pour tous les nombres qui ſont moindres que l'unité. Car les logarithmes des nombres plus grands que l'unité, étant rendus négatifs, ſont les logarithmes des nombres moindres que l'unité qui leur ſont réciproques. Par exemple l. 3 $=$ — l. $\frac{1}{3}$, l. 10 $=$ — l. $\frac{1}{10}$, &c.

COROLLAIRE XV.

670. 2°. Que quand on veut conſtruire la Table des logarithmes, s'il eſt plus aiſé de trouver le logarithme d'un terme moindre que l'unité, que de ſon *réciproque* qui ſurpaſſe l'unité, on doit chercher le logarithme du nombre moindre que l'unité; puiſqu'en le rendant poſitif, il devient le logarithme du nombre *réciproque* qui ſurpaſſe l'unité.

COROLLAIRE XVI.

671. Il ſuit des propriétés & des uſages des logarithmes qu'on vient d'expliquer, 1°. que quand il faut conſtruire la Table des logarithmes, on n'a beſoin de chercher que les logarithmes de chaque nombre *premier* ou *ſimple*; comme 2, 3, 5, 7, 11, &c. Car les logarithmes des nombres *premiers* étant
*657. découverts, on trouvera * par les uſages précédens les logarithmes de tous les nombres entiers formés par la multiplication des nombres *premiers*; & * de tous les nombres qui
*662, & 663. ſont les puiſſances parfaites des nombres *premiers*.

2°. Qu'il ne faut point d'autre Table pour les logarithmes des nombres rompus, ni auſſi pour les puiſſances des nombres dont les expoſans ſont des nombres rompus, c'eſt-à-dire pour toutes les racines des nombres entiers, que la Table même pour les nombres entiers : car les logarithmes du numérateur d'une fraction qui eſt un dividende, & de ſon dénominateur qui eſt un diviſeur, étant découverts, on
*659. aura * le logarithme de la fraction : Et le logarithme d'un nombre quelconque regardé comme une puiſſance, étant
*664, & 662. découvert, on aura * les logarithmes de toutes les racines quelconques de ce nombre-là; de toutes ſes puiſſances, & de toutes les racines de ſes puiſſances.

Des différentes eſpéces de logarithmes.

DÉFINITION.

672. La diverſité de la différence qui regne dans une progreſſion arithmétique, & de la différence qui regne dans une autre, rend les deux progreſſions arithmétiques de différentes eſpéces. Ainſi ÷ 0.1.2.3.4, &c. & ÷ 0.2.4.6.8, &c. ſont deux différentes eſpéces de progreſſions arithmétiques. Et comme on peut imaginer ces différences diverſifiées à l'infini, il peut y avoir une infinité de différentes eſpéces de ces progreſſions; & chaque eſpéce pouvant être jointe à la progreſſion géométrique infinie, que l'on peut concevoir contenir tous les nombres parmi ſes termes, il peut y avoir une infinité d'eſpéces de logarithmes.

673. Dans chaque eſpéce de logarithmes on doit toujours concevoir que zéro eſt le logarithme de l'unité; car en rendant cela commun à toutes les eſpéces différentes de logarith-

mes, on les rend très-commodes dans les calculs; & de plus le logarithme d'un ſeul autre nombre, comme de 10, étant auſſi déterminé, l'eſpéce de ces logarithmes eſt déterminée, puiſque ces deux ſuppoſitions déterminent la différence qui doit régner dans la progreſſion arithmétique des logarithmes.

Pour comparer enſemble les logarithmes des eſpéces différentes, on ſuppoſera que (l.) marque chaque logarithme de l'une, & (L.) chaque logarithme de l'autre.

COROLLAIRE XVII.

Sur la comparaiſon des logarithmes de différente eſpéce.

674. LE rapport géométrique qui ſe trouve entre les logarithmes de différente eſpéce d'un même terme de la progreſſion géométrique, comme $\frac{L.k}{l.k}$, eſt le même qui ſe trouve entre deux autres logarithmes des deux mêmes eſpéces de tout autre terme de la progreſſion géométrique; c'eſt-à-dire $L.k.\ l.k. :: L.e\ l.e :: L.a.\ l.a$, &c.

Ce Corollaire a été démontré dans l'art. 500.

COROLLAIRE XVIII.

Uſage de cette propriété.

675. QUAND tous les logarithmes d'une eſpéce ſont connus; & qu'on ne connoît qu'un ſeul logarithme d'une autre eſpéce; cette propriété ſert * à trouver tous les logarithmes inconnus de la ſeconde eſpéce par autant de regles de proportion; (c'eſt ce qu'on nomme *reduire* les logarithmes d'une eſpéce aux logarithmes d'une autre eſpéce). Par exemple, les logarithmes (l.) étant tous connus, & un ſeul logarithme (L.) d'une autre eſpéce étant connu, par exemple le logarithme $L.k$; pour trouver un autre logarithme (L.), par exemple $L.e$, on fera cette regle de proportion, $l.k.\ l.e :: L.k.\ L.e = \frac{L.k \times l.e}{l.k}$, dont les trois premiers termes ſont connus. On trouvera de même les autres logarithmes (L.)

* 500.

Définition des logarithmes dont on a fait des Tables.

676. DANS les logarithmes dont on a fait des Tables, & qu'on nommera *logarithmes des Tables*, ou *logarithmes ordinaires*,

le logarithme du nombre 10 eſt l'unité précédée vers la droite d'un grand nombre de zéros. Ce nombre de zéros eſt arbitraire : dans l'uſage ordinaire on peut ſe contenter qu'il y ait 7 zéros, ou même 5 zéros. Dans la grande Table des logarithmes de Ulacq, qui a pour titre, *Arithmetica logarithmica*, & où ſont les logarithmes des nombres entiers depuis 1 juſqu'à 100000, le logarithme de 10 contient 10 zéros au-devant de l'unité : & il ſe rencontre quelquefois des calculs où l'on auroit beſoin, pour une plus grande exactitude, que ce logarithme fût précédé d'un plus grand nombre de zéros.

COROLLAIRE I.

677. IL ſuit de ce que le logarithme de 10 eſt l'unité précédée d'un certain nombre de zéros (nous mettrons 10 zéros pour prendre un nombre déterminé,) 1°. qu'on doit concevoir autant de petits rapports égaux entr'eux, d'interpoſés entre 1 & 10, qu'il y a d'unités dans le logarithme 1.00000.00000 (ces

*405, & 411. petits rapports égaux ſont * $\dfrac{1}{\sqrt[1.0000000000]{10^1}} = \left\{\dfrac{\sqrt[10000000000]{10^1}}{\sqrt[1.0000000000]{10^2}}\right.$ = &c. & la différence qui regne dans la progreſſion arithmétique des logarithmes, & qui répond à chaque petit rapport compoſant, dont il y en a 10000000000 d'interpoſés entre 1 & 10 ; cette différence, dis-je, eſt 1) : que le rapport décuple $\frac{1}{10}$ eſt composé de ce nombre de petites parties, & que le logarithme 1.00000.00000 eſt la meſure de ce nombre de petits rapports égaux.

COROLLAIRE II.

678. 2°. LES termes de la progreſſion géométrique décuple étant ∺ 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000 . 100000, &c. le logarithme de l'unité étant zéro, & celui de 10 étant 1.0000000000 ; les logarithmes des termes ſuivans doivent être de ſuite 2 . 0000000000 . 3 . 0000000000 . 4 . 0000000000, &c. puiſque ce ſont les termes de la progreſſion arithmétique, dont les deux premiers ſont 0 & 1.0000000000.

COROLLAIRE III.

679. 3°. ON doit remarquer que les premiers caracteres à gauche de chacun de ces logarithmes (que l'on nomme *les*

caractéristiques de ces logarithmes des Tables) ont toujours autant d'unités qu'il y a de zéros devant les nombres de la progression géométrique décuple dont ils sont les logarithmes : zéro est la *caractéristique* du logarithme de l'unité qui est le premier terme de la progression géométrique décuple. La *caractéristique* du logarithme du terme 10 est 1 ; la *caractéristique* du logarithme de 100 est 2 ; celle du logarithme de 1000 est 3 ; & ainsi de suite. Et comme la progression arithmétique des logarithmes doit aller en augmentant, aussi-bien que la progression géométrique, il est évident que les logarithmes de tous les nombres plus grands que l'unité, & moindres que 10, auront zéro pour *caractéristique*. Les logarithmes des nombres au-dessus de 10, & moindres que 100, auront 1 pour *caractéristique* ; les logarithmes des nombres au-dessus de 100, & moindres que 1000, auront 2 ; les logarithmes des nombres entre 1000 & 10000 auront 3 ; & ainsi de suite. Car, par exemple, le logarithme d'un nombre plus grand que 1000, & moindre que 10000, doit déja avoir 3 pour *caractéristique*, puisqu'il doit surpasser le logarithme de 1000 ; & il ne peut avoir 4 pour *caractéristique*, devant être moindre que le logarithme de 10000.

COROLLAIRE IV.

680. LES logarithmes des fractions moindres que l'unité étant * les mêmes que les logarithmes de leurs nombres réciproques plus grands que l'unité, comme de $\frac{1}{10}$ & de $\frac{10}{3}$; les *caractéristiques* des logarithmes des fractions moindres que l'unité, sont les mêmes que celles des logarithmes des termes réciproques ; ainsi — 1 est la *caractéristique* de $\frac{1}{10}$; — 2 est la *caractéristique* de $\frac{1}{100}$; — 3 est celle de $\frac{1}{1000}$; & ainsi de suite. Ces logarithmes * sont négatifs. Toutes les fractions qui surpassent $\frac{1}{10}$, & sont moindres que 1, doivent par conséquent avoir zéro pour *caractéristique* ; les fractions dont la valeur est entre $\frac{1}{100}$ & $\frac{1}{10}$ doivent avoir — 1 ; les fractions dont la valeur est entre $\frac{1}{1000}$ & $\frac{1}{100}$ doivent avoir — 2 ; les fractions dont la valeur est entre $\frac{1}{10000}$ & $\frac{1}{1000}$ doivent avoir — 3 pour *caractéristique* ; & ainsi de suite.

* 668.

* 652.

681. Ces *caractéristiques* & cette augmentation des logarithmes les uns sur les autres, servent, quand on a entre les mains

les Tables des logarithmes, à trouver tout d'un coup le logarithme d'un nombre donné; & quand on a un logarithme donné, à trouver dans les Tables le nombre qui est à côté de lui dont il est logarithme.

La construction des Tables des logarithmes par l'une des Méthodes ordinaires.

PROBLÊME I.

682. *TROUVER le logarithme d'un nombre entier quelconque.*

OPÉRATION. On prendra pour exemple le nombre 9; on remarquera que ce nombre est conçu dans la suite d'une progression géométrique, dont les termes donnés avec leurs logarithmes sont ceux de la progression décuple $\div\div$ 1 . 10 . 100 . 1000, &c. & que 9 est un des moyens géométriques entre les termes connus 1 & 10, desquels on connoît aussi les logarithmes; sçavoir, zéro est celui de l'unité, & 1 avec tel nombre de zéros qu'on voudra mettre au-devant de 1, (on en mettra ici 8); par exemple 1.00000000 est le logarithme donné de 10.

Or pour trouver ce moyen géométrique 9 entre 1 & 10; & en même-temps son logarithme qui soit le même moyen arithmétique entre zéro, qu'on nommera *a*, qui est le logarithme de l'unité; & le logarithme 1.00000000 de 10, qu'on nommera *b*; voici les opérations qu'il faut faire.

1°. Il faut multiplier 1 & 10 chacun par l'unité précédée
* 332. de plusieurs zéros (on en mettra ici 7), ce qui n'en * chan-
gera point le rapport, & ils deviendront A & B. On en pren-
* 342. dra * le moyen proportionnel géométrique $\sqrt[2]{A \times B}$, qu'on
nommera C. On prendra en même-temps le moyen pro-
* 488 & portionnel arithmétique * $\frac{a+b}{2}$, qu'on nommera *c*; on fera
666. ensuite ce raisonnement : si l'on divise chacun des termes
* 332. de la progression géométrique $\div\div$ A . C . B par 1.0000000, *
les trois quotiens feront encore une progression géométri-
* 666. que $\div\div$ 1 . $\frac{C}{10000000}$. 10; & ils auront * pour logarithmes les
trois termes de la progression arithmétique $\div$ *a* ou 0 . *c* . *b*;
car puisque *a* & *b* sont, par la supposition, les logarithmes
des extrêmes 1 & 10; *c* est le logarithme du moyen géomé-

trique

TABLES DES LOGARITHMES.

	A	1.0000000	a	0.00000000	
$\sqrt[2]{A\times B} =$	C	3.1622777	c	0.50000000	$= \frac{a+b}{2}$
	B	10.0000000	b	1.00000000	
	C	3.1622777	c	0.50000000	
$\sqrt[2]{C\times B} =$	D	5.6234132	d	0.75000000	$= \frac{c+b}{2}$
	B	10.0000000	b	1.00000000	
	D	5.6234132	d	0.75000000	
$\sqrt[2]{D\times B} =$	E	7.4989421	e	0.87500000	$= \frac{d+b}{2}$
	B	10.0000000	b	1.00000000	
	E	7.4989421	e	0.87500000	
$\sqrt[2]{E\times B} =$	F	8.6596432	f	0.93750000	$= \frac{e+b}{2}$
	B	10.0000000	b	1.00000000	
	F	8.6596432	f	0.93750000	
$\sqrt[2]{F\times B} =$	G	9.3057204	g	0.96875000	$= \frac{f+b}{2}$
	B	10.0000000	b	1.00000000	
	F	8.6596432	f	0.93750000	
$\sqrt[2]{F\times G} =$	H	8.9768713	h	0.95312500	$= \frac{f+g}{2}$
	G	9.3057204	g	0.96875000	
	H	8.9768713	h	0.95312500	
$\sqrt[2]{H\times G} =$	I	9.1398170	i	0.96093750	$= \frac{h+g}{2}$
	G	9.3057204	g	0.96875000	
	&c. jusqu'à				
	X	8.9999998	x	0.95424250	
$\sqrt[2]{X\times Z} =$	Y	9.0000000	y	0.95424251	$= \frac{x+z}{2}$
	Z	9.0000004	z	0.95424253	

trique $\frac{C}{10000000}$. Par conséquent si l'on eût trouvé pour moyen proportionnel géométrique exactement 9.0000000 (qu'on nommera Y) au lieu de C, c'est-à-dire 9 précédé d'autant de zéros qu'on en a mis au-devant de 1 & de 10; il est évident que c seroit le logarithme de 9, que l'on cherche. Mais C étant différent du moyen proportionnel géométrique 9.0000000 = Y que l'on cherche avec son logarithme qu'on nommera y, il faut continuer l'opération jusqu'à ce qu'on ait trouvé Y & en même-temps son logarithme y. On doit faire un semblable raisonnement à chacune des opérations suivantes, sans qu'il faille le répéter.

* 342. 2°. Comme C est plus proche de Y que n'est pas A, il faut* trouver le moyen proportionnel géométrique $\sqrt[2]{C \times B} = D$ entre C & B, & trouver en même-temps son logarithme $\frac{c+b}{2} = d$.

3°. On trouvera de même le moyen géométrique $\sqrt[2]{D \times B} = E$ entre D & B, & son logarithme $\frac{d+b}{2} = e$; ensuite le moyen géométrique $\sqrt[2]{E \times B} = F$ entre F & B, & son logarithme $\frac{e+b}{2} = f$; ensuite le moyen géométrique $\sqrt[2]{F \times B} = G$ entre F & B, & son logarithme $\frac{f+b}{2} = g$.

4°. G étant plus proche de $9.0000000 = Y$ qu'on cher-
* 342. che, que n'est pas B, il faut* chercher le moyen géométrique $\sqrt[2]{F \times G} = H$ entre F & G, & en même-temps son logarithme $\frac{f+g}{2} = h$; on cherchera de même le moyen géométrique $\sqrt[2]{H \times G} = I$, & son logarithme $\frac{h+g}{2} = i$.

5°. On continuera de la même maniere cette recherche du moyen proportionnel géométrique entre deux des termes déja découverts qui approchent le plus de Y l'un endessous & l'autre en-dessus, & du logarithme de ce moyen, jusqu'à la 26^e^ opération, où l'on trouvera exactement le moyen proportionnel géométrique $Y = 9.0000000$, & son logarithme $y = 0.95424251$: & par le raisonnement qu'on a fait à la fin de la premiere opération, y est le logarithme de 9, *qu'il falloit trouver.*

REMARQUES.

I.

683. ON trouvera de la même maniere le logarithme de tout autre nombre entier que l'on voudra; mais il suffit de trouver, par la méthode précédente, les logarithmes des nombres premiers, ou de quelqu'une de leurs puissances parfaites; car tous les autres nombres étant formés
* 671. des nombres premiers, on trouvera leurs logarithmes* par la seule addition des logarithmes des nombres premiers, ou par leur soustraction, ou leur multiplication, ou division.

Par exemple, quand on aura trouvé les logarithmes de 2 &
* 657. de 3, leur somme sera* le logarithme de $6 = 2 \times 3$. Ayant les

les logarithmes de 10 & de 2; en ôtant le dernier du premier, le reste * sera le logarithme de $5 = \frac{10}{2}$. En multipliant * 659.
le logarithme de 2 par 2, 3, 4, 5, &c. qui sont les exposans des puissances 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ, &c. de 2, les produits * seront * 663.
les logarithmes de 4, 8, 16, 32, &c. qui sont les puissances 2ᵉ, 3ᵉ, 4ᵉ, 5ᵉ, &c. de 2. Enfin en divisant le logarithme de 9 par 2, qui est l'exposant de la racine 2ᵉ de 9, le quotient * sera le * 664.
logarithme de $3 = \sqrt[2]{9}$; & ainsi des autres.

II.

684. En suivant cette méthode, * les produits dont les racines * 682.
2ᵉˢ sont les moyens proportionnels géométriques, sont ordinairement des puissances imparfaites; l'on n'a par conséquent les moyens que par approximation. Mais en mettant beaucoup de zéros devant les deux termes dont les logarithmes sont donnés (comme dans l'exemple, devant 1 & 10); on fait ensorte que l'erreur devienne insensible; & plus il y a de zéros devant ces deux termes, & plus le moyen qu'on trouve approche du véritable.

Dans la recherche du logarithme de 9, * on fait en sorte, * 682.
en mettant sept zéros devant 1 & devant 10, que l'erreur soit au-delà de la 8ᵉ place dans le moyen Y = 90000000. Si l'on mettoit un plus grand nombre de zéros devant 1 & 10, alors le moyen proportionnel géométrique Y = 90000000 qu'on a trouvé à la 26ᵉ opération, ayant des chiffres, & non pas des zéros dans les places qui suivent la 8ᵉ en allant à droite, ne seroit pas encore celui que l'on cherche: il faudroit continuer l'opération jusqu'à ce qu'on eût trouvé le moyen Y qui auroit devant lui le nombre des zéros auquel on voudroit borner l'approximation; par exemple, si l'on vouloit avoir le moyen Y = 90000000000, il faudroit continuer jusqu'à ce qu'on eût trouvé pour moyen Y, le nombre 9 précédé de dix zéros, & négliger les chiffres qui seroient à droite au-devant de la 11ᵉ place: l'erreur étant reculé jusqu'à la 12ᵉ place & les suivantes, seroit encore plus insensible; & le logarithme de 9 trouvé par cette voie seroit encore plus approchant du véritable logarithme de 9 que l'on cherche, & qu'on ne sçauroit trouver dans la derniere précision, parce que l'on ne peut pas déterminer au juste le rang que doit occuper 9 parmi le grand nombre de moyens propor-

tionnels géométriques qu'on doit imaginer entre 1 & 10. Dans les pratiques ordinaires, on se contente des logarithmes à huit rangs, & de les trouver en supposant sept zéros devant les deux termes entre lesquels on cherche les moyens proportionnels géométriques pour arriver à celui dont on cherche le logarithme.

III.

La méthode de trouver immédiatement les logarithmes des Tables, qu'on vient d'expliquer, est la plus facile à concevoir, quoique les calculs qu'elle demande soient très-longs & très-embarassans; & comme l'on a des Tables de logarithmes toutes imprimées, il est inutile de donner ici les autres méthodes ordinaires de former immédiatement ces Tables, il suffit de concevoir l'une des méthodes par lesquelles on a pû les former. On donnera dans la Section suivante la méthode la plus aisée dans la pratique de construire soi-même les logarithmes à tel grand nombre de rangs qu'on voudra, pour ceux qui voudroient les former eux-mêmes; on l'a réservée à ce lieu là, pour ne point interrompre l'usage des Tables ordinaires des logarithmes que l'on doit se rendre très-familier. On expliquera cet usage dans les Problêmes suivans.

L'usage des Tables des logarithmes.

AVERTISSEMENT.

On a de trois sortes de Tables imprimées des logarithmes. 1°. On en a de portatives à la fin des Tables des *sinus*, elles contiennent les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000, elles suffisent pour les calculs ordinaires; 2°. On en a qui contiennent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 20000; 3°. Enfin on a les Tables *in-folio* de Ulacq, où sont les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 100000. Ces derniers contiennent chacun dix rangs de chiffres au-devant de la *caractéristique* qui fait l'onziéme rang. Ces Tables des logarithmes à onze rangs de chiffres ne sont nécessaires que pour les calculs qui demandent une grande précision comme ceux de l'Astronomie. Voici l'usage de toutes ces Tables.

PROBLÊME II.

685. *TROUVER par le moyen des Tables le logarithme d'un nombre donné, lequel nombre donné est au-dessus de l'unité, & moindre que le plus grand nombre des Tables que l'on a entre les mains.*

OPÉRATION. On suppose que l'on n'a que les Tables des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000 qui sont les plus communs. Cela supposé ;

1°. Si le nombre donné est entier, il est clair qu'il n'y a qu'à le chercher dans les Tables, & qu'on trouvera à côté son logarithme.

2°. Si le nombre donné contient un nombre entier & une fraction moindre que l'unité, comme $9354\frac{2}{3}$, il faut chercher dans les Tables le logarithme du nombre entier 9354 comme s'il n'y avoit point de fraction, & l'on trouvera son logarithme 3.9709974. Il faut retrancher ce logarithme du logarithme des Tables immédiatement plus grand, c'est-à-dire du logarithme du nombre entier 9355 qui surpasse le nombre entier donné 9354 d'une unité, lequel logarithme est 3.9710438, & prendre leur différence qui est 464. Il faut ensuite faire ce raisonnement ou cette proportion : La différence totale 1 ou $\frac{3}{3}$ du nombre 9354 d'avec le nombre 9355, est à la différence $\frac{2}{3}$ dont le nombre donné $9354\frac{2}{3}$ surpasse 9354, comme la différence totale 464 du logarithme du nombre 9354 d'avec le logarithme du nombre 9355, est à la différence dont le logarithme de $9354\frac{2}{3}$ doit surpasser le logarithme du nombre 9354. Ainsi il faut faire cette regle de proportion dont les trois premiers termes sont connus, 1 ou $\frac{3}{3}.\frac{2}{3}::464.x=309\frac{1}{3}$, il faut négliger la fraction $\frac{1}{3}$ qui est moindre que la moitié de l'unité, & ajouter 309 au logarithme de 9354, qui est 3.9709974, & la somme 3.9710283 est à très-peu près le logarithme de $9354\frac{2}{3}$ que l'on cherchoit.

Si l'on avoit des Tables des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 20000, ou les Tables *in-fol.* des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 100000, on trouveroit de la même maniere par les premieres Tables des logarithmes depuis 1 jusqu'à 20000, le logarithme d'un nombre au-dessus de l'unité, & moindre que 20000; & par les dernieres, le logarithme de tel nombre qu'on voudroit au-dessus de l'unité, & moindre que 100000.

PROBLÊME III.

686. *Un logarithme étant donné, dont la caractéristique est moindre que 4, si l'on n'a que les Tables des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000; trouver le nombre dont il est le logarithme.*

Opération. On prendra un exemple pour rendre la résolution plus claire. Le logarithme 3.8102773 est donné, sa *caractéristique* 3 marque que le nombre dont il est le logarithme surpasse 1000, & est moindre que 10000; 1°. il faut chercher le logarithme donné dans les Tables, & s'il s'y trouvoit juste, le nombre à côté seroit celui qu'on cherche; mais ne s'y trouvant pas juste, il faut prendre le logarithme 3.8102325 qui est immédiatement moindre, & le nombre 6460 auquel il répond, est déja le nombre entier à qui appartient le logarithme donné. Il ne s'agit plus que de trouver la fraction qui doit être jointe à ce nombre entier pour faire le nombre total à qui appartient le logarithme donné. Pour la trouver,

2°. Il faut ôter le moindre logarithme 3.8102325 du logarithme donné, & l'ôter encore du logarithme des Tables 3.8102997 immédiatement plus grand, c'est-à-dire du logarithme de 6461, ce qui donnera les deux différences 448 & 672.

3°. On fera ensuite ce raisonnement ou cette proportion: la différence totale 672 entre les logarithmes des nombres 6460 & 6461 qui ne se surpassent que de l'unité, est à la différence 448, dont le logarithme donné surpasse le moindre logarithme, qui est celui de 6460; comme l'unité, ou si l'on veut la partager en parties décimales, comme 1 précédée de tant de zéros qu'on voudra, laquelle unité est la différence totale entre 6460 & 6461, est à la grandeur qu'on cherche, c'est-à-dire à la fraction dont le nombre qu'on cherche doit surpasser le nombre entier 6460; & faisant la proportion, dont les trois premiers termes sont connus, on trouvera $672 . 448 :: 1 . x = \frac{448}{672}$, qu'on peut réduire, à cause du diviseur commun 224 aux deux termes de la fraction, à son équivalente $\frac{2}{3}$.

4°. Il faut ajouter la fraction qu'on vient de trouver au nombre 6460, & la somme $6460\frac{2}{3}$ sera le nombre *qu'on cherchoit.*

REMARQUES.

I.

687. ON voit par l'opération même, que la fraction $\frac{448}{672}$ qu'on doit ajouter au nombre 6460 correspondant au logarithme des Tables moindre que le logarithme donné, a pour numérateur la différence 448, qui est entre le logarithme des Tables immédiatement moindre que le logarithme donné, & entre le logarithme donné, & qu'elle a pour dénominateur la différence du logarithme des Tables moindre que le donné, d'avec le logarithme des Tables immédiatement plus grand que le donné.

On voit aussi qu'on peut aisément réduire cette fraction à une fraction décimale *. * 276.

Enfin il est clair qu'on trouveroit de la même maniere, quel seroit le nombre d'un logarithme dont la *caractéristique* est 4, si l'on avoit les Tables des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 100000.

II.

688. La maniere de trouver, par le second Problême, le logarithme d'un nombre donné, par le moyen de la partie proportionnelle géométrique, & la maniere de trouver, par le troisiéme Problême, le nombre correspondant à un logarithme donné par le même moyen de la partie proportionnelle; ces manieres, dis-je, ne donnent pas le logarithme qu'on cherche, ni le nombre qu'on cherche dans la derniere précision; mais l'erreur n'est pas sensible.

III.

689. Ceux qui voudroient voir clairement qu'il y a de l'erreur dans ces deux Opérations, doivent faire attention, 1°. que pour trouver exactement le logarithme d'un nombre comme $9354\frac{2}{3}$ qui n'est pas dans les Tables, il faudroit pouvoir déterminer entre les deux nombres entiers 9354 & 9355, le quantiéme moyen proportionnel géométrique est le nombre donné $9354\frac{2}{3}$, & trouver ensuite un logarithme qui fût le même quantiéme moyen proportionnel arithmétique entre les deux logarithmes de 9354 & de 9355 : & que pour

trouver le nombre correſpondant à un logarithme donné 3 . 8102773 qui n'eſt pas dans les Tables, il faudroit déterminer le quantiéme moyen arithmétique proportionnel eſt ce logarithme donné entre les deux logarithmes des Tables, dont l'un eſt immédiatement moindre, & l'autre immédiatement plus grand que le donné, & trouver enſuite le nombre qui ſeroit le même quantiéme moyen proportionnel géométrique entre les deux nombres correſpondans, l'un au moindre, & l'autre au plus grand de ces deux logarithmes. Il eſt évident que cela ne ſe fait pas exactement, mais ſeulement à peu près par les Opérations du ſecond & du troiſiéme Problême.

2°. Ils doivent même remarquer ſur les Opérations du ſecond & troiſiéme Problême, que les différences des nombres entiers qui vont en augmentant d'une unité, ſont toujours les mêmes, ſçavoir l'unité; & que les différences de leurs logarithmes ſont fort différentes; ainſi les parties proportionnelles géométriques de l'unité (qui eſt la différence dont les nombres entiers vont en augmentant) ſont les mêmes; puiſque, par exemple $\frac{3}{4}$ d'une unité, ſont la même grandeur que $\frac{3}{4}$ d'une autre unité; & les parties proportionnelles géométriques correſpondantes des différences des logarithmes ne peuvent pas être les mêmes, car ces différences étant inégales, les $\frac{3}{4}$ de l'une, par exemple, ſont une grandeur différente des $\frac{3}{4}$ d'une autre.

D'où l'on voit que quand même la méthode de réſoudre le ſecond & troiſiéme Problême par le moyen de la partie proportionnelle, ſeroit exacte par elle-même, l'inégalité des différences dont les logarithmes des nombres entiers vont en augmentant les uns ſur les autres, y cauſeroit quelque petite erreur.

IV.

690. On voit aſſez par ce qu'on vient de dire dans le ſecond article de la Remarque précédente, que plus les différences, dont les logarithmes des Tables vont en augmentant de ſuite les uns ſur les autres, approche de l'égalité, & moins il y a d'erreur dans les parties proportionnelles des Opérations du ſecond & troiſiéme Problême. Or dans les Tables, les logarithmes des nombres entiers les plus grands, c'eſt-à-dire les plus éloignés de l'unité, different moins les

uns des autres ; c'est-à-dire, dans les Tables des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10000, les différences des logarithmes des nombres entiers pris de suite les moins éloignés de 10000, sont les plus approchantes de l'égalité. Dans les Tables des logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 20000, les différences des logarithmes des nombres entiers qui ne se surpassent que d'une unité, les moins éloignés de 20000, sont les plus approchantes de l'égalité. Enfin dans les grandes Tables, les différences des logarithmes des nombres entiers qui ne surpassent que d'une unité, les moins éloignés de 100000, sont presqu'égales. Cela est cause que dans les calculs par logarithmes, quand on a besoin de trouver le logarithme d'un nombre donné, lequel nombre n'est pas dans les Tables que l'on a, il faut chercher ce logarithme parmi les plus éloignés de l'unité qu'on peut, ou, ce qui est la même chose, parmi les plus approchans des derniers des Tables : & de même quand on a besoin de trouver quel est le nombre d'un logarithme donné, lequel logarithme n'est pas exactement dans les Tables, il faut chercher ce logarithme parmi les derniers des Tables. On en va expliquer la méthode dans les Problêmes suivans, après avoir fait faire la remarque qui suit.

V.

691. 1°. Lorsqu'un nombre entier est multiplié successivement par les termes 10, 100, 1000, 10000, 100000, &c. de la progression décuple; les logarithmes de tous les produits & du nombre multiplié, ne different que dans la seule *caractéristique*. Par exemple, les logarithmes de 986, 9860, 98600, 986000, 9860000, &c. sont 2 . 9938769, 3 . 9938769, 4 . 9938769, 5 . 9938769, &c. La raison en est que le logarithme de chacun des produits est * la somme des logarithmes des nombres multipliés, & que l'addition des deux logarithmes, dont l'un a pour *caractéristique* l'unité, ou l'un des neuf chiffres précédé d'autant de zéros qu'il y a de rangs devant la *caractéristique*, ne change rien dans les rangs de l'autre logarithme qui sont à droite devant la *caractéristique*.

* 657.

692. 2°. Quand un nombre entier est divisé successivement par les termes 10, 100, 1000, &c. de la progression décuple; les logarithmes du dividende & de tous les quotiens, pen-

dant que ces quotiens demeurent au-dessus de l'unité, ne different que dans la seule *caractéristique*. Par exemple, les
* 12. logarithmes des nombres 98765, $\frac{98765}{10}$ = * 9876.5,
* 659. $\frac{98765}{100}$, $\frac{98765}{1000}$, $\frac{98765}{10000}$, sont * 4.9946030, 3.9946030,
2.9946030, 1.9946030, 0.9946030.

Mais quand les quotiens deviennent moindres que l'unité, leurs logarithmes sont les restes de la soustraction du logarithme du dividende retranché successivement des logarithmes de 100000, 1000000, 10000000, &c. & ces
* 656. logarithmes sont * négatifs, & ne different aussi que dans la
* 12. *caractéristique*. Par exemple, le logarithme de $\frac{98765}{100000}$ = * au
* 660. nombre décimal 0.98765, est * la différence du logarithme de 100000 & du logarithme de 98765, c'est-à-dire l'excès du premier logarithme sur le second, en rendant cet excès négatif. Ce logarithme est donc — 5.0000000 + 4.9946030 = — 0.0053970; les logarithmes de $\frac{98765}{1000000}$, $\frac{98765}{10000000}$, $\frac{98765}{100000000}$ &c. sont — 1.0053970, — 2.0053970, — 3.0053970, &c.

* 659. La raison en est que le logarithme d'un quotient est * la différence des logarithmes du dividende & du diviseur, & cette différence est l'excès du plus grand des deux sur le moindre, laquelle se trouve en ôtant le moindre du plus grand. Or les diviseurs étant l'unité précédée à la droite successivement d'un zéro, de deux zéros, de trois zéros, &c. leurs logarithmes ne contiennent que la *caractéristique* qui est l'unité, ou l'un des neuf chiffres, précédé à la droite de zéros. Ainsi les excès des logarithmes du dividende & du diviseur, doivent ne différer que dans la seule *caractéristique*. Mais pendant que le dividende demeure plus grand que le diviseur, c'est-à-dire pendant que les quotiens surpassent l'unité, les logarithmes des quotiens sont les excès du logarithme du dividende sur celui du diviseur, & ce logarithme du diviseur n'ayant que des zéros devant la *caractéristique*, ces excès ou différences ne peuvent différer que dans la *caractéristique*; & quand les quotiens sont moindres que l'unité, les diviseurs qui n'ont que des zéros devant l'unité, surpassent le dividende, & les excès des logarithmes des diviseurs, (lesquels logarithmes des diviseurs n'ont que la *caractéristique* & des zéros) sur le logarithme du dividende, lequel

lequel logarithme demeure le même, ne peuvent différer que dans la seule *caractéristique*, & ils doivent être * négatifs. * 656.

693. 3°. Un logarithme étant donné, si l'on augmente de 1, de 2, de 3, &c. sa seule *caractéristique*, sans toucher aux autres chiffres, il devient successivement * le logarithme des produits du nombre dont il est le logarithme, multiplié par 10, 100, 1000, &c. Si l'on diminue sa *caractéristique* de 1, de 2, de 3, &c. jusqu'à ce qu'elle soit devenue zéro, il devient successivement * le logarithme des quotiens qui se forment en divisant le nombre, dont il est le logarithme, successivement par 10, 100, 1000, &c. Par exemple 0.9946030, 1.9946030, 2.9946030, 3.9946030, 4.9946030, &c. sont les logarithmes de $9\frac{8765}{10000}$, $98.\frac{765}{1000}$, $987.\frac{65}{100}$, $9876\frac{5}{10}$, 98765. Et 4.9946030, 3.9946030, 2.9946030, 1.9946030, 0.9946030 sont les logarithmes de 98765, $9876\frac{5}{10}$, $987\frac{65}{100}$, $98.\frac{765}{1000}$, $9\frac{8765}{10000}$; car dans le premier cas on ajoute successivement au logarithme donné celui de 10, 100, 1000, &c. & dans le second cas on en retranche successivement les logarithmes de 10, 100, &c. * 691. * 692.

694. 4°. Un logarithme négatif étant donné, comme —3.0053970 qui appartient au nombre décimal $\frac{98765}{100000000}$, si l'on augmente successivement sa *caractéristique* négativement, pour ainsi dire, de l'unité, de 2, de 3, &c. c'est-à-dire en lui ajoutant —1, —2, —3, &c. il devient successivement le logarithme des quotiens qui se forment en divisant le nombre $\frac{98765}{100000000}$ par 10, 100, 1000, &c. ou, ce qui revient au même, des produits du même nombre multiplié par $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. Si au contraire on diminue sa *caractéristique* en lui ajoutant +1, +2, &c. jusqu'à ce que sa *caractéristique* soit —0, il devient successivement le logarithme des produits du nombre $\frac{98765}{100000000}$ multiplié par 10, 100, &c. Par exemple —3.0053970, —4.0053970, —5.0053970, &c. sont les logarithmes de $\frac{98765}{100000000}$, $\frac{98765}{1000000000}$, $\frac{98765}{10000000000}$; & —3.0053970, —2.0053970, —1.0053970, —0.0053970 sont les logarithmes de $\frac{98765}{100000000}$, $\frac{98765}{10000000}$, $\frac{98765}{1000000}$, $\frac{98765}{100000}$.

La raison en est que quand on augmente la *caractéristique* d'un logarithme négatif —3.0053970, de —1, —2, —3, &c. on ajoute à ce logarithme les logarithmes négatifs de 10, de 100, de 1000, &c. ou, ce qui est la même chose, on retranche de ce logarithme, les logarithmes positifs de 10, 100, 1000, &c. Par conséquent * les logarithmes qui viennent de ce retranchement, sont les logarithmes des quotiens qui naissent en divisant le nombre de ce logarithme négatif par 10, 100, &c. Au contraire, quand on diminue de 1, 2, &c. la *caractéristique* d'un logarithme négatif — 3.0053970, on ajoute à ce logarithme les logarithmes positifs de 10, 100, &c. Par conséquent * les logarithmes qui viennent de cette addition, sont les logarithmes des produits qui viennent en multipliant le nombre de ce logarithme négatif — 3.0053970, par 10, 100, &c.

*693.

*693.

695. On fera attention que quand on joint ensemble deux logarithmes, dont l'un est positif & l'autre négatif, il faut toujours ôter le plus petit du plus grand, & le reste est leur différence, qui est positive quand le plus grand est le positif, & négative quand le plus grand est le négatif. Ainsi pendant que l'on ajoute + 1, + 2, + 3 au logarithme — 3.0053970, (ce qui est ôter successivement de — 3.0053970 les logarithmes 1.0000000, 2.0000000, 3.0000000, & prendre les restes qui sont négatifs) les logarithmes — 2.0053970, — 1.0053970, — 0.0053970 qui résultent de ces opérations, sont négatifs. Mais au moment qu'on veut les continuer ces opérations, & joindre le logarithme + 4.0000000 au logarithme — 3.0053970, le positif surpassant le négatif, ce n'est plus le premier qu'on ôte du second, c'est 3.0053970 qu'il faut ôter de 4.0000000, & prendre le reste positif + 0.9946030, qui est le logarithme de $\frac{98765}{1000000000} \times 10000 = \frac{98765}{10000} = 9\frac{8765}{10000}$.

696. Il suit de là que quand on ajoute à la *caractéristique* d'un logarithme négatif donné, + 1, + 2, + 3, &c. pendant que ce qui en résulte demeure négatif, le même logarithme ne change que dans la *caractéristique*, & il devient successivement les logarithmes des produits formés du nombre qui lui répond, multiplié par 10, 100, 1000, &c. & ces produits sont des fractions moindres chacune que l'unité. Mais au moment qu'il change de négatif en positif, le logarithme qui en vient ne différe pas seulement des précédens dans la *caractéristique*, mais aussi dans les autres caracteres; il est le logarithme du même nombre, mais qui étant multiplié

par le terme suivant de la progression décuple, est devenu plus grand que l'unité. On a vû ci-dessus * que la même * 695. chose arrivoit quand on diminuoit la *caractéristique* d'un logarithme positif de 1, de 2, de 3, &c. au moment que le logarithme se changeoit de positif en négatif.

Les deux logarithmes qui se changent ainsi l'un en l'autre dans le passage du positif au négatif, & du négatif au positif, étant ajoutés ensemble pris positifs, leur somme est le logarithme de 10, ce qui est évident par l'opération même. Dans notre exemple + 0.9946030 + 0.0053970 = 1.0000000, qui est le logarithme de 10, & chacun se nomme le *complément* de l'autre.

697. Généralement quand ayant effacé la *caractéristique* d'un logarithme, on l'ôte ensuite du logarithme de 10, qui est 1.0000000, le reste s'appelle le *complément* du premier; & si l'on sçait le nombre auquel appartient l'un des deux logarithmes qui se servent mutuellement de *complément*, le nombre correspondant de l'autre est connu; car c'est le quotient de 10 divisé par le nombre connu. Par exemple si l'on ôte la *caractéristique* du logarithme 4.0053970, on aura le logarithme 0.0053970; retranchant ce logarithme 0.0053970 du logarithme de 10, qui est 1.0000000, on trouve le logarithme 0.9946030; ces deux logarithmes 0.0053970 & 0.9946030 s'appellent le *complément* l'un de l'autre. Ainsi puisque + 0.9946030 est le logarithme de $9\frac{8765}{10000}$, son *complément* + 0.0053970 est le logarithme du quotient * qui * 659. doit venir de la division de 10 par $\frac{98765}{10000}$, lequel quotient est $\frac{100000}{98765}$. Mais — 0.0053970 est le logarithme * du réciproque $\frac{98765}{100000}$. * 668.

PROBLÊME IV.

698. *TROUVER par le moyen des Tables le logarithme d'un nombre entier donné, lequel nombre surpasse tous les nombres entiers contenus dans les Tables.*

OPÉRATION. 1°. Il faut mettre une virgule après quatre rangs de chiffres à gauche du nombre proposé, si l'on n'a que les Tables des logarithmes jusqu'à 10000; si l'on a les logarithmes jusqu'à 20000, & que le premier chiffre à gauche du nombre proposé soit 1, il faut mettre la virgule après le 5^e rang du nombre proposé; enfin si l'on a les logarithmes jusqu'à 100000, il faut toujours mettre la virgule après le 5^e rang du nombre proposé, quelque soit le premier chiffre à gauche.

Par exemple, si l'on propose de trouver le logarithme du nombre 1376998, on écrira dans le premier cas 1376,998, & dans le second & le troisiéme cas, 13769, 98.

Par cette opération on conçoit le nombre proposé divisé par 1000 dans le premier cas, & par 100 dans les autres. Par conséquent $1376,998 = 1376\frac{998}{1000}$, & $13769,98 = 13769\frac{98}{100}$. Ainsi cette opération signifie qu'il faut diviser le nombre donné par l'unité précédée à droite d'autant de zéros qu'il reste de rangs de chiffres à droite dans le nombre proposé, après en avoir séparé les quatre premiers rangs de chiffres à gauche dans le premier cas, & les cinq premiers dans le second & le troisiéme cas. Par conséquent pour retourner du nombre $1376.\frac{998}{1000}$, ou $13769.\frac{98}{100}$ qui est le quotient du dividende 1376998 divisé par le diviseur 1000 ou 100, il faut multiplier ce quotient ou concevoir ce quotient multiplié par le diviseur 1000 ou 100.

Cela fait voir clairement que quand on aura trouvé le logarithme du nombre proposé ainsi divisé, c'est-à-dire, de $1376\frac{998}{1000}$ ou de $13769\frac{98}{100}$, il ne faudra plus que lui ajouter le logarithme du nombre 1000, lequel logarithme est
*657. 3.0000000, ou le logarithme 2.0000000 de 100, * pour avoir le logarithme du nombre proposé 1376998; & il est clair que cela se doit faire en augmentant simplement de 3 ou de 2 la *caractéristique* du logarithme qu'on trouvera.

2°. Il faut chercher dans les Tables le logarithme du nombre composé des chiffres à gauche jusqu'à la virgule, comme si ce nombre étoit seul, & prendre ce logarithme pour la premiere partie du logarithme qu'on cherche.

Dans notre exemple on trouve, si l'on a les seules Tables des logarithmes jusqu'à 10000, que 3.1386184 est le logarithme de 1376; & si l'on a les Tables des logarithmes jusqu'à 20000 ou 100000, on trouve que 4.1389024 est logarithme de 13769.

Il faut à présent trouver le logarithme du nombre total
*685. $1376\frac{998}{1000}$, ou de $13769\frac{98}{100}$, comme dans le * second Problême; c'est-à-dire,

3°. Il faut ôter le logarithme qu'on vient de trouver dans les Tables, du logarithme des Tables immédiatement plus grand ; en écrire la différence ; & faire ensuite une régle de proportion dont le premier terme soit l'unité précédée d'autant de zéros qu'il y a de rangs de chiffres retranchés vers la droite dans le nombre donné, le second terme soit le nombre composé de ces chiffres retranchés à droite, le troisiéme terme soit la différence des logarithmes qu'on vient de trouver, le quatriéme terme sera * le nombre qu'il faut ajouter au logarithme du nombre composé des chiffres retranchés vers la gauche. * 685.

Dans notre exemple il faut ôter 3. 1386184, qui est le logarithme de 1376, du logarithme immédiatement plus grand 3. 1389339, on aura la différence 3155 ; & l'on fera ensuite cette régle de trois, 1000 . 998 :: 3155 . 3148 $\frac{690}{1000}$. On ajoutera cette partie proportionnelle 3149 (augmentée de l'unité * à cause que $\frac{690}{1000}$ surpasse $\frac{1}{2}$ de l'unité) au logarithme 3. 1386184 de 1376 ; la somme 3. 1389333 sera * le logarithme de 1376 $\frac{998}{1000}$. Si l'on a de plus grandes Tables de logarithmes, on ôtera le logarithme 4.1389024 du nombre 13769 du logarithme des Tables 4. 1389339 du nombre 13770 qui surpasse le précédent d'une unité, & l'on aura la différence 315, avec laquelle on fera cette régle de trois, 100 . 98 :: 315 . 308 $\frac{70}{100}$. On ajoutera cette partie proportionnelle 309 (augmentée aussi de 1 * à cause de $\frac{70}{100}$ plus grande que $\frac{1}{2}$) au logarithme 4 . 1389024 de 13769, & la somme 4 . 1389333 sera * le logarithme de 13769 $\frac{98}{100}$. * 275. * 685. * 275. * 685.

4°. Pour faire que le logarithme qu'on vient de trouver, soit le logarithme du nombre proposé, il faut lui ajouter le logarithme du terme de la progression décimale qui a au-devant de l'unité autant de zéros qu'il y a de rangs de chiffres retranchés à la droite dans le nombre proposé ; ce qui se fait * en augmentant simplement sa *caractéristique* d'autant d'unités qu'il y a de rangs retranchés à la droite dans le nombre proposé. * 693.

Dans notre exemple, il faut augmenter la *caractéristique* du logarithme qu'on a trouvé de 3 dans le premier cas, & de 2 dans le second cas, & l'on aura 6. 1389333 pour le logarithme de 1376998, *qu'il falloit trouver.*

REMARQUES.

I.

699. QUAND le nombre dont on cherche le logarithme n'a que sept ou huit rangs, on le trouve assez exactement par le seul Problême qu'on vient d'expliquer. Mais quand il a un plus grand nombre de rangs, on peut ajouter au Problême les moyens suivans pour trouver le logarithme avec plus d'exactitude.

* 267 & 268. 1°. On peut chercher * les diviseurs exacts du nombre proposé; & si on les trouve tous compris dans les Tables des logarithmes, il n'y a qu'à y prendre les logarithmes de tous
* 657. les diviseurs, & les ajouter ensemble; il est évident * que la somme sera le logarithme du nombre proposé, lequel nombre est le produit de tous ces diviseurs.

2°. Si un ou plusieurs de ces diviseurs sont plus grands que les nombres contenus dans les Tables des logarithmes que l'on a entre les mains, il faut chercher chacun des logarithmes des diviseurs qui surpassent les nombres de la Table,
* 698. par * le Problême précédent; & après les avoir trouvé, on ajoutera tous les logarithmes des diviseurs dont le produit est le nombre donné, & la somme sera le logarithme du nombre proposé.

Par exemple le nombre proposé 1376998 a pour diviseurs 2.7.7, 14051; si l'on n'a que les Tables des logarithmes jusqu'à 10000, le dernier des diviseurs n'y étant pas
* 698. compris, on trouvera par le Problême 4^e, * que son logarithme est 4.1477072. On lui ajoutera le logarithme de 2, & le double du logarithme de 7, & la somme sera le logarithme du nombre proposé.

II.

700. Les logarithmes des plus grands nombres étant moins inégaux que les logarithmes des plus petits, & étant plus propres à faire découvrir les logarithmes les plus approchans de l'exactitude, on peut ordinairement réduire le nombre proposé, en le multipliant ou le divisant par un nombre

connu, à être tel que le nombre composé de ses quatre ou cinq premiers chiffres à gauche se trouve parmi les nombres qui sont les plus grands des Tables que l'on a entre les mains; ensuite de quoi il faut chercher par * le Problême 4[e] le logarithme du nombre ainsi changé; & quand on l'aura trouvé, il n'y aura qu'à ôter de ce logarithme celui du nombre par lequel on a multiplié le nombre proposé, ou l'ajouter au logarithme du nombre par lequel on a divisé le nombre proposé, & la différence de ces deux logarithmes dans le premier cas, ou leur somme dans le second cas, sera le logarithme du nombre proposé, comme on le démontrera à la fin de l'exemple suivant. *698.

Par exemple si on multiplie le nombre proposé A. 1376998 par M. 7, le produit P. 9638986 sera tel que le nombre 9638 composé des quatre premiers chiffres à gauche, sera parmi les derniers nombres des Tables des logarithmes jusqu'à 10000; & le nombre 96389 composé des cinq premiers chiffres à gauche, sera parmi les derniers nombres des grandes Tables des logarithmes jusqu'à 100000. Si on divise le nombre proposé A. 1376998 par D. 7, le quotient Q. 196714 sera tel que le nombre 19671 composé des cinq premiers chiffres à gauche, sera parmi les derniers nombres des Tables des logarithmes jusqu'à 20000.

Après cette préparation, il faut chercher par * le Problême 4[e] le logarithme du nombre changé P. 9638986, ou Q. 196714; & quand on l'aura trouvé, il faudra en ôter dans le premier cas le logarithme du multiplicateur M. 7, & lui ajouter dans le second cas le logarithme du diviseur D. 7; & la différence dans le premier cas, ou la somme dans le second cas sera le logarithme du nombre proposé 1376998. *698.

Car, par la supposition, $l.P = l.A \times M =$ *$l.A + l.M$. *657.

Donc en retranchant $l.M$ de chaque grandeur égale $l.P = l.A + l.M$, on aura $l.P - l.M = l.A$ dans le premier cas.

De même, par la supposition, $l.Q = l.\frac{A}{D} =$ *$l.A - l.D$. *659.

Donc en ajoutant $+ l.D$ à chacune des grandeurs égales $l.Q = l.A - l.D$, on aura $l.Q + l.D = l.A$ dans le second cas.

On ne se sert de cette derniere pratique que pour les grands nombres, & dans les Problêmes où il faut une grande précision, comme dans les Problêmes de l'Astronomie.

PROBLÊME V.

701. *TROUVER le logarithme d'un nombre rompu donné.*

OPÉRATION. 1°. Si le nombre rompu donné surpasse l'unité, & qu'il contienne un nombre entier qui est dans les Tables, & une fraction de plus; on en trouvera le logarithme
* 685. par le * second Problême, comme on a trouvé celui du nombre $9354\frac{2}{3}$.

2°. Si le nombre donné contient un nombre entier qui sur-
* 280. passe ceux des Tables, & une fraction de plus, on réduira * le tout à une seule fraction, & l'on en trouvera le logarithme de la maniere suivante.

3°. Dans tous les cas où le nombre proposé est une seule fraction, sans aucun nombre entier qui lui soit joint, il faut
* 698. trouver * séparément le logarithme du numérateur & celui du dénominateur; ôter le plus petit des deux, du plus grand;
* 660. la différence * sera le logarithme de la fraction proposée; on le laissera positif ce logarithme, si la fraction proposée sur-
* 656. passe l'unité; on écrira * au-devant le signe —, si la fraction proposée est moindre que l'unité.

EXEMPLES.

I.

POUR trouver le logarithme de $\frac{1}{11}$, on fera attention
* 668. que quand l'unité est le numérateur, il n'y * a qu'à écrire le logarithme — 1.0413927 du dénominateur 11 précédé du signe —.

II.

Pour trouver le logarithme de $\frac{6223}{9795}$, on ôtera du logarithme 3.9910044 du dénominateur 9795, le logarithme 3.7939998 du numérateur 6223, & la différence
* 660. — 0.1970046 précédée du signe —, * sera le logarithme qu'on cherche.

III.

* 698. Pour trouver le logarithme de $\frac{1376998}{96781}$, il faut chercher * le logarithme 6.1389333 du numérateur, & le logarithme 4.9857901 du dénominateur, & la différence 1,1531432 de

ces

ces deux logarithmes, sera le logarithme qu'on cherche, lequel * est positif. * 656.

PROBLÊME VI.

702. *Un logarithme quelconque étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.*

OPÉRATION. Si la *caractéristique* du logarithme donné est moindre que 4, & qu'on n'ait que les Tables des logarithmes jusqu'à 10000; ou si elle est 4, & qu'on ait les Tables des logarithmes jusqu'à 100000, on trouvera le nombre auquel il appartient, * par le troisiéme Problême. * 686.

1°. Quand la *caractéristique* du logarithme donné est 4, & qu'on n'a que les logarithmes jusqu'à 10000; & quand elle surpasse 4, & qu'on a les logarithmes jusqu'à 100000, voici la maniere de trouver le nombre auquel il appartient. On connoît déja par les unités de la *caractéristique* (quand le nombre qu'on cherche est entier, & quand il est composé d'un entier & d'une fraction); on connoît, dis-je, combien le nombre entier * doit contenir de rangs de chiffres. Car si la *caractéristique* est, par exemple, 5, 6, 7; &c. le nombre entier doit contenir un rang de plus, sçavoir, $5+1=6$, $6+1=7$, $7+1=8$, &c. Pour trouver ce nombre, il faut n'avoir aucun égard à la *caractéristique* du logarithme donné jusqu'à la fin de l'opération, & faire seulement attention qu'en imaginant cette *caractéristique* réduite à zéro, le nombre auquel appartient le logarithme donné * est conçu divisé par l'unité précédée à droite d'autant de zéros que la *caractéristique* contient d'unités : mais si l'on conçoit qu'on diminue la *caractéristique* seulement de quelques unités, le nombre auquel appartient le logarithme donné est conçu divisé par l'unité précédée d'autant de zéros qu'on a retranché d'unités à la *caractéristique*. Par exemple si l'on a retranché 2 ou 3 de la *caractéristique*, le nombre correspondant au logarithme donné est conçu divisé par 100 ou par 1000. * 679. * 693.

2°. Il faut ensuite chercher le logarithme donné dans les Tables que l'on aura entre les mains; & si on l'y trouve exactement, à la *caractéristique* près, le nombre qui lui répond sera celui qu'on cherche, après qu'on lui aura ajouté à la droite autant de zéros que la *caractéristique* du logarithme donné contient d'unités de plus que la *caractéristique* du logarithme qu'on vient de trouver dans les Tables, qui est égal au donné en tous les rangs, excepté la *caractéristique*.

Mais si l'on ne trouve pas le logarithme donné exactement dans les Tables (ce qui arrive ordinairement), il faut y prendre celui qui est immédiatement plus petit que le donné; prendre le nombre qui lui répond dans les Tables pour le nombre entier qui fait la principale partie du nombre qu'on cherche.

3°. Il ne restera plus qu'à trouver la fraction qu'il faut lui
* 686. ajouter. On la trouvera, cette fraction, par le * troisiéme Problême; c'est-à-dire, on prendra la différence du logarithme immédiatement plus petit que le donné, d'avec le logarithme donné, en ne supposant au logarithme donné que la même *caractéristique* qu'a le logarithme immédiatement plus petit pris dans les Tables; on prendra encore la différence du plus petit d'avec le logarithme des Tables immédiatement plus grand; & l'on fera cette régle de proportion: la seconde des deux différences qu'on vient de trouver est à la premiere, comme l'unité précédée, si l'on veut, d'autant de zéros que la *caractéristique* du logarithme donné contient d'unités de plus que celle du logarithme pris dans les Tables, est à un 4ᵉ terme, lequel terme sera la fraction
* 687. qu'on cherche; ou simplement la fraction qu'on cherche * aura pour numérateur la premiere, & pour dénominateur la seconde des deux différences qu'on vient de trouver.

4°. Enfin après avoir ajouté cette fraction au nombre entier, on le multipliera par l'unité précédée à droite d'autant de zéros que la *caractéristique* du logarithme donné contient d'unités de plus que celle du logarithme des Tables plus petit que le donné.

EXEMPLE.

POUR trouver le nombre à qui appartient le logarithme *6.1389333*; 1°. on ne fera aucune attention à la *caractéristique 6*.

2°. Ce logarithme ne se trouvant pas exactement dans les Tables, on y prendra le logarithme 3.1386184 qui est immédiatement plus petit, & son nombre 1376 sera regardé comme la premiere partie du nombre qu'on cherche.

3°. Pour trouver l'autre partie, on ôtera 3 . 1386184 du logarithme donné 3 . 1389333 (en supposant au logarithme donné la *caractéristique* 3 de celui des Tables qui est immédiatement plus petit), & l'on aura la premiere différence 3149. On ôtera encore 3 . 1386184 de 3 . 1389339 qui est le logarithme des Tables immédiatement plus grand, & l'on aura la seconde différence 3155.

On fera ensuite cette régle de trois, 3155 . 3149 :: 1000. $\frac{3149000}{3155} = 998 \frac{310}{3155}$. On néglige la fraction $\frac{310}{3155}$ qui est plus petite que la moitié de l'unité; & le 4e terme $\frac{998}{1000}$ (qui est une fraction décimale, parce qu'on a supposé l'unité partagée en 1000 parties), sera la fraction qu'il faut ajouter au nombre entier 1376: ainsi $1376\frac{998}{1000}$ est le nombre du logarithme 3 . 1389333.

4°. La *caractéristique* 6 du logarithme donné 6 . 1389333, surpassant de trois unités la *caractéristique* du logarithme 3 . 1389333, dont le nombre est $1376\frac{998}{1000}$, il faut multiplier ce nombre par 1000, & le produit 1376998 sera le nombre du logarithme donné. *Ce qu'il falloit trouver.*

REMARQUES.

I.

703. QUAND la *caractéristique* du logarithme donné est 8, 9, 10, &c. si l'on veut trouver avec une plus grande précision le nombre dont il est le logarithme, & qui doit avoir * neuf ou dix, ou onze rangs de chiffres, on pourra changer le logarithme donné en un autre qui se trouve vers la fin des Tables des logarithmes, de maniere qu'après avoir trouvé le nombre du logarithme changé, on ait aussi le nombre du logarithme donné. En voici la méthode. * 679.

1°. On ôtera le logarithme donné (lui supposant zéro pour *caractéristique*) du logarithme de 10 qui est 1 . 0000000, & l'on prendra la différence qui est le *complément* du logarithme donné.

On se servira du même exemple, c'est-à-dire du même logarithme donné 6 . 1389333, afin de ménager l'attention des Commençans pour concevoir plus facilement la méthode. On prendra donc le *complément* 0 . 8610667 du logarithme donné 0. 1389333 (lui ayant ôté sa *caractéristique* 6.)

2°. On cherchera ce *complément* dans les Tables, & l'on y prendra, sans faire attention à sa *caractéristique* 0, le logarithme immédiatement plus petit, qui est dans cet exemple 3. 8610562, dont le nombre est 7262.

3°. On ajoutera ce logarithme 3. 8610562 immédiatement plus petit que le *complément* (lui laissant sa *caractéristique* 3) au logarithme donné 6. 1389333 (aussi avec sa *caractéristique*), & l'on aura le nouveau logarithme 9. 9999895, qui (n'ayant égard qu'aux rangs qui précédent à droite la *caractéristique*) sera des derniers tant des Tables des logarithmes jusqu'à 10000, que des grandes Tables des logarithmes jusqu'à 100000. On en donnera la raison après l'exemple.

*702. 4°. On cherchera par le * sixiéme Problême le nombre de ce nouveau logarithme.

On trouvera dans notre exemple par les Tables des logarithmes jusqu'à 10000, que le pénultiéme logarithme 3. 9999566 du nombre 9999, est celui qui est immédiatement plus petit que le logarithme nouveau 9. 9999895, en regardant la *caractéristique* 9 de ce nouveau logarithme comme si elle étoit 3; & on trouvera aussi * par cette proportion

*702, nomb. 3^e. 434. 329 : : 1000000. $\frac{329 \times 1000000}{434}$, que la partie proportionnelle à ajouter au nombre 9999 est $\frac{329000000}{434} = \frac{758064}{1000000}$. & en multipliant le nombre 9999 $\frac{758064}{1000000}$ par 1000000, parce que la *caractéristique* 9 de 9. 9999895 surpasse de six unités la *caractéristique* 3 de 3. 9999895, on aura 9999758064 pour le nombre du logarithme 9. 9999895.

5°. Ayant trouvé le nombre du nouveau logarithme, on le divisera par le nombre qu'a fait découvrir le complément du logarithme donné, le quotient sera le nombre du logarithme donné, avec toute la précision que l'on peut tirer des logarithmes ordinaires.

Dans notre exemple on divisera le nombre 9999758064 du logarithme 9. 9999895 par le nombre 7262 du logarithme 3. 8610562 (lequel logarithme a été ajouté au logarithme donné 6. 1389333, & la somme étoit le logarithme 9. 9999895) le quotient 1376997 $\frac{5650}{7262}$, ou bien (lui ajoutant l'unité, parce que la fraction surpasse la moitié de l'unité) le quotient 1376998 sera le nombre du logarithme donné 6. 1389333. *Ce qui étoit proposé.*

704. *Démonstration de cette méthode.* Le logarithme qu'on trouve par le 3ᵉ article, étant la somme du logarithme dont le nombre est connu par les Tables, sçavoir 7262, & du logarithme donné, le nombre du logarithme du 3ᵉ article est * le produit des deux nombres auxquels appartiennent ces deux logarithmes. Ce produit étant découvert par le 4ᵉ article, en le divisant par l'un des multiplicateurs, le quotient doit être l'autre, & il est par conséquent le nombre du logarithme donné. Ainsi il ne reste plus qu'à faire voir que la méthode du premier, second & troisiéme article, change le logarithme en un autre qui est nécessairement vers la fin des Tables.

* 657.

Pour cela il suffit de faire remarquer que les logarithmes les plus proches de la fin des Tables, ont au-devant de la *caractéristique* un ou plusieurs 9 de suite. Or le logarithme donné (lui ôtant sa *caractéristique*) & son *complément*, font ensemble par la supposition exactement 1, 0000000. Si donc au lieu d'ajouter au logarithme donné son *complément*, on lui ajoute, comme le prescrit le 3ᵉ article, un logarithme des Tables qui soit immédiatement plus petit, c'est-à-dire qui en differe très-peu, la somme ne pouvant plus être exactement 1.0000000, en sera pourtant approchante; c'est-à-dire que la *caractéristique* sera nécessairement précédée de plusieurs rangs de 9. Ainsi le logarithme nouveau qui sera cette somme, se trouvera parmi les derniers logarithmes des Tables.

II.

705. On peut aussi faire ensorte qu'un logarithme donné se trouve parmi les derniers des Tables, en lui ajoutant un logarithme choisi dans les Tables propres à cela, & dont le nombre sera par conséquent connu; & quand on aura le nombre du logarithme qui est la somme, il ne faudra que le diviser par le nombre du logarithme ajouté, & le quotient sera le nombre du logarithme donné. Par exemple, si l'on ajoute au logarithme donné 6.1389333, le logarithme de 70 qui est 1.8450980, la somme sera le logarithme 7.9840313, lequel (n'ayant pas d'égard à sa *caractéristique*) se trouve parmi les derniers des deux Tables des logarithmes jusqu'à 10000, & des logarithmes jusqu'à 100000.

PROBLÊME VII.

706. *Un logarithme négatif étant donné, trouver la fraction dont il est le logarithme.*

PREMIERE MÉTHODE.

*686 ou 702. Il faut chercher * le nombre à qui appartient le logarithme négatif donné, en le regardant comme positif, & faire ce nombre le dénominateur d'une fraction, & lui donner * l'unité pour numérateur; elle sera la fraction du logarithme négatif donné. *669.

Par exemple, pour avoir le nombre du logarithme négatif — 0.7781512, on cherchera le nombre du logarithme positif 0.7781512, & ayant trouvé 6, on écrira $\frac{1}{6}$ * pour le nombre du logarithme — 0.7781512. *669.

Pour avoir le nombre du logarithme négatif — 0.1760913, on cherchera le nombre du logarithme positif 0.1760913; & trouvant dans la Table le logarithme 1.1760913, qui n'en differe que dans la *caractéristique*, on en prendra le nombre 15, & le divisant par 10 à cause que 0.1760913 = 1.1760913 — 1.0000000, on aura $\frac{15}{10}$ pour le nombre du logarithme 0.1760913. On fera ce nombre $\frac{15}{10}$ le dénominateur d'une fraction à qui on donnera l'unité pour numérateur, & $\frac{1}{\frac{15}{10}} = \frac{10}{15}$ sera la fraction à qui appartient le logarithme négatif — 0.1760913.

SECONDE MÉTHODE.

Comme une fraction donnée peut avoir une infinité d'expressions, dans chacune desquelles le rapport du premier au second terme est toujours le même, c'est-à-dire le rapport est toujours égal à celui du numérateur au dénominateur de la fraction donnée; cela est cause qu'on peut trouver différentes expressions de la fraction qui appartient à un logarithme négatif donné. En voici la méthode.

1°. On prendra pour dénominateur de la fraction qu'on cherche tel nombre qu'on voudra; on prend ordinairement pour dénominateur 36, 360, 3600, 36000, &c. parce que chacun de ces nombres a beaucoup de diviseurs; ce qui est commode pour abréger l'expreſſion de la fraction qu'on trouve, & pour la diverſifier ſelon le beſoin qu'on en peut avoir, & les logarithmes de ces nombres ne different * que dans la *caractériſtique*. * 691.

On prendra dans les Tables le logarithme du nombre qu'on aura choiſi pour dénominateur, & on lui ajoutera le logarithme négatif donné. On doit ſe ſouvenir que cette addition d'un nombre poſitif avec un négatif, qui eſt + le poſitif — le négatif, ſe fait en ôtant le moindre du plus grand, & dans le cas où nous ſommes, c'eſt toujours le négatif qui doit être le moindre; le logarithme poſitif qui réſultera de cette opération, ſera celui du numérateur que l'on cherche. Ainſi après avoir trouvé le nombre de ce logarithme, on en fera le numérateur de la fraction dont on a déja choiſi le dénominateur, & ce ſera celle qu'on cherchoit.

Par exemple, pour trouver la fraction à qui appartient le logarithme négatif — 0.1760913, on prendra 36 pour dénominateur de cette fraction, dont le logarithme eſt 1.5563025; on ajoutera + 1.5563025 — 0.1760913, ce qui donnera le logarithme + 1.3802112; on en * cherchera le nombre 24, & on le prendra pour numérateur, & la fraction qu'on cherche ſera $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. * 686 ou 702.

2°. Ou bien on prendra pour le numérateur de la fraction du logarithme négatif donné, tel nombre qu'on voudra. (On prend d'ordinaire l'un des mêmes nombres 36, 360, &c.) On cherchera le logarithme de ce nombre, & l'on ſouſtraira de ce logarithme poſitif, le logarithme négatif donné, ce qui ſe fait en changeant le ſigne — du logarithme négatif en +, & l'ajoutant enſuite au logarithme poſitif. On cherchera le nombre du logarithme poſitif qui réſultera de l'opération précédente; ce ſera le dénominateur de la fraction qu'on cherche, dont on a déja déterminé le numérateur.

Pour trouver par cette méthode la fraction à qui appartient le logarithme négatif — 0.1760913, on prendra 36 pour le numérateur; on ôtera le logarithme négatif — 0.1760913 du logarithme poſitif 1.5563025 qui eſt le logarithme de 36, & l'on aura + 1.7323938. On cherchera le nombre 54 de ce logarithme, & l'on écrira $\frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ pour la fraction que l'on cherchoit.

Démonstration de la 2e méthode. Dans le premier cas de la seconde méthode, l'addition du logarithme négatif donné à qui appartient la fraction qu'on cherche, qui sera ici représentée par $\frac{x}{y}$, avec le logarithme du nombre 36 pris
* 657. pour dénominateur, marque * que les nombres de ces logarithmes sont multipliés l'un par l'autre, & que le nombre qu'on nommera n, du logarithme qui est la somme des deux ajoutés ensemble, est le produit de ces deux multiplicateurs. Dans le second cas, la soustraction du logarithme négatif donné à qui appartient la fraction $\frac{x}{y}$ qu'on cherche, du logarithme du nombre 36 pris pour numéra-
* 659. teur, marque * que le nombre 36 pris pour numérateur, est divisé par la fraction $\frac{x}{y}$ du logarithme négatif. Par con-
* 72. séquent dans le premier cas * l'unité est à la fraction $\frac{x}{y}$, comme le nombre 36 est au nombre n du logarithme qui est la somme des deux autres, lequel nombre n est le produit de ces deux autres nombres; & dans le second cas, le
* 106. nombre 36 qui est le dividende, * est à la fraction $\frac{x}{y}$ qui est le diviseur, comme le nombre qu'on nommera n, du logarithme formé de la soustraction, est à l'unité; ou bien par l'*alterne*, 36 est au nombre n du logarithme formé de
* 329, & 330. la soustraction, comme $\frac{x}{y}$ est à 1 : mais * $1 . \frac{x}{y} :: y . x$, & $\frac{x}{y} . 1 :: x . y$. Ainsi dans le premier cas, $\frac{x}{y} = \frac{n}{36}$; & dans le second cas, $\frac{x}{y} = \frac{36}{n}$.

AVERTISSEMENT.

707. Les principaux usages des calculs par logarithmes, se réduisent à ces deux-ci : *Trouver le nombre d'un logarithme quelconque qui est donné; & trouver le logarithme d'un nombre quelconque qui est donné.* Ainsi pour calculer par logarithmes, il suffit de se rendre familiers les six derniers Problêmes qui ne contiennent que la pratique de ces deux choses. On ne
* 661. rencontrera ensuite aucune difficulté à faire toutes * les régles de proportion par logarithmes; à élever par le moyen
* 663. des logarithmes * tel nombre qu'on voudra à une puissance
* 664. donnée quelconque; ni à * trouver par le moyen des logarithmes la racine donnée quelconque d'un nombre tel qu'on
* 665. voudra; ni enfin à trouver * en employant les logarithmes, tant

tant de moyens proportionnels qu'on voudra entre deux nombres donnés quelconques ; ce qui renferme les usages ordinaires des logarithmes. Chacun peut aisément s'en faire des exemples, sans qu'il soit nécessaire d'en prolonger ce Traité, on n'y peut plus trouver de peine que celle du calcul.

SECTION V.

Explication d'une Méthode plus aisée dans la pratique pour former les logarithmes qui ayent chacun une telle quantité de rangs qu'on voudra.

Théorie ou principes d'où l'on tire cette Méthode.

LEMMES.

I.

708. LES nombres appliqués à mesurer les grandeurs sensibles, ont pour unité une partie déterminée de ces grandeurs. Ainsi chaque espéce de grandeur (comme les trois dimensions du corps, le tems, les vitesses, les mouvemens, &c.) pouvant être conçue divisible à l'infini, l'unité qui est une partie déterminée de ces grandeurs, peut être regardée comme divisible à l'infini.

Si l'on conçoit l'unité sensible divisée en plusieurs parties égales, ces premieres en d'autres égales plus petites, ces secondes en de troisiémes parties égales plus petites, & ainsi de suite tant qu'on voudra, on verra clairement que pendant qu'il n'y aura qu'un nombre fini & déterminé de divisions, les petites parties qui naîtront de la derniere division auront toujours une grandeur déterminée & finie, & chacune de ces petites parties déterminées étant prise un nombre de fois fini & déterminé, pourra devenir égale à la grandeur totale dont elle est une partie.

Mais si l'on conçoit cette division des parties d'une grandeur prise pour l'unité, en d'autres parties plus petites, continuée un nombre infini de fois, les parties qui naîtront de la derniere division, pour ainsi dire, seront d'une si extrême petitesse, qu'elles n'auront aucun rapport fini avec l'unité dont elles sont les parties, ni avec aucune partie finie & déterminée de l'unité : car ſi elles avoient un rapport fini avec une partie déterminée de l'unité, on y pourroit arriver après un nombre fini & déterminé de diviſions des parties de l'unité en parties plus petites, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

Ces parties plus petites que toute grandeur déterminée, quelque petite que puiſſe être cette grandeur déterminée, ſeront nommées *infiniment petites*, & on marquera ici chacune
* 51, & par e ; & l'on a déja fait voir * que la commune meſure qu'on
309. peut concevoir entre deux grandeurs incommenſurables, ne peut être qu'une partie infiniment petite de ces grandeurs.

I I.

709. Il ſuit de ce qu'on vient de dire, qu'il faut un nombre infini de parties infiniment petites pour faire une ſomme qui ſoit une grandeur finie & déterminée : car ſi d'un nombre fini de parties infiniment petites, on pouvoit faire une grandeur finie & déterminée, ces parties infiniment petites ne ſeroient pas plus petites que toute grandeur finie & déterminée, ce qui eſt contre la ſuppoſition ; puiſque toute grandeur qui étant priſe un nombre fini de fois, forme une grandeur déterminée, eſt elle-même la choſe qu'on entend par grandeur finie & déterminée.

I I I.

710. On peut donc appercevoir un nombre infini, & par conſéquent une grandeur infinie ; on la nommera E ; & chaque grandeur finie, comme l'unité, contenant un nombre infini de parties infiniment petites, le rapport $\frac{1}{e}$ d'une grandeur déterminée à une grandeur infiniment petite, eſt infini ou infiniment grand ; & par conſéquent $\frac{e}{1}$ eſt infiniment petit ; de même $\frac{E}{1}$ eſt infiniment grand, & $\frac{1}{E}$ eſt infiniment petit.

I V.

711. Cela fait voir qu'on peut appercevoir une progreſſion géométrique dans laquelle regnera un rapport infiniment grand d'un terme à l'autre en allant de droite à gauche, & infiniment petit en retournant de gauche à droite, comme dans la progreſſion A ou B.

A $\div$ &c. $e^6 . e^5 . e^4 . e^3 . e^2 . e . 1 . E . E^2 . E^3 . E^4 . E^5 . E^6$, &c. ou bien.

B $\div$ &c. $\frac{1}{E^6} . \frac{1}{E^5} . \frac{1}{E^4} . \frac{1}{E^3} . \frac{1}{E^2} . \frac{1}{E} . 1 . E . E^2 . E^3 . E^4 . E^5 . E^6$, &c.

D'où l'on voit *différens ordres* ou *genres* de grandeurs infiniment petites, & de grandeurs infiniment grandes ; on les nommera simplement, ces genres, le 1er, le 2d, le 3e, &c. E est infiniment grande du premier genre, E^2 du second, &c. e est infiniment petite du premier genre, e^2 du second, &c. De même $\frac{1}{E}$ est une infiniment petite du premier genre, $\frac{1}{E^2}$ du second, &c.

V.

712. Une grandeur d'un genre quelconque de la progression A ou B, étant multipliée ou divisée par le nombre fini quelconque n, le produit ou le quotient est une grandeur du même genre que cette grandeur. Ainsi nE & $\frac{1}{n}E$ sont chacun un infiniment grand du même genre que E ; ne, $\frac{1}{n}e$ est un infiniment petit du même genre que e. Car il faut prendre une
grandeur d'un genre, comme E ou e, * un nombre infini *708
de fois, pour l'élever au genre immédiatement supérieur. & 711.
De même il faut la diviser * par un nombre infini, c'est-à-dire *708.
la partager dans un nombre infini de parties, afin que les parties qui naîtront de la division, soient du genre immédiatement inférieur.

D'où l'on voit que dans chaque genre d'infiniment grands & d'infiniment petits, on apperçoit un nombre infini de grandeurs de ce même genre-là.

VI.

713. Une grandeur d'un genre pris dans la progression A ou B, jointe par $+$ ou par $-$ à une grandeur immédiatement plus grande, ne l'augmente ni ne la diminue, & elle peut être négligée quand on n'ajoute ensemble ou qu'on ne soustrait que des grandeurs de ce genre immédiatement plus grand. Ainsi si l'on ajoute $1 \pm e$ à 2, la somme sera simplement $2 + 1 = 3$; de même $5 + 1 \pm 2e \pm 1e^2 = 6$; de même $3e + 4e \pm 1e^2 \pm 2e^3 = 7e$. De même $3E^2 + 5E^2 \pm 1E = 8E^2$; de même $+\frac{1}{2E^2} - \frac{1}{2E} = -\frac{1}{2E}$; de même $\frac{1}{6E^3} - \frac{3}{6E^2} + \frac{2}{6E} = +\frac{2}{6E} = \frac{1}{3E}$. La raison en est, qu'une grandeur peut être regardée comme zéro par rapport à une grandeur qui est infiniment plus grande qu'elle. C'est par ce principe, que les Géométres regardent le point comme zéro par rapport à la ligne, & qu'une ligne augmentée ou diminuée d'un point,

est censée avoir la même grandeur avant & après l'augmentation ou la diminution.

VII.

714. Les grandeurs infiniment petites d'un même genre peuvent avoir entr'elles tous les rapports qu'on peut concevoir; par exemple, l'une peut être à l'autre comme 2 à 3, comme 1 à 10, comme 5 à 7, &c. Car si deux grandeurs déterminées & finies G & g ont l'une à l'autre un rapport quelconque représenté en général par $\frac{R}{r}$, & qu'on conçoive l'une & l'autre divisée en un même nombre tel qu'on voudra n de parties égales, & ces premieres de chacune divisées en un même nombre de secondes parties égales, & ces secondes en un même nombre de troisiémes parties égales, & ainsi de suite à l'infini; il est évident que les parties infiniment petites de G, & les parties infiniment petites de g qui sont venues de la derniere des divisions pour ainsi dire de G & de g faites en même-temps, seront entr'elles comme R à r.

COROLLAIRE.

715. D'où l'on voit que quand il ne s'agit que de marquer les rapports des grandeurs infiniment petites de même genre, on le peut toujours faire par des grandeurs finies qui auront entr'elles les mêmes rapports qu'ont ces grandeurs infiniment petites.

Il est évident que c'est la même chose des grandeurs infiniment grandes de même genre, par exemple $\frac{2E}{3E} = \frac{2}{3}$.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

716. ON peut concevoir une progression géométrique dans laquelle l'unité sera entre les termes plus grands que l'unité, & qui vont en augmentant en allant à droite & entre les termes moindres que l'unité, & qui vont en diminuant en allant à gauche de l'unité, & qui ait cette condition que le rapport qui y regne d'un terme à l'autre soit le plus approchant du rapport d'égalité qu'il se puisse; c'est-à-dire, que le terme qui suit de l'unité à droite, ne soit que l'unité augmentée d'une grandeur infiniment petite e, & celui qui est le plus près à gauche de l'unité soit la fraction dont l'unité est le numérateur, & l'unité augmentée de cette grandeur

infiniment petite e est le dénominateur. Ainsi ces trois termes seront $\div \frac{1}{1+e} . 1 . 1+e$.

COROLLAIRES.

I.

717. QUAND l'unité se trouve dans une progression géométrique, tous les termes qui vont à droite pris de suite, * sont par ordre les puissances 2^e^, 3^e^, &c. du terme qui suit immédiatement l'unité, & les termes à gauche sont les fractions qui ont l'unité pour numérateur, & pour dénominateur les mêmes puissances du terme qui suit immédiatement l'unité à droite. Ainsi la progression géométrique supposée peut être représentée par A. * 346, 542 & 543.

A.

$$\div \&c. \frac{1}{1+3e+3e^2+e^3} . \frac{1}{1+2e+e^2} . \frac{1}{1+e} . 1 . 1+e . 1+2e+e^2 . 1+3e+3e^2+e^3, \&c.$$

qui se réduit * à B. * 713.

B.

$$\div \&c. \frac{1}{1+4e} . \frac{1}{1+3e} . \frac{1}{1+2e} . \frac{1}{1+e} . 1 . 1+e . 1+2e . 1+3e . 1+4e, \&c.$$

Et B (à cause de $\frac{1}{1+e} = 1 - \frac{e}{1+e}$, de $\frac{1}{1+2e} = 1 - \frac{2e}{1+2e}$, de $\frac{1}{1+3e} = 1 - \frac{3e}{1+3e}$, & ainsi de suite) se réduit à C.

C.

$$\div \&c. 1 - \frac{4e}{1+4e} . 1 - \frac{3e}{1+3e} . 1 - \frac{2e}{1+2e} . 1 - \frac{e}{1+e} . 1 . 1+e . 1+2e . 1+3e . 1+4e, \&c.$$

Mais dans les fractions négatives qui sont la seconde partie de chaque terme à gauche de l'unité, on apperçoit qu'en divisant le numérateur de chacune par son dénominateur, le quotient a pour premier terme le numérateur lui-même, & que les termes suivans de chacun de ces quotiens sont de suite des infinimens petits du second genre, du troisiéme, du quatriéme, &c. * qui doivent être négligés; (par exemple * 713.
$-\frac{e}{1+e} = -e+e^2-e^3, \&c. -\frac{2e}{1+2e} = -2e+4e^2-8e^3, \&c.$)
Ainsi la progression géométrique C se réduit enfin à D.

D.

$$\div \&c. 1-4e . 1-3e . 1-2e . 1-1e . 1 . 1+e . 1+2e . 1+3e . 1+4e, \&c.$$

II.

718. Si l'on retranche l'unité de chacun des termes de la progression géométrique D, elle deviendra la progression arith-

métique E, dans laquelle zéro se trouve entre les termes positifs & entre les négatifs; la différence qui y regne est 1 *e*.

E.

$\div$ &c. — 5*e*. — 4*e*. — 3*e*. — 2*e*. — 1*e*. 0. 1*e*. 2*e*. 3*e*. 4*e*. 5*e*, &c.

III.

719. Il est évident que deux termes quelconques, par exemple 3*e* & 5*e* de la progression arithmétique E, sont entr'eux comme le nombre des petits rapports égaux de la progression géométrique D qui sont depuis l'unité jusqu'au terme 1 + 3*e* correspondant de 3*e*, est au nombre des petits rapports égaux qui sont depuis l'unité jusqu'au terme 1 + 5*e* correspondant de 5*e*. Car dans D le nombre des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à 1 + 3*e* est 3, & 5 est le nombre des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à 1 + 5*e*; & 3*e*.5*e* :: 3.5. Il est évident que cette propriété convient à tous les termes de la progression arithmétique E, d'être entr'eux géométriquement comme sont entr'eux les nombres des petits rapports égaux dans la progression géométrique D depuis 1 jusqu'aux termes correspondans aux termes de E.

IV.

720. Par conséquent les termes de la progression arithmétique E étant conçus écrits sur les termes correspondans de la progression géométrique D, sçavoir 0 sur l'unité, 1 *e* sur 1 + 1 *e*, & ainsi de suite à droite & à gauche de l'unité, tous
* 654. les termes de E seront * les logarithmes de tous les termes correspondans de D; ou, ce qui est la même chose, les ter-
* 653. mes de E seront * les mesures des nombres des petits rapports égaux qui sont dans D depuis l'unité jusqu'aux termes de D correspondans aux termes de E; par exemple 3 *e* marquera le nombre des petits rapports égaux qui sont dans D depuis 1 jusqu'à 1 + 3*e*, & de même 5*e* marquera le nombre des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à 1 + 5*e*, & 3*e*.5*e* :: 3.5.

V.

721. D'où il suit que dans la progression géométrique D, ou son équivalente A, ou B ou C, si l'on retranche l'unité de chacun des termes qui n'est que la somme de l'unité & d'une grandeur infiniment petite multipliée par un nombre, chacun des restes sera le logarithme du terme dont il est le reste;

& il marquera combien il y a de petits rapports égaux depuis l'unité jusqu'à ce terme-là. Par exemple, si l'on ôte 1 du 3ᵉ terme $1 + 3e$, & du 5ᵉ terme $1 + 5e$, les restes $3e$ & $5e$ seront les logarithmes du 3ᵉ terme $1 + 3e$, & du 5ᵉ terme $1 + 5e$; & $3e$ sera à $5e$ comme le nombre 3 des petits rapports égaux entre 1 & $1 + 3e$ est au nombre 5 des petits rapports égaux entre 1 & $1 + 5e$.

DEMANDE OU SUPPOSITION.

722. ON peut concevoir la progression D & ses équivalentes A, B, C, d'une telle quantité de termes à droite & à gauche de l'unité, que tous les nombres possibles au-dessus & au-dessous de l'unité puissent se trouver parmi les termes de cette progression géométrique.

DÉFINITION.

723. ON nommera *la premiere partie* de cette progression tous les termes à droite & à gauche de l'unité qui ne sont chacun que la somme ou la différence de l'unité & d'une grandeur infiniment petite, afin de faire distinguer les termes de cette *premiere partie*, des autres termes de la progression plus éloignés de l'unité, ces derniers contenant une grandeur finie qui surpasse l'unité. On fait faire cette distinction des termes de la *premiere partie*, parce que ces termes donneront le moyen de découvrir une formule générale pour trouver les logarithmes de tous les nombres qui auront chacun autant de termes qu'on voudra. Le Lemme suivant & ses Corollaires vont servir à le faire voir.

LEMME VIII.

724. LE rapport qui est entre le nombre des petits rapports égaux de la progression géométrique D, qui sont depuis l'unité jusqu'à la racine quelconque (dont on marquera l'exposant par m) d'un nombre qu'on nommera n, & entre le nombre des petits rapports égaux qui sont depuis l'unité jusqu'à la semblable racine m de tout autre nombre N; ce rapport, dis-je, est égal au rapport qui est entre le nombre total des petits rapports égaux depuis l'unité jusqu'au premier nombre n, & entre le nombre total des petits rapports égaux depuis l'unité jusqu'à l'autre nombre N.

Par exemple, le nombre des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à $\sqrt[m]{10}$, est au nombre des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à $\sqrt[m]{20}$, comme le nombre total des premiers petits rapports égaux qui sont interposés depuis 1 jusqu'à 10, est au nombre total des seconds petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à 20.

Démonstration. Il y a autant de moyens proportionnels entre 1 & le nombre $n = \sqrt[m]{n^m}$ (lequel nombre de moyens
*411. est si l'on veut 10), desquels moyens * $\sqrt[m]{n}$ est le premier,
*411. * qu'il y a d'unités dans le nombre $m - 1$. On peut conce-
*411. voir * le même nombre $m - 1$ de moyens proportionnels géométriques entre 1 & $N = \sqrt[m]{N^m}$, lequel nombre N est
*411. si l'on veut 20; & le premier de ces moyens est * $\sqrt[m]{N}$. Or le nombre des petits rapports égaux qui est entre 1 & le pre-
*377. mier moyen $\sqrt[m]{n}$, est le même * qui se trouve entre chacun des moyens depuis 1 jusqu'à n, & celui qui le suit immédiatement. De même le nombre des petits rapports égaux qui sont entre 1 & $\sqrt[m]{N}$, est aussi le nombre des mêmes petits rapports égaux qui se trouvent entre chaque moyen & celui qui le suit depuis 1 jusqu'à N. Par conséquent le nombre total des petits rapports égaux entre 1 & n (qui a pour parties le nombre partial des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à $\sqrt[m]{n}$ répété autant de fois qu'il y a d'unités dans m) est au nombre total des petits rapports égaux qui sont entre 1 & N (qui a pour parties le nombre partial des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'à $\sqrt[m]{N}$ répété autant de
*325. fois qu'il y a d'unités dans m); * comme le nombre partial des petits rapports égaux entre 1 & $\sqrt[m]{n}$, est au nombre partial des petits rapports égaux qui sont entre 1 & $\sqrt[m]{N}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

725. SI l'exposant m est supposé un nombre infini, la proposi-
*724. tion expliquée dans le Lemme * demeure toujours la même, & le nombre des petits rapports égaux entre 1 & $\sqrt[m]{n}$ est au nombre des petits rapports égaux qui sont entre 1 & $\sqrt[m]{N}$, comme le nombre total des petits rapports égaux entre 1 & n est au nombre total des petits rapports égaux qui sont entre 1 & N.

DEMANDE

DEMANDE OU SUPPOSITION.

726. COMME les grandeurs infinies * de chaque genre, & par conséquent du premier genre, peuvent avoir entr'elles * tous les rapports finis qu'on peut imaginer, & que l'on en peut toujours concevoir quelqu'une qui soit multiple de quelqu'autre, c'est-à-dire qui la contienne tel nombre fini de fois qu'on voudra sans changer de genre; on peut prendre pour l'exposant m, de la racine infinie de chacun des nombres dont on cherche les logarithmes, & lesquels nombres seront représentés par l'indéterminée n, une grandeur infinie du premier genre telle que la racine infinie $\sqrt[m]{n}$ d'un nombre quelconque n, se trouve parmi les termes * de la premiere partie de la progression D, ou de chacune des progressions équivalentes A, B, C. * 712. * 714. * 723.

COROLLAIRE II.

727. IL suit de-là & de l'article 721, qu'en représentant les racines infinies de tous les nombres par ces deux expressions $\sqrt[m]{n}$ & $\sqrt[m]{N}$, afin de pouvoir les comparer ensemble, si l'on retranche l'unité de chacune de toutes les racines infinies représentée par $\sqrt[m]{n}$, $\sqrt[m]{N}$, les restes $\sqrt[m]{n} - 1$ & $\sqrt[m]{N} - 1$ seront * les logarithmes des nombres représentés par n & par N: & que $\sqrt[m]{n} - 1$ sera à $\sqrt[m]{N} - 1$ *, comme le nombre des petits rapports égaux entre 1 & n est au nombre des petits rapports égaux entre 1 & N. * 721. * 719 & 724.

COROLLAIRE III.

Où l'on fait découvrir la formule générale des logarithmes.

728. IL ne s'agit donc plus pour avoir une formule générale qui puisse servir à former les logarithmes de tous les nombres, que de trouver une formule qui exprime la racine infinie de tous les nombres, qui ait à l'égard de tous ces nombres le même exposant représenté par m.

Pour la trouver, il faut supposer tout nombre partagé en deux parties, dont la premiere est l'unité, & la seconde est ce qui manque à l'unité, ou ce que l'unité a de trop pour faire une somme ou une différence égale à ce nombre. On supposera donc que $1 + n$ représente tout nombre qui surpasse l'unité, & que $1 - n$ représente tout nombre moindre que l'unité. Ainsi afin de représenter 10 par $1 + n$, il faut supposer $1 + n = 1 + 9$. Pour représenter $\frac{1}{10}$ par $1 - n$, il faut supposer $1 - \frac{9}{10} = 1 - n$. On supposera aussi le logarithme de chaque nombre représenté par l. Ainsi $l.\,1 + n$ représentera le logarithme du nombre $1 + n$ qui surpasse l'unité, & quand le nombre sera moindre que l'unité, le logarithme sera négatif $- l$. Ainsi $- l.\,1 - n$ représentera le logarithme négatif du nombre $1 - n$ moindre que l'unité.

727. Cela supposé, on aura $l.\,1 + n = \sqrt[m]{1 + n} - 1 = \overline{1 + n}^{\frac{1}{m}} - 1$, & $- l.\,1 - n = \sqrt[m]{1 - n} - 1 = \overline{1 - n}^{\frac{1}{m}} - 1$. Cette expression signifie que le logarithme $l.\,1 + n$ d'un nombre $1 + n$ qui surpasse l'unité, est égal à $\overline{1 + n}^{\frac{1}{m}} - 1$; c'est-à-dire à ce nombre $1 + n$ élevé à la puissance dont l'exposant est $\frac{1}{m}$, en supposant que m représente un nombre infini, après avoir retranché l'unité de cette puissance; & de même le logarithme négatif $- l.\,1 - n$ d'un nombre $1 - n$ moindre que l'unité, est égal à ce nombre $1 - n$ élevé à la puissance dont l'exposant est $\frac{1}{m}$, en supposant que m est un nombre infini; ou, ce qui est la même chose, que $\frac{1}{m}$ est un infiniment petit, après avoir retranché l'unité de cette puissance.

D'où l'on voit que pour avoir la formule que l'on cherche des logarithmes positifs $l.\,1 + n$, il ne reste plus qu'à élever $1 + n$ à la puissance dont $\frac{1}{m}$ est l'exposant, & en retrancher ensuite l'unité; & que pour avoir la formule des logarithmes négatifs $- l.\,1 - n$, il n'y a qu'à élever $1 - n$ à la puissance dont $\frac{1}{m}$ est l'exposant, & en retrancher ensuite l'unité.

C'est ce que l'on fera par la formule générale des puissances*
*603. $\overline{a + b}^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 +$ &c. En substituant 1 à la place de a, n à la place de b, & l'exposant $\frac{1}{m}$ à la place de l'exposant n de la formule, & faisant attention que toutes les puissances 1^m, 1^{m-1}, 1^{m-2}, &c. de 1, sont toujours 1, & qu'après avoir trouvé la formule, il en faut retrancher l'unité; on trouvera d'abord la formule $l.\,1 + n = \overline{1 + n}^{\frac{1}{m}} - 1 = + 1 - 1 + \frac{1}{m} n + \frac{1}{m} \times$

$\frac{1-m}{2m}n^2 + \frac{1}{m} \times \frac{1-m}{2m} \times \frac{1-2m}{3m} n^3 + \frac{1}{m} \times \frac{1-m}{2m} \times \frac{1-2m}{3m} \times \frac{1-3m}{4m} n^4 +$ &c. qu'on réduira à la forme suivante, par la multiplication, sans en changer la valeur, $l.\overline{1+n} = +1 - 1 + \frac{1}{m}n + \overline{\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2m}} \times n^2 + \overline{\frac{1}{6m^3} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m}} \times n^3 + \overline{\frac{1}{24m^4} - \frac{1}{4m^3} + \frac{11}{24m^2} - \frac{1}{4m}} \times n^4 + \overline{\frac{1}{120m^5} - \frac{1}{12m^4} + \frac{7}{24m^3} - \frac{5}{12m^2} + \frac{1}{5m}} \times n^5 +$ &c. Et remarquant que dans le coëfficient du 3e terme, & dans ceux de tous les termes suivans, * on peut retrancher les infiniment petits du second genre, du troisiéme, &c. (par exemple, dans le coëfficient $+\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2m}$, il faut effacer $+\frac{1}{2m^2}$; dans le coëfficient $+\frac{1}{6m^3} - \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{3m}$, il faut effacer $+\frac{1}{6m^3} - \frac{1}{2m^2}$, qui sont des infiniment petits du second & du troisiéme genre; & faire la même chose dans les coëfficiens suivans.) On verra qu'il reste pour la formule des logarithmes. $l.\overline{1+n} = +\frac{1}{m} \times n - \frac{1}{2m}n^2 + \frac{1}{3m}n^3 - \frac{1}{4m}n^4 + \frac{1}{5m}n^5 - \frac{1}{6m}n^6 + \frac{1}{7m}n^7 -$ &c. Voici donc *713.

La formule générale des logarithmes des nombres qui surpassent l'unité.

729. $l.\overline{1+n} = +\frac{1}{m} \times \overline{+n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 - \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{7}n^7 - \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{9}n^9 - \text{\&c.}}$

On trouvera de la même maniere la formule suivante pour les logarithmes négatifs $-l.\overline{1-n} = \overline{1-n}^{\frac{1}{m}} - 1$.

La formule générale des logarithme des nombres moindres que l'unité.

730. $-l.\overline{1-n} = -\frac{1}{m} \times \overline{+n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{6}n^6 + \text{\&c.}}$

Cette formule doit * être négative, c'est pourquoi l'on a mis le signe — devant le multiplicateur $\frac{1}{m}$ commun à tous les termes. *756.

COROLLAIRE IV.

AFIN de comparer ensemble les logarithmes représentés par chacune de ces formules, l'on prendra $1+n$ & $1+N$ pour représenter des nombres différens, & $l.$ & $L.$ pour représenter leurs logarithmes; & l'on aura pour les logarithmes de ces nombres différens, $l.\overline{1+n} = \frac{1}{m} \times \overline{n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \text{\&c.}}$ $L.\overline{1+N} = \frac{1}{m} \times \overline{N - \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{3}N^3 - \text{\&c.}}$

731. Il suit de ce que l'on a démontré jusqu'ici, * que $l.\ \overline{1+n}$
*727. $= \frac{1}{m} \times n - \frac{1}{2} n^2 + \&c.$ est à $L.\ \overline{1+N} = \frac{1}{m} \times \overline{N - \frac{1}{2} N^2 + \&c.}$ comme le nombre des petits rapports égaux depuis l'unité jusqu'au nombre $1+n$, est au nombre des petits rapports égaux depuis l'unité jusqu'au nombre $1+N$.

Mais quand on multiplie des grandeurs par un même mul-
*332. tiplicateur, leur rapport * est le même avant & après la multiplication.

Par conséquent si l'on multiplie chacune des suites précédentes $\frac{1}{m} \times \overline{n - \frac{1}{2} n^2 + \&c.}$ $\frac{1}{m} \times \overline{N - \frac{1}{2} N^2 + \&c.}$ par la même grandeur infinie m qui est leur diviseur commun, les suites précédentes devenues $n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 - \&c.$ $N - \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{3} N^3 - \&c.$ auront le même rapport qu'elles avoient auparavant. Il est évident que le même raisonnement convient aux logarithmes négatifs.

Cela fait voir que les simples suites $n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 - \&c.$ $N - \frac{1}{2} N^2 + \frac{1}{3} N^3 - \&c.$ délivrées de leur diviseur infini m qui a servi à les faire découvrir, sont entr'elles, comme le nombre des petits rapports égaux depuis l'unité jusqu'au nombre $1+n$ est au nombre des petits rapports égaux depuis 1 jusqu'au nombre $1+N$. Et par conséquent en supposant tous les nombres plus grands que l'unité représentés par $1+n$, & tous les nombres moindres que l'unité représentés par $1-n$; la formule des logarithmes positifs sera simplement $n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 - \&c.$ & la formule des négatifs sera $-n - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{3} n^3 - \&c.$

La formule des logarithmes des nombres plus grands que 1.

732. $$l.\ \overline{1+n} = n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{5} n^5 - \frac{1}{6} n^6 + \&c.$$

La formule des logarithmes moindres que 1.

733. $$-l.\ \overline{1-n} = -n - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{4} n^4 - \frac{1}{5} n^5 - \frac{1}{6} n^6 - \&c.$$

COROLLAIRE V.

734. PAR le Corollaire précédent, les formules des logarithmes positifs & négatifs sont délivrées du nombre infini m qui a servi à les faire découvrir. On peut cependant, si l'on veut, donner un multiplicateur ou un diviseur commun à tous les

termes de chaque formule, qui soit tel nombre fini qu'on voudra; car les logarithmes des nombres que donnera la formule simple étant tous multipliés ou tous divisés par un même nombre, * les produits ou les quotiens conserveront * 332.
entr'eux les mêmes rapports qui étoient entre ces premiers logarithmes; ils seront * donc aussi les logarithmes des mê- * 674.
mes nombres; mais des logarithmes d'une autre espéce.

Ainsi supposant à présent que m représente non plus un nombre infini, mais un nombre fini tel qu'on voudra, on pourra prendre pour la formule des logarithmes positifs, $l.\,1 + n = m \times \overline{n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \&c.}$ ou $l.\,1 + n = \frac{1}{m} \times \overline{n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \&c.}$ & pour la formule des logarithmes négatifs $-\,l.\,1 - n = -\,m \times \overline{+\,n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \&c.}$ ou $-\,l.\,1 - n = -\,\frac{1}{m} \times \overline{+\,n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \&c.}$

Tous les logarithmes découverts par la simple formule $n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$, &c. seront tous d'une même espéce. Si on les multiplie tous par un même nombre m, les produits auront * entr'eux les mêmes rapports qu'avoient les logarith- * 332.
mes avant la multiplication; ainsi les produits * seront des * 674.
logarithmes des mêmes nombres d'une même espéce entr'eux; mais d'une espéce différente de la précédente.

D'où l'on voit qu'en multipliant successivement les logarithmes venus de la formule simple par différens multiplicateurs représentés par m, on aura différentes espéces de logarithmes des mêmes nombres, & qu'on en peut avoir d'une infinité d'espéces différentes.

Il est évident que ce que l'on vient de faire voir par rapport au commun multiplicateur m de tous les termes de la formule simple, convient de la même maniere au diviseur $\frac{1}{m}$ qui seroit commun à tous les termes de la formule simple.

COROLLAIRE VI.

735. CE commun multiplicateur m, ou ce commun diviseur $\frac{1}{m}$ de tous les termes de la formule, peut servir à faire concevoir ici aux Lecteurs, qu'on peut prendre un nombre pour m qui soit tel, qu'en multipliant les logarithmes à mesure qu'on les trouve par la formule; les multipliant, dis-je, ou les divisant par ce même multiplicateur ou diviseur, les produits

ou les quotiens ſoient les logarithmes des Tables ordinaires.

Quand on appliquera les formules à la pratique, on déterminera quel eſt le nombre qu'on doit prendre pour m, afin de réduire les logarithmes qu'on découvrira par les formules, tout d'un coup aux logarithmes des Tables.

REMARQUES.

I.

736. IL faut faire attention que les logarithmes, qui ſont les meſures des rapports de l'unité à chaque nombre, ſont auſſi les meſures des mêmes rapports qu'ont les nombres entr'eux.
*330. Par exemple, le rapport de 1 à $\frac{3}{4}$ eſt * égal au rapport de 4 à 3; le logarithme du rapport de 1 à $\frac{3}{4}$ eſt auſſi le logarithme du rapport de 4 à 3. Il en eſt de même des autres.

II.

737. Pour réduire en pratique les formules du cinquiéme Corollaire, par exemple, pour trouver le logarithme de $\frac{9}{10}$, il faut prendre $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$, & ſuppoſer $1 - \frac{1}{10} = 1 - n$. Ainſi $n = \frac{1}{10}$. Il faut ſubſtituer $\frac{1}{10}$ & les puiſſances de $\frac{1}{10}$ à la place de n dans autant de termes qu'on voudra de la formule du logarithme négatif $- l.\ 1 - n$; prendre la ſomme de ces termes, & la multiplier par le multiplicateur commun $\frac{1}{m}$ ou m qu'on déterminera dans la ſuite; & le produit ſera le logatithme de $\frac{9}{10}$.

Pour trouver le logarithme de $\frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10}$, il faut ſuppoſer $\frac{1}{10} = n$, & ſubſtituer les puiſſances de $\frac{1}{10}$ à la place des puiſſances de n dans autant de termes qu'on voudra de la formule du logarithme poſitif $l.\ 1. + n$; prendre ſéparément la ſomme des termes poſitifs & la ſomme des termes négatifs, & ôter la derniere de la premiere; & multiplier le reſte par le multiplicateur m ou $\frac{1}{m}$ qu'on déterminera dans la ſuite, & le produit ſera le logarithme de $\frac{11}{10}$.

III.

Dans les Corollaires ſuivans, on déduit de la formule qui ſert à trouver les logarithmes, d'autres formules qui ſervent à abréger les opérations.

COROLLAIRE VII.

738. *Trouver la formule du logarithme du rapport de deux nombres quelconques f & g qu'on suppose donnés, dont g est supposé le plus grand, c'est-à-dire de la fraction $\frac{f}{g}$ qui représente une fraction quelconque.*

PRÉPARATION. Il faut exprimer par f & g le nombre qui est le moyen arithmétique proportionnel entre les nombres f & g. Il est visible * que ce moyen arithmétique est $\frac{f+g}{2}$. *488.

Le rapport du plus grand nombre g à $\frac{f+g}{2}$, est $\frac{2g}{f+g} = 1 \frac{-f+g}{f+g}$.

Le rapport du moyen $\frac{f+g}{2}$ au plus petit f, est $\frac{f+g}{2f} = 1 \frac{-f+g}{2f}$.

$\frac{2f}{f+g} = 1 \frac{+f-g}{f+g}$ est le rapport du plus petit f au moyen $\frac{f+g}{2}$.

Il est évident que le produit du rapport $\frac{2g}{f+g}$ du plus grand g au moyen $\frac{f+g}{2}$ par le rapport $\frac{f+g}{2f}$ du moyen $\frac{f+g}{2}$ au moindre f, lequel produit est $\frac{2g}{f+g} \times \frac{f+g}{2f} = \frac{2g}{2f} = \frac{g}{f}$, est égal au rapport $\frac{g}{f}$ du plus grand g au moindre f.

Par conséquent le rapport inverse $\frac{2f}{f+g} \times \frac{f+g}{2g} = \frac{2f}{2g} = \frac{f}{g}$, est égal au rapport du moindre f au plus grand g.

On supposera $s = f + g$, & $d = g - f$. Ainsi $\frac{2g}{f+g} = 1 \frac{-f+g}{f+g} = 1 + \frac{d}{s}$; & $\frac{2f}{f+g} = 1 \frac{+f-g}{f+g} = 1 - \frac{d}{s}$.

RÉSOLUTION. 1°. Il faut prendre par le moyen de la formule * le logarithme de $\frac{2g}{f+g} = 1 + \frac{d}{s}$, & le logarithme de $\frac{2f}{f+g} = 1 - \frac{d}{s}$, & l'on aura $l.\, 1 + \frac{d}{s} = \frac{1}{m} \times \overline{\frac{d}{s} - \frac{1d^2}{2s^2} + \frac{1d^3}{3s^3} - \frac{1d^4}{4s^4} + \frac{1d^5}{5s^5} - \&c.}$ & le logarithme de $\frac{2f}{f+g} = 1 - \frac{d}{s}$ qui sera $-l.\, 1 - \frac{d}{s} = -\frac{1}{m} \times \overline{+\frac{d}{s} + \frac{1d^2}{2s^2} + \frac{1d^3}{3s^3} + \frac{1d^4}{4s^4} + \frac{1d^5}{5s^5} + \&c.}$ *729, 730 & 737.

2°. Il faut changer le logarithme de $\frac{2f}{f+g} = 1 - \frac{d}{s}$ de négatif en positif, & $+\frac{1}{m} \times \overline{+\frac{d}{s} + \frac{1d^2}{2s^2} + \frac{1d^3}{3s^3} + \frac{1d^4}{4s^4} + \frac{1d^5}{5s^5} + \&c.}$ sera * le logarithme de $\frac{f+g}{2f}$, parce que $\frac{f+g}{2f}$ † est le terme réciproque de $\frac{2f}{f+g}$. *668. †668.

3°. Il faut ajouter ensemble les logarithmes de $\frac{2g}{f+g}$ & de $\frac{f+g}{2f}$, & l'on aura la somme $\frac{1}{m} \times \overline{\frac{2d}{s} + \frac{2d^3}{3s^3} + \frac{2d^5}{5s^5} + \frac{2d^7}{7s^7} + \frac{2d^9}{9s^9} + \&c.}$ C'est * la formule du logarithme de $\frac{g}{f} = \frac{2g}{f+g} \times \frac{f+g}{2f}$. *657.

4°. En rendant ce logarithme négatif, on aura $\frac{1}{m} \times \overline{-\frac{2d}{s}}$
* 668. $\overline{-\frac{2d^3}{3s^3} - \frac{2d^5}{5s^5} - \frac{2d^7}{7s^7}}$ — &c. * pour la formule du logarithme de $\frac{f}{g}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

739. D'où l'on voit que pour trouver le logarithme d'un rapport, comme de $\frac{3}{4}$, il faut supposer $3 = f$, $4 = g$; prendre la différence $g - f = 4 - 3 = 1$ des deux nombres donnés f & g, & supposer cette différence $1 = d$; prendre aussi leur somme $f + g = 3 + 4 = 7$, & supposer cette somme $7 = s$, & substituer dans la formule du logarithme de $\frac{f}{g}$, qui est $\frac{1}{m} \times \overline{-\frac{2d}{s} - \frac{2d^3}{3s^3} - \frac{2d^5}{5s^5} - \frac{2d^7}{7s^7}}$, &c. 1 à la place de d, & 7 à la place de s; & la somme de tant de termes qu'on voudra, sera le logarithme de $\frac{3}{4}$.

Si l'on substitue les valeurs de d & de s dans la formule positive du logarithme de $\frac{g}{f}$, la somme de tant de termes qu'on voudra sera le logarithme de $\frac{g}{f} = \frac{4}{3}$.

Si le logarithme de l'un des deux nombres donnés $f = 3$, $g = 4$ est connu, & que ce soit le logarithme $l.\ f = l.\ 3$ du plus petit $f = 3$; il faut l'ajouter au logarithme de $\frac{g}{f}$ qu'on
* 657. vient de trouver; & la somme $l.\ f + l\ \frac{g}{f}$, ou $l.\ 3 + l.\ \frac{4}{3}$ * sera le logarithme de $\frac{g}{f} \times \frac{f}{1} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{1} = g = 4$; c'est-à-dire, on aura le logarithme du plus grand $g = 4$ des deux nombres donnés.

Si c'est le logarithme $l.\ g = l.\ 4$ du plus grand $g = 4$ des deux nombres donnés qui est connu, il faut l'ajouter au logarithme négatif de $\frac{f}{g}$ qu'on vient de trouver, (ce qui se fait en prenant par la soustraction le surplus du plus grand
* 657. sur le moindre;) & la somme $l.\ g - l.\ \frac{f}{g}$, ou $l.\ 4 - l.\ \frac{3}{4}$ * sera le logarithme de $\frac{g}{1} \times \frac{f}{g} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{4} = f = 3$; c'est-à-dire, on aura le logarithme du plus petit $f = 3$ des deux nombres donnés.

On réduira le logarithme qu'on vient de trouver par le moyen du multiplicateur commun $\frac{1}{m}$ ou m, qu'on déterminera dans la suite, aux logarithmes des Tables.

COROLLAIRE

COROLLAIRE VIII.

740. *Les logarithmes de deux nombres quelconques* f *&* g, *dont* g *est le plus grand, étant connus, (on représentera ces logarithmes par* l. f, l. g,*) trouver la formule qui fera découvrir le logarithme du nombre* $\frac{1}{2}\overline{f+g}$, *qui est le moyen arithmétique proportionnel entre* f *&* g.

On doit remarquer que $l.f$ & $l.g$ étant connus, le logarithme $l.f\times g$ du produit $f\times g$ est connu, & c'est * $l.f+l.g$; * 657.
& que le logarithme de $\sqrt[2]{f\times g}$ est aussi connu, & que c'est
* $\frac{l.f+l.g}{2}$. * 664.

OPÉRATION. Supposant $f+g=s$, & $-f+g=d$, le logarithme de $\frac{2g}{f+g}=1\frac{-f+g}{f+g}=1+\frac{d}{s}$ est * $\frac{1}{m}\times\overline{+\frac{d}{s}-\frac{d^2}{2s^2}+\frac{d^3}{3s^3}-\frac{d^4}{4s^4}+\frac{d^5}{5s^5}-\frac{d^6}{6s^6}+\&c.}$ * 729.
le logarithme de $\frac{2f}{f+g}=1\frac{+f-g}{f+g}=1-\frac{d}{s}$ est * $\frac{1}{m}\times\overline{-\frac{d}{s}-\frac{d^2}{2s^2}-\frac{d^3}{3s^3}-\frac{d^4}{4s^4}-\frac{d^5}{5s^5}-\frac{d^6}{6s^6}-\&c.}$ * 730.

On ajoutera ces deux logarithmes, & leur somme $\frac{1}{m}\times\overline{-\frac{2d^2}{2s^2}-\frac{2d^4}{4s^4}-\frac{2d^6}{6s^6}-\frac{2d^8}{8s^8}-\&c.}$ sera * le logarithme * 657.
du produit $\frac{2g}{f+g}\times\frac{2f}{f+g}=\frac{4fg}{\overline{f+g}^2}=$ * $\frac{fg}{\frac{1}{4}\times\overline{f+g}^2}$. * 109.

On prendra la moitié du logarithme qu'on vient de trouver, qui est $\frac{1}{m}\times\overline{-\frac{d^2}{2s^2}-\frac{d^4}{4s^4}-\frac{d^6}{6s^6}-\frac{d^8}{8s^8}-\&c.}$ & ce sera * le logarithme de $\frac{\sqrt[2]{fg}}{\sqrt[2]{\frac{1}{4}\times\overline{f+g}^2}}=\frac{\sqrt[2]{fg}}{\frac{1}{2}\times\overline{f+g}}$. * 664.

On rendra ce logarithme positif, & l'on aura $\frac{1}{m}\times\overline{\frac{d^2}{2s^2}+\frac{d^4}{4s^4}+\frac{d^6}{6s^6}+\frac{d^8}{8s^8}+\&c.}$ & il sera * le logarithme de $\frac{\frac{1}{2}\times\overline{f+g}}{\sqrt[2]{fg}}$. * 668.

Enfin on ajoutera à ce logarithme, le logarithme $\frac{l.f+l.g}{2}$ de $\sqrt[2]{fg}$, lequel logarithme est connu par la supposition; & l'on aura $\frac{l.f+l.g}{2}+\frac{1}{m}\times\overline{\frac{d^2}{2s^2}+\frac{d^4}{4s^4}+\frac{d^6}{6s^6}+\&c.}$ c'est * le * 657.
logarithme de $\frac{\frac{1}{2}\times\overline{f+g}}{\sqrt[2]{fg}}\times\frac{\sqrt[2]{fg}}{1}=\frac{1}{2}\times\overline{f+g}=\frac{f+g}{2}$. C'est-à dire, c'est la formule qui fera découvrir le logarithme du nombre $\frac{f+g}{2}$, moyen arithmétique proportionnel entre f & g. *Ce qu'il falloit trouver.*

741. Ainsi pour trouver, par exemple, le logarithme de 7 qui est moyen arithmétique proportionnel entre 5 & 9, dont on suppose les logarithmes connus, qu'on représentera par
* 664. $l.5 = l.f$, & $l.9 = l.g$; & par conséquent * le logarithme $\frac{l.5 + l.9}{2} = \frac{l.f + l.g}{2}$, qui est le logarithme de $\frac{\sqrt[2]{5 \times 9}}{1} = \frac{\sqrt[2]{fg}}{1}$, est aussi connu : pour trouver, dis-je, ce logarithme de 7, on supposera $5 = f$, $9 = g$, $\frac{5+9}{2} = 7 = \frac{f+g}{2}$; $5 + 9 = 14 = s$; $9 - 5 = 4 = d$. On substituera dans autant de termes qu'on voudra de la formule $\frac{l.f + l.g}{2} + \frac{1}{m} \times \overline{\frac{d^2}{2s^2} + \frac{d^4}{4s^4} + \frac{d^6}{6s^6} + \frac{d^8}{8s^8} +}$ &c. les valeurs des puissances de d & de s. Enfin on ajoutera à ce produit $\frac{l.5 + l.9}{2}$, & la somme sera le logarithme de 7.

COROLLAIRE IX.

742. *LES logarithmes de deux nombres quelconques, dont le plus grand ne surpasse le moindre que de deux unités, étant connus ; trouver la formule du logarithme du nombre moyen arithmétique proportionnel entre ces deux nombres, lequel ne différe de l'un & de l'autre que de l'unité.*

Soient les nombres donnés f & $f + 2$, & leurs logarithmes
* 657. connus $l.f$ & $l.\overline{f+2}$: le logarithme de leur produit * sera connu $l.f + l.\overline{f+2}$, & le logarithme de la racine 2[e] de leur
* 664. produit $\sqrt[2]{f \times \overline{f+2}}$ sera * aussi connu, sçavoir $\frac{l.f + l.\overline{f+2}}{2}$.

Il est évident qu'on pourroit se servir de la formule du huitiéme Corollaire qui précéde, dans laquelle $g = f + 2$ & $d = -f + g = -f + f + 2 = 2$. On va encore faire découvrir une autre formule qui abrége davantage le calcul.

Le nombre moyen arithmétique entre f & $f + 2$, est $f + 1$; le rapport de $f + 2$ à $f + 1$ est $\frac{f+2}{f+1}$; le rapport de f à $f + 1$ est $\frac{f}{f+1}$; le produit de ces deux rapports est $\frac{f \times \overline{f+2}}{\overline{f+1}^2} = \frac{f^2 + 2f}{f^2 + 2f + 1}$.

RÉSOLUTION. Il faut supposer, comme dans le septiéme
* 738. Corollaire *, la somme des deux termes du rapport $\frac{f^2 + 2f}{f^2 + 2f + 1}$, qui est $2f^2 + 4f + 1 = s$; la différence des deux mêmes termes, qui est $f^2 + 2f + 1 - f^2 - 2f = 1 = d$; & le loga-

rithme de $\frac{f^2+2f}{f^2+2f+1}$ sera * $\frac{1}{m} \times \overline{-\frac{2\times 1}{s}-\frac{2\times 1}{3s^3}-\frac{2\times 1}{5s^5}-\frac{2\times 1}{7s^7}}$ *738.
— &c.

D'où l'on déduit que le logarithme de $\frac{\sqrt[2]{f^2+2f}}{\sqrt[2]{f^2+2f+1}} = \frac{\sqrt[2]{f\times\overline{f+2}}}{f+1}$, qui est * la moitié du logarithme précédent, *664.
doit être $\frac{1}{m}\times\overline{-\frac{1}{s}-\frac{1}{3s^3}-\frac{1}{5s^5}-\frac{1}{7s^7}}$ — &c. En le rendant positif, on aura $\frac{1}{m}\times\overline{+\frac{1}{s}+\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{5s^5}+\frac{1}{7s^7}+}$
&c. pour * le logarithme de $\frac{f+1}{\sqrt[2]{f\times\overline{f+2}}}$. *668.

Mais $\frac{f+1}{\sqrt[2]{f\times\overline{f+2}}}\times\frac{\sqrt[2]{f\times\overline{f+2}}}{1} = f+1$. Par conséquent * si l'on ajoute au logarithme de $\frac{f+1}{\sqrt[2]{f\times\overline{f+2}}}$ qu'on *657.
vient de trouver, le logarithme connu de $\frac{\sqrt[2]{f\times\overline{f+2}}}{1}$, qu'on suppose représenté par $\frac{l.f+l.\overline{f+2}}{2}$, la somme $\frac{l.f+l.\overline{f+2}}{2}+\frac{1}{m}\times\overline{+\frac{1}{s}+\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{5s^5}+\frac{1}{7s^7}+\frac{1}{9s^9}}+$ &c. sera la formule du logarithme de $f+1$, *qu'il falloit trouver.*

743. D'où l'on voit que quand on connoît les logarithmes de deux nombres, dont le plus grand ne surpasse le moindre que de deux unités, comme 2 & 4; pour trouver le logarithme du nombre 3 qui est entre l'un & l'autre, il faut, 1°. prendre le produit $2\times 4 = 8$ des deux nombres donnés, & l'ajouter au quarré $3\times 3 = 9$ du nombre moyen arithmétique 3; & supposant la somme $8+9=17$ égale à s, il faut substituer cette valeur de s & les puissances de cette valeur dans la formule $\frac{l.f+l.\overline{f+2}}{2}+\frac{1}{m}\times\overline{+\frac{1}{s}+\frac{1}{3s^3}+\frac{1}{5s^5}+\frac{1}{7s^7}+\frac{1}{9s^9}+\frac{1}{11s^{11}}+\frac{1}{13s^{13}}+\frac{1}{15s^{15}}}$ + &c. à la place de s & des puissances de s. 2°. Après avoir pris la somme d'autant de termes de la formule qu'on voudra, il faut y ajouter la moitié de la somme des logarithmes connus de 2 & de 4, & ce sera le logarithme du moyen 3, qu'on réduira aux logarithmes des Tables par

le moyen du multiplicateur commun $\frac{1}{m}$ qu'on déterminera dans la suite.

Méthode pour former les logarithmes chacun d'autant de rangs de chiffres qu'on voudra par le moyen des formules précédentes.

Avertissement et Remarques,

Où l'on donne les moyens de faciliter & d'abréger le calcul des logarithmes.

744. Les formules du * 5^e^ Corollaire, du † 7^e^, du ¶ 8^e^ &
*734. du ✠ 9^e^ contiennent la méthode de former les logarithmes,
†739. & elles représentent les opérations qu'il faut faire ; les for-
¶741. mules du 7^e^, 8^e^ & 9^e^ Corollaire ne sont que pour une plus
✠743. grande facilité ; & les seules formules $l.\ 1 + n = + \frac{1}{m} \times n - \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{5} n^5 -$ &c. & $- l.\ 1 - n = - \frac{1}{m}$
*734. $\times n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{4} n^4 +$ &c. du * 5^e^ Corollaire, suffiroient pour former les logarithmes de tous les nombres ; la premiere pour trouver les logarithmes des nombres qui surpassent l'unité, & la seconde pour trouver les logarithmes des nombres moindres que l'unité.

745. Il y a de l'art à employer ces deux formules, & cet art sert à faciliter & à abréger le calcul. Le voici : 1°. comme on ne peut trouver les logarithmes de tous les nombres que par approximation, & que ces formules ne donnent aussi que des logarithmes approchés tant près qu'on voudra, (car le nombre des termes des formules étant infini, on est obligé de se borner à un certain nombre, & de négliger le reste) ; on doit faire ensorte que les termes représentés par les termes des formules aillent en diminuant le plus qu'il est possible, de maniere qu'il en faille le moindre nombre qu'il se pourra, & que ceux qu'on négligera soient si petits que l'erreur soit insensible.

D'où il suit que quand on veut trouver le logarithme d'un nombre entier comme de 3, qu'il faudroit partager en $1 + 2 = 3$ comme le demande la formule, il faut cher-
*668. cher le logarithme de $\frac{1}{3}$ qui est * le terme réciproque à 3, & dont le logarithme est égal à celui de 3, & l'exprimer ainsi $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ comme l'exige la formule ; & supposant

$-\frac{2}{3} = -n$, il faut substituer $\frac{2}{3}$ & les puissances de $\frac{2}{3}$ à la place de n & des puissances de n dans la seconde formule *. La raison en est, que les puissances d'une fraction allant toujours en diminuant de valeur, les termes du logarithme qu'on trouve par la formule vont toujours en diminuant, & ceux qu'on néglige font une erreur insensible. * 733, ou 734.

746. 2°. Les logarithmes de certains nombres se trouvent par un calcul plus court & plus facile que les logarithmes d'autres nombres; & les logarithmes des premiers étant découverts, il ne faut que de simples additions ou soustractions pour trouver les logarithmes des seconds qui dépendent des logarithmes des premiers. Il est évident qu'il faut chercher immédiatement par les formules les logarithmes des nombres dont le calcul est le plus aisé, & en déduire les logarithmes des nombres dont le calcul seroit plus difficile. On en verra des exemples dans le premier Problême, où l'on appliquera la formule à découvrir les logarithmes de $1 + \frac{1}{10}$, de $1 - \frac{1}{10}$, de $1 + \frac{2}{10}$, de $1 - \frac{2}{10}$, qui étant découverts donneront par de simples additions & soustractions, &c. les logarithmes de 10, de 2, de 3, de 5, de 9, de 11, de 12, &c.

747. 3°. Le calcul des nombres réduits en parties décimales est très-facile; ainsi il faut l'employer à former les logarithmes, sur-tout quand on se sert des deux premieres formules $l.\,1 + n = \frac{1}{m} \times n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 -$ &c. $-l.\,1 - n = -\frac{1}{m} \times n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 +$ &c. Pour cela il faut que le nombre représenté par n soit toujours une fraction décimale; car on y trouve la facilité du calcul; on sçait les rangs où l'on doit commencer à écrire le premier chiffre à droite des différentes puissances représentées par celles de n, ce qui détermine les rangs des chiffres suivans à gauche; les termes y vont en diminuant considérablement; enfin le même calcul d'un seul logarithme en fait découvrir plusieurs immédiatement, desquels on déduit ensuite par de simples additions, &c. les autres qui en dépendent, comme on le verra clairement dans la suite.

748. 4°. On ne doit pas faire plus d'attention pendant l'opération au multiplicateur commun $\frac{1}{m}$ de tous les termes de chaque formule, que s'il n'étoit point marqué dans la formule; quand on l'aura déterminé dans les articles 760 & 761 ci-après,

alors on s'en servira pour réduire les logarithmes découverts par les formules aux logarithmes des Tables.

PROBLÊME I.

749. *Trouver les logarithmes des nombres plus grands que l'unité, mais qui sont moindres que 2, & des nombres moindres que l'unité, par le moyen des deux premieres formules* $l.\,1+n = \frac{1}{m} \times n - \frac{1}{2}n^2 + \&c. - l.\,1-n = -\frac{1}{m} \times n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \&c.$

Opération. On partagera le nombre proposé en deux parties, dont la premiere doit toujours être 1, & la seconde une fraction décimale. On supposera la fraction décimale égale à n de la formule; on substituera la fraction égale à n & les puissances de cette fraction à la place de n & de ses puissances dans le nombre des termes de la formule auxquels on voudra se borner. Quand le nombre proposé surpasse l'unité, on fera une somme à part des termes positifs & une autre des négatifs, & l'on retranchera cette derniere de la premiere, & le reste sera le logarithme qu'on cherche. Quand le nombre proposé sera moindre que l'unité, on ajoutera dans une même somme tous les termes qu'a fait découvrir la formule; & écrivant au-devant le signe —, elle sera le logarithme qu'on cherche. Il ne restera plus qu'à multiplier les logarithmes qu'on vient de découvrir par le multiplicateur $\frac{1}{m}$ quand on l'aura déterminé, & les produits seront les logarithmes des Tables.

Il est bon de remarquer que devant former les logarithmes pour un certain nombre de rangs de chiffres, il faut faire le calcul pour quelques places de plus, afin que l'erreur se trouve dans les rangs qu'on néglige. Par exemple, si on veut former les logarithmes à dix rangs de chiffres, il faut faire le calcul pour douze ou treize rangs; si on les veut former à douze rangs, faire le calcul pour quinze rangs, &c.

Exemple I.

750. Pour trouver le logarithme de $1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1.1$, & en même-temps celui de $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$, on supposera $\frac{1}{10} = n$; on substituera $\frac{1}{10}$ ou 0.1 & ses puissances à la place de n & des puissances positives de n dans la premiere for-

mule, & ensuite à la place des puissances négatives de n, comme on le voit ici, en remarquant que la 2[e] puissance de 0.1 est 0.01 00, &c. la 3[e] est 0.001 00, &c. la 4[e] est 0.000 100, &c. & ainsi des autres ; & on aura soin d'écrire exactement les termes les uns sous les autres dans les rangs * qui leur conviennent. *651.

On prendra la somme des termes positifs & la somme des négatifs ; on ôtera la derniere de la premiere, & le reste + 0.095 310 179 804 sera le logarithme de $1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1.1$ à douze rangs de chiffres.

On ajoutera ensuite la somme des termes positifs & celle des négatifs, & l'on donnera le signe de − à la somme qui en viendra, & l'on trouvera − 0.105 360 515 657 pour le logarithme de $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$ à douze rangs de chiffres.

$+ n =$	0.100 000 000 000 000
$+ \frac{1}{3} n^3 =$	333 333 333 333
$+ \frac{1}{5} n^5 =$	2 000 000 000
$+ \frac{1}{7} n^7 =$	14 285 714
$+ \frac{1}{9} n^9 =$	111 111
$+ \frac{1}{11} n^{11} =$	909
$+ \frac{1}{13} n^{13} =$	7
Sommes des termes positifs.	+ 0.100 335 347 731 074
$- \frac{1}{2} n^2 = -$	0.005 000 000 000.000
$- \frac{1}{4} n^4 = -$	25 000 000 000
$- \frac{1}{6} n^6 = -$	166 666 666
$- \frac{1}{8} n^8 = -$	1 250 000
$- \frac{1}{10} n^{10} = -$	10 000
$- \frac{1}{12} n^{12} = -$	83
Somme des termes négatifs.	− 0.005 025 167 926 749

Soustraction.

+ 0.100 335 347 731 074
− 0.005 025 167 926 749

Reste ou différence.

+ 0.095 310 179 804 325

Log. de $1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1.1$

Addition.

− 0.100 335 347 731 074
− 0.005 025 167 926 749

Somme de tous les termes.

− 0.105 360 515 657 823

Log. de $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = 0.9$

COROLLAIRE I.

751. EN rendant négatif le logarithme de $\frac{11}{10}$, * il deviendra le logarithme de $\frac{10}{11}$; & de même en rendant positif le logarithme de $\frac{9}{10}$ *, il deviendra le logarithme de $\frac{10}{9}$. *668.

*668.

COROLLAIRE II.

752. LES mêmes calculs font découvrir les logarithmes de $1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100} = 1.01$ & de $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0.99$; car en supposant $\frac{1}{100} = n$, les puissances de $\frac{1}{100} = 0.01$ sont les mêmes que celles de $\frac{1}{10} = 0.1$, il n'y a de différence que dans les rangs où il faut commencer à les écrire. Ainsi en faisant les mêmes opérations pour $1 + \frac{1}{100}$ qu'on a faites pour $1 + \frac{1}{10}$, comme on les voit ici, on trouvera $+0.009\,950\,330\,853$ pour le logarithme de $1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100} = 0.01$, & $-0.010\,050\,335\,853$ pour le logarithme de $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0.99$, chacun à douze rangs de chiffres.

En rendant le premier négatif, & le second positif, le premier deviendra le logarithme de $\frac{100}{101}$, & le second deviendra le logarithme de $\frac{100}{99}$.

D'où l'on voit que les mêmes calculs peuvent servir à trouver les logarithmes de $1 + \frac{1}{1000} = \frac{1001}{1000} = 1.001$ & de $1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000} = 0.999$, &c.

$+ n =$	$0.010\ 000\ 000\ 000\ 000$
$+ \frac{1}{3} n^3 =$	$333\ 333\ 333$
$+ \frac{1}{5} n^5 =$	$20\ 000$
$+ \frac{1}{7} n^7 =$	1
Somme des termes positifs.	$+0.010\ 000\ 333\ 353\ 334$
$- \frac{1}{2} n^2 =$	$-0.000\ 050\ 000\ 000\ 000$
$- \frac{1}{4} n^4 =$	$-\ 2\ 500\ 000$
$- \frac{1}{6} n^6 =$	$-\ 166$
Somme des termes négatifs.	$-0.000\ 050\ 002\ 500\ 166$

Soustraction.

$+0.010\ 000\ 333\ 353\ 334$
$-0.000\ 050\ 002\ 500\ 166$

Reste ou différence.

$+0.009\ 950\ 330\ 853\ 168$

Log. de $1 + \frac{1}{100} = \frac{101}{100} = 1.01$

Addition.

$-0.010\ 000\ 333\ 353\ 334$
$-0.000\ 050\ 002\ 500\ 166$

Somme de tous les termes.

$-0.010\ 050\ 335\ 853\ 500$

Log. de $1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} = 0\ 99.$

EXEMPLE II.

753. POUR trouver le logarithme de $1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10} = 1.2$, & en même-temps celui de $1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$, il faut supposer $\frac{2}{10} = n$; former les puissances de 2 dont on peut avoir besoin,

besoin, comme on les voit ici; & les mêmes puissances seront celles de 0. 2, en observant que le rang du premier chiffre à droite de chacune est déterminé, & que l'*indice* de ce rang est égal * au produit de — 1 qui est l'*indice* de 2 dans 0. 2 par l'exposant de la puissance. Par exemple, l'*indice* du rang décimal du dernier chiffre 6 de la 12e puissance 4096 de 0. 2, est $-1 \times 12 = -12$; ainsi la 12e puissance de 0. 2 est 0. 000 000 004 096. On trouvera de même les autres.

* 651.

Puissances de 2.

1re	2	11e	2048
2e	4	12e	4096
3e	8	13e	8192
4e	16	14e	16384
5e	32	15e	32768
6e	64	16e	65536
7e	128	17e	131072
8e	256	18e	262144
9e	512	19e	524288
10e	1024	20e	1048576

On doit remarquer que les mêmes puissances de 2 sont aussi les puissances de 0. 02, de 0. 002, de 0. 0002, de 0. 000 02, &c. Pour avoir l'*indice* du rang du premier chifre à droite de la 12e puissance, par exemple de 0. 02, il faut multiplier * l'*indice* — 2 de 2 dans 0. 02 par l'exposant 12 de la 12e puissance de 2, & le produit $-2 \times 12 = -24$ sera l'*indice* du rang du dernier chifre 6 de la 12e puissance de 0. 02; ainsi la 12e puissance de 0. 02 est 0. 000 000 000 000 000 000 004 096 : d'où il est facile de trouver les rangs des autres chiffres de la puissance 12e de 0. 02. On trouvera de la même maniere les *indices* des rangs des chiffres des autres puissances de 2, lorsque l'*indice* de 2 sera — 3, — 4, — 5, &c.

* 651.

Il faut substituer $\frac{2}{10} = n$ & les puissances positives de $\frac{2}{10}$ à la place de n & des puissances positives de n, & de même les puissances négatives de $\frac{2}{10}$ à la place des puissances négatives de n. Trouver séparément la somme des termes positifs & celle des négatifs. Retrancher la derniere de la premiere, & le reste + 0. 182 321 556 794 sera le logarithme de $1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10} = 1.2$ à douze rangs de chiffres.

Il faut ensuite ajouter la somme des termes positifs rendue négative, avec la somme des négatifs, & la nouvelle somme — 0. 223 143 551 314 sera le logarithme de $1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$ à douze rangs de chifres. On en voit le calcul à la page suivante.

CALCUL.

$+ n =$	0.200 000 000 000 000
$+ \frac{1}{3} n^3 =$	2 666 666 666 666
$+ \frac{1}{5} n^5 =$	64 000 000 000
$+ \frac{1}{7} n^7 =$	1 828 571 428
$+ \frac{1}{9} n^9 =$	56 888 888
$+ \frac{1}{11} n^{11} =$	1 861 818
$+ \frac{1}{13} n^{13} =$	63 015
$+ \frac{1}{15} n^{15} =$	2 184
$+ \frac{1}{17} n^{17} =$	77
$+ \frac{1}{19} n^{19} =$	2
Sommes des termes positifs.	$+$ 0. 202 732 554 054 078
$- \frac{1}{2} n^2 = -$	0. 020 000 000 000 000
$- \frac{1}{4} n^4 = -$	400 000 000 000
$- \frac{1}{6} n^6 = -$	10 666 666 666
$- \frac{1}{8} n^8 = -$	320 000 000
$- \frac{1}{10} n^{10} = -$	10 240 000
$- \frac{1}{12} n^{12} = -$	341 333
$- \frac{1}{14} n^{14} = -$	11 702
$- \frac{1}{16} n^{16} = -$	409
$- \frac{1}{18} n^{18} = -$	14
Somme des termes négatifs.	$-$ 0. 020 410 997 260 124

Soustraction.

$+$ 0. 202 732 554 054 078
$-$ 0. 020 410 997 260 124

Reste ou différence.

$+$ 0. 182 321 556 793 954

Log. de $1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10} = 1.2$

Addition.

$-$ 0. 202 732 554 054 078
$-$ 0. 020 410 997 260 124

Somme de tous les termes.

$-$ 0. 223 143 551 314 202

Log. de $1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$

COROLLAIRE I.

754. EN rendant négatif le logarithme de $1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$, il deviendra * le logarithme de $\frac{10}{12}$. En rendant positif le loga- * 668.
rithme négatif de $\frac{8}{10}$, il deviendra * le logarithme de $\frac{10}{8}$. * 668.

COROLLAIRE II.

755. ON trouvera les logarithmes de $1 + \frac{2}{100} = \frac{102}{100} = 1.02$, & de $1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100} = 0.98$, en supposant $\frac{2}{100} = 0.02 = n$, & en se servant des mêmes puissances de 2. Il faut seulement observer de commencer à les écrire aux rangs qui leur conviennent, comme on le voit ici :

$+ n =$	0. 020 000 000 000 000
$+ \frac{1}{3} n^3 =$	2 666 666 666
$+ \frac{1}{5} n^5 =$	640 000
$+ \frac{1}{7} n^7 =$	182
Somme des termes positifs.	+ 0. 020 002 667 306 848
$- \frac{1}{2} n^2 = -$	0. 000 200 000 000 000
$- \frac{1}{4} n^4 = -$	40 000 000
$- \frac{1}{6} n^6 = -$	10 666
$- \frac{1}{8} n^8 = -$	3
Somme des termes négatifs.	− 0. 000 200 040 010 669

Soustraction.

+ 0. 020 002 667 306 848
− 0. 000 200 040 010 669

Reste ou différence.

+ 0. 019 802 627 296 179
Log. de $1 + \frac{2}{100} = \frac{102}{100} = 1.02$

Addition.

− 0. 020 002 667 306 848
− 0. 000 200 040 010 669

Somme de tous les termes.

− 0. 020 202 707 317 517
Log. de $1 - \frac{2}{100} = \frac{98}{100} = 0.98$

On pourra remarquer par ce dernier calcul, que plus la fraction qu'on suppose égale à n de la formule, est petite par rapport à l'unité, & moins il faut de termes de la formule pour avoir un logarithme qui ait beaucoup de rangs de chifres.

COROLLAIRES,

Où l'on déduit par de simples additions & soustractions, & par de petites multiplications, des logarithmes qu'on vient de trouver par les formules, d'autres logarithmes qui en dépendent.

I.

756. *TROUVER le logarithme de 2 par le moyen des logarithmes qui précédent.*

OPÉRATION. 1°. Il faut multiplier par 2 le logarithme
* 663. de $\frac{12}{10}$, & le produit $+ 0.364643113588$ sera * le logarithme de $\frac{12}{10} \times \frac{12}{10} = \frac{144}{100}$.

2°. Il faut ajouter les logarithmes négatifs de $\frac{9}{10}$ & de $\frac{8}{10}$,
* 657. & la somme $- 0.328504066972$ sera * le logarithme de $\frac{9}{10} \times$
* 668. $\frac{8}{10} = \frac{72}{100}$. En le rendant positif, il deviendra * le logarithme de $\frac{100}{72}$.

3°. Il faut ajouter les logarithmes de $\frac{144}{100}$ & de $\frac{100}{72}$, & la
* 657. somme $+ 0.693147180560$ sera * le logarithme de $\frac{144}{100} \times \frac{100}{72} = \frac{144}{72} = 2$, *qu'il falloit trouver.*

II.

757. En multipliant le logarithme de 2 successivement par 2,
* 663. 3, 4, &c. les produits seront * les logarithmes des puissances 2^e^, 3^e^, 4^e^, &c. de 2. Par exemple en multipliant par 3 le logarithme de 2, on aura $+ 2.079441541680$ pour le logarithme de 8.

III.

Où l'on trouve le logarithme de 10.

758. *TROUVER le logarithme de 10.*

1°. Il faut rendre positif le logarithme négatif de $\frac{8}{10}$, &
* 668. il deviendra * le logarithme de $\frac{10}{8}$.

2°. Il faut lui ajouter le logarithme de 8, & la somme
* 657. $+ 2.302\,585\,092\,994$ sera * le logarithme de $\frac{8}{1} \times \frac{10}{8} = 10$, *qu'il falloit trouver.*

REMARQUES,

Où l'on détermine le diviſeur commun à tous les termes des formules repréſenté par $\frac{1}{m}$, par lequel on réduit les logarithmes trouvés par les formules, aux logarithmes des Tables.

I.

759. LE logarithme de 10 qu'on vient de trouver par le moyen des formules, eſt le nombre repréſenté par *m* dans la fraction $\frac{1}{m}$ laquelle eſt le multiplicateur commun de tous les termes des formules; & l'on va démontrer qu'en diviſant le logarithme de chaque nombre trouvé par les formules, par ce logarithme de 10, (ce qui eſt la même choſe que de le multiplier par $\frac{1}{m}$), le quotient ſera le logarithme de ce même nombre qu'il faut mettre dans les Tables.

Démonſtration. L'eſpéce des logarithmes des Tables eſt déterminée, en ce que le logarithme de 10 eſt l'unité précédée à droite d'autant de zéros qu'on voudra donner de rangs de chifres à chaque logarithme au-devant du premier qui eſt la *caractériſtique*.

Ainſi pour réduire chaque logarithme de l'eſpéce que donnent les formules, par exemple le logarithme de 2, au logarithme de 2 de l'eſpéce des Tables, dans laquelle eſpéce des Tables le logarithme de 10 eſt 1. 000 &c. il faut faire une proportion * dont le premier terme eſt toujours le logarithme 2. 302585 &c. de 10 de l'eſpéce des formules; le ſecond terme eſt chaque logarithme de la même eſpéce des formules, par exemple le logarithme 0. 69314 &c. de 2; le troiſiéme terme eſt toujours le logarithme 1. 00000 &c. de 10 de l'eſpéce des Tables; & le quatriéme terme qui viendra après avoir fait la régle de trois, ſera le logarithme de 2 réduit à l'eſpéce des Tables. Or il eſt évident que le produit des deux moyens de cette proportion n'en eſt que le 2ᵉ terme augmenté du nombre des zéros du logarithme 1. 0000 &c. de 10 de l'eſpéce des Tables; ce n'eſt que le logarithme de 2 de l'eſpéce des formules, ou tout autre de la même eſpéce, augmenté de zéros vers la droite, laquelle augmentation de zéros ſe fait * toujours pour continuer la diviſion d'un nombre tant qu'on veut, ou juſqu'à ce que la partie du quotient qu'on néglige ſoit inſenſible. Il eſt de même évident

* 675.

* 135.

que le diviſeur eſt toujours le logarithme 2. 3025 &c. de 10 de l'eſpéce des formules, puiſque c'eſt toujours le premier terme de la proportion. Par conſéquent le logarithme 2. 3025 &c. de 10 de l'eſpéce des formules, doit être pris pour le nombre marqué par m dans $\frac{1}{m}$ à la tête des formules, par lequel diviſant chaque logarithme trouvé par les formules, on le réduit à l'eſpéce des Tables, c'eſt-à-dire, le quotient qui vient de la diviſion eſt le logarithme qu'il faut écrire dans les Tables. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Comme le logarithme de 10 déduit des formules eſt le plus important, parce qu'il ſert à réduire tous les autres aux logarithmes des Tables, le voici exactement ſupputé à trente rangs de chifres, outre le premier à gauche pour ceux qui voudroient conſtruire des logarithmes par les formules à beaucoup de rangs de chifres. Il eſt un peu plus petit qu'il ne faut d'une grandeur inſenſible; car en ajoutant une ſeule unité au dernier chifre 4 vers la droite, il deviendroit un peu plus grand qu'il ne faut.

Logarithmes de 10 déduit des formules, qui eſt repréſenté par m dans $\frac{1}{m}$ à la tête des formules.

2. 302 585 092 994 045 684 017 991 454 684.

REMARQUE II.

760. LA multiplication étant bien plus facile à faire que la diviſion, on peut changer ce diviſeur commun en un multiplicateur commun. Voici comment. Nommant $l.\,f$ le logarithme 2. 3025 &c. de 10 des formules; nommant $l.\,t$ le logarithme 1. 000 &c. de 10 des Tables, & nommant $l.\ 1+n$ chaque logarithme que donnent les formules; il eſt évident
*675. *que $\frac{l.\,t \times l.\ 1+n}{l.\,f}$ marque le quatriéme terme de la proportion qu'il faut faire pour réduire un logarithme des formules aux logarithmes des Tables. Ainſi ce quatriéme terme peut être ainſi repréſenté $\frac{l.\,t}{l.\,f} \times l.\ 1+n$: & il eſt évident qu'en prenant le quotient de $l.\,t$ diviſé par $l.\,f$, ce quotient ſera le multiplicateur par lequel multipliant $l.\ 1+n$, ce logarithme ſera réduit aux Tables.

Il n'y a donc qu'à diviſer le logarithme 1. 00000 &c. de 10 de l'eſpéce des Tables (repréſenté par $l.\,t$) par le logarithme

2. 3025 &c. de 10 de l'espece que donnent les formules (représenté par $l. f$), & le quotient qu'on trouvera être
exact 0. 4342944819, si l'on se borne à dix rangs de chifres (représenté par $\frac{l.\,t}{l.\,f}$ sera le multiplicateur par lequel multipliant chaque logarithme découvert par les formules, le produit sera le logarithme qu'il faut écrire dans les Tables.

Si l'on veut le multiplicateur commun à dix-huit rangs de chifres, le voici exactement supputé pour dix-huit rangs. Il est plus petit qu'il ne faut d'une grandeur moindre que $\frac{1}{1.000\,000\,000\,000\,000\,000}$. Si on lui ajoutoit cette fraction, il seroit un peu trop grand.

Multiplicateur commun à dix-huit rangs de chifres.

0. 434 294 481 903 251 827.

Remarque. III.

Où l'on donne une méthode facile de réduire les logarithmes des formules aux logarithmes des Tables.

761. On peut rendre très-aisée la réduction des logarithmes des formules aux logarithmes des Tables, en faisant une Table des produits du multiplicateur commun 0. 4342944819 par les neuf chifres 1, 2, 3, &c. comme on la voit ici.

Tables des produits du multiplicateur commun par les neuf chifres 1, 2, 3, &c.

Produit	par 1,	0. 4342944819.
	par 2,	0. 8685889638.
	par 3,	1. 3028834457.
	par 4,	1. 7371779276.
	par 5,	2. 1714724095.
	par 6,	2. 6057668914.
	par 7,	3. 0400613733.
	par 8,	3. 4743558552.
	par 9,	3. 9086503371.

Car pour réduire un logarithme des formules, par exemple le logarithme de 2, qui est 0. 6931471805 60, aux logarithmes des Tables, il n'y a qu'à prendre dans la Table qu'on voit ici les produits du multiplicateur commun par 6,9,3,1,4,7,1,8,0,5,6, c'est-à-dire, par 0. 6, 0. 09, 0. 003, 0. 000 1, 0. 00004, 0. 000 007, 0. 000 0001, 0. 000 000 08, 0, 0. 000 000 000 5, 0. 000 000 000 06; les écrire les uns sous les autres aux rangs qui leur conviennent; les ajouter en une somme; elle sera le logarithme de 2 qu'il faut écrire dans les Tables.

Produits du multiplicateur commun 0. 434 294 4819.

0. 260 576 689 14 par 0. 6
0. 039 086 503 37 par 0. 09
0. 001 302 883 44 par 0. 003
0. 000 043 429 44 par 0. 000 1
0. 000 017 371 77 par 0. 000 04
0. 000 003 040 06 par 0. 000 007
0. 000 000 043 42 par 0. 000 000 1
0. 000 000 034 74 par 0. 000 000 08
0. 000 000 000 00 par 0.
0. 000 000 000 21 par 0. 000 000 000 5
0. 000 000 000 02 par 0. 000 000 000 06

0. 301 029 995 6 | 1, { logarithme de 2 réduit aux Tables à dix rangs de chifres.

On réduira de même les autres logarithmes des formules aux logarithmes des Tables.

COROLLAIRE IV.

762. ON peut déduire des logarithmes déja découverts par les formules, d'autres logarithmes. Par exemple, si l'on ajoute au logarithme de 10 le logarithme négatif de $\frac{9}{10}$, ce qui se fait en ôtant par la soustraction du logarithme de 10 le logarithme de $\frac{9}{10}$, la moitié du reste 1. 098 612 288 668 sera * le logarithme de $\sqrt[2]{\frac{10}{1}\times\frac{9}{10}} = \sqrt[2]{9} = 3$.

* 657, & 664.

Si l'on ôte le logarithme de 2 du logarithme de 10, le reste 1. 609 437 912 434 sera * le logarithme de $\frac{10}{2} = 5$.

* 659.

Si l'on ajoute le logarithme de 10 au logarithme de $\frac{11}{10}$, la somme 2. 397 895 272 798 sera * le logarithme de $\frac{11}{10}\times\frac{10}{1}$ $= 11$.

* 657.

Si l'on multiplie par 2 le logarithme de 10, le produit

4. 605

4.605 170 185 988 sera * le logarithme de $10 \times 10 = 100$. * 663.
Si l'on ajoute le logarithme de 100 au logarithme négatif de $\frac{98}{100}$, ce qui se fait en ôtant le logarithme de $\frac{98}{100}$ du logarithme de 100 pour avoir le surplus; on aura 4.584 967 478 671 pour le * logarithme de $\frac{98}{100} \times \frac{100}{1} = 98$. Otant ensuite le logarithme de 2 du logarithme de 98, on aura 3.891 820 298 111 * pour le logarithme de $\frac{98}{2} = 49$. Enfin si l'on prend la moitié du logarithme de 49, on aura 1.945 910 149 055 pour * le logarithme de $\sqrt[2]{49} = 7$. * 657. * 659. * 664.

Si l'on ajoute le logarithme de 100 au logarithme de $\frac{102}{100}$, la somme 4.624 972 813 284 sera * le logarithme de $\frac{102}{100} \times \frac{100}{1} = 102$. * 657.

Si l'on ôte ensuite la somme 1.791 759 469 228 des logarithmes de 2 & de 3, laquelle somme est * le logarithme de 6, du logarithme de 102, le reste 2.833 213 344 056 sera * le logarithme de $\frac{102}{6} = 17$. * 657. * 659.

REMARQUE.

763. ON a pû voir par les deux Exemples du premier Problême, & par les Corollaires qui les suivent, qu'on trouve très-aisément les logarithmes des nombres faits de l'unité & d'une fraction décimale par le moyen des deux premieres formules; & avec quelle facilité on déduit ensuite de ces logarithmes ceux des nombres entiers.

Comme cependant il reste une autre peine, qui est de réduire chacun de ces logarithmes à ceux des Tables, comme on a fait * celui de 2, il est bon de la resserrer dans les bornes les plus étroites, & de faire ensorte qu'on ne la trouve que dans les cas où l'on ne sçauroit l'éviter. Ces cas sont les logarithmes des seuls nombres premiers qui n'ont point d'autres diviseurs que l'unité, comme 2, 3, 7, 11, &c. Ainsi il ne faut déduire des deux premieres formules que les logarithmes des nombres dont l'on peut tirer aisément les logarithmes des nombres premiers; réduire ensuite les logarithmes des seuls nombres premiers, à mesure qu'on les trouve, à l'espece des Tables; & tirer enfin par de simples additions, soustractions, &c. des logarithmes des nombres premiers réduits à l'espece des Tables, les logarithmes de tous les autres nombres qui sont composés des nombres premiers. * 761.

Car par cette voie on évitera les réductions inutiles, & les logarithmes de tous les nombres composés se trouveront réduits à l'espece des Tables. Par exemple, il est inutile de cher-
* 762. cher le logarithme de 5 * par les logarithmes de 10 & de 2 des formules; mais le logarithme de 10 de l'espece des Tables étant 1.000 000 000 000, & le logarithme de 2 de
* 761. l'espece des Tables étant * 0.301 029 995 6; il faut ôter ce
* 659. dernier du premier, & le reste 0.698 970 004 4 sera * le logarithme de $\frac{10}{2} = 5$ de l'espece des Tables.

On peut se servir, pour trouver les logarithmes des nom-
* 738. bres premiers, des formules du * 7^e^, † 8^e^ & § 9^e^ Corollai-
† 741. res, comme on le va voir dans les Problêmes suivans. On
§ 743. pourroit se servir des mêmes formules pour trouver les logarithmes de tels nombres qu'on voudroit.

PROBLÊME II.

764. *Trouver le logarithme d'un nombre premier par la*
* 738. *formule du * 7^e^ Corollaire, en supposant que le logarithme du nombre plus petit d'une unité que ce nombre premier est connu, ou que le logarithme du nombre plus grand d'une unité que ce nombre premier est connu.*

Par exemple, trouver le logarithme de 13, en supposant qu'on connoît par le premier Problême & ses Corollaires le logarithme de 12, ou celui de 14.

OPÉRATION. Si c'est le logarithme de 12 qui est connu, il faut supposer $12 = f$, $13 = g$, & chercher le logarithme du rapport $\frac{13}{12} = \frac{g}{f}$ par le moyen de la for-
* 738. mule * $\overline{\frac{2d}{s} + \frac{2d^3}{3s^3} + \frac{2d^5}{5s^5} + \frac{2d^7}{7s^7} + \frac{2d^9}{9s^9}} +$ &c.

Pour cela il faut supposer $d = g - f = 13 - 12 = 1$, $s = f + g = 12 + 13 = 25$; substituer 1 à la place de d, & 25 & les puissances de 25 à la place de s dans autant de termes qu'on voudra.

Il faut ensuite réduire tous les termes qu'on vient de trouver en autant de parties décimales; écrire les termes ainsi changés les uns sous les autres dans les rangs qui leur con-
* 738. viennent; & en prendre la somme. * Ce sera le logarithme du rapport $\frac{g}{f} = \frac{13}{12}$.

Il faut enfin ajouter à ce logarithme celui de 12 qui est connu (étant égal à * $l.3 + 2l.2$); & la somme † sera le logarithme de $\frac{13}{12} \times \frac{12}{1} = 13$, qu'on réduira ¶ à l'espece des Tables. En voici le calcul. * 657. † 657. ¶ 761.

$+ \frac{2d}{s} = \frac{2}{25} =$	0.080 000 000 000 000
$+ \frac{2d^3}{3s^3} = \frac{2}{46875} =$	42 666 666 666
$+ \frac{2d^5}{5s^5} = \frac{2}{48828125} =$	40 960 000
$+ \frac{2d^7}{7s^7} = \frac{2}{42724609375} =$	46 811
$+ \frac{2d^9}{9s^9} = \frac{2}{34332275390625} =$	58
Log. de $\frac{13}{12}$ }	0.080 042 707 673 | 535
Log. de 12 }	2.484 906 649 788
Log. de 13 }	2.564 949 357 461

On réduira ce logarithme de 13 aux logarithmes des Tables par la Méthode * ci-dessus. * 761.

Si l'on vouloit se servir du logarithme de 14 qui est connu (étant égal * à la somme des logarithmes de 7 & de 2, puisque $l.7 + l.2 = l.7 \times 2$); il faudroit supposer $13 = f$, $14 = g$, & chercher le logarithme du rapport $\frac{13}{14} = \frac{f}{g}$ par le moyen de la formule * $-\frac{2d}{s} - \frac{2d^3}{3s^3} - \frac{2d^5}{5s^5} - \frac{2d^7}{7s^7} -$ &c. & supposer pour cela $d = g - f = 14 - 13 = 1$, $s = f + g = 13 + 14 = 27$; substituer 1 à la place de d, & 27 & les puissances de 27 à la place de s & des puissances de s dans la formule; & après avoir réduit les termes du logarithme en parties décimales, & pris leur somme qui est le logarithme négatif de $\frac{13}{14} = \frac{f}{g}$; il faudroit lui ajouter le logarithme connu de 14, c'est-à-dire prendre le surplus de celui-ci sur le premier; & ce surplus seroit * le logarithme de $\frac{13}{14} \times \frac{14}{1} = 13$. * 657. * 739. * 657.

REMARQUES.

I.

765. TOUS les termes des deux formules de ce second Problême étant multipliés par 2, on pourroit les marquer ainsi, $+ 2 \times \frac{d}{s} + \frac{d^3}{3s^3} + \frac{d^5}{5s^5} +$ &c. & $- 2 \times \frac{d}{s} + \frac{d^3}{3s^3} + \frac{d^5}{5s^5} +$ &c. & alors dans la pratique de ce second Problême, tous

les numérateurs des termes seroient l'unité ; & après avoir trouvé ces termes, & en avoir fait une somme, on multiplieroit cette somme par $+2$ ou par -2, & le produit seroit le logarithme du rapport $\frac{13}{12} = \frac{g}{f}$ dans le premier cas, ou du rapport $\frac{13}{14} = \frac{f}{g}$ dans le second cas. Ajoutant à ce logarithme celui de $12 = f$ dans le premier cas, ou celui de $14 = g$ dans le second cas, la somme seroit le logarithme de $\frac{13}{12} \times \frac{12}{1} = 13$ dans le premier cas ; elle seroit le logarithme de $\frac{13}{14} \times \frac{14}{1} = 13$ dans le second cas.

II.

On pourroit, par les mêmes formules, trouver le logarithme d'un nombre proposé, par exemple de 13, en prenant au lieu des nombres 12 ou 14 dont le proposé ne différe que d'une unité, d'autres nombres dont l'un seroit plus petit de plusieurs unités que le proposé, & l'autre plus grand de plusieurs unités que le proposé, & dont les logarithmes fussent connus : mais alors la différence d de la formule n'étant plus l'unité, il faudroit substituer les valeurs de d & des puissances de d dans la formule ; ce qui rendroit le calcul plus long, & la fraction représentée par $\frac{d}{s}$ seroit plus grande, ou auroit une plus grande valeur, & il faudroit plus de termes pour avoir le logarithme qu'on cherche.

PROBLÊME III.

766. *TROUVER le logarithme d'un nombre premier par la formule du * huitiéme Corollaire, en supposant qu'on connoît les logarithmes de deux nombres, entre lesquels le nombre proposé est moyen proportionnel arithmétique.*

*741.

On prendra le nombre de 13 pour exemple Il faut en trouver le logarithme. On peut prendre tels nombres qu'on voudra deux à deux dont les logarithmes soient connus, entre lesquels nombres le nombre proposé 13 soit moyen arithmétique proportionnel. Par exemple, on pourroit prendre 2 & 24 entre lesquels 13 est moyen arithmétique proportionnel. On pourroit prendre de même 9 & 17, ou 11 & 15. Mais il vaut mieux prendre les nombres 12 & 14 entre lesquels 13 est moyen arithmétique, & qui ne différe de l'un & de l'autre que d'une unité ; leurs logarithmes $l.\ 12$ & $l.\ 14$

ſont connus, puiſque $l.\ 12 = l.\ 3 \times 2 \times 2 = l.\ 3 + 2\ l.\ 2$; & $l.\ 14 = l.\ 7 \times 2 = l.\ 7 + l.\ 2$; la différence $14 - 12 = 2$, & l'on a déja * les puiſſances de 2 toutes formées, & de plus la fraction repréſentée par $\frac{d}{s}$ de la formule ſera plus petite, & il faudra moins de termes de la formule pour trouver le logarithme qu'on cherche. *753.

OPÉRATION. On ſuppoſera $12 = f$, $14 = g$; ainſi le moyen arithmétique $13 = \frac{12+14}{2} = \frac{f+g}{2}$. $l.\ 12 = l.\ f$, & $l.\ 14 = l.\ g$ étant connus, on trouvera $\frac{l.\ f + l.\ g}{2} = \frac{l.\ 12 + l.\ 14}{2} =$ * $l.\ \sqrt[2]{12 \times 14} = l.\ \sqrt[2]{fg}$: & l'on ſuppoſera tous ces logarithmes connus. *664.

On ſuppoſera $12 + 14 = 26 = f + g = s$, $14 - 12 = 2 = g - f = d$. On ſubſtituera les puiſſances de 2 à la place des puiſſances de d, & les puiſſances de 26 à la place des puiſſances de s dans la * formule $+ \overline{\frac{d^2}{2s^2} + \frac{d^4}{4s^4} + \frac{d^6}{6s^6} + \frac{d^8}{8s^8} + \frac{d^{10}}{10s^{10}}} +$ &c. *741.
On changera tous les termes qui viendront de la ſubſtitution en parties décimales; on écrira ces termes ainſi changés les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent; on en prendra la ſomme, & on lui ajoutera la moitié de la ſomme des logarithmes connus de $12 = f$ & de $7 \times 2 = 14 = g$, laquelle eſt repréſentée par $\frac{l.\ 12 + l.\ 14}{2} = \frac{l.\ f + l.\ g}{2}$; la ſomme de cette derniere addition * ſera le logarithme de $\frac{12+14}{2} = \frac{f+g}{2} = 13$. En voici le calcul. *740.

$+ \frac{d^2}{2s^2} = \frac{4}{1352} =$	0.002 958 579 881 668
$+ \frac{d^4}{4s^4} = \frac{16}{1827904} =$	8 753 194 916
$+ \frac{d^6}{6s^6} = \frac{64}{1853494656} =$	34 529 368
$+ \frac{d^8}{8s^8} = \frac{256}{1669176516468} =$	153 369
$+ \frac{d^{10}}{10s^{10}} = \frac{1024}{141045415653760} =$	726
$+ \frac{d^{12}}{12s^{12}} = \frac{4096}{190693402163364352} =$	21
Log. de $\left\{ \frac{\frac{12+14}{2}}{\sqrt[2]{12 \times 14}} = \frac{13}{\sqrt[2]{168}} \right\}$	0.002 967 367 760 | 068
Log. de $\sqrt[2]{7 \times 2 \times 12} = \sqrt[2]{168}$ }	2.561 981 989 701
Log. de 13 }	2.564 949 357 461

PROBLÊME IV.

767. *TROUVER le logarithme d'un nombre premier par la formule*
* 742 *du * neuviéme Corollaire, en ſuppoſant connus les logarithmes*
& 743. *des deux nombres qui ne diffèrent que de deux unités entre leſquels le propoſé eſt moyen arithmétique proportionnel, & ne diffère de l'un & de l'autre que d'une unité.*

On prendra pour exemple le même nombre 13, & l'on ſuppoſera connus les logarithmes de 12 & de 14.

* 742 Afin que la formule du * neuviéme Corollaire repréſente
& 743. l'exemple propoſé, on ſuppoſera $12 = f$, $14 = f + 2$, & $13 = f + 1$. On ſuppoſera connus $\frac{l.12 + l.14}{2} = \frac{l.f + l.\overline{f+2}}{2}$.

OPÉRATION. Il faut prendre le produit des deux nombres donnés 12 & 14, qui eſt $12 \times 14 = 168 = f \times \overline{f+2} = f^2 + 2f$.

Il faut prendre enſuite le quarré du nombre propoſé 13, qui eſt $13 \times 13 = 169 = \overline{f+1} \times \overline{f+1} = f^2 + 2f + 1$. Il faut prendre la ſomme de 168 & de $169 = 337 = 2f^2 + 4f + 1$, & ſuppoſer cette ſomme $337 = s$. Il faut ſubſtituer 337 & ſes puiſſances à la place de s & des puiſſances de s dans autant de
* 743. termes qu'on voudra de la formule * $\frac{1}{s} + \frac{1}{3s^3} + \frac{1}{5s^5} + \frac{1}{7s^7} + \frac{1}{9s^9}$ + &c. & les réduire chacun en parties décimales; écrire les termes ainſi changés les uns ſous les autres dans les rangs qui leur conviennent, & les ajouter enſemble; leur ſomme ſera
* 742. * le logarithme de $\frac{13}{\sqrt[2]{12 \times 14}} = \frac{13}{\sqrt[2]{168}} = \frac{f+1}{\sqrt{f \times \overline{f+2}}}$. Enfin il faut ajouter à cette ſomme le logarithme de $\sqrt[2]{168} = \sqrt[2]{f \times \overline{f+2}}$, lequel logarithme eſt connu, & il eſt repréſenté par $\frac{l.12 + l.14}{2} = \frac{l.f + l.\overline{f+2}}{2}$; & la nouvelle ſomme de cette addition ſera
* 742. * le logarithme du nombre propoſé $13 = f + 1$.

On le réduira à l'eſpéce des Tables par la méthode de l'article 761. Voici le calcul de cet Exemple.

$+ \frac{1}{s} = \frac{1}{337} =$	0.002 967 359 050 445
$+ \frac{1}{3s^3} = \frac{1}{114818259} =$	8 709 241
$+ \frac{1}{5s^5} = \frac{1}{21732991427285} =$	46
	0.002 967 367 759 732
	Ou bien en ne prenant que douze rangs,
Log. de $\left\{ \frac{13}{\sqrt[2]{12 \times 14}} = \frac{13}{\sqrt[2]{168}} \right\}$	0.002 967 367 760
Log. de $\sqrt[2]{7 \times 2 \times 12} = \sqrt[2]{168}$ ou $\frac{l.14 + l.12}{2} \}$	2.561 981 989 701
Log. de $\left\{ \frac{13}{\sqrt[2]{168}} \times \frac{\sqrt[2]{168}}{1} = 13 \right\}$	2.564 949 357 461

REMARQUE.

768. Si l'on vouloit entreprendre de former des Tables des logarithmes d'un plus grand nombre de rangs de chifres que celles que l'on a, on peut à présent appercevoir que la méthode la plus aisée seroit de trouver par le * premier Problême les logarithmes de $1 + \frac{1}{10}$, $1 - \frac{1}{10}$. $1 + \frac{1}{100}$, $1 - \frac{1}{100}$. $1 + \frac{2}{10}$, $1 - \frac{2}{10}$. $1 + \frac{2}{100}$, $1 - \frac{2}{100}$; d'en déduire par de simples additions, soustractions, &c. les logarithmes de 2, 3, 10, 7, 11, & les seuls logarithmes nécessaires pour trouver ensuite les logarithmes des nombres premiers par * le second Problême, ou plutôt par le quatriéme * Problême, parce qu'il fait trouver les logarithmes qu'on cherche avec moins de termes. Après cela il faudroit réduire * à l'espéce des Tables les seuls logarithmes des nombres premiers. Enfin il faudroit déduire par de simples additions, soustractions, multiplications, &c. des logarithmes des nombres premiers déja réduits à l'espéce des Tables; il faudroit, dis-je, en déduire les logarithmes de tous les autres nombres entiers, lesquels se trouveroient ainsi, sans réduction, de l'espéce des Tables.

* 749. * 764. * 767. * 761.

Méthode pour faciliter dans la pratique la formation des Tables des logarithmes, & qui sert aussi à faciliter la formation de la plûpart des Tables des Mathématiques pratiques, comme celles de l'Astronomie, &c.

Les principes dont on tire cette Méthode.

PREMIERE SUPPOSITION.

769. La colonne B contient une *suite* de nombres qui vont en augmentant.

La colonne C est formée des différences de ces nombres, en ôtant le premier du second, & écrivant la différence à côté du second; ôtant ensuite le second du troisiéme, & écrivant la différence à côté du troisiéme; & ainsi de suite.

Suite	1res différences	2es	3es	4es	5es
B	C	D	E	F	G
6					
11	5				
20	9	4			
36	16	7	3		
64	28	12	5	2	
112	48	20	8	3	1
192	80	32	12	4	1
321	129	49	17	5	1
522	201	72	23	6	1
825	303	102	30	7	1
1268	443	140	38	8	1
1898	630	187	47	9	1
2772	874	244	57	10	1

Montan.
Lagrange III. 911

Si les nombres de la colonne B alloient en diminuant, il faudroit ôter le second du premier, le troisiéme du second; & ainsi de suite, pour avoir la colonne faite des différences.

La colonne D est formée de la colonne C, tout comme la colonne C est formée de la colonne B; ainsi la colonne D contient les différences des termes de la colonne C.

De même les termes de la colonne E sont les différences des termes de la colonne D; les termes de la colonne F sont de même les différences des termes de la colonne E, & la colonne G contient les différences des termes de la colonne F; & ainsi de suite s'il y avoit d'autres colonnes à la suite de G.

DÉFINITION.

770. LES termes de C sont les *premieres différences* des nombres de B; les termes de D en sont les *secondes différences*; les terme de E en sont les 3es *différences*; les termes de F, les 4es; de G, les 5es; & ainsi de suite.

Mais si l'on rapporte les colonnes à droite à telle autre qu'on voudra vers la gauche, les termes d'une colonne sont les premieres différences de celle qui la précéde à gauche; les secondes différences de celle qui précéde celle-ci; & ainsi de suite. Par exemple F contient les 1res différences de E, le 2es de D, les 3es de C, &c. D contient les 1res différences de C, les 2es de B, &c.

SECONDE SUPPOSITION.

771. DANS la plûpart des Tables des Mathématiques pratiques, si l'on prend les différences 1res, 2es, 3es, &c. des nombres ou des termes dont la *suite* compose ces Tables, on arrive presque toujours à une colonne de différences qui sont toutes égales entr'elles. En quelques-unes de ces Tables, les 2es ou 3es différences sont égales; en d'autres, les 4es ou 5es ou 6es, &c. ou du moins les différences 5es ou 6es, ou d'autres plus reculées, different si peu de l'égalité, qu'on peut négliger les petites quantités qui les empêchent d'être égales. C'est ce qui arrive dans les Tables des logarithmes.

AVERTISSEMENT.

QUAND une *suite* de nombres ou de termes a cette propriété, qu'en prenant les différences 1res, 2es, 3es, &c. de ces termes,

termes, on arrive à une colonne de différences égales ou exactement ou sans erreur sensible, il n'est nécessaire de trouver immédiatement par les Méthodes qui font découvrir les termes de cette *suite*, que les seuls termes qui sont en certaines distances égales les uns des autres; par exemple le 1er terme, le 11^{e}, le 21^{e}, le 31^{e}, & ainsi de suite; & l'on va donner ici une Méthode pour découvrir tous les termes moyens entre ces termes déja connus, & qui sont en distance égale les uns des autres, il n'importe quelle que soit cette distance. Voici l'invention même de cette Méthode.

Construction d'une Table pour cette Méthode, qu'on nommera La Méthode des interpositions.

772. 1°. LES nombres figurés simples & * changés, ont cette propriété, * qu'en retranchant de suite les uns des autres les termes d'un ordre, comme du 5^{e} ordre, les différences sont les termes de l'ordre immédiatement plus petit, c'est-à-dire ici du 4^{e} ordre, retranchant de suite les termes de cet ordre moindre les uns des autres, les différences sont les termes de l'ordre immédiatement plus petit, c'est-à-dire ici du 3^{e} ordre; en allant par ces soustractions d'un ordre à celui qui est immédiatement plus petit, on arrive à la colonne des unités ou des grandeurs égales qui sont les différences égales. Cela me fait voir que je me dois servir des nombres figurés pour la Méthode des interpositions. *Voyez la Table, page* 195.

* 632. * 618 & 625.

C'est pourquoi, 2°. je fais une Table, & je mets dans la colonne G par où je commence, les différences égales représentées par les lettres *f*, *f*, quelles que puissent être ces différences.

3°. Je fais la colonne suivante F des termes du 1er ordre formés des grandeurs égales de la colonne G. Mais comme il arrive dans les grandeurs auxquelles je dois appliquer la Méthode des interpositions, que le premier terme ou la premiere des différences que doit représenter la colonne F, n'est pas la même que la premiere des grandeurs égales qui doivent être représentées par les *f* de la colonne G, & que de plus c'est une proposition naturellement connue, qu'une *suite* de grandeurs qui étant retranchées par ordre les unes des autres, donnent une *suite* ou une colonne faite de leurs différences, donneroient encore les mêmes différences si on ajoutoit une même grandeur à chacune de ces grandeurs, ou si on retranchoit de chacune une même grandeur; cela est cause que je compose la colonne F de deux rangs perpendiculaires; l'un contient des grandeurs égales quelconques représentées par g; l'autre rang perpendiculaire, dont les termes sont joints aux termes du rang des grandeurs égales par le signe $+$ (qui peut représenter indéterminément les signes $+$ & $-$ selon le besoin qu'on en peut avoir dans tous les cas particuliers) contient de suite les termes du 1er ordre formés des grandeurs égales f, f de la colonne G. Je mets le premier terme des g d'un rang au-dessus du premier terme $1f$, afin qu'en retranchant dans la colonne F le premier terme $g+0$ du second $g+1f$, le reste soit précisément le premier terme f de la colonne G, lequel premier terme f est la différence, par la supposition, qui est entre le second & le premier terme de F.

4°. En faisant de semblables raisonnemens, je construis les colonnes E, D, C, B, A. Je pourrois continuer la construction à tant de colonnes que je voudrois au-delà de A. Mais ces colonnes suffisent pour l'intelligence & pour la pratique de la Méthode; & l'on voit que la colonne E contient trois rangs perpendiculaires; le premier est fait des grandeurs égales représentées par h, le second est composé des termes du 1er ordre formés des grandeurs égales g de la colonne précédente F, le troisiéme est fait des termes du second ordre par rapport aux grandeurs égales f de la colonne G. La colonne D contient quatre rangs perpendiculaires, C en contient cinq, B en a six, A en a sept; & ils sont tous formés par la Méthode des nombres figurés.

5°. La Méthode & la Table deviendroient embarrassantes, s'il falloit former dans toutes les colonnes tous les termes dont on peut avoir besoin : mais il suffit de former dans chaque colonne les seuls termes qui sont dans le rang parallèle de la premiere f la plus élevée, & ceux-là seulement, qui dans chaque colonne sont dans les rangs parallèles au-dessus du rang parallèle de la premiere f. Ce qui se réduit, comme on le voit, à très-peu de termes. Les autres termes de toutes les colonnes qui sont dans les rangs parallèles au-dessous du rang parallèle de la premiere f en descendant, peuvent se représenter par une formule générale, qui suffit seule pour découvrir tous les termes de toutes les colonnes de la Table dont on peut avoir besoin, tout comme si l'on avoit la Table continuée à l'infini en descendant. Ainsi il suffit qu'on puisse imaginer la Table continuée tant qu'on voudra.

Cette formule se fait de la même maniere que les formules * de l'union des nombres figurés changés, puisque chaque colonne n'est formée elle-même que de l'union des nombres figurés changés.

* 632, 633, & les suiv.

Ainsi en commençant le premier rang parallèle des colonnes à la 1re f de la colonne G, le second sera celui de la 2e f, le troisiéme sera celui de la 3e f, & ainsi de suite en descendant. Et supposant que n représente le quantiéme est un rang parallèle (c'est-à-dire $n = 1$ au premier rang parallèle; $n = 2$ au second rang parallèle, (n est égale à 3, à 4, à 5, &c. aux rangs parallèles 3e, 4e, 5e, &c.

On nommera l'*indice* d'un rang parallèle le nombre qui marque le quantiéme il est; ainsi 1 est l'*indice* du premier rang parallèle; 2 est l'*indice* du second rang; 3, l'*indice* du troisiéme rang, &c. Et dans la formule suivante, n marque d'une maniere générale ou indéterminée l'*indice* de chaque rang parallèle, à commencer le premier à la 1re f, ou le quantiéme est chaque terme. Par conséquent la premiere des g étant d'un rang plus élevée que la plus haute f qui est la premiere, un rang parallèle des f étant marqué par n, le même rang parallèle par rapport aux g est $n + 1$. Ce même rang parallèle est $n + 2$ par rapport aux h, $n + 3$ par rapport aux i, $n + 4$ par rapport aux k, &c. parce que la plus haute h est de deux rangs plus élevée que f, la plus haute i de trois rangs, &c.

TABLE POUR LA MÉTHODE DES INTERPOSITIONS.

G	F	E	D	C	B	A
						$m+0+0+0+0+0+0$
					$l+0+0+0+0+0$	$m+1l+0+0+0+0+0$
				$k+0+0+0+0$	$l+1k+0+0+0+0$	$m+2l+1k+0+0+0+0$
			$i+0+0+0$	$k+1i+0+0+0$	$l+2k+1i+0+0+0$	$m+3l+3k+1i+0+0+0$
		$h+0+0$	$i+1h+0+0$	$k+2i+1h+0+0$	$l+3k+3i+1h+0+0$	$m+4l+6k+4i+1h+0+0$
	$g+0$	$h+1g+0$	$i+2h+1g+0$	$k+3i+3h+1g+0$	$l+4k+6i+4h+1g+0$	$m+5l+10k+10i+5h+1g+0$
f	$g+1f$	$h+2g+1f$	$i+3h+3g+1f$	$k+4i+6h+4g+1f$	$l+5k+10i+10h+5g+1f$	$m+6l+15k+20i+15h+6g+1f$
f	$g+2f$	$h+3g+3f$	$i+4h+6g+4f$	$k+5i+10h+10g+5f$	$l+6k+15i+20h+15g+6f$	$m+7l+21k+35i+35h+21g+7f$
f	$g+3f$	$h+4g+6f$	$i+5h+10g+10f$	$k+6i+15h+20g+15f$	$l+7k+21i+35h+35g+21f$	$m+8l+28k+56i+70h+56g+28f$
f	$g+4f$	$h+5g+10f$	$i+6h+15g+20f$	$k+7i+21h+35g+35f$	$l+8k+28i+56h+70g+56f$	$m+9l+36k+84i+126h+126g+84f$

La formule de chaque rang parallèle sera,

Pour la colonne G, $1f.$ Pour la colonne F, $1g + nf.$ Pour la colonne E, $1h + \frac{n+1}{1}g + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}f.$

Pour la colonne D,

$$1i + \frac{n+2}{1}h + \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2}g + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}f.$$

Pour la colonne C,

$$1k + \frac{n+3}{1}i + \frac{n+2}{1} \times \frac{n+3}{2}h + \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2} \times \frac{n+3}{3}g + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4}f.$$

Pour la colonne B,

$$1l + \frac{n+4}{1}k + \frac{n+3}{1} \times \frac{n+4}{2}i + \frac{n+2}{1} \times \frac{n+3}{2} \times \frac{n+4}{3}h + \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2} \times \frac{n+3}{3} \times \frac{n+4}{4}g + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5}f.$$

Pour la colonne A,

$$1m + \frac{n+5}{1}l + \frac{n+4}{1} \times \frac{n+5}{2}k + \frac{n+3}{1} \times \frac{n+4}{2} \times \frac{n+5}{3}i + \frac{n+2}{1} \times \frac{n+3}{2} \times \frac{n+4}{3} \times \frac{n+5}{4}h + \frac{n+1}{1} \times \frac{n+2}{2} \times \frac{n+3}{3} \times \frac{n+4}{4} \times \frac{n+5}{5}g + \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3} \times \frac{n+3}{4} \times \frac{n+4}{5} \times \frac{n+5}{6}f.$$

REMARQUE.

773. LES Lecteurs voyent assez la maniere de continuer la formule pour les colonnes qui suivroient A si l'on en avoit besoin, & qu'on peut, par le moyen de cette formule, trouver aisément les termes de tel rang parallèle qu'on voudra de toutes les colonnes de la Table.

Ils doivent aussi remarquer dans l'application de la Table à la Méthode des interpositions, que quand les nombres entre lesquels on en veut interposer d'autres moyens, sont tels que les premieres différences de la *suite* faite de ces termes extrêmes & de leurs moyens sont égales, c'est la colonne F qui représente ces nombres; ainsi F est dans ce cas la colonne *principale*.

Quand ce sont les secondes différences qui sont égales, c'est la colonne E qui est la *principale*, & qui représente les nombres qu'on cherche. Si ce sont les 3^es^ différences qui soient égales, D est la colonne *principale*. Si ce sont les 4^es^ différences qui soient égales, C est la colonne *principale*; si ce sont les 5^es^, B est la *principale* colonne; si ce sont les 6^es^, A est la colonne *principale*; & ainsi de suite. Et quand une colonne est prise par la *principale*, les autres colonnes à droite sont inutiles en ce cas-là.

Cela est cause qu'il est nécessaire pour la pratique, d'avoir la formule de chaque rang parallèle par rapport à la colonne *principale*. Ce qui donnera autant de formules particuliéres qu'on pourra supposer de colonnes principales.

On nommera l'*indice* des différences, le nombre qui exprime quelles différences elles sont par rapport aux termes de la colonne *principale*. Ainsi 1 est l'*indice* des 1res différences des termes de la colonne *principale*; 2 est l'*indice* des 2es différences; 3 est l'*indice* des 3es différences, &c.

Construction de la formule de la colonne principale.

774. POUR faire la formule par rapport à une colonne qu'on prend pour la *principale*, il faut supposer que n représente le quantiéme est un rang parallèle, à commencer du premier rang compris de la colonne *principale*. Par exemple, $n = 1$ au premier rang, $n = 2$ au second rang, $n = 3$ au troisiéme rang, & ainsi de suite.

Par conséquent dans une colonne *principale*, par exemple dans B, l'indéterminée n marquant le quantiéme est un rang parallèle depuis le premier rang le plus élevé compris, dans lequel premier rang il n'y a que l, le même rang parallèle (que n marque par rapport à l) doit être marqué par $n - 1$ par rapport à k qui ne commence qu'un rang plus bas; par $n - 2$ par rapport à i qui ne commence qu'à deux rangs plus bas; par $n - 3$ par rapport à h qui est de trois rangs plus bas, &c.

Après cette supposition, on fera aisément les formules suivantes, qui représentent d'une maniere indéterminée chaque rang parallèle de chacune des colonnes regardée comme colonne *principale*, à peu près comme dans les Exemples qui suivent les nombres figurés, art. 633 & les suivans.

AVERTISSEMENT.

ON n'a besoin dans la pratique que de la formule de chaque rang parallèle de la colonne *principale*, & la formule précédente qui est pour toutes les colonnes, est inutile dans la pratique.

En prenant la colonne A *pour la principale ou derniere, la formule de chaque rang parallèle sera,*

Pour la colonne A,

$$1m + \frac{n-1}{1}l + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2}k + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3}i + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4}h + \frac{n-5}{1} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-2}{4} \times \frac{n-1}{5}g + \frac{n-6}{1} \times \frac{n-5}{2} \times \frac{n-4}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-2}{5} \times \frac{n-1}{6}f.$$

En supposant la colonne B *prise pour la principale ou derniere, la formule sera,*

Pour la colonne B,

$$1l + \frac{n-1}{1}k + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2}i + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3}h + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4}g + \frac{n-5}{1} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-2}{4} \times \frac{n-1}{5}f.$$

En prenant la colonne C *pour la principale ou derniere, la formule sera,*

Pour la colonne C,

$$1k + \frac{n-1}{1}i + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2}h + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3}g + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4}f.$$

En prenant la colonne D *pour la principale ou derniere, la formule sera,*

Pour la colonne D,

$$1i + \frac{n-1}{1}h + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2}g + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3}f.$$

En prenant la colonne E *pour la principale ou derniere, la formule sera,*

Pour la colonne E,

$$1h + \frac{n-1}{1}g + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2}f.$$

En prenant F *pour la principale ou derniere, la formule sera,*

Pour la colonne F,

$$1g + \frac{n-1}{1}f.$$

LA MÉTHODE DES INTERPOSITIONS;
Ou l'usage de la Table & des formules des colonnes principales.

PROBLÊME.

775. *Dans une suite de nombres, qui sont tels qu'en prenant leurs différences* 1[res], 2[es], 3[es], *&c. on arrive enfin à une colonne de différences égales ou sensiblement égales ; le premier terme de cette suite, & d'autres termes qui sont tous à une égale distance les uns des autres (c'est-à-dire entre lesquels, pris de suite deux à deux, il doit y avoir le même nombre de termes moyens d'interposés) étant donnés ou connus, trouver tous les termes moyens qui doivent être interposés entre les termes donnés par le moyen de la Table & de la formule de la colonne* principale.

Résolution. 1°. Il faut écrire les nombres donnés les uns sous les autres dans une colonne ; en prendre les premieres différences, les secondes, les 3[es], les 4[es], & ainsi de suite, & les écrire à côté des précédentes en autant de colonnes.

2°. Il faut s'imaginer que les nombres de la *suite* proposée sont représentés par l'une des colonnes de la Table prolongée en descendant autant qu'il faudroit pour les représenter tous; déterminer cette colonne qui sera la *principale* & derniere ; & concevoir qu'ils sont aussi représentés tous d'une maniere indéterminée par la formule qui représente chacun des rangs parallèles de cette colonne. On détermine cette colonne *principale* par les cas des Problêmes auxquels on veut appliquer la Méthode. Car si ce sont les premieres différences qui sont égales, la seconde colonne marquée F est la *principale*. Si les secondes différences sont égales, la colonne E est la *principale*. Si les 3[es] différences sont égales, la *principale* colonne est D. Quand les 4[es], ou 5[es], ou 6[es] différences sont égales, la *principale* colonne est C, ou B, ou A, &c.

La *principale* colonne étant déterminée par chacun des cas des Problêmes où l'on veut appliquer la Méthode, les colonnes qui vont de droite à gauche représentent de suite dans la Table les premieres, les 2^es, les 3^es différences, &c. des nombres de la *ſuite* propoſée juſqu'à la colonne G qui repréſente les dernieres différences qu'on ſuppoſe égales du moins ſenſiblement ; mais elles ne ſervent que pour faire mieux concevoir la Méthode, & elles ſont inutiles pour la pratique de la Méthode.

Pour faire clairement concevoir la Méthode, on en va appliquer chacun des articles à un Exemple à meſure qu'on les énoncera.

Soient propoſés les nombres 5, 80, 630, 2655, 7780 qu'on ſuppoſe avoir entr'eux, pris deux à deux, quatre termes moyens, & avoir cette propriété que les différences 4^es des termes de la *ſuite* qu'on conçoit faite de ces nombres & de leurs termes moyens, ſont égales. Il faut trouver tous les termes moyens de cette *ſuite*.

Il faut commencer par écrire les nombres donnés les uns ſous les autres dans une colonne, en prendre les différences 1^res, 2^es, 3^es, & les 4^es qui ſont égales, & les écrire en autant de colonnes à côté de la premiere, & à côté les unes des autres, comme on le voit ici.

Nombres propoſés.	*Premieres différences.*	*Secondes différences.*	*Troiſiémes différences.*	*Quatriémes différences égales.*
5				
80	75			
630	550	475		
2655	2025	1475	1000	
7780	5125	3100	1625	625

Puiſque ce ſont les 4^es différences des termes de la *ſuite* que je cherche, (& dont j'ai cinq termes donnés, entre leſquels, pris deux à deux, il doit y avoir quatre termes d'interpoſés), leſquelles ſont égales, je m'imagine que les termes de la colonne C de la Table repréſentent par ordre les termes de la *ſuite* propoſée ; ainſi C eſt la colonne *principale* ; la colonne D repréſente les premieres différences ; E les ſecondes ; F les troiſiémes, & G les quatriémes qu'on ſuppoſe égales ; & que la formule de la colonne C, qui eſt $k + \frac{n-1}{1} i + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2} h + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3} g + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4} f$, repréſente auſſi chacun des termes de la *ſuite* propoſée.

3°. Il

3°. Il faut ſuppoſer que la lettre indéterminée qui eſt le premier terme de la colonne *principale*, & qui eſt auſſi le premier terme de la formule de cette colonne, eſt égale au premier des nombres propoſés, & qu'elle le repréſente. Ainſi cette indéterminée devient connue & déterminée; & il faut mettre dans la formule de la colonne *principale* le premier des nombres donnés à la place de cette indéterminée, ſi ce n'eſt quand ce premier nombre eſt fort grand, car alors pour abréger on laiſſe la lettre devenue déterminée.

Dans notre Exemple $k = 5$, & la formule de la colonne *principale* C eſt $5 + \frac{n-1}{1} i + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2} h + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3} g + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4} f$.

4°. Il faut ſubſtituer dans la formule de la colonne *principale*, l'*indice* du rang parallèle du ſecond des nombres donnés à la place de n; & ſuppoſer la quantité qui réſultera de cette ſubſtitution, égale au ſecond des nombres donnés.

Il faut enſuite ſubſtituer dans la même formule, l'*indice* du rang parallèle du 3^{e} nombre donné à la place de n; & ſuppoſer la quantité qui en viendra, égale au 3^{e} nombre donné.

Il faut de même ſubſtituer ſucceſſivement dans la formule, chacun des *indices* des rangs parallèles de tous les nombres donnés dans la formule à la place de n; & ſuppoſer chacune des quantités qui en viendront, égale à celui des nombres donnés qui lui répond.

Dans notre exemple, où il doit y avoir quatre moyens d'interpoſés entre les nombres donnés, l'*indice* du rang parallèle du ſecond nombre 80 eſt *6*, l'*indice* du 3^{e} 630 eſt 11, l'*indice* du 4^{e} 2655 eſt 16; l'*indice* du 5^{e} 7780 eſt 21. Il faut ſubſtituer ſucceſſivement ces *indices* à la place de n dans la formule de la colonne C, & l'on trouvera

$$5 = 5 \text{ 1}^{er} \text{ nombre.}$$
$$5 + 5i + 10h + 10g + 5f = 80 \text{ 2}^{e} \text{ nombre.}$$
$$5 + 10i + 45h + 120g + 210f = 630 \text{ 3}^{e} \text{ nombre.}$$
$$5 + 15i + 105h + 455g + 1365f = 2655 \text{ 4}^{e} \text{ nombre.}$$
$$5 + 20i + 190h + 1140g + 4845f = 7780 \text{ 5}^{e} \text{ nombre.}$$

On nomme chacune de ces expreſſions une *égalité;* & les quantités qui ſont de chaque côté du ſigne =, ſont nommées les deux *membres* de l'égalité; le premier membre eſt la quantité totale qui eſt à gauche de $=$, & le ſecond membre eſt la quantité qui eſt à droite de $=$. Ainſi l'on aura autant d'égalités qu'on a de nombres donnés.

5°. Il faut prendre de ſuite les différences des premiers membres de ces égalités, & en même-temps les différences des ſeconds membres qui ſont déja trouvés par la premiere opération; & en faire des *égalités* dont les 1[ers] membres ſoient les différences des 1[ers] membres des égalités précédentes, & dont les 2[ds] membres ſoient les différences des 2[ds] membres des mêmes égalités; on les nommera les *ſecondes égalités*, leſquelles ſeront faites des premieres différences.

Il faut de même prendre les différences de ces premieres différences, ſçavoir les différences des premiers membres des ſecondes égalités, & en même-tems les différences des ſeconds membres; ce qui fera de *troiſiémes égalités* qui contiendront les ſecondes différences.

Il faut continuer de prendre de la même maniere les différences des troiſiémes égalités, des quatriémes, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé aux égalités des différences égales. Les voici de ſuite dans notre Exemple, où l'on répétera les premieres égalités.

Premieres égalités faites des nombres donnés.

$$\begin{aligned}
&5 = 5\\
&5 + 5i + 10h + 10g + 5f = 80\\
&5 + 10i + 45h + 120g + 210f = 630\\
&5 + 15i + 105h + 455g + 1365f = 2655\\
&5 + 20i + 190h + 1140g + 4845f = 7780
\end{aligned}$$

Secondes égalités faites des premieres différences.

$$\begin{aligned}
&5i + 10h + 10g + 5f = 75\\
&5i + 35h + 110g + 205f = 550\\
&5i + 60h + 335g + 1155f = 2025\\
&5i + 85h + 685g + 3480f = 5125
\end{aligned}$$

Troiſiémes égalités faites des ſecondes différences.

$$\begin{aligned}
&25h + 100g + 200f = 475\\
&25h + 225g + 950f = 1475\\
&25h + 350g + 2325f = 3100
\end{aligned}$$

Quatriémes égalités faites des troiſiémes différences.

$$\begin{aligned}
&125g + 750f = 1000\\
&125g + 1375f = 1625
\end{aligned}$$

Cinquiémes & dernieres égalités faites des quatriémes différences qui ſont égales.

$$625f = 625$$

6°. Les *égalités* prescrites dans l'article précédent, servent à déterminer toutes les lettres indéterminées k, i, h, g, f de la formule qui représente tous les termes de la *suite* proposée; c'est-à-dire qu'elles servent à trouver les valeurs de chacune de ces indéterminées, par rapport à chacun des Exemples auxquels on peut appliquer la Méthode. Voici comment.

Il faut prendre la premiere des dernieres égalités, s'il y en a plusieurs, qui ne contiendra pas d'autres indéterminées que f; & diviser chacun de ses membres par le nombre par lequel f est multipliée; & après cette division, le second membre sera la valeur de f.

Dans notre Exemple, où il n'y a que la seule derniere égalité $625 f = 625$, il faut diviser chaque membre par 625, & l'on aura $f = 1$. Ainsi 1 est la valeur de f.

Il faut substituer la valeur de f, qu'on vient de découvrir dans la premiere des égalités de la colonne qui précéde immédiatement les dernieres; & il ne restera après cette substitution, dans cette premiere égalité, que la seule indéterminée g. Il faut mettre la quantité connue, qui n'a point d'indéterminée du premier membre de cette égalité, dans le second membre sous un signe opposé, & l'effacer du premier membre; & après cela le premier membre n'aura que la seule grandeur formée de g multipliée par un nombre connu; il faut en diviser chaque membre par ce nombre connu, par lequel g est multipliée; & après la division, le second membre contiendra la valeur de g.

Dans notre Exemple, ayant mis 1 à la place de f dans la premiere des 4es égalités, qui est $125 g + 750 f = 1000$, elle devient $125 g + 750 = 1000$. On effacera la quantité connue 750 du premier membre, & on l'écrira dans le second membre avec un signe opposé; & l'égalité sera $125 g = 1000 - 750 = 250$. On divisera chaque membre par 125, & l'on trouvera $g = 2$. Ainsi 2 est la valeur de g. Il faut substituer les valeurs des indéterminées f & g déja découvertes, dans la premiere des égalités de la colonne qui précéde celle sur laquelle on vient d'opérer, & elle n'aura après la substitution que la seule indéterminée h; on effacera les quantités où n'est point h, & qui sont toutes connues, du premier membre; on les écrira sous des signes opposés dans le second membre. On divisera ensuite chaque membre de l'égalité par le nombre par lequel h eſt multipliée ; & après la diviſion, le ſecond membre de l'égalité contiendra la valeur de h. On trouvera la valeur de l'indéterminée ſuivante i, en ſubſtituant de la même maniere les valeurs de f, g, h, déja découvertes, dans la premiere des égalités de la colonne qui précéde, effaçant enſuite du premier membre toutes les quantités connues où n'eſt pas i, & les écrivant dans le ſecond membre avec des ſignes oppoſés, & en diviſant après cela chaque membre de l'égalité par le nombre par lequel i eſt multipliée ; & après la diviſion, le ſecond membre contiendra la valeur de i; par laquelle valeur de i & des autres déja découvertes de f, g, h, on trouvera de la même maniere la valeur de k; & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on ait découvert la valeur de la derniere des indéterminées par la premiere des ſecondes égalités.

Dans notre Exemple on ſubſtituera 1 à la place de f, & 2 à la place de g dans la premiere des 3[es] égalités $25h + 100g + 200f = 475$, qui deviendra $25h + 200 + 200 = 475$. On effacera les quantités $+ 200 + 200$ du premier membre, & on les écrira dans le ſecond avec des ſignes oppoſés ; & l'égalité ſera $25h = 475 - 200 - 200 = 75$. On diviſera chaque membre par 25, & l'on aura $h = 3$. Ainſi 3 eſt la valeur de h.

On ſubſtituera 1 à la place de f, 2 à la place de g, 3 à la place de h dans la premiere des ſecondes égalités $5i + 10h + 10g + 5f = 75$, & elle deviendra $5i + 30 + 20 + 5 = 75$. On effacera $+ 30 + 20 + 5 = 55$ du premier membre, & on l'écrira dans le ſecond avec un ſigne oppoſé, & l'on aura $5i = 20$. Enfin on diviſera chaque membre par 5, & l'on aura $i = 4$.

AVERTISSEMENT.

On doit remarquer que d'effacer des grandeurs dans un des membres d'une égalité, & les écrire dans l'autre membre avec un ſigne oppoſé, cela ſe nommera, pour abréger, faire paſſer ces grandeurs d'un membre dans l'autre, *ou les* tranſpoſer; *& que par cette opération on ne fait que retranher des grandeurs égales de grandeurs égales, ou ajouter des grandeurs égales à des grandeurs égales, & que les grandeurs qui viennent de ces opérations ſont égales.*

Comme l'on a opéré dans cet Exemple ſur la premiere des ſecondes égalités, toutes les indéterminées de la formule f, g, h, i & k ſont déterminées par rapport à cet Exemple ; & leurs valeurs ſont $f = 1$, $g = 2$, $h = 3$, $i = 4$, $k = 5$. Ainſi il ne reſte plus qu'à ſe ſervir de ces valeurs pour découvrir par la formule tous les nombres que l'on cherche. En voici la maniere.

7°. Il faut écrire le premier des nombres donnés pour le premier terme de la *ſuite* qu'on cherche, & pour avoir tous les ſuivans l'un après l'autre ; il faut ſubſtituer par ordre dans la formule de la colonne *principale*, laquelle formule repréſente tous les termes de la *ſuite* propoſée, les *indices* 2, 3, 4, 5, &c. de tous les rangs parallèles des termes qu'on cherche, à la place de n, & ſubſtituer en même-temps les valeurs des indéterminées f, g, h, i, k, &c. & ajouter enſemble toutes les grandeurs que fera découvrir la formule par les ſubſtitutions du même *indice ;* les ſommes priſes par ordre ſeront tous les termes de la *ſuite* qu'on cherchoit.

Dans notre Exemple il faut écrire le premier nombre donné 5 pour le premier terme de la *ſuite* qu'on cherche.

Subſtituer l'*indice* 2 du rang du ſecond terme à la place de n, & les valeurs de f, g, h, i, k, dans la formule $k + \frac{n-1}{1} i + \frac{n+2}{1} \times \frac{n-1}{2} h + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3} g + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4} f$; ajouter toutes les grandeurs que donneront ces ſubſtitutions, & la ſomme 9 ſera le ſecond terme qu'on cherche.

Il faut ſubſtituer de même l'*indice* 3 à la place de n ; & les valeurs de f, g, h, i, k, dans la formule ; & la ſomme 16 des grandeurs qu'on trouvera, ſera le troiſiéme terme.

En ſubſtituant de la même maniere par ordre dans la formule, les *indices* 4, 5, 6, &c. à la place de n, & les valeurs de f, g, h, i, k à la place de ces lettres, & prenant par ordre les ſommes des grandeurs découvertes par la ſubſtitution de chacun des *indices* des rangs, on aura 28, 48, 80, 129, 201, 303, 443, 630, 874, 1186, 1578, 2063, 2655, 3369, 4221, 5228, 6408, 7780, pour les termes ſuivans que l'on cherchoit.

REMARQUES.

I.

776. CEUX qui voudroient former eux-mêmes la plûpart des

Tables dont on a besoin dans les Mathématiques-pratiques, doivent se rendre très-familiere cette Méthode des interpositions; elle facilite & abrége extrêmement le calcul de toutes les Tables qu'on peut assujettir à cette Méthode; & il ne faut découvrir par les Méthodes ou par les formules qui servent à trouver tous les termes de ces Tables, il ne faut, dis-je, en trouver que très-peu de termes à une certaine distance égale les uns des autres, & chercher tous les termes moyens par la Méthode des interpositions.

II.

777. Quand on se sera rendu cette Méthode familiere, on verra clairement qu'il faut qu'on ait au moins autant de termes donnés de la suite qu'on cherche, qu'il y a d'unités dans l'*indice* des différences égales, & un de plus. Ainsi si les différences égales sont les 6^{es} différences, il faut avoir au moins 7 termes donnés; si elles sont les 5^{es} différences, il faut au moins 6 termes donnés; si elles sont les 4^{es}, il faut au moins 5 termes donnés, &c. On verra aussi clairement
* 772. par la formation * de la Table, & par la † construction de la
† 774. formule de la colonne *principale*, que cette formule représente par le moyen des indéterminées n, f, g, h, i, k, &c. chacun des nombres de la *suite* qu'on cherche; que cette seule formule de la colonne *principale* suffit pour la pratique de la Méthode; que la Table ne sert que pour aider l'imagination, & pour faire entrer dans l'invention même de la Méthode; & que la maniere de découvrir les valeurs des indéterminées n'est que l'application de cet axiome : *Des grandeurs étant égales, si on leur ajoute des grandeurs égales, ou si l'on en retranche des grandeurs égales, ou si on les multiplie ou qu'on les divise par des grandeurs égales, les grandeurs qui naîtront de ces opérations seront toujours égales.*

III.

778. Les termes dont la plûpart des Tables des Mathématiques-pratiques sont composées, ne sont que dans une exactitude sensible, de maniere que la différence d'avec les termes d'une exactitude géométrique, étant insensible, on en tire les mêmes avantages qu'on tireroit des termes véritablement exacts. Dans la plûpart des Tables, les termes qui

en font la *ſuite*, ne ſçauroient même être exacts, étant la plûpart incommenſurables, & on ne peut en avoir que les valeurs approchées ſi près, que l'erreur ſoit inſenſible. Quand on applique la Méthode des interpoſitions à découvrir les termes de ces Tables, il faut faire enſorte que les termes qu'on trouvera par cette Méthode, ſoient les mêmes que les termes qu'on trouveroit par les Méthodes d'approximation qui leur ſont propres. Pour cela il eſt bon dans la Méthode des interpoſitions, de calculer les termes qu'on cherche à quelques rangs de chiffres de plus que ne doit être le nombre des rangs de chiffres qu'on doit donner à chaque terme, en l'écrivant dans la Table.

I V.

779. On doit auſſi bien remarquer, afin que la Méthode puiſſe être appliquée à tous les cas qu'on lui peut aſſujettir, que la ſouſtraction qu'il faut faire des termes de chaque colonne les uns des autres, pour avoir les différences des termes, eſt ſuppoſée, dans la *principale* colonne des nombres qu'on cherche, ſe faire en deſcendant, c'eſt-à-dire, on y ſuppoſe que les termes de la *principale* colonne vont en croiſſant, & qu'on retranche le premier du ſecond pour avoir la premiere différence; qu'on retranche le ſecond du troiſiéme pour avoir la ſeconde des premieres différences; & ainſi de ſuite.

Cette ſuppoſition de la maniere de faire la ſouſtraction dans la colonne *principale* pour avoir les premieres différences, détermine la maniere de faire la ſouſtraction dans toutes les colonnes des différences. Ainſi dans chaque colonne des différences on ôte le premier terme du ſecond, le ſecond du troiſiéme, le troiſiéme du quatriéme, & ainſi de ſuite.

D'où il ſuit, 1°. que, quand les termes d'une colonne ſont tous poſitifs & vont en augmentant, leurs différences ſont poſitives; ainſi la colonne faite de ces différences a ſes termes poſitifs. Si les termes qui vont en augmentant étoient négatifs, comme on retrancheroit le plus petit négatif du plus grand négatif, les reſtes ou différences ſeroient encore négatives. Ainſi la colonne faite de ces différences auroit ſes termes négatifs.

2°. Que quand les termes de quelque colonne, ou de toutes, vont en diminuant, si ces termes d'une même colonne sont positifs ; comme l'on ôte le plus grand du plus petit, les restes qui font la colonne des différences de ces termes sont négatifs. Car, par exemple, pour ôter $+3b$ de $+2b$, il est évident qu'il faut écrire $+2b-3b=-b$. Si les termes que l'on ôte les uns des autres dans la même colonne, & qui vont en diminuant, sont négatifs ; comme l'on ôte le plus grand négatif du moindre négatif, les restes des soustractions doivent être positifs. Car pour ôter $-3b$ de $-2b$, il faut écrire $-2b+3b=+b$. Ainsi la colonne des différences faites de ces restes, a ses termes positifs. On verra l'usage de cette remarque dans l'application de la Méthode à la formation des Tables des logarithmes.

Mais les Commençans doivent remarquer que, quand on retranche un nombre plus grand, soit positif, soit négatif, d'un moindre, soit positif, soit négatif, il faut toujours ôter le plus petit du plus grand, & le reste après ce retranchement est la différence qu'on cherche, à qui l'on donne le signe de + ou de — qui lui convient, selon la remarque qu'on vient de faire.

Application de la Méthode des interpositions à la formation des Tables des logarithmes.

780. POUR se servir de la Méthode des interpositions à former les Tables ordinaires des logarithmes, il faut trouver par
* 749 les formules * des logarithmes un certain nombre de loga-
& 767. rithmes éloignés d'une même distance les uns des autres ;
* 761. & les réduire * aux logarithmes des Tables ; & chercher ensuite, par la Méthode des interpositions, les logarithmes moyens entre ces logarithmes déja découverts.

Les plus commodes logarithmes pour former promptement & facilement les Tables ordinaires des logarithmes des nombres, sont les logarithmes de 97, 98, 99, 101, 102,
* 749 103. Ainsi il faut trouver par * les formules les logarithmes
& 767. de ces six nombres, & les réduire † aux logarithmes des
† 761. Tables. On verra après l'Exemple suivant, comment avec ces logarithmes & les logarithmes moyens qu'on va découvrir, on peut former les Tables des logarithmes.

SECOND

Page 209, vis-à-vis second Exemple de la Méthode des Interpositions.

EXEMPLE FIGURÉ DE LA MÉTHODE DES INTERPOSITIONS.

Logarithmes donnés.	*Premieres différences.*	*Secondes différences.*	*3es différences.*	*4es différences.*	*5es différences égales.*
log. 97 = 19867717343					
log. 98 = 19912260757	+ 44543414				
log. 99 = 19956351946	+ 44091189	− 452225			
log. 100 = 20000000000	+ 43648054	− 443135	+ 9090		
log. 101 = 20043213738	+ 43213738	− 434316	+ 8819	− 271	
log. 102 = 20086001718	+ 42787980	− 425758	+ 8558	− 261	+ 10
log. 103 = 20128372247	+ 42370529	− 417451	+ 8307	− 251	+ 10

Formule qui représente les logarithmes qu'on cherche, & les logarithmes donnés.

$$1l + \frac{n-1}{1}k + \frac{n-2}{1} \times \frac{n-1}{2}i + \frac{n-3}{1} \times \frac{n-2}{2} \times \frac{n-1}{3}h + \frac{n-4}{1} \times \frac{n-3}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-1}{4}g + \frac{n-5}{1} \times \frac{n-4}{2} \times \frac{n-3}{3} \times \frac{n-2}{4} \times \frac{n-1}{5}f.$$

Premieres égalités faites des nombres donnés, & de leurs expressions indéterminées déduites de la formule.

$$\begin{array}{l}
1l = 19867717343 \\
1l + 10k + 45i + 120h + 210g + 252f = 19912260757 \\
1l + 20k + 190i + 1140h + 4845g + 15504f = 19956351946 \\
1l + 30k + 435i + 4060h + 27405g + 142506f = 20000000000 \\
1l + 40k + 780i + 9880h + 91390g + 658008f = 20043213738 \\
1l + 50k + 1225i + 19600h + 230300g + 2118760f = 20086001718 \\
1l + 60k + 1770i + 34220h + 487635g + 5461512f = 20128372247
\end{array}$$

Secondes égalités faites des premieres différences.

$$\begin{array}{l}
10k + 45i + 120h + 210g + 252f = + 44543414 \\
10k + 145i + 1020h + 4635g + 15252f = + 44091189 \\
10k + 245i + 2920h + 22560g + 127002f = + 43648054 \\
10k + 345i + 5820h + 63985g + 515502f = + 43213738 \\
10k + 445i + 9720h + 138910g + 1460752f = + 42787980 \\
10k + 545i + 14620h + 257335g + 3342752f = + 42370529
\end{array}$$

Troisiémes égalités faites des secondes différences.

$$\begin{array}{l}
100i + 900h + 4425g + 15000f = - 452225 \\
100i + 1900h + 17925g + 111750f = - 443135 \\
100i + 2900h + 41425g + 388500f = - 434316 \\
100i + 3900h + 74925g + 945250f = - 425758 \\
100i + 4900h + 118425g + 1882000f = - 417451
\end{array}$$

4es égalités faites des 3es différences.

$$\begin{array}{l}
1000h + 13500g + 96750f = + 9090 \\
1000h + 23500g + 276750f = + 8819 \\
1000h + 33500g + 556750f = + 8558 \\
1000h + 43500g + 936750f = + 8307
\end{array}$$

5es égalités faites des 4es différences.

$$\begin{array}{l}
10000g + 180000f = - 271 \\
10000g + 280000f = - 261 \\
10000g + 380000f = - 251
\end{array}$$

6es égalités faites des 5es différences qui sont égales.

$$\begin{array}{l}
100000f = + 10 \\
100000f = + 10
\end{array}$$

Valeurs des indéterminées f, g, h, i, k, l, *qu'on déduit de ces égalités.*

$f = + \frac{1}{10000} = + 0.0001$, $g = - 0.0289$, $h = + 9.470485$, $i = - 4606.22054$, $k = + 4474956.35099$, $l = + 19867717343$.

En substituant successivement dans la formule les *indices* 2, 3, 4, 5, &c. des rangs des logarithmes moyens qu'on cherche, & en même-temps les valeurs des indéterminées f, g, h, i, k, l, on trouve les logarithmes qu'on cherchoit.

log. 97 = 19867717343	log. $97\frac{5}{10}$ = 19890046157	
log. $97\frac{1}{10}$ = 19872192299	log. $97\frac{6}{10}$ = 19894498177	
log. $97\frac{2}{10}$ = 19876662649	log. $97\frac{7}{10}$ = 19898945637	&c.
log. $97\frac{3}{10}$ = 19881128403	log. $97\frac{8}{10}$ = 19903388548	
log. $97\frac{4}{10}$ = 19885589569	log. $97\frac{9}{10}$ = 19907826918	

En ajoutant 1 à la *caractéristique* de chacun (ce qui est la même chose * que d'ajouter à chacun le logarithme de 10) ils deviennent * les logarithmes de 970, 971, 972, 973, 974, &c. jusqu'à 1030.

* 693.
* 657.

SECOND EXEMPLE DE LA MÉTHODE DES INTERPOSITIONS,

Où l'on voit la maniere de l'employer à former les Tables ordinaires des logarithmes.

781. LES logarithmes des nombres 97; 98, 99, 100, 101, 102, 103, étant donnés tous réduits aux Tables, il faut trouver les logarithmes des nombres moyens entre ces nombres donnés, de maniere qu'il y ait neuf moyens entre le premier & second, neuf autres entre le second & le troisiéme, & ainsi de suite. C'est-à-dire, il faut trouver les logarithmes des nombres $97\frac{1}{10}$, $97\frac{2}{10}$, $97\frac{3}{10}$, $97\frac{4}{10}$, $97\frac{5}{10}$, $97\frac{6}{10}$, $97\frac{7}{10}$, $97\frac{8}{10}$, $97\frac{9}{10}$ de $98\frac{1}{10}$, $98\frac{2}{10}$, $98\frac{3}{10}$, $98\frac{4}{10}$, $98\frac{5}{10}$, $98\frac{6}{10}$, $98\frac{7}{10}$, $98\frac{8}{10}$, $98\frac{9}{10}$, & de même entre les autres nombres donnés.

1°. Il faut écrire les logarithmes donnés les uns sous les autres dans une même colonne, en prendre les différences 1res, 2es, 3es, 4es & 5es; ces dernieres sont égales sensiblement; les écrire en autant de colonnes à côté de la premiere colonne, comme on le voit ici à côté, & faire négatives les 2es & 4es différences, & les autres positives, suivant la quatriéme Remarque.

2°. Puisque ce sont les 5es différences qu'on suppose égales, il faut s'imaginer que la colonne B de la Table * est la princi- * 772.
pale; que les termes de cette colonne, continuée autant qu'il faut en descendant, représentent par ordre les logarithmes donnés & ceux que l'on cherche; & que la formule de la colonne B, qui est $1l + \frac{n-1}{1}k + \frac{n-2}{1}\times\frac{n-1}{2}i + \frac{n-3}{1}\times\frac{n-2}{2}\times\frac{n-1}{3}h + \frac{n-4}{1}\times\frac{n-3}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-1}{4}g + \frac{n-5}{1}\times\frac{n-4}{2}\times\frac{n-3}{3}\times\frac{n-2}{4}\times\frac{n-1}{5}f$, représente aussi d'une maniere indéterminée chacun des logarithmes qu'on cherche, & chacun des logarithmes donnés; & qu'enfin les colonnes C, D, E, F, G, de la Table, continuées autant qu'il faudroit, représentent les différences 1res, 2es, 3es, 4es & 5es de la suite des logarithmes qu'on cherche.

3°. Il faut supposer le logarithme de 97 représenté par l'indéterminée l, qui devient par-là déterminée; & comme il doit y avoir neuf logarithmes moyens entre les donnés pris deux à deux, l'indice du rang du logarithme donné de 98 est 11 ; 21 est l'indice du rang du logarithme de 99 ; 31 est celui du logarithme de 100 ; 41 celui du logarithme de 101 ; 51 est celui du logarithme de 102 ; enfin 61 est l'indice du rang du logarithme de 103.

4°. Il faut substituer successivement ces indices à la place de n dans la formule, & former les 1res égalités des nombres donnés avec leurs expressions déduites de la formule.

5°. On prendra les différences des premiers membres de ces égalités, & en même-temps les différences des seconds membres, qui sont déja toutes trouvées par la premiere opération, & l'on en fera les secondes égalités. On fera de même les égalités des 2es différences, des 3es, des 4es, & des 5es, comme on les voit dans l'Exemple figuré.

6°. Il faut à présent trouver les valeurs des indéterminées f, g, h, i, k. On aura la valeur de f en divisant chacun des deux membres de la 1re des 6es égalités par 100000, & il viendra $f = \frac{1}{10000} = 0.0001$.

On substituera cette valeur de f à la place de f dans la 1re des 5es égalités ; on fera passer la quantité connue où n'est pas g, dans le second membre ; & on divisera chaque membre par le nombre 10000 par lequel g est multiplié ; & l'on aura $g = \frac{-289}{10000} = -0.0289$.

On substituera les valeurs de f & de g dans la 1re des 4es égalités ; on fera passer les grandeurs connues du premier membre dans le second ; on divisera ensuite chaque membre par le nombre 1000 par lequel h est multipliée, & l'on trouvera $h = + 9.470485$.

On substituera les valeurs de f, g, h, dans la 1re des 3es égalités ; on fera ensuite passer les grandeurs connues où n'est pas i, du premier membre dans le second ; on divisera chaque membre par le nombre 100 par lequel i est multipliée, & il viendra $i = - 4606.22054$.

Enfin on substituera les valeurs de f, g, h, i, dans la 1re des 2es égalités, on fera passer les grandeurs connues où n'est pas k, du premier membre dans le second ; on divisera ensuite chaque membre par le nombre 10 par lequel k est multipliée, & l'on trouvera $k = + 4474956.35099$; Et l'on aura les valeurs de toutes les indéterminées f, g, h, i, k, l.

7°. Pour avoir tous les logarithmes qu'on cherche, il n'y a plus qu'à substituer successivement dans la formule, à la place de n, les indices 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. jusqu'à 61, des rangs des logarithmes moyens qu'on cherche, & y substituer en même-temps les valeurs des indéterminées f, g, h, i, k, l; faire après la substitution, pour chaque logarithme, une somme des quantités positives, & une autre des négatives; & retrancher cette derniere de la premiere, & le reste sera le logarithme cherché. Et comme l'on trouve des parties décimales dans chacun de ces restes, quand le chiffre des 10es est moindre que 5, on néglige ces parties décimales; quand le chiffre des 10es surpasse 5, on ajoute l'unité au chiffre des unités du logarithme; & l'on néglige toutes les autres parties décimales.

Il seroit inutile d'écrire ici les opérations de la substitution pour chaque logarithme moyen. Les voici seulement pour deux logarithmes, afin de servir d'exemples.

Pour le logarithme de $97\frac{8}{10}$, l'indice du rang est $9 = n$.

$$\begin{array}{lr}
+ & 19897717343 = +l. \\
+ & 35799650.80792 = +8k \\
+ & 530.34516 = +56h \\
+ & 0.00560 = +56f \\
\hline
+ & 19903517524.15868 = l + 8k + 56h + 56f \\
- & 128976.19812 = -28i - 70g \\
\hline
\end{array}$$

$+ 19903388547.96056$, logarithme de $97\frac{8}{10}$.

Négligeant les parties décimales, & ajoutant 1 au chiffre des unités à cause de $\frac{9}{10}$,

$+ 19903388548$, logarithme de $97\frac{8}{10}$.

Pour le logarithme de $97\frac{9}{10}$, l'indice du rang est $10 = n$.

$$\begin{array}{lr}
+ & 19867717343 = +l \\
+ & 40274607.15891 = +9k \\
+ & 795.52074 = +84h \\
+ & 0.01260 = +126f \\
\hline
+ & 19907992745.69225 = +l + 9k + 84h + 126f \\
- & 165827.58084 = -36i - 126g \\
\hline
\end{array}$$

$+ 19907826918.11141$, logarithme de $97\frac{9}{10}$.

Négligeant les parties décimales,

19907826918, logarithme de $97\frac{9}{10}$.

REMARQUES,

I.

782. QUAND on a trouvé les logarithmes moyens entre les logarithmes de 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, c'eſt-à-dire, les neuf moyens qui ſont entre ces logarithmes pris deux à deux, il faut ajouter l'unité à la *caractériſtique* de chacun,
*693. (ce qui eſt la même choſe * que d'ajouter à chacun le loga-
*657. rithme de 10); & ils deviendront * les logarithmes de 970, 971, 972, 973, &c. juſqu'à 1030; & tous ces logarithmes ſont de l'eſpéce des Tables.

II.

783. Pour continuer la formation des Tables avec les logarithmes déja découverts, il faut, par la Méthode des interpoſitions, chercher les logarithmes moyens entre tous les logarithmes qu'on vient de trouver, depuis 970 juſqu'à 1000; ſçavoir, neuf moyens entre ces logarithmes pris de ſuite deux à deux; & en ajoutant l'unité à la *caractériſtique* de chacun, on aura tous les logarithmes des Tables, depuis 9700 juſquà 10000.

On peut déduire des logarithmes qu'on ſuppoſe déja découverts par la Méthode des interpoſitions, en n'employant que de ſimples additions, ſouſtractions, multiplications & diviſions; on peut, dis-je, en déduire les logarithmes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 97, ou qui ſont au-deſſous
*664. de 100. Voici comment. $\sqrt[10]{1024} = 2$. Ainſi $\frac{l.\,1024}{10} = {}^{*}\,l.\,2$; c'eſt-à-dire, diviſant par 10 le logarithme de 1024 qui eſt déja découvert, le quotient ſera le logarithme de 2. Ayant
*663. le logarithme de 2, on a * par de ſimples multiplications les logarithmes de toutes les puiſſances de 2, comme de 4, 8, 16, 32, &c. Il en eſt de même de toutes les puiſſances des autres nombres.

$\sqrt[4]{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3$. Ainſi $\frac{l.\,8 + l.\,9963 - l.\,984}{4} = l.\,3$. Ayant les loga-
*657. rithmes de 2 & de 3, on a * par de ſimples additions les logarithmes de tous les nombres qui peuvent être formés par la multiplication de 2 & de 3, & de leurs puiſſances. Il en eſt de même des autres nombres.

$\frac{10}{2} = 5$. Ainſi $l.\,10 - l.\,2 = l.\,5$.

$\sqrt[2]{\frac{98}{2}} = 7$. Par conſéquent $\frac{l.\,98 - l.\,2}{2} = l.\,7$.

$\frac{99}{9} = 11$. L'on aura donc *l*. 99 — *l*. 9 = l. 11.
$\frac{1001}{7 \times 11} = 13$. D'où l'on aura *l*. 1001 — *l*. 7 — *l*. 11 = *l*. 13.
$\frac{102}{6} = 17$. Ainſi *l*. 102 — *l*. 6 = *l*. 17.
$\frac{988}{4 \times 13} = 19$. Donc *l*. 988 — *l*. 4 — *l*. 13 = *l*. 19.
$\frac{9936}{16 \times 27} = 23$. L'on aura donc *l*. 9936 — *l*. 16 — *l*. 27 = *l*. 23.
$\frac{986}{2 \times 17} = 29$. Par conſéquent *l*. 986 — *l*. 2. — *l*. 17 = *l*. 29.
$\frac{992}{32} = 31$. Ainſi *l*. 992 — *l*. 32 = *l*. 31.
$\frac{999}{27} = 37$. Ainſi *l*. 999 — *l*. 27 = *l*. 37.
$\frac{984}{24} = 41$. Ainſi *l*. 984 — *l*. 24 = *l*. 41.
$\frac{989}{23} = 43$. Ainſi *l*. 989 — *l*. 23 = *l*. 43.
$\frac{987}{27} = 47$. Ainſi *l*. 987 — *l*. 27 = *l*. 47.
$\frac{9911}{11 \times 17} = 53$. Ainſi *l*. 9911 — *l*. 11 — *l*. 17 = *l*. 53.
$\frac{9971}{13 \times 13} = 59$. Ainſi *l*. 9971 — 2 *l*. 13 = *l*. 59.
$\frac{9882}{2 \times 81} = 61$. Ainſi *l*. 9882 — *l*. 2 — *l*. 81 = *l*. 61.
$\frac{9849}{3 \times 49} = 67$. Ainſi *l*. 9849 — *l*. 3 — *l*. 49 = *l*. 67.
$\frac{994}{14} = 71$. Ainſi *l*. 994 — *l*. 14 = *l*. 71.
$\frac{9928}{8 \times 17} = 73$. Ainſi *l*. 9928 — *l*. 8 — *l*. 17 = *l*. 73.
$\frac{9954}{7 \times 18} = 79$. Ainſi *l*. 9954 — *l*. 7 — *l*. 18 = *l*. 79.
$\frac{996}{12} = 83$. Ainſi *l*. 996 — *l*. 12 = *l*. 83.
$\frac{9968}{7 \times 16} = 89$. Ainſi *l*. 9968 — *l*. 7 — *l*. 16 = *l*. 89.

Les logarithmes de tous les nombres premiers moindres que 97 étant trouvés, on en tire facilement par de ſimples additions, les logarithmes de tous les autres nombres au-deſſous de 97. Si l'on cherche enſuite par la Méthode des interpoſitions, entre les logarithmes des nombres depuis 10 juſqu'à 97, pris deux à deux, neuf logarithmes, on aura les logarithmes de tous les nombres depuis 1 juſqu'à 1030. Si l'on cherche par la même Méthode des interpoſitions les logarithmes moyens entre les logarithmes des nombres 103, 104, 105, & ainſi de ſuite juſqu'à 970, (cherchant neuf moyens entre les logarithmes connus de ces nombres pris de ſuite deux à deux), on aura la Table des logarithmes juſqu'à 10000.

Il eſt facile de continuer la Table par les Méthodes de cette Remarque, juſqu'aux logarithmes de tels nombres qu'on voudra.

AVERTISSEMENT.

LES logarithmes ſont devenus de grand uſage dans les calculs des grands nombres, comme dans ceux de l'Aſtronomie, de la Géométrie pratique, &c. à cauſe de la facilité qu'ils y apportent, en faiſant changer les grandes multiplications en additions, les longues diviſions en ſouſtractions, la formation des puiſſances des grands nombres en des multiplications très-ſimples, & l'extraction des racines des grands nombres en des diviſions très-faciles. Cependant il y a dans les calculs par logarithmes, toujours quelqu'erreur, qui eſt à la vérité peu ſenſible dans les opérations ordinaires de la Géométrie pratique, & de pluſieurs autres parties des Mathématiques ſenſibles. Plus les logarithmes ſont petits, c'eſt-à-dire, moins ils contiennent de rangs de chiffres, & plus l'erreur des calculs par logarithmes eſt grande. Ainſi dans les calculs où il faut beaucoup de préciſion & de juſteſſe, comme dans ceux de l'Aſtronomie, on ſe ſert des plus grands logarithmes que l'on a d'imprimés, qui ſont dans les Tables *in-folio d'Ulacq*, & qui ont dix rangs de chiffres, ſans y comprendre la *caractériſtique*. L'erreur qui ſe trouve dans les calculs par logarithmes, devenant plus inſenſible plus il y a de rangs de chiffres dans les logarithmes, il ſeroit à ſouhaiter pour les Aſtronomes, qu'on en eût encore de plus grands que ceux dont on s'eſt ſervi juſqu'ici. C'eſt pour encourager ceux qui voudroient donner de nouvelles Tables des logarithmes qui euſſent un grand nombre de rangs de chiffres, qu'on leur a diminué la plûpart du travail, en leur donnant une conſtruction aiſée de logarithmes à tant de rangs de chiffres qu'il leur plaira.

FIN.

TABLE DES SECTIONS.

LIVRE III.

APPROBATION.

J'AI lû par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit intitulé: *La Science du Calcul des Grandeurs en général*, &c. Quoiqu'il y ait dans le Public plusieurs Ouvrages sur la même matiere, on avoit besoin de celui ci, où tout est traité avec l'étendue nécessaire, & avec toute l'exactitude & toute la clarté possibles. Fait à Paris le 15 de Mars 1711.

Signé, SAURIN.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre; à nos amés & féaux Conseillers, les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé GABRIEL-FRANÇOIS QUILLAU Fils, Imprimeur & Libraire-Juré de l'Université à Paris, nous ayant fait remontrer qu'il souhaiteroit imprimer ou faire imprimer, & donner au Public *La Science du Calcul des Grandeurs, ou les Elémens des Mathématiques & l'Analyse démontrée*, s'il

Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége sur ce nécessaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caractéres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modele, sous le contre-Scel des Présentes. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement ledit Exposant, Nous lui avons permis & permettons, par ces Présentes, de faire imprimer ledit Ouvrage, ci-dessus spécifié, en un ou plusieurs Volumes, conjointement ou séparément, & autant de fois que bon lui semblera, sur papier & caracteres conformes à ladite feuille imprimée & attachée pour modele sous notredit contre-Scel, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes: Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance, comme aussi à tous Libraires-Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ci-dessus exposé, en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns Extraits, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de quinze cent livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles, que l'impression de ce Livre sera faite dans notre Royaume & non ailleurs; & que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant que de l'exposer en vente, le Manuscrit ou Imprimé qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur FLEURIAU D'ARMENONVILLE, Commandeur de nos Ordres; le tout à peine de nullité des Présentes du contenu desquelles Vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement: Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux copies collationées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original: commandons au premier notre Huissier ou Sergent, de faire, pour l'exécution d'icelles, tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, nonobstant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires; car tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le douziéme jour de Décembre, l'an de grace mil sept cent vingt-six, & de notre Regne le douziéme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, DE S. HILAIRE, *avec paraphe.*

Registré sur le Registre VI. de la Chambre Royale des Libraires - Imprimeurs de Paris, N°. 544, fol. 434. *conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février* 1723. *A Paris le dix - neuf Décembre mil sept cent vingt - six.*

Sign, BRUNET, Syndic.

JESUS ✠ MARIA.

NOUS Pierre-François de la Tour, Prêtre & Supérieur Général de la Congrégation de l'Oratoire de JESUS-CHRIST notre Seigneur, Vû par Nous le Privilége du Roi & l'Approbation des Examinateurs, permettons à Jacques Quillau, Imprimeur & Libraire de la Ville de Paris, d'imprimer un Livre intitulé: *La Science du Calcul des Grandeurs en général*, &c. composé par le Pere Charles REYNEAU, Prêtre de notre Congrégation, conformément au Privilége à Nous accordé par les Lettres-Patentes du Roi, en date du 26 Mars 1689, enregistrées au Grand-Conseil le 25 Avril de la même année, par lesquelles il est défendu à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer & vendre aucuns Livres composés par ceux de notre Congrégation, sans notre permission expresse, sous les peines portées par ledit Privilége. Donné à Paris ce second jour de Juin mil sept cent quatorze.

Signé, P. F. DE LA TOUR.