ELEMENS
DE
MATHEMATIQ

ELEMENS

DES

MATHEMATIQUES.

Par M. PIERRE POLYNIER,
Docteur en Medecine.

A PARIS,

Chez { JEAN DE LAULNE rue de la Harpe, proche le College d'Harcour, à l'Image S. Jean-Baptiste.
ET
JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire, rue Galande, proche la rue du Fouare, aux Armes de l'Université.

MDCCIV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE.


MICHAEL DE CHAMILLART. NATUS SEPTIMO APRILIS 1689
Cl. Duflos
Sculp. 1704

A MONSIEUR
LE MARQUIS
DE CHAMILLART,

MONSIEUR,

J'ai l'honneur de vous presenter le premier fruit de mon application aux Mathematiques. Rien ne peut mieux seconder les heureuses dispositions que vous avez pour les grandes choses ; rien ne peut contribuer davantage à fortifier *cette admirable justesse d'esprit dont la Providence vous a si liberalement partagé, que l'étude de ces Sciences; l'équivoque ni le doute n'y peuvent jamais trouver place. Elles presentent toujours à l'esprit des veritez incontestables & liées ensemble par un ordre merveilleux; elles l'accoutument à penser juste sur toutes sortes de matieres, à débrouiller les choses les plus confuses, & à éclaircir les plus obscures. C'est en effet cette exactitude scrupuleuse & parfaite qui fait le merite des Mathematiques; & je croirois avoir réussi heureusement dans cet Ouvrage, s'il étoit digne de votre estime par cet endroit; au moins aura-t-il sur tous les autres qui pourront vous être presentez, l'avantage d'être le premier qui paroisse sous les auspices de votre illustre Nom.*

S'il convenoit à un Geometre d'emprunter le secours de l'Eloquence pour exprimer les veritez qu'il connoît, qu'elle occasion n'aurois-je pas de pu-

blier ces grandes qualitez d'esprit & de cœur qui brillent en vous, & qui vont nous retracer ces rares vertus qui font le merite de votre Famille, & qui sont le principe de son élevation ?

Mais je ne peux m'empécher de vous feliciter sur l'avantage que vous avez, MONSIEUR, d'être né avec les dispositions necessaires, pour être l'imitateur fidele des Exemples de toutes sortes de vertus politiques & morales, que vous avez devant les yeux dans la personne de ce grand Ministre d'Etat votre Illustre Pere qui remplit si dignement au gré du Monarque & de ses Sujets, les deux plus importantes Charges de l'Etat. Le Public a déja de votre part des gages d'une capacité digne de votre Rang. Vous avez donné des preuves éclatantes de la force & de la penetration de votre esprit. On a été surpris dans les épreuves publiques que vous avez données de votre sçavoir, qu'à un âge si peu avancé vous ayez fait des progrés *si considerables dans les belles Lettres & dans l'Eloquence. Les experiences de Physique que vous avez faites vous-même, & toutes celles que j'ai eu l'honneur de faire devant Vous, dont vous avez compris & expliqué les raisons avec une clarté, une facilité, & un plaisir extraordinaire; les Theses de Philosophie que vous avez soutenues avec un applaudissement general, ont fait voir l'excellence de votre jugement, & un genie capable de penetrer dans les Sciences les plus sublimes. Mais on est moins surpris de ces heureux succés de vos études, quand on sçait, quelle est votre docilité, votre zele vif & ardent pour la perfection des Sciences, & des beaux Arts, & pour la protection des Sçavans; cette joye sensible que vous avez toujours eue de pouvoir vous instruire avec eux dans des Conferences frequentes & nombreuses par leur concours : enfin votre pieté sincere, votre modestie sans affectation, & cette aversion constante & genereuse que vous* *avez pour l'orgueil, vice presque inseparable d'une haute fortune.*

Voilà les dispositions de cœur sur lesquelles sont fondez l'estime & l'amour que les Sçavans ont pour vous, les louanges qu'on ne peut se dispenser de vous donner, & ce qui anime le zele avec lequel je suis,

MONSIEUR,

Votre tres-humble & tres-obéïssant serviteur,

P. POLYNIER.

PREFACE.

LA methode que je donne ici, a eu jusques à present un succés si heureux, que parmi un assez bon nombre d'Etudians qui s'en sont servis depuis quelques années, il ne s'en est trouvé aucun qui n'ait témoigné en être fort content : & les progrés que plusieurs ont faits par son moyen dans les Mathematiques, m'ont fait esperer que la liberté que je prens de la donner au Public, ne lui déplairoit pas.

Tous ceux qui commencent à s'appliquer aux Mathematiques, ne voyent pas d'abord où ces Elemens les peuvent conduire. Ceux même qui les ignorent entierement, en font une espece de mépris, les traitent de Sciences vaines & inutiles, d'occupations de gens oisifs, qui passent tout leur temps dans un cabinet à considerer des lignes & des surfaces, incapables de songer à des choses plus solides & plus utiles. C'est pour instruire les uns, &

pour guérir, s'il eſt poſſible, la prévention des autres, que j'ai cru devoir commencer par les reflexions ſuivantes.

DE L'UTILITE' des Mathematiques.

PRemierement je conſidererai la neceſſité où toutes ſortes de perſonnes ſe trouvent d'avoir l'eſprit exact, penetrant, ſitué dans toute la force, la vigueur & l'étenduë dont il eſt capable. Pour être perſuadé que les Mathematiques ſont des ſciences qui produiſent tous ces bons effets; il ſuffit de faire attention à la clarté de leurs principes, à la juſteſſe des raiſonnemens & à l'évidence des demonſtrations qui s'y rencontrent continuellement. Dans ces ſciences l'eſprit s'accoûtume à s'appliquer aux choſes qu'il ſe propoſe à examiner; il s'accoûtume à connoître la verité, à la mettre dans ſon jour, à en établir les principes d'une maniere ſuivie. Cette habitude eſt une choſe qu'on ne peut aſſez eſtimer, c'eſt un fruit d'un prix infini & le plus precieux de nos premieres études. Rien ne rend l'eſprit plus penetrant, plus vif, & plus en état de percer les nuages de l'erreur, que l'exercice où il ſe trouve dans les Mathematiques pour tirer d'un fort petit nombre de principes connus, mille choſes qu'il ne connoiſſoit pas; pour les déduire par ordre, & par un enchaînement admirable. Il eſt rare qu'un eſprit geometrique prenne la vrai-ſemblance pour la verité. Ceux qui ont vû pluſieurs excellens ouvrages de peinture, par exemple, de graveure, de ſculpture, ſçavent beaucoup mieux juger d'une eſtampe, d'une ſtatuë, &c. de même ceux qui ſont accoûtumez à des idées claires, à des demonſtrations exactes, jugent bien mieux du défaut ou de la perfection d'un raiſonnement. Ils ne ſont pas ſi ſujets à ſe laiſſer tromper par quantité de maximes obſcures & incertaines qui ſervent de fondemens aux faux raiſonnemens dont les diſcours des hommes ſont remplis. Ce qui met l'eſprit dans ſa force & dans ſon étenduë, c'eſt de l'accoûtumer à comprendre pluſieurs choſes à la fois, ce ſont ces demonſtrations qu'on ne peut entendre qu'en appercevant la verité de cent autres demonſtrations dont elles dépendent; parce qu'alors l'eſprit eſt obligé de voir en même tems & ce qui éclaire

& ce qui eſt éclairé. En embraſſant tant de choſes à la fois, il porte ſes vûës beaucoup plus loin que dans ſes actions ordinaires. De même qu'en s'accoûtumant à porter des fardeaux peſans, il arrive qu'on ne ſent preſque plus le poids de ceux qui ſont plus legers; c'eſt ainſi qu'en exerçant nôtre eſprit à des veritez abſtraites & difficiles, nous lui rendons faciles toutes celles qui demandent moins d'application. Les exercices du corps font qu'il agît avec plus de ſoupleſſe & d'agilité, l'endurciſſent au travail, & le rendent enfin capable de ſupporter de grandes fatigues; de même auſſi les travaux de l'eſprit tels qu'ils ſe rencontrent dans les Mathematiques, le fortifient & l'accoûtument à concevoir les choſes difficiles, à y donner toute l'attention neceſſaire, le preparent à ſuivre le fil d'un raiſonnement quelque long qu'il ſoit, & empêchent qu'il ne ſe rebute de la multitude des choſes qu'il eſt ſouvent obligé d'examiner pour appercevoir la verité ou la fauſſeté dans des choſes importantes. Ces ſciences ouvrent l'eſprit & l'habituent à bannir tous les doutes & toutes les probabilitez, & à ne donner ſon conſentement qu'à ce qui eſt évident & inconteſtable; parcequ'on ne veut y admettre que des veritez certaines

& des demonſtrations. Le ſoin qu'on a de définir tous les termes obſcurs, afin d'éviter toutes les équivoques & les diſputes de mots; cette adreſſe dont on ſe ſert pour tirer de ce qui eſt connu des choſes ſi cachées & ſi difficiles, font admirer & eſtimer les Mathematiques. Ces ſciences ſurprennent l'eſprit & lui ſont agreables; parceque naturellement nous avons de l'inclination pour connoître la verité, & ici elle paroît toute pure, & ſans aucuns nuages; ici toutes choſes nous portent à l'aimer; on y apprend à la diſcerner; on y trouve ce qui fortifie la raiſon, ce qui étend la vûe de l'eſprit, & enfin ce qui donne lieu d'admirer la grandeur de l'ame de l'homme, & ce qui fait connoître qu'elle ne peut être que toute ſpirituelle & immortelle.

Conſiderons preſentement en particulier l'uſage des Mathematiques dans ce qui regarde la ſocieté des hommes, & faiſons attention à la neceſſité qu'il y a de ſe ſervir des lumieres de ces ſciences. Commençons par les Elemens.

L'Arithmetique eſt d'une utilité ſi univerſelle qu'il ſemble qu'il n'y a perſonne qui n'en puiſſe avoir beſoin: car ſans parler des autres parties des Mathematiques auſquelles elle eſt abſolument neceſſaire:

tout

tout le monde ſçait que les Marchands, les Tréſoriers, Financiers, Banquiers, Caiſſiers ; en un mot ceux qui ſont chargez de recettes de deniers, qui ont des partages ou diſtributions à faire, ſoit en paix, ſoit en guerre, ſoit dans le Bareau, ſoit dans les familles, ne peuvent réuſſir ſans des calculs précis, & ſans des ſupputations exactes, c'eſt-à-dire, ſans la ſcience des nombres.

L'Algebre eſt la ſcience generale des grandeurs. Si on conſidere ſon étendue & la fecondité de ſes demonſtrations, on trouvera qu'elle conduit l'eſprit pas à pas, & enfin lui facilite le moyen de découvrir des veritez les plus cachées. Aprés avoir donné des noms à des grandeurs, on trouve par un art admirable qu'en faiſant certaines additions, ſouſtractions, multiplications, &c. on apperçoit les fondemens & les ſuites des raiſonnemens les plus ſubtils, & on ſe trouve en état de reſoudre facilement les queſtions les plus épineuſes. Rien n'eſt plus propre que l'Algebre pour ménager la capacité & l'étendue de nôtre eſprit pour le faire atteindre aux veritez qu'il cherche, quand même elles ſembleroient être au deſſus de ſes forces. Il y a une infinité d'occaſions où l'Arithmetique & la Geometrie ordinaires ne peuvent donner aucunes lumieres; c'est le seul calcul de l'Algebre qui representant à nôtre esprit plusieurs idées en même tems sous des expressions tres-courtes, lui facilite le moyen de penetrer incomparablement plus loin. Les expressions de l'Algebre occupent si peu nôtre esprit par les sens qu'elles le laissent comme tout entier à lui-même sans le distraire à des choses étrangeres, & l'aident merveilleusement à parcourir avec beaucoup d'adresse, de promptitude & de facilité tous les rapports & toutes les proprietez des grandeurs qu'il examine. Je dirai même que dans les traitez des Mathematiques où ces sciences se trouvent fort approfondies, on trouve un tres-grand nombre de propositions démontrées par la Geometrie, qu'on n'auroit jamais osé tenter par cette voie, si on n'en avoit aperçû la verité par le moyen de l'Algebre qui pour cette raison a merité d'être appellée l'art d'inventer. Et en effet aprés que l'Algebre a sondé le gué, s'il m'est permis de parler ainsi, & qu'elle a découvert & presenté à l'esprit une verité qu'elle cherchoit; il est souvent important, pour une entiere satisfaction, de la rendre sensible à l'imagination par les figures de la Geometrie, & d'éclairer ainsi l'esprit autant qu'il le peut être.

Les belles découvertes de ces derniers tems ſur la reſolution des équations, ſur leur conſtruction, ſur les proprietez admirables des lignes courbes, ſur l'uſage de cette nouvelle Geometrie des Infiniment-Petits qui eſt tant à la mode parmi les ſçavans, ſont des preuves authentiques de l'excellence de l'Algebre.

La Geometrie eſt d'une utilité ſi connue, que les ouvriers même tâchent de ſe la rendre familiere pour meſurer & toiſer leurs ouvrages. S'il y a des partages à faire, ſoit à la ville, ſoit à la campagne ; s'il y a des terres à vendre ou à achepter, c'eſt une neceſſité indiſpenſable d'avoir recours à cette partie des Mathematiques pour en connoître exactement l'étendue, pour determiner & limiter les poſſeſſions d'un chacun, & même ſouvent pour décider pluſieurs procez. A peine pouvons-nous ouvrir les yeux ſans appercevoir des cercles, des triangles, des polygones, des ſpheres, & une infinité d'autres figures geometriques qui ſemblent nous inviter à chercher leurs proprietez. Jamais on n'auroit porté la perfection des Arts juſqu'au point où nous la voyons, s'il n'y avoit eu dans ces derniers tems d'habiles Geometres qui ont fait leurs efforts pour les mettre en cet état. La Geometrie étant generalement approuvée de tout le monde, je n'en dirai pas davantage, j'ajouterai ſeulement qu'il eſt auſſi impoſſible de bien entendre le reſte des Mathematiques ſans ſon ſecours ; qu'il eſt impoſſible de faire la lecture d'un livre ſans connoître les lettres de l'alphabet.

L'Optique eſt la ſcience des proprietez de la lumiere, c'eſt cette partie des Mathematiques qui nous apprend à rendre raiſon des phenomenes de la vûe, qui nous fait voir en quoi conſiſte pluſieurs défauts de l'œil, la maniere de les corriger, même d'augmenter la force de la viſion. C'eſt dans l'Optique qu'on examine les proprietez des refractions & des reflexions de la lumiere. On y apprend la conſtruction des lunettes d'approche qui nous font découvrir & appercevoir diſtinctement dans le Ciel & ſur la terre des objets que leur grand éloignement nous rend inſenſibles, qui nous facilitent les obſervations des corps celeſtes, & peuvent ſervir dans les armées pour obſerver les marches & les campemens des troupes ennemies, ſur la mer pour reconnoître les vaiſſeaux des pyrates, des corſaires, &c. afin de ſe precautionner contre leurs inſultes. On y apprend la conſtruction des microſcopes qui ſervent à nous faire voir les Corps, que leur petitesse dérobe à nos yeux, & à nous faire reveler plusieurs secrets de la nature. On établit dans l'Optique des principes qui font connoître la cause des differentes couleurs & des differentes apparences que nous voyons en mille rencontres, des effets de toutes sortes de miroirs. Jamais on n'auroit bien connu la cause de l'Arc-en-ciel, de la multiplication apparente des objets par les lunettes à facettes, des effets des lanternes & des tableaux magiques, de l'impression des objets dans le fond de l'œil, si on ne les avoit imitez par des chambres obscures des prismes triangulaires, &c. si on n'y avoit enfin découvert & démontré un grand nombre de veritez qui rendent l'Optique tres curieuse & d'une grande utilité pour bien entendre la Physique. L'Optique nous donne les principes de la perspective, en nous apprenant à representer les Corps en peinture, & à tromper agreablement notre vûe.

Les Mechaniques sont la science du mouvement & des forces mouvantes. Cette science des Machines est une des plus belles parties des Mathematiques. Y a-t-il rien plus admirable que de pouvoir par le moyen des leviers, des poulies, des roues,

&c. augmenter une force tant que la reſiſtance de la matiere qu'on employe à ces machines le pourra ſupporter ſans ſe briſer ; de pouvoir élever des maſſes énormes auſſi haut, ou les tranſporter auſſi loin qu'on voudra ? Les moulins, les preſſoirs, les horloges, les montres, les pompes foulantes & aſpirantes, & les autres machines hydrauliques, une infinité d'inſtrumens & de machines dont les boutiques des ouvriers ſont remplies, quoique fort ordinainaires, ſont tres ingenieuſes dans leur invention & dans leurs uſages. Mais ſans ſortir de nous mêmes, nous trouverons que notre corps eſt une machine dont les oſſemens ſont des leviers, il y a des points d'appui, des cordages, des forces qui y ſont appliquées, des fibres paralleles, obliques, circulaires, ſpirales ; des muſcles triangulaires, pyramidaux, orbiculaires, & rhomboidaux. Enfin nous trouverons que cette machine eſt un aſſemblage de ce qu'il y a de plus beau dans la Statique, l'Hydraulique & la Pneumatique. On ne peut ſans une connoiſſance exacte des Mechaniques déterminer la force des muſcles ni leur conſtruction, raiſonner avec juſteſſe ſur la maniere de marcher des animaux, de voler des oiſeaux & de nager des poiſſons, ni même ſur le mouvement circulaire du ſang, ſur la ſtructure du cœur, ſur les cauſes de ſa dilatation & de ſa contraction, ſur le mouvement & ſur l'uſage de la reſpiration, ſur la generation, la nutrition, l'accroiſſement des plantes & des animaux, &c.

L'Aſtronomie enſeigne à obſerver le cours des Aſtres. C'eſt par le moyen de cette partie des Mathematiques qu'on connoît la durée de l'année, la cauſe de la diverſité des climats, de la difference qui eſt entre les jours, de celle qui eſt entre les ſaiſons. Les obſervations Aſtronomiques nous font connoître le tems precis de la revolution des corps celeſtes, leurs directions, retrogradations, conjonctions, oppoſitions & aſpects. On a le moyen de predire certainement les Eclipſes du Soleil, de la Lune, celles des ſatellites de Jupiter & de Saturne, long tems même avant qu'elles arrivent; ce qui eſt d'une utilité merveilleuſe pour perfectionner la Geographie & l'Hydrographie par la connoiſſance des longitudes. Il eſt impoſſible d'être un Phyſicien parfait ſans être Aſtronome, parcequ'un grand nombre de phenomenes & d'effets particuliers dépendent du mouvement des Aſtres qui ſont des cauſes generales. On ſçait, par exemple, le rapport & la liaiſon conſtante& invariable qu'il y a entre le flux & reflux de l'Ocean & les mouvemens de la Lune ; perſonne auſſi n'ignore les influences du Soleil ſur la terre que nous habitons. Depuis qu'on a inventé les lunettes d'approche on a decouvert dans les corps celeſtes une infinité de choſes tres curieuſes. On s'eſt apperçû qu'il y avoit des taches dans le Soleil ; qu'il y avoit des montagnes & des vallées dans la Lune ; que la planete de Venus avoit des phaſes comme la Lune ; que Jupiter étoit environné de ſatellites, & Saturne d'un anneau, &c. Cette découverte des ſatellites eſt fort utile, comme je le viens de dire, pour déterminer la poſition des differens lieux de la terre ſur un globe artificiel, pour déterminer les longitudes, afin de rendre la navigation plus parfaite & plus ſûre.

La Gnomonique eſt la ſcience des cadrans, elle enſeigne à meſurer le tems, à le diviſer en parties égales, à marquer ſur differentes ſurfaces la projection ou repreſentation des cercles horaires.

La Geographie nous enſeigne la connoiſſance de la terre que nous habitons ; elle nous en décrit les particularitez. Quoiqu'il ne ſoit pas neceſſaire d'être fort profond dans les Mathematiques pour bien ſçavoir la Geographie, on peut dire neanmoins qu'elle en dépend dans ſes points les plus eſſentiels.

On doit dire la même choſe de la Chronologie, cette ſcience ſi neceſſaire pour fixer les Epoques des années qui ſont en uſage chez les differentes Nations de la terre, pour verifier l'hiſtoire & y placer les evenemens les plus remarquables arrivez dans les Empires & dans les Etats du monde; & enfin pour déterminer ces periodes de temps que la Religion a conſacrées pour la celebration de ſes Fêtes.

La navigation s'occupe principalemen au trafic des marchandiſes; à enrichir des Royaumes entiers; à faire naître l'abondance dans les lieux les plus ſteriles. C'eſt par ſon moyen que l'or, l'argent & la plûpart des autres métaux nous ſont apportez. C'eſt par elle que les Nations les plus éloignées ſe communiquent reciproquement ce qui leur eſt neceſſaire. C'eſt auſſi par cet art que les armées navales remportent des victoires ſur leurs ennemis. Or la navigation eſt fondée ſur la connoiſſance de pluſieurs parties des Mathematiques. Elle a beſoin de la Geographie & d'une deſcription exacte des mers qu'on appelle Hydrographie, pour tracer aux vaiſſeaux des routes aſſûrées, pour affermir le courage des Pilotes ſur un élement ſi inconſtant, pour leur faire traverſer l'Ocean tout entier, & les faire arriver juſques dans ces nouveaux Mondes que les Empereurs Romains & les plus grands Conquerans de l'antiquité n'ont jamais connus. Elle a beſoin de la Geometrie, de la connoiſſance des uſages de la bouſſole & de l'Aſtronomie pour reconnoître ſon chemin. Elle a beſoin des Mechaniques pour la conſtruction de ſes vaiſſeaux, pour la diſpoſition, la figure & les uſages du gouvernail qui ſert à faire voguer le navire de quel côté on veut, pour ſes voiles, ſes mâts, ſes poulies, &c.

L'Architecture civile eſt l'art de conſtruire des maiſons: on y trouve les principes neceſſaires pour donner la beauté, la ſolidité & la perfection aux édifices tant des particuliers, qu'à ceux qui ſont deſtinez à l'uſage du public, aux Egliſes, par exemple, à la conſtruction des ponts, aux écoles, aux Palais & lieux où s'aſſemblent les Cours de Juſtice, aux priſons, arſenaux, Hôpitaux, &c.

L'Architecture militaire, ou l'Art des fortifications, enſeigne le moyen de diſpoſer & de mettre à couvert un petit nombre de perſonnes pour faire reſiſtance à un nombre beaucoup plus grand. C'eſt cette partie des Mathematiques que les plus vaillans

Guerriers ſe font gloire de conſulter, lorſqu'il s'agit, par exemple, d'aſſûrer & de regler la marche & les campemens d'une armée, de choiſir des poſtes avantageux, d'attaquer ou de défendre des villes, de preſcrire l'ordre des batailles : on y trouve les moyens de renverſer & de réduire en cendre des villes entieres. Cette ſcience ſert auſſi aux divertiſſemens des peuples, lorſqu'on ſe propoſe de faire des feux d'artifices, & de celebrer des réjouïſſances publiques.

Je ne finirois jamais ſi je voulois rapporter ici toute l'utilité qu'on peut retirer des Mathematiques, ainſi j'ajoûterai ſeulement que la Phyſique n'a jamais été plus parfaite que lorſque les plus grands Philoſophes ont été d'excellens Mathematiciens. Depuis que la Philoſophie naturelle a été jointe aux Mathematiques, & qu'elles ſe ſont prêtez des ſecours reciproques on a fait des découvertes agreables & dignes d'être ſçûes, que les Anciens avoient ignorées ; & ſans doute plus on cultivera les ſciences, plus on ſe trouvera obligé de convenir que les Mathematiques ſont du nombre de celles qui meritent qu'on s'y applique tres-ſerieuſement.

AVERTISSEMENS pour se servir utilement de ce Livre.

1°. IL faut avoir la precaution de ne lire point l'Arithmetique ni ce qui regarde l'Algebre sans avoir la plume à la main & du papier pour s'exercer sur les exemples que je propose, & pour en inventer ensuite de semblables. Dans la Geometrie il faut regarder les figures à mesure qu'on lit, & ne point se rebuter lorsqu'on ne comprend quelquefois pas d'abord tout ce qui se rencontre. Parceque dans les Mathematiques il faut de l'attention & de la perseverance; & il est rare que dans la premiere lecture qu'on fait de quelques élemens des Mathematiques que ce soit, on les possede parfaitement. Par cette premiere lecture on parcourt le tout autant exactement qu'on le peut, & ensuite on recommence à lire tout de nouveau, & quelquefois une troisiéme lecture n'est pas encore inutile.

2°. Tant dans l'Arithmetique, dans l'Algebre,

gebre, que dans la Geometrie, il faut toujours examiner & verifier les citations, parcequ'elles leveront une infinité de difficultez. C'eſt là une veritable maniere de faire cet étude avec fruit.

3°. La premiere fois que ceux qui ſeront moins ſtudieux que les autres, liront ces Elemens, ils pourront éviter de lire ce qui eſt depuis la page 105, juſqu'à la premiere propoſition des proportions, & dans une ſeconde lecture ils liront le tout exactement.

4°. Il eſt bon d'être auſſi averti que les lignes ponctuées ſont marquées de cette ſorte, pour les differencier des autres, qui ſont attachées à la queſtion. Ces lignes ponctuées ſont ſeulement utiles pour la demonſtration qu'on ſe propoſe de faire. La courbure des lignes ponctuées des figures de la page 475, ſervent ſeulement pour ſignifier que la ligne entiere A B eſt appellée *e*. Dans les plans & dans les ſolides j'ai auſſi repreſenté par des lignes ponctuées celles qu'on conſidere comme ſi on les voyoit au travers d'une ſurface ou d'un corps.

5°. Il faut encore remarquer une choſe qui pourroit embarraſſer ceux qui commencent l'étude des Mathematiques; c'eſt que dans la representation des plans & des solides on est souvent obligé d'y representer des lignes perpendiculaires à d'autres lignes menées dans ces plans, par des lignes qui paroissent leur être obliques en les voyant marquées sur le papier où on lit. Mais il faut prendre garde que cette obliquité est un effet de la representation, de la perspective, & de la maniere de dessiner; parcequ'autrement on ne peut pas exprimer ces choses distinctement. Dans la page 201 on considere la ligne CB comme perpendiculaire à la ligne G E, qui est l'intersection des plans D H & F E. On voit dans la page 222 des quarrez qu'on represente par des Rhombes ; c'est la maniere dont on se sert pour representer le cube sur le papier qui est une surface plane, c'est ce qu'on appelle projection en termes d'Optique. Ainsi dans la page 501 on considere la ligne A B comme perpendiculaire aux lignes E F & C D, quoique dans la representation elles paroissent obliques : parcequ'on considere le point A comme élevé en l'air au dessus de la surface plane G H. Dans les plans & dans les solides, cette maniere de representer les lignes & les surfaces planes se rencontre tres souvent.

6°. Les Corollaires sont fort necessaires. Il ne faut pas les negliger en aucune maniere. On connoîtra dans la ſuite que leur utilité n'eſt pas moindre que celle des Propoſitions generales d'où elles viennent.

Lorſque dans la Geometrie il y aura pluſieurs figures au même endroit avec les mêmes lettres, il faudra lire la demonſtration en regardant la premiere figure, relire encore cette même demonſtration & regarder la ſeconde figure : & ainſi de ſuite autant de fois qu'il y aura de ces figures ; parcequ'alors la même demonſtration doit être appliquée à chacune de ces figures. C'eſt une voie qui abrege le diſcours, & qui applique la propoſition à toutes les circonſtances neceſſaires. Il y en a des exemples dans les pages 241. 243. 260. 292. 298. &c. Cet article merite attention.

Aprés avoir expoſé quelques demonſtrations dans toute leur étendue, je les ai enſuite exprimées d'une maniere plus courte pour les preſenter à l'eſprit dans une forme tres ſimple. En les apercevant ainſi dans un fort petit eſpace, il y a beaucoup plus de facilité à les comprendre & à les retenir. On en trouvera avec cette reduction dans les pages 130. 159. 161. 468. 474. 479. &c.

Dans les pages 66. 131. & dans les propositions 49. 50. &c. de la Geometrie, il faudra se souvenir de l'expression de la multiplication expliquée dans la page 40. Et dans les pages 468. 472. 487. &c. il faudra aussi se souvenir de l'expression des quarrez expliquée dans la page 231.

Dans ces Elemens je n'ai mis de l'Arithmetique que ce que j'en ai cru être le plus necessaire ; & je me suis contenté de ne traiter que les premiers & les principaux fondemens de l'Algebre, afin de ne pas rebuter d'abord ceux qui commencent, & de ne pas fatiguer leur zèle par une plus longue suite de principes.

J'ai donné plus d'étendue à la Geometrie. Car cette partie elementaire, outre la theorie, contient la pratique qui suit en forme de Corollaires les propositions generales dont elle dépend.

Si quelquefois j'ai prouvé des veritez, que quelques-uns voudroient faire passer pour des axiomes, c'est que les demonstrations m'en ont paru tres faciles, & qu'en les proposant sans preuve, j'aurois cru pécher contre l'idée de perfection qu'on a dans les Mathematiques, & contre cette grande exactitude qui rend ces sciences si recommandables.

J'ai mis au commencement de chacune des 3 Parties de cet Ouvrage les définitions necessaires, afin qu'étant de suite on les puisse trouver plus promptement, & pour que les citations en soient plus faciles.

Euclide étant un Auteur Elementaire fort ancien & le plus connu, ses Elemens de Geometrie sont ordinairement citez ou supposez dans presque tous les Traitez particuliers des Mathematiques. Pour rendre la lecture de ces Traitez plus intelligible, lorsqu'on y trouve des veritez dont la demonstration est renvoiée aux Elemens d'Euclide, j'ai mis à la fin de ces nouveaux Elemens une Table qui contient par ordre les Propositions d'Euclide que j'y ai demontrées, c'est une circonstance où cet Ouvrage sera aussi utile que les Elemens d'Euclide même. Ceux qui voudront comparer ces Elemens avec ceux d'Euclide connoîtront facilement si la methode que j'ai observée est plus naturelle que celle de cet Auteur; si les démonstrations que j'ai employées sont plus faciles, souvent plus directes, plus évidentes, & plus courtes.

Fautes à corriger.

P*age* 40. *lig.* 13. est plus grand, *ajoutez*, ou égal.
P. 70. *lig.* 24. $+ 5 - 5 = 50$, *lis.* $= 0$.
P. 101. *lig. antepenult.* de 27. *lis.* de 37.
P. 107. *l.* 9. $+ 216$. *l.* $- 216$.
P. 118. *lig. derniere*, 39. *lis.* 56.

P. 151. *lig.* 7. : : *h z. d.* lisez *hz. h.*
P. 166. *lig.* 17. numerateurs, *lis.* dénominateurs.
P. 170. *l.* 15. $\frac{a}{b} =$, *lis.* $\frac{a}{b} = y$.
P. 185. *lig.* 16. 4 onces, *lis.* 5.
P. 188. *lig.* 26. 700 liv. *lis.* 720.
P. 220. *l.* 17. est termi. *lis.* est un cercle; *& p.* 224 *l.* 13. sont terminées, *lis.* sont deux cercles, qui sont des surfaces d'une infinité de côtez.
P. 221. *l.* 25. aux, *lis.* à tous les. *& l.* 32. aux *lis.* à tous les.
P. 225. *lig.* 8. cette ligne : *ajoutez*, de sorte que le centre soit toujours dans la ligne fixe.
P. 252. *lig.* 4. *du Coroll.* 2. EG *lis.* FG.
P. 257. *lig.* 21. BCBD. *lis.* BC $<$ BD.
P. 286. *l.* 17. concourir, *ajoutez*, en un point.
P. 308. *lis.* 27. BF obliquement, *lis.* BE.
P. 309 *l.* 19. de part & d'autre, *lis.* de part ou d'autre.
P. 312. *lig.* 22. du, *lis.* au.
P. 386. *l. avant l'antepenultieme*, qui ont le même circuit, *ajoutez*, & qui sont quadrilaterales.
P. 396. *lig.* 16. ou points, *lis.* pointes.
P. 397. *lig.* 20. YA. *lis.* Y*a*.
P. 404. *l.* 3. laquelle fera, *lis.* de sorte qu'elle fasse.
P. 442 *lig.* 26. la lig. CH. *lis.* GH.
P. 445 *lig.* 23. huit toises, *lis.* six toises.
P. 446. *lig.* 6. huit toises, *lis.* six.
P. 482. *lig.* 19. FGH, *lis.* FHG.
P. 508. *l.* 2. on ne peut mener, *ajoutez*, dans le plan AB; *& lig.* 10. *ajoutez*, dans le plan CD.
P. 538. *l.* 5. l'une à l'autre, *aj.* & de même hauteur.
P. 539. *citat.* 4. Cor. prop. 74. *lis.* 75.
P. 5 0 *lig. derniere*, par, *lis.* pour.
P. 569. *l.* 3. *du Cor.* entre eux. En, *effacez le point, & lisez*, entre eux en.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

PREMIERS PRINCIPES.

NOus appellons *Grandeur* tout ce qui peut être augmenté, ou diminué.

On a donné le nom de *Mathematiques* aux Sciences dans lesquelles on considere les proprietez des Grandeurs.

Ces Sciences sont fondées sur trois sortes de Principes, sur des Definitions, des Axiomes, & des Demandes.

DEFINITIONS GENERALES.

1. Les Definitions dans les Mathematiques sont des explications qui exposent la signification des mots dont on se sert. Par ces Definitions on explique, par exemple, ce qu'on doit entendre par les mots de *Triangle*, de *Poinct*, &c.

2. Les Demandes sont des suppositions si simples, que toute personne, pour peu de reflexion qu'il y fasse, les doit admettre, telle que seroit celle-ci: On demande, par exemple, pour parvenir à une Demonstration, *qu'il soit permis de*

mener une ligne d'un poinct à un autre poinct, ou d'imaginer qu'elle y soit menée.

3. Les Axiomes sont des veritez évidentes à toute personne qui y fait attention ; par exemple, *un Tout est plus grand qu'une de ses parties, &c.*

4. La Proposition est une expression d'une verité qu'on veut découvrir, ou d'une chose qu'on veut faire.

5. La Demonstration est une application des Définitions, Demandes, & Axiomes, pour former une persuasion invincible.

6. Un Theorême est une Proposition dans laquelle il s'agit seulement de la démonstration d'une verité.

7. Un Problême est une Proposition dans laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de démontrer que la maniere qu'on propose pour faire cette chose est infaillible, & un veritable chemin pour y parvenir.

8. Corollaires, ou Consequents sont des veritez qui deviennent necessairement connuës par les Propositions demontrées, ou par les Definitions exposées.

9. Cette marque $=$ signifie Egal, & cette autre marque $+$ signifie Plus, & cette troisiéme note ou marque $-$ signifie moins ; par exemple $2 + 3 = 5$, c'est à dire deux plus 3, ou 2 avec trois sont égaux à 5, & $8 - 2 = 6$, c'est à dire 8 moins 2, ou 8 dont on a retranché 2, sont égaux à 6.

10. Cette note ou marque $>$ signifie plus Grand, & cet autre signe ou note $<$ signifie plus Petit ; par exemple $7 - 2 > 4$, c'est à dire 7 moins deux sont plus grands que 4 ; & $4 < 3 + 3$, c'est à dire, 4 plus petits que 3 plus 3.

DEMANDES GENERALES.

1. Lorſque pluſieurs grandeurs ſont parfaitement égales, qu'il ſoit permis de prendre l'une au lieu de l'autre.

2. Qu'il ſoit permis de nommer une grandeur du nom d'une, ou de pluſieurs lettres de l'Alphabet

3. Que les grandeurs égales, ou de même nature ſoient exprimées par des lettres ſemblables, ſi cela eſt neceſſaire pour une demonſtration ; par exemple d & d ſignifieront deux Nombres égaux, deux differences égales, &c.

4. Les Grandeurs inégales, ou de differente nature, ſeront exprimées par des lettres differentes ; par exemple a & b, &c.

AXIOMES GENERAUX.

1. Une même choſe ne peut être, & ne pas être en même-temps.

2. Un Tout eſt plus grand qu'une de ſes Parties.

3. Un Tout eſt égal à toutes ſes Parties priſes enſemble ; par exemple ſi les Grandeurs $b+d$ ſont toutes les parties de z, alors $z=b+d$.

4. Si à Grandeurs égales on ajoûte Grandeurs égales, les Touts qui en reſulteront ſeront égaux; par exemple ſi les grandeurs $b+d=z$, en ajoûtant f de part & d'autre, on aura $b+d+f=z+f$.

5. Reciproquement, ſi à des Grandeurs égales, d'autres Grandeurs étant ajoûtées, ou pluſieurs Grandeurs étant ajoûtées ſucceſſivement à la même, il reſulte des Touts égaux ; ces Grandeurs ajoûtées ſeront égales ; par exemple ſi une Gran-

deur nommée x étant jointe à 5, forme une troisiéme Grandeur égale à 14, & qu'une Grandeur nommée y étant pareillement jointe à 5, forme aussi une troisiéme Grandeur égale à 14, les Grandeurs x & y seront égales entre elles; car si elles n'étoient pas égales entre elles, l'une jointe à 5 ne feroit pas la même somme, ou grandeur que l'autre jointe à ce même nombre 5.

6. Les Grandeurs qui sont doubles, triples, quadruples, &c. d'une même grandeur, ou de Grandeurs égales sont égales entr'elles; par exemple si a contient trois fois f, & si c contient pareilment trois fois f, a & c sont des Grandeurs égales.

7. Si à Grandeurs égales on ajoûte Grandeurs inégales, ou si à la même Grandeur on ajoûte successivement Grandeurs inégales, les Touts qui en resulteront seront inégaux, & le plus grand Tout sera celui dans lequel se trouvera la plus grande des Grandeurs ajoûtées; par exemple, si à b & à c égales entr'elles, on ajoûte d'une part d, & de l'autre part f, & si $d > f$, les Touts $b + d$, & $c + f$ seront inégaux, & $b + d$ sera le plus grand.

8. Si de Grandeurs ajoûtées à Grandeurs égales il resulte des Touts inégaux, les Grandeurs ajoûtées seront inégales, & celle-là sera la plus grande qui se trouvera dans le plus grand Tout. Par exemple si $a = b$, & qu'ajoûtant f à la Grandeur a, & g à la Grandeur b, il arrive que $a + f > b + g$, les Grandeurs f & g seront inégales, & $f > g$.

9. Si de Grandeurs égales on ôte Grandeurs égales, les restes seront égaux; par exemple si $b + d + f = z + f$ retranchant de part & d'autre les Grandeurs égales f, il restera $b + d = z$.

10. Et reciproquement aprés avoir ôté certai-

nes grandeurs de Grandeurs égales, ſi les reſtes ſont égaux, les Grandeurs retranchées ſeront égales entr'elles.

11. Une moitié d'une Grandeur plus grande, eſt plus grande qu'une moitié d'une plus petite; un tiers d'une Grandeur plus grande, eſt plus grand qu'un tiers d'une plus petite, pareillement un quart, &c. par exemple ſi $a > b$, & que f ſoit un tiers de a, & que g ſoit un tiers de b, on aura auſſi $f > g$.

12. Chaque moitié de Grandeurs égales ſont égales entr'elles, les tiers pareillement, &c.

13. Reciproquement lorſqu'une moitié de Grandeur eſt égale à une moitié d'une autre, les Grandeurs auſquelles ces moitiés appartiennent ſont égales entr'elles. La même verité ſera conſtante, ſi un tiers d'une Grandeur eſt égal au tiers d'une autre, ou ſi un quart eſt égal au quart d'une autre, &c.

14. Lorſqu'une moitié d'une grandeur eſt plus grande qu'une moitié d'une autre; la premiere Grandeur entiere eſt plus grande que cette autre pareillement entiere. La même choſe eſt évidente, ſi un tiers d'une grandeur eſt plus grand que le tiers d'une autre, &c.

15. Si de Grandeurs égales on ôte des Grandeurs inégales, les reſtes ſeront inégaux, & le plus grand reſte ſera celui qui ſera le reſte que laiſſera la plus petite Grandeur retranchée; par exemple ſoit $a + b = c + d$, ſi $b > c$, en retranchant d'une part b. & de l'autre c, il reſtera $a < d$.

16. Reciproquement ſi certaines Grandeurs retranchées de Grandeurs égales, laiſſent des reſtes inégaux, ces Grandeurs retranchées ſeront inégales, & celle là ſera la plus grande qui laiſ-

ſera le plus petit reſte ; par exemple ſi $h + m = n + o$, & qu'aprés avoir retranché d'une part h, & de l'autre n, il reſte $m < o$, il eſt évident que la Grandeur, retranchée h, ſera plus grande que l'autre Grandeur retranchée n.

17. Si de Grandeurs inégales on ôte des Grandeurs égales, les reſtes ſeront inégaux, & le plus grand reſte ſera celui qui ſera reſte de la Grandeur qui étoit la plus grande ; par exemple, ſi $a + b > c + b$, aprés avoir retranché d'une part b, & avoir auſſi retranché de l'autre pareille Grandeur b, il reſtera encore $a > c$.

18. Les Grandeurs égales à une troiſiéme ; ſont égales entre elles ; par exemple ſi $a = d$, & ſi $b = d$, on aura $a = b$.

19. Les Grandeurs qui ſurpaſſent une troiſiéme d'un excés égal, ſont égales entre elles ; par exemple ſi $a - c = f$, & ſi $g - c = f$, c'eſt à dire, ſi a & g ſurpaſſent f de la même grandeur c, on aura $a = g$.

20. Les Grandeurs qui ſont moindres qu'une troiſiéme d'une Grandeur égale, ſont pareillement égales entre elles ; par exemple ſi $a + h = m$, & $b + h = m$, c'eſt à dire ſi a & b ſont moindres que m de la grandeur h, on aura $a = b$.

21. Reciproquement les Grandeurs qui ſont égales entre elles, ſont égales à une troiſiéme, ou ſurpaſſent une troiſiéme Grandeur d'un excés égal, ou enfin ſont moindres qu'une troiſiéme, d'une grandeur égale.

22. Si de trois Grandeurs a, b, c, la premiere a eſt plus grande que la deuxiéme b, & ſi la deuxiéme b eſt plus grande que la troiſiéme c, la premiere a ſera plus grande que la troiſiéme c,

AVERTISSEMENT.

Il faut obſerver que les Definitions, Demandes, & Axiomes qu'on vient d'expoſer, conviennent generalement à toutes les Parties des Mathematiques ; cependant chaque Partie Elementaire des Mathematiques aura encore ſes Definitions, ſes Demandes, & ſes Axiomes particuliers.

DES PARTIES DE MATHEMATIQUES.

Les Parties élementaires des Mathematiques ſont l'Arithmetique, l'Algebre, & la Geometrie.

Les autres Parties des Mathematiques ; par exemple l'Aſtronomie, les Mechaniques, l'Optique, les Fortifications, la Navigation, &c. ne ſont qu'une application des Parties Elementaires des Mathematiques à la Phyſique.

Nous partagerons cet Ouvrage en trois Parties.

Dans la premiere, nous ne parlerons que des operations d'Arithmetique, dont l'uſage eſt le plus frequent.

Dans la ſeconde, nous expoſerons les principaux fondemens de l'Algebre, pour traiter ensuite la doctrine des Proportions avec toute la brieveté & l'exactitude qui nous seront possibles.

Dans la troisiéme Partie, nous ferons un choix, & un arrangement des Propositions les plus necessaires de la Geometrie, qui y seront demontrées d'une maniere tres simple.

La clarté, la nouveauté, & l'ordre methodique qu'on a observé dans cet Ouvrage & dans les Demonstrations des Propositions qui s'y rencontrent, ne contribueront pas peu à en faciliter l'intelligence. On ose même dire qu'on y trouvera un grand secours pour entendre ce qu'il y a de plus beau, de plus utile, & de plus relevé dans la Physique. Enfin on y trouvera une ouverture considerable pour le reste des Mathematiques.

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.

DE
L'ARITHMETIQUE.

DEFINITIONS D'ARITHMETIQUE.

1. UNITE' est une chose considerée, sans faire attention aux Parties qui la composent, ou sans faire attention à une autre chose dont elle peut être partie; par exemple, un sol, un écu, une toise, un pied, &c.

2. Nombre est une Collection d'unitez; par exemple, six toises.

3. L'Arithmetique est une Partie Elementaire des Mathematiques, dans laquelle on traite seulement des Nombres.

Il y a de dix sortes de signes, ou caracteres dont on se sert pour exprimer toutes sortes de Nombres, & on les appelle *Chifres*; sçavoir,

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf,	zero.

DEMANDES D'ARITHMETIQUE.

1. Le dernier chifre 0, qu'on appelle *zero*, ne ſignifie rien ſeul ; mais ſeulement lorſqu'il eſt mis aprés les autres dont il augmente la valeur.

2. La valeur des chifres ne dépend pas ſeulement de leur figure, mais auſſi elle dépend de leur arrangement.

3. Lorſque pluſieurs chifres ſont rangez de ſuite, ceux qui ſont dans la premiere place, (commençant à compter de droit à gauche,) ne valent jamais plus qu'eux-mêmes ; ceux qui ſont dans la ſeconde place, valent dix fois ce qu'ils vaudroient s'ils étoient dans la premiere, &c. 1, par exemple, dans la premiere place ne vaut qu'une ſeule unité ; dans la ſeconde place il vaut dix : dans la troiſiéme il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la ſeconde, ſçavoir, dix dixaines, ou une centaine ; dans la quatriéme place, il vaut dix fois ce qu'il auroit valu dans la troiſiéme ; ſçavoir, dix centaines ou un mille, &c.

de quintillions	de quadrillions	de trillions	de billions ou millards	de millions	de milles	d'unités.
centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre	centaine dixaine nombre
1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1,	1 1 1.
2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2,	2 2 2.
3, &c.						

4. Les zeros ſervent pour augmenter la valeur des chifres qui les precedent, en faiſant voir

que ces chifres ſont dans un rang plus reculé, comme ſi aprés 5 il y a deux zeros, ces deux zeros font voir que 5 eſt dans le troiſiéme rang, & qu'ainſi il vaut cinq cens, ou 500.

Lorſqu'il il y a pluſieurs chifres de ſuite, on les ſepare de trois en trois par tranches, avec de petites virgules pour éviter la confuſion ; la premiere tranche eſt appellée Unitez ; la ſeconde Milles, &c.

On traitera ſeulement dans cette premiere Partie, de l'Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion des nombres entiers, & on fera enſuite les mêmes operations ſur les Fractions ou nombres rompus.

AXIOMES D'ARITHMETIQUE.

1. Si deux nombres ſont parfaitement égaux, lorſqu'on retranchera d'un de ces nombres la valeur de l'autre, il ne reſtera rien.

2. Aprés avoir retranché un nombre d'un autre, s'il reſte quelque choſe, pour connoître ſi ce qui reſte eſt le veritable reſte qu'on cherche, il faut l'ajoûter avec ce qu'on a retranché, & il doit reſulter de cette addition un nombre égal à celui dont on a retranché, puiſqu'il n'eſt composé que de deux choſes ; ſçavoir de ce qui reſte, & de ce qui a été retranché.

DE L'ADDITION DES NOMBRES.

DEFINITION.

L'Addition eſt un aſſemblage de deux, ou de pluſieurs nombres en un ſeul, qu'on appelle *Somme* ou *Total*.

Pour faire cette operation, il faut écrire les chifres qui expriment les nombres qu'on veut assembler : de sorte que les unitez soient sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, les centaines sous les centaines, &c.

Aprés avoir mené une ligne sous ces nombres ainsi disposez, il faut assembler ceux qui sont de même espece, c'est à dire, qui sont les uns sur les autres ; & lorsque leur somme est au dessous de dix, on l'écrit sous chaque rangée ; mais si elle excede neuf, alors parcequ'il faut plusieurs chifres pour l'exprimer, on écrit seulement le dernier qui se trouve vers la main droite, & on reserve ce qui se trouveroit vers la main gauche, pour ajoûter à la colonne de chifres suivante, & ainsi de suite jusqu'à la fin.

Exemple.

	618
	907
	25
	8840
tot.	10390

Pour ajoûter ces quatre nombres 618, 907, 25, 8840, aprés les avoir disposez l'un sur l'autre, comme on vient d'enseigner, on commence vers la main droite, disant : 0 & 5 font 5, & 7 font 12 & 8 font 20 ; j'écris 0 sous la premiere rangée, & je retiens deux dixaines, qui se trouvent en 20, lesquelles deux dixaines doivent être ajoutées dans la deuxiéme rangée en cette sorte ; 2 que j'avois retenus, & 4 font 6 & 2 font 8, & (omettant le zero,) 1 font neuf ; j'écris 9 sous la deuxiéme rangée. Ensuite dans le troisiéme rang, je dis, 8 & 9 font 17 & 6 font 23 ; j'écris 3 & je retiens 2, que je joins dans le quatriéme rang avec 8, disant : 8 & 2 que j'avois retenus, font 10 ; j'écris zero & j'avance un, parceque c'est c'eſt tout. On trouve que la ſomme totale, qui reſulte de tous ces nombres eſt 10390, c'eſt à dire, dix mille trois cens quatre-vingt dix.

AUTRE EXEMPLE.

Pour ajouter ces nombres 9 livres 12 ſols; 13 l. 15 ſ. & 8 ſ. Il faut commencer par les ſols, diſant: 8 & 5 font 13 & 2 font 15; j'écris 5 & je retiens 1 qui vaut une dixaine que je joins avec les dixaines des ſols, diſant: 1 que j'ay retenu, & 1 font 2 & 1 font 3 dixaines de ſols; mais parcequ'il faut deux dixaines de ſols pour faire une livre, je trouve que les trois dixaines de ſols font 1 livre, reſte 10 ſols que j'écris à côté du 5, & je retiens 1 livre que je joins avec les livres, diſant: 1 livre provenuë des ſols, & 3 font 4, & 9 font 13; j'écris 3 & je retiens 1; enſuite dans le ſecond rang, je dis: 1 que j'ay retenu & 1 font 2; j'écris 2; & partant je trouve que le total ou la ſomme de ces trois nombres eſt 23 l. 15 ſ.

	9 l.	12 ſ.
	13	15
		8
Total	23 l.	15 ſ.

AUTRE EXEMPLE.

Pour ajouter ces nombres 112 l. 12 ſ. 4 d; 2429 l. 17 ſ. 3 d; & 820 l. 10 ſ. 10 d. Il faut commencer par les deniers, diſant: 10 deniers & 3 font 13 deniers valant 1 ſol & 1 denier; j'écris la petite ligne A, pour marquer 1 ſol, & je retiens 1 denier que j'ajoute avec

112 l.	12 ſ.	4 d.	
2429	17	3	— A
820	10	10	
3363 l.	0 ſ.	5 d.	

4, ce qui fait 5 que j'écris ſous les deniers.

Enſuite je compte combien il y a de petites lignes marquées à côté des deniers ; j'en trouve une, cela ſignifie que c'eſt un ſol

112 l.	12 ſ.	4 d.	
2429	17	3 ——	A
820	10	10	
3363 l.	0 ſ.	5 d.	

qu'il faut joindre avec les ſols, diſant : 1 & 7. (negligeant le 0) ſont 8 & 2 ſont 10 ; j'écris 0 & je retiens 1 que je joins avec les dixaines des ſols, diſant : 1 retenu & 1 font 2 & 1 font 3 & 1 font 4 dixaines de ſols ; & parce qu'il faut deux dixaines de ſols pour faire une livre, je prens la moitié de ces 4 dixaines de ſols, cela fait 2 l. que je joins avec les livres, diſant : 2 l. provenuës des ſols & 9 (negligeant le 0) font 11 & 2 font 13 ; j'écris 3 & je retiens 1 dixaine que je joins à la colomne ſuivante, diſant : 1 retenu & 2 font 3 & 2 ſont 5 & 1 ſont 6 ; j'écris 6. Enſuite paſſant à la troiſiéme colomne, je dis : 8 & 4 ſont 12 & 1 ſont 13 ; j'écris 3 & je retiens 1. Enfin au quatriéme rang, je dis : 1 dixaine de cent que j'ay retenu avec 2 font 3, j'écris 3.

Et partant je trouve que la ſomme ou le total des trois nombres propoſez eſt 3363 l. 0 ſ. 5 d.

DE LA SOUSTRACTION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. LA Souſtraction eſt une operation par laquelle on retranche ou ôte un petit nombre d'un plus grand.

2. Le nombre qui reste aprés ce retranchement est appellée *Difference* de ces deux nombres; par exemple ayant ôté 8 de 14, le reste qui est 6 est la *Difference* de 8 à 14.

Pour faire cette operation, il faut placer le nombre qu'on veut retrancher ou soustraire, sous le plus grand nombre, duquel on veut retrancher le plus petit; de sorte que les unitez soient sous les unitez, les dixaines sous les dixaines, &c.

Ensuite il faut mettre une ligne au dessous de ces chiffres, au dessous de laquelle on écrira le *reste*, ou *residu*, ou *difference*.

Enfin on soustrait les nombres inférieurs des supérieurs l'un aprés l'autre, & on écrit de suite les restes au dessous de la ligne.

EXEMPLE.

de	4 5 8
ôtant	2 3 4
reste	2 2 4

Pour soustraire 234 de 458, après les avoir disposez, comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite à la premiere colomne, disant : de 8 j'ôte 4 reste 4 que j'écris. Ensuite à la seconde colomne, je dis : de 5 ôtant 3, reste 2 que j'écris. Et à la troisiéme colomne ou rangée, je dis : de 4 ôtant 2, reste 2 que j'écris. Partant je trouve qu'aprés avoir retranché 234 de 458, il reste 224.

AUTRE EXEMPLE.

de	4 2 6 0 3 l.	15 ſ.
ôtant	2 0 7 1	4
reste	4 0 5 3 2 l.	11 ſ.

Pour retrancher 2071 l. 4 ſ. de 42603 l. 15 ſ. aprés avoir rangé ces deux nombres l'un sur l'autre, il faut commencer par les sols vers la main droire, disant : de 5 ôtant 4, reste 1 que j'écris sous le 4. Ensuite aux dixaines de sols, je dis : de 1 ôtant rien, reste 1 que j'écris. Des sols il faut passer aux livres, disant : de 3 je retranche 1, reste 2, que j'écris. Ensuite au deuxiéme rang, je dis : de 0 retranchant 7, cela ne peut être ; sur le 6 qui precede j'emprunte une unité, laquelle étant transportée en la place du zero vaudra 10, & partant, je dirai : de 10 retranchant 7, il reste 3 que j'écris sous le 7. Ensuite au troisiéme rang, je dis : de 5 (parceque des 6 j'avois emprunté une unité, & pour m'en souvenir j'avois marqué un point dessus le 6) ôtant 0, reste 5 que j'écris. Au quatriéme rang, je dis : de 2 retranchant 2 reste rien, partant j'écris 0, parcequ'il ne faut point laisser de place vuide en pareille rencontre. Et au cinquiéme rang, je dis : de 4 retranchant rien, reste 4 que j'écris : partant je trouve qu'il reste 40532 l. 11 s.

de	42603 l.	15 s.	
ôtant	2071	4	
reste	40532 l.	11 s.	

AUTRE EXEMPLE.

Pour soustraire de 22046 l. 12 s. 6 d. le nombre de 16784 l. 18 s. 10 d. Il faut commencer par les deniers, disant : de 6 deniers je retranche 10, cela n'est pas possible, il faut emprunter sur les sols une unité valant douze deniers ; pour me souvenir de cet emprunt, je laisse un point sur le 2 qui est dans

de	22046 l.	12 s.	6 d.
ôtez	16784	18	10
reste	5261 l.	13 s.	8 d.

le rang des unitez de ſols où j'ay emprunté, & je joins ces 12 deniers empruntez avec les 6 deniers, d'où on propoſoit de retrancher 10, cela fait 18 deniers, dont retranchant 10, il reſte 8 deniers, que j'écris ſous le rang des deniers. Enſuite je paſſe aux unitezdes ſols, diſant : de 1 je retranche 8, cela n'eſt pas poſſible, j'emprunte la dixaine qui le precede, ſur laquelle je marque un point pour me ſouvenir de cet emprunt, & je dis : de 11 j'ôte 8 reſte 3 que j'écris ſous les unitez de ſols. Enſuite aux dixaines de ſols, je dis : de 0 j'ôte 1 (car la dixaine des 12 ſols a été empruntée, au lieu de laquelle il n'y a plus rien) cela n'eſt pas poſſible, c'eſt pourquoy paſſant aux unitez de livres, j'emprunte ſur le 6 une livre valant 20 ſols, c'eſt à dire, deux dixaines de ſols, & je dis: de deux dixaines de ſols en ôtant une, reſte 1, que j'écris à côté du 3 pour faire 13 ſols.

Aprés cela je paſſe aux unitez de livres, & je dis : de 5 j'ôte 4 (car puiſque des 6 on avoit emprunté 1 pour porter aux ſols, il n'en reſte plus que 5) reſte 1 que j'écris. Enſuite au deuxiéme rang, je dis : de 4 j'ôte 8, cela n'eſt pas poſſible : partant je cherche ſi on peut emprunter des chifres precedens, je trouve que du zero precedent on ne peut rien emprunter ; qu'on ne peut pareillement rien emprunter du 2 qui precede le zero, parceque ce 2 lui-même n'eſt pas ſuffiſant pour le 6 qui eſt au deſſous, & je trouve qu'on peut emprunter du dernier 2 ; j'emprunte donc un, & pour m'en ſouvenir j'y marque un point. Cet 1 ainſi emprunté étant tranſporté ſur le pénultiéme 2, vaut * 10 ; mais de ces 10 je reſerve encore une unité ; partant au deſſus

* *Demande 3e d'Arithmetique.*

du pénultiéme 2, je marque un point qui fait ſouvenir des 9 que j'y ay laiſſez. Or cette unité reſervée étant tranſportée au deſſus du zero, vaut dix en cette place; mais de ces 10 je reſerve encore une unité : partant il ne reſtera que 9 au deſſus du zero, & cette unité ainſi reſervée étant miſe devant le 4, fera 10 : or en la joignant avec ce 4, cela fera 14; on dira donc de 14 ôtant 8, reſte 6 que j'écris ſous le deuxiéme rang.

Au troiſiéme rang, je dis : de 9, qu'on vient de tranſporter au deſſus du zero, ôtant 7, reſte 2 que j'écris ſous le troiſiéme rang.

Au quatriéme rang, je dis : neuf qu'on vient de tranſporter au deſſus du 2 étant joints avec ce 2, cela fait 11; or de 11 j'ôte 6 reſte 5 que j'écris ſous le quatriéme rang.

Enfin au cinquiéme rang, je dis : de 1 ôtant 1, reſte 0 (car on avoit emprunté une unité du 2, cela fait qu'il n'y a plus que 1) je n'écris rien, parceque les zeros ſont inutiles lorſqu'ils ne ſont point precedez d'aucun autre chifre : partant je trouve qu'il reſte 5261 l. 13 ſ. 8 d.

Obſervations ſur l'Addition & la Souſtraction.

Pour être certain ſi l'Addition eſt exacte, il faut retrancher du total ou de la ſomme de cette operation, chacune des ſommes qu'on a ajoutées; s'il ne reſte rien, c'eſt une preuve manifeſte que l'operation eſt tres exacte : s'il reſte quelque choſe, il faut la recommencer.

On peut faire ce retranchement ou ſouſtraction, comme on le vient d'enſeigner, ou bien de cette maniere.

Soit par exemple l'addition de 62, 55, & 28; pour être aſſuré que 145 eſt veritable-

..ment le total qu'on cherche. Je retranche de 145 les dixaines de ces trois nombres pris ſeparément, & enſuite leurs unitez ; puiſqu'il n'y a dans ces trois nombres que des dixaines & & des unitez. Je commence par les dixaines, & je dis : 6 & 5 ſont 11 & 2 ſont 13 ; de 14 qui ſont au deſſous, j'ôte 13, reſte 1 que j'écris ſous le 4. Cet 1 avec le 5 ſuivant fera 15. Je paſſe aux unitez, & je dis : 2 & 5 ſont 7 & 8 ſont 15, de 15 que je trouve au deſſous, j'ôte 15, qui eſt la ſomme des unitez, reſte 0. Et partant on a bien réüſſi, parceque s'il reſtoit quelque choſe, on auroit mal compté, & il faudroit recommencer l'operation.

	6	2
	5	5
	2	8
ſomme	14	5
preuve	1	0

Soit par exemple une autre ſomme 521 l. 13 ſ. 6 d. on ſouhaite ſçavoir ſi c'eſt veritablement & ſans erreur la ſomme ou total des trois nombres 253 l. 12. ſ. 4 d. &c. on retranchera de ce total 521 l. 13 ſ. 6 d. ce qui ſe rencontre ſeparément dans ces trois nombres ; ſçavoir, des centaines, des dixaines, & des unitez de livres, & enſuite des dixaines & unitez de ſols, & enfin des unitez de deniers ; on feroit la même choſe s'il y avoit des milles, &c. On commencera par les centaines, diſant : 2 & 1 ſont 3 ; de 5 qui eſt au deſſous, ôtez 3, reſte 2 qu'on écrira au deſſous de

	2 5 3 l.	1 2 ſ.	4 d.
	1 9 2	1 3	6
	7 5	7	8
ſomme	5 2 1 l.	1 3 ſ.	6 d.
preuve	2 1 1	1 1	0

5, & ce 2 fera avec le 2 qui eſt enſuite du 5, 22 ;

	2 5 3 l.	12 ſ.	4 d.
	1 9 2	13	6
	7 5	7	8
ſomme	5 2 1 l.	13 ſ.	6 d.
preuve	~~1~~ ~~1~~ ~~1~~	~~1~~ ~~1~~	0

& on paſſera aux dixaines, diſant : 5 & 9 ſont 14 & 7 ſont 21 ; de 22 qui ſont au deſſous, j'ôte 21, reſte 1 qu'on écrira ſous le 2 ; ce qui avec le 1 ſuivant fera 11. On paſſera aux unitez, diſant : 3 & 2 ſont 5 & 5 ſont 10, de 11 qui ſont au deſſous, ôtez 10 reſte 1 qu'on écrira ſous le 1: or cette derniere unité qui reſte, eſt une livre qui vaut deux dixaines de ſols, & en y joignant la dixaine des 13 ſols du total, cela fait 3 dixaines, dont retranchant 2 dixaines qui ſe trouvent dans la colomne des ſols, reſte 1 qu'on écrit ſous la dixaine des 13 ſ. ce qui fera encore avec le 3, 13 ſ. On paſſera aux unitez de ſols, diſant : 2 & 3 ſont 5 & 7 ſont 12 ; de 13 qui ſont au deſſous, ôtez 12 reſte 1 ſ. Or ce ſol qui reſte, joint avec les 6 deniers qui ſont au deſſous des deniers, fait 1 ſ. 6 d. qui étant retranchez de 1 ſ. 6 d. qui ſe trouvent dans les deniers, il ne reſte rien : ce qui fait voir * qu'on a bien réüſſi ; parce que s'il reſtoit quelque choſe, on ſeroit dans l'erreur, & il faudroit recommencer entierement la ſupputation. On fera de même à l'égard des autres exemples.

La preuve de la ſouſtraction ſera faite en ajoutant le reſte ou reſidu, avec le nombre qui a été retranché ; & ſi l'operation eſt exacte, la

* Ax. 1. *d'Arithmetique.*

somme de ces deux nombres doit * être égale au nombre dont on a retranché ; si cela n'arrive pas, l'operation n'est pas exacte, partant il faut la recommencer. Car la somme de la grandeur retranchée & de la grandeur restante, doit necessairement être égale à la grandeur dont on a fait le retranchement, puisque les parties prises ensemble sont égales au Tout dont elles sont parties. Donc pour être assuré qu'en retranchant de 1600, ce nombre 620, le reste est 980, c'est à dire, que 620 & 980 sont les parties du Tout 1600, j'ajoute ces deux sommes 620 & 980, & si elles font 1600, je conclus qu'elles sont veritablement les parties de 1600, & par consequent que mon operation est bien faite. On suivra la même methode dans les autres exemples.

de	1600
ôtant	620
residu ou reste	980
preuve	1600

DE LA MULTIPLICATION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. LA Multiplication est une addition abregée, par laquelle on ajoute un nombre autant de fois à lui-même, qu'il y a d'unitez dans un autre nombre. Par exemple, multiplier 6 par 3,

* Ax. 2. *d'Arithmetique.*

c'eſt ajouter le nombre 6 à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez en 3, c'eſt à dire, 3 fois pour avoir 18, qui eſt le nombre qu'on cherche.

2. Le nombre cherché par la Multiplication, qui exprime le total ou la ſomme de l'addition d'un autre nombre ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans un troiſiéme, eſt appellé *Produit de la Multiplication*; par exemple, 24 eſt le produit de 3 multiplié par 8.

3. Les deux nombres dont un eſt ajoûté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre, ſont appellez *Racines du Produit de la Multiplication*; par exemple 5 & 7 ſont les racines de 35, parceque 5 multiplié par 7, fait 35.

COROLLAIRE.

En multipliant un nombre par l'autre, indifferemment, c'eſt à dire, le premier par le ſecond, ou le ſecond par le premier; il en reſulte toûjours le même produit. Cela eſt ſi évident, que ce ſeroit embroüiller & obſcurcir cette verité, que de la vouloir demontrer; par exemple, 2 fois 3 eſt la même choſe que 3 fois 2, ſçavoir 6 : ſi on dit 8 fois 5, ou 5 fois 8, on trouvera toûjours 40 pour produit. Puiſque cela eſt ainſi, il ſuit des definitions qu'on vient d'expoſer, que le produit de la Multiplication contient autant de fois une de ſes racines, que l'autre racine contient de fois l'unité. Car, comme on vient de dire, ce produit n'eſt rien autre choſe qu'une des racines ajoutée à elle-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre racine. Par exemple le nombre 54, qui eſt le produit de 9 multiplié par 6, contient autant de fois 9, que 6 contient de fois 1; pareillement le même nombre 54 contient autant de fois 6, que 9 contient de fois 1. Ce Corollaire mérite qu'on y fasse attention, parce-qu'on en tirera plusieurs avantages.

Pour trouver le nombre qu'on cherche par la multiplication, il faut placer les deux nombres à multiplier l'un sur l'autre de la même maniere que dans les operations precedentes. Les exemples qu'on verra dans la suite, feront mieux connoître comment il faut faire la multiplication, que tous les preceptes qu'on en pourroit donner par avance.

EXEMPLE.

Pour multiplier 247 par 3, c'est à dire, pour trouver un nombre égal à 247 repeté 3 fois, ou à 247 fois 3, qui est la même chose; après les avoir disposez, comme il a été enseigné, il faut commencer vers la main droite, disant: 3 fois 7, ou 7 fois 3, qui est la même chose, sont 21 : j'écris 1 sous le premier chifre 3, & je retiens dans ma memoire 2 dixaines pour le rang suivant; je dis ensuite, 3 fois 4 sont 12, & 2 que j'avois retenus sont 14, j'écris 4 & je retiens 1; enfin je dis, 3 fois 2 sont 6 & 1 que j'avois retenu, sont 7 que j'écris : partant je trouve que le produit de cette multiplication est 741.

	247
	3
	741

AUTRE EXEMPLE.

Pour multiplier 275 par 24, c'est à dire, pour trouver quelle somme produit 24 fois 275; il faut dire 4 fois 5 sont 20, & écrire 0 sous le 4 & retenir 2 dixaines. Ensuite 4 fois 7, ou 7 fois 4 sont 28, &

	275
	24
	1100
	550
produit	6600

2 que j'avois retenus ſont 30, j'écris 0 & je retiens 3 dixaines. 4 fois 2 ſont 8, & 3 que j'avois retenus, ſont 11, j'écris 1 ſous le 2 multiplié, & j'avance 1 dixaine, parceque c'eſt tout.

Enſuite il faut multiplier 275 par les 2 dixaines de 24 en cette ſorte ; 2 fois 5 ſont 10, j'écris 0 ſous les dixaines de 24, & je retiens 1 ; enſuite 2 fois 7 ſont 14, & 1 que j'avois retenu, ſont 15, j'écris 5 & je retiens 1 ; 2 fois 2 ſont 4 & 1 que j'avois retenu ſont 5, j'écris 5. Ces deux produits partiaux ainſi arrangez étant par l'addition reduits en une ſomme, on trouve que le produit total eſt 6600, qu'on cherchoit.

OBSERVATION I.

Lorſqu'il faut multiplier un nombre par des livres, ſols ou deniers, on commence toûjours par les moindres eſpeces de monnoye. Or pour multiplier par les deniers & avoir dans la même operation un produit reduit en ſols, ſelon les deniers qui ſe rencontrent depuis 1 juſqu'à onze, il faut prendre de la ſomme qu'on veut multiplier, ces parties ; ſçavoir,

Lorſqu'il y a 1 denier, pour avoir en ſols la valeur du produit, on prendra une douziéme partie du nombre propoſé, parcequ'un denier eſt une 12e partie d'un ſol.

A 2 deniers, on prendra une ſixiéme partie, parceque 2 deniers ſont la ſixiéme partie d'un ſol.

A 3 deniers, on prendra un quart, parceque 3 deniers ſont le quart d'un ſol.

A 4 deniers, on prendra une tierce partie, parceque 4 deniers ſont le tiers d'un ſol.

A 5 deniers, on prendra un quart & une ſixiéme partie, parceque 5 deniers ſont compoſez de 3 deniers & de 2 deniers.

A

A 6 d. on prendra la moitié du nombre proposé, parceque 6 d. sont la moitié d'un sol.

A 7 d. on prendra le tiers, & ensuite le quart, parceque 7 d. sont composez de 4 d. & de 3 d.

A 8 deniers, il faut prendre les deux tiers l'un aprés l'autre, parceque 8 deniers sont composez de deux fois 4 deniers.

A 9 deniers, il faut prendre une moitié & ensuite le quart, parceque 9 deniers sont composez de 6 deniers & de 3 d.

A 10 deniers, il faut prendre une moitié & un tiers, parceque 10 deniers sont composez de 6 deniers & de 4 deniers.

A 11 deniers, il faut prendre 2 fois le tiers, & une fois le quart, pour avoir en sols la valeur du produit des deniers, parceque 11 deniers sont composez de deux fois 4 & de 1 fois 3.

Les exemples suivans rendront l'intelligence & l'application de ces choses claires & faciles, pour peu d'attention qu'on y fasse.

OBSERVATION II.

Lorsqu'on prend quelque moitié, tiers, ou quart, &c. d'un nombre, il faut toûjours commencer vers la main gauche, afin que s'il reste quelques unitez à chaque chifre, elles soient jointes au suivant en qualité de dixaines.

OBSERVATION III.

Lorsqu'on veut reduire en livres un nombre de sols, par exemple pour reduire en livres 428 sols; il faut separer le dernier chifre 8, & prendre la moitié des autres, disant : la moitié de 4 est 2 qu'il faut écrire, la moitié de 2 est 1 qu'il faut aussi écrire, & le chifre 8 qu'on avoit separé signifie 8 sols; partant 428 sols font 21 livres 8 sols.

42	8 f.
21 liv.	8 f.

Pour reduire en livres 12196 ſ. après avoir ſeparé le dernier chifre 6, on prend la moitié des autres : on ne dira pas la moitié de 1, mais on dira la moitié de 12 eſt 6 qu'il faut écrire. On ne dit point la moitié de 1 ; c'eſt pour cela qu'on écrit 0 au deſſous, parcequ'il ne faut pas laiſſer de place vuide en pareille rencontre ; mais cet 1 vaut 10 à l'égard du 9 ſuivant, & y joignant ce 9, cela fera 19 ; on dira la moitié de 19 eſt 9 reſte 1, il faut écrire 9 ſous le 9, & 1 qui reſte eſt une dixaine qu'il faut écrire devant le 6 pour ſignifier 16 ſ. partant 12196 ſols font 609 livres 16 ſols.

1219	6 ſ.
609 l.	16 ſ.

EXEMPLE.

Si on veut connoître quelle ſomme produiſent 48 Muids de vin à raiſon de 35 livres 12 ſols chaque Muid, c'eſt chercher quelle ſomme produiſent 48 fois 35 livres 12 ſols.

Il faut commencer par les ſols, diſant : 2 fois 8 ſont 16 ; partant j'écris 6 ſous le 5 & je retiens 1 : 2 fois 4 ſont 8, & un que j'avois retenu ſont 9 ; j'écris 9. Enſuite je multiplie par la dixaine des 12 ſols, diſant : 1 fois 8 ſont 8, j'écris 8 ſous le 9, au rang des dixaines ; 1 fois 4 ſont 4, j'écris 4. Aprés avoir additionné ou aſſemblé ces deux produits de ſols ainſi arrangez, je trouve que le produit total des 48 fois 12 ſols

	48	*muids*.
a..	35 l.	12 ſ.
	96	ſ.
	48	
	57	6 ſ.
	28 l.	16 ſ.
	240	
	144	
	1708 l.	16 ſ.

eſt 576 ſ. je reduits ces 576 ſ. en livres, comme il a été enſeigné; je trouve pour leur valeur 28 l. 16 ſ. que j'écris au deſſous.

Enſuite je multiplie par les livres, diſant : 8 fois 5, ou 5 fois 8 ſont 40, j'écris 0 ſous le 8 des livres provenuës des ſols, & je retiens 4 : 4 fois 5 ſont 20, & 4 que j'avois retenus ſont 24; j'écris 4 & j'avance 2. Je multiplie enſuite par les dixaines de 35, diſant : 3 fois 8 ſont 24; j'écris 4 au rang des dixaines ſous le produit precedent & je retiens 2 : trois fois 4 ſont 12, & 2 que j'avois retenus ſont 14; j'écris 4 & j'avance 1. Après avoir additionné ces trois produits, je trouve 1708 l. 16 ſ. pour la valeur totale des 48 Muids de vin.

Autre Exemple.

	2008 *aunes.*	
a	... 207 l. 10 ſ. 6 d.	
	1004 ſ.	
	20080	
	2108	4 ſ.
	1054 l.	4 ſ.
	14056	
	40160	
produit	416710 l.	4 ſ.

On demande quelle ſomme d'argent doivent coûter 2008 aunes de marchandiſe à raiſon de 207 l. 10 ſ. 6 d. je commence par les deniers, & à cauſe des 6 deniers, je prends la moitié de 2008, en cette ſorte commençant vers la main

	2008	*aunes.*	
	a... 207	l. 10 ſ.	6 d.
	1004	ſ.	
	20080		
	2108	4 ſ.	
	1054	l.	4 ſ.
	14056		
	40160		
produit	416710	l.	4 ſ.

gauche, diſant: la moitié de 2 eſt 1, que j'écris ſous le 2 ; la moitié de 0 eſt 0 que j'écris enſuite ; la moitié de 0 eſt 0, que j'écris pareillement ; enfin la moitié de 8 eſt 4, que j'écris ſous le 8. Partant je trouve que 2008 fois 6 deniers produiſent 1004 ſols.

Je multiplie enſuite par les ſols ; mais parceque les 0 ne multiplient point ou ne produiſent rien, pour le zero des 10 ſols, j'écris 0 ſous le 4 du produit des deniers. Enſuite je multiplie par la dixaine des 10 ſols, diſant : 1 fois 8 ſont 8, j'écris 8 au rang des dixaines : 1 fois 0 eſt 0, j'écris 0 : 1 fois 0 eſt 0 ; j'écris 0 : 1 fois 2 ſont 2, j'écris 2. J'aſſemble après cela ces deux produits, dont je trouve que la ſomme eſt 21084 ſols, que je reduis en livres, comme il a été enſeigné, & je trouve pour leur valeur 1054 l. 4 ſ.

Enſuite je multiplie par les unitez de livres, diſant: 7 fois 8 ſont 56; j'écris 6 & je retiens 5: 7 fois 0 n'eſt rien, mais 5 que j'avois retenus, ſont 5; j'écris 5 : 7 fois o eſt o ; j'écris o : 7 fois 2 ou 2 fois 7 ſont 14 ; j'écris 4 & j'avance 1. Enſuite parceque les zeros ne produiſent rien, pour le o qui precede le 7 des 207 ; j'écris o au rang des dixaines ſous le 5 du produit precedent, & je multiplie par les 2 centaines, diſant: 2 fois 8 ſont 16; j'écris 6 au rang des centaines, & je retiens 1: 2 fois o ſont o, mais 1 que j'avois retenu eſt 1 ; j'écris 1 ſous le 4: 2 fois o ſont o; j'écris o : enfin 2 fois 2 ſont 4; j'écris 4. Aprés avoir aſſemblé ces trois produits ainſi arrangez, je trouve que les 2008 aunes de marchandiſes couteront 416710 l. 4. ſ.

AUTRE EXEMPLE.

On demande quelle ſomme il faut pour payer 147 arpens, ou acres de terre, à raiſon de 253 l. 14 ſ. 9 d. chacun. Je commence par les deniers ; je prens pour 9 d. une moitié, & enſuite un quart de 147 ; l'un aprés l'autre, comme il a été enſeigné. On ne prend pas la moitié de 1, parceque 2 n'eſt pas en 1, mais on joint cet 1 avec le 4 ſuivant, & on dit, la moitié de 14 eſt 7, qu'il faut écrire ſous le 4 : la moitié de 7 eſt 3, reſte 1 ; il faut

147			
a. . 253	l.	14 ſ.	9 d.
73		ſ.	6 d.
36			9
588			
147			
216		8 ſ.	3 d.
108	l.	8 ſ.	3 d.
441			
735			
294			
37299	l.	8 ſ.	3 d.

écrire 3 ſous le 7, & cet 1 qui reſte eſt une moitié de ſol valant 6 d. j'écris 6 d. Enſuite je prens le quart, commençant toûjours vers la main gauche; je trouve qu'il ne faut point chercher en 1 combien de fois 4, mais je joins cet 1 avec le 4 ſuivant, & je dis : en 14 combien de fois 4, c'eſt à dire, le quart de 14 eſt 3, reſte 2, j'écris 3 ſous le 4, & les 2 qui reſtent étant comparez avec le 7 qui ſuit, valent 2 dixaines; partant je dis : le quart de 27 eſt 6, reſte 3, j'écris 6; mais ces 3 qui reſtent ſont 3 quarts de ſol valants 9 d. j'écris 9 d.

```
          1 4 7
       a..2 5 3   l. 14 ſ.  9  d.
       ---------------------------
            7 3   ſ.        6  d.
            3 6             9
          5 8 8
        1 4 7
       ---------------------------
        2 1 6 | 8 ſ.        3  d.
       ---------------------------
        1 0 8   l.  8 ſ.    3  d.
        4 4 1
      7 3 5
    2 9 4
       ---------------------------
    3 7 2 9 9   l.  8 ſ.    3  d.
```

Après cela je multiplie par les ſols, diſant : 4 fois 7 ſont 28; j'écris 8 & je retiens 2: 4 fois 4 ſont 16 & 2 retenus ſont 18, j'écris 8 & je retiens 1; 4 fois 1 ſont 4, & 1 que j'ay retenu ſont 5, j'écris 5. Je multiplie par la dixaine des ſols, diſant: 1 fois 7 ſont 7; j'écris 7 au rang des dixaines : 1 fois 4 ſont 4; j'écris 4 : 1 fois 1 eſt 1; j'écris 1. Aprés avoir aſſemblé ces produits, tant des deniers que des ſols, je trouve que leur produit total eſt 2168 ſ. 3 d. dont la valeur en livres eſt 108 l. 8 ſ. 3 d. que j'écris au deſſous.

Enfin je multiplie par les livres, diſant : 3 fois 7 ſont 21 l. j'écris 1 l. ſous le 8 du produit des ſols, & je retiens 2 : 3 fois 4 ſont 12, & 2 que j'avois retenus ſont 14 ; j'écris 4 & je retiens 1 : 3 fois 1, ou une fois 3 ſont 3, & 1 que j'avois retenu, ſont 4;j'écris 4.Enſuite je dis:5 fois 7 ſont 35; j'écris 5 ſous le 4 au rang des dixaines,& je retiens 3 : 4 fois 5, ou 5 fois 4 ſont 20, & trois que j'avois retenus, ſont 23 ; j'écris 3 & je retiens 2 : 1 fois 5 ſont 5, & 2 que j'avois retenu ſont 7 ; j'écris 7. Enfin je multiplie par les centaines, diſant : 2 fois 7 ſont 14 ; j'écris 4 au rang des centaines, & je retiens 1 : 2 fois 4 ſont 8, & 1 que j'avois retenu,ſont 9;j'écris 9: 2 fois 1,ou une fois 2 ſont 2; j'écris 2. Après avoir aſſemblé,comme il a été enſeigné dans l'addition, ces 4 produits ainſi arrangez, on trouvera que pour payer les 147 arpents de terre, il faut la ſomme de 37299 livres 8 ſols 3 deniers.

AVERTISSEMENT.

Pour reduire un nombre de livres en ſols, il faut multiplier ce nombre par 20 ſols, puiſque chaque livre vaut 20 ſols ; le produit de cette multiplication donnera en ſols la valeur des livres : par exemple pour reduire 12 livres en ſols, on multipliera 12 par 20, parceque 12 l. ſont 12 fois 20 ſols.

Pour reduire un nombre de ſols en deniers, il faut multiplier ce nombre par 12, puiſque chaque ſol vaut 12 deniers ; le produit de cette multiplication donnera la valeur des ſols en deniers: par exemple pour reduire 15 ſols en deniers, on multiplie 15 par 12, parceque 15 ſols ſont 15 fois 12 deniers.

DE LA DIVISION DES NOMBRES.

DEFINITIONS.

1. La Division eſt une operation par laquelle on partage un nombre en autant de parties égales, qu'il y a d'unitez dans un autre.

2. Le nombre qui exprime une de ces parties égales, eſt appellé *Quotient*.

3. Le nombre qu'on veut partager, eſt appellé *Nombre à diviſer*.

4. Le nombre qui exprime en combien de parties on veut diviſer l'autre, eſt appellé *Diviſeur*.

Pour diviſer un nombre par un autre, on cherche combien de fois le Diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer; le nombre qui exprimera combien de fois l'un ſera contenu dans l'autre, ſera le veritable Quotient de la diviſion: ce qu'on fera voir évidemment dans le premier des Corollaires qui ſuivront après qu'on aura expoſé la maniere de faire cette operation.

Il faut écrire le nombre à diviſer, enſuite mener une ligne, écrire le diviſeur deſſous, commençant de gauche à droit, & au bout de la ligne qu'on vient de mener, on écrira le quotient, comme on verra dans la ſuite.

Exemple.

Pour diviſer 128 par 4, c'eſt à dire, pour trouver quel eſt le quart de 128, ou en 128 combien de fois 4: après avoir écrit le nombre 128 &

	0 | 0	
nomb. à diviſer	~~1~~ ~~2~~ ~~8~~	} 32 *quot.*
diviſeur	~~4~~ ~~4~~	

avoir mené la ligne au deſſous, je ne peux pas écrire le diviſeur 4 au deſſous de 1, parceque 4 ne ſont pas contenus en 1, mais je l'écris ſous le 2, & je cherche en 12 combien de fois 4, il y eſt 3 fois, j'écris 3 en un lieu particulier où je veux placer le quotient. Enſuite je multiplie ce 3 du quotient par le diviſeur 4, ce qui fait 12 : or ces 12 étant retranchez de 12, qui ſont les deux premiers chifres du nombre à diviſer, il ne reſte rien. Partant j'écris 0 au deſſus du 2, & je retranche le diviſeur 4 & les deux premiers chifres 12 du nombre à diviſer. Enſuite j'avance le diviſeur 4 ſous 8, & je dis en 8 combien de fois 4? je trouve que 4 y ſont 2 fois ; j'écris 2 au quotient. Enſuite je multiplie le diviſeur 4 par ce 2, ce qui produit 8. Or retranchant ce produit 8 du chifre 8 du nombre à diviſer, il ne reſte rien : partant j'écris 0 au deſſus de 8 avec une petite ſeparation, & je tranche le 4 & le 8. Cela fait, je trouve 32 pour quotient de cette diviſion ; c'eſt à dire que 32 eſt une quatriéme partie de 128, ou que 32 eſt 4 fois en 128, ou enfin que 128 contient autant de fois 4 que 32 contient de fois l'unité.

Autre Exemple.

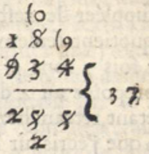
Pour diviſer 804 en 5 parties égales ; après avoir écrit le diviſeur 5 ſous le 8, premier chifre du nombre à diviſer, vers la main gauche ; je dis en 8 combien y a t-il de fois 5 ? il y eſt une

$$\begin{array}{rl} & \cancel{3}\ \cancel{0}\ (4 \quad \textit{reste} \\ \textit{nombre à diviser} & \cancel{8}\ \cancel{0}\ \cancel{4} \\ \hline \textit{diviseur} & \cancel{5}\ \cancel{5}\ \cancel{5} \end{array} \Big\} \; 1\ 6\ 0 \ \textit{quotient.}$$

fois, j'écris 1 au quotient. Ensuite (multipliant ce que je viens d'écrire au quotient par le diviseur) je dis 1 fois 5 sont 5. Or 5 étant retranchez de 8, il reste 3 que j'écris sur 8 après avoir tranché le 8 & le 5 avec une petite ligne pour marquer que l'operation est finie à leur égard. Je r'écris le diviseur 5 sous le 0 du nombre à diviser, & considerant le 3 que je viens de trouver de reste sur le chifre 8, devant le 0 du nombre à diviser, cela fait 30 ; je cherche en 30 combien de fois le nombre 5 ? je l'y trouve 6 fois que j'écris au quotient, & je multiplie ce 6 du quotient par le diviseur 5, cela fait 30. Or ce nombre 30 étant retranché du premier nombre 30, il ne reste rien ; partant (ayant tranché le diviseur 5 & le premier nombre 30) j'écris 0 au dessus de 0. Enfin considerant ce dernier 0 comme placé devant le 4 du nombre à diviser, cela ne fait que 4; je cherche en 4 combien de fois 5 ? ce nombre 5 n'y étant point contenu, j'écris au quotient 0, & je dis 5 fois 0 produisent 0, lequel 0 ou rien étant retranché de 4, il reste 4 que je separe avec une petite ligne d'avec les autres chifres tranchez. Ainsi je trouve pour quotient de cette division 160 & 4 qui restent, c'est à dire que 160 est une 5^e partie de 804, excepté 4 : ou bien que le nombre 5 est contenu 160 fois dans 804 moins 4. Ce nombre 4 reste encore à diviser.

Autre Exemple.

Lorsque le nombre diviseur est exprimé par pluſieurs chifres, il eſt un peu plus difficile d'apprendre cette operation que les autres ; c'eſt pour cela qu'il faut s'y appliquer un peu davantage, & s'y exercer frequemment par pluſieurs exemples ; après cela on y trouvera la même facilité que dans les autres.



Pour diviſer 934 par 25, après avoir écrit 25 ſous 93, il faut chercher en ſon eſprit combien de fois 2 ſe rencontrent en 9. On trouve veritablement 4 fois 2 en 9 ; mais il ne faut écrire au quotient que 3 fois (ſouvent on met au quotient moins qu'on ne trouve veritablement, à cauſe de quelques dixaines qui reparent cela dans l'operation, ce qu'on connoîtra facilement dans la ſuite, & par l'uſage). Or multipliant ce 3 du quotient par 5 du diviſeur, cela fait 15, j'imagine des dixaines prépoſées au 3 qui eſt ſur le 5, autant qu'il eſt neceſſaire pour former un nombre dans lequel 15 ſoit contenu. Dans cette occaſion ici, il faut imaginer que le 3 qui eſt ſur le 5 ſoit precedé de 2 dixaines, cela fera 23 ; & dire, ſi de 23 on retranche le nombre 15, dont on vient de parler, il reſte 8 que j'écris deſſus le 3, & je retiens les 2 dixaines que j'avois imaginées, & je tranche le 3 & le 5 de deſſous. Enſuite je multiplie le 2 de deſſous le 9 par le 3 que j'ay écrit au quotient, cela fait 6 avec les 2 dixaines que je viens de retenir, cela fait 8. Or ces 8 étant retranchez de 9, il reſte 1 que j'écris ſur le 9, & je tranche le 9 & le 2 de deſſous.

Enſuite je r'écris le diviſeur 25 : de ſorte que le 5 ſuive le 5 precedent & ſoit ſous le 4, & le 2 ſous le 5 precedent. Et je cherche en 18 combien de fois eſt contenu le 2 qui eſt en bas ſous la colomne du 8. Je trouve qu'il y est contenu 9 fois ; mais (parceque j'aurai dans un moment occasion de retenir quelques dixaines qui contribueront à suppléer le reste) j'écrirai au quotient seulement 7. Or disant 5 fois 7 sont 35 (imaginant 4 preposez au 4 de dessus) ces 35 étant retranchez de 44, il reste 9 que j'écris sur le 4, & je retiens ces 4 dixaines. Ensuite je multiplie encore le 7 du quotient par le 2 qui est sous le 5, cela fait 14, auquel nombre joignant les 4 dixaines que je viens de retenir, cela fait 18. Or ces 18 étant retranchez des 18 qui sont au dessus de 93, il ne reste rien. Partant j'écris 0 sur le 8 ; & parcequ'il n'y a plus de chifre du nombre à diviser sous lequel je puisse avancer ou r'écrire le diviseur 25, je separe avec une petite ligne le 0 & le 9 que je viens d'écrire, pour marquer que c'est ce qui reste à diviser par 25. Enfin je trouve que le quotient de cette division est 37, reste 9.

$$\begin{array}{l} \quad (0 \\ \cancel{1}\,\cancel{8}\,(9 \\ \cancel{9}\,\cancel{3}\,\cancel{4} \\ \hline \cancel{2}\,\cancel{5}\,\cancel{5} \\ \quad \cancel{2} \end{array} \Big\} \; 37$$

Autre Exemple.

Pour diviser 1580894 par 509, à cause que le diviseur 509 n'est point contenu dans 158 qui sont les 3 premiers chifres du nombre à diviser, j'écris le premier chifre 5 du diviseur sous le 5 deuxiéme chifre du nombre à diviser, & le reste de suite. Cela fait, je cherche en 15 combien 5 sont contenus de fois, j'y trouve ce nombre 5 trois fois, j'écris 3 au quotient, que je multiplie par le 9 dernier chifre

$$\begin{array}{l} \quad 0\,5\,3 \\ \cancel{1}\,\cancel{5}\,\cancel{8}\,\cancel{0}\,8\,9\,4 \\ \hline \quad \cancel{5}\,\cancel{0}\,\cancel{9} \end{array} \Big\} \; 3$$

chifre du diviſeur ; cela fait 27 (en imaginant 3 dixaines appoſées devant le o de deſſus le 9, cela fera 30.) Or 27 produit du quotient & de ce 9 du diviſeur étant retranchez de ces 30 imaginez dans le nombre à diviſer, il reſte 3. Partant j'écris 3 au deſſus du o , & je retiens les 3 dixaines que j'avois imaginées , & je tranche le 9 & le o de deſſus. Enſuite je multiplie ce 3 du quotient par le o du diviſeur ; cela ne produit que o ou rien, auquel j'ajoûte ces 3 dixaines que je viens de retenir , cela fait 3 que je retranche du 8 du nombre à diviſer , il reſte 5 que j'écris au deſſus de ce 8, & je tranche le o & le 8, qui ſont l'un ſur l'autre. Enſuite je multiplie ce même 3 du quotient par le 5 du diviſeur, cela fait 15. Or ces 15 étant retranchez de 15 qui font le commencement du nombre à diviſer, il reſte o. Partant j'écris o ſur le 5.

Aprés cela je r'écris le diviſeur en plaçant ſon dernier chifre 9 ſous le 8 du nombre à diviſer aprés le 9 precedent, & le reſte des autres chifres de ſuite vers la main gauche. Le o qui eſt ſur le 5, & le 5 qui eſt ſur le 8 ne formant que le nombre de 5, je cherche en 5 combien il y a de fois 5, je trouve que ce nombre 5 eſt ſeulement contenu une fois en 5, j'écris 1 au quotient. Je multiplie cet 1 par 9 qui eſt le dernier chifre du diviſeur, cela ne produit que 9. Or ce 9 ne peut être retranché du 8 qui eſt deſſus ; mais en imaginant 1 dixaine prepoſée à ce 8, cela fera 18 , dont 9 étant retranchez, il reſte 9 que j'écris ſur le 8, je tranche ce 9 & ce 8, & je retiens cette dixaine imaginée. En-

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & 2 & & & \\ & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{3} & 9 & & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{8} & 9 & 4 \\ \hline & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{9} & \cancel{9} & & \\ & & \cancel{5} & \cancel{0} & & & \end{array} \Bigg\} 31$$

ſuite je multiplie cet 1 du quotient par 0 du diviſeur, cela produit 0, y ajoutant cette dixaine que je viens de retenir, cela fait 1 qui étant retranché du 3 qui eſt ſur le 0, reſte 2 que j'écris ſur ce 3. Je multiplie le 1 du quotient par 5 dernier chifre du diviſeur, cela ne fait que 5 (parceque l'unité ne multiplie jamais) qui étant retranché du 5 qui eſt deſſus le 8, il ne reſte rien; j'écris 0 ſur le 5 & je tranche le 5 du diviſeur, & le 5 & le 0 qui ſont ſur le 8 & le 5 du nombre à diviſer.

J'écris une troiſiéme fois le diviſeur ſous le nombre à diviſer: de ſorte que ſon dernier chifre 9 ſoit ſous le 9, & enſuite ſes autres chifres ſous les autres de droit à gauche; & je dis: le 0 qui eſt au deſſus du 5 & le 2 qui eſt enſuite au deſſus du 3 ne font que 2: or en 2 combien de fois 5? il n'y eſt point, & partant j'écris 0 au quotient. Enſuite je multiplie le 9 du diviſeur par le 0 du quotient, & je dis: 9 fois 0 c'eſt 0, de 9 qui eſt au deſſus ôtant 0, reſte 9 que j'écris au deſſus du 9 & je tranche les deux 9 precedens. Après cela, 0 multiplié par 0 produit 0, de 9 qui eſt au deſſus du 8, ôtant 0, reſte 9, que j'écris au deſſus du dernier 8 precedent, que je tranche avec le 0 du diviſeur. Je dis encore: 5 fois 0 c'eſt 0, de 2 qui eſt au deſſus du 3 ôtant 0, reſte 2, que j'écris au deſſus du 2, & je tranche le 2 precedent & le 5 du diviſeur.

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
 & & & 2 & & & \\
 & & \cancel{0} & \cancel{2} & 9 & & \\
 & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{9} & 9 & \\
\cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{9} & 4 \\
\hline
 & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{9} & \cancel{9} & \cancel{9} & \\
 & & \cancel{5} & \cancel{0} & \cancel{0} & & \\
 & & & \cancel{5} & & &
\end{array}\right\} 310$$

Enfin je r'écris le diviſeur, de ſorte que ſon dernier chifre 9 ſoit ſous le 4 du nombre à diviſer, enſuite des autres derniers chifres du même diviſeur, & que les autres chifres de ce même diviſeur ſoient ſous les autres immédiatement ſuivans vers la main gauche. Je cherche en 29 combien il y a de fois 5, je trouve que ce nombre y eſt 5 fois, j'écris 5 au quotient. Par

```
       2(4
      029(4
    05399(9
   1580894 }
   -------  } 3105
    509999 }
      5000
       55
```

ce nombre 5 du quotient je multiplie 9, dernier chifre du diviſeur, ce qui produit 45; j'imagine autant de dixaines prépoſées au 4 qui eſt ſur ce 9, qu'il eſt neceſſaire pour que 45 y ſoient contenus; je dis: 45 étant retranchez de 54, il reſte 9 que j'écris ſur le 4, je retiens 5, je tranche le 9 & le 4 qui eſt au deſſus. Enſuite je multiplie 5 par 0, cela produit 0 auquel ajoutant 5 que je viens de retenir, cela fait 5 qui étant retranchez du 9, qui eſt ſur le 9, il reſte 4 que j'écris ſur le 9, & je tranche ce 9 & le 0 du diviſeur. Je multiplie le nombre 5 du quotient par le nombre 5 du diviſeur, cela fait 25, lequel nombre étant retranché de 29, il reſte 4 que j'écris ſur le 9 après avoir tranché les 29 & le 5 du diviſeur; cela fait je ſepare avec une ligne ce reſte 449. Partant je trouve que le quotient de cette diviſion eſt 3105, & qu'il reſte 449.

AVERTISSEMENT.

1. Lorſqu'il arrive que le produit du chifre du quotient & du dernier chifre du diviſeur vers la

main gauche ſeul, ou joint avec quelques dixaines, ſi on en avoit retenu, forme un nombre plus grand que celui qui eſt au deſſus du diviſeur, dont on voudroit retrancher ce produit ; c'eſt une marque que le chifre écrit au quotient exprime un nombre de fois trop grand. Partant il convient le diminuer de quelque unité.

2. Au contraire, après avoir multiplié le chifre du quotient par le diviſeur, comme il a été enſeigné, s'il arrive que ce qui reſte au deſſus du diviſeur ou avant qu'on l'ait r'écrit, ou lorſqu'il eſt en ſa derniere place, eſt plus grand que le même diviſeur ; c'eſt une marque que le chifre écrit au quotient n'exprime pas un nombre aſſez grand : partant qu'il faut augmenter ce nombre de quelque unité.

3. A chaque poſition ou promotion du diviſeur, on ne doit jamais poſer au quotient aucun chifre qui exprime un nombre plus grand que 9.

4. Lorſqu'on ſe contente d'indiquer une multiplication de deux ou pluſieurs grandeurs, on interpoſe ce ſigne $\times$; par exemple $2 \times 3 = 6$. Cela ſignifie 2 multipliez par 3 produiſent une grandeur égale à 6.

5. Lorſqu'on veut ſeulement exprimer la diviſion d'une grandeur par un autre, on interpoſe ce ſigne — ; par exemple $\frac{6}{2} = 3$: cela ſignifie que 6 diviſez par 2 donnent pour quotient une grandeur égale à 3. Si on écrit ſeulement $\frac{5}{4}$, cela ſignifie 5 unitez diviſées par 4 ; c'eſt ce qu'on appelle *Fraction*, comme on verra dans la ſuite.

6. Le terme ou mot qui eſt particulierement

en uſage dans l'Addition, c'eſt *&* ; par exemple 3 *&* 5 ſont 8.

7. Le terme qui eſt particulierement en uſage dans la Souſtraction, c'eſt *de* ; par exemple, ſi *de* 7 on retranche 4, reſte 3.

8. Le terme qui eſt particulierement en uſage dans la Multiplication, c'eſt *fois* ; par exemple 6 *fois* 8 ſont 48.

9. Le terme qui eſt particulierement en uſage dans la Diviſion, c'eſt *en* ; par exemple *en* 12 combien de fois 2 ? 6 fois.

Reflexions Fondamentales.

La pratique de la Diviſion fait naître les cinq Corollaires ſuivans qu'il eſt important de bien remarquer.

COROLLAIRE I.

Pour faire la Diviſion, il faut chercher combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer, & l'ayant trouvé, ce nombre de fois eſt le quotient qu'on cherche. Soit par exemple le nombre 15 à diviſer par 5, je cherche en 15 combien il y a de fois 5, je l'y trouve 3 fois ; je dis que 3 eſt le quotient, c'eſt à dire, une 5^e partie de 15 ; car nous venons de voir que 3 fois ce diviſeur 5 produit 15, parceque 5 eſt 3 fois en 15. Il eſt certain que 5 fois 3 font auſſi 15 ; puiſque 3 fois 5, ou 5 fois 3 font le même produit ; & partant, puiſque 5 fois 3 font 15, il eſt évident que ce nombre 3 eſt une 5^e partie de 15, car il faut l'ajouter 5 fois à lui-même pour faire le nombre 15. Donc le nombre qui exprime combien de fois un nombre eſt contenu dans un autre, eſt le quotient de ce dernier nombre diviſé par l'autre.

COROLLAIRE II.

Il ſuit de ces choſes que le nombre à diviſer contient autant de fois le diviſeur, que le quotient contient de fois l'unité ; car le diviſeur eſt contenu autant de fois dans le nombre à diviſer, que l'unité ſe trouve exprimée de fois par le quotient.

COROLLAIRE III.

Le produit du quotient de la Diviſion multiplié par le diviſeur, eſt toûjours égal au nombre à diviſer. Car puiſque * le nombre à diviſer contient autant de fois le diviſeur, que le quotient contient de fois l'unité ; ſi j'ajoute le diviſeur à lui-même autant de fois qu'il y a d'unitez dans le quotient, c'eſt à dire, ** ſi je multiplie le diviſeur par le quotient, le produit de cette multiplication ſera égal au nombre à diviſer.

COROLLAIRE IV.

La Multiplication & la Diviſion ſe ſervent de preuves l'une à l'autre. Car on eſt certain que le nombre 8, par exemple, multiplié par 5 produit 40, ſi 8 étant ajouté à lui-même 5 fois, fait 40 ; c'eſt à dire, ſi 8 ſont contenus 5 fois dans 40, ce qu'on peut ſçavoir en diviſant 40 par 8. Au contraire on eſt certain qu'ayant diviſé 40 par 8, le

* *Cor. 2. preced.*
** *Déf. de la Multip.*

quotient eſt 5, ſi 5 eſt 8 fois dans 40 ; ce qu'on connoit en multipliant le quotient 5 par le diviſeur 8.

De même, ſi 3489 eſt le quotient de 136098 diviſez par 39, & 27 reſtans ; pour être aſſuré que cette operation eſt bien faite, il faut multiplier ce quotient 3489 par 39, & au produit ajouter le reſte 27. Alors ſi la ſomme qui en reſultera eſt égale au nombre à diviſer, on doit être certain que l'operation eſt très exacte. S'il arrivoit autrement, l'operation ne ſeroit pas juſte, & il faudroit la recommencer.

```
   3 3 (2
 1 9 4 7 (7
1 3 6 0 9 8 } 3489
-----------
 3 9 9 9 9
   3 3 3
```

Enfin pour connoître ſi 741000 eſt le veritable produit de 570 multipliez par 1300, il faut diviſer 741000 par 570, & on doit trouver 1300 au quotient ſans aucun reſte ; ou bien il faut diviſer 741000 par 1300, & on trouvera auſſi ſans aucun reſte 570 pour le quotient. S'il arrivoit autrement, l'operation ſeroit vicieuſe & fauſſe, & il faudroit la recommencer plus exactement.

```
   570
  1300
------
171000
 570
------
741000
------
```

COROLLAIRE V.

La Diviſion eſt une Souſtraction abregée. Car afin qu'on puiſſe aſſurer que le diviſeur eſt contenu un certain nombre de fois dans le nombre à diviſer ; il faut que du nombre à diviſer on puiſſe retrancher le diviſeur autant de fois qu'on a trouvé qu'il y étoit contenu. Par exemple, ſi on diviſe 24 par 6, on dira que le diviſeur 6 eſt 4 fois en 24 ; & pour en être certain, on retranchera 4 fois 6 du nombre 24, c'eſt à dire que de 24 on retranchera le produit de 6 multiplié par 4.

DES FRACTIONS.

DEFINITIONS.

1. Une Fraction eſt la maniere d'exprimer une ou pluſieurs parties d'un ou de pluſieurs *tous*, *unitez*, *ou entiers*, diviſez chacun en un certain nombre de parties égales. Par exemple, la diſpoſition de ces deux chifres $\frac{3}{4}$ ſignifie trois des parties égales d'un *entier* partagé en 4, c'eſt à dire trois quarts. Cette autre expreſſion $\frac{7}{3}$ fait connoître que, pluſieurs entiers, par exemple, pluſieurs écus étant diviſez chacun en trois parties égales, on veut marquer 7 de ces parties égales, c'eſt à dire, 7 tiers.

Je peux encore dire qu'une Fraction eſt une diviſion indiquée ſeulement, c'eſt à dire, dont on exprime le quotient en écrivant la grandeur à diviſer au deſſus d'une petite ligne, enſuite en écrivant le diviſeur au deſſous. Par exemple, pour exprimer le quotient de 5 unitez diviſées par 8, on écrit $\frac{5}{8}$, ce qui ſignifie cinq huitiémes, c'eſt à dire, que, ſi on conſidere un Tout diviſé en huit parties égales, cette Fraction $\frac{5}{8}$ ſignifiera 5 des parties égales, qui ſont des huitiémes.

Pour bien entendre comment 5 unitez peuvent être diviſées en 8 parties égales, & comment le quotient de cette diviſion eſt 5 huitiémes du Tout ou de l'Entier 5; il faut conſiderer chacune de ces 5 unitez comme partagée en 8 parties égales, ce qui produira 40 huitiémes d'unité. Alors en diviſant ces 40 huitiémes parties égales

égales d'unité par ce nombre 8, c'est la même chose que si on divisoit ces 5 unitez par 8; puisque ce nombre de 5 unitez & les 40 huitiémes parties de chacune de ces unitez sont la même chose, & que le quotient de la division de 40 huitiémes parties d'unité par 8, sont 5 huitiémes parties d'unité.

2. Le dénominateur d'une fraction est la grandeur inferieure à la petite ligne interposée, parceque cette grandeur dénomme ou exprime dans les nombres les cinquiémes, septiémes, dixiémes, &c. parties de l'unité; comme dans cet exemple $\frac{2}{3}$, le nombre 3 fait connoître que ce sont des tiers d'unité.

3. Le numerateur d'une fraction est la grandeur superieure à la petite ligne interposée, parceque cette grandeur exprime combien de parties de l'unité, qui sont dénommées par le chifre inferieur, vaut la fraction. Par exemple dans cette fraction $\frac{4}{7}$ on trouve pour numerateur 4; qui fait connoître que la valeur de cette fraction est 4 septiémes parties d'unité.

On fait à l'égard des fractions les mêmes operations qu'on vient de faire pour les nombres entiers; mais avant que d'en venir à la pratique, il faut remarquer les 4 choses suivantes.

Observations essentielles pour l'usage des Fractions.

1. Pour reduire une fraction à de moindres termes, c'est à dire, pour exprimer une fraction par des termes plus simples; par exemple pour

trouver une fraction equivalente à $\frac{6}{18}$, & qui soit exprimée par des chifres moindres que 6 & que 18, il faut chercher un nombre par lequel on puisse diviser également le numerateur & le dénominateur sans aucun reste. Comme dans cet exemple $\frac{6}{18}$, on trouve que 2 peut diviser 6 & 18 sans reste, on mettra le quotient de 6 divisé par 2 pour numerateur de la nouvelle Fraction, & le quotient du dénominateur divisé par le même nombre 2, pour dénominateur, & on aura $\frac{3}{9}$ pour la nouvelle fraction, qui vaut autant que $\frac{6}{18}$. Mais on peut encore trouver un nombre qui divisera également 3 & 9 sans reste, sçavoir 3; & partant on aura $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{3}{9}$, ou de $\frac{6}{18}$.

Pour trouver facilement le diviseur commun, il faut diviser le plus grand des deux nombres qui expriment la fraction par le plus petit; & s'il reste quelque chose, le nombre qui a servi de diviseur à la division precedente, sera divisé par ce reste; & si après cette division il reste encore quelque nombre, ce sera un nouveau diviseur pour le nombre qui a servi de diviseur à la division precedente. On continuera de même jusqu'à ce qu'on soit parvenu à quelque division où il ne reste rien; le dernier de ces diviseurs sera le diviseur commun au numerateur & au dénominateur de la fraction proposée.

Soit par exemple cette fraction $\frac{45}{72}$, & qu'au numerateur 45, & au dénominateur 72, il soit necessaire de trouver un diviseur commun sans reste. Il faut diviser 72 par 45, il restera 27; ensuite on divisera 45 par le reste 27, il restera 18; on divisera encore 27 par 18, il restera 9; & enfin on divisera 18 par 9, & il ne restera rien; ce qui fera connoître que 9 sera le plus grand & commun diviseur du numerateur, & du dénominateur de la fraction $\frac{45}{72}$ qui sera reduite par ce moyen à son équivalente $\frac{5}{8}$. Mais s'il arrivoit qu'après avoir fait toutes ces divisions, il y eut pour reste 1, ce seroit une marque que la fraction ne pourroit être reduite à de moindres termes.

S'il se rencontroit un ou plusieurs 0 à la fin du numerateur & du dénominateur d'une fraction; on reduira facilement cette fraction à moindres termes, en ôtant autant de zeros de la fin du numerateur, que de la fin du dénominateur; par exemple, cette fraction $\frac{400}{500}$ sera reduite à son équivalente ou égale $\frac{4}{5}$, en retranchant de part & d'autre 0 0: puisque dans cet exemple c'est la même chose que si on divisoit le numerateur 400 & le dénominateur 500, par le nombre 100. Si on ôtoit seulement un zero, ce seroit diviser par 10, &c.

2. Reduire deux fractions à même dénomi-

nation, c'eſt leur chercher un dénominateur commun ſans changer leur valeur ; par exemple, pour reduire $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ à une même dénomination, il faut multiplier les dénominateurs 3 & 4 l'un par l'autre, on aura 12 qui ſera le dénominateur commun. Enſuite on multipliera le numerateur 2 d'une de ces fractions par le dénominateur 4 de l'autre, & on aura 8 qu'on écrira au deſſus du 2. Enfin on multipliera le dénominateur 3 par le numerateur 3, on aura 9 qu'on écrira ſur le 3. Et partant on aura au lieu de $\frac{2}{3}$ ſon égale $\frac{8}{12}$; & au lieu de $\frac{3}{4}$ on aura ſon égale $\frac{9}{12}$. Or $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ ſont en même dénomination, ce qu'il falloit chercher.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 8 & & 9 \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{3}{4} \end{array} \left\{ \begin{array}{cc} \frac{8}{12} & \frac{9}{12} \end{array} \right. \\ \hline 12 \end{array}$$

Lorſqu'il y a plus de deux fractions ; par exemple $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, il faut multiplier tous les dénominateurs de ſuite l'un par l'autre, comme dans cet exemple ; 3 fois 4 ſont 12, & 5 fois 12 ſont 60 qui ſera le dénominateur commun ; & pour avoir les numerateurs, on prendra pour le numerateur de la premiere fraction les deux tiers de 60, ſçavoir 40 ; pour le numerateur de la ſeconde, on prendra les trois quarts de 60, ſçavoir,

voir 45 ; & pour le numerateur de la troisiéme, on prendra les quatre cinquiémes de 60 : on fera de même lorsqu'il y aura un plus grand nombre de fractions. On trouvera $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, au lieu de $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, & $\frac{4}{5}$; la raison de cela est facile à comprendre, parcequ'en cet exemple on considere le Tout ou l'Entier divisé en 60 parties égales. Ainsi lorsqu'on prendra les deux tiers de 60, on aura les deux tiers d'un Entier ; ce qui est la même chose que la premiere fraction : on dira la même chose des autres.

3. Pour connoître la valeur d'une fraction par rapport à l'Entier, dont elle exprime une ou plusieurs parties ; par exemple pour connoître la valeur des $\frac{3}{4}$ d'une livre, il faut multiplier 20 sols, valeur de la livre par le numerateur 3 de la fraction, & diviser le produit 60 par le dénominateur 4 de la fraction, le quotient de cette division sera 15 sols, qui est la valeur cherchée ; parceque les trois quarts d'une livre est la même chose que le quart de trois livres, comme on a observé dans la definition de fraction qui est la premiere des precedentes

4. Pour reduire des Entiers ou unitez en fraction, il faut multiplier le nombre de ces unitez par le dénominateur de la fraction, dans laquelle on les veut reduire ; par exemple pour reduire 4 en cinquiémes, il faut multiplier 4 par 5, on aura 20, auquel on mettra 5 pour dénominateur, & on aura $\frac{20}{5}$. Cela est évident, puisque chaque

unité vaut 5 cinquiémes, quatre quarts, dix dixiémes, &c.

Reciproquement enfin pour reduire des fractions en Entiers, lorſque cela eſt poſſible, il faut diviſer le numerateur par le dénominateur, & le quotient de cette diviſion exprimera combien la fraction vaut d'Entiers; par exemple, pour ſçavoir combien cette fraction $\frac{15}{5}$ vaut d'Entiers, en diviſant 15 par 5, on trouvera que cette fraction vaut 3 Entiers; puiſqu'il faut 5 cinquiémes pour faire un entier, ou trois tiers, ou 13 treiziémes,&c.

DE L'ADDITION DES FRACTIONS.

Si les fractions qu'on veut aſſembler ſont en même dénomination; par exemple $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{5}$, il faut aſſembler les numerateurs, & ſouſcrire à leur ſomme le dénominateur commun, & on aura $\frac{7}{5}$.

Si les fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y reduire *, & enſuite aſſembler les numerateurs, comme on vient d'enſeigner; par exemple pour aſſembler $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$;

* 2e *Obſervation precedente.*

on trouvera leurs équivalentes $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$ en même dénomination : on fera l'addition de 8 & de 9 & on aura $\frac{17}{12}$ pour la ſomme des deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$; ce qui eſt la même choſe que 1 entier & $\frac{5}{12}$.

DE LA SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

ON peut ſouſtraire ou retrancher une fraction d'une autre fraction, ou d'un ou de pluſieurs entiers.

Pour ſouſtraire une fraction, par exemple $\frac{3}{7}$, d'une autre fraction $\frac{5}{7}$ de même dénomination ; il faut ſouſtraire le numerateur 3 de l'autre numerateur 5, & on aura pour reſte $\frac{2}{7}$.

Si les Fractions ne ſont pas en même dénomination, il faut les y reduire, & ſouſtraire enſuite le numerateur de l'une, du numerateur de l'autre ; par exemple pour ôter la fraction $\frac{2}{7}$ de $\frac{5}{8}$, après les avoir reduites à même dénomination, on aura leurs équivalentes $\frac{16}{56}$ & $\frac{35}{56}$, & après avoir soustrait 16 de 35, on trouvera pour reste $\frac{19}{56}$.

Pour retrancher une fraction d'un ou plusieurs entiers, il faut reduire ces entiers en fraction de même dénomination que la fraction qu'on veut retrancher. Ensuite on soustrait le numerateur de l'une, du numerateur de l'autre, comme on vient d'enseigner : par exemple pour soustraire $\frac{4}{5}$ de 3 entiers, après avoir reduit les trois entiers en cinquiémes, on aura $\frac{15}{5}$, dont $\frac{4}{5}$ étant ôtez, reste $\frac{11}{5}$, & ainsi des autres.

On peut voir facilement par ce moyen laquelle de deux fractions inégales est la plus grande, & de combien l'une excede l'autre. On trouvera, par exemple que $\frac{3}{4}$ excede $\frac{2}{3}$ de la valeur de $\frac{1}{12}$.

Si on veut faire la preuve de l'addition de fractions, il faut retrancher du total chaque fraction qui a été assemblée ; & après cela, s'il ne reste rien, on a bien réüssi, s'il arrive autrement, on s'est trompé.

Pour faire la preuve de la soustraction des fractions, il faut ajouter ce qu'on trouve qui reste avec ce qu'on a retranché, & le total doit être égal à la fraction dont on a retranché. Ces preuves ont le même fondement que dans les nombres entiers.

DE LA MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

ON peut multiplier des fractions par des fractions, ou des entiers par des fractions; ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour multiplier des fractions l'une par l'autre, il faut multiplier leurs numerateurs l'un par l'autre; le produit qui en resultera sera le numerateur de la fraction qu'on cherche pour produit; il faut ensuite multiplier les dénominateurs l'un par l'autre, & le produit sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche. Par exemple, pour multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{8}$, on aura pour produit $\frac{12}{40}$, & après l'avoir reduit à moindres termes, on aura $\frac{3}{10}$.

Pour multiplier un nombre par une fraction, on reduira ce nombre en fraction, ce qu'on peut faire en deux manieres, ou en mettant à ce nombre pour dénominateur 1, ou en le multipliant par le dénominateur de la fraction, comme on a enseigné. Ensuite on fera la multiplication de ces deux fractions. Par exemple, pour multiplier 4 par $\frac{2}{3}$, il faudra multiplier $\frac{4}{1}$ par $\frac{2}{3}$, comme on vient d'enſeigner, & on aura pour produit $\frac{8}{3}$.

Pour multiplier des entiers & fractions par des entiers & fractions; par exemple, pour multiplier $5\frac{1}{2}$ par $3\frac{2}{5}$, il faut reduire $5\frac{1}{2}$ dans une ſeule fraction, ſçavoir $\frac{11}{2}$. Il faut pareillement reduire $3\frac{2}{5}$ en une ſeule fraction $\frac{17}{5}$. Enſuite on multipliera $\frac{11}{2}$ par $\frac{17}{5}$, ce qui eſt la même choſe que de multiplier 5 & $\frac{1}{2}$ par 3 & $\frac{2}{5}$, on aura pour produit $\frac{187}{10}$.

DE LA DIVISION DES FRACTIONS.

On peut diviſer une fraction par une autre fraction, ou des entiers par une fraction, ou enfin des entiers & fractions par des entiers & fractions.

Pour diviſer une fraction par une autre, il faut multiplier le numerateur de la fraction à diviſer par le dénominateur de la fraction qui tient lieu de diviſeur, & ce produit ſera le numerateur de la fraction qui eſt le quotient cherché. Enſuite il faut multiplier le numerateur de la fraction qui tient lieu de diviſeur par le dénominateur de la fraction à diviſer, & ce produit ſera le dénominateur du quotient cherché ; par exemple pour diviſer $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{5}$, il faut multiplier le numerateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$ par le dénominateur 5 de la fraction $\frac{3}{5}$, on aura 10 pour le numerateur du quotient, & on multipliera le denominateur 3 de la fraction à diviſer $\frac{2}{3}$, par le numerateur 3 du diviſeur $\frac{3}{5}$, & on aura 9 pour dénominateur du quotient cherché, qui eſt $\frac{10}{9}$.

Pour diviſer un entier par une fraction, on reduira cet entier en fraction, en mettant 1 pour dénominateur : par exemple, pour diviſer 3 par $\frac{4}{5}$, c'eſt la même choſe que ſi on diviſe $\frac{3}{1}$ par $\frac{4}{5}$, ce qu'on fera, comme on vient d'enſeigner, & on aura pour quotient $\frac{15}{4}$.

Pour diviſer des entiers & des fractions par des entiers & des fractions, on reduira l'entier & la fraction à diviſer, en une ſeule fraction. On reduira pareillement l'entier & la fraction qui tient lieu de diviſeur, en une ſeule fraction,& on fera enſuite la diviſion, comme on vient d'enſeigner. Par exemple pour diviſer $6 \frac{1}{2}$ par $5 \frac{2}{3}$, c'eſt diviſer $\frac{13}{2}$ par $\frac{17}{3}$, & on aura $\frac{39}{34}$ pour quotient.

On fait la preuve de la multiplication des fractions comme dans les nombres entiers, en diviſant le produit par une des fractions qui a été multipliée; & on doit trouver pour quotient l'autre fraction qui a été multipliée, ſi on a bien réüſſi.

On fait auſſi la preuve de la diviſion des fractions comme dans les nombres entiers, en multipliant la fraction qui eſt le quotient cherché, par la fraction qui eſt le diviſeur; ſi on a bien réüſſi, le produit de cette multiplication eſt égal à la fraction à diviſer.

Le produit d'une multiplication de fractions eſt plus petit que chacune des deux fractions, qui ont été multipliées l'une par l'autre; & le quotient d'une diviſion de fractions eſt plus grand que la fraction à diviſer. Le contraire de ces deux choſes arrive dans la multiplication & dans la diviſion des nombres entiers. On rendra raiſon de cela dans la ſuite.

S'il ſe rencontre des fractions de fractions: par exemple, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, pour les reduire à une fraction ſimple; c'eſt à dire, pour connoître quelle eſt la fraction, qui vaut les deux tiers de quatre cinquiémes; il faut multiplier ſeparément le numerateur & le dénominateur de

$\frac{4}{5}$ par le dénominateur 3 de $\frac{2}{3}$, alors on aura $\frac{12}{15}$ qui eſt la même choſe que $\frac{4}{5}$, puiſqu'en reduiſant $\frac{12}{15}$ à moindres termes, on trouve $\frac{4}{5}$. Or prenant 2 fois le tiers de $\frac{12}{15}$, on trouve $\frac{8}{15}$ qui eſt la valeur cherchée des deux tiers de $\frac{4}{5}$.

Après avoir multiplié le dénominateur 5 de la fraction $\frac{4}{5}$ par 3 dénominateur de la fraction $\frac{2}{3}$, on pouvoit ſe contenter de multiplier le numerateur 4 de la fraction $\frac{4}{5}$ par le numerateur 2 de la fraction $\frac{2}{3}$, on auroit auſſi eû $\frac{8}{15}$, parceque ce numerateur 2 marque deux parties de ſon dénominateur 3. Au lieu que lorſqu'on multiplie 3 par 4, on a $\frac{12}{15}$, dont on ne demande que 2 de ſes trois parties égales, qu'on trouve en multipliant ſeulement 2 par 4.

On conſiderera donc comme une regle generale que pour reduire des fractions de fractions à des fractions ſimples, il faut multiplier les numerateurs de ſuite l'un par l'autre ; ce produit ſera le numerateur de la fraction ſimple cherchée. On multipliera auſſi de ſuite les dénominateurs l'un par l'autre, & ce produit ſera le dénominateur commun de la fraction ſimple qu'on cherche : par exemple, pour connoître la valeur ou la fraction ſimple des $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$. Je dirai : 2 fois 3 ſont 6 ; & 5 fois 6 ſont 30. Enſuite 3 fois 4 ſont 12 ; & 6 fois 12 ſont 72. Et partant la fraction ſimple cherchée eſt $\frac{30}{72} = \frac{5}{12}$. On agira de la même maniere à l'égard des autres fractions de fractions.

ELEMENS DES MATHEMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

DE L'ALGEBRE.

DEFINITIONS D'ALGEBRE.

1. L'ALGEBRE est une partie fondamentale des Mathematiques, dans laquelle on traite des grandeurs considerées generalement.

2. La difference de deux grandeurs inégales est ce qui reste après avoir retranché de la plus grande une grandeur égale à la plus petite.

COROLLAIRE.

Donc lorsqu'on dit qu'une grandeur , par exemple *a* eſt contenuë dans une autre *b*, ou peut-être partie de cette grandeur *b*; c'eſt à dire, qu'on conſidere dans la grandeur *b* une partie $c = a$, & qu'au lieu de *a* on prend * *c* partie de *b*, ou qui eſt contenuë dans *b*. Enſuite ce qu'on dit de *c* doit être entendu de *a*, puiſqu'on peut prendre l'une pour l'autre.

3. Rapport ou raiſon eſt une comparaiſon d'une grandeur à une autre grandeur; & dans cette comparaiſon on fait attention à la maniere d'être d'une de ces grandeurs au regard de l'autre.

AVERTISSEMENT.

On peut comparer deux grandeurs entre elles en deux manieres. 1°, En faiſant ſeulement attention à leurs differences; c'eſt à dire, en examinant de combien l'une ſurpaſſe l'autre, ou l'excez de l'une & le défaut de l'autre. 2°, En conſiderant combien de fois, ou de quelle maniere une grandeur en contient une autre; d'où il eſt évident qu'il y a deux ſortes de rapports.

4. Rapport Arithmetique eſt une comparaiſon faite entre des grandeurs, dans laquelle on n'a égard qu'aux differences.

COROLLAIRE.

Donc il n'y a aucun rapport Arithmetique entre deux grandeurs de diverſes eſpeces; mais ſeulement entre deux grandeurs de même eſpéce, comme entre un nombre & un nombre, un temps & un temps, un ſon & un ſon, une diſtance de chemin & une diſtance de chemin; & il n'y a

* *Demande premiere generale.*

point de rapport Arithmetique, par exemple, entre un mois & une lieuë, puisqu'un mois n'est pas contenu dans une lieuë, une grandeur ne pouvant * être contenuë que dans une grandeur de même espéce.

5. Proportion Arithmetique est une égalité de la difference qui est entre deux grandeurs, & de la difference qui est entre deux autres grandeurs; c'est à dire, si l'excez d'une grandeur au dessus d'une autre est égal à l'excez d'une troisiéme grandeur au dessus d'une quatriéme; ou bien si la premiere grandeur est surpassée par la seconde d'un excès égal à celui par lequel la 3e grandeur est surpassée par la 4e; on dit que ces quatre grandeurs sont en proportion Arithmetique : par exemple, 5, 2, 14, 11, &c. on les écrit ainsi, 5. 2 : 14. 11. Ce qui signifie, 5 sont à 2 comme 14 à 11. Ou bien la grandeur 5 surpasse 2, de la même maniere que 14 surpasse 11.

6. Extrêmes proportionnelles, ou termes extrêmes sont la 1re & 4e grandeurs d'une proportion Arithmetique; & les moyennes proportionnelles ou termes moyens sont la 2e & 3e des 4 grandeurs de cette proportion.

AVERTISSEMENT.

Lorsque deux grandeurs moyennes proportionnelles sont égales, on reduit la proportion à trois termes, celui du milieu tenant la place de ces deux moyennes proportionnelles. Par exemple, si *a. b : b. c.* on l'écrit ainsi ÷ *a. b. c.* ce qui signifie comme dans l'expression precedente, *a* est à *b*, comme *b* est à *c*.

* *Cor. déf. 2. Algeb.*

7. Proportion continue eſt celle, qui eſt reduite à trois termes, à cauſe de l'égalité des termes moyens, comme ∺ *b.c.d.*

8. Progreſſion Arithmetique eſt une ſuite de plus de trois grandeurs rangées de telle maniere qu'elles ſoient toûjours en augmentant, ou toûjours en diminuant, de ſorte que toutes les differences ſoient égales entre elles : par exemple, ∻ 5.7.9. 11. 13. &c. ou bien ∻ 14. 10. 6. 2. &c.

COROLLAIRE.

Puiſqu'il y a une difference égale entre tous les termes d'une progreſſion, il eſt évident qu'en connoiſſant le premier terme avec la difference qui eſt entre les termes ſuivans de cette progreſſion, on connoîtra facilement chacun des termes de cette progreſſion: par exemple dans cette progreſſion, ∻ *a. b. c. d. e. f. g. &c.*

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. &c.

Si la difference qui eſt entre a & b eſt $m = 3$, celle qui eſt entre b & c eſt encore m, & ainſi de ſuite. Or puiſque le ſecond terme b n'eſt que le premier a augmenté de la difference qui regne dans cette progreſſion ; connoiſſant le premier terme a avec la difference de cette progreſſion, on connoîtra b ; parceque $a + m = b$. Or connoiſſant b, on connoîtra c ; parceque $a + m + m$, ou $a + 2m = c$. On connoîtra de cette maniere tous les autres termes.

Si la progreſſion étoit en diminuant, au lieu de prépoſer + aux differences, on mettroit — ; par exemple, ſi $g = 4$ eſt la difference, on aura $b.\ b - g.\ b - 2g.\ b - 3g.$ *&c.*

18. 14. 10. 6. &c.

Partant on peut facilement exprimer la premiere des deux progressions precedentes, d'une maniere qu'on verra dans tous ses termes ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different

$\div\, a.\ a+m.\ a+2m.\ a+3m$

1. 4. 7. 10. &c.

9. Rapport Geometrique est une comparaison faite entre deux grandeurs;& dans cette comparaison on considere de quelle maniere une grandeur en contient une autre, ou de quelle maniere une grandeur est contenuë dans une autre. Par exemple, si on compare 15 à 5, & qu'onfasse attention que lenombre 15 contient trois fois le nombre 5, ou que 5 est contenu trois fois dans 15; cette consideration, ou maniere de contenir est ce qu'on appelle *rapport* ou *raison Geometrique*.

COROLLAIRE.

Donc il ne peut y avoir un rapport Geométrique qu'entre deux grandeurs de même espece; puisque * une grandeur ne peut contenir qu'une grandeur de même espéce, ou être contenuë que dans une grandeur de même espéce. Par exemple, il n'y a aucun rapport entre la distance de Noël à Pâque, & la distance de Paris à Roüen.

10. L'antecedent d'un rapport est la grandeur qu'on compare à une autre; & le consequent de ce rapport est la grandeur à laquelle une autre est comparée.

11. Les termes d'un rapport sont l'antecedent & le consequent.

AVERTISSEMENT.

C'est un usage dans les Mathematiques, lorsqu'on parle du rapport d'une grandeur à une autre, sans determiner s'il est Arithmetique ou

* *Cor. déf. 2. Algeb.*

Geometrique, qu'on doit toûjours entendre que c'eſt du rapport Geometrique dont on parle.

12. L'expoſant d'un rapport eſt le quotient de l'antecedent diviſé par le conſequent. Par exemple, l'expoſant du rapport de 30 à 10 eſt 3; parceque ce quotient 3 expoſe *quotiès*, c'eſt à dire, combien de fois le nombre 30 contient le diviſeur 10.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de cette definition que les rapports ſont entre eux comme leurs expoſants; ou que tel eſt le quotient de la diviſion de l'antecedent par le conſequent, tel eſt le rapport de cet antecedent à ce conſequent. C'eſt à dire, que ſi ce quotient eſt grand, ce rapport ſera grand; ſi le quotient eſt petit, le rapport ſera petit; enfin ſi le quotient de l'antecedent diviſé par le conſequent eſt égal au quotient d'un autre antecedent diviſé par un autre conſequent: le rapport du premier antecedent au premier conſequent, ſera égal au rapport du ſecond antecedent au ſecond conſequent; ces rapports ſeront les mêmes; ces rapports ſeront ſemblables. Puiſque * rapport n'eſt autre choſe que la maniere de contenir ou d'être contenu; ce qui eſt exprimé par le quotient d'un terme de rapport diviſé par l'autre terme. Par exemple, le rapport de 16 à 2 eſt plus grand que le rapport de 10 à 5, parceque le quotient de 16 diviſez par 2 eſt plus grand que le quotient de 10 diviſé par 5: 16 contenant 8 fois 2, & 10 contenant ſeulement 2 fois 5. Soit pareillement $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$; cela exprime que le

*. *Déf. 9. Algeb.*

rapport de 9 à 6 eſt égal au rapport de 6 à 4 ; puiſque le quotient de 9 diviſé par 6 eſt égal au quotient de 6 diviſé par 4. Ce qui fait voir que l'antecedent de l'un de ces rapports contient autant de fois ou de la même maniere ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre rapport contient ſon conſequent.

COROLLAIRE II.

Reciproquement tel eſt le rapport d'un antecedent à ſon conſequent ; tel eſt auſſi le quotient de cet antecedent diviſé par ſon conſequent.

COROLLAIRE III.

Donc deux rapports égaux à un 3e ſont égaux entr'eux. Soit, par exemple, le rapport de b à c égal au rapport de d à f, & le rapport de g à h égal au même rapport de d à f : je dis que le rapport de b à c eſt égal au rapport de g à h. Car, [a] puiſque le rapport de b à c eſt égal au rapport de d à f, on aura [b] le quotient $\frac{b}{c} = \frac{d}{f}$; puiſque [a] le rapport de g à h eſt égal au rapport de d à f, on aura pareillement le quotient $\frac{g}{h} = \frac{d}{f}$. Donc [c] $\frac{b}{c} = \frac{g}{h}$; & partant [d] on aura le rapport de b à c égal au rapport de g à h.

13. Proportion ou analogie, c'eſt la ſimilitude ou égalité de deux rapports. On écrit une

[a] *Suppoſit.* [b] *Cor.* 2. *déf. preſ.*
[c] *Ax.* 18. *gener.* [d] *Cor.* 1. *déf. preſ.*

proportion de cette maniere, 24. 6 :: 16. 4. ou $\frac{24}{6} = \frac{16}{4}$, ce qui signifie, 24 sont à 6, comme 16 à 4.

16. Les termes extrêmes d'une proportion sont le premier antecedent & le dernier consequent; les termes moyens d'une proportion sont le premier consequent & le second antecedent. Par exemple, si *a*. *b* :: *c*. *d*. les termes extrêmes de cette proportion sont *a* & *d*, & les termes moyens sont *b* & *c*.

15. Une grandeur moyenne proportionnelle est celle qui étant repetée deux fois, tient lieu de termes moyens dans une proportion. Par exemple, si 3. 6 :: 6. 12. le nombre 6 sera la moyenne proportionnelle. On abrege cette Analogie de cette sorte ∺ 3. 6. 12. ce qu'on appelle Proportion continuë.

16. Progression Geometrique est une suite de plus de trois grandeurs rangées de telle sorte que le rapport de la premiere à la seconde, est égal au rapport de la 2e à la 3e; & que le rapport de la 2e à la 3e, est égal au rapport de la 3e à la 4e, & ainsi du reste, ce qu'on écrit de cette maniere; ∺ 32. 16. 8. 4. 2. c'est à dire, 32 sont à 16, comme 16 à 8, &c. ou ∺ 5. 15. 45. 135, &c.

17. Rapport composé est celui dont l'exposant est égal au produit des exposants de plusieurs rapports. Par exemple, le rapport de 16 à 2 est composé du rapport du nombre 16 au nombre 8, de 8 à 4, & de 4 à 2. Car l'exposant du rapport du nombre 16 à 2, qui est 8, est égal au produit des exposants du rapport de 16 à 8, de 8 à 4, & de 4 à 2, qui sont $2 \times 2 \times 2 = 8$.

La composition du rapport de 16 à 2 peut encore être considerée en plusieurs autres manieres. On peut dire, par exemple, que ce rapport est composé du rapport de 16 à 12; de 12 à 8; de 8 à 6; & de 6 à 2 : parcequ'on trouvera encore que le produit des exposants de ces rapports multipliez de suite l'un par l'autre est égal au nombre 8 exposant du rapport de 16 à 2. Car l'exposant du rapport de 16 à 12, qui est $1\frac{1}{3}$, étant multiplié par l'exposant du rapport de 12 à 8, qui est $1\frac{1}{2}$; & le produit 2 de ces deux exposants étant encore multiplié par l'exposant du rapport de 8 à 6, qui est $1\frac{1}{3}$ produira $2\frac{2}{3}$; enfin l'exposant 3 du rapport de 6 à 2 étant multiplié par ce dernier produit $2\frac{2}{3}$, il en resultera un dernier produit 8 égal à l'exposant du rapport de 16 à 2.

18. Rapport doublé ou raison doublée, c'est un rapport composé de deux rapports égaux; rapport triplé est un rapport composé de trois rapports égaux; quadruplé, de quatre rapports égaux, &c. Par exemple, le rapport de 27 à 3 est doublé, étant composé du rapport de 27 à 9, & de 9 à 3, qui sont * des rapports égaux.

19. Les grandeurs reciproquement proportionnelles, ou en raison ou rapport reciproque sont celles qui servent de termes à une analogie,

* *Cor.* 1. *déf.* 12. *Algeb.*

& qui ſont rangées de telle ſorte que le premier antecedent d'un rapport, & le conſequent de l'autre rapport ſe trouvent enſemble; c'eſt à dire, dans un même produit, ou dans une même fraction, ou qui appartiennent à une même grandeur; ou enfin, ce qui eſt la même choſe, quand l'analogie commence dans une grandeur, & finit dans la même. Par exemple, les racines de ces deux produits ab & cd ſont en raiſon reciproque, ou reciproquement proportionnelles, ſi $a. c :: d. b.$ ou ſi $a. d :: c. b.$ Pareillement les numerateurs & dénominateurs de ces deux fractions $\frac{f}{g}$ & $\frac{x}{z}$ ſont en raiſon reciproque, ſi $f. x :: z. g.$ Pour entendre encore mieux ceci, il faut ſeulement remarquer qu'on commence le raiſonnement dans une grandeur, qu'on le continuë dans la ſeconde, & que de la ſeconde on revient à la premiere dans laquelle on finit.

20. Propoſition converſe ou reciproque d'une autre propoſition, eſt celle dans laquelle on ſuppoſe comme conſtant & certain ce qui étoit en queſtion, ou ce qu'on cherchoit dans l'autre propoſition, & dans laquelle on prétend conclure & démontrer ce qui étoit ſuppoſé comme certain & conſtant dans cette autre propoſition. Par exemple, ſoit cette propoſition: *Si une grandeur eſt égale à une autre; la moitié de la premiere ſera égale à la moitié de la ſeconde.* Sa converſe ſera telle. *Si la moitié d'une grandeur eſt égale à la moitié de l'autre grandeur; la premiere grandeur ſera égale à la ſeconde.*

21. Nombre pair eſt celui qu'on peut diviſer en deux parties égales ſans fraction ou ſans reſte; & le nombre impair eſt celui qu'on ne peut par-

tager en deux parties égales ſans reſte, ou ſans fraction ; par exemple, 6 eſt un nombre pair, 7, eſt impair.

22. Equation ou égalité eſt une double expreſſion d'une grandeur, ou une grandeur exprimée en deux manieres, ou deux expreſſions de deux grandeurs égales. Par exemple $4x + 24 = 44$, c'eſt une équation, c'eſt à dire, une double expreſſion ; car $4x + 24$ eſt une expreſſion, & 44 en eſt un autre. Cependant $4x + 24$ eſt la même choſe que 44, dans la ſuppoſition qu'on fait que $4x + 24 = 44$. On appelle membres ou parties d'une équation ce qui eſt de part & d'autre du ſigne d'égalité $=$; par exemple $4x + 24$ & 44 ſont les membres de cette équation $4x + 24 = 44$.

DEMANDES D'ALGEBRE.

1. On a de coutume d'employer de petites lettres de l'alphabeth pour les expreſſions dont on ſe ſert en Algebre. Les grandeurs connuës ſont ordinairement exprimées par les premieres lettres de l'alphabeth ; & les grandeurs inconnuës, par les dernieres lettres de l'alphabeth.

2. Si on veut exprimer une grandeur priſe un certain nombre de fois, on met devant la lettre qui exprime cette grandeur, un chifre qui exprime combien de fois cette grandeur doit être priſe. Par exemple $2a$ ſignifie la grandeur a priſe deux fois ; de même $4b$, ou $6b$ ſignifie le quadruple, ou le ſextuple de b ; & ainſi du reſte.

3. Une lettre qui ne paroît point être precedée d'aucun ſigne eſt toûjours ſuppoſée être precedée de ce ſigne $+$, parcequ'alors on ne conçoit pas qu'elle ſoit retranchée. Ainſi dans cette expreſſion $b + d$ je peux mettre $+$ devant b, c'eſt à dire,

$+ b + d$, ce qui ſera la même choſe que $b + d$.

4. Quand il y a un ſigne interpoſé entre des grandeurs ; par exemple $f + g$, ce ſigne eſt toûjours attribué à la grandeur qu'il precede. Dans cet exemple $+$ eſt attribué à g, & cela ſignifie f plus g ; de même s'il y avoit $-$.

5. Une grandeur exprimée par une lettre, qui n'eſt precedée d'aucun chifre, eſt cenſée être precedée par 1 ; par exemple a eſt la même choſe que $1 a$.

6. Le changement de poſition dans les chifres écrits de ſuite, cauſe une diverſité dans les nombres ; par exemple 12 eſt different de 21, quoique ce ne ſoient que les mêmes chifres tranſpoſez. Les grandeurs peuvent être écrites l'une devant l'autre indifferemment, & ſans que la valeur de l'expreſſion change ; par exemple, $4 c + b = b + 4 c$. $a b = b a$, & ainſi des autres.

Axiomes d'Algebre.

1. Une grandeur precedée du ſigne $+$, & une pareille grandeur precedée du ſigne $-$ ſont enſemble égales à zero, ou rien ; par exemple $+ 5 - 5 = 0$, c'eſt à dire, plus 5 & moins 5 ne font rien.

S'il ſe trouve dans une expreſſion deux grandeurs precedées des ſignes contraires, on reduira cette expreſſion à une plus ſimple, ou plus courte, ſuivant ce premier Axiome. Par exemple $a a + a b - a b - c c$ ſera reduite à celle-ci qui lui eſt équivalente $a a - c c$; puiſque $a b - a b = 0$.

2. La plus grande de deux grandeurs moins la difference eſt égale à la plus petite ; & la plus petite plus la difference eſt égale à la plus gran-

de. Par exemple, si $a > b$, & que la difference soit c, on aura $a - c = b$, ou bien $b + c = a$. Donc, s'il est necessaire pour une demonstration, par tout où on trouvera a, on pourra substituer* $b + c$; & par tout où on trouvera b, on pourra mettre $a - c$.

DE L'ADDITION DES GRANDEURS

EXPRIMÉES GENERALEMENT.

Lorsqu'on veut ajouter ensemble des grandeurs, dont chacune est exprimée par une ou plusieurs lettres, il suffit de les écrire de suite sans rien changer à leurs signes : c'est une regle generale pour l'Addition. Par exemple, pour assembler a avec $2a$ & avec $4a$, on écrira $a + 2a + 4a$; pour assembler $a - b + c$ avec $2a + 2b + 4c$, on écrira seulement $a - b + c + 2a + 2b + 4c$; & pour abreger ces expressions lorsque cela est possible, il faut écrire ces grandeurs l'une au dessous de l'autre, & observer trois choses.

1°. Que les grandeurs exprimées par des lettres semblables, & qui ont les mêmes signes, doivent être ajoutées ensemble, & que leur somme soit precedée du signe qui precedoit chacune en particulier. Par exemple, si on veut

* Premiere demande generale.

ajouter ces grandeurs $3a - 2b - d$ avec $a - b$, on aura pour la ſomme $4a - 3b - d$.

Exemple.

$$\begin{array}{l} 3a - 2b - d \\ a - b \\ \hline 4a - 3b - d \end{array}$$

Autres Exemples.

$3b$	a	$4d$	$8c$	ab
b	b	x	$4d$	bx
$2b$	c	$8d$	m	cz
				cz
$6b$	$a+b+c$	$12d+x$	$8c+4d+m$	$ab+bx+2cz$

2°. Si les grandeurs égales ou exprimées Par des lettres ſemblables ſont precedées par des ſignes differents, c'eſt à dire, par + ou —, au lieu d'aſſembler ces grandeurs, ces ſignes ſont connoître qu'elles doivent être retranchées l'une de l'autre. Or dans cette circonſtance, après avoir retranché la valeur du plus petit chifre, qui precede une de ces grandeurs ainſi exprimées, de la valeur du chifre qui precede l'autre; on conſerve à ce qui reſte le ſigne, qui appartenoit à la grandeur precedée du plus grand chifre. Par exemple pour aſſembler $8b$ avec $-5b$, ce ſigne — marque qu'il ne faut point aſſembler $8b$ avec $-5b$, mais plûtôt retrancher $5b$ du nombre $8b$, & au lieu de la ſomme qu'on auroit euë, on aura $3b$ pour reſte.

3°. Lorſque dans l'expreſſion d'une grandeur on trouve une lettre precedée du ſigne +, & une autre ſemblable precedée du ſigne —; ces deux lettres

lettres doivent être effacées ; soit par exemple $a - b + c + b$; cette expression renferme $- b$ & $+ b$. Or * plus & moins la même grandeur n'est rien. Ainsi après avoir effacé $- b$ & $+ b$, on aura $a + c$, qui est la même chose que $a - b + c + b$.

COROLLAIRE.

Il suit de ces observations que, si on veut ajouter ensemble plusieurs grandeurs ; par exemple $f - g + h$ avec $2f + g - h$; suivant la regle generale après les avoir écrites de suite avec leurs signes, on aura $f - g + h + 2f + g - h$: & que s'il se trouve des grandeurs égales ou semblables precedées de chifres égaux, & de signes contraires, comme dans cet exemple où on trouve $- g$ & $+ g$, $+ h$ & $- h$, on effacera deux à deux ces grandeurs semblables, & on aura $3f$ pour la somme de ces mêmes grandeurs.

Lorsque les grandeurs exprimées par les mêmes lettres seront precedées de chifres inégaux avec des signes contraires, on retranchera, comme on a dit, la valeur du plus petit de ces chifres de la valeur de l'autre, & on mettra au reste le signe qui appartenoit au plus grand de ces chifres. Par exemple, si on veut ajouter $a + b - 3$ avec $2a - 3b + 8$, on aura $a + b - 3 + 2a - 3b + 8$; on effacera $+ b$, & * dans la grandeur $- 3b$ on retranchera & effacera $- b$; il restera encore $a - 3 + 2a - 2b + 8$; on effacera encore $- 3$; & dans le nombre $+ 8$, on effacera

* *Ax. 1. d'Algebre, page 70.*

aussi $+5$, & il restera $a+2a-2b+5$. Enfin* on assemblera a avec $+2a$, & on aura $3a-2b+5$ pour la somme ou total des grandeurs $a+b-3$ & $2a-3b+8$.

EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} a+b-3 \\ 2a-3b+8 \\ \hline a+b-3+2a-3b+8 \\ a-3+2a-2b+8 \\ a+2a-2b+5 \\ \hline \text{somme } 3a-2b+5. \end{array}$$

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{l} 3ab+bc-3bh \\ 4ab-2bc+2bh \\ -2ab+4bc-fg. \\ \hline \text{somme } 5ab+3bc-bh-fg. \end{array}$$

AUTRES EXEMPLES.

$$\begin{array}{l|l} a+4d & aa-5ab+6 \\ a-d & aa+ab-6 \\ \hline \text{somme } 2a+3d & 2aa-4ab. \end{array}$$

Pour abreger la regle generale qu'on a établie pour l'addition on écrira l'une sous l'autre les grandeurs qu'on veut assembler avec leurs signes de $+$ ou de $-$. On mettra chaque grandeur litterale sous celle qui lui est semblable,

* Suivant la premiere des observ. precedentes, p. 71.

comme il a été enseigné dans l'addition des nombres. On ajoutera ensemble tous les nombres qui precedent les grandeurs semblables qui ont le même signe +, & qu'on a écrite l'une sur l'autre. On fera la même chose des nombres qui precedent les grandeurs semblables qui ont le même signe —, s'il y en a. Enfin s'il n'y a point de grandeurs semblables, qui ayent differents signes; ensuite de la somme des chifres, qui ont precedé celles qui avoient les mêmes signes, on écrira la lettre qui étoit precedée de chaque chifre en particulier. Et s'il y a des grandeurs semblables qui ayent differents signes, on soustraira la plus petite somme de la plus grande, & on écrira le reste avec le signe qui precedoit la plus grande.

DE LA SOUSTRACTION DES GRANDEURS EXPRIME'ES GENERALEMENT.

LORSQU'ON veut soustraire une grandeur d'une autre, il suffit de changer tous les signes de la grandeur qu'on veut soustraire, & d'ajouter ensuite cette grandeur à celle dont on vouloit faire cette soustraction, de la maniere qu'on le vient d'enseigner; la somme qui en resulte est le reste qu'on cherche par cette soustraction. Par exemple pour soustraire $4a - 3b$ de $7a + 6b$, en changeant les signes de $4a - 3b$, je trouve $-4a + 3b$, & l'ajoutant à $7a + 6b$,

EXEMPLE.

de	$7a + 6b$
ôtez	$4a - 3b$
reste	$3a + 9b$.

je trouve $3a + 9b$, qui est le reste que je cherche par cette operation.

AUTRE EXEMPLE.

$$\begin{array}{ll} \text{de} & 2a - 4b + c - 3d \\ \text{ôter} & a + 7b - 4c + 2m. \\ \hline \text{reste} & a - 11b + 5c - 3d - 2m. \end{array}$$

Pour être persuadé qu'en changeant les signes de la grandeur à retrancher, & faisant ensuite une addition, il resulte une soustraction ; il faut considerer que dans le premier exemple, au lieu de $+ 4a$ on met $- 4a$, ce qui marque clairement une soustraction ; au lieu de $- 3b$ on met $+ 3b$, cela fait encore voir une soustraction ou negation de la negation $- 3b$, ce qui fait la grandeur affirmative ou positive $+ 3b$. La même chose paroîtra évidemment à l'égard des autres exemples.

DE LA MULTIPLICATION DES GRANDEURS EXPRIME'ES GENERALEMENT.

IL y a deux suppositions ou demandes particulieres pour la Multiplication.

1. Pour exprimer le produit de grandeurs multipliées l'une par l'autre ; par exemple de la grandeur a multipliée par la grandeur b, on écrit ces grandeurs l'une auprès de l'autre, c'est

à dire, ab ou ba , qui eſt l'expreſſion du produit de a multiplié par b. Si je veux multiplier ces grandeurs b, d, c, l'une par l'autre ; je multiplie d'abord b par d, ce qui fait bd, & enſuite je multiplie bd par c, & je trouve bdc qui exprime le produit que je cherche. Je pourrois auſſi multiplier c par d, ou d par c, & multiplier le produit cd par b pour avoir cdb qui eſt le même produit que bdc, ou bcd. Quoiqu'il ſoit indifferent d'écrire ba, ou ab, pour exprimer le produit de a multiplié par b ; cependant l'uſage eſt qu'on arrange ces lettres de telle maniere que les premieres de l'Alphabeth ſoient prononcées ou écrites les premieres : ainſi je mettrai plûtôt ab, & de même des autres produits.

2. Lorſqu'il ſe rencontre un produit de pluſieurs grandeurs égales ou exprimées par les mêmes lettres, par exemple aaa ; on abrege cette expreſſion en cette maniere a^3, qui ſignifie la même choſe que aaa. De même au lieu de $bbbb$, on peut mettre b^4 ; & ainſi des autres, en écrivant un peu plus haut le chifre qui ſuit la lettre.

Il eſt donc évident que ces deux expreſſions $a+b$ & ab ne ſignifient pas la même choſe : puiſque $a+b$ ſignifie ſeulement que a eſt ajouté à b ; & que ab ſignifie que a eſt multiplié par b. Si je veux que a vaille 6 & que b vaille 5 ; la premiere expreſſion $a+b$ vaudra $6+5=11$, & la ſeconde ab vaudra $6\times5=30$.

Il faut bien prendre garde auſſi à ne pas prendre cette expreſſion $3d$ pour celle-ci d^3. Car $3d$ n'eſt que la ſomme de 3 grandeurs égales dont chacune eſt appellée d, ou 3 fois la même grandeur d ; & d^3 ſignifie que le produit de d multiplié par d, qui est dd, est encore multiplié par la même grandeur d. Si je veux que d vaille 5, $3d$ vaudront $5 + 5 + 5 = 15$, & d^3 vaudra 125.

AVERTISSEMENT.

1. Lorsqu'on multiplie l'une par l'autre, des grandeurs qui ont des signes semblables, c'est à dire + & +, ou — & —; leur produit doit toujours avoir le signe +, & si elles ont des signes differens, leur produit doit avoir le signe —.

Pour bien entendre cela, il faut premierement remarquer que multiplier une grandeur par une autre, c'est [1] repeter ou prendre cette grandeur autant de fois qu'il y a d'unitez dans l'autre. Or on peut prendre une grandeur plusieurs fois en deux manieres, sçavoir pour l'ajouter plusieurs fois & en faire un total positif & affirmatif; ou pour la retrancher plusieurs fois & en faire un total negatif.

Soient par exemple $+c = 4$ & $+d = 5$; si je multiplie $+c$ par $+d$, le produit de ces deux grandeurs sera $cd = 20$, qui aura le signe +. Parceque les signes qui precedent c & d étant tous deux affirmatifs, par cette multiplication j'ajouterai c autant de fois à lui même qu'il y a d'unitez dans la grandeur d [1]; ou bien j'ajouterai d à lui même autant de fois qu'il y a d'unitez dans c, ce qui revient à la même chose. Il ne doit donc paroître dans cette circonstance aucun signe de négation. Donc + multiplié par + donne au produit +.

[1] *Définition de la multiplication, page 21.*

Soient

Soient presentement deux grandeurs qui ayent des signes négatifs ; par exemple, — *f* & — *g* ; si je multiplie — *f* par — *g*, leur produit sera *fg* qui aura le signe +. Parceque les signes qui precedent *f* & *g* étant tous deux négatifs, l'un montre qu'au lieu d'ajouter l'autre grandeur plusieurs fois, il faut la retrancher plusieurs fois. Dans cet exemple — *g* exprime qu'il faut retrancher — *f* autant de fois que — *g* exprime ou contient d'unitez : or retrancher ou nier — *f* plusieurs fois, c'est affirmer ou mettre plusieurs fois + *f* ; cette négation de négation est une affirmation. Ce qui est clair, puisque pour exprimer la soustraction d'une grandeur qui a déja le signe —, je dois lui donner le signe +. Car le signe — exprime que cette grandeur doit être retranchée. Or ensuite si je ne veux pas la retrancher, je dois lui ôter le signe —, & la laisser dans son état réel, affirmatif & positif. Afin d'exprimer ce dernier état, il faut donc en donner une marque qui est le signe +. Quand je multiplie — 3 par — 7, je cherche combien de fois je dois retrancher la soustraction, ou négation que je m'étois proposé de faire de 7. Je trouve que je prens la resolution, ou que je me propose, de ne point ôter une fois 7, encore une fois 7, & encore une fois 7. C'est à dire que je veux laisser 7 trois fois, ce qui doit enfin produire + 21. Donc — multiplié par — donne pour produit +.

2. Lorsque de deux grandeurs à multiplier il y en a une precedée du signe + & l'autre du signe — ; le produit doit toujours être precedé du signe —. Par exemple, soit + *e* à multiplier par — *m*, ou — *m* par + *e*, ce qui est la même

chose ; le produit de ces deux grandeurs sera $-em$. Parceque la grandeur precedée du signe $-$, exprime qu'il faut retrancher plusieurs fois celle qui est precedée du signe $+$, comme dans cet exemple, $-m$ exprime qu'il faut retrancher $+e$ autant de fois que m exprime d'unitez. Le produit qui n'est que l'addition de tous ces retranchemens doit donc être precedé du signe négatif ou de soustraction $-$. Supposons que $+e = +5$, & que $-m = -2$. Quand je multiplie -2 par $+5$, je cherche combien il faut que je retranche pour retrancher moins deux fois 5, je trouve qu'il faut retrancher $+5$, & encore $+5$; c'est à dire qu'il faut retrancher 10, & pour l'exprimer j'écris -10. Je peux de même dire que la grandeur precedée du signe $+$, exprime combien de fois il faut repeter ou affirmer la négation de la grandeur qui est precedée du signe $-$.

EXEMPLE I.

$$
\begin{array}{rrr}
 & a - 3d & \\
 & 3a - 4d & \\
\hline
 & 3aa - 9ad & \\
 & -4ad & + 12dd \\
\hline
\textit{Prod.} & 3aa - 13ad & + 12dd.
\end{array}
$$

Soient ces deux grandeurs $a - 3d$ & $3a - 4d$, à multiplier l'une par l'autre, il faut les écrire l'une au dessous de l'autre. Il est indifferent de commencer à multiplier de gauche à droit, ou de droit ou de droit à gauche. Si on commence de droit à gauche, cette multiplication aura plus de ressemblance à la multiplication ordinaire par chifres : mais parceque lorsqu'on commence de gauche à droit, on arrange plus facilement les produits ; c'est pour cela que nous commencerons de gauche à droit par la grandeur a, disant : $1a$ multiplié par $3a$ produit $3aa$; car on multiplie d'abord l'un par l'autre les chifres qui precedent chaque lettre : comme dans cet exemple on multiplie 1 par 3, ce qui produit 3 ; & ensuite de ce 3 on écrit a & a proche l'un de l'autre. Après cela multipliant $-3d$ par $+3a$, cela * produit $-9ad$, qu'on écrit avec son signe après $3aa$.

Il faut passer ensuite à la seconde partie de la grandeur $3a-4d$, qui est $-4d$, disant : $+a$ multiplié par $-4d$ produit $-4ad$, que j'écris sous $-9ad$; parceque $-9ad$ est déja une grandeur semblable. S'il n'y en avoit point de semblables, on pourroit écrire ce dernier produit $-4ad$ sous $3aa$ ou ailleurs indifferemment. Ensuite il faut dire $-3d$ multipliez par $-4d$ produisent $+12dd$ qu'il faut écrire après le produit $-4ad$. Enfin selon ce qu'on a enseigné dans l'addition après avoir ajouté ces produits, on trouvera pour le produit total qu'on cherche, $3aa-13ad+12dd$, qui resulte de la grandeur $a-3d$ multipliée par $3a-4d$.

Exemple II.

Pour multiplier $ab+4bc-fg$ par $h+2m$, il faut dire ab multiplié par h, produit abh qu'il faut écrire. $+4bc$ multiplié par h produit

* 2e Partie de l'avertissement precedent, page 78.

$+ 4bch$ qu'il faut écrire ensuite de abh. $-fg$ multiplié par $+h$ produit $-fgh$, il faut aussi écrire ce dernier produit, ensuite des autres.

$$\begin{array}{l} ab + 4bc - fg \\ \quad\quad h + 2m. \\ \hline abh + 4bch - fgh \\ \quad\quad 2abm + 8bcm - 2fgm. \\ \hline \end{array}$$

$$\text{produit } abh + 4bch + 2abm - fgh + 8bcm - 2fgm.$$

Après celà il faut multiplier $ab + 4bc - fg$ par $2m$, disant : ab multiplié par $2m$ produit $2abm$, qu'on écrira où on voudra, parceque dans le rang des autres produits il n'y en a point de semblables à ce dernier. On continuera, disant: $+4bc$ multiplié par $+2m$, produit $8bcm$, qu'on écrira ensuite du produit precedent. Enfin $-fg$ multiplié par $+2m$, produit $-2fgm$, qu'il faut pareillement écrire. Après avoir fait l'addition de tous ces produits, on trouvera que le produit qu'on cherche est $abh + 4bch + 2abm - fgh + 8bcm - 2fgm$.

AUTRES EXEMPLES.

$$\begin{array}{l} \quad\quad a + b + c \\ \text{par } a + b - c \\ \hline aa + ab + ac \\ \quad\quad ab + bb + bc \\ \quad\quad\quad\quad - ac - bc - cc \\ \hline aa + 2ab + bb - cc \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & ac + gh + fm \\
\textit{par} & dd - gn + mm \\
\hline
 & acdd + ddgh + ddfm \\
 & \quad - acgn - gghn - fgmn \\
 & \qquad acmm + ghmm + fm^3. \\
\hline
 & acdd + ddgh + ddfm - acgn - gghn - fgmn \\
 & \qquad + acmm + ghmm + fm^3. \\
\hline
\end{array}
$$

DE LA DIVISION DES GRANDEURS EXPRIME'ES GENERALEMENT.

AVERTISSEMENT.

1. DANS la Multiplication on eſt convenu que pour exprimer le produit de pluſieurs grandeurs multipliées entr'elles, on les écriroit l'une auprès de l'autre : la Diviſion étant entierement oppoſée à la Multiplication, on eſt pareillement convenu que pour diviſer une grandeur par une autre, on effaceroit dans la grandeur à diviſer les lettres qui s'y pourroient trouver ſemblables à celles du diviſeur, & qu'on prendroit pour quotient les lettres qui reſteroient. Par exemple, pour diviſer cf par c, on a pour

quotient *f* ; pour diviser *a d e* par *d* on a pour quotient *a e*.

EXEMPLES.

$$\frac{\text{grandeur à diviser } \quad x f}{\text{diviseur } \quad x} \Big\} \; f \text{ quotient}$$

$$\frac{\text{grandeur à diviser } \quad a d e}{\text{diviseur } \quad d} \Big\} \; a e \text{ quotient}$$

2. Lorsque la grandeur à diviser & le diviseur sont precedés des mêmes signes, leur quotient doit toûjours être precedé du signe +.

Soit une grandeur + *b g* à diviser par + *b*, le quotient sera + *g* ; parceque, 1°. la grandeur *b g* est [1] precedée du signe + ; 2°. le diviseur *g* est [1] aussi precedé du signe + ; 3°. enfin le diviseur & le quotient sont [2] les deux racines qui ont produit la grandeur à diviser *b g*. Il suit donc necessairement que le quotient soit aussi precedé du signe +. Car si le quotient étoit precedé du signe —; puisque la grandeur à diviser n'est que le produit du diviseur par le quotient, ce produit *b g* seroit precedé du signe —, ce qui seroit contre la supposition, qui est que *b g* est precedé de +.

[1] *Par la supposition presente.*

[2] *Coroll. 3. de la Division des nombres en Arithmetique, page 42. & supp. 1. de la Multip. des grandeurs litterales, page 76.*

Soit encore la grandeur — *m n* à diviser par — *n*, le quotient sera + *m* par la même raison qu'on vient de dire. Car 1°. le diviseur *n* est [1] precedé du signe —. 2°. La grandeur à diviser *m n* est [1] precedée du signe —. 3°. Le diviseur & le quotient sont deux grandeurs qui étant multipliées l'une par l'autre produisent — *m n*. C'est donc une necessité que le quotient *m* soit precedé du signe + ; parceque s'il étoit precedé du signe —, le produit de ce quotient par ce diviseur sçavoir *m n* seroit [2] precedé du signe +, ce qui seroit contre la supposition.

3. Lorsque la grandeur à diviser & le diviseur sont precedez des signes differens, leur quotient sera precedé du signe —.

Soit par exemple *a d* à diviser par — *a*, le quotient sera — *d*. 1°. Le diviseur est precedé du signe — ; c'est donc une necessité que le quotient soit aussi precedé du signe —, afin que le produit du diviseur — *a* par le quotient soit la même chose que la grandeur à diviser *a d*. On feroit un pareil raisonnement s'il falloit diviser — *o p* par + *p*, & on auroit pour quotient — *o*.

EXEMPLE.

Soit la grandeur *dg* + *gf* + *dh* + *fh* à diviser par *d* + *f*. Il faut écrire ce diviseur *d* + *f* dessous la grandeur à diviser. On peut commencer de gauche à droit, & dire, le signe + qui precede *dg*, divisé par le signe + qui precede *d* dans le diviseur, donne au quotient + ; ensuite *d g* divisé par *d*, donne pour quo-

[1] *Par supp.*

[2] *Part. 1. de l'avertiss. de la multip. litt. page 77.*

tient g, on écrira g au quotient. Ensuite multipliant le quotient $+g$ par la grandeur $+f$

$$\begin{array}{l} \quad\ \ 0 \qquad 0 \\ -dg-gf \\ \underline{dg+gf+dh+fh} \\ \quad\ d+f \end{array} \Big\{ g$$

du diviseur, cela produit gf, qu'il convient retrancher, & partant on lui prépose le signe $-$, & on cherche s'il y a dans la grandeur à diviser quelque grandeur de même genre, & dans cet exemple on trouve $+gf$; au dessus de cette grandeur on écrit $-gf$, qui est le produit precedent retranché. Ensuite ces deux grandeurs semblables étant precedées de chifres égaux & de signes differens, selon ce qu'on a enseigné dans l'addition, elles se détruisent, on les tranche, & il ne reste rien, on écrit o au dessus. Ensuite le quotient $+g$ étant multiplié par l'autre partie $+d$ du diviseur, produit $+dg$ qu'il faut retrancher, & pour cela on prépose le signe $-$, & on écrit $-dg$ au dessus de la grandeur semblable $+dg$. Ces deux grandeurs se détruisant à cause de leurs signes differens, on les efface & au dessus on écrit o.

Il reste encore $+dh+fh$ à diviser, on dira $+$ qui precede dh, divisé par $+$, qui precede $d+f$, donne au quotient $+$. Ensuite dh divisé par d donne pour quotient h, il faut écrire $+h$ au quotient. $+h$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+f$ du diviseur, produit $+fh$ qu'il faut retrancher, & pour cela lui préposer le signe $-$. Et après cela il faut examiner dans la grandeur à diviser s'il se trouve quelque grandeur semblable à fh, on y trouve $+fh$, au dessus on écrit $-fh$, de sorte que ces deux grandeurs par l'addition se détruisent,

$$\left.\begin{array}{c} \bar{0} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ -dg-gf-dh-fh \\ dg+gf+dh+fh \\ \hline d+f \end{array}\right\} g+h$$

ſent, on les efface, & au deſſus on écrit o. Enfin on multiplie $+h$ qui eſt au quotient par $+d$ qui eſt au diviſeur, cela produit $+dh$, qu'on retranche, & pour cela on prépoſe le ſigne —, & on l'écrit au deſſus de la grandeur ſemblable $+dh$: ces deux grandeurs ſe détruiſant, on les tranche, & on écrit o au deſſus. Partant la grandeur $dg+gf+dh+fh$ étant diviſée par $d+f$, donne pour quotient $g+h$.

Autre Exemple.

Pour diviſer la grandeur $cc+2cf+ff$ par $c+f$, après avoir écrit le diviſeur $c+f$ au deſſous, il faut dire $+cc$ diviſé par $+c$, donne pour quotient $+c$. Enſuite $+c$ qui eſt au quotient multiplié par $+f$ qui eſt au diviſeur, produit $+cf$ qu'il faut retrancher; & pour cela il faut lui prépoſer le ſigne —, & écrire $-cf$ au deſſus de $+2cf$. Enſuite par l'addition de ces deux grandeurs il reſtera $+cf$ qu'on écrira au deſſus de $-cf$, & on tranchera $-cf$ & $+2cf$; enſuite on multipliera $+c$ qui eſt au quotient par $+c$ qui eſt au diviſeur, & on

$$\left.\begin{array}{c} 0+cf \\ -cc-cf \\ cc+2cf+ff \\ \hline c+f \end{array}\right\} c$$

aura pour produit $+ cc$, qu'on retranchera en l'écrivant avec le ſigne $-$ au deſſus de cc, & par l'addition ces deux grandeurs ſe détruiſant, on les effacera, & au deſſus on écrira o.

Il reſtera encore à diviſer $+ cf + ff$; on dira $+ cf$ diviſé par $+ c$ donne au quotient $+ f$, or $+ f$ du quotient multiplié par $+ f$ du diviſeur produit $+ ff$ qu'on retranchera de la grandeur à diviſer en écrivant $- ff$ au deſſus de $+ ff$; ces deux grandeurs ſe détruiſant on les effacera, & on écrira o au deſſus. Enfin $+ f$ du quotient multiplié par $+ c$ du diviſeur, produit $+ cf$, qu'on retranchera de $+ cf$, en écrivant au deſſus $- cf$, ces deux grandeurs ſe détruiſant on les effacera, & on écrira o au deſſus. Et partant la grandeur $cc + 2cf + ff$ étant diviſée par $c + f$ donnera au quotient $c + f$.

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & & o & & & & \\
 & & - & cf & & & \\
o & & + & cf & & o & \\
-cc & & - & cf & - & ff & \\
cc & & + & 2cf & + & ff & \left.\right\} c + f \\
\hline
 & c & + & f & & &
\end{array}$$

Autre Exemple.

Pour diviſer la grandeur $dd - ee$ par $d + e$, il faut dire $+ dd$ diviſé par $+ d$ donne pour quotient $+ d$. Or $+ d$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+ e$ qui eſt au diviſeur produit $+ de$ qu'il faut retrancher, & pour cet effet lui prepoſer le ſigne $-$; mais comme dans la grandeur $dd - ee$ on ne trouve

$$\begin{array}{ccc|l}
o & - & de & \\
-dd & & & \\
dd & - & ee & \left.\right\} d \\
\hline
d & + & e &
\end{array}$$

point de grandeur ſemblable à ce produit $-de$, on l'écrira cependant à l'écart au deſſus de $-ee$. Enſuite $+d$ qui eſt au quotient étant multiplié par $+d$ qui eſt au diviſeur, produit $+dd$ qu'on retranchera de la grandeur à diviſer, en écrivant $-dd$ au deſſus de la grandeur $+dd$ qui s'y rencontre. Ces deux dernieres grandeurs ſe détruiſant, on les effacera & on écrira o au deſſus.

Il reſte encore à diviſer $-de$ & $-ee$. On dira, $-de$ diviſé par $+d$ donne pour quotient $-e$. Or $-e$ étant multiplié par $+e$ produit $-ee$ qu'il faut retrancher ; pour retrancher $-ee$ il faut écrire $+ee$, comme on a enſeigné dans la ſouſtraction. On écrira

$$\begin{array}{cc|l} & o & \\ & +de & \\ & -de & \\ o & o & \\ -dd & +ee & \\ dd & -ee & \\ \hline d & +e & d-e \end{array}$$

donc $+ee$ au deſſus de la grandeur $-ee$ qui ſe rencontre dans la grandeur à diviſer ; mais comme ces deux grandeurs $-ee$ & $+ee$ ſe détruiſent, on les effacera & on écrira o au deſſus. Enfin $-e$ qui eſt au quotient, multiplié par $+d$ qui eſt au diviſeur produit $-de$ qu'il faut retrancher en lui prépoſant le ſigne $+$, & comme il s'en rencontre une de même eſpece dans la grandeur à diviſer, ſçavoir $-de$, on écrira au deſſus ce produit $+de$; ces deux grandeurs ſe détruiſant on les effacera, & on mettra o au deſſus pour marquer qu'il ne reſte rien. Et partant la grandeur $dd-ee$, étant diviſée par $d+e$, le quotient eſt $d-e$, & il ne reſte rien.

AUTRE EXEMPLE.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad -4aab \\
\quad\;\; 0 \\
-8a^3 \\
\\
8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3 \\
\hline
2a + b
\end{array}
\left\{ 4aa \right.
$$

Soit la grandeur $8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3$ à diviser par $2a + b$. Il faut écrire le diviseur $2a + b$ sous la grandeur à diviser. Après cela il faut diviser le nombre 8 qui precede a^3 par le nombre 2 qui precede la grandeur a dans le diviseur, comme on l'a enseigné dans la division des nombres, on aura 4 qu'on écrira pour quotient ; ensuite a^3 étant divisé par a donne pour quotient aa qu'on écrira au quotient immédiatement après le 4. Or $+4aa$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+b$, produit $+4aab$ qu'il faut retrancher, & pour cela lui préposer le signe $-$; mais parceque dans la grandeur à diviser on ne trouve point de aab, on écrira à l'écart fort au loin $-4aab$ dont on vient de parler. Ensuite il faut multiplier $4aa$ du quotient par $2a$ du diviseur, cela fait $8a^3$ qu'il faut retrancher ; c'est pour cela qu'on lui prépose le signe $-$ en l'écrivant au dessus de la grandeur de même genre. Ces deux grandeurs $-8a^3$ & $+8a^3$ se détruisant, on les tranche, & on écrit 0 au dessus pour marquer qu'il ne reste rien.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad 0 \\
\qquad + 4aab \\
\qquad - 4aab \\
\\
\quad 0 \quad + abb \\
- 8a^3 + 2abb \\
\quad 8a^3 - abb + \frac{1}{2}b^3 \\
\hline
2a + b
\end{array}
\left\{ 4aa - 2ab \right.
$$

Il reſte encore à diviſer $- 4aab - abb + \frac{1}{2}b^3$. On dira, $-$ qui precede $4aab$ diviſé par $+$ qui precede $2a + b$, donne au quotient $-$ qu'on écrira enſuite de $4aa$. Après cela on dira, 4 qui precede aab diviſé par 2 qui precede a dans le diviſeur, donne pour quotient 2 qu'on écrira au quotient. aab diviſé par a donne pour quotien ab qu'on écrira au quotient. Or $-2ab$ qu'on vient d'écrire au quotient multiplié par $+b$ qui eſt au diviſeur, produit $-2abb$ qu'il faut retrancher, & pour cela on lui prépoſera le ſigne $+$, & comme on trouve dans la grandeur à diviſer une grandeur ſemblable à ce dernier produit, on écrira au deſſus $+2abb$, & après en avoir fait l'addition avec $-abb$, il reſulte $+abb$ qu'on écrit au deſſus, & on efface les deux precedentes grandeurs. Enſuite $-2ab$ du quotient multiplié par $+2a$ du diviſeur, produit $-4aab$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrira $+4aab$ au deſſus de $-4aab$ qui lui eſt ſemblable ; ces deux grandeurs ſe détruiſant par l'addition à cause de leurs signes contraires, on les efface, & on écrit au dessus o pour marquer qu'il ne reste rien.

$$\begin{array}{l} \ \ \ \mathrm{o} \\ + 4aab \\ - 4aab \\ \ \ \mathrm{o} \\ - abb \qquad\quad \mathrm{o} \\ \ \ \mathrm{o}\ \ \ \ + abb - \frac{1}{2} b^3 \\ -8a^3 + 2ab \end{array}$$

$$\frac{8a^3 - abb + \frac{1}{2} b^3}{2a + b} \left\{ 4aa - 2ab + \frac{1}{2} bb \right.$$

Il reste encore à diviser $+ abb + \frac{1}{2} b^3$; on dira, $+ 1abb$ divisé par $2a$, donne pour quotient $+ \frac{1}{2} bb$, qu'on écrit au quotient ; parceque, comme on a averti ci-devant, lorsqu'il ne paroît point qu'une grandeur soit precedée de chifres, on y sous-entend toûjours 1. Or 1 divisé par 2 donne pour quotient $\frac{1}{2}$ qu'on prépose à bb au quotient avec le signe $+$. Ensuite $+ \frac{1}{2} bb$ qu'on vient d'écrire au quotient étant multiplié par b qui est au diviseur, produit $+ \frac{1}{2} b^3$ qu'il faut retrancher, & pour cela on écrit $-\frac{1}{2}b^3$ au dessus de la grandeur semblable qui se trouve dans $8a^3-abb+\frac{1}{2}b^3$, ces deux grandeurs se détruisant par l'addition à cause de leurs signes contraires, on les efface, & on écrit o au dessus. Enfin $+\frac{1}{2}bb$ qui est au quotient multiplié par $2a$ du diviseur, produit $+1abb$ qu'il faut retrancher, & on écrira $-abb$ au dessus de la grandeur semblable qui restoit encore à diviser; ces deux grandeurs se détruisant, on les effacera & on écrira o au dessus. Et partant $8a^3-abb+\frac{1}{2}b^3$ divisé par $2a+b$ donne pour quotient $4aa-2ab+\frac{1}{2}bb$.

Autre Exemple.

$$
\begin{array}{ll}
 & +9\frac{1}{3}abef \\
\text{o} & -4\frac{2}{3}abef \\
-7aegh & \\
\multicolumn{2}{l}{7aegh-3bbgh+14abef-6b^3f+bm^3} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{3gh+2bf}
\end{array}
\left\}\; 2\frac{1}{3}ae \right.
$$

Pour diviser $7aegh-3bbgh+14abef-6b^3f+bm^3$ par $3gh+2bf$, après avoir écrit le diviseur au dessous de la grandeur à diviser, on dira, $+7$

divisé par $+3$ donne pour quotient $+2\frac{1}{3}$; & $aegb$ divisé par gh, donne pour quotient ae. On écrira au quotient $2\frac{1}{3}ae$. Or $+2\frac{1}{3}ae$ du quotient multiplié par $+2bf$ du diviseur produit $+4\frac{2}{3}aebf$ qu'on retranche en lui préposant le signe $-$, & on l'écrit au dessus de la grandeur qui lui est semblable $14aebf$ qui se trouvoit à diviser, par l'addition il resulte de ces deux grandeurs $+9\frac{1}{3}aebf$ qu'on écrit au dessus. Ensuite $+2\frac{1}{3}ae$ du quotient multiplié par $3gh$ du diviseur, produit $7aegh$ qu'on retranche de pareille grandeur à diviser, après l'avoir écrite au dessus avec le signe $-$, il ne reste rien, on les tranche & on écrit au dessus 0.

Il reste encore à diviser $-3bbgh+9\frac{1}{3}aebf-6b^3f+bm^3$; on dit, $-3bbgh$ divisé par $+3gh$ donne pour quotient $-bb$ qu'on y écrit. Or $-bb$ du quotient multiplié par $+2bf$ du diviseur, produit $-2b^3f$ qu'il faut retrancher, & pour cela mettre $+2b^3f$ qu'on écrira au dessus de la grandeur $-6b^3f$ qui lui est semblable, & par l'addition de ces deux grandeurs il resultera $-4b^3f$ qu'on écrira au dessus, & on tranchera les deux precedentes. Ensuite $-bb$ multiplié par $3gh$ produit $-3ghbb$ qu'on retranchera en lui préposant le signe $+$,

$$
\begin{array}{r}
+ 9\frac{1}{3}abef - 4b^3f \\
\overset{o}{-}7aegh + 3\overset{\bullet}{b}bgh - 4\frac{2}{3}abef + 2b^3f \\
\hline
\dfrac{7aegh - 3bbgh + 14aebf - 6b^3f + bm^3}{3gh + 2bf}
\end{array}
$$

$$\text{Quotient}\left\{ 2\frac{1}{3}ae - bb\ \frac{9\frac{1}{3}abef - 4b^3f + bm^3}{3gh + 2bf} \right.$$

& l'écrivant au dessus de la grandeur de même espece $-3bbgh$. Ces deux grandeurs se détruiront par l'addition à cause de leurs signes contraires, on les tranchera & on écrira o au dessus.

Il restera encore $+9\frac{1}{3}abef - 4b^3f + bm^3$ qu'on ne peut diviser par $3gh + 2bf$ à cause que dans cette grandeur restante il ne se trouve point de lettres semblables à gh du diviseur ; c'est pour cela qu'on écrira ce reste ensuite du quotient qu'on vient de trouver, & au dessous de ce reste on écrira le diviseur, & on mettra cette marque —— entre ces deux grandeurs, ce qui fera une fraction ; & partant le quotient de cette division

sera $2\frac{1}{3}ae - bb + \dfrac{9\frac{1}{3}abef + 4b^3f + bm^3}{3gh + 2bf}$

Multiplication.

$$\text{Preuve}\left\{\begin{array}{l} \text{quot. } 2\frac{1}{3}ae - bb \\ \text{diviſ. } 3gh + 2bf \end{array}\right.$$

$$7aegh - 3bbgh + 4\frac{2}{3}abef - 2b^3f$$

$$9\frac{1}{3}aebf - 4b^3f + bm^3$$

$$\text{produit} \quad 7aegh - 3bbgh + 14abef - 6b^3f + bm^3$$

La preuve de ces diviſions ſe fait comme dans l'Arithmetique, en multipliant le quotient par le diviſeur ; & s'il y a un reſte, on l'ajoute au produit de cette multiplication, & on trouve enfin la grandeur qui étoit à diviſer, ſi on a bien réüſſi.

AVERTISSEMENT.

Les grandeurs qu'on ne peut diviſer ſans reſte ſont le plus ſouvent écrites au deſſus de leur diviſeur en forme de fraction. On fait toûjours la même choſe à l'égard des grandeurs, qui ne contiennent point de lettres ſemblables à celles du diviſeur. Par exemple pour diviſer cd par $c + d$ on écrit $\frac{cd}{c+d}$, ce qui en exprime le quotient. Pour diviſer $ab - cd$ par $b + d$ on écrit $\frac{ab-cd}{b+d}$. Pour diviſer ab par f, on écrit $\frac{ab}{f}$; & alors ces diviſions indiquées ſont des fractions.

DE L'EXTRACTION DES RACINES.

DEFINITIONS.

1. RACINE est une grandeur qui étant multipliée par elle même ou par une autre, produit une autre grandeur ; par exemple a est racine du produit ab, ou du produit aa, ou a^2. La grandeur b est aussi racine du même produit ab ou du produit bb. f, g, h, sont les racines du produit fgh. 6 & 3 sont les racines de leur produit 18, &c.

2. Puissance ou degré d'une grandeur est le produit de cette même grandeur multipliée une ou plusieurs fois par elle-même ; par exemple bb, c^3, f^4, &c. sont les puissances de b, c, f, &c.

Il y a plusieurs sortes de puissances ou degrez.

3. La première puissance ou le premier degré d'une grandeur est le produit d'une grandeur multipliée par 1 ; par exemple $1a$, ou a est la premiere puissance de la grandeur a ; d est la premiere puissance de la grandeur d, &c.

4. La 2ᵉ puissance, ou le 2ᵉ degré, ou le quarré d'une grandeur est le produit de cette grandeur multipliée une fois par elle-même ; par exemple la 2ᵉ puissance de c est cc ou c^2, le quarré de $5a^3b^2$ est $25a^6b^4$. Le quarré ou 2ᵉ puissance de 6 est 36, de 8 est 64, &c.

5. La 3ᵉ puissance ou le 3ᵉ degré, ou le cube d'une grandeur est le produit de cette grandeur mul-

tipliée par ſon quarré, ou par ſa 2ᵉ puiſſance. Par exemple le cube, ou 3ᵉ puiſſance de f eſt fff ou f^3; le cube de $2ddf$ eſt $8\,d^6f^3$; le cube de 4 eſt 64; de 5 eſt 125, &c.

6. La 4ᵉ puiſſance, ou le 4ᵉ degré, ou le quarré-quarré, ou le surſolide d'une grandeur eſt le produit de cette grandeur par ſon cube ou par ſa 3ᵉ puiſſance: par exemple la 4ᵉ puiſſance de d eſt d^4; la 5ᵉ puiſſance de c eſt $ccccc$ ou c^5; & ainſi des autres grandeurs.

7. Lorſque pour abreger l'expreſſion d'une puiſſance, on écrit un chifre ſupérieur à côté de la racine de cette puiſſance, ce chifre eſt appellé expoſant de cette puiſſance; par exemple au lieu d'écrire $eeee$, ſi on écrit e^4, on appelle ce 4 l'expoſant de la puiſſance $eeee$.

AVERTISSEMENT.

Une grandeur eſt reconnuë pour quarrée, lorſqu'on peut partager en deux parties égales les lettres qui expriment cette grandeur, de telle maniere que les mêmes lettres ſe rencontrent de part & d'autre: par exemple $ffgghh$ eſt le quarré de fgh, parceque cette grandeur fgh multipliée par elle-même produit $ffgghh$. On dira auſſi qu'une grandeur eſt cube lorſqu'on peut partager en trois parties égales les lettres qui l'expriment; & ainſi des autres.

8. Extraction de racine, ou reſolution d'une puiſſance, c'eſt trouver la grandeur qui étant multipliée par elle-même un certain nombre de fois produiſe cette puiſſance; par exemple chercher un nombre qui étant multiplié par lui-même produiſe le nombre quarré 144, c'eſt extraire la racine de 144 qui eſt 12.

Lorſque

Lorſque la puiſſance, dont eſt queſtion, eſt un quarré, ſa racine qu'on cherche eſt appellée racine quarrée ; ſi cette puiſſance eſt un cube, ſa racine eſt appellée racine cubique ; ſi cette puiſſance eſt du 4^{e} degré, ſa racine eſt appellée racine quatriéme, de même des autres. Enfin la racine tire ſon nom de la puiſſance dont elle eſt racine.

Lorſque les grandeurs ſont ſimples, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres, comme aa ou ccc, il eſt tres-facile de voir leurs racines. On connoît par exemple évidemment que la racine quarrée de dd eſt d ; que la racine cubique de f^{3} eſt f ; & ainſi des autres.

Pour extraire les racines des grands nombres, il eſt neceſſaire de ſçavoir les quarrez, les cubes, &c. de chaque caractere, depuis 1 juſqu'à 9 ; principalement les quarrez, parcequ'ils ſont plus d'uſage que les autres puiſſances.

Racines	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Quarrez	1.	4	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.
Cubes	1.	8.	27.	64.	125.	216	343.	512.	729.	1000.

Lorſqu'on ſouhaite trouver la racine de quelque grand nombre ; par exemple, ſi on cherche la racine quarrée de 1369, il faut ſeparer ces chifres de deux en deux, & commencer de droit à gauche, enſuite faire une ligne au deſſous, & à ſon extremité on écrira les racines cherchées, dans la même forme qu'on écrit le quotient dans la diviſion, comme on verra dans la ſuite.

Pour rendre raiſon de ce partage de chifres, il faut obſerver que ſi un nombre eſt exprimé par plus de deux chifres, ſa racine eſt exprimée par

I

plus d'un chifre ; parceque 100 eſt le plus petit nombre de ceux qui ſont exprimez par trois chifres, & ſa racine quarrée qui eſt 10 eſt le plus petit nombre de ceux qui ſont exprimez par deux chifres. Tous les nombres qui ſont au deſſus de 100, ont donc pour racine un nombre exprimé par plus d'un chifre ; & tous les nombres qui ſont au deſſous de 100, c'eſt à dire, qui ſont exprimez par moins que trois chifres, ont une racine quarrée moindre que 10, & ont donc une racine exprimée par un ſeul chifre. Or quand il faut extraire la racine d'un nombre, il faut partager ce nombre en certaines parties, ou tranches, telles qu'on y puiſſe trouver les plus grands quarrez dont les racines ſoient exprimées chacune par un ſeul chifre. Pour ſatisfaire à ce deſſein, on commence de droit à gauche, & on ſepare ces chifres de deux en deux ; parceque la racine d'un nombre quarré exprimé par deux chifres, eſt toujours exprimée par un ſeul chifre.

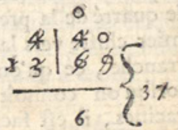
On cherche l'un aprés l'autre les chifres qui expriment cette racine. On commence par le premier chifre de cette même racine qui eſt vers la main gauche, & qui eſt de plus grande valeur que les autres ; on continue de gauche à droit. Ce premier chifre étant trouvé, on s'en ſert pour trouver le ſecond ; les deux premiers étant enſuite conſiderez comme un ſeul nombre ſervent à trouver le troiſiéme chifre de la racine qu'on cherche ; les trois premiers étant conſiderez comme un ſeul nombre ſervent à trouver le 4^{e} chifre, & ainſi de ſuite, jusqu'à ce qu'il ne reſte plus de Chifre à trouver.

C'eſt pour cela qu'on ne conſidere jamais la racine qu'on cherche que comme une grandeur compoſée de deux parties $a + b$. a repreſente le chifre ou les chifres trouvez, & b repreſente le chifre qu'on cherche. Le quarré de cette grandeur $a + b$ qui eſt $aa + 2ab + bb$ ſert de régle dans les extractions des racines quarrées.

EXEMPLE.

Soit ce nombre 1369, dont il faut extraire la racine quarrée, c'eſt à dire, trouver le nombre qui étant multiplié une fois par lui-même produiſe 1369.

On ſeparera les chifres de deux en deux, comme il a été enſeigné; enſuite il faut conſiderer qu'il y aura autant de chifres pour exprimer la racine qu'on cherche, qu'il y a de tranches dans le nombre 1369; & partant comme il s'y trouve deux tranches de chifres, ſçavoir 13 & 69, cela marque qu'il n'y aura que deux chifres pour exprimer cette racine cherchée, dont le premier chifre eſt appellé a & le ſecond b.



$a = 3.$
$b = 7.$

Mais parceque le quarré de $a + b$ qui repreſente le nombre 1369, contient le quarré de a, & deux fois le produit de a multiplié par b, ou, ce qui eſt la même choſe, le produit du double de a multiplié par b & encore le quarré b; c'eſt pour cela que nous ferons l'extraction des racines de ces trois produits l'une après l'autre.

1°. C'eſt dans la premiere tranche vers la main gauche qu'on trouve toûjours le quarré du premier chifre de la racine cherchée, comme on le verra dans la ſuite ; à cauſe de cela, je cherche la racine du quarré, qui approche le plus près de 13, & je trouve que c'eſt 3 racine de 9 ; j'écris 3 au rang des racines. Ce chifre 3 eſt repreſenté par a : je retranche enſuite de 13 le quarré aa, c'eſt à dire le quarré de la racine 3, qu'on vient de trouver, qui eſt 9, il reſte 4, que j'écris ſur le 3.

2°. Dans les produits $2ab+bb$ outre la racine $a=3$ qui vient d'être connuë, il reſte encore à trouver la valeur de l'autre racine b. Cette 2e racine ſe trouve dans ce qui peut reſter dans la premiere tranche, après qu'on en a retranché le quarré de la premiere racine, & dans le premier chifre vers la main gauche de la deuxiéme tranche, ce qu'on fera voir par la ſuite ; mais lorſqu'on connoît un produit avec une de ſes racines, il eſt facile de trouver l'autre racine de ce produit, en diviſant ce même produit par la racine connuë ; le quotient de cette diviſion donnera l'autre racine qu'on cherche. Dans cet exemple, le 4 qui reſte écrit au deſſus de 13, & le 6, premier chifre de la 2e tranche font 46, dans lequel nombre eſt le produit dont le double de a, c'eſt à dire le double de 3 eſt une des racines qui vient d'être connuë ; & partant ſi on diviſe ce produit par 6 qui eſt le double de 3, on trouvera pour quotient 7, ſecond chifre de la racine cherchée qui eſt repreſenté par b ; & partant ſi on multiplie ce dernier chifre trouvé par ce double du premier chifre trouvé, on aura 42, c'eſt à dire $2ab$, on retranchera ces 42 des 46 dont on vient de parler, il reſte 4 qu'on écrira ſur le 6.

3°. Enfin des 49 qui reſtent, on retranchera le quarré de cette derniere racine 7, qui eſt 49, il ne reſtera rien ; on écrira 0 au deſſus, & on concluëra que la racine 37 eſt exacte ; c'eſt à dire que le nombre 1369 eſt un nombre quarré dont la racine eſt préciſément 37.

Il reſte preſentement à faire voir que le quarré du premier chifre de la racine cherchée ſe trouve toûjours dans la premiere tranche du nombre dont on veut extraire la racine ; que le produit du double du premier chifre de la racine cherchée multiplié par le deuxiéme chifre de cette racine, eſt dans ce qui peut reſter de la premiere tranche, & dans le premier chifre de la deuxiéme tranche vers la main gauche ; Enfin que le quarré du 2[e] chifre de la racine cherchée eſt dans ce qui reſte, & dans le dernier chifre de la deuxiéme tranche en commençant de gauche à droit.

Pour connoître ces choſes évidemment, il n'y a qu'à faire le quarré de la racine cherchée 37, c'eſt à dire, multiplier 37 par 37, & remarquer quand on dit 7 fois 7 ſont 49, que c'eſt le quarré du ſecond chifre de la racine qui ſe trouve indubitablement dans la ſeconde tranche en comptant de gauche à droit. Enſuite quand on dit 3 fois 7 dixaines ſont 21 ; on écrit 1 au rang des dixaines, & le 2 dans un rang plus avancé, ſous les centaines. Quand

$$\begin{array}{r|l}
a+b= & 37 \\
a+b & 37 \\
\hline
bb= & 49 \\
2ab\begin{cases} 2 \\ 2 \end{cases} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\
aa=9 & \\
\hline
13 & 69
\end{array}$$

on multiplie par 3 qui ſont les dixaines de 27, en diſant encore : 3 fois 7, ou 7 fois 3 dixaines ſont 21 qu'on écrit au deſſous des 21 dixaines precedentes : on voit évidemment que ces deux 21 sont deux fois le produit du dernier chifre 3 de la racine cherchée multiplié par le second chifre 7 ; ce qui est la même chose que le produit du double du premier chifre par le second, parceque l'un & l'autre font 42. Enfin 3 étant multiplié par 3, qui sont des centaines, on trouve 9 pour produit qu'on écrit dans son rang : on trouve que ce 9 est le quarré du premier chifre 3 de la racine cherchée. De sorte qu'en commençant de droit à gauche, si on partage maintenant de deux en deux ces produits écrits de cette maniere sans les changer de situation, on trouvera le quarré du premier chifre de la racine dans la premiere tranche, & les autres produits de suite, comme on vient de dire.

Autre Exemple.

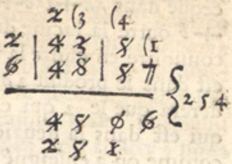
Pour connoître la racine quarrée du nombre 64857, ou du nombre quarré qui en approche le plus près, il faut separer de deux en deux les chifres qui expriment ce nombre en commençant de droit à gauche. Il se trouvera trois tranches ; ensuite il faut commencer de gauche à droit à la premiere tranche, disant : la racine du nombre quarré qui approche le plus près de 6 c'est 2, qu'il faut écrire au rang des chifres de la racine qu'on cherche. Après cela on retranche du nombre 6 le quarré de ce chifre 2 qui est 4, il reste 2 qu'on écrit sur le 6, & on tranche ce 6.

$$\begin{array}{c|cc|cc} & 2 & & & \\ \cancel{2} & \cancel{4} & 3 & & \\ \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{8} & 5 & 7 \\ \hline & \cancel{4} & \cancel{8} & & \\ & \cancel{2} & & & \end{array} \left\{ 2\;5 \right.$$

Le premier chifre 2 de la racine cherchée vient d'être connu, il eſt repreſenté par a; mais parceque dans $aa+2ab+bb$ qui eſt le quarré de $a+b$ outre la racine du quarré aa, il faut encore connoître en chifre la valeur de l'autre racine qui eſt dans le produit $2ab$. Pour y réüſſir on conſiderera que le 2 qui eſt au deſſus du 6 & le 4 qui eſt dans la deuxiéme tranche fera 24, &, comme on a enſeigné dans l'exemple precedent, on diviſera 24 par le double de la racine qu'on vient de trouver, qui eſt le double de 2 égal à $4=2a$; & pour cela on écrira ce nombre 4 ſous le 4 de la deuxiéme tranche. Si le double de cette racine étoit exprimé par deux chifres, on écriroit toûjours le dernier ſous le premier de la deuxiéme tranche, & l'autre ſous les autres chifres vers la main gauche. On dira en 24 combien y a t-il de fois 4? on l'y trouve veritablement 6 fois; mais il faut obſerver que ſi je l'écrivois 6 fois, il ne me reſteroit que 8 dans la deuxiéme tranche, d'où je ne pourrois plus ſouſtraire le quarré de ce nombre 6, & partant j'écris au rang des racines ſeulement le chifre 5. Enſuite je multiplie ce ſecond chifre $5=b$ de la racine cherchée par 4, ce qui fait $20=2ab$, que je retranche de 24, il reſte 4 que j'écris ſur le 4 de la deuxiéme tranche. Enſuite je tranche le 2 qui eſt ſur le 6, & ce 4 de la deuxiéme tranche comme inutiles; aprés cela il reſte encore le 4 qui eſt au deſſus du 4 de la deuxiéme tranche & le 8 ſuivant, ce qui fait 48 dont on retranchera le quarré du chifre 5 qui eſt $25=bb$, il reſtera 23 qu'on écrira au deſſus de ces 48, & on tranchera enſuite ces 48.

Aprés cela, il faut conſiderer que les deux chifres 25 de la racine cherchée ſont exprimez par a. Or puiſque dans le quarré $aa+2ab$

$+bb$, nous connoissons déja la racine du quarré aa qui est 25, il nous reste encore à connoître en chifres la valeur de l'autre racine qui se trouve dans les



produits $2ab+bb$; mais ce produit $2ab$ se trouve dans les chifres qui viennent de rester dans la deuxiéme tranche, & dans le 5 de la troisiéme. Je doublerai donc la racine de $aa=25$ que je viens de trouver, ce qui fera 50, dont j'écris le dernier chifre 0 sous le premier de la troisiéme tranche, & l'autre qui est 5 sous le 5 qui precede vers la main gauche, & si dans ce double il se trouvoit plus de deux chifres j'écrirois le 3e sous la 3e colomne qui precederoit, & ainsi des autres. Après cela je fais une division, & je dis : en 23 combien y a t-il de fois ce dernier 5 qui se trouve au dessous du 3 ? je trouve qu'il peut y être 4 fois, j'écris 4 au rang des racines. Et partant ce 4 sera le 3e chifre de la racine cherchée. Je multiplie ensuite ce 4 par les $50=2a$, & le produit est 200, je le retranche des 235 qui sont au dessus en cette sorte : 4 fois 0 c'est 0, qui étant retranché de 5, il reste 5 que j'écris au dessus du 5. Ensuite 4 fois 5 sont 20 qui étant retranchez des 23 qui sont au dessus, il reste 3 que j'écris au dessus du 3.

Enfin des 357, qui restent, je retranche le quarré de ce dernier chifre 4, qui est $16=bb$, & pour cela j'écris 16 en posant 6 sous le dernier chifre 7, & la dixaine 1 sous la colomne precedente. Je dis ensuite de 7 ôtez 6, reste 1 que j'écris sur le 7. De 5 ôtez 1 qu'on vient d'écrire au dessous, reste 4 que j'écris au dessus du 5. Et partant il reste encore 341, que je separe après avoir tranché le reste; & je conclus que le nombre 64857 n'est pas un nombre quarré; mais que 254 est la racine du nombre quarré qui approche le plus près de ce nombre 64857, ce qu'on cherchoit, c'est à dire que si de 64857 on retranche 341, on aura un nombre quarré 64516, dont la racine est 254.

Il faut remarquer que s'il y avoit une 4^e tranche, on doubleroit la racine trouvée, & on opereroit, comme on a fait en passant de la 2^e à la 3^e tranche; de même s'il y avoit une 5^e tranche, &c.

Autre Exemple.

$$\begin{array}{ll} 0 \quad\; 0 \qquad\qquad\quad 0 & \\ -aa+10ab \qquad -25bb & \\ aa-10ab+2ac+25bb-10bc+cc & \left\{ a-5b \right. \\ \hline 2a \qquad\qquad\quad 25bb & \end{array}$$

Pour tirer la racine quarrée de $aa-10ab+2ac+25bb-10bc+cc$, je dis: la racine quarrée de aa est a que j'écris au rang des racines. Ensuite dans la grandeur proposée je retranche ou j'efface le quarré aa de cette racine.

2°. Je double cette racine a, & j'écris $2a$ pour diviseur, disant: $-10ab$ divisé par $+2a$ donne pour quotient $-5b$, je multiplie $-5b$ par $+2a$, ce qui produit $-10ab$ que je retranche de pareille grandeur en l'effaçant dans l'exemple proposé, il ne reste rien, j'écris 0 au dessus. Ensuite je retranche le quarré de cette derniere racine trouvée $-5b$ qui est $+25bb$, de pareille grandeur qui se trouve dans l'exemple proposé ; il ne reste rien, je les efface l'une & l'autre, & j'écris o au dessus.

$$\begin{array}{l}
\quad o \quad\quad o \quad\quad o \quad\quad o \quad\quad o \quad\quad o \\
-aa+10ab-2ac-25bb+10bc-cc \\
\;\; aa-10ab+2ac+25bb-10bc+cc \\
\hline
\quad 2a \quad\quad 25bb \quad 2a-10b \quad cc
\end{array}
\left\} a-5b+c \right.$$

3°. Je considére la racine-trouvée $a-5b$ comme dans les nombres, & je la double pour me servir de diviseur, je trouve $2a-10b$ que j'écris au dessous de la grandeur proposée. Je dis: $+2ac$ divisé par $+2a$, donne pour quotient $+c$, que j'écris pour racine cherchée. Ensuite je multiplie cette derniere racine par $-10b$ du dernier diviseur, cela produit $-10bc$ que je retranche de $-10bc$ qui se trouve dans l'exemple proposé, il ne reste rien ; partant je les efface & j'écris o au dessus. Après cela je multiplie cette derniere racine cherchée $+c$ par $+2a$ du dernier diviseur, ce qui fait $+2ac$ qu'on retranche de pareille grandeur qui se rencontre dans l'exemple proposé, il ne reste rien, on les efface, & on écrit o au dessus. Enfin on retranche cc quarré de $+c$, derniere racine trouvée, de pareille grandeur qui se rencontre dans l'exemple proposé, & il ne reste rien. Partant je conclus que la racine quarrée de $aa-10ab+2ac+25bb-10bc+cc$ est précisément $a-5b+c$.

Il faut remarquer que dans cet exemple la racine cherchée peut aussi être $-a+5b-c$ en changeant tous les signes de la racine precedente cherchée ; parceque si on multiplie cette grandeux par elle-même, on trouvera pour ſon quarré la grandeur qu'on vient de propoſer pour exemple. Pour faire l'extraction de cette racine avec ces derniers ſignes, on peut commencer en diſant : la racine quarrée de aa eſt $-a$; & ainſi du reſte.

Pour tirer la racine quarrée de $16aa + 72ab - 96ac + 81bb + 216bc + 144cc$, on commencera comme dans l'exemple precedent à écrire au rang des racines $4a$ qui eſt la racine de $16aa$, & on continuëra l'operation comme dans l'exemple precedent. Enfin on trouvera pour racine $4a + 9b - 12c$.

Afin de mieux s'exercer dans les commencemens qu'on étudie ces choſes, on peut prendre des racines à volonté & les quarrer ; & enſuite du quarré en extraire la racine, comme on vient d'enſeigner.

Pour preuve que l'extraction qu'on a faite de la racine quarrée eſt telle qu'on la ſouhaite, il faut multiplier la racine trouvée par elle-même, & au produit de cette multiplication, on ajoutera le reſte s'il s'en eſt trouvé après l'extraction. Cette ſomme ſera un nombre égal à celui dont on a tiré la racine, ſi on a bien réüſſi. Si cela n'arrive pas, l'operation ſera mal faite, & il faudra la recommencer. Pour montrer qu'on a bien réüſſi dans l'extraction de la racine quarrée du nombre 64857 qu'on a propoſé dans un des exemples precedents, il faut multiplier la racine trouvée 254 par elle-même, & au produit de cette multiplication ajouter le reſte 341, on trouvera enfin le même nombre dont on a tiré la racine.

S'il ſe rencontroit une fraction dont on voulût tirer la racine quarrée, ſi cela étoit poſſible ;

par exemple $\frac{36}{81}$, on prendra la racine quarrée 6 du numerateur 36, & ensuite on prendra la racine quarrée 9 du dénominateur 81, & on aura $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ pour la racine cherchée ; parceque cette fraction $\frac{6}{9}$ multipliée par elle-même produit $\frac{36}{81}$. Par la même raison on trouvera que la racine quarrée de cette fraction $\frac{ff}{gg}$ est $\frac{f}{g}$.

Après avoir fait les extractions des racines ; comme on vient d'enseigner ; s'il reste quelque chose, c'est une marque qu'on ne peut en trouver qu'une racine approchée, ou seulement la racine du nombre quarré qui approche le plus près du nombre proposé. S'il reste quelque chose après avoir tenté l'extraction de la racine d'une grandeur litterale on évite cette extraction, qui à cause de ce reste n'est point exacte. On verra dans la suite de quelle maniere on doit exprimer ces racines à l'égard des quarrez, des cubes, &c.

Autre Exemple.

Pour connoître la racine cubique du nombre 105154067, ou du nombre cube qui en approche le plus près, il faut separer de trois en trois les chifres qui expriment ce nombre, en commençant comme dans l'extraction de la racine quarrée de droit à gauche. On rendra raison de cela, comme on a fait pour la racine quarrée ; parceque 1000 est le plus petit des nombres cubes exprimez

primez par plus de 3 chifres, dont la racine cubique qui eſt 10 eſt auſſi la plus petite de celles qui ſont exprimées par pluſieurs chifres. Donc tout nombre au deſſous de 1000, c'eſt à dire, qui eſt exprimé par moins que 4 chifres aura ſa racine cubique exprimée par un ſeul chifre. Lorſqu'on fait l'extraction de la racine cubique d'un nombre, on cherche les racines des plus grands cubes qui ſont dans ce nombre, exprimées chacune par un chifre ſeulement. On eſt aſſuré de trouver ces racines en ſeparant les chifres de ce nombre de 3 en 3. Si on vouloit extraire la racine de la 4[e] puiſſance, on ſepareroit les chifres de 4 en 4; pour la 5[e] puiſſance, de 5 en 5, &c. on feroit toûjours un raiſonnement ſemblable au precedent.

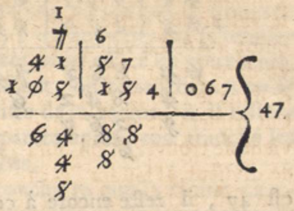
Il faut encore ſe reſſouvenir de la regle generale pour les extractions de toutes ſortes de racines, qui eſt qu'on repreſente toûjours la racine qu'on cherche comme une grandeur compoſée de deux parties $a + b$; a repreſente le chifre ou les chifres trouvez, & b repreſente le chifre qu'on cherche. Le cube de cette grandeur $a + b$ qui eſt $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$ ſert de regle dans les extractions des racines cubiques.

Il faut commencer vers la main gauche à la premiere tranche, diſant: la racine du nombre cube, qui approche le plus près de 105 c'eſt 4 qu'il faut écrire au rang des chifres de la racine qu'on cherche. Après cela on retranche du nombre 105 le cube 64 de ce nombre 4, il reſte 41 qu'on écrit au deſſus

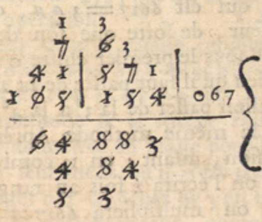
$$\left.\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & & 7 & & & & & & \\ & \cancel{4} & \cancel{1} & 5 & & & & & \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{1} & 5 & 4 & 0 & 6 & 7 \\ \hline & \cancel{6} & \cancel{4} & \cancel{8} & & & & & \\ & & \cancel{4} & & & & & & \end{array}\right\} 47$$

de 105, & on efface ces 105.

Le premier chifre $4 = a$ de la racine cherchée vient d'être connu; mais en ſuivant nôtre regle generale, il reſte encore à connoître en chifres la valeur de l'autre racine b qui eſt dans le produit $3\,a\,a\,b$. La valeur de ce ſecond chifre ſe trouve dans les 41 reſtants de la premiere tranche, & dans le 1 de la 2^e tranche, c'eſt à dire dans 411. On triplera donc le quarré de la racine qu'on vient de trouver, & on aura $48 = 3\,a\,a$ qui ſervira de diviſeur. Il faudra l'écrire au deſſous, de ſorte que ſon dernier chifre 8 ſe trouve ſous le premier 1 de la 2^e tranche. Enſuite on dira comme dans l'extraction de la racine quarrée, en 41 qui reſte ſur 05 combien y a t-il de fois 4 qu'on vient d'écrire au deſſous? on l'y trouve 10 fois; mais parcequ'on n'écrit jamais au quotient d'une diviſion plus de 9 à chaque poſition, & que même dans la circonſtance preſente, après avoir tenté, on ne peut ni écrire 9 fois, ni 8 fois; parceque les reſtes qui ſe trouveroient dans les premieres & ſecondes tranches ne ſeroient pas ſuffiſants pour qu'on en pût encore retrancher la valeur de $3\,a\,b\,b + b^3$, c'eſt pour cela qu'on n'écrira que 7 au rang des racines. Il faut enſuite multiplier ce ſecond chifre $7 = b$ de la racine par 8, cela fait 56 qu'on retranche de 61, en imaginant 6 dixaines avec le 1 de la premiere tranche, comme dans la diviſion, il reſte 5 qu'on écrit ſur 1, & on retient 6. Après cela on dit 4 fois 7 ſont 28, & 6 qu'on vient de retenir font 34 qu'on retranche de 41, il reſte 7 qu'on écrit au deſſus de 1. Ce qu'on vient de faire eſt la même choſe que ſi de 411 on retranchoit $336 = 3\,a\,a\,b$ produit de 48 multiplié par 7, & qu'on écrivit au deſſus le reſte 75. Enſuite pour ſatisfaire au troiſiéme produit $3abb$, on multipliera $49=bb$, qui eſt le quarré de 7 par le triple de 4 qui eſt $12=3a$, on aura pour produit $588=3abb$ qu'on écrira, de ſorte que ſon dernier chifre 8 ſe trouve ſous le chifre 5 de la 2e tranche. Enſuite on ſouſtraira ce nombre 588 de ce qui



reſte au deſſus, comme on a enſeigné dans la ſouſtraction, & on écrira encore le reſte au deſſus, après avoir tranché les chifres precedents comme



inutiles. Enfin on écrira encore au deſſous $343=b^3$ qui eſt le cube de 7, qu'on retranchera à la maniere ordinaire de ce qui reſte au deſſus. Cela étant fini dans ces deux premieres tranches, on paſſera à la troiſiéme.

Il faut preſentement remarquer que les deux chifres 47 de la racine qu'on cherche, ſont exprimez par a; & que dans le cube $a^3+3aab+3abb+b^3$, qui repreſente le nombre propoſé dont on veut tirer la racine cube, nous venons de connoître la racine du cube a^3 qui

eſt 47, il reſte encore à connoître la valeur en chifres de l'autre racine qui ſe trouve dans le 2^e^ produit $3aab$. La valeur de ce produit ſe trouve dans ce qui vient de reſter de la 2^e^ tranche, & dans le premier chifre de la 3^e^. On triplera donc le quarré de 47 qui eſt $6627 = 3aa$, qu'on écrira pour diviſeur, de ſorte que ſon dernier chifre 7 ſe trouve ſous le premier chifre 0 de la 3^e^ tranche. Au lieu qu'il faut paſſer de la 2^e^ à la 3^e^ tranche ; s'il falloit paſſer de la 3^e^ à la 4^e^, on ſuivroit toûjours la même methode. Après cela on fait une diviſion, diſant : en 13 combien y a t-il de fois 6, on l'écrira 2 fois au rang des racines. Enſuite on multipliera $6627 = 3aa$ par ce nombre $2 = b$, comme on vient de faire lorſqu'on a trouvé le chifre 7, & on aura pour produit $13254 = 3aab$, qu'on retranchera de 13310 qui ſont les chifres reſtants de la 2^e^ tranche & le premier de la 3^e^. On aura pour reſte 56 qu'on écrit au deſſus de 10 qui ſont les deux derniers chifres de ce nombre 13310, après avoir tranché les precedents. Enſuite on multipliera le triple de $47 = a$ par 4 quarré de $2 = b$ dernier chifre trouvé de la racine, on aura pour produit $564 = 3abb$. On écrira ce nombre au deſſous des autres, de ſorte que ſon dernier chifre 4 ſoit ſous le 2e de la 3e tranche. Après cela on retranchera à la maniere ordinaire ce nombre 564 de 566 qui ſe trouvent au deſſus, il reſtera 2 qu'on écrira ſur le dernier 6 de ce nombre après avoir effacé les precedents. Enfin des 27 qui reſtent, on retranchera $8 = b^3$ cube du dernier chifre de la racine, & il reſtera encore 19 qu'on ſeparera après avoir tranché les autres comme inutiles.

Et partant on concluëra que la racine cherchée 472 n'eſt pas préciſément la racine cubique du nombre propoſé; mais que ſi de ce nombre propoſé on retranchoit les 19 qui reſtent, on auroit pour reſte un nombre cube, dont la racine eſt préciſément 472, qui eſt ce qu'on cherchoit par cette operation.

Pour tirer la racine cubique de $a^3 + 9aab + 6aac + 27abb + 36abc + 27b^3 + 12acc + 54bbc + 36bcc + 8c^3$, on ſuivra la même methode & le même raiſonnement qu'on vient de mettre en uſage pour les nombres, excepté ſeulement qu'il n'eſt point neceſſaire de partager par tranches de 3 en 3 les parties litterales de cette grandeur, comme on a fait dans les chifres; & on trouvera que la racine cherchée ſera $a + 3b + 2c$.

L'exemple precedent de la grandeur litterale, dont on a fait l'extraction de la racine quarrée, & les autres exemples propoſez en nombres, donnent une ouverture ſuffiſante pour l'extraction des racines de toutes ſortes de puiſſances. Par exemple pour tirer la racine d'une 4e puiſſance d'une grandeur propoſée en nombres, on partagera les chifres de 4 en 4, commençant de droit à gauche, & on prendra pour regle la

4^e^ puiſſance de $a + b$ qui eſt $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$; & ainſi des autres puiſſances.

Pour faire la preuve de l'extraction de la racine cubique, il faut multiplier par elle-même la racine trouvée, ce qui produira le quarré de cette racine. Il faut enſuite multiplier ce quarré par cette même racine trouvée, le produit de cette derniere multiplication ſera le cube de cette racine, qui ſera préciſément égal au nombre propoſé ; ſi après cette extraction il n'étoit rien reſté, & s'il étoit reſté quelque choſe, en l'ajoutant à ce cube on doit pareillement, ſi on a bien réüſſi, trouver une ſomme égale au nombre dont on a voulu faire l'extraction de la racine cubique ; ſi cela arrive autrement, l'operation eſt vicieuſe & mal faite. Pour être certain ſi 472 eſt veritablement la racine du nombre 105154067 propoſé dans un des exemples precedents, ou du nombre qui en approche le plus près, il faut cuber cette racine trouvée 472, & à ſon cube ajoûter le reſte 19, ſi on a bien réüſſi, on trouvera enfin le nombre dont on s'étoit propoſé d'extraire la racine. On agira de même à l'égard des autres exemples.

Remarques pour l'approximation des racines des Nombres.

Un Nombre n'eſt point un nombre quarré, lorſqu'on ne peut trouver un autre nombre entier, lequel étant multiplié par lui-même, donne un produit égal à ce premier nombre. On en jugera de même du nombre qui n'eſt point cube, & ainſi des autres puiſſances : tels ſont les nombres 2, 3, 5, 6, 7, 10, 35, &c. Mais quoiqu'on ne puisse trouver précisément une racine quarrée d'un nombre qui n'est point quarré, on peut cependant trouver une racine, qui approchera si près de la racine cherchée de ce nombre qui n'est point quarré, que l'excés de cette racine cherchée par dessus la racine trouvée, sera moindre que la valeur de telle fraction qu'on voudra assigner. Ainsi on a un moyen d'approcher à l'infini de la racine quarrée du nombre qui n'est point quarré. Enfin quoique le nombre entier dont on ne peut trouver la racine, ne soit pas un nombre quarré ou un nombre cube, &c. d'une racine connuë & determinée par des nombres entiers, ou par des entiers & fractions; on le considere cependant comme un nombre quarré, cube, &c. de la racine inconnuë qu'on ne peut trouver; & c'est cette consideration qui conduit à l'extraction d'une racine qui approche si prés de la racine cherchée, qu'il ne s'en faudra pas telle fraction qu'on voudra déterminer, qu'on n'ait rencontré au juste la racine de ce nombre.

La regle generale pour parvenir à cette approximation est de multiplier le nombre proposé qu'on considere comme la puissance dont on veut extraire la racine, par la puissance semblable du nombre qu'on veut être le denominateur de la fraction, qui sera jointe à la racine du quarré qui approchera le plus près du nombre proposé. Par exemple si on veut trouver la racine approchée de 39, on fait d'abord reflexion que la racine du nombre quarré, qui approche le plus prés de 39, c'est 6. Mais le quarré de 6 n'est que 36; il faut donc davantage que 6 pour faire la racine quarrée de 39; il faut moins que 7, parceque le quarré de 7 est 49, qui est plus grand que 39. Enfin il faut donc ajouter à 6 une fraction, de sorte que le quarré de 6, & cette fraction approche des 39 autant qu'on voudra. Je veux par exemple qu'à cette racine 6 on joigne des treiziémes, & qu'il ne s'en faille pas $\frac{1}{13}$ qu'on ne sçache précisément la racine de 39. Il faut considerer 39 comme un quarré, dont on cherche la racine, & à cause des treiziémes qu'on veut avoir, il faut multiplier ce nombre 39 par 169 qui est le quarré de 13, & on aura pour produit 6591, dont on aura pour racine quarrée 81 reste 30. On negligera ce reste 30, & on fera seulement attention à cette racine 81, qu'on divisera par 13, qui est la racine du quarré 169; & on aura pour quotient $6\frac{3}{13}$. Et partant on concluëra que $6\frac{3}{13}$ approche si près de la racine cherchée, que si on ajoutoit un treiziéme, on auroit une racine trop grande.; parceque le quarré de $6\frac{4}{13}$ est $\frac{6724}{169} = 39\frac{133}{169}$, au lieu que le quarré de $6\frac{3}{13}$ est $\frac{6561}{169} = 38\frac{139}{169}$.

On doit operer de la même maniere à l'égard des autres nombres dont on veut extraire les racines approchées, & ce qu'on dit à l'égard des treiziémes; on le peut dire de même de toute autre fraction qu'on se veut proposer.

Mais à cause que dans l'approximation des racines quarrées, cubes, ou toute autre que ce soit, il est beaucoup plus facile de se servir des dixiémes, qu'on appelle fractions decimales, ou centiémes, ou milliémes parties, &c. pour ajouter à la racine du nombre quarré qui approche le plus près de celui qu'on se propose. C'est pour cela que si on veut faire l'extraction de la racine quarrée d'un nombre qui n'est point quarré, on ajoute à ce nombre 0 0, parcequ'il se trouve par ce moyen multiplié par 100, quarré de 10. Si on écrit ensuite à ce nombre proposé quatre zeros, il se trouvera multiplié par 10000, qui est le quarré de 100, & alors on aura pour fraction des centiémes. Enfin quand on ajoute des zeros, il faut toûjours les ajoûter deux à deux à cause des quarrez de 10, 100, 1000, &c. On voit par ce moyen que plus on ajoûtera de zeros, plus la racine trouvée approchera de celle qu'on cherche. On est par exemple plus assuré qu'on est plus proche de la racine qu'on cherche, s'il s'en faut moins qu'une milliéme partie d'unité, que s'il s'en falloit moins qu'une dixiéme.

Par exemple pour avoir la racine approchée de 24, j'ajoute ensuite de 24 deux zeros, & par ce moyen 24 se trouvera multiplié par 100 qui est le quarré de 10, ce qui produira 2400 dont on aura pour racine 48, reste 96 qu'on negligera, & on divisera 48 par 10, on aura $4\frac{8}{10} = 4\frac{4}{5}$, qui sera la racine quarrée approchée de 24.

Si on vouloit faire par approximation l'extraction de la racine cubique d'un nombre qui ne seroit pas cube, on lui ajouteroit 3 zeros, ou 6 zeros, ou 9, &c. parcequ'alors le nombre proposé étant consideré comme cube de la racine cherchée, se trouveroit multiplié par 1000, qui est le cube de 10; ou par 1000000, qui est le cube de 100. Ensuite on tireroit la racine cubique de ce produit, & on diviseroit cette racine trouvée par 10, si on avoit ajouté 3 zeros, par 100, si on en avoit ajouté 6, &c. on auroit au quotient de cette division la racine cubique approchée qu'on chercheroit.

Si on vouloit faire par approximation l'extraction de la racine 4^e^ d'un nombre qui ne seroit pas précisément une 4^e^ puissance, on lui ajouteroit 4 zeros, ou 8 zeros, &c. ensuite on feroit l'extraction de la racine 4^e^, suivant les regles generales qu'on a pratiquées pour les extractions de racines quarrées, &c. enfin on opereroit, comme on vient d'enseigner.

La certitude de cette pratique est facile à comprendre. Soit le nombre 39 qu'on vient de proposer dans un des exemples precedents; puisqu'il est consideré comme un quarré dont on cherche la racine, on aura $39 = aa$. Soit l'autre nombre pris à volonté $13 = b$, dont le quarré $169 = bb$; si on multiplie aa par bb, on aura $aabb$, dont la racine quarrée est ab, puisque ab multiplié par lui-même, produit $aabb$. Or cette racine ab étant divisée par $b = 13$, donne pour quotient a qui est la racine de $aa = 39$. Soit par exemple 56 dont on cherche la racine cubique: puisqu'on considere ce nombre comme cube, on aura $56 = a^3$. Soit un autre nombre, par exemple $1000 = b^3$, dont la racine cubique est $10 = b$; si on multiplie a^3 par b^3, on aura pour produit $a^3 b^3 = 56000$, dont la racine cubique est ab. Or cette racine étant divisée par $10 = b$, on aura a pour la racine cubique de 39.

On fera un pareil raiſonnement à l'égard de l'extraction de la racine des autres puiſſances lorſqu'on veut avoir des racines approchées. On voit évidemment que la fraction jointe au nombre entier qui eſt la racine exacte de la puiſſance qui approche le plus prés du nombre propoſé ſeroit préciſément la racine cherchée, s'il ne reſtoit rien aprés ces dernieres extractions. Mais à cauſe de ce reſte qu'on eſt obligé de negliger, on ne peut avoir que des racines approchées.

DES RACINES
dont on ne peut faire l'extraction exactement.

1. UNe puiſſance parfaite eſt celle dont on peut extraire la racine ſans reſte. Par exemple a^3 eſt une puiſſance parfaite; parceque ſa racine exacte eſt a. Le nombre 25 eſt une puiſſance parfaite : mais $a\,b$ n'eſt pas une puiſſance parfaite, ni 12, &c.

2. Lorſqu'on ne peut faire l'extraction de la racine d'un nombre propoſé ſans qu'il reſte quelque choſe, ſouvent on ſe contente d'exprimer cette racine par ce ſigne $\sqrt{}$, appellé *Signe radical*. On écrit ce ſigne devant le nombre propoſé, & ſur ce même ſigne on écrit encore un chifre qui eſt l'expoſant de la racine dont il s'agît; on l'appelle auſſi *l'expoſant du ſigne radical*. Par exemple, pour exprimer la racine quar-

rée, on écrit $\sqrt[2]{}$; la racine cubique, on écrit $\sqrt[3]{}$; la racine de la 4^e^ puissance, on écrit $\sqrt[4]{}$, &c. Lorsqu'on écrit seulement ce signe $\sqrt{}$ devant quelque grandeur, cela signifie *racine quarrée.* Par exemple cette expression $\sqrt{158}$, ou $\sqrt[2]{158}$, signifie la racine quarrée de 158; $\sqrt[3]{ab}$, c'est à dire, racine cubique de ab. Si la grandeur dont on veut exprimer la racine, à plusieurs parties; on écrit le signe radical devant cette grandeur, & depuis le signe on mene une ligne au dessus de la grandeur, pour marquer qu'elle est toute sous ce même signe. Par exemple $\sqrt[4]{\overline{a\,\,+bc}}$, cela signifie la racine 4^e^ de $ab + bc$; & ainsi des autres. Pour exprimer la racine dont il s'agit, on se contente d'écrire le signe radical devant les grandeurs litterales dont on ne peut extraire cette racine sans qu'il y ait un reste.

3. Les racines sourdes, ou irrationnelles, sont celles qu'on ne peut exprimer que par le moyen de ce signe $\sqrt{}$, sur lequel on écrit 2, 3, ou 4, &c. pour exposant de ces racines.

4. Les racines imaginaires ou impossibles sont celles des grandeurs entierement négatives, & lorsque les exposans de ces racines sont des nombres pairs. Par exemple $\sqrt{-38}$, ou $\sqrt{-12}$, ou $\sqrt{-a^4}$, ou $\sqrt{-dd}$, &c. sont des racines imaginaires ou impossibles. Parcequ'on ne peut trouver aucune grandeur telle qu'elle puisse être, soit négative ou positive, dont le quarré ou la 4^e^ puissance, ou la 6^e^, &c.

ſoient négatives ; puiſque, comme on a vû [1] dans la multiplication, + par +, ou — par —, produit toujours +.

Quand on veut aprofondir l'Algebre, les racines ſourdes ſont fort frequentes. Parceque l'extraction des racines, principalement de celles qui ſont quarrées, ou qui ſont cubiques, eſt une operation fort ordinaire. Outre cela il eſt certain qu'il y a plus de nombres qui ne ſont ni quarrez ni cubiques, que de nombres quarrez ou cubiques. Par exemple, depuis 1 juſqu'à 30 il n'y a que 4, 9, 16, & 25 qui ſoient quarrez exactement, & les autres nombres 2, 3, 5, 6, 7, &c. ne ſont point des puiſſances parfaites. Ainſi il eſt évident qu'on doit trouver ſouvent des racines ſourdes. Or on peut ajouter une racine ſourde avec une autre racine ſourde, ou l'en ſouſtraire, les multiplier, ou les diviſer l'une par l'autre, quoiqu'on ne connoiſſe pas preciſément la valeur de chacune, & ces operations, entr'autres la multiplication, ſont d'un grand uſage dans la pratique de l'Algebre ; c'eſt pourquoi il eſt fort neceſſaire de ſçavoir comment on les peut faire ſur ces ſortes de grandeurs. Pour faire ces operations, il faut premierement ſçavoir préparer les racines ſourdes, 1°. en les reduiſant à un même nom, ou à un même ſigne ; 2°. En les reduiſant à leurs expreſſions les plus ſimples, quand cela eſt poſſible.

Reduction des grandeurs irrationelles à un même nom, ou même ſigne.

Cette preparation eſt fondée ſur un principe

[1] *Avertiſſ. pag.* 77.

dont tout le monde convient, qui eſt qu'une racine eſt toujours la même, c'eſt à dire *qu'elle ne devient ni plus grande ni plus petite, lorſque de racine quarrée qu'elle étoit, on fait qu'elle eſt racine cubique, ou racine 4e, racine 5e, &c.* Par exemple, f eſt la racine de toutes ces puiſſances f^2, f^3, f^4, f^5. Ce qui montre clairement que les racines de ces puiſſances ne ſont pas plus grandes l'une que l'autre.

Pour reduire differentes grandeurs irrationnelles ſous un même ſigne ſans changer leur valeur, il faut chercher le plus petit nombre qui puiſſe être diviſé ſans reſte par les expoſans des ſignes radicaux ſous leſquels ſont ces grandeurs irrationnelles. Enſuite il faut élever chacune de ces deux grandeurs à une puiſſance qui ait pour expoſant le nouveau nombre, lequel ſera auſſi l'expoſant du nouveau ſigne radical.

Soient ces racines ſourdes $\sqrt{bc}$ & $\sqrt[3]{fg}$ à réduire ſous un même ſigne radical. L'expoſant de $\sqrt{\ }$ eſt 2, & l'expoſant de $\sqrt[3]{\ }$ eſt 3. Pour trouver un nombre qui puiſſe être diviſé ſans reſte par 2, & enſuite par 3, je peux multiplier 2 par 3 pour avoir 6. Mais parceque cette voye eſt quelquefois trop longue, j'aime mieux chercher ce nombre en y reflechiſſant. Ce nombre 6 me fait donc connoître qu'il faut élever $\sqrt{bc}$ & $\sqrt[3]{fg}$ à la 6e puiſſance, ce qui ſe fait en prenant le cube de bc devant lequel j'écrirai ce ſigne $\sqrt[6]{\ }$, & en prenant le quarré de fg devant lequel j'écrirai auſſi $\sqrt[6]{\ }$, & j'aurai $\sqrt[6]{b^3c^3} = \sqrt{bc}$, & $\sqrt[6]{ffgg} =$

$\sqrt[3]{fg}$. Car cette grandeur bc est considerée comme un quarré, & $\sqrt{bc}$ en exprime la racine. Or le quarré de bc qui est $bbcc$ est la 4e puissance de $\sqrt{bc}$, puisqu'en multipliant un quarré par lui-même, cela forme une 4e puissance; si on multiplie encore cette 4e puissance $bbcc$ par bc qui est le quarré de sa racine, cela formera la 6e puissance cherchée. On fera le même raisonnement pour connoître que $\sqrt[6]{ffgg}$ $= \sqrt[3]{fg}$.

Soient les grandeurs irrationelles $\sqrt{cd}$ & $\sqrt[4]{fh}$ à reduire à un même nom, ou sous un même signe. Je fais reflexion que le nombre 4 peut être divisé exactement par le nombre 4 qui est l'exposant de $\sqrt[4]{fh}$, & que ce même nombre 4 peut aussi être divisé éxactement par 2 qui est l'exposant de $\sqrt{cd}$. Cela fait donc connoître que les puissances de ces deux racines doivent devenir des quatriémes puissances, & pour cela il faut prendre le quarré de $\sqrt{cd}$, & on aura $\sqrt[4]{ccdd} = \sqrt{cd}$, & $\sqrt[4]{fh}$ ne changera point.

Reduction des grandeurs irrationnelles à leurs expressions les plus simples.

Si la grandeur enfermée sous un signe radical étoit une puissance parfaite, c'est à dire, dont on pût tirer une racine exacte; & si l'exposant de cette puissance parfaite étoit égal à l'exposant du signe radical; pour rendre l'expression plus simple, il faudroit seulement extraire la racine exprimée. Soit, par exemple, cette expreſſion $\sqrt{cc}$; le ſigne radical exprime une racine quarrée, & cc eſt un quarré. Il faut reduire $\sqrt{cc}$ à c qui eſt la racine de cc. de même il faut reduire cette expreſſion $\sqrt{bb - 2bc + cc}$ à celle-ci, $b - c$.

Mais ſi la grandeur contenue ſous le ſigne radical n'eſt pas une puiſſance parfaite, ou ſi ſon expoſant n'eſt pas auſſi l'expoſant du ſigne radical; il faudra reduire l'expreſſion à ſes plus ſimples termes, lorſque cela eſt poſſible, en cette ſorte.

Il faut diviſer la grandeur propoſée, par un diviſeur qui la puiſſe diviſer exactement, c'eſt à dire, ſans reſte, & de ſorte que ce quotient ſoit une puiſſance parfaite. Si cette grandeur eſt un nombre, il faut chercher ce diviſeur dans les nombres premiers 2, 3, 5, 7, &c. de ſorte que, s'il eſt poſſible, il ſoit tel que le quotient de la diviſion ſoit un nombre quarré, s'il s'agit d'une racine quarrée, ou cubique; s'il s'agit d'une racine cubique, &c. & s'il ſe rencontroit pluſieurs diviſeurs tels qu'on les ſouhaite, il faudroit toujours preferer le plus grand. Si entre ces quotients, on n'en peut trouver qui ſoient quarrez, cubes, &c; on ne peut faire la reduction. Il faut prendre la racine de cette puiſſance parfaite, c'eſt à dire, de ce nombre quarré, ou cubique, &c, l'écrire devant le ſigne radical, & écrire le diviſeur aprés le ſigne radical.

Soit propoſée $\sqrt{a^3b}$ pour être reduite à l'expreſſion la plus ſimple. Entre tous les diviſeurs qui peuvent diviſer exactement a^3b, je trouve ab qui le diviſe de telle maniere que le quotient aa eſt un quarré dont je prends la racine a que j'écris devant le ſigne radical, aprés ce même ſigne j'écris le diviſeur ab ; & je trouve $a\sqrt{ab}$ au lieu de $\sqrt{a^3 b}$. J'ai choiſi un diviſeur tel qu'il me donnoit un quarré pour quotient. Parceque $\sqrt{\ }$ ſignifie *racine quarrée.* S'il y avoit eu $\sqrt[3]{a^3 b}$, il auroit fallu prendre b pour diviſeur, afin d'avoir pour quotient un cube ſçavoir a^3, & j'aurois écris $a\sqrt[3]{b}$. On trouvera de même que $\sqrt{ddf} = d\sqrt{f}$; puiſque $d = \sqrt{d^2}$. Car multiplier $\sqrt{f}$ par d, dont le produit eſt $d\sqrt{f}$, ou multiplier $\sqrt{d^2}$ par $\sqrt{f}$, dont le produit eſt $\sqrt{ddf}$; c'eſt la même choſe.

Soit encore cette autre grandeur $\sqrt{bbc^3}$ à reduire à une expreſſion la plus ſimple. Entre tous les diviſeurs de bbc^3 il en faut choiſir un qui donne pour quotient un quarré. Je trouve que c'eſt c qui donne pour quotient le quarré $bbcc$ dont j'écris la racine bc devant le ſigne radical, j'écris le diviſeur c aprés ce ſigne radical, & je trouve $bc\sqrt{c}$. De même $\sqrt{a^4 b^3}$ ſera reduite à $aab\sqrt{b}$.

Soit enfin cette racine ſourde $\sqrt{80}$, je la reduirai à cette expreſſion plus ſimple & équivalente $4\sqrt{5}$, c'eſt à dire que la racine quarrée de 80 eſt la même choſe que le produit du nombre 4 multiplié par la racine quarrée de 5. Car j'ay diviſé 80 par 5, & j'ai trouvé pour quotient le nombre quarré 16. Si je multiplie preſentement 16 par 5, j'aurai [1]80. En multipliant 16 par 5, je multiplie[2]auſſi la racine de 16 par la racine de 5, & le produit de ces deux racines eſt égal à la racine de 80. La racine de 16 eſt 4,

[1] *Cor. 3. de la diviſion pag. 42.*
[2] *Demonſtrat. de la Multip. des rac. ſourdes pag. 129.*

c'eſt pour cela qu'on écrit $4\sqrt{5}$ au lieu de $\sqrt{80}$. Cela eſt facile à comprendre, puiſque $4 = \sqrt{16}$ & que multiplier $\sqrt{16}$ par $\sqrt{5}$, ou 4 par $\sqrt{5}$, c'eſt la même choſe. On reduira de même $\sqrt{12a^3b}$ à cette expreſſion équivalente $2a\sqrt{3ab}$. Car le plus grand diviſeur de $12a^3b$ qui puiſſe donner au quotient des quarrez, ſçavoir 4 & aa, c'eſt 3 & ab.

Si la grandeur propoſée ſous le ſigne radical, étoit une fraction ; & s'il étoit poſſible de la reduire à une expreſſion plus ſimple : il ſeroit autant facile d'y réuſſir qu'à l'égard des autres grandeurs. Car pour cela il n'y auroit qu'à reduire le Numerateur à ſon expreſſion la plus ſimple, & le dénominateur pareillement à ſon expreſſion la plus ſimple ; & alors ce numerateur & ce dénominateur ainſi réduits, ſeroient le numerateur & le dénominateur d'une nouvelle fraction égale à la propoſée.

Soit, par exemple, $\sqrt{\frac{b^3c}{ddf}}$ à reduire à ſon expreſſion le plus ſimple. Le numerateur ſera reduit à $b\sqrt{bc}$, & le dénominateur ſera réduit à $d\sqrt{f}$; dont on formera la fraction $\frac{b\sqrt{bc}}{d\sqrt{f}}$ qui ſera égale à $\sqrt{\frac{b^3c}{ddf}}$.

Si on propoſe $\sqrt{\frac{48}{27}a^3b}$, ou $\sqrt{\frac{48a^3b}{27}}$, à reduire à l'expreſſion la plus ſimple, on trouve $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$. Mais le numerateur de cette fraction $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$ ſe trouvant multiplié par $\sqrt{3}$, & étant en même temps diviſé par $\sqrt{3}$; puiſque la Diviſion détruit ce que fait la Multiplication : on aura donc encore cette fraction $\frac{4a\sqrt{3ab}}{3\sqrt{3}}$ réduite à ſon équivalente $\frac{4a\sqrt{ab}}{3}$.

REMARQUE.

Si on éleve ce qui eſt écrit devant le ſigne radical, à la puiſſance exprimée par l'expoſant de ce même ſigne, & ſi on multiplie ce qui eſt ſous le ſigne radical par cette nouvelle puiſſance; au lieu d'une expreſſion plus ſimple, ce produit en donnera une plus composée, & on pourra mettre le tout ſous le même ſigne radical, pour avoir la même expreſſion qui étoit auparavant la réduction.

Soit, par exemple, $3b\sqrt{2af}$. Si j'éleve $3b$ à la puiſſance exprimée par $\sqrt{}$, je trouverai $9bb$ pour le quarré de $3b$. Si je multiplie $9bb$ par $2af$, je trouverai $18bbaf$, & remettant le ſigne radical $\sqrt{}$ devant ce produit, j'aurai $\sqrt{18bbaf} = 3b\sqrt{2af}$. Ceci ſert pour s'aſſurer ſi on a bien fait la réduction de la grandeur irrationnelle, à ſa plus ſimple expreſſion.

Par ce même moyen il eſt tres-facile de mettre une grandeur propoſée ſous un tel ſigne radical qu'on voudra, en l'élevant à la puiſſance du ſigne radical ſous lequel on veut mettre cette grandeur. Par exemple, ſi on veut mettre bc ſous $\sqrt[3]{}$, il faut écrire $\sqrt[3]{b^3c^3}$.

Lorſqu'on veut reduire des grandeurs irrationnelles à un même nom, si elles avoient déja été réduites à leurs expressions les plus simples; il faut les remettre dans leur premier état, en mettant le tout sous leurs signes radicaux, comme je viens d'enseigner.

De l'Addition des grandeurs irrationnelles.

La methode generale pour assembler plusieurs racines sourdes est de les écrire de suite, en mettant devant chacune le signe radical avec l'exposant de la racine qu'on veut exprimer, & en interposant le signe $+$. Par exemple cette grandeur $\sqrt{bc}$ sera ajoutée à $\sqrt{fg}$ en cette maniere $\sqrt{bc} + \sqrt{fg}$. Pour ajouter la racine cubique de 7 avec la racine 5^e de 14, il faut écrire $\sqrt[3]{7} + \sqrt[5]{14}$.

Les grandeurs irrationnelles étant reduites à des expressions simples, & étant de même nom, ou reduites aux mêmes signes; si les grandeurs qui sont sous le signe radical sont égales, il faut ajouter ce qui est devant le signe radical, & laisser sous ce même signe ce qu'on y a trouvé.

Soit par exemple $4\sqrt{2}$ à ajouter avec $3\sqrt{2}$, il faut dire 4 & 3 font 7, & écrire $7\sqrt{2}$ pour la somme qu'on cherche; ce qui est évident. Car soit $\sqrt{2} = a$. On aura donc $4\sqrt{2} = 4a$; & $3\sqrt{2} = 3a$. Donc $7\sqrt{2} = 7a$.

REMARQUE.

La somme des racines de 19 & de 23 est plus grande que la racine de 42 qui est la somme de 19 & de 23 : de même que la somme des racines de 4 & de 9 est plus grande que la racine de 13 qui eſt la ſomme de 4 & de 9. Car la ſomme des racines de 4 & de 9 eſt 5, & la racine de 13 n'eſt pas 4.

De la Souſtraction des grandeurs irrationnelles.

Pour retrancher une racine ſourde d'une autre, il faut écrire celle dont on veut retrancher, & enſuite écrire l'autre precedée du ſigne —. Pour retrancher $\sqrt[3]{bc}$ de $\sqrt[6]{b^4}$ il faut écrire $\sqrt[6]{b^4} - \sqrt[3]{bc}$.

Les grandeurs irrationnelles étant reduites à des expreſſions ſimples, & étant de même nom ; ſi les grandeurs qui ſont ſous le ſigne radical ſont égales, il faut ſouſtraire l'une de l'autre celles qui ſont devant le ſigne radical. Par exemple pour retrancher $5\sqrt{7}$ de $8\sqrt{7}$, on écrira pour reſte $3\sqrt{7}$.

De la Multiplication des grandeurs irrationnelles.

Il faut les reduire, au moins, à même nom, ou ſous des ſignes ſemblables. Enſuite il faut multiplier les grandeurs dont les racines ſont propoſées, l'une par l'autre, & devant le produit écrire le ſigne radical avec ſon expoſant, comme il étoit à chacune de ces grandeurs avant qu'elles fuſſent multipliées.

Soit $\sqrt{df}$ à multiplier par $\sqrt{gh}$; le produit ſera $\sqrt{dfgh}$. Pour multiplier $\sqrt{9}$ par $\sqrt{6}$, il faut écrire $\sqrt{54}$ qui ſera le produit.

Pour rendre raiſon de cette maniere de multiplier les racines ſourdes, il faut remarquer que la racine du produit de deux puiſſances de même nom multipliées l'une par l'autre est égale au produit des racines de ces deux puissances. Car soit le quarré xx multiplié par yy, on aura $xxyy$ dont la racine quarrée est xy qui est le produit des racines x & y des deux quarrez xx & yy. De même, si on multiplie le cube f^3 par h^3, on aura le produit $fffhhh$ dont la racine cubique fh est égale au produit des racines cubiques f & h de ces deux puissances; ce qui est aussi évident pour les autres puissances. Or à l'égard de ces grandeurs, par exemple $\sqrt{9}$, & $\sqrt{6}$, j'ai consideré 9 & 6 comme des quarrez dont les racines sont inconnues. Soit $\sqrt{9} = x$, & $\sqrt{6} = z$; j'aurai $9 = xx$, & $6 = zz$. Au lieu de multiplier 9 par 6, on peut donc multiplier ce qui leur est égal, sçavoir xx par zz, & on aura $xxzz = 54$, dont la racine $xz = \sqrt{54}$.

Si les racines sourdes qu'on veut multiplier l'une par l'autre, étant de même nom, ont aussi été reduites à des expressions plus simples; il faudra multiplier les grandeurs qui precedent les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le produit devant un de ces signes. Il faudra aussi multiplier les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, & écrire le produit sous ce même signe; alors on aura le produit qu'on cherchoit.

Soit $b\sqrt{c}$ à multiplier par $f\sqrt{g}$, je multiplirai b par f, & j'écrirai le produit bf devant le signe radical. Je multiplierai aussi c par g, & j'écrirai le produit sous le signe radical $\sqrt{}$ pour avoir ce produit $bf\sqrt{cg}$.

De même $5\sqrt{2}$ étant multipliée par $3\sqrt{7}$ donne pour produit $15\sqrt{14}$.

Pour faciliter davantage la multiplication de ces sortes de grandeurs dans toutes les circonstances

ſtances, il faut remarquer qu'on peut écrire 1 devant ou aprés le ſigne radical, quand même il ne s'y ſeroit pas trouvé auparavant. Parceque $a = 1a = 1a^1 = \frac{1a^1}{1} = \frac{1a^1}{1}\sqrt{1}$, c'eſt à dire que devant a on [1] ſouſ-entend 1 ; on conſidere a comme une premiere puiſſance [2] dont l'expoſant eſt 1 ; on conſidere a comme une fraction [3] dont le diviſeur eſt 1 ; enfin on conſidere a comme multiplié par $\sqrt{1}$, puiſque $\sqrt{1} = 1$, ou que 1 eſt la racine de toutes les puiſſances de 1. Il faut dire la même choſe de toute autre grandeur ſimple, par exemple ab, ggh, &c.

C'eſt ſur ce principe que, pour multiplier cette grandeur $df\sqrt{g}$ par $\sqrt{hm}$, au lieu de $\sqrt{hm}$ j'écrirai $1\sqrt{hm}$. Et, comme je viens d'enſeigner, je multiplierai df par 1, ce qui ne produira que df, enſuite je multiplierai g par hm, pour avoir ghm, & le produit que je cherchois ſera $df\sqrt{ghm}$.

Le produit de $b\sqrt{af}$ par $c\sqrt{af}$ eſt $bc\sqrt{aaff}$. Or dans ce produit $bc\sqrt{aaff}$, on trouve $aaff$ qui eſt un quarré dont la racine eſt af qui multiplie bc. On trouvera donc que $bc\sqrt{aaff} = bcaf$, en multipliant bc par $\sqrt{aaff}$. Cela fait voir que, quand on multiplie des racines ſourdes l'une par l'autre, ſi les mêmes grandeurs ſe trouvent ſous les ſignes radicaux de la 2e puiſſance, le produit des grandeurs qui precedent les ſignes radicaux étant multiplié par la grandeur qui ſe trouve ſous un de ces ſignes, donne le produit qu'on cherche.

Enfin ſi on multiplie $af\sqrt{bd}$ par $5\sqrt{bd}$, le

[1] *Demande 5. d'Algeb. pag. 70.*
[2] *Pag. 95. & 96. Def. 3. & 7.*
[3] *Pag. 53.*

valente à celle-ci $a . b :: b . \frac{bb}{a}$ ce qui revient à ce qui est énoncé dans le Corollaire 2 precedent. Enfin entre deux grandeurs données, on aura pour moyenne proportionnelle la racine quarrée du produit de ces deux grandeurs. Par exemple entre 8 & 12, on aura pour moyenne proportionnelle $\sqrt{96}$, c'est à dire que $\div\!\!\div$ 8. $\sqrt{96}$. 12.

PROPOSITION III.

Si le produit des termes extrêmes de quatre grandeurs est égal au produit des termes moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles entr'elles.

DEMONSTRATION.

Cette proposition est la converse ou reciproque de la precedente. Soit $ad = bc$, je dis que $a . b :: c . d$. Car si a n'étoit pas à b comme c à d. Il faudroit que la grandeur a fût trop grande ou trop petite; & partant pour avoir $a . b :: c . d$. il faudroit augmenter ou diminuer a de ce qu'il seroit necessaire pour cela. Supposons, par exemple, qu'il faille ajouter à a la grandeur m. On aura donc $a + m . b :: c . d$. & partant [1] $ad + dm$ sera égal à bc: mais [2] aussi $ad = bc$, il faudroit donc [3] que $ad + dm = ad$, c'est à dire que le tout fût égal à une de ses parties, ce qui est [4] impossible. S'il avoit fallu retrancher m de a, on auroit donc eu

[1] *Prop. 2.* [2] *Suppos.*
[3] *Ax. 18. general.* [4] *Ax. 2. general.*

$a - m$,

dans la multiplication des grandeurs irrationnelles compoſées de pluſieurs parties. Car il faut faire la multiplication de ces ſortes de grandeurs à la maniere ordinaire, en multipliant chacune des parties de la grandeur à multiplier, par chacune des parties du multiplicateur, & la ſomme de tous leurs produits formera le produit total.

Soit $f+g\sqrt{m}$ à multiplier par $f+g\sqrt{m}$. Aprés les avoir écrites l'une ſous l'autre ; je dis f multipliée par f fait ff, j'écris ff. Enſuite je dis $g\sqrt{m}$ multipliée par f, fait $fg\sqrt{m}$ que j'écris. Je dis encore, f multipliée par $g\sqrt{m}$ fait $fg\sqrt{m}$ que j'écris. Enfin $g\sqrt{m}$ multipliée par $g\sqrt{m}$, fait $gg\sqrt{mm}=ggm$ que j'écris auſſi, & je trouve pour le produit total $ff+2fg\sqrt{m}+ggm$.

$$\begin{array}{lll} & f+g\sqrt{m} & \\ & f+g\sqrt{m} & \\ \hline ff+fg\sqrt{m} & & \\ & fg\sqrt{m}+ggm & \\ \hline ff+2fg\sqrt{m}+ggm. & & \end{array}$$

Je trouverai par la même Methode que cette grandeur $5f+3h\sqrt{d}$ multipliée par $2f-m\sqrt{u}$, fait $10ff+6fh\sqrt{d}-5mf\sqrt{u}-3mh\sqrt{du}$.

Si on ſe propoſe $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par $\sqrt{nu+xy}$; on trouvera $mnu+mxy$ pour produit. Car nu & xy ſont conſiderées comme une ſeule grandeur qui eſt ſous le même ſigne radical.

Or $nu+xy$ eſt le quarré de $\sqrt{nu+xy}$. Pour multiplier ces deux grandeurs l'une par l'autre il ſuffit donc d'ôter le ſigne radical, & de multiplier $nu+xy$ par m qui precede. De même, ſi on multiplie $b\sqrt{bf+cc}$ par $b\sqrt{bf+cc}$, le produit sera $b^3f + bbcc$. Mais $b\sqrt{bf+cc}$ multipliée par $b\sqrt{bf-cc}$, fait $bb\sqrt{bbff-c^4}$. Parceque $b\sqrt{bf+cc}$, & $b\sqrt{bf-cc}$ ne sont pas la même grandeur.

Si on avoit $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par $fg-hm$, il faudroit mettre $fg-hm$ sous le signe radical comme j'ai enseigné [1]; & alors on auroit $m\sqrt{nu+xy}$ à multiplier par $\sqrt{ffgg-2fghm+hhmm}$.

Enfin si on multiplie $\sqrt{bc}+\sqrt{mm-ux}$ par $\sqrt{bc}-\sqrt{mm-ux}$, le produit sera $bc-mm-ux$. Pour entendre cela, il suffit présentement de faire attention à l'operation.

$$
\begin{array}{ll}
\textit{Mult.} & \sqrt{bc}+\sqrt{mm-ux} \\
\textit{Par} & \sqrt{bc}-\sqrt{mm-ux} \\
\hline
 & bc+\sqrt{bcmm-bcux} \\
 & \quad -\sqrt{bcmm-bcux}-mm+ux \\
\hline
\textit{Produit} & bc-mm+ux.
\end{array}
$$

On trouvera par la même methode que

[1] *Pages* 127. & 128.

$m+\sqrt{ux+yz}$ étant multipliée par $m-\sqrt{ux+yz}$ fait $mm-ux-yz$.

La multiplication des racines ſourdes étant aſſez importante pour qu'on tâche de prevenir toutes ſes difficultés autant qu'il ſera poſſible, je propoſerai encore un exemple. Soit $\sqrt{ab+\sqrt{aa-bb}}$ à multiplier par $\sqrt{ab-\sqrt{aa-bb}}$; afin de rendre cette operation plus ſimple, ſoit $ab=m$, & $aa-bb=n$. J'aurai donc à multiplier $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ par $\sqrt{m-\sqrt{n}}$ dont le produit eſt $\sqrt{mm+m\sqrt{n}-m\sqrt{n}-n}=\sqrt{mm-n}=\sqrt{aabb-aa+bb}$, en remettant au lieu de m & de n ce qui leur eſt égal.

Pour exprimer le produit de deux racines ſourdes multipliées l'une par l'autre, on ſe contente quelquefois de les écrire l'une aprés l'autre, & on interpoſe le ſigne de multiplication $\times$. Par exemple pour multiplier $\sqrt[3]{ab+bc}$ par $\sqrt[5]{bd}$, on écrit $\sqrt[3]{ab+bc}\times\sqrt[5]{bd}$.

REMARQUE.

Le produit de deux racines ſourdes eſt connu lorſque le produit des grandeurs dont on a exprimé ces racines eſt un quarré. Par exemple, on connoît que le produit de $\sqrt{12}$ multipliée par $\sqrt{3}$ eſt $6=\sqrt{36}$.

De la division des grandeurs irrationnelles.

Il faut les reduire au moins à même nom, ou sous des signes semblables, comme dans la Multiplication. Ensuite il faut écrire la grandeur dont on exprime la racine à diviser, & au dessous il faut écrire la grandeur dont la racine exprimée est le diviseur. Enfin il faut interposer le signe de division —, & devant le tout mettre le signe radical.

Soit $\sqrt[3]{ab}$ à diviser par $\sqrt[3]{cd}$, il faut écrire $\sqrt{\frac{ab}{cd}}$. Pour diviser f par $\sqrt{g}$, il faut écrire $\frac{f}{\sqrt{g}}$. Pour diviser $\sqrt{6}$ par 10, il faut écrire $\frac{\sqrt{6}}{10}$.

Pour démontrer cette operation; soit $\sqrt{18}=y$, & $\sqrt{7}=x$: Je dis que $\sqrt{\frac{18}{7}}=\frac{y}{x}$. Car, puisqu'on considere 18 comme un quarré dont la racine est y, on aura $18=yy$, de même $7=xx$. Donc $\sqrt{\frac{18}{7}}=\sqrt{\frac{yy}{xx}}=\frac{y}{x}$ [1], *ce qu'il falloit démontrer.*

Si les racines sourdes qu'on veut diviser l'une par l'autre étant de même nom, ont été reduites à des expressions plus simples; il faudra diviser les grandeurs qui precedent les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le quotient devant un de ces signes radicaux. Il faudra aussi diviser les grandeurs qui sont sous les signes radicaux, l'une par l'autre, & écrire le quotient

[1] *Pag.* 107. & 108.

ſous un de ces mêmes ſignes ; & alors on aura le quotient qu'on cherchoit.

Soit $dh\sqrt{m}$ à diviſer par $fh\sqrt{n}$, j'écris $\frac{dh}{fh}\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{d}{f}\sqrt{\frac{m}{n}}$. Si je diviſe $8\sqrt{6}$ par $7\sqrt{6}$, je trouve $\frac{8}{7}\sqrt{\frac{6}{6}} = \frac{8}{7}\sqrt{1} = \frac{8}{7}$.

S'il y a des fractions dans ces grandeurs irrationnelles, la diviſion de ces racines ſourdes n'en ſera pas plus difficile. Soit $\frac{b}{m}\sqrt{gn}$ à diviſer par $\frac{d}{f}\sqrt{hx}$; il faut diviſer la fraction $\frac{b}{m}$ par $\frac{d}{f}$, & le quotient ſera $\frac{bf}{dm}$ que j'écrirai devant le ſigne radical, & ſous ce même ſigne j'écrirai les grandeurs gn & hx en fraction, de cette maniere $\frac{bf}{dm}\sqrt{\frac{gn}{hx}}$ ce qui exprimera le quotient que je cherchois.

Pour diviſer $\frac{m}{n}\sqrt{\frac{mx}{n}}$ par $m\sqrt{nx}$, ou par $\frac{m}{1}\sqrt{\frac{nx}{1}}$, je trouverai $\frac{m}{mn}\sqrt{\frac{mx}{nnx}}$ pour quotient qui eſt égal à $\frac{1}{n}\sqrt{\frac{m}{nn}}$.

Pour exprimer le quotient d'une racine ſourde diviſée par une autre, ſouvent on ne fait qu'écrire la grandeur à diviſer avec ſon ſigne radical, & au deſſous on écrit l'autre grandeur aussi avec son signe radical, & on interpose le signe de division —. Par exemple, pour diviser $\sqrt{ab+bf}$ par $\sqrt[3]{cd}$, on écrit $\frac{\sqrt{ab+bf}}{\sqrt[3]{cd}}$

Pour diviser $\sqrt[5]{38}$ par $\sqrt[3]{12}$, on écrit $\frac{\sqrt[5]{38}}{\sqrt[3]{12}}$. De même des autres.

DES COMBINAISONS & des changemens d'ordre.

UN nombre de choses étant déterminé, si on les veut toutes prendre deux à deux, trois à trois, &c. & trouver toutes leurs dispositions ou conjonctions; l'artifice dont on se sert pour y réussir exactement est appellé *Combinaison*. Si je veux, par exemple, combiner ces quatre grandeurs, ou ces quatre lettres de l'Alphabeth, *a*, *e*, *i*, *o*, & trouver toutes leurs dispositions en les prenant trois à trois; j'observe un ordre, en commençant par *a*; & je combine *a* avec lui-même, & avec tous les autres *e*, *i*, &c. en cette sorte, *aa*. *ae*. *ai*. *ao*. Ensuite je combine *e* avec *a*, avec *e*, &c. en cette sorte *ea*.

ea . ee . ei . eo. Je fais la même chose à l'égard de *i*; de même enfin à l'égard de *o*. Et je trouve que ces quatre lettres *a*, *e*, *i*, *o*, peuvent être combinées en seize manieres differentes en les prenant 2 à 2. Pour les prendre 3 à 3, je commence à combiner *a* avec *a a*, *a e*, &c. & j'observe le même ordre que dans la premiere combinaison, en combinant ensuite *b* avec *a a*, *a e*, &c. Je trouve que ces 4 lettres peuvent être combinées en 64 manieres en les prenant 3 à 3. Ce qui me fait appercevoir que, si je multiplie 64 par 4 qui est le nombre de ces 4 lettres; je trouverai qu'on peut encore combiner ces 4 lettres en 256 manieres, en les prenant 4 à 4. Je peux suivre la même methode pour les nombres qui seront plus grands. Les Logiciens connoissent l'utilité de ceci pour trouver leurs 64 modes. Je me suis aussi servi de cette methode pour trouver trois parties differentes dans la prop. 13. de la Geometrie, & pour en trouver 6 dans la prop. 14. Dans cette derniere occasion je neglige les combinaisons dans lesquelles la même grandeur se rencontre deux fois, & celles qui ne sont differentes que par la transposition des grandeurs. Parcequ'entre quatre differentes choses proposées, j'ai intention d'en supposer deux & de prouver les deux autres. L'art des combinaisons est souvent fort utile.

Les changemens d'ordre ont aussi leur merite particulier. Ce n'est autre chose que la methode de trouver en combien de manieres plusieurs choses proposées peuvent être placées differemment. Je veux sçavoir, par exemple, en combien de manieres differentes ces quatre grandeurs, ou ces quatre lettres *e*, *f*, *g*, *h*, peuvent être placées. La premiere *e* prise seule ne peut être placée qu'en une maniere. Mais si on lui joint la 2^e, *f* ; on trouve qu'on la peut placer en deux manieres. Car on peut mettre *f* devant ou aprés *e*, ce qui fera ces deux changemens de place *fe*, *ef*. Si on y ajoute une 3^e qui est *g* : il est évident qu'on peut mettre *g* en trois places de *fe*, sçavoir au commencement ; & cela fera *gfe* ; au milieu & cela fera *fge* ; & à la fin, & cela fera *feg*. On peut aussi faire la même chose dans *ef*. Ce qui fait voir qu'on peut placer trois choses en six manieres differentes. Si j'ajoute une 4^e lettre, je considere que cette 4^e lettre peut se trouver en quatre places dans chacun des six changemens dont on a trouvé que trois lettres étoient capables. D'où je connois que quatre choses peuvent être placées en six fois quatre differentes manieres, c'est à dire en vingt-quatre. Ce qui fait encore voir que si j'ajoute une 5^e lettre en suivant le même ordre qu'on vient de pratiquer ; elle peut faire vingt-quatre fois cinq changemens : & ainsi de suite. Cette methode peut servir, entr'autres usages, pour trouver tous les changemens possibles des lettres d'un nom, afin de choisir celui qu'on voudra. C'est par ce moyen qu'en ne faisant que changer de place, les lettres du nom d'un sçavant Philosophe de l'Université de Caën, nommé *Petrus Cali*, on a trouvé *Pater Lucis.* En transposant les lettres du mot *Logica*, on trouve *Caligo.*

AVERTISSEMENT.

Dans les démonstrations suivantes des proportions des grandeurs, j'employerai les expressions generales d'Algebre, croyant par ce moyen mieux ſatisfaire aux applications preſqu'infinies qu'on peut faire des veritez que j'y établirai. Je prefere cette voye univerſelle, l'eſtimant davantage que la maniere dont on a coûtume de ſe ſervir dans la Geometrie dans laquelle, pour demontrer ces mêmes veritez, on employe ordinairement des lignes ; & après cela on pretend que ce qu'on a demontré par ces lignes, & à l'égard de ces mêmes lignes, doit avoir la même certitude pour les ſurfaces, les ſolides, les nombres, & pour toute autre eſpece de grandeur. Il arrive même aſſez ſouvent qu'on ſe contente dans ces circonſtances de s'exprimer par des chifres. Il eſt vrai que les chifres ſont utiles pour rendre pluſieurs veritez plus ſenſibles ; mais ils ne peuvent paſſer que pour des exemples qui ne peuvent ſervir de preuve ſolide pour une demonſtration generale.

Ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques, trouvent ſouvent de la difficulté à croire que les demonſtrations des proportions faites par ces deux dernieres methodes, ayent autant d'étenduë, que leurs Auteurs leur en attribuënt ; c'eſt pour cela que j'ai mieux aimé demontrer ces veritez par des expreſſions d'Algebre, qui conviennent à toutes ſortes de grandeurs, afin de pouvoir me ſervir de ces mêmes veritez comme de principes inconteſtables, tant dans la Geometrie, que dans le reſte des Mathematiques. Je ferai en ſorte que la maniere dont ces veritez y ſeront démontrées diminuëra le nombre des propoſitions, ſans en diminuer l'étenduë ; que la nouveauté des démonſtrations ne portera aucun préjudice à leur ſimplicité, & conſervera la verité dans ſa force, dans ſa pureté, & dans ſon évidence qui en eſt le caractere inſeparable.

DES PROPORTIONS DES GRANDEURS EN GENERAL.

PREMIERE PROPOSITION.

La somme des termes extrêmes d'une proportion Arithmetique, est égale à la somme des termes moyens.

DEMONSTRATION.

SOient en proportion Arithmetique, ces quatre grandeurs $d \,.\, f : g \,.\, h$; ou $2 \,.\, 5 : 7 \,.\, 10$, il faut demontrer que l'addition de d avec h, forme une somme ou total égale à celle de f & de g; c'est à dire, que $d + h = f + g$, ou que $2 + 10 = 5 + 7$.

Que la difference de d à f soit nommée b, la la difference de g à h sera donc [1] aussi b. Donc si $d < f$ & $g < h$, il est évident [2] que $d + b = f$, & que $g + b = h$. Et partant les quatre termes de cette proportion peuvent être reduits à cette expression $d \,.\, d + b :: g \,.\, g + b$. Il faut donc demontrer que le premier terme d & le dernier qui est $g + b$ pris ensemble, sont égaux

[1] *Déf. 5. p. 61.* [2] *Ax. 4. d'Algeb. p. 70.*

au 2^e terme $d+b$, & au 3^e terme qui est g, pris ensemble, c'est à dire, que $d+g+b=d+b+g$. Ce qui est évident, puisque de part & d'autre du signe d'égalité il y a des grandeurs égales entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

Si $d>f$ & $g>h$, la demonstration sera faite comme la precedente, & au lieu du premier terme d, on [1] prendra $h+f$; au lieu de g on prendra $b+h$; ou bien au lieu du second terme f, on prendra $d-b$; & au lieu de h, on prendra $g-b$.

Cette proportion $2.5:7.10$. étant la même que celle-ci, $2.2+3:7.7+3$, il est évident que les termes moyens $2+3+7$ sont la même chose que la somme des extrêmes $2+7+3$; & partant qu'il y a égalité de part & d'autre.

COROLLAIRE I.

Donc dans une progression Arithmetique la somme de deux termes également éloignez des deux extrêmes, est égale à celle des extrêmes. Soit une progression prise à volonté; par exemple, $\div d.\ e.\ f.\ g.\ h.$ Ces termes e & g sont également éloignez des extrêmes d & h; il faut demontrer que $e+g=d+h$. Il y a [2] même difference entre d & e, qu'entre g & h. Donc ces 4 grandeurs $d.\ e.\ g.\ h.$ sont en proportion Arithmetique; & [3] partant $d+h=e+g$.

COROLLAIRE II.

Dans une proportion continuë, ou dans une

[1] *Ax. 2. d'Algeb.* [2] *Déf. 8. pag. 62.*
[3] *Prop. presente.*

progreſſion dont le nombre des termes eſt impair, le double du terme du milieu eſt égal à la ſomme des termes extrêmes. Soit cette progreſſion Arithmetique ÷ *a. b. c. d. e*, dont le terme du milieu eſt *c*. Ce terme *c* tient (¹) lieu de deux termes, ſçavoir de conſequent à *b*, & d'antecedent à *d*. Ce ſeul terme étant repeté peut donc tenir lieu de deux termes moyens, & avec *b* & *d* faire cette proportion *b. c : c. d.* Et (²) partant $2c = b + d$; mais on ſçait [³] que $b + d = a + e$. Donc auſſi $2c = a + e$. On dira par la même raiſon que la ſomme des deux extrêmes des trois grandeurs qui ſont en proportion continuë Arithmetique, eſt double de la grandeur moyenne.

COROLLAIRE III.

Donc pour trouver à trois grandeurs données une 4ᵉ proportionnelle Arithmetique, il faut retrancher la premiere de la ſomme des deux autres. Puiſque cette ſomme eſt égale à celle de la premiere & de la 4ᵉ, ce qui reſtera ſera la 4ᵉ proportionnelle cherchée. Par exemple ſi on a ces trois grandeurs *f, g, h*, on aura pour 4ᵉ proportionnelle $g + h - f$; c'eſt à dire que $f. g : h. g + h - f$.

COROLLAIRE IV.

Pour trouver à deux grandeurs données une 3ᵉ continuëment proportionnelle Arithmetique, il faut retrancher la premiere du double de la 2ᵉ; par exemple à *b* & à *c*, on trouvera pour 3ᵉ proportionnelle $2c - b$; c'eſt à dire que ÷ *b. c.*

(¹) *Déf. 7. d'Algeb.* (²) *Prop. preſente.*
[³] *Cor. 2. prop. preſ.*

$2c - b$.

COROLLAIRE V.

Pour trouver entre deux grandeurs données une moyenne proportionnelle arithmetique, il faut prendre la moitié de la somme de ces deux grandeurs données ; cette moitié sera la moyenne proportionnelle cherchée. Par exemple, entre 2 & 8 je trouverai 5 pour moyenne proportionnelle. Car soit appellée z cette moyenne proportionnelle cherchée ; j'aurai donc $2.\, z : z.\, 8$. Alors [1] $2z = 10$. Donc [2] $z = 5$.

PROPOSITION II.

Le produit des termes extrêmes d'une proportion geometrique est toujours égal au produit des termes moyens.

DEMONSTRATION.

Soient quatre grandeurs qui forment une proportion geometrique $a \,.\, b :: c \,.\, d$. Je dis que le produit des termes extrêmes qui est ad, est égal au produit des termes moyens qui est bc.

Je nommerai x l'exposant du rapport de a à b, c'est-à-dire que $\frac{a}{b} = x$; le produit bx du quotient x multiplié par le diviseur b sera [3] égal à la grandeur à diviser a.

[1] *Prop. presente.*
[2] *Ax. 12. Gen.*
[3] *Cor. 3. de la divis. des Nomb. pag. 42.*

Le rapport de c à d eſt [1] égal à celui de a à b : J'aurai [2] donc auſſi $\frac{c}{d} = x$; & [3] $dx = c$.

Je viens de démontrer que l'antecedent $a = bx$ & que l'antecedent $c = dx$: preſentement je démontre que le rapport de bx à b, eſt égal au rapport de a à b ; & que le rapport de dx à d, eſt égal à celui de c à d. J'ai nommé x l'expoſant du rapport de a à b ;

$$\left\{\begin{array}{c} a \,.\, b :: c \,.\, d. \\ \frac{a}{b} = x. \; \frac{c}{d} = x. \\ \text{Donc } bx = a. \text{ Donc } dx = c \end{array}\right. \Bigg| \begin{array}{c} bx \,.\, b :: a \,.\, b. \\ dx \,.\, d :: c \,.\, d. \\ \text{Donc } bx \,.\, b :: dx \,.\, d. \\ \text{Donc } bdx = bdx. \end{array}\left.\right\}$$

il eſt évident [4] que l'expoſant du rapport de bx à b, eſt auſſi x. Donc [5] $bx \,.\, b :: a \,.\, b$. Je trouve de même que l'expoſant du rapport de c à d eſt appellé x, & que l'expoſant du rapport de dx à d eſt [4] auſſi x. Donc $dx \,.\, d :: c \,.\, d$.

En la place de la grandeur a je peux donc [5] ſubſtituer bx, & en la place de c je peux auſſi lui ſubſtituer dx. Enfin au lieu de cette proportion $a \,.\, b :: c \,.\, d$, j'aurai ſon équivalente, ſçavoir, $bx \,.\, b :: dx \,.\, d$.

Il paroît évidemment que le produit des termes extrêmes de cette derniere proportion eſt égal au produit des termes moyens ; c'eſt-à-dire que $bdx = bdx$; puiſque de part & d'autre du ſigne d'égalité on apperçoit les mêmes grandeurs. Or multiplier l'un par l'autre les deux termes extrêmes, & l'un par l'autre les deux termes moyens de cette ſeconde proportion $bx \,.\, b :: dx \,.\, d$. C'eſt [5] la même

[1] *Par ſuppoſit.*
[2] *Cor. 2. def. 12. d'Algeb. page 65.*
[3] *Cor. 3. de la diviſ. des Nomb. pag. 42.*
[4] *Cor. 1. Def. 12. d'Algeb. page 64.*
[5] *Demande 1. generale, pag. 3.*

choſe

chose que multiplier l'un par l'autre les deux termes extrêmes, & l'un par l'autre les deux termes moyens de la premiere ; puisqu'on vient de voir que ces deux proportions sont égales en toutes manieres. Donc $ad = bc$, *ce qu'il falloit démontrer.*

En appliquant cette proposition generale à tel exemple particulier qu'on voudra, comme à cette proportion $6 . 2 :: 15 . 5$. on trouvera toujours que $6 \times 5 = 2 \times 15 = 30$.

REMARQUE.

De la même maniere que je viens de faire voir l'égalité ou équivalence des deux analogies ; c'est ainsi que dans le Corollaire de la proposition 3[e] suivante, &c. il est facile de faire voir que les deux rapports de cette proportion $dx . d :: gx . g$. sont égaux aux deux de cette autre analogie $c . d :: e . g$. pour conclure ensuite que ce qui sera démontré de l'une de ces deux analogies sera aussi démontré de l'autre ; parcequ'elles sont égales en toutes manieres. Presque toutes les démonstrations des 18 Propositions suivantes sans en excepter même la premiere partie de la proposition 8[e] dépendent de cette seconde proposition & de la 3[e].

COROLLAIRE I.

Dans une progression geometrique, le produit des deux termes également éloignez des deux extrêmes, est égal au produit des termes extrêmes. Par exemple dans cette progression $\div a . b . c . d . e$. les termes b & d sont également éloignez des extrêmes a & e, je dis que $bd = ae$. Car puisque [1] la progression est une suite de raports égaux

[1] *Def.* 16. *d'Algeb. pag.* 66.

entr'eux ; on a $a . b :: d . e$. Donc [1] $bd = ae$. On démontrera de même que $cc = bd$.

COROLLAIRE II.

Pour trouver à trois grandeurs données une 4[e] grandeur proportionnelle geometrique, il faut multiplier la 3[e] par la 2[e], & diviſer le produit par la premiere.

Ce Corollaire eſt le fondement de la Regle de proportion, ſes uſages ſont en très grand nombre. Soient par exemple ces 3 grandeurs 12 . 8 . 30 . auſquelles je cherche une 4[e] proportionnelle geometrique ; c'eſt-à-dire, que ces 3 nombres m'étant propoſez, je veux leur chercher

$$\left\{\begin{array}{c} 12 . 8 :: 30 . x. \\ 12x = 240. \\ x = 20. \\ \textit{Donc } 12 . 8 :: 30 . 20. \end{array}\right.$$

un 4[e] nombre auquel le 3[e] qui eſt 30, ſoit comme 12 eſt à 8. Je nommerai x cette 4[e] proportionnelle ; & multipliant 30 par 8, je trouverai [1] $12x = 240$. Or la 12[e] partie de $12x$ eſt [2] égale à la 12[e] partie de 240 ; c'eſt-à-dire que $x = 20$. Je connoîtrai donc que la valeur de x, ou du 4[e] terme, qui eſt le Nombre que je cherchois, eſt 20.

En general pour trouver à ces 3 grandeurs f, g, h, une 4[e] proportionnelle, je multiplie g par h ; enſuite je diviſe le produit gh par f, & j'ai pour 4[e] proportionnelle $\frac{gh}{f}$; parceque [1] le produit des moyennes gh eſt égal au produit de la premiere grandeur multipliée par cette 4[e] proportionnelle inconnue. Preſentement je peux prendre [3] le produit gh pour celui qui ſeroit venu de la grandeur f, & de la quatriéme qui

[1] *Prop. preſente.*
[2] *Ax. 12. gen.*
[3] *Demande 1. gener. pag. 3.*

eſt inconnue

eſt inconnuë, multipliées l'une par l'autre ; & partant en diviſant ce produit gh par f, le quotient [1] ſera neceſſairement la 4^e^ grandeur proportionnelle inconnuë qu'on cherchoit ; c'eſt à dire, que $f . g :: h . \frac{gh}{f}$.

COROLLAIRE III.

Donc lorſqu'on trouve une fraction dont le numerateur eſt un produit, il eſt facile d'y trouver 4 grandeurs proportionnelles. Soit par exemple $\frac{ab}{c}$: on trouvera ces 4 proportionnelles $c . a :: b . \frac{ab}{c}$, ou $c . b :: a . \frac{ab}{c}$, Puiſqu'on voit évidemment que $\frac{ba}{c}$ eſt une 4^e^ proportionnelle au diviſeur c & aux deux racines a & b du produit ab.

COROLLAIRE IV.

Donc pour trouver à deux grandeurs données une 3^e^ continuëment proportionnelle geometrique, il faut diviſer le quarré de la 2^e^ par la premiere, & le quotient ſera la 3^e^ proportionnelle cherchée. Par exemple ſoient les deux grandeurs a & b, je dis que leur 3^e^ continuëment proportionnelle ſera $\frac{bb}{a}$; c'eſt à dire que $\div a . b . \frac{bb}{a}$. Puiſque cette analogie eſt [2] équi-

[1] *Cor. 4. de la div. page 42.* [2] *Déf. 15. Algeb.*

valente à celle-ci $a . b :: b . \frac{bb}{a}$ ce qui revient à ce qui est énoncé dans le Corollaire 2 precedent. Enfin entre deux grandeurs données, on aura pour moyenne proportionnelle la racine quarrée du produit de ces deux grandeurs. Par exemple entre 8 & 12, on aura pour moyenne proportionnelle $\sqrt{96}$, c'est à dire que $\div\!\div\, 8 . \sqrt{96} . 12.$

PROPOSITION III.

Si le produit des termes extrêmes de quatre grandeurs est égal au produit des termes moyens, ces quatre grandeurs seront proportionnelles entr'elles.

DEMONSTRATION.

Cette proposition est la converse ou reciproque de la precedente. Soit $ad = bc$, je dis que $a . b :: c . d$. Car si a n'étoit pas à b comme c à d. Il faudroit que la grandeur a fût trop grande ou trop petite ; & partant pour avoir $a . b :: c . d$. il faudroit augmenter ou diminuer a de ce qu'il seroit necessaire pour cela. Supposons, par exemple, qu'il faille ajouter à a la grandeur m. On aura donc $a + m . b :: c . d$. & partant [1] $ad + dm$ sera égal à bc : mais [2] aussi $ad = bc$, il faudroit donc [3] que $ad + dm = ad$, c'est à dire que le tout fût égal à une de ses parties, ce qui est [4] impossible. S'il avoit fallu retrancher m de a, on auroit donc eu

[1] *Prop. 2.* [2] *Suppost.*
[3] *Ax. 18. general.* [4] *Ax. 2. general.*

$a - m$,

$a-m.b::c.d.$ Et partant [1] $ad-dm=bc$; mais [2] $ad=bc$; donc [3] $ad-dm$ auroit été égal à ad, c'eſt à dire que $ad-dm$, qui n'eſt qu'une partie de ad, auroit été égale au tout ad, ce qui eſt [4] encore impoſſible. Donc en ſuppoſant $ad=bc$; ſi a n'étoit pas à b comme c à d, il faudroit que le tout fût égal à une de ſes parties; donc de même qu'il eſt impoſſible qu'un tout ſoit égal à une de ſes parties, il eſt pareillement impoſſible que a ne ſoit pas à b comme c à d. Donc $a.b::c.d.$ lorſque $ad=bc$, *ce qu'il falloit demontrer.*

Ces ſortes de demonſtrations ſont appellées indirectes, qui font voir qu'il eſt impoſſible que la choſe ſoit autrement que comme on la propoſe, parceque ſi elle étoit autrement, on ſeroit obligé d'accorder une choſe évidemment fauſſe, contraire à un axiome. La demonſtration ſuivante eſt directe, parcequ'on y fait voir que par une ſuite neceſſaire des principes qu'on a établis, la choſe doit être telle qu'on la propoſe.

Autre Demonstration.

Soit $ad=cb$, je dis que $a.b::c.d.$ car ſoit $\frac{a}{b}=f$; donc [5] $bf=a$; & partant dans le produit ad en ſubſtituant bf au lieu de a; on aura $bfd=cb$, & diviſant le tout par b, on aura $fd=c$; parceque deux grandeurs égales étant diviſées par deux grandeurs égales,

[1] *Prop.* 2. [2] *Par ſuppoſ.* [3] *Ax.* 18. *general.* [4] *Ax.* 2. *gen.* [5] *Cor.* 3. *de la diviſ. pag* 42.

donnent des quotients égaux entr'eux, cela est [1] évident. Or au lieu de c troisiéme de ces 4 grandeurs $a . b . c . d .$ si on substituë la grandeur fd qui lui est égale, on aura $a . b . fd . d$; on trouvera encore $\frac{fd}{d} = f$. Mais [2] $\frac{a}{b} = f$. Partant (3) $a . b :: fd . d .$ & remettant au lieu de la grandeur fd son égale c, on aura $a . b :: c . d .$ *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

On tire immédiatement de cette proposition entr'autres consequences cinq manieres de raisonner, tres celebres dans les Mathematiques, & qui tiennent un des premiers rangs entre les principes de ces sciences.

Pour démontrer la certitude de ces raisonnemens, je prendrai cette analogie $c . d :: e . g .$ qui me servira d'exemple pour toutes les autres imaginables qu'on pourra faire à l'égard des autres grandeurs. Que l'exposant du rapport de c à d soit appellé x ; c'est à dire, que $\frac{c}{d} = x$; il est constant que $dx = c$, l'exposant du rapport de e à g sera aussi égal à x, puisque [2] les rapports sont égaux ; & on aura (4) $gx = e$: & partant au lieu cette analogie $c . d :: e . g$, on aura son équivalente $dx . d :: gx . g$. Cela

[1] *Ax. 12. gen.* [2] *Supposit.* (3) *Cor. 1. déf. 12. Algeb.* (4) *Cor. 3. déf. de la divis. p. 42.*

étant bien conçû, il sera tres facile d'appercevoir l'évidence des conclusions suivantes.

Si $dx \,.\, d :: gx \,.\, g$;

I.

Donc $d \,.\, dx :: g \,.\, gx$. c'est à dire, le consequent est à l'antecedent, comme le consequent à l'antecedent. Dans les Mathematiques on appelle cette maniere de conclure, *Raison inverse.*

2.

Donc $dx \,.\, gx :: d \,.\, g$. c'est à dire, l'antecedent est à l'antecedent, comme le consequent au consequent. On appelle cette conclusion, *Raison alterne.*

3.

Donc $dx + d \,.\, d :: gx + g \,.\, g$. c'est à dire, l'antecedent plus le consequent est au consequent, comme l'antecedent plus le consequent est au consequent. On appelle cette conclusion, *composition de raison.*

4.

Donc $dx - d \,.\, d :: gx - g \,.\, g$. c'est à dire, l'antecedent moins le consequent est au consequent, comme l'antecedent moins le consequent est au consequent. On appelle cette conclusion, *division de Raison.*

5.

Donc $dx . dx - d :: gx . gx - g$. c'eſt à dire, l'antecedent eſt à l'antecedent moins le conſequent, comme l'antecedent eſt à l'antecedent moins le conſequent. On appelle cette concluſion, *converſion de Raiſon.*

Dans chacune de ces cinq dernieres analogies, le produit des termes extrêmes eſt égal au produit des termes moyens. Par exemple dans la premiere on trouve le produit des termes extrêmes $dgx = dgx$, c'eſt à dire, égal au produit des termes moyens, puiſque de part & d'autre du ſigne d'égalité, on trouve les mêmes grandeurs. Dans les autres, on trouvera pareille égalité de produits; & partant dans tous ces cinq changemens les quatres grandeurs qui y ſont énoncées ſont toûjours (*) proportionnelles.

Au lieu de cette analogie $dx . d :: gx . g$; reprenant ſon équivalente $c . d :: e . g$. on en concluëra la même choſe.

$$\text{ſi} \quad c . d :: e . g.$$

$$\text{Donc}\begin{cases} \textit{inverſ.} & d . c :: g . e. \\ \textit{alter.} & c . e :: d . g. \\ \textit{compoſit.} & c + d . d :: e + g . g; \\ \textit{diviſ.} & c - d . d :: e - g . g. \\ \textit{converſ.} & c . c - d :: e . e - g. \end{cases}$$

(*) *Prop. preſ.*

PROPOSITION IV.

1°. *Le produit d'une multiplication est à une des grandeurs multipliées, comme l'autre grandeur multipliée est à l'unité.*

2°. *Une grandeur à diviser est au diviseur, comme le quotient est à l'unité.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la grandeur a multipliée par b : je dis que le produit $ab \,.\, b :: a \,.\, 1$. ou que $ab \,.\, a :: b \,.\, 1$. Car [1] $1ab = ab$. Donc [2] $ab \,.\, b :: a \,.\, 1$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette verité étoit déja connue [3]; puisque [4] le produit de la multiplication contient autant de fois une des grandeurs multipliées, que l'autre grandeur multipliée contient l'unité. Soit le nombre 5 multiplié par 12, il est évident que le produit $60 \,.\, 12 :: 5 \,.\, 1$. & que $60 \,.\, 5 :: 12 \,.\, 1$.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la grandeur c divisée par d, & le quotient soit x: je dis que $c \,.\, d :: x \,.\, 1$. Car [5] $c = dx$, c'est à dire [1], $1c = dx$. Donc [2] $c \,.\, d :: x \,.\, 1$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

L'évidence de cette seconde partie a déja paru, lorsqu'on a remarqué [6] que la grandeur à di-

[1] *Demande 5e d'Algeb.*
[2] *Prop. 3.*
[3] *Cor. 1. Def. 12. Algeb. pag. 64.*
[4] *Cor. des def. de la Multip. pag. 22.*
[5] *Cor. 3. de la Division. pag. 42.*
[6] *Cor. 2. de la Division. pag. 42.*

viſer contient autant de fois le diviſeur que le quotient contient l'unité. Soit le nombre 40 diviſé par 5, dont le quotient eſt 8; on trouvera que $40 . 5 :: 8 . 1$.

COROLLAIRE I.

Lorſqu'il ſe rencontre un produit de grandeurs litterales, & que dans ce produit on aperçoit les racines de ce même produit; il eſt facile d'y trouver les termes d'une proportion geometrique & de les arranger. Soit, par exemple, ab, on y trouvera cette proportion $ab . b :: a . 1$. ou bien $ab . a :: b . 1$.

COROLLAIRE II.

Lorſqu'il ſe rencontre une fraction ou diviſion indiquée, il eſt pareillement facile d'y trouver les termes d'une proportion geometrique. Soit par exemple $\frac{a}{b}$, je dis que $a . b :: \frac{a}{b} . 1$. car $\frac{a}{b}$ exprime le quotient de a diviſé par b. Soit $\frac{7}{9}$, je dis [1] que $7 . 9 :: \frac{7}{9} . 1$. puiſque $\frac{7}{9}$ eſt le quotient de 7 diviſé par 9.

COROLLAIRE III.

La valeur du produit de deux fractions multipliées l'une par l'autre, doit être plus petite que la valeur de chacune de ces deux fractions multipliées, l'une ou l'autre étant plus petite qu'un entier. Parceque [2] le produit de ces deux fractions eſt à une des fractions multipliées, comme l'autre fraction multipliée eſt à l'unité. Or, ſi cette autre fraction multipliée eſt plus petite qu'un entier; le produit de ces deux fractions ſera auſſi plus petit que l'une ou l'autre priſe à volonté

[1] *Part. 2. prop. preſ.* [2] *Part. 1. prop. preſ.*

Le quotient d'une fraction divisée par l'autre, est toûjours plus grand que la fraction divisée, lorsque la fraction à diviser est plus petite qu'un entier. Soit par exemple la fraction $\frac{a}{b}$ divisée par $\frac{c}{d}$, on aura pour quotient $\frac{ad}{bc}$; je dis que $\frac{ad}{bc} > \frac{a}{b}$; car * $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} :: \frac{ad}{bc} . 1 .$ & ** $\frac{a}{b} \cdot \frac{ad}{bc} :: \frac{c}{d} . 1 .$ Or (1) la fraction $\frac{c}{d} < 1$. Donc aussi $\frac{a}{b} < \frac{ad}{bc}$; c'est à dire que le quotient $\frac{ad}{bc}$ est plus grand que la fraction divisée $\frac{a}{b}$. On avoit déja remarqué la verité du Corollaire present dans la page 56.

PROPOSITION V.

Les grandeurs qui sont également multipliées donnent des produits qui sont entr'eux, comme ces mêmes grandeurs sont entr'elles avant qu'elles soient multipliées.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs c & d, & qu'on multi-

* *Part. 1. prop. pres.*
** *Cor. prop. 3. art. 2.* (1) *Supposit.*

plie l'une & l'autre par une autre grandeur f; je dis que $c . d :: cf . df$. Cela est évident puisque * le produit des termes extrêmes cdf est égal au produit des termes moyens dcf; & partant $c . d :: cf . df$. *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc les racines sourdes de même nom, reduites aux expressions les plus simples, sont entre elles comme les grandeurs qui precedent le signe radical, si dans l'une & dans l'autre des racines comparées il se trouve des grandeurs égales precedées du signe radical. Par exemple, on trouvera que $a\sqrt{b} . f\sqrt{b} :: a . f$. puisque a & f sont également multipliées par $\sqrt{b}$. de même $3\sqrt{7} . 9\sqrt{7} :: 3 . 9$.

COROLLAIRE II.

Il suit de cette proposition qu'on ne change point la valeur des fractions qu'on reduit à même dénomination. Par exemple, si on reduit à même dénomination les fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{d}{f}$, on aura $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$, & $\frac{d}{f} = \frac{cd}{cf}$. car on voit clairement que dans cette reduction b & c sont multipliées également par f; & partant [1] que le quotient de b divisé par c, c'est à dire, $\frac{b}{c} = \frac{bf}{cf}$.

* *Prop.* 2. [1] *Prop. pres. & Cor.* 2. *déf.* 12. *Algeb.*

Pareillement dans la fraction $\frac{cd}{cf}$ on voit que d & f ſont multipliées également par c; & partant que $\frac{d}{f} = \frac{cd}{cf}$. Car $d . f :: cd . cf$. c'eſt à dire * que les quotients $\frac{d}{f}$ & $\frac{cd}{cf}$ ſont égaux entr'eux. La même choſe paroîtra évidemment en reduiſant $\frac{4}{5}$ & $\frac{3}{7}$ à même dénomination.

COROLLAIRE III.

Donc lorſque les racines des quarrez ſont égales, les quarrez qui en proviennent ſont égaux. Par exemple ſi $a = b$, on aura $aa = bb$. Car [1] $a . b :: aa . bb$. puiſque ce n'eſt rien autre choſe que a & b multipliez également, la ſuppoſition étant que $a = b$. & partant de même que (2) $a = b$; ainſi $aa = bb$.

COROLLAIRE IV.

Reciproquement les quarrez étant égaux; leurs racines ſeront égales. Par exemple ſi $aa = bb$, je dis que $a = b$; car ſi a n'étoit pas égal à b, on pourroit ajouter à cette grandeur a ou en retrancher ce qui ſeroit neceſſaire pour former une grandeur égale à b. On pourroit par exemple ajouter m pour faire cette ſomme

* *Cor. 3. déf. 12. d'Algebre.*

[1] *Prop. preſente.* (2) *Par ſuppoſit.*

$a+m=b$; or si $a+m=b$, on vient de démontrer que le quarré de $a+m$ seroit égal au quarré de b, c'est à dire que $aa+2am+mm=bb$; mais (1) on avoit aussi $aa=bb$. Et partant $aa+2am+mm$ seroit (2) égal au seul quarré aa, c'est à dire le tout à une de ses parties ; ce qui est (3) impossible.

Donc enfin si les racines sont inégales, les quarrez seront inégaux ; car si les quarrez étoient égaux, les racines seroient égales ; ce qui est contre la supposition.

Et au contraire si les quarrez sont inégaux ; les racines seront inégales par un raisonnement semblable au precedent.

PROPOSITION VI.

Les quotients des grandeurs également divisées sont entr'eux, comme ces mêmes grandeurs auparavant qu'elles soient divisées.

DEMONSTRATION.

Soient par exemple les deux grandeurs d & f, & que l'une & l'autre soit divisée par b ; je dis que $d . f :: \frac{d}{b} . \frac{f}{b}$. Cela est évident : car, puisque le produit des termes extrêmes $\frac{df}{b}$ est égal au produit des termes moyens $\frac{fd}{b}$, c'est à dire,

(1) *Par supposit.* (2) *Ax. 18. gener.*
(3) *Ax. 2. gener.*

que $\frac{df}{b} = \frac{fd}{b}$; on* aura $d . f :: \frac{d}{b} . \frac{f}{b}$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc on peut reduire une fraction à une expression plus ſimple, ou à moindre dénomination, ſans changer la valeur de cette fraction. Par exemple pour reduire $\frac{12}{15}$ à une expreſſion plus ſimple, je cherche un diviſeur commun pour 12 & 15, je trouve que c'eſt 3, qui diviſe 12 & 15 également ſans reſte. Après avoir diviſé 12 par 3, on a pour quotient 4, qui ſera le numerateur de la nouvelle fraction; & après avoir diviſé 15 par la même grandeur 3, le quotient eſt 5, qui ſera le denominateur. Or $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; puiſque [1] 12 ſont à 15, comme le quotient de 12 diviſé par 3, eſt au quotient de 15 diviſé par 3, c'eſt à dire, que $12 . 15 :: \frac{12}{3} = 4 . \frac{15}{3} = 5$. on trouvera par le même raiſonnement que $\frac{cd}{fd} = \frac{c}{f}$, en diviſant le numerateur cd, & le dénominateur fd par d.

* *Prop.* 3. [1] *Par la Prop. preſ.*

COROLLAIRE II.

Donc lorſqu'il y a quatre grandeurs telles que la premiere ait plus grand rapport à la ſeconde, que la 3^e à la 4^e, le produit des termes extrêmes eſt plus grand que le produit des termes moyens. Soit par exemple $a . d > b . c$, je dis que $ac > db$; car l'expoſant du rapport de a à d ſoit nommé f, c'eſt à dire $\frac{a}{d} = f$; au lieu de la grandeur a, on aura ſon [1] égale df. Soit $\frac{b}{c} = g$, on aura auſſi $cg = b$. & [2] $f > g$. Enfin au lieu des quatre grandeurs precedentes $a . d . b . c$, on aura leurs équivalentes $df . d > cg . c$. Le produit des termes extrêmes, ſçavoir dfc eſt plus grand que dcg, qui eſt le produit des termes moyens; car en diviſant dfc & dcg par dc, on aura [3] $dfc . dcg :: f . g$. Or [2] $f > g$; donc pareillement $dfc > dcg$, c'eſt à dire le produit des termes extrêmes ac eſt plus grand que le produit des termes moyens db.

[1] *Cor. de la diviſ. pag. 42.* [2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. preſente.*

PROPOSITION

PROPOSITION VII.

Si on divise des grandeurs égales, ou la même plusieurs fois, par d'autres grandeurs ; les quotients seront entr'eux reciproquement comme les diviseurs.

DEMONSTRATION.

Soit la grandeur d divisée par f. Soit encore la même grandeur d divisée par h : je dis que $\frac{d}{f} \cdot \frac{d}{h} :: h \cdot f$. Car le produit $\frac{df}{f}$ des termes extrêmes de ces quatre grandeurs, est égal au produit $\frac{dh}{h}$ des termes moyens, parceque [1] $\frac{df}{f} = d$, & $\frac{dh}{h} = d$. Donc [2] $\frac{df}{f} = \frac{dh}{h}$. On conclura donc enfin [3] que $\frac{d}{f} \cdot \frac{d}{h} :: h \cdot f$.

Ce qu'il falloit démontrer.

[1] *Part.* 1. *de l'Avertiss. pag.* 81.
[2] *Ax* 18. *Gen.*
[3] *Prop.* 3.

N

PROPOSITION VIII.

1°. *Les grandeurs égales ont même rapport à une 3e grandeur ou à des grandeurs égales,*

2°. *Reciproquement les grandeurs qui ont même rapport à une 3e grandeur, ou à des grandeurs égales, sont égales entr'elles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit $a = b$, je dis que $a . c :: b . c$. car [1] $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$. mais [2] $a = b$. Donc $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$. & partant [3] $a . c :: b . c$. *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $b . d :: f . d$. je dis que $b = f$. Car

[1] *Prop. 6.*
[2] *Par supposit.*
[3] *Def. 13. & Cor. 1. def. 12. d'Algeb.*

(1) $\frac{b}{d} = \frac{f}{d}$. mais (2) $b . f :: \frac{b}{d} . \frac{f}{d}$. Donc $b = f$. *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION IX.

1°. *Une même grandeur a même rapport à des grandeurs égales entr'elles.*

2°. *Reciproquement si une même grandeur a même rapport à d'autres grandeurs, ces dernieres grandeurs seront égales entr'elles.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit par exemple la grandeur c, & $d = f$; je dis que $c . d :: c . f$. cela sera (3) évident si $\frac{c}{d} = \frac{c}{f}$. Or c'est une chose constante; car (4) $\frac{c}{d} . \frac{c}{f} :: f . d$. or (1) $f = d$. donc $\frac{c}{d} = \frac{c}{f}$. & partant $c . d :: c . f$. *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $g . h :: g . m$. je dis que $h = m$. car

(1) *Par supposit. & Cor. 2. déf. 12. Alg.* (2) *Prop. 6.* (3) *Cor. 1. déf. 12. Algeb.* (4) *Prop. 7.*

[1] $\frac{g}{h} = \frac{g}{m}$. or [2] $\frac{g}{h} . \frac{g}{m} :: m . h$. donc de même que $\frac{g}{h} = \frac{g}{m}$. ainsi $m = h$, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION X.

1°. *La plus grande de deux grandeurs a plus grand rapport à une 3e grandeur ou à grandeurs égales, & la plus petite à plus petit rapport à cette 3e grandeur.*

2°. *Reciproquement si de deux grandeurs la premiere a plus grand rapport à une 3e, & si la seconde a un moindre rapport à cette 3e; la premiere grandeur sera plus grande que la seconde.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la grandeur $a > b$, je dis que $a . c > b . c$. c'est à dire, que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. car [3] les quotients de $\frac{a}{c}$ & de $\frac{b}{c}$ seront entr'eux comme a à b; mais [1] $a > b$; donc $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, c'est à dire, [4] $a . c > b . c$. *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Par supposit. & Cor.* 2. *déf.* 12. *d'Algeb.*
[2] *Prop.* 7. [3] *Prop.* 6.
[4] *Cor.* 1. *déf.* 12. *d'Algebre.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $a . c > b . c$. c'eſt à dire, que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. je dis que $a > b$. car [1] $\frac{a}{c} . \frac{b}{c} :: a . b$. mais [2] $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. donc pareillement on aura $a > b$. *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XI.

1°. *Une 3^e^ grandeur a un plus petit rapport à la plus grande de deux grandeurs inégales, & a plus grand rapport à la plus petite grandeur.*

2°. *Reciproquement, ſi une 3^e^ grandeur a un plus petit rapport à une des deux grandeurs, & un plus grand rapport à l'autre; la premiere de ces grandeurs ſera plus grande que la ſeconde.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit $d > f$, & ſoit une 3^e^ grandeur par exemple h, je dis que $h . d < h . f$. c'eſt à dire que $\frac{h}{d} < \frac{h}{f}$. car [3] $\frac{h}{d} . \frac{h}{f} :: f . d$. or [2] $f < d$. Donc $\frac{h}{d} < \frac{h}{f}$. Donc [4] $h . d < h . f$. *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Prop.* 6.
[2] *Par ſuppoſit.*
[3] *Prop.* 7.
[4] *Cor.* 1. *def,* 12. *Algeb.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit $d . g < d . h$, c'eſt à dire, ſi $\frac{d}{g} < \frac{d}{h}$, je dis que $g > h$. car [1] $\frac{d}{g} . \frac{d}{h} :: h . g$. Or [2] $\frac{d}{g} < \frac{d}{h}$. Donc pareillement $h < g$, ou, ce qui eſt la même choſe, $g > h$, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XII.

Si des grandeurs proportionnelles ſont multipliées par d'autres grandeurs proportionnelles de même ordre; leurs produits ſeront proportionnels entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soient pluſieurs rangées de grandeurs proportionnelles, par exemple $a . b :: c . d$. & $e . f :: g . h$. écrites l'une ſous l'autre, de ſorte que les antecedens e & g d'une rangée ſoient ſous les antecedens a & c de l'autre, & les conſequens f & h de l'une ſous les conſequens b & d de l'autre, & toujours dans ce même ordre, quelque nombre qu'il y ait de ces rangées ; ſi on multiplie par ordre les antecedens a & e, c & g l'un par l'autre, & ſi on multiplie auſſi par ordre les conſequens b & f, d & h l'un par l'autre: un produit ae des antecedens ſera au produit bf de leurs conſequens, comme un autre produit cg des autres antecedens ſera au produit dh de leurs conſequens ; & ainſi de ſuite. Pour le démontrer,

[1] *Prop.* 7. [2] *Suppoſit.*

dans la premiere analogie soit l'exposant du rapport de a à b nommé x, c'est à dire, $\frac{a}{b} = x$.

$$a \,.\, b :: c \,.\, d\,;$$
$$e \,.\, f :: g \,.\, h\,.$$

Les mêmes que les grandeurs precedentes. $\left\{\begin{array}{l} bx \,.\, b :: dx \,.\, d\,; \\ fz \,.\, f :: hz \,.\, d\,; \end{array}\right.$

donc $bxfz \,.\, bf :: dxhz \,.\, dh$.

donc enfin $ae \,.\, bf :: cg \,.\, dh$.

Donc $bx = a$; mais puisque [1] le rapport de c à d est égal au rapport de a à b, on aura [2] aussi $\frac{c}{d} = x$, & partant $dx = c$. Dans la seconde analogie soit $\frac{e}{f} = z$, on aura $fz = e$; par la même raison que dans l'analogie precedente, on trouvera aussi $\frac{g}{h} = z$, & le produit $hz = g$. Dans la premiere proportion, au lieu de l'antecedent a on prendra ce qui lui est égal, sçavoir bx ; & au lieu de c on prendra dx. Dans la seconde proportion, au lieu de l'antecedent e on prendra ce qui lui est égal, sçavoir fz ; & au lieu de g on prendra hz. De sorte qu'en la place des deux analogies proposées, on aura leurs équivalentes, $bx \,.\, b :: dx \,.\, d$. & $fz \,.\, f :: hz \,.\, h$. Or il est constant que le produit $bxfz$ des premiers antecedents est au produit bf des

[1] *Supposit.* [2] *Cor. 2. déf. 12. d'Algeb.*

premiers conſequents, comme le produit dx hz des ſeconds antecedents eſt au produit dh des ſeconds conſequents; c'eſt à dire, que $bx\,fz \,.\, bf :: dx\,hz \,.\, dh$. Car le produit des termes extrêmes $bx\,fz\,dh = bf\,dx\,hz$ produit des termes moyens : ce qui paroît évidemment, puiſque de part & d'autre du ſigne d'égalité on aperçoit les mêmes grandeurs; & partant ſi au lieu du produit des antecedents bx & fz, on prend le produit ae des antecedents a & e qui leur ſont égaux; & au lieu du produit des antecedents dx & hz, ſi on prend le produit de leurs égaux, ſçavoir cg; on aura $ae \,.\, bf :: cg \,.\, dh$. *ce qu'il falloit demontrer.*

S'il y avoit plus de deux rangées de proportionnelles; par exemple, s'il y en avoit 3, 4, 5, &c. on ſe ſerviroit pour la demonſtration du même raiſonnement qu'on vient de mettre en uſage.

COROLLAIRE I.

La propoſition preſente & la 6e ſont le fondement de deux autres manieres de comparer les grandeurs proportionnelles, qui ſont encore d'un grand uſage dans les Mathematiques. Et on peut dire que les cinq manieres énoncées par le Corollaire de la propoſit. 3. avec les deux ſuivantes, ſont ſi neceſſaires pour avancer dans les Mathematiques, qu'il faut avouër que ceux qui voudroient y prétendre ſans le ſecours de cette ſubtile dialectique, feroient des efforts inutiles. Cependant quoique d'abord il s'en trouve qui ont quelque peine à s'y accoûtumer, il ne faut pas pour cela y renoncer; parceque la frequente application qu'on en fera dans la ſuite les rendra tres-familieres.

I.

Soient deux rangées de quatre grandeurs ; par exemple $a . b . c . d .$ & $b . f . d . h .$ telles que $a . b :: c . d .$ & $b . f :: d . h .$ je les arrange en écrivant le ſecond antecedent c & le ſecond conſequent d de la premiere analogie ſous le premier antecedent a, & ſous le premier conſequent b. Enſuite le premier & le ſecond conſequent de la premiere analogie, ſçavoir b & d ſerviront d'antecedents à la ſeconde ; & j'écrirai ſeulement enſuite l'un ſur l'autre les conſequents f & h ; cela formera deux nouvelles rangées chacune de 3 grandeurs. Je dis que la premiere grandeur a de la premiere rangée eſt à la derniere f de la même rangée ; comme la premiere c de la deuxiéme rangée eſt à la derniere h de la même rangée, c'eſt à dire que $a . f :: c . h$.

$$a . b . f .$$
$$c . d . h .$$
Donc $a . f :: c . h$;

Pour ſe convaincre de cette verité, il faut écrire les deux rangées de proportionnelles $a . b :: c . d .$ & $b . f . d . h .$ l'une ſur l'autre, on trouvera [1] que ces produits ſeront proportionnels $ab . bf :: cd . dh$. Mais au lieu du rapport de ab à bf, on peut prendre le rapport de a à f qui

$$a . b :: c . d .$$
$$b . f :: d . h .$$
$$ab . bf :: cd . dh .$$
donc $a . f :: c . h$.

[1] *Prop. preſente.*

lui eſt [1] égal ; & au lieu du rapport de *cd* à *dh*, on peut prendre ſon égal qui eſt celui de *c* à *h* ; mais puiſque le rapport de *ab* à *bf* eſt (2) égal au rapport de *cd* . *dh* : on aura *a* . *f* :: *c* . *h*.

Cette maniere de conclure eſt appellée *proportion bien ordonnée.*

S'il y avoit plus de deux rangées de grandeurs proportionnelles telles que les conſequents de la premiere analogie fuſſent égaux aux antecedents de la ſeconde, & que les conſequents de la ſeconde fuſſent égaux aux antecedents de la 3e ; & ainſi de ſuite, on les diſpoſeroit en deux rangées comme les proportionnelles precedentes, & on concluëroit que la premiere du premier rang ſeroit à la quantiéme du même rang : comme la premiere du ſecond rang eſt à une pareille quantiéme du même rang. Par exemple ſoient *l* . *m* :: *n* . *o*, & *m* . *p* :: *o* . *q* . & *p* . *r* :: *q* . *ſ*, & *r* . *t* :: *ſ* . *u* . &c, je dis que *l* . *r* :: *n* . *ſ* ; que *l* . *t* :: *n* . *u* . &c. la demonſtration en eſt entierement ſemblable à la precedente.

l . *m* . *p* . *r* . *t* . &c.
n . *o* . *q* . *ſ* . *u* .

donc *l* . *r* :: *n* . *ſ* .
donc *l* . *t* :: *n* . *u* .
donc &c.

2.

S'il y a deux rangées chacune de quatre grandeurs proportionnelles ; par exemple *a* . *d* :: *f* . *g* . & *d* . *m* :: *h* . *f*, de ſorte que le premier conſequent de la premiere analogie ſoit égal au premier antecedent de la 2e ; & que le 2e an-

[1] *Prop.* 6. (2) *Prop. preſ.*

tecedent de la premiere analogie ſoit égal au 2e conſequent de la 2e; j'écris les antecedents & les conſequents de la premiere analogie l'un ſous l'autre, de ſorte que le ſecond antecedent f ſoit ſous le premier conſequent d; enſuite j'écris le premier conſequent m de la ſeconde analogie dans le premier rang. Enfin j'écris le ſecond antecedent h de la 2e analogie ſous le premier antecedent a de la premiere; & le ſecond conſequent f devient le même que le 2e antecedent de la premiere proportion; cela forme encore deux nouvelles rangées, chacune de trois grandeurs. Je dis, comme dans le premier article de ce Corollaire: donc $a . m :: h . g$.

$$a . d . m .$$
$$h . f . g .$$
$$\overline{}$$
$$\textit{donc} \quad a . m :: h . g .$$

Pour connoître la verité de cette concluſion, il faut écrire les deux rangées de proportionnelles $a . d :: f . g .$ & $d . m :: h . f .$ l'une ſous l'autre, on trouvera qu'en multipliant par ordre, [1] on aura $ad . dm :: fh . gf$. mais [2] $ad . dm :: a . m$. & $fh . gf :: h . g$. donc $a . m :: h . g$.

$$a . d :: f . g .$$
$$d . m :: h . f .$$
$$\overline{}$$
$$ad . dm :: fh . gf .$$
$$\overline{}$$
$$\textit{Donc} \quad a . m :: h . g .$$

Cette maniere de conclure eſt appellée *proportion troublée.*

COROLLAIRE II.

1. Les quarrez de quatre grandeurs propor-

[1] *Prop. preſ.*
[2] *Prop. 6.*

tionnelles sont aussi proportionnels entr'eux; de même les cubes, &c. Par exemple, si $a \,.\, b :: c \,.\, d$. on [1] aura $aa \,.\, bb :: cc \,.\, dd$. parceque c'est la même chose que si on avoit multiplié l'une par l'autre ces deux rangées de proportionnelles $a \,.\, b :: c \,.\, d$. & $a \,.\, b :: c \,.\, d$. On aura pareillement $a^3 \,.\, b^3 :: c^3 \,.\, d^3$. parceque ce sont les produits de ces deux rangées de proportionnelles $aa \,.\, bb :: cc \,.\, dd$. & $a \,.\, b :: c \,.\, d$. multipliées par ordre.

2. Reciproquement lorsque quatre quarrez sont proportionnels, leurs racines sont aussi proportionnelles. Soit $ee \,.\, ff :: gg \,.\, hh$. Je dis que $e \,.\, f :: g \,.\, h$. Car, si e n'étoit pas à f comme g à h, on pourroit augmenter l'un ou l'autre de ces antecedens, jusqu'à ce que la proportion fût parfaite. S'il étoit necessaire d'augmenter le premier antecedent e, par exemple, jusqu'à ce qu'il devînt à $f :: g \,.\, h$. Supposons que e étant augmenté d'une grandeur que j'appellerai m, on ait $e + m \,.\, f :: g \,.\, h$; il est constant [2] qu'on auroit $ee + 2em + mm \,.\, ff :: gg \,.\, hh$. mais [3] $ee \,.\, ff :: gg \,.\, hh$. & partant [4] on auroit $ee + 2em + mm \,.\, ff :: ee \,.\, ff$. Le quarré $ee + 2em + mm$ seroit donc [5] égal à ee, ce qui est [6] impossible.

[1] *Prop. pres.*
[2] *Part.* 1. *Cor. pres.*
[3] *Supposit.*
[4] *Cor.* 3. *def.* 12. *d'Algeb.*
[5] *Prop.* 8. 2e *partie.*
[6] *Ax.* 2. *general.*

PROPOSITION

PROPOSITION XIII.

S'il y a deux rangées de grandeurs proportionnelles, & si on divise par ordre les grandeurs de la premiere rangée par les grandeurs correspondantes de la seconde rangée : les quotients de ces divisions seront proportionnels entr'eux.

DEMONSTRATION.

Soit la premiere rangée de grandeurs proportionnelles $a \,.\, b :: c \,.\, d$. Soit encore une seconde rangée $f \,.\, g :: h \,.\, m$. je dis que $\frac{a}{f} \,.\, \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \,.\, \frac{d}{m}$. Cela est constant * si le produit du quotient $\frac{a}{f}$ multiplié par $\frac{d}{m}$ est égal au produit de $\frac{b}{g}$ & de $\frac{c}{h}$ multipliez l'un par l'autre. Or cela est évident, puisque * $ad = bc$, & que $fm = gh$. Car le numerateur de la fraction $\frac{ad}{fm}$ étant égal au numerarateur de l'autre fraction $\frac{bc}{gh}$, & le dénominateur de l'une étant égal au dénominateur de l'autre ; $\frac{ad}{fm}$

$$a \,.\, b :: c \,.\, d$$
$$f \,.\, g :: h \,.\, m$$

$$\text{Donc } \frac{a}{f} \,.\, \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \,.\, \frac{d}{m}\,.$$

$$\frac{ad = bc}{fm = gh}$$

* Prop. 3.

ſera la même choſe que $\frac{bc}{gh}$. Le produit des termes extrêmes ſera donc égal au produit des termes moyens. Donc * $\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{g} :: \frac{c}{h} \cdot \frac{d}{m}$. *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XIV.

Lorſqu'il y a ſix grandeurs telles que la premiere ſoit à la 2e, comme la 3e à la 4e ; & la 5e à la 2e, comme la 6e à la 4e : la ſomme de la premiere & de la 5e ſera à la 2e, comme la ſomme de la 3e & de la 6e à la 4e.

DEMONSTRATION.

Soient les ſix grandeurs $a . b . c . d . f . g .$ telles que a ſoit à b comme c à d, & que la 5e f ſoit à la 2e b, comme la 6e g eſt à la 4e d; je dis que $a + f . b :: c + g . d$. Pour le démontrer, ſoit appellé x l'expoſant du rapport de a à b, c'eſt à dire que $\frac{a}{b} = x$; l'expoſant du rapport de c à d ſera [2] auſſi x, puiſque [3] ces rapports ſont égaux. On aura donc [4] $bx = a$, & $dx = c$. ſoit appellé y l'expoſant

* *Prop.* 3.

[2] *Cor.* 2. *Def.* 12. *Algeb.*

[3] *Suppoſit.*

[4] *Cor.* 3. *de la diviſion, pag.* 42.

$$\left\{\begin{array}{l} a \,.\, b :: c \,.\, d. \\ f \,.\, b :: g \,.\, d. \\ \hline \frac{a}{b} = x. \ \frac{c}{d} = x. \ \frac{f}{b} = y. \ \frac{g}{d} = y. \\ \text{Donc } bx = a.\ dx = c.\ by = f.\ dy = g. \\ \hline bx \,.\, b :: dx \,.\, d. \\ by \,.\, b :: dy \,.\, d. \\ \hline \text{Donc } bx + by \,.\, b :: dx + dy \,.\, d. \\ \hline \text{Car } bdx + bdy = bdx + bdy. \\ \text{Donc } a + f \,.\, b :: c + g \,.\, d. \end{array}\right\}$$

du rapport de f à b, c'eſt à dire que $\frac{f}{b} = y$; l'expoſant du rapport de g à d ſera [1] auſſi y, ces rapports étant [2] égaux. Dans ces deux analogies $a \,.\, b :: c \,.\, d$ & $f \,.\, b :: g \,.\, d$, en ſubſtituant au lieu de a, c, f, & g, les grandeurs égales bx, dx, by, & dy; au lieu des deux analogies precedentes, on aura [3] ces deux équivalentes $bx \,.\, b :: dx \,.\, d$, & $by \,.\, b :: dy \,.\, d$, Or [4] il eſt évident que $bx + by \,.\, b :: dx + dy \,.\, d$. Car le produit $bdx + bdy$ des termes extrêmes eſt égal au produit $bdx + bdy$ des moyens. Au lieu de $bx + dy$, & au lieu de $dx + dy$, remettant [3] les grandeurs qui leur ſont égales a, f; c, g, on trouvera que $a + f \,.\, b :: c + g \,.\, d$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Cor.* 2. *Def.* 12. *Algeb.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Demand.* 1. *Gen.*
[4] *Prop.* 3.

Si on avoit ces 6 grandeurs $h . m . o . p . u . z$, telles que $h . m :: o . p$. & que $h . u :: o . z$, on concluëroit, donc $h . m + u :: o . p + z$. Car [1] en changeant la premiere analogie en celle-ci $m . h :: p . o$. & en changeant la seconde en celle-ci $u . h :: z . o$. on trouvera par la démonstration qu'on vient de faire, que $m + u . h :: p + z . o$. & enfin [1] que $h . m + u :: o . p + z$.

$$\left.\begin{array}{l} h . m :: o . p . \\ h . u :: o . z . \end{array}\right\} \textit{Inver.} \begin{array}{l} m . h :: p . o . \\ u . h :: z . o . \end{array}$$

Donc $m + u . h :: p + z . o$.
Enfin $h . m + u :: o . p + z$.

PROPOSITION XV.

S'il y a une suite de rapports égaux entr'eux ; la somme des antecedents sera à la somme des consequents, comme un des antecedents est à son consequent.

DEMONSTRATION.

Soient ces rapports égaux entr'eux, $a . b :: c . d :: e . f$. &c. je dis que la somme des antecedents $a + c + e$ est à la somme des consequents $b + d + f$ comme a est à b, ou c à d, ou e à f. Pour le démontrer, soit nommé x l'exposant du rapport de a à b, c'est à dire que $\frac{a}{b} = x$, on aura [2] aussi $\frac{c}{d} = x$, & $\frac{e}{f} = x$; puisque [3] ces rapports sont égaux.

[1] *Part. 1. Cor. Prop. 3.*
[2] *Cor. 2. Def. 12. Algeb.*
[3] *Supposit.*

$$\left\{\begin{array}{l|l} a.b::c.d::e.f. & bx.\ b::dx.d::fx.f. \\ \frac{a}{b}=x.\ \frac{c}{d}\ x.\ \frac{e}{f}=x & bx+dx+fx.b+d+f:: \\ & bx.\ b. \\ & bbx+bdx+bfx=bbx+ \\ \text{Donc } bx=a,\ dx=c,\ fx=e. & bdx+bfx. \\ \multicolumn{2}{c}{\text{Donc } a+c+e.\ b+d+f::a.\ b.} \end{array}\right\}$$

Donc $bx=a$, $dx=c$, $fx=e$. & au lieu des grandeurs a, c & e, en substituant leurs égales, on aura $bx.b::dx.d::fx.f$. Or il est évident [1] que $bx+dx+fx.b+d+f::bx.b$. Car le produit $bbx+bdx+bfx$ des termes extrêmes est égal au produit $bbx+bdx+bfx$ des termes moyens. Au lieu de $bx+dx+fx$, reprenant ce qui y est égal $a+c+e$; on concluera que $a+c+e.b+d+f::a.b$. Or[2] le rapport de c à d est égal à celui de a à b, qui est aussi égal à celui de e à f. Donc la somme des antecedens $a+c+e$ est à la somme des consequens $b+d+f$, comme un antecedent à son consequent, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVI.

1. *La plus grande de deux grandeurs inégales est égale à la moitié de la somme faite de ces deux grandeurs & de la moitié de leur difference.*
2. *La plus petite de ces deux grandeurs est égale à la moitié de la somme de ces mêmes grandeurs moins la moitié de la difference.*

[1] *Prop.* 3.
[2] *Supposit.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux grandeurs a & b, telles que $a > b$, & que leur difference soit c : Je dis que la grandeur a est égale à la moitié de $a + b$ & de c. Car alors [1] on aura $a - c = b$.

Mais on cherche la somme des grandeurs a & b; il faut donc ajouter a avec ce qu'on vient de trouver égal à b. On aura donc $a + a - c = a + b$, c'est à dire [2] $2a - c = a + b$. Si on divise le tout par 2, on trouvera [3] $a - \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}$. Si à ces deux dernieres grandeurs on ajoute de part & d'autre $\frac{c}{2}$, on aura [4] $a = \frac{a+b}{2} + \frac{c}{2}$. *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Puisque [5] $a > b$, & que la difference est c: je dis que la grandeur b est égale à $\frac{a+b}{2} - \frac{c}{2}$.

[1] *Ax. 2. d'Algeb.*
[2] *Add. des grandeurs pag. 71. observ. 1.*
[3] *Prop. 6. ou ax. 12. gen.*
[4] *Ax. 4. gen. & ax. 1. d'Algeb.*
[5] *Supposit.*

Car on aura [1] $b+c=a$. Pour avoir une grandeur égale à la ſomme des grandeurs a & b, il faut donc ajouter la grandeur b à $b+c$, & on aura $b+c+b=a+b$, c'eſt à dire que $2b+c=a+b$. Si on diviſe par 2 ces grandeurs $2b+c$, & $a+b$; on trouvera [2] $b+\frac{c}{2}=\frac{a+b}{2}$. Si on retranche de part & d'autre $\frac{c}{2}$; on aura [3] $b=\frac{a+b}{2}-\frac{c}{2}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVII.

Dans ces deux produits ab & cd *au lieu des racines* b & d, *ſi on ſubſtitue d'autres grandeurs* g & h, & *ſi* b.d :: g.h; *on aura deux nouveaux produits* ag & ch *qui ſeront entr'eux, comme* ab *eſt à* cd, *c'eſt à dire que* ab *ſera à* cd *::* ag.ch.

DEMONSTRATION.

Le produit des termes extrêmes $abch$ eſt égal au produit des termes moyens $cdag$. Car en diviſant ces deux produits $abch$ & $cdag$ par ac qui s'y trouve commun; on aura [2] $abch . cdag : bh . dg$. Mais [4], puiſque $b . d :: g . h$, on aura [5] $bh=dg$. Donc pareillement $abch=cdag$. Donc [6] $ab . cd :: ag . ch$, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Ax. 2. d'Algeb.*
[2] *Prop. 6.*
[3] *Ax. 9. Gen.*
[4] *Par ſuppoſit.*
[5] *Prop. 2.*
[6] *Prop. 3.*

PROPOSITION XVIII.

Le rapport du produit de plusieurs antecedents au produit de plusieurs consequents, est composé du rapport du premier antecedent au premier consequent; du rapport du 2^e antecedent au 2^e consequent; du rapport du 3^e antecedent au 3^e consequent, & ainsi de suite.

DEMONSTRATION.

Soit l'antecedent a & le consequent b; soit encore l'antecedent c & le consequent d. Si on multiplie l'antecedent a par l'antecedent c, on aura pour produit ac. Si on multiplie le consequent b par le consequent d, on aura pour produit bd; je dis que le rapport de ac à bd est composé du rapport de a à b, & du rapport de c à d. Pour en faire la démonstration, * il suffit de faire voir que l'exposant du rapport du produit ac à bd est égal au produit des exposants des rapports de a à b & de c à d.

Soit l'exposant du rapport de a à b appellé f, c'est à dire que $\frac{a}{b} = f$; donc $bf = a$.

Soit $\frac{c}{d} = g$; donc $dg = c$. Au lieu des antecedents a & c on aura donc leurs équivalents bf & dg; & au lieu du produit ac des antecedents a & c, on aura son équivalent $bfdg$. Or divisant le produit $bfdg$ des antecedents par bd

* *Def. 17. Algeb.*

$$\begin{array}{ll} a \,.\, b & \\ c \,.\, d & \\ \hline ac \,.\, bd & \\ \hline bf \,.\, b & \\ dg \,.\, d & \\ \hline bfdg \,.\, bd & \end{array} \qquad \frac{a}{b} = f \quad \frac{c}{d} = g$$

Donc $bf = a$ Donc $dg = c$

$$\frac{bfdg}{bd} = fg.$$

produit des conſequents, on aura pour quotient fg qui ſera l'expoſant du rapport de ac à bd; mais fg eſt le produit de l'expoſant du rapport de a à b & de celui de c à d. Donc [1] le rapport du produit des antecedents au produit des conſequents, eſt composé du rapport de chaque antecedent à chaque conſequent, *ce qu'il falloit démontrer.*

S'il y avoit un troiſiême antecedent e & un troiſiéme conſequent h, le rapport du produit ace au produit bdh ſeroit composé du rapport de a à b; du rapport de c à d; du rapport de e à h; & ainſi des autres, s'il y en avoit davantage. La démonſtration en eſt tres-facile, & entierement ſemblable à celle qu'on vient de faire pour ac & bd.

$$\begin{array}{c} a \,.\, b \\ c \,.\, d \\ e \,.\, h \\ \hline ace \,.\, bdh \end{array}$$

COROLLAIRE I.

Les quarrez ſont entr'eux en raiſon doublée de celle de leurs racines. Par exemple cc & dd

[1] *Déf.* 17. *Algeb.*

ſont deux quarrez qui ſont l'un à l'autre en raiſon composée de celle de c à d, & encore de celle de c à d. Or ces deux rapports ſont égaux. Donc le rapport de cc à dd eſt * doublé de celui de c à d. On peut auſſi démontrer facilement par un raiſonnement ſemblable à celui qu'on vient de faire, que les cubes ſont entr'eux en raiſon triplée de celle de leurs racines; par exemple, que le rapport de d^3 à f^3 eſt triplé du rapport de d à f; & ainſi des autres puiſſances.

COROLLAIRE II.

Le produit de deux fractions multipliées l'une par l'autre eſt une 3^e fraction dont le numerateur eſt le produit des numerateurs de ces deux fractions, & dont le dénominateur eſt le produit des numerateurs de ces deux mêmes fractions. Soient les fractions $\frac{b}{c}$ & $\frac{f}{g}$ à multiplier l'une par l'autre : Je dis que leur produit eſt exprimé par $\frac{bf}{cg}$. Car [1] le rapport de bf à cg eſt composé du rapport de b à c, & du rapport de f à g. Le quotient du produit bf diviſé par cg eſt donc [2] égal au produit des quotients de b diviſé par c, & de f diviſée par g.

La methode dont on ſe ſert pour diviſer une fraction par une autre, peut être facilement démontrée. Soit $\frac{c}{d}$ à diviſer par $\frac{b}{f}$: Je dis que

* *Déf.* 18. *Algeb.*
[1] *Prop. preſ.*
[2] *Def.* 17. *Geo.*

le quotient qu'on cherche, eſt exprimé par cette fraction $\frac{cf}{bd}$. Car ſi on reduit [1] ces deux fractions à même dénomination, [2] on aura $\frac{cf}{df} = \frac{c}{d}, \frac{db}{df} = \frac{b}{f}$. Mais [3] $\frac{cf}{df} \cdot \frac{db}{df} :: cf . db$. au lieu des fractions $\frac{cf}{df}$ & $\frac{dh}{df}$ en ſubſtituant leurs égales $\frac{c}{d}$ & $\frac{b}{f}$; on aura $\frac{c}{d} \cdot \frac{b}{f} :: cf . db$. Le quotient de la fraction $\frac{c}{d}$ diviſée par $\frac{b}{f}$ ſera donc [4] égal à $\frac{cf}{db}$.

REMARQUE.

On peut tres-facilement démontrer l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des fractions, en faiſant attention à la methode dont on ſe ſert dans ces operations.

Si on veut ajouter $\frac{g}{h}$ à $\frac{f}{m}$; je dis que $\frac{gm+hf}{hm} = \frac{g}{h} + \frac{f}{m}$. Car le quotient de $\frac{g}{h}$ ſoit appellé x, c'eſt à dire, $\frac{g}{h} = x$; & ſoit

[1] *Pag. 47. Obſervation 2.*
[2] *Cor. 2. prop. 5.*
[3] *Prop. 6.*
[4] *Def. 13. Algeb. & Cor. 2. def. 12.*

$\frac{f}{m}=y$. on [1] aura $g=hx$, & $f=my$. au lieu des fractions $\frac{g}{h}$ & $\frac{f}{m}$ je prendrai donc leurs égales $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, & [2] en les réduisant à même dénomination je trouverai $\frac{hxm}{hm}$ & $\frac{hmy}{hm}$ qui seront égales à $\frac{g}{h}$ & $\frac{f}{m}$. Or en assemblant les numerateurs hxm & hmy & en appliquant à leur somme le dénominateur commun hm, il est évident [3] que $\frac{hxm+hmy}{hm}$ $=x+y$ qui est la somme des quotients de ces deux fractions.

Si on veut soustraire $\frac{f}{m}$ de $\frac{g}{h}$; il est encore évident qu'en soustrayant $\frac{hmy}{hm}=\frac{f}{m}$ de $\frac{hxm}{hm}=\frac{g}{h}$, c'est à dire, en soustrayant le numerateur hmy de hxm, & appliquant le dénominateur commun hm, on aura $\frac{hxm-hmy}{hm}$ $=x-y=\frac{g}{h}-\frac{f}{m}$ [3].

Si on veut multiplier $\frac{g}{h}$ par $\frac{f}{m}$; en mul-

[1] *Cor. 3. Page 42. de la division.*
[2] *Page 47. Observ. 2.*
[3] *Page 81. part. 1. de l'avertiss.*

tipliant

tipliant l'une par l'autre leurs équivalentes $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, c'est à dire, en multipliant le numerateur hx par my, & le dénominateur h par m, on aura $\frac{hxmy}{hm} = xy$ qui est le produit de la fraction $\frac{g}{h}$ multipliée par $\frac{f}{m}$. Puisque [1] $\frac{g}{h} = x$, & que $\frac{f}{m} = y$.

Si on veut diviser $\frac{g}{h}$ par $\frac{f}{m}$; en faisant attention à leurs égales $\frac{hx}{h}$ & $\frac{my}{m}$, on multipliera le numerateur hx par le dénominateur m, & le dénominateur h par my pour avoir $\frac{hxm}{hmy} = \frac{x}{y}$ qui sera le quotient de la fraction $\frac{g}{h}$ divisée par $\frac{f}{m}$.

[1] *Supposit.*

PROPOSITION XIX.

S'il y a une suite de grandeurs : le rapport de la premiere à la derniere sera composé des rapports des grandeurs interposées.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d$; je dis que le rapport de la grandeur a à d est composé du rapport de a à b, de celui de b à c, & du rapport de c à d; pour le démontrer, il suffit [1] de faire voir que l'exposant du rapport de a à d est égal au produit des exposans de ces autres rapports.

$$a. \quad b. \quad c. \quad d.$$

$$\frac{a}{b} = \quad . \quad \frac{b}{c} = x \,.\, \frac{c}{d} = p.$$

$$dpxy = a \,.\, dpx = b \,.\, dp = c.$$

$$\frac{dpxy}{d} = pxy.$$

L'exposant du rapport de c à d soit appellé p, c'est à dire, [2] $\frac{c}{d} = p$. Donc [3] $dp = c$; soit

[1] *Def.* 17. *Algeb.*
[2] *Def.* 12. *Algeb.*
[3] *Cor.* 3. *de la divis. pag.* 42.

encore l'expoſant du rapport de b à c appellé x; c'eſt à dire, $\frac{b}{c} = x$; donc $cx = b$; mais au lieu de c en lui ſubſtituant ce qui lui eſt égal, ſçavoir dp, on aura $dpx = b$. Soit enfin l'expoſant du rapport de a à b appellé y, c'eſt à dire, $\frac{a}{b} = y$. Donc $by = a$; mais au lieu de b en lui ſubſtituant ce qui lui eſt égal, ſçavoir dpx, on aura $dpxy = a$. Or préſentement pour connoître l'expoſant du rapport de la grandeur a à la grandeur d; il faut diviſer a ou ſon égale $dpxy$ par d, on aura pour quotient ou expoſant pxy qui eſt égal au produit des expoſants des rapports de a à b, de b à c, & de c à d multipliez l'un par l'autre. Le rapport de a à d eſt donc [1] compoſé des rapports des grandeurs interpoſées entre a & d, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE

Dans toute progreſſion geometrique, les quarrez de deux termes qui ſont immédiatement de ſuite, ſont entr'eux comme le premier terme au troiſiéme. Soit la progreſſion $\dot{\dot{.}}\, b . d . f . g$; je dis que $bb . dd :: b . f$. Car [2] le rapport de bb à dd eſt doublé du rapport de b à d. Or [3] le rapport de b à f eſt pareillement doublé du rapport de b à d, puiſque le rapport de b à f eſt compoſé de celui de b à d & de celui de d à f qui ſont [4] égaux. Il y a

[1] *Def.* 17. *Algeb.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 18.
[3] *Prop. preſ. & def.* 18. *d'Algeb.*
[4] *Suppoſit. ou def.* 16. *Algeb.*

donc même rapport entre bb & dd qu'entre b & f. Donc $bb . dd :: b . f$. On fera un pareil raisonnement pour démontrer que les cubes de deux termes qui sont immédiatement de suite dans une progression géometrique, sont entr'eux comme le premier terme au quatriéme, c'est à dire, en raison triplée; par exemple que b^3 est à d^3 comme b à g. On connoîtra aussi les rapports des autres puissances, en y faisant l'application du Corollaire present.

PROPOSITION XX.

Le produit de deux grandeurs est une grandeur moyenne proportionnelle entre les quarrez de ces grandeurs.

DEMONSTRATION.

Soient les grandeurs a & b, dont le produit est ab: Je dis que $\div\!\!\div\; aa . ab . bb$. Car le produit des termes extrêmes $aabb$ est égal au produit $abab$ ou [1] $aabb$ des termes moyens. Donc [2] $aa . ab :: ab . bb$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DE LA REGLE DE PROPORTION.

La regle de Proportion est une operation d'Arithmetique fondée sur la principale proprieté des proportions qui est que le produit des termes extrêmes de quatre grandeurs proportionnelles est égal au produit des termes moyens, comme on verra par la suite. Cette operation est aussi

[1] *Demand. 6. Algeb.*
[2] *Prop. 3.*

appellée

appellée *Regle de trois*, parceque trois grandeurs étant connuës, on se sert de cette pratique pour trouver une 4^e proportionnelle. Enfin on l'appelle *Regle d'or*, à cause de ses usages infinis & de son utilité tres-grande dans les Mathematiques.

En general il y a de deux sortes de regles de Proportion, la simple, & la composée ou complexe. La simple est celle qui ne contient que 3 termes connus, & la composée est celle qui en contient plus de 3. Il faut premierement examiner la regle de Proportion simple & la maniere de s'en servir; ensuite on passera à la composée.

La regle de Proportion simple est encore de deux sortes, sçavoir la directe, & l'indirecte.

La regle de Proportion directe est celle dans laquelle le premier terme est au second, comme le 3^e est au 4^e qu'on cherche; ou, ce qui est la même chose, lorsque le rapport du premier terme au 3^e est égal au rapport du second & du 4^e qu'on cherche, c'est à dire, si le 3^e terme est plus grand que le premier, le 4^e terme qu'on cherche doit être dans la même Proportion plus grand que le second; & si le 3^e terme est plus petit que le premier, le 4^e terme qu'on cherche doit être pareillement plus petit à proportion que le second: ou enfin, ce qui revient aux mêmes choses, c'est à dire, lorsque la Proportion va du plus au plus, ou du moins au moins. Par exemple, si 8 aunes de marchandise coûtent 32 liv. il est évident que 72 aunes de la même marchandise doivent coûter davantage, sçavoir 288 liv. qui est le 4^e terme qu'on cherche par cette operation. Si 15 hommes ont gagné par leur travail 48 liv. 5 des mêmes hommes ne gagneront en même-temps que 16 liv. qui eſt encore le 4^e terme qu'on cherchoit, ce qui va du moins au moins ; c'eſt à dire, que moins il y a d'hommes, moins il y a de gain ; & partant ces exemples conviennent à la regle directe.

La regle de Proportion indirecte eſt celle dans laquelle le rapport du premier terme au 3^e eſt égal au rapport du 4^e qu'on cherche, au ſecond ; c'eſt à dire, ſi le premier terme eſt plus grand que le 3^e ; le 4^e terme qu'on cherche ſera à proportion plus grand que le 2^e : ſi le premier eſt plus petit que le 3^e, le 4^e ſera auſſi plus petit que le 2^e. Ce qui eſt la même choſe que de dire ; la regle de proportion eſt indirecte, ſi le 3^e terme étant plus grand que le premier, le 4^e qu'on cherche doit être plus petit que le 2^e ; ou ſi le 3^e terme étant plus petit que le premier, le 4^e qu'on cherche eſt plus grand que le 2^e. Enfin on connoît la regle de Proportion indirecte, & on la diſtingue d'avec la regle directe, lorſque le ſens de la queſtion va du plus au moins ou du moins au plus, ce qu'il eſt important de bien remarquer pour ne s'y point tromper. Par exemple, ſi 15 perſonnes ont dépenſé une certaine ſomme d'argent en 6 mois ; en combien de temps 40 perſonnes dépenſeront-ils une pareille ſomme ? il eſt évident que plus le 3^e terme eſt grand, moins il faudra de temps pour dépenſer la ſomme d'argent dont il s'agit, ce qui va du plus au moins. Si 6 ouvriers font un certain nombre de toiſes de maſſonnerie en 8 jours ; en combien de jours 4 ouvriers feront-ils le même ouvrage ? il eſt encore évident que moins il y aura d'ouvriers, il faudra plus de temps pour faire cet ouvrage ; & partant que le ſens de la queſtion eſt du moins au plus, ce qui fait connoître que ces exemples appartiennent à la regle indirecte.

Lorsqu'on rencontre une question qui appartient à la regle de Proportion simple, soit qu'elle soit directe ou indirecte, afin de sçavoir quel doit être le premier, le 2ᵉ & le 3ᵉ terme, il les faut disposer de telle maniere que le premier & le 3ᵉ soient de même nom, & que le second soit mis au milieu auquel le 4ᵉ qu'on cherche sera semblable.

Exemples de la regle de Proportion directe.

Si 14 personnes dépensent 98 liv. en un certain temps; combien dépensent 20 personnes en autant de temps?

Pour resoudre cette question; il faut examiner si elle appartient à la regle de Proportion directe ou à l'indirecte. Le but de la question fait connoître qu'il s'agit d'une regle de Proportion directe; on arrange les termes de cette maniere.

Si 14 *person. dépen.* 98 *liv. combien* 20 *personnes?*

Il faut observer que dans cet exemple & dans tous les autres semblables, il ne faut que trouver un 4ᵉ terme ou nombre proportionnel aux trois autres qui sont connus. J'appelle z ce 4ᵉ terme qu'on cherche, ainsi l'analogie est telle $14 . 98 :: 20 . z$. Il est seulement question de trouver la valeur de z; & pour y réüssir on multiplie le 3ᵉ qui est 20, par le 2ᵉ qui est 98, on a pour produit $1960 = 14z$ *. Or en divisant ces deux grandeurs égales par 14, qui est la racine qui nous est connuë dans le produit $14z$, on aura d'une part 140, & de l'autre z; & partant

* *Prop.* 2.

[1] on aura $140 = z$, c'est à dire que le 4e terme qu'on cherchoit est 140 ; & partant que $14 . 98 :: 20 . 140$, d'où on concluëra qui si 14 personnes dépensent 98 liv. 20 personnes dépenseront en autant de temps 140 liv. Cette pratique est entierement fondée sur le Coroll. 2e de la Prop 2.

Autre Exemple.

Si 34 aunes de marchandise coûtent 80 liv. 14 s. 6 d. combien couteront à proportion 15 aunes de la même marchandise.

On resoudra cette question comme la precedente en multipliant le 3e terme par le 2e qui est 80 liv. 14 s. 6 d. & on aura pour produit 1210 liv. 17 s. 6 d. on divisera 1210 l. par le premier terme 34, on aura pour quotient de la premiere division 35 liv. reste 20 liv. qu'on reduira en sols en les multipliant par 20, on aura 400 sols, ausquels on ajoutera 17 s. qui se sont trouvez dans le produit 1210 liv. 17 s. 6 d. & on aura 417 s. qu'on divisera encore par 34, on trouvera 12 s. pour quotient de cette 2e division, reste 9 s. qu'on reduira en deniers en les multipliant par 12, on aura 108 d. ausquels on ajoutera 6 d. qui se trouvent separément dans le produit du 3e terme multiplié par le second, & on aura 114 d. on divisera enfin ce nombre 114 par 34, & on trouvera pour quotient 3 d. reste 12 qu'on mettra avec le diviseur 34 en cette forme de fraction $\frac{12}{34}$, & en la reduisant à moindres termes, on aura

[1] *Prop.* 6.

$\frac{6}{17}$ qu'on écrira enſuite des 6 d. d'où on concluëra que ſi 34 aunes de marchandiſe coûtent 80 liv. 14 ſ. 6 d. 15 aunes de pareille marchandiſe couteront au même prix 35 liv. 12 ſ. 3 d. & $\frac{6}{17}$ de denier.

Si on veut ſçavoir combien coute chaque pinte de vin lorſque le muid coute 60 liv. & contient 230 pintes ; on diſpoſe les termes de la queſtion de cette ſorte.

Si 230 pintes coutent 60 liv. combien 1 pinte? & ſuivant la methode qu'on vient d'enſeigner, on trouvera que la valeur de chaque pinte eſt 5 ſ. 2 d. $\frac{14}{23}$.

De même ſi 128 aunes de marchandiſe coutoient 300 livres, on trouveroit la valeur de chaque aune.

Autre Exemple.

S'il ſe rencontroit une queſtion propoſée de cette maniere. Si 25 l. peſant ont couté 18 l. combien de l. peſant couteront 60 l. En faiſant reflexion ſur l'arrangement de 25, 18 & 60, il eſt évident que c'eſt un 3e terme qu'on cherche, qu'il eſt facile de trouver en multipliant le premier 25 & le dernier 60 l'un par l'autre ; & diviſant leur produit 1500 par le 2e terme qui eſt connu, on a au quotient de cette diviſion 83 livres peſant, & $\frac{1}{3}$ pour 3e terme ; d'où on conclud que ſi 25 livres pesant coutent 18 livres, il faudra au même prix 83 livres pesant, & $\frac{1}{3}$ pour avoir de la marchandise suffisamment pour 60 liv. Cette pratique est encore fondée sur les Cor. 2 & 4 de la Prop. 2. On pourroit aussi [1] arranger les termes de cette question de cette sorte ; 18 *livres pesant* . 25 *livres* :: 60 *livres pesant* . *z*. Et alors on trouveroit le 4e terme comme dans les exemples precedents.

S'il se rencontre une question pareille à celle-ci ; 3 liv. de canelle coutent 15 liv. 12 f. combien coûteront 8 livres 5 onces ? Il faut reduire le premier terme 3 livres en onces, & le 3e 8 livres pareillement en onces, & y ajouter les 5 onces qui en dépendent, afin que ces termes soient de même espece ; & on change la question en celle-ci qui lui est équivalente : si 48 onces de canelle coutent 15 liv. 12 f. combien 133 onces ? & on achevera l'operation comme on a enseigné.

Exemples de la regle de Proportion indirecte.

Supposons qu'il y ait dans une Ville 1800 hommes en garnison, & que le Gouverneur ait entre les mains une certaine somme d'argent, dont il a ordre de donner 23 f. par jour à chacun jusqu'à un certain temps ; le nombre des soldats a été augmenté jusqu'à 2500, on demande combien le Gouverneur doit donner à chacun, afin que la somme qu'il a entre les mains suffise jusqu'au temps limité ? Il est évident que le nombre

[1] *Cor. Prop.* 3. *art.* 1.

des ſoldats étant augmenté, il doit donner moins à chacun. On diſpoſe les termes de cette ſorte.

Si 1800 hommes reçoivent chacun 23 ſols, combien 2500 hommes recevront-ils chacun ?

Pour reſoudre cette queſtion & toutes les autres ſemblables ou de même genre, on multiplie le premier terme 1800 par le ſecond, & on diviſe le produit 41400 ſ. par le 3e terme 2500, on trouve 16 ſ. 6 d. & $\frac{1800}{2500} = \frac{18}{25}$ pour le 4e terme cherché ; c'eſt à dire que le Gouverneur doit donner à chaque ſoldat 16 ſ. 6 d. $\frac{18}{25}$ pour ſatisfaire à la queſtion.

Pour connoître la certitude de cette pratique tant pour la queſtion propoſée que pour les autres ſemblables, il faut conſiderer cette regle indirecte comme reduite à une directe ; c'eſt à dire, que puiſque la queſtion eſt telle que le premier terme eſt au 3e, comme le 4e qu'on cherche eſt au ſecond ; j'appelle z ce 4e terme qu'on cherche, & j'arrange tous les termes de cette ſorte en Proportion directe.

1800 *hommes* . 2500 *hommes* :: z . 23 ſ.

De ſorte que dans la diſpoſition precedente lorſqu'on a multiplié le premier terme par le ſecond, & qu'on a diviſé le produit de cette multiplication par le 3e, c'eſt la même choſe que ſi dans cette derniere diſpoſition des termes, on multiplioit le premier terme par le dernier, & qu'on diviſât le produit par le 2e terme : ce qui montre que les Corollaires 2 & 4 de la Prop. 2 ſont le fondement de cette pratique, & que dans le temps qu'on multiplie le premier terme par le ſecond, & qu'on diviſe le produit par le troiſiéme, cela ſuppoſe tacitement qu'on a fait dans la queſtion propoſée une reduction de la regle de Proportion indirecte à une directe. On peut donc facilement remarquer que ſi la regle eſt directe, on connoît le produit des deux termes moyens, & un des extrêmes; & ſi la regle eſt indirecte, on connoît le produit des extrêmes, & ſeulement un des termes moyens.

AUTRE EXEMPLE.

Suppoſons qu'il y ait dans une Place aſſiegée 4000 ſoldats pour ſa défenſe, & qu'il n'y ait des vivres que pour 8 mois; que le Gouverneur ait été averti qu'on ne peut lui donner du ſecours pour faire lever le ſiege que dans 10 mois, on demande quel nombre de ſoldats il doit mettre hors de la place, afin de ſoûtenir le ſiege pendant ces 10 mois ſans rien diminuer de ce qu'on donnoit chaque jour à chaque ſoldat. Le but de la queſtion fait connoître que plus il y aura de temps, moins il faudra de ſoldats pour pouvoir continuer de la même maniere l'uſage des proviſions; c'eſt pour cela qu'on arrangera les termes de cette ſorte.

Si 8 mois ſuffiſent à 4000 ſoldats, à combien ſuffiront 10 mois?

On trouvera en operant comme dans l'exemple precedent, que le Gouverneur doit ſeulement conſerver 3200 ſoldats, & renvoyer les autres 800 ſoldats.

AUTRES EXEMPLES.

Un homme n'ayant qu'une certaine ſomme

d'argent à dépenſer pour donner du pain aux pauvres, veut ſçavoir combien il aura de pain pour la même ſomme, lorſque le bled deviendra plus ou moins cher ; par exemple, lorſque la meſure du bled valoit 18 liv. pour une certaine ſomme d'argent il avoit 8 onces de pain ; combien d'onces en aura t-il pour la même ſomme, lorſque la même meſure de bled ne vaudra que 12 liv. On arrangera les termes de la queſtion de cette ſorte.

Si 18 livres donnent 8 onces, combien 12 livres?

On connoît facilement par la ſeule expoſition de la queſtion, que cette meſure de bled valant moins, on aura davantage de pain pour la même ſomme d'argent; & on trouvera après l'operation qu'on en aura 12 onces.

Dans une armée il faut chaque jour 36 muids de vin, dont chacun contient 330 pintes ; on demande combien il faudra de muids lorſque chacun ne contiendra que 225 pintes ? On fait reflexion que moins chaque muid contiendra de pintes, plus il faudra de muids. On arrange les termes de la queſtion de cette ſorte 330. 36 & 225, & on trouve par la ſupputation, comme on a enſeigné, qu'il faudra par jour 52 muids & $\frac{4}{5}$ de muid.

Une perſonne ſe propoſe de faire faire un manteau de 5 aunes d'une étofe dont la largeur eſt de $\frac{3}{4}$ d'aune ; on demande combien il faudra d'aunes pour le doubler avec une étofe d'une demie aune de largeur ? On fait reflexion que moins cette étofe aura de largeur, plus il en faudra d'aunes en longueur pour la doublure; parcequ'il faut que la doublure ait autant d'étenduë que le reste de l'habit, on arrangera les termes de cette maniere, $\frac{3}{4}$ de largeur ; 5 aunes de longueur ; $\frac{1}{2}$ de largeur, & on trouve par la supputation qu'il faudra 7 aunes & $\frac{1}{2}$ de doublure.

La regle de Proportion composée est de deux sortes, la directe & l'indirecte.

La regle de Proportion composée directe est celle qu'on reduit à une regle de Proportion simple directe, & la composée indirecte est celle qu'on reduit à une regle simple indirecte.

Exemples de la regle de Proportion composée.

Si 6 hommes gagnent en 8 jours 76 livres ; combien gagneront 4 hommes en 15 jours.

Pour resoudre cette question, il faut la reduire à une regle de Proportion simple ; & afin d'y réüssir, il faut observer que dans ces sortes de questions il y a toûjours trois choses principales & connuës, les autres étant seulement accessoires & comme appartenantes à ces trois choses.

Ceux qui se souviennent des principes de la Grammaire, en peuvent faire ici usage pour distinguer facilement ces choses principales ou principaux termes ; parceque le premier est toûjours nominatif du verbe qui est en usage dans la question ; le second de ces principaux termes est regime de ce verbe ; & le 3^e de ces principaux termes est encore un nominatif de ce même verbe.

Dans la question presente, les hommes & les

76 livres ſont les principales choſes. Pour faire une reduction de cette queſtion à une queſtion de regle de Proportion ſimple, il faut conſiderer que ſi 6 hommes gagnent en 8 jours 76 livres, c'eſt la même choſe que ſi un homme gagnoit les mêmes 76 livres en 48 jours ; puiſque ſuivant cette queſtion on ſuppoſe que chacun des 6 hommes travaille pendant 8 jours pour gagner les 76 liv. ce qui eſt équivalent au travail d'un ſeul homme pendant 6 fois 8 jours. De même l'autre partie de la queſtion, où on demande combien gagneront 4 hommes en 15 jours, eſt la même choſe que ſi on demandoit combien doit gagner un travail de 60 jours ; parceque dans cette partie on ſuppoſe que chacun des 4 hommes travaille 15 jours ; par ce moyen on reduira la queſtion precedente à celle-ci :

Si 48 jours de travail donnent 76 livres, combien 60 jours de travail ?

On peut encore regarder cette reduction d'une autre maniere ſans en changer la valeur des termes ; ſi 48 hommes gagnent 76 livres, combien 60 hommes ? Car lorſque 6 hommes travaillent pendant 8 jours, c'eſt le travail de 6 hommes repeté 8 fois, ce qui eſt équivalent au travail de 48 hommes pendant un jour. De même dans la derniere partie de la queſtion, on cherche à proportion le prix du travail de 4 hommes repeté 15 fois pendant les 15 jours, ce qui eſt équivalent au travail de 60 hommes pendant un jour ; & en operant comme on a enſeigné dans la regle de Proportion ſimple, on trouvera que 4 hommes pendant 15 jours gagneront 95 livres à proportion de ce que 6 hommes ont gagné 76 livres en 8 jours.

Il ſuffit d'avoir bien entendu ces choſes pour pouvoir enſuite facilement reduire toutes les queſtions ſemblables ou de même eſpece que la precedente, à des regles de Proportion ſimples, ſuivant cette methode generale qui eſt de multiplier entr'eux tous les termes qui dépendent l'un de l'autre, c'eſt à dire, qui conviennent l'un à l'autre. Après cela le ſeul diſcernement fera connoître l'arrangement qu'il faudra donner à ces termes.

On multiplie pluſieurs grandeurs entr'elles, lorſqu'on en multiplie deux l'une par l'autre, & qu'on multiplie encore leur produit par une 3^e^; *& ainſi de ſuite.*

Autre Exemple.

Si 12 maſſons ont fait pendant 5 jours 20 toiſes d'ouvrage, combien 8 maſſons en feront-ils pendant 3 jours.

On reduira cette queſtion à cette regle de Proportion ſimple.

Si 60 *maſſons font* 20 *toiſes*, *combien* 24 *maſſons?* Et on trouvera pour 4^{e} terme cherché 8 toiſes.

Autre Exemple.

On pouvoit propoſer la queſtion de l'exemple precedent de cette maniere :

Si 12 maſſons pendant 5 jours ont fait 20 toiſes d'ouvrage: en combien de jours 8 maſſons feront-ils 8 toiſes, à proportion.

Il faut reduire cette queſtion à une regle de Proportion ſimple, comme les precedentes. Pour cela je nomme z le nombre des jours que je cherche, & je trouverai.

60 *maßons* . 20 *toiſes* :: 8 z *maſſons* . 8 *toiſes*.

On ſçait que c'eſt un des termes moyens de la Proportion,

Proportion, sçavoir le second antecedent 8 z qui est inconnu. On le trouve * en multipliant le premier 60 par le dernier 8, & en divisant le produit 480 par le terme moyen connu 20, & on a au quotient de cette division 24 pour le 3e terme de la Proportion ; mais par la maniere de reduire ces questions à des regles simples, qu'on vient d'enseigner, on connoît que ce 3e terme 24 est un produit dont le nombre 8 qui se trouve dans cette derniere question est une des racines ; en divisant 24 par 8, le quotient de cette division fait connoître l'autre racine $3 = z$, ce qui fait qu'on rétablit la question de cette maniere.

Si 12 massons pendant 5 jours ont fait 20 toises : 8 massons *en 3 jours* feront les 8 toises proposées.

On pouvoit encore dire [1] que le produit des extrêmes $480 = 160\,z$ qui est le produit des termes moyens, & que divisant l'un & l'autre de ces termes par 160, on trouvera [2] $3 = z$ pour quotient, & partant 3 est le nombre des jours qu'on cherchoit.

Autre Exemple.

Si 38 ouvriers font un fossé de 72 toises en 8 jours, on demande en combien de jours 60 ouvriers en feront 50 toises ? Auparavant que de reduire cette question à une question simple, on mettra les termes dans cet ordre,

38 *ouvriers* . 8 *jours* . 72 *toises* :: 60 *ouvriers*, *z jours* . 50 *toises*.

On reduira cette question à une regle de proportion simple qui sera telle.

* *Cor.* 2. & 4. *Prop.* 2. [1] *Prop.* 2.
[2] *Prop.* 6.

304 *ouvriers* . 72 *toises* :: 60 z *ouvriers* . 50 *toises*.

On voit clairement, comme dans l'exemple precedent, que c'est un des termes moyens, sçavoir la valeur du 2ᵉ antecedent qu'on cherche. On a mis 304 ouvriers pour le premier terme, parceque le travail de ces 38 ouvriers est repeté successivement autant de fois qu'il y a de jours, ce qui est la même chose que s'il avoit fallu à chaque jour employer 38 ouvriers nouveaux, ce qui fait que cet ouvrage de 72 toises peut être consideré comme l'ouvrage de 304 ouvriers. De même on peut considerer le 3ᵉ terme comme un ouvrage de 60 z ouvriers, en prenant z pour le nombre des jours. On resoudra cette question comme la precedente, & on trouvera pour la valeur de z qui est le nombre des jours, 3 jours & $\frac{14}{27}$.

Autre Exemple.

Si 2 ouvriers qui ont fait chacun 5 aunes d'étofe par jour, ont gagné 350 liv. en 18 jours; combien auront gagné 16 ouvriers qui auront fait chacun 4 aunes par jour pendant 30 jours?

L'état de cette question fait connoître que les 5 aunes d'étofe & les 18 jours appartiennent aux 2 ouvriers, & partant qu'on peut multiplier le nombre de ces deux ouvriers par 18, & le produit 36 par les 5 aunes pour avoir 180 qui sera le premier terme d'une regle de Proportion simple à laquelle sera reduite la question; parceque si 2 ouvriers ont travaillé pendant 18 jours, c'est la même chose que si 36 ouvriers avoient travaillé pendant un jour; puisque c'est le travail de deux ouvriers repeté 18 fois. Or puiſque par la ſuppoſition chacun faiſoit 5 aunes d'étofe, le travail de tous ces ouvriers ſeroit 180 aunes d'étofe qui avoient produit 350 liv. de gain. De la même maniere qu'on vient de trouver le premier terme, on trouvera le 3[e] de la regle de Proportion ſimple qu'on vient de former ; car le travail de 16 ouvriers pendant 30 jours eſt le même que le travail de 480 ouvriers pendant un jour. Or puiſque par la ſuppoſition chacun fait 4 aunes d'étofe, le travail ſera 1920 aunes : de ſorte qu'on aura la queſtion propoſée reduite à cette regle de Proportion ſimple.

Si 180 *aunes donnent* 350 *liv. combien* 1920 *aunes?*

On trouvera pour 4[e] terme 3733 liv. 6 ſ. 8 d.

Autre Exemple.

Si 14 livres peſant apportées de 30 lieuës en 12 jours coutent pour le port 23 liv. combien coutera le port de 6 liv. pour 18 lieuës en 3 jours.

On reduira cette queſtion à une regle de Proportion ſimple, comme on a enſeigné dans l'exemple precedent.

Si 5040 *coutent* 23 *liv. combien* 324 ?

Pour bien entendre cela, il faut conſiderer que ſi on tranſporte 14 livres peſant pendant 12 jours, c'eſt repeter 14 livres peſant 12 fois, ce qui eſt équivalent à 168 livres peſant portées pendant un jour ; Chaque nombre de 14 livres peſant étant conſideré comme porté pendant un jour ; ainſi il eſt facile de connoître qu'on peut regarder le total qui eſt 168, comme tranſporté pendant un jour. Or (1) ces 168 liv. peſant ont

(1) *Par ſuppoſit.*

été portées pendant 30 lieuës, chacune de ces livres a donc été portée 30 lieuës; & partant c'est la même chose que si une livre pesant avoit été portée pendant 5040 lieuës; puisque c'est la même chose que si on consideroit une de ces 168 livres pesant repetée 168 fois à chacune des 30 lieuës. Or 30 fois 168 produit 5040 lieuës parcouruës par cette livre pesant. On fera le même raisonnement pour le 3e terme 324 de la regle simple; & on trouvera pour réponse à la question que le port des 6 livres pesant pour 18 lieuës en 3 jours, coutera 1 liv. 9 sols 6 d. & $\frac{4320}{5040}$ de deniers $= \frac{6}{7}$.

AUTRE EXEMPLE.

Supposons qu'il y ait dans une Ville assiegée 2500 soldats, & que pendant 4 mois chacun reçoive par jour 16 onces de pain; s'il ne reste ensuite dans cette place que 1800 soldats pendant 3 mois, on demande combien chacun recevra par jour seulement, afin que ces provisions puissent suffire pendant ce temps.

Il faut reduire cette question à une regle de Proportion simple, en multipliant le nombre 2500 par 4 mois, & le produit qui est 10000 sera le premier terme de la regle simple, & 16 onces de pain sera le second, & en multipliant 1800 soldats par 3 mois, on aura 5400 pour produit, qui sera le 3e terme de cette regle de Proportion simple.

Pour rendre raison du premier terme 10000, il faut observer, comme dans les exemples precedents, que 2500 soldats pendant 4 mois est la même chose que 10000 soldats pendant 1 mois ; puisque ce n'est autre chose que 2500 repeté une fois chaque mois, c'est à dire, 4 fois pendant les 4 mois. On dira la même chose pour le 3^e terme 5400 soldats ; & on fera cet arrangement.

Si 10000 soldats reçoivent 16 onces, combien 5400?

Il est facile de remarquer que moins il y aura de soldats, plus ils recevront chaque jour, & partant que cette regle simple est indirecte. En faisant le calcul, par la regle simple indirecte, comme on a enseigné, on trouvera que chacun des 18000 recevra 29 onces & $\frac{17}{27}$ d'once ; mais puisque la livre vaut 16 onces, cela est équivalent à 1 livre & $\frac{1}{2}$, 4 onces & $\frac{17}{27}$.

On fait la preuve d'une regle de Proportion par une autre regle de Proportion, dans laquelle on met pour un des termes connus celui qu'on a trouvé par la premiere regle, & on suppose pour inconnu un des termes connus de cette premiere regle ; par exemple, si 15 livres de marchandise coûtent 18 francs, combien 10 livres de la même marchandise ? On trouve pour 4^e terme 12 francs, qui est la somme qu'on vouloit connoître. Pour preuve que cette operation est exacte, on dit, si 10 livres de marchandise coutent 12 francs, comme on vient de trouver, combien 15 livres de la même marchandise ? Si on a réüssi dans la premiere question, on trouvera dans cette seconde pour 4^e terme le second de la premiere question qui étoit connu. On fera de même pour les autres regles de Proportion simples ou composées ;

par exemple, si une personne pendant 5 mois s'est servi de 800 livres appartenantes à un autre, on demande quelle somme ce premier doit prêter à cet autre pour 3 mois, afin d'égaler la recompense; comme il se propose de lui prêter pour moins de temps, il faut qu'il lui prête une plus grande somme, & partant c'est une regle inverse, on trouve par le calcul que ce second doit prêter au premier 1333 livres $\frac{1}{3}$. Pour preuve de cela on fait cette autre question: si 3 mois donnent 1333 livres $\frac{1}{3}$, combien 5 mois? Et on trouve par la regle inverse les 800 livres de la question precedente, ce qui fait voir qu'on a bien réüssi.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

La regle de Compagnie ou de societé est une operation par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnez.

Il y a deux sortes de regle de Compagnie, sçavoir la simple & la composée. La regle de Compagnie simple est celle où on n'a point égard au temps, & la composée est celle où on a égard à divers temps.

Exemples de la regle de Compagnie simple.

Trois personnes ont fait une bourse commune pour acheter ou faire faire des marchandises; le premier a mis 420 livres, le second 230 livres,

& le troisiéme 70 livres ; & aprés leurs negotiations, ils ont gagné tous ensemble 300 livres. Ils demandent à partager ce profit entr'eux à proportion de l'argent que chacun a mis.

gain 300 livres.	4 2 0 *liv. mise du premier.*	
	2 3 0 *liv. mise du second.*	
	7 0 *liv. mise du troisiéme.*	
total des mises	7 2 0 *livres.*	

Pour resoudre cette question & toutes les autres semblables, il faut faire autant de regles de Proportion qu'il y a de mises; & mettre pour premier terme la somme de toutes les mises, & pour 2^{e} terme on mettra le gain ou profit, & pour chaque 3^{e} terme, on mettra la somme que chaque personne a payée.

Dans la question presente, pour trouver le gain de la premiere personne qui a mis 420 liv. on dira :

Si 720 liv. qui sont la mise totale, ont donné 300 livres de gain; combien donneront 420 livres qui sont la mise du premier?

Par le moyen de cette regle de Proportion, on trouvera 175 livres pour 4^{e} terme, comme on a enseigné.

Pour trouver ce qui appartient à la seconde personne qui a mis 230 liv. on dira :

Si 720 liv. donnent 300 livres, combien 230 livres?

On trouvera par cette regle de Proportion, qu'il appartient 95 liv. 16 s. 8 d. à celui qui a mis 230 livres.

Pour trouver ce qui appartient à la troisiéme personne qui a mis 70 livres, on dira :

Si 720 liv. donnent 300 livres, combien 70 livres?

On trouvera que celui qui a contribué de la somme de 70 livres, doit recevoir 29 livres 3 s. 4 d. du profit. Au lieu de 3 personnes, s'il y en avoit 4, 5, 6, &c. on suivroit toûjours la même methode.

Pour preuve de la justesse de cette operation, on ajoutera ensemble ce qui revient à chacun du gain, & si le total qui en resultera est précisément égal au gain, l'operation est tres-bien faite; s'il arrivoit autrement il y auroit erreur, & il faudroit la recommencer. Dans l'exemple qu'on vient de proposer, on trouvera que 175 liv. 95 liv. 16 s. 8 d. & 29 liv. 3 s. 4 d. font 300 liv. ce qui montre qu'on a bien réüssi.

On pouvoit encore resoudre cette question d'une autre maniere, en cherchant combien chacune des 700 livres qui sont le total des mises, doit emporter des 300 livres de profit, par cette regle de proportion :

Si 720 liv. donnent 300 livres, combien 1 livre?

Lorsque par cette operation on a connu ce qu'une livre des 700 liv. emporte de profit, qui est 8 s. 4 d. on multiplie ensuite les 420 l. que le premier a payées par 8 s. 4 d, & on trouve au produit 175 livres, qui est le même nombre qu'on a trouvé par l'autre methode qu'on vient d'enseigner; on multiplie aussi 230 livres par 8 s. 4 d. & 70 liv. par 8 s. 4 d, & on trouve au produit de ces multiplications ce qu'on cherche. Au lieu des 300 liv. de profit, si c'étoit 300 liv. de perte, on partageroit à ces 3 personnes cette perte de la même maniere à proportion de l'argent que chacun à mis, c'est à dire, que celui qui a mis davantage perdroit davantage ; & ainſi des autres.

AUTRE EXEMPLE.

Un homme cede à ſes creanciers ſon bien qui eſt 2500 livres ; au premier de ces creanciers il doit 1260 livres , au ſecond 272 , au troiſiéme 848 , & au quatriéme 620 livres ; mais comme le bien de ce debiteur n'eſt point ſuffiſant pour ſatisfaire entierement ces creanciers , il eſt queſtion de leur en faire une repartition à proportion de ce qui leur eſt dû.

$$\textit{bien à partager 2500 livres.}\quad \left\{\begin{array}{r} 1260 \textit{ livres.} \\ 272 \\ 848 \\ 620 \end{array}\right.$$

total des dettes 3000 *livres.*

On fera ces ſupputations comme on a enſeigné dans l'exemple precedent , & on trouvera que le premier à qui il eſt dû 1260 livres , doit recevoir 1050 livres des 2500 liv. le ſecond à qui il eſt dû 272 livres , recevra 226 livres 13 ſols 4 d. le troiſiéme à qui il eſt dû 848 livres , recevra 706 livres 13 ſ. 4 d. & le quatriéme à qui il eſt dû 620 liv. recevra 516 liv. 13 ſ. 4 d.

Il faut remarquer que s'il ſe rencontre outre les livres, des ſols & des deniers dans les miſes de chaque perſonne , ou dans le gain ou perte commune , avant que de mettre en uſage les regles de trois , il faut reduire toutes les ſommes aux moindres eſpeces de monnoye ; par exemple en deniers s'il s'y rencontre des deniers, ou en ſols ſi outre les livres il ne s'y rencontre que des ſols ; ou bien on ne reduira en ſols ou en deniers que le premier & le 3ᵉ terme de chaque regle de trois ; & enfin on achevera comme on vient d'enſeigner. Pour entendre cela plus facilement, il faut faire attention à l'exemple ſuivant.

Trois perſonnes ont 250 l. 15 ſ. à payer, de ſorte que chacun contribuëra à ce payement à proportion de ſon bien. Le premier à 300 l. 12 ſ. de revenu ; le 2ᵉ à 230 l. 7 ſ. & le 3ᵉ à 50 l. 18 ſ. On demande combien chacun payera de la ſomme propoſée.

		300 *liv.* 12 *ſ.* = 6012 *ſ.*
250 *l.* 15 *ſ.* = 5015 *ſ.*	{	230 *liv.* 7 *ſ.* = 4607 *ſ.*
		50 *liv.* 18 *ſ.* = 1018 *ſ.*
		581 *liv.* 17 *ſ.* = 11637 *ſ.*

Il faut reduire en ſols le total du bien de ces trois perſonnes, & on trouvera 11637 ſ. Il faut auſſi reduire en ſols 300 l. qui ſont le bien du premier, on y ajoutera les 12 ſ. & on trouvera 6012 ſ. Il faut faire la même choſe à l'égard des deux autres ; Enſuite il faut faire une regle de Proportion, & au lieu de 581 l. 17 ſ. qu'on mettroit pour le premier terme, on y mettra ſa valeur en ſols, ce qui eſt équivalent. 250 l. 15 ſ. ſeront le 2ᵉ terme, & le 3ᵉ ſera 6012 ſ. qui ſont la valeur de 300 l. 12 ſ. & on dira :

Si 11637 *ſ. donnent* 250 *l.* 15 *ſ. combien* 6012 *ſols ?*

Après avoir cherché combien produiſent 6012 fois 250 l. 15 ſ. on trouve 1507509 l. & après les avoir diviſées par 11637 on trouve pour quotient

129 l. 10 ſ. 10 d. $\frac{7830}{11637}$ que doit payer le premier de ces trois perſonnes qui a 300 l. 12 ſ. de revenu.

On auroit trouvé la même choſe ſi on avoit auſſi reduit en ſols les 250 l. 15 ſ. & ſi on avoit formé cette regle de Proportion.

Si 11637 ſ. donnent 5015 ſ. combien 6012 ſols ?

Et après avoir multiplié le 3^e terme par le 2^e on auroit trouvé 30150180 ſols ; & après les avoir diviſez par 11637, on auroit trouvé pour quotient 2590 ſ. 10 d. $\frac{7830}{11637} = 129$ l. 10 ſ. 10 d. $\frac{7830}{11637}$, comme on avoit déja trouvé.

En continuant l'operation, on trouvera que la 2^e perſonne qui a 230 l. 7 ſ. de revenu, payera 99 l. 5 ſ. 4 d. $\frac{9372}{11637}$, & que le 3^e payera 21 l. 18 ſ. 8 d. $\frac{6072}{11637}$

Exemple de la regle de Compagnie composée.

Trois perſonnes ſe ſont aſſociez & ont pris reſolution de negotier : le premier a employé 1200 livres, & après que 4 mois ont été finis il a retiré ſon argent ; le ſecond a employé 950 livres pour 6 mois ; & le troiſiéme a employé 600 livres pour 10 mois ; ils ont gagné 1400 liv. On demande combien il en doit appartenir à chacun à proportion de l'argent qu'il a employé, & du temps qu'il l'a laiſſé en commerce.

Pour reſoudre cette queſtion, il faut multiplier la miſe du premier par le temps qu'à ſervi ſon

gain 1400 *liv.*	1200 *liv.*	*pour* 4 *mois*	4800 *l.*
	950	*pour* 6 *mois*	5700
	600	*pour* 10 *mois*	6000
			16500 *l.*

argent, & on aura 4800 livres; il faut multiplier la miſe du 2^{e} par ſon temps, le produit eſt 5700 livres; enfin la miſe du 3^{e} par le ſien, cela fait 6000 livres: de ſorte qu'on conſiderera ces 3 ſommes 4800 liv. 5700 liv. & 6000 liv. comme fournies par ces trois perſonnes, & que leur ſomme totale qui eſt 16500 liv. a produit le gain des 1400 liv. ce qui ſe reduit à une regle de Compagnie ſimple, dans laquelle on operera, comme on a enſeigné dans le premier des exemples precedents.

AVERTISSEMENT.

Il y a pluſieurs autres queſtions qu'on trouve dans les traitez particuliers d'Arithmetique faits par differens Auteurs; mais parcequ'on peut reſoudre facilement ces queſtions par les principes qu'on vient d'établir, je n'ai pas cru qu'il fût neceſſaire de s'y arrêter plus long-temps. Les regles qu'ils appellent d'Alliage & de fauſſes poſitions, même pluſieurs queſtions où on employe ordinairement un calcul d'Arithmetique aſſez laborieux, ſont pratiquées & reſoluës beaucoup plus facilement & plus clairement par les équations qui meritent aſſez qu'on en faſſe un traité particulier. Ainſi de peur d'être ennuyeux à ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques, je finirai ici cette ſeconde Partie.

ELEMENS

ELEMENS DES MATHEMATIQUES,

TROISIÉME PARTIE.

DE LA GEOMETRIE.

DEFINITIONS DE GEOMETRIE.

I. LA Geometrie est une partie fondamentale des Mathematiques, dans laquelle on traite des lignes, des surfaces, & des solides.

Cette 3ᵉ partie sera partagée en trois Chapitres. Dans le premier on traitera des lignes ; dans le second, des surfaces ; & dans le 3ᵉ, des solides, après avoir exposé les definitions qui leur conviennent, & qui sont necessaires pour l'intelligence de leurs proprietez.

2. Un point Mathematique eſt ce qu'on conſidere comme n'ayant aucune partie ; c'eſt à dire, ſans y faire attention à aucune longueur, largeur, ni profondeur.

3. Une ligne eſt une grandeur conſiderée comme étenduë en longueur ſans largeur & ſans profondeur ; par exemple la diſtance de Paris à Caën.

COROLLAIRE I.

Si on conſidere qu'un point puiſſe être tranſporté d'une ſtation à une autre, la trace ou le veſtige par où ce point auroit paſſé ſera une ligne, puiſque ce ſera une longueur ſans largeur & ſans profondeur.

COROLLAIRE II.

Donc les deux extrêmitez, c'eſt à dire, le commencement & la fin d'une ligne ſont deux points ; puiſque c'eſt le point qui commence à être mû, qui en fait le commencement, & que c'eſt ce même point qui ceſſe d'être mû qui en fait la fin.

COROLLAIRE III.

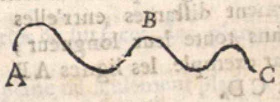
Donc lorſque deux lignes ſe coupent, leur commune ſection eſt un point. Soient les deux lignes AB & CD qui ſe coupent en E, je dis que leur commune ſection eſt un point : car ſi elle étoit deux, ou pluſieurs points, il faudroit que la ligne

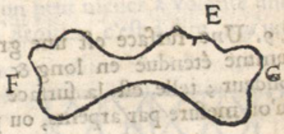
AB, ou CD eût de la largeur, ce qui eſt contre la definition preſente.

Il y a des lignes de deux ſortes, de droites, & de courbes.

4. Une ligne droite eſt celle qui eſt la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener d'un point à un autre point; par exemple AB.

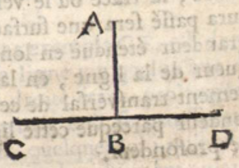
5. Une ligne courbe eſt celle qui étant menée d'un point à un autre point, n'eſt pas la plus courte de celles qui puiſſent être terminées par ces deux points, ou laquelle étant menée d'un point revient au même point; par exemple la ligne ABC ou EFG.





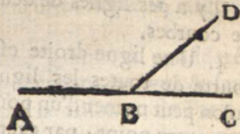
Les lignes droites conſiderées à l'égard l'une de l'autre ſont de trois ſortes, perpendiculaires, obliques, & paralleles.

6. Une ligne perpendiculaire à une autre ligne droite eſt celle qui rencontre cette autre ligne, & qui ne penche ou n'incline d'une part ni d'autre; par exemple la ligne AB eſt perpendiculaire à la ligne droite CD, ſi cette ligne AB ne penche ou n'incline de part ni d'autre.

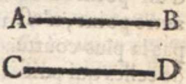


7. Une ligne droite oblique à une autre ligne

droite, est celle qui rencontrant cette autre ligne, penche ou incline plus d'un côté que d'un autre ; par exemple la ligne B D, qui rencontre la ligne A C & qui incline plus vers le point C que vers A, est oblique à la ligne A C.



8. Les lignes paralleles sont celles qui sont également distantes entr'elles dans toute leur longueur ; par exemple les lignes A B & C D.



9. Une surface est une grandeur considerée comme étenduë en long & en large sans profondeur ; telle est la surface d'une Campagne qu'on mesure par arpents, ou par toises, &c.

COROLLAIRE I.

Si on considere qu'une ligne puisse être transportée de travers ou transversalement d'une station à une autre station, ou qu'une ligne courbe fasse une revolution au tour de ses deux extrêmitez, la trace ou le vestige par où cette ligne aura passé sera une surface ; puisque ce sera une grandeur étenduë en longueur à cause de la longueur de la ligne, en largeur à cause du mouvement transversal de cette ligne, & sans profondeur parceque cette ligne mûë n'a [1] aucune profondeur.

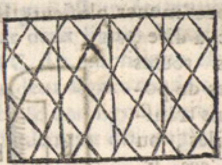
[1] *Déf. 2. Geo.*

COROLLAIRE II.

Donc les deux extrêmitez, c'eſt à dire le commencement & la fin d'une ſurface ſont deux lignes, puiſque c'eſt la même ligne qui commence à être mûë, qui en fait le commencement; que c'eſt cette même ligne qui ceſſe d'être mûë en fait la fin, & que les points qui terminent cette ligne miſe en mouvement, d'écrivent [1] chacun une ligne.

Il y a de deux ſortes de ſurfaces, des planes & des courbes.

10. Une ſurface plane ou ſeulement plan, eſt celle dans laquelle on peut mener à volonté une, ou pluſieurs lignes droites; c'eſt à dire, qu'une ligne droite touche dans tous ſes points dans quelque ſituation tranſverſale ou de travers qu'on la puiſſe appliquer ſur cette ſurface. Telle peut être la ſurface AB.

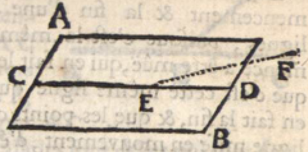


COROLLAIRE.

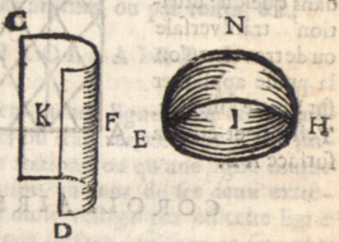
Si une ligne droite, par exemple CE, eſt dans un plan AB, ou ſi cette ligne y a quelqu'une de ſes parties, cette ligne droite étant prolongée, par exemple en D, la partie ED ſera auſſi dans le même plan AB, & quelque loin qu'on la prolonge, elle ſera toûjours dans le même plan;

[1] *Cor.* 1. *déf.* 2. *Geom.*

car si cette ligne droite C E étant prolongée n'étoit pas toûjours dans le même plan A B prolongé aussi s'il est necessaire, il s'ensuivroit que cette ligne droite ne se confondroit pas avec cette surface, ou ne la toucheroit pas dans toute sa longueur ; & partant * cette surface ne seroit pas plane, ce qui est contre la supposition. Donc une ligne droite menée dans un plan, ne peut être selon une de ses parties C E dans un plan quelconque A B, & élevée au dessus de ce plan selon une de ses parties E F.



11. Une surface courbe est celle sur laquelle on ne peut mener plusieurs lignes droites à volonté, c'est à dire, dans toutes sortes de positions transversales, ou que ces lignes droites ne peuvent toucher dans toute leur longueur ; telle est la surface C D ou E H.



Si on considere l'interieur de la courbure de cette surface telle qu'elle est en K, ou en I, on l'appelle surface concave ; & si on considére l'extérieur de cette courbure telle qu'elle est en F, ou en N, on l'appelle surface convexe.

* *Déf. presente.*

Il faut preſentement faire attention aux définitions qui conviennent aux proprietez des lignes menées ſur les ſurfaces ; aux définitions qui conviennent aux ſurfaces conſiderées l'une à l'égard de l'autre, & enfin aux lignes qui ſervent de termes, de bornes, ou de limites à des ſurfaces.

12. Un angle eſt l'écartement ou ouverture compriſe entre deux differentes lignes, qui concourent ; par exemple ABC.

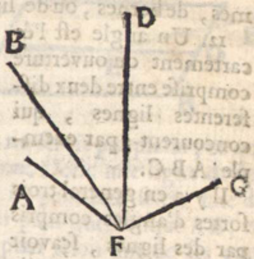
Il y a en general trois ſortes d'angles compris par des lignes, ſçavoir angle rectiligne, curviligne, & mixte.

13. Un angle rectiligne eſt un écartement ou ouverture formée par deux lignes droites ; par exemple l'angle ABC. Le curviligne eſt l'ouverture compriſe par deux lignes courbes ; & le mixte, par une courbe & une ligne droite. Dans la ſuite on traitera ſeulement des angles rectilignes.

Il faut obſerver qu'en ſe ſervant de lettres pour exprimer un angle formé par des lignes, la lettre du milieu de l'expreſſion marquera toûjours la pointe ou le ſommet de l'angle qui eſt le point de concours ; par exemple, dans l'expreſſion de l'angle ABC ou CBA qui eſt la même choſe, le ſommet ou pointe de cet angle eſt le point B.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette définition que tel eſt l'écartement de deux lignes qui concourent, tel ſera l'angle qu'elles forment, c'est à dire, que plus cet écartement sera grand, plus aussi cet angle sera grand; & que plus cet écartement sera petit, l'angle sera petit: & qu'enfin on n'a point égard à la longueur des lignes qui forment un angle pour déterminer la grandeur de cet angle; par exemple, l'angle AFG est plus grand que l'angle BFD, qui n'en est qu'une partie, quoique les côtez BF & DF de l'angle BFD soient plus longs que les côtez AF & FG de l'angle AFG.



Les angles rectilignes sont de trois sortes, droits, obtus, & aigus.

14. Un angle droit est celui qui est compris ou formé par une ligne perpendiculaire à une autre ligne. Tel est l'angle ABD, si AB est perpendiculaire à BD.

15. Un angle obtus est celui qui est plus grand ou plus ouvert qu'un angle droit; par exemple, l'angle EBD, qui est plus grand que l'angle droit ABD.

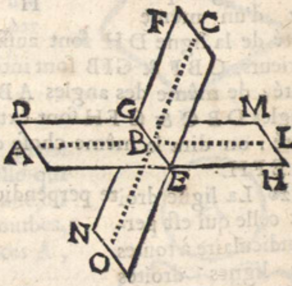
16. Un angle aigu est celui qui est plus petit qu'un angle droit; par exemple, l'angle EBC qui est plus petit que l'angle droit ABC.

En general les angles aigus ou obtus sont appellez *angles obliques*.

Les angles rectilignes, soit qu'ils soient droits, obtus, ou aigus, peuvent encore recevoir differens noms : on les peut appeller angles plans, angles de plans, & angles alternes.

17. Angle plan est celui qui est designé sur une surface plane, comme l'angle ABC de la definition 12.

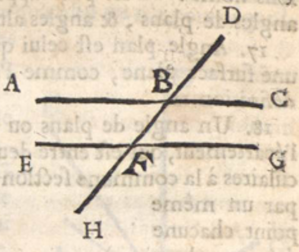
18. Un angle de plans ou de deux plans est l'écartement, qui est entre deux lignes perpendiculaires à la commune section de ces deux plans, par un même point, chacune de ces deux perpendiculaires étant menée dans chaque plan ; par exemple si la ligne AB menée dans le plan DE est perpendiculaire à la commune section



GE, & si la ligne CB menée dans le plan FE est aussi perpendiculaire à cette commune section GE par le même point B, l'écartement de ces deux lignes AB & CB est l'angle compris par les deux plans DE & FE ; l'angle des plans FE & GH doit être consideré comme le precedent ; & ainsi des autres.

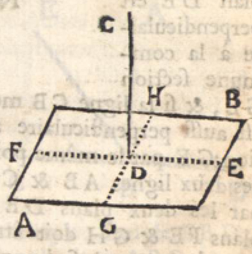
19. Angles alternes sont ceux qui ont le sommet dans differentes lignes, & qui sont posées de part & d'autre d'une ligne droite, qui coupe ces mêmes lignes ; on les appelle alternes internes lorsqu'ils sont entre ces lignes qu'une

autre ligne coupe; & alternes externes lorsqu'ils ne sont pas entre ces mêmes lignes, dans lesquelles leur sommet est posé. ABF & BFG; EFB & FBC sont des angles alternes internes; DBC & EFH; ABD & HFG sont des angles alternes externes.

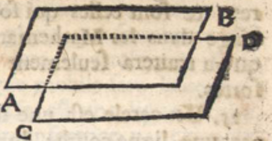


Les angles posez d'un même côté de la ligne DH sont aussi intérieurs & extérieurs. CBF & GFB sont intérieurs du même côté; de même des angles ABF & EFB: les angles DBC & GFH sont extérieurs du même côté: on dira la même chose des angles ABD & EFH.

20. La ligne droite perpendiculaire à un plan est celle qui est perpendiculaire à toutes les lignes droites qu'on peut mener dans ce même plan par l'extrêmité de cette ligne; par exemple CD est perpendiculaire au plan AB, si elle est perpendiculaire aux lignes FE, GH, &c. qui sont menées dans ce plan par l'extrêmité D de cette ligne droite CD.

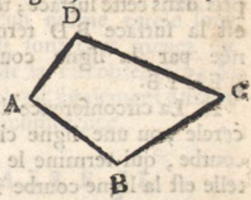


21. Les plans paralleles sont ceux qui sont



également distans l'un de l'autre dans toute leur étenduë ; par exemple AB & CD.

Une surface plane à cause de ses limites ou termes est de trois sortes ; la surface plane rectiligne, la curviligne, & la mixte.



22. La surface plane rectiligne est celle qui est terminée par des lignes droites ; par exemple, ABCD.

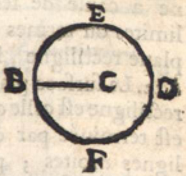
23. La surface plane curviligne est celle qui est terminée par une, ou plusieurs lignes courbes, comme les surfaces A, B, C, &c.

24. La surface plane mixte est celle qui est terminée par des lignes droites & des lignes courbes, comme D, E, F, &c.

Mais parcequ'il y a une infinité de sortes de surfaces curvilignes & de surfaces mixtes ; & qu'entre les surfaces planes, les seules rectilignes

& curvilignes circulaires sont les plus necessaires, & sont celles qui sont d'un plus frequent usage dans les Mathematiques ; c'est pour cela qu'on traitera seulement de ces deux dernieres sortes.

25. Un cercle est une surface plane terminée par une ligne courbe dont tous les points sont également distans d'un point pris dans cette surface ; telle est la surface B D terminée par la ligne courbe B E D F B.



26. La circonference d'un cercle, ou une ligne circulaire, est une ligne courbe, qui termine le cercle de toutes parts ; telle est la ligne courbe B E D F B.

27. Un arc de cercle est une partie de circonference telle qu'elle soit ; par exemple la partie B E ou E D.

28. Le centre d'un cercle est un point pris dans ce cercle, qui est également distant de tous les points de la circonference ; par exemple le point C.

COROLLAIRE.

Donc pour d'écrire un cercle, il faut concevoir qu'une ligne droite ; par exemple B C soit mûë au tour d'une de ses extrêmitez fixes C dans un même plan ; car la ligne courbe B E D F B que cette ligne B C aura d'écrite par le mouvement du point B, lorsqu'elle sera revenuë dans la même situation d'où elle avoit commencé à se mouvoir, sera une circonference de cercle ; puisque chacun des points de cette ligne

ligne courbe ſera également diſtant de l'autre extrêmité fixe C de cette ligne droite mobile.

L'eſpace ou ſurface plane qui ſera terminée par cette ligne courbe ſera le cercle, & l'extrêmité fixe de cette ligne mobile ſera le centre.

29. Un rayon de cercle eſt une ligne droite menée du centre à la circonference; par exemple C B.

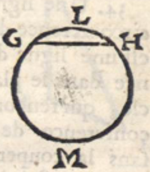
COROLLAIRE I.

Donc les rayons d'un même cercle ſont égaux entr'eux; puiſqu'ils ſont tous menez du centre à quelque point de la circonference, & que ([1]) le centre d'un cercle eſt également diſtant de tous les points de la circonference.

COROLLAIRE II.

Donc les lignes droites menées du centre du cercle, plus courtes qu'un rayon ſe termineront dans le cercle ſans parvenir à la circonference; & les lignes menées du centre plus longues qu'un rayon outrepaſſeront la circonference, & ſe termineront hors le cercle : car elles ſe termineront plus loin du centre, que chaque point de la circonference, c'eſt à dire, qu'elles outrepaſſeront les bornes du cercle.

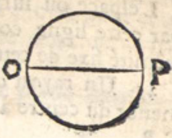
30. Une corde ou ſoûtendante d'un arc de cercle eſt une ligne droite menée d'une des extrêmitez de cet arc à ſon autre extrêmité; par exemple G H. Une corde appartient en même-temps à deux arcs, dont



([1]) *Déf. 28. Geo.*

elle est soûtendante; par exemple G H appartient à G L H, elle appartient aussi à l'arc G M H.

31. Un diametre est une ligne menée d'un point à un autre point de la circonference, & qui passe par le centre, comme la ligne O P.



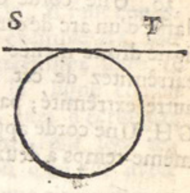
COROLLAIRE.

Chaque diamêtre est double d'un rayon. Donc tous les diamêtres sont égaux entr'eux; parceque (1) les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entr'elles.

32. Un segment de cercle est une partie du cercle, terminée par une corde ou ligne soûtendante, & par l'arc soûtenu par cette corde; par exemple la partie G L H G ou G M H G du cercle de la definition 30.

33. Un secteur de cercle est une partie du cercle terminée par deux rayons qui forment un angle, & par l'arc intercepté entre ces deux rayons; par exemple l'espace A M N A.

34. Une ligne touchante la circonference d'un cercle, est une ligne droite menée dans le plan du cercle, qui rencontre la circonference de ce cercle sans la couper aucunement, c'est à dire, qu'elle



(1) *Ax. 6. general.*

n'entre en aucune maniere dans le cercle ; par exemple la ligne S T.

35. Un degré eſt la trois-cens ſoixantiéme partie d'une circonference de cercle ; c'eſt à dire, ſi on diviſe une circonference de cercle en 360 parties égales, chaque partie ſera appellée un degré.

36. Une minute eſt une ſoixantiéme partie d'un degré, c'eſt à dire que, ſi on diviſe un degré en 60 parties égales, une de ces parties eſt une minute ou prime.

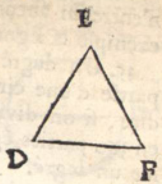
37. Une ſeconde eſt une ſoixantiéme partie d'une minute, c'eſt à dire que, ſi on diviſe une minute en 60 parties égales, une de ces parties eſt une ſeconde ; en ſubdiviſant de cette maniere par 60, on trouvera des tierces, des quartes, &c. à l'infini.

Nous commencerons les définitions qui conviennent aux ſurfaces planes rectilignes par celles du triangle rectiligne ; parcequ'on peut reduire toutes ces ſurfaces en triangles, en menant des lignes droites à tous les angles de ces ſurfaces, d'un point pris à volonté dans ces mêmes ſurfaces.

38. un triangle rectiligne eſt une ſurface plane terminée par trois lignes droites, comme A B C.

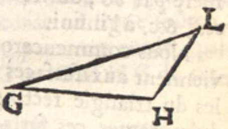
Il y a de trois ſortes de triangles ſi on conſidére ſeulement leurs côtez ; ſçavoir, Equilateral, Iſoſcele & Scalêne : & ſi on conſidére ſeulement leurs angles, on en trouvera encore de trois ſortes ; ſçavoir Oxigone ou Acutangle, Rectangle, & Ambligone ou Obtuſangle.

39. Un triangle équilateral eſt celui qui a ſes trois côtez égaux entr'eux ; par exemple D E F.



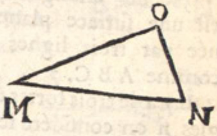
40. Un triangle Iſoſcele eſt celui qui a ſeulement deux côtez égaux ; par exemple le triangle ABC qui a deux côtez A B & B C égaux entr'eux.

41. Un triangle ſcalene eſt celui qui a ſes trois côtez inégaux entr'eux ; par exemple le triangle G H L.



42. Un triangle acutangle ou oxigone eſt celui dont tous les angles ſont aigus ; par exemple le triangle A B C ou D E F.

43. Un triangle rectangle eſt celui dont un des angles eſt droit ; par exemple le triangle M N O, dont l'angle M O N eſt droit.



44. Un triangle ambligone ou obtuſangle eſt celui dont un des angles eſt obtus ; par exemple le triangle G L H dont l'angle G H L eſt obtus.

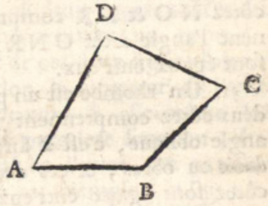
45. L'hypotenuſe d'un triangle rectangle eſt le côté oppoſé à l'angle droit ; par exemple

M N est l'hypotenuse du triangle rectangle M N O de la definition 43.

46. La base d'un triangle est le troisiéme côté qui reste lorsqu'on a parlé des deux autres ; par exemple si on a parlé des deux côtez A B & A C, du triangle A B C, le troisiéme côté B C sera appellé base. La base des autres surfaces, ou des solides, est ordinairement le côté inferieur.

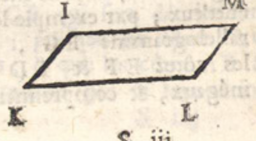
Les surfaces rectilignes quadrilaterales ou quadrilatères, ou terminées par quatre lignes droites, en general sont de trois sortes, trapeses, trapesoides, & parallelogrammes.

47. Un trapese est une surface terminée par quatre lignes droites, dont aucune n'est parallele à l'autre ; par exemple la surface A B C D.



48. Un trapesoide est une surface terminée par quatre lignes droites, dont deux sont paralleles entr'elles ; par exemple, la surface EFGH, dont les deux côtez ou lignes E H & F G sont paralleles entr'elles.

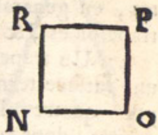
49. Un parallelogramme est une surface terminée par des lignes droites, dont les côtez ou lignes opposées sont paralleles entr'elles ; par exem-



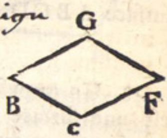
ple la surface K M, dont les côtez K L & I M opposez sont paralleles l'un à l'autre, & dont les côtez I K & L M sont aussi paralleles l'un à l'autre.

Il y a quatre sortes de parallelogrammes quadrilateraux, sçavoir le Quarré, le Rhombe, le Parallelogramme Oblong ou Rectangle, & le Rhomboide.

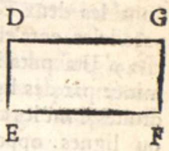
50. un quarré est un parallelogramme dont deux des côtez comprennent un angle droit, & sont égaux entr'eux; par exemple le parallelogramme N P dont les côtez N O & N R comprennent l'angle droit O N R, & sont égaux entr'eux.



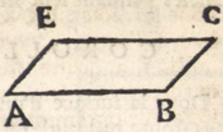
51. Un rhombe est un parallelogramme dont deux côtez comprennent un angle oblique, c'est à dire, aigu ~~droit~~ ou obtus, & ces deux côtez sont égaux entr'eux; par exemple le parallelogramme B F, dont les côtez B C & B G sont égaux entr'eux, & comprennent par leur écartement l'angle oblique C B G.



52. Un parallelogramme oblong, ou simplement rectangle, est un parallelogramme dont les deux côtez comprennent un angle droit, & sont inégaux entr'eux; par exemple le parallelogramme E G, dont les côtez E F & E D sont inégaux, & comprennent l'angle droit D E F.

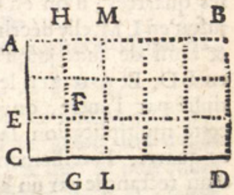


53. Un rhomboide eſt un parallelogramme, dont deux côtez comprennent un angle oblique, c'eſt à dire, aigu ou obtus, & ces deux côtez ſont inégaux entr'eux ; par exemple le parallelogramme A C dont les côtez A B & A E ſont inégaux, & comprennent l'angle oblique B A E.



COROLLAIRE I.

Donc en general, ſi deux lignes menées dans un même plan concourent en un point, & ſi on ſuppoſe qu'une de ces deux lignes ſoit mûë tranſverſalement ſelon la longueur de l'autre, & toûjours parallelement à elle-même lorſqu'elle étoit dans ſa premiere ſituation ; étant arrivée à l'extrêmité de l'autre, un parallelogramme ſera décrit : par exemple ſi la ligne A C eſt mûë tranſverſalement, ſelon la longueur de C D, ou C D ſelon la longueur de C A & toûjours parallelement à leur premiere ſituation ; lorſque A C ſera parvenuë à l'extrêmité de C D en B D, ou que C D ſera parvenuë à l'extrêmité de A C en A B, la ſurface C B qui ſera décrite ſera un parallelogramme ; puiſque les côtez A C & B D ſont paralleles, & que les côtez A B & C D ſeront auſſi paralleles par la ſuppoſition



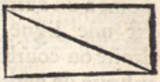
qu'on a faite que ces côtez étoient toûjours paralleles pendant leur mouvement.

COROLLAIRE II.

Donc la ſurface d'un quarré ou d'un parallelogramme rectangle eſt décrite par un des côtez perpendiculaires a l'autre, mû tranſverſalement ſelon la longueur de cet autre, c'eſt à dire, repeté autant de fois qu'il y a de points dans cet autre côté; ce qui eſt la même choſe que de multiplier un côté par l'autre: & partant pour avoir la ſurface du rectangle C B, dont un des côtez A C eſt de 3 toiſes, & l'autre C D de 5 toiſes, il faut multiplier A C par C D, ou C D par A C, on trouvera pour cette ſurface 15 toiſes quarrées. Parceque chaque toiſe lineaire de la ligne A C, par exemple C E dans la promotion tranſverſale qui en ſera faite de la ſituation C E en F G décrira une toiſe quarrée C F: de ſorte que la ligne A C contenant 3 toiſes lineaires étant parvenuë en G H aura décrit 3 toiſes quarrées; ſi on en fait encore une promotion juſqu'en L M, elle décrira encore 3 toiſes quarrées, & ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'elle ſoit parvenuë en B D. Et partant ſi le côté d'un quarré eſt multiplié par l'autre, on connoîtra au produit de cette multiplication la valeur de la ſurface de ce quarré. Pareillement ſi on multiplie le côté d'un rectangle par un autre, on aura pour produit la ſurface de ce rectangle. On ne doit pas conclure la même choſe du rhombe & du rhomboide, comme il ſera demontré dans la ſuite.

COROLLAIRE III.

Donc les côtez oppoſez des parallelogrammes ſont égaux entr'eux ; par exemple les côtez AB & DC ſont égaux entr'eux ; puiſque * le parallelogramme BD eſt décrit par la ligne AB tranſportée tranſverſalement en DC ; par le même raiſonnement AD = BC. On dira la même choſe des autres parallelogrammes.



54. Une ligne diagonale eſt une ligne menée du ſommet d'un des angles par le ſommet de l'angle opposé d'un parallelogramme ; par exemple la ligne AC qui eſt menée du ſommet de l'angle A, au ſommet de l'angle opposé C du parallelogramme BD.

55. Une ſurface reguliére eſt celle dont tous les côtez ſont égaux entr'eux, & dont pareillement tous les angles ſont égaux entr'eux, comme la ſurface M, & la ſurface NP de la définition 50.

56. Un polygone eſt une ſurface terminée par un nombre de côtez plus grand que 4 ; par exemple M.

COROLLAIRE.

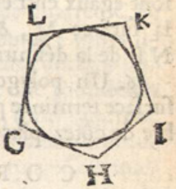
Puiſqu'on peut [1] conſiderer une ligne comme une trace ou veſtige d'un point mû d'une ſtation à une autre ſtation ; & que le plus court chemin qu'on puiſſe imaginer dans la courſe d'un point qui eſt en mouvement, c'eſt le chemin que ce point parcourt en paſſant d'une ſta-

* *Cor. 1. déf. preſente.* [1] *Cor. 1. déf. 3. Geo.*

tion à une autre qui lui eſt infiniment proche ; & le chemin le plus court de tous ceux qu'on peut imaginer d'un point à un autre point étant (1) une ligne droite ; la ligne menée d'un point à un autre point qui eſt infiniment proche, eſt une ligne droite ; & partant toute ligne droite ou courbe peut être conſiderée comme une infinité de petites lignes droites infiniment petites. Donc enfin une ligne courbe, par exemple une circonference de cercle, eſt * un polygone d'une infinité de côtez infiniment petits.

Les polygones ſont diſtinguez entr'eux par le nombre de leurs angles ou de leurs côtez, c'eſt à dire, qu'une ſurface de 5 côtez eſt appellée pentagone ; une de 6 côtez, Exagone ; une de 7 côtez, Eptagone ; une de 8 côtez, Octogone ; une de 9 côtez, Enneagone ; une de 10, Decagone, &c.

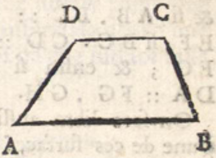
57. Une ſurface plane circonſcrite à un cercle, eſt celle dont tous les côtez touchent la circonference de ce cercle ; par exemple la ſurface GHIKL, dont chacun des côtez G H, H I, &c. touchent une même circonference de cercle.

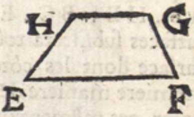


58. Une ſurface plane inſcrite dans un cercle, eſt celle par tous les ſommets des angles de laquelle une circonference de cercle paſſe ; par exemple la ſurface A.

(1) *Déf. 4. Geo.*
* *Déf. 56. preſente.*

59. Dans les ſurfaces rectilignes & équiangles l'une à l'autre, un côté eſt homologue à un autre, lorſque le premier ſe termine aux ſommets des angles d'une ſurface, qui ſont égaux aux angles de l'autre ſurface, au ſommet deſquels ſe termine le ſecond côté homologue. On dira la même choſe des autres côtez homologues; par exemple ſi les ſurfaces ABCD & EFGH ſont équiangles l'une à l'autre, c'eſt à dire, ſi l'angle ABC d'une de ces ſurfaces eſt égal à l'angle EFG de l'autre, & ſi l'angle BCD = FGH, & CDA = GHE, & DAB = HEF; le côté AB & le côté EF ſeront homologues; parceque, ſuivant ce qu'on vient de dire, AB ſe termine aux ſommets des angles A & B qui ſont * égaux aux angles E & F, chacun à chacun. Par la même raiſon BC & FG ſont homologues, de même AD & EH, &c.

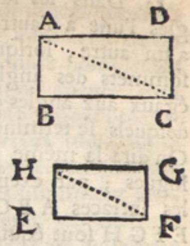




Dans les triangles équiangles l'un à l'autre, les côtez homologues ſont ceux qui ſont oppoſez à angles égaux.

60. Deux ſurfaces ſemblables ſont celles dont chaque angle de l'une eſt égal à chaque angle de l'autre, & dont les côtez homologues qui comprennent des angles égaux dans une de ces ſurfaces, ſont proportionnels aux côtez homologues qui comprennent pareils angles égaux dans

* *Par ſuppoſit.*



l'autre ſurface ; par exemple la ſurface B D eſt ſemblable à E G, ſi l'angle DAB = GHE ; ſi ABC = HEF ; ſi BCD = EFG ; ſi CDA = FGH ; & ſi le côté DA . AB :: GH . HE ; & ſi AB . BC :: HE . EF ; ſi BC . CD :: EF . FG ; & enfin ſi CD . DA :: FG . GH.

On ſera libre auſſi de comparer chaque côté d'une de ces ſurfaces à chaque côté qui lui correſpond dans l'autre ; par exemple AD . HG :: AB . HE :: BC . EF . &c. la ſimilitude de ces ſurfaces ſubſiſtera toûjours. Car s'il ſe trouve une ſurface dont les côtez ſoient entr'eux ſelon la premiere maniere de comparer qu'on vient d'expoſer, ces mêmes côtez ſeront auſſi * entr'eux ſelon la ſeconde.

On ſe ſert indifferemment de ces deux manieres de comparer les côtez des ſurfaces ſemblables, parcequ'une de ces manieres ne peut être vraye ſans que l'autre le ſoit.

Il faut ſeulement remarquer que, lorſque ſelon la ſeconde de ces deux manieres on compare les côtez homologues d'un triangle ou autre ſurface aux côtez homologues d'un autre triangle ſemblable ou de quelqu'autre ſurface ſemblable, les antecedens d'une même analogie ſe doivent rencontrer dans le même triangle ou dans la même ſurface.

COROLLAIRE.

Donc les quarrez ſont deux ſurfaces ſemblables

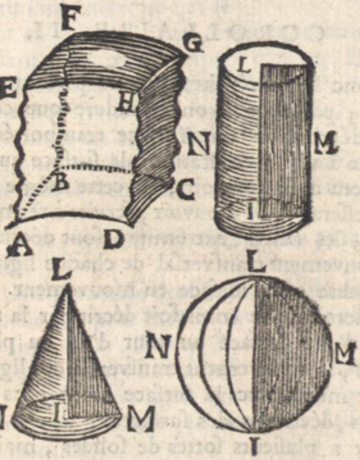
* *Cor. Prop. 3. Art. 2. Algeb.*

entr'elles,

61. Les corps, ou les ſolides ſont des grandeurs étenduës en long, en large, & en profond; par exemple une pierre, une piece de bois, &c.

COROLLAIRE I.

Donc ſi on conſidere qu'une ſurface puiſſe être tranſportée de travers ou tranſverſalement d'une ſtation à une autre ſtation, ou qu'une ſurface faſſe



une revolution autour de deux points d'une des lignes qui la terminent; un corps ou ſolide ſera décrit par la trace ou le veſtige par où cette ſurface aura paſſé. Car ce ſera une grandeur étenduë en longueur & en largeur à cauſe de la longueur & largeur de la ſurface

* *Cor. Prop. 3. art. 1.*

mûë, & cette grandeur outre la longueur & largeur sera aussi étenduë en profondeur, à cause du mouvement transversal. Par exemple si la surface AC est transportée de sa situation AC en EG, l'espace ABCDEFGH qui sera décrit par ce mouvement, sera un solide. Pareillement si quelque surface, par exemple, ILM fait une revolution au tour des deux points I & L de la ligne IL, qui est un de ses termes ou limites, ILMN sera un solide.

COROLLAIRE II.

Donc les extrêmitez d'un corps sont des surfaces; parceque si on considere que ce corps soit décrit par une surface transportée d'une station à une autre station, la surface qui commencera à se mouvoir, & cette même surface qui cessera de se mouvoir, servira à terminer ce corps; les autres extrêmitez sont décrites par le mouvement transversal de chaque ligne, qui terminera cette surface en mouvement. Si on considere que ce corps soit décrit par la revolution d'une surface au tour d'un ou plusieurs points, le mouvement transversal des lignes qui seront mûës avec la surface dont elles seront termes, décriront des surfaces.

Il y a plusieurs sortes de solides, mais dans ces Elemens on traitera seulement des Pyramides, des Cones, des Prismes, des Cylindres & des Spheres; parceque ce sont les especes des solides, qui sont le plus en usage, & dont la connoissance est tres-necessaire.

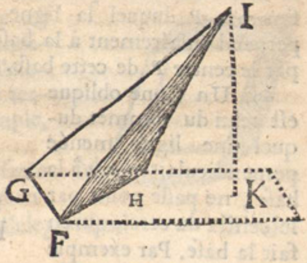
62. Une Pyramide est un solide, qui a pour terme une surface quelconque rectiligne, & qui a ensuite pour autres termes plusieurs triangles;

de ſorte qu'un des angles de chacun ſe termine à un ſommet commun, & que chacun de ces mêmes triangles a pour baſe un côté de cette ſurface rectiligne ; tel eſt le corps *ABCD.*

63. Un angle ſolide eſt l'écartement ou ouverture de plus de deux plans qui ſe rencontrent l'un l'autre,& qui ſe finiſſent en pointe dans un ſommet commun, en terminant d'une part un eſpace concave. Dans la pyramide *ABCD*, les plans *ADC*, *CDB*, & *BDA* qui ſe rencontrent dans les lignes *AD*, *DC* & *DB*, forment un angle ſolide dont le ſommet eſt *D*. Dans une chambre, les deux murailles & le plancher qui ſe rencontrent forment un angle ſolide.

Il y a des pyramides droites & des pyramides obliques.

64. Une pyramide droite eſt celle du ſommet de laquelle on peut mener une ligne perpendiculaire ſur la baſe, ſans qu'il ſoit pour cela neceſſaire de prolonger cette baſe ; ou bien du ſommet de laquelle une ligne étant menée perpendiculairement à la baſe, ſe trouve au dedans de cette pyramide. Par exemple, la pyramide *ABCD* du ſommet *D* de laquelle une ligne *DE* eſt menée perpendiculairement ſur la baſe *ABC* ſans que cette baſe ſoit prolongée, eſt une pyramide droite.



65. Une pyramide oblique eſt celle du ſommet

de laquelle une ligne ne peut être menée perpendiculairement que ſur la baſe prolongée. Par exemple, la pyramide *F G H I* du ſommet *I* de laquelle la ligne *I K* eſt menée perpendiculairement ſur la ſurface *G F H* prolongée, eſt une pyramide oblique.

66. Une pyramide polygone eſt celle dont la baſe a plus que quatre côtés. En particulier, ces pyramides ſont diſtinguées entr'elles par la varieté de leurs baſes; c'eſt à dire qu'une pyramide ſera nommée triangulaire, ſi ſa baſe eſt un triangle; Quadrangulaire, ſi ſa baſe eſt un Quadrilatere; Pentagone, ſi ſa baſe eſt un Pentagone, Exagone, &c.

67. Un cone eſt une pyramide dont la baſe eſt terminée par une infinité de côtés; c'eſt à dire, dont la baſe eſt un cercle, par exemple le ſolide *L M N O P*.

Il y a des Cones qui ſont droits, & d'autres qui ſont obliques.

68. Un Cone droit eſt celui du ſommet duquel une ligne étant menée perpendiculairement à la baſe, paſſe par le centre du cercle qui en fait la baſe. Par exemple le Cone *L M N O P* du ſommet *P* duquel la ligne *P R* étant menée perpendiculairement à la baſe *L M N O*, paſſe par le centre *R* de cette baſe.

69. Un Cone oblique eſt celui du ſommet duquel une ligne menée perpendiculairement à la baſe, ne paſſe point par le centre du cercle qui en fait la baſe. Par exemple le Cone *R S T V X* du ſommet X, duquel la ligne X Y menée perpen-

diculairement à la base, ne passe point par le centre Z de cette base, mais par un autre point de cette base prolongée s'il est necessaire.

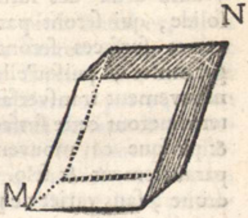
70. L'Axe d'un Cone est la ligne menée de son sommet au milieu ou centre de sa base. Par exemple la ligne PR est l'axe du cone LMNOP, & la ligne XZ est l'axe du cone RVTSX.

71. Un prisme est un solide terminé par des surfaces planes rectilignes, dont deux sont paralleles entr'elles, égales, & desquelles deux surfaces chaque côté de l'une est égal à chaque côté de l'autre, & les autres surfaces sont des parallelogrammes. Par exemple ALMNOP, dont les deux surfaces ALM & NOP sont paralleles & égales, & les autres, sçavoir AP, AO, LP, sont des parallelogrammes, est un prisme.

Il y a des prismes droits & des prismes obliques.

72. Un prisme droit est celui dont les surfaces paralleles sont perpendiculaires aux parallelogrammes, qui le terminent ou qui en font le contours ; par exemple le prisme LAMNPO.

73. Un prisme oblique est celui dont les surfaces paralleles ne sont point perpendiculaires aux parallelogrammes qui le terminent ; par exemple, le prisme MN.

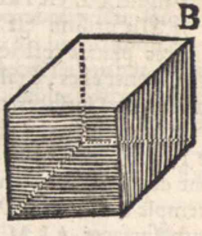


Il y a des prismes qu'on appelle particulierement Parallelepipedes,

74. Un parallelepipede eſt un priſme terminé par ſix parallelogrammes, dont ceux qui ſont oppoſez ſont égaux & paralleles entr'eux ; par exemple le ſolide MN, ou AB.

Il y a des parallelepipedes qu'on appelle cubes.

75. Un cube eſt un parallelepipede terminé par ſix quarrez égaux entr'eux ; par exemple le ſolide AB.

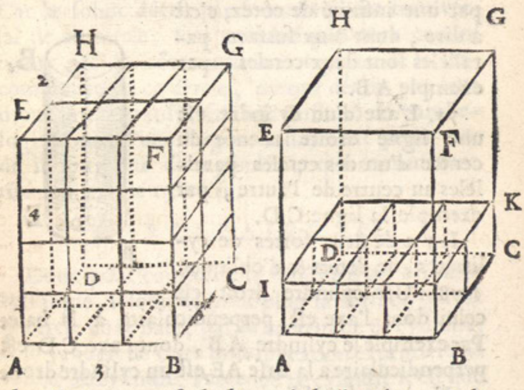


COROLLAIRE I.

Donc ſi on ſuppoſe qu'une ſurface plane rectiligne quelconque ſoit mûë tranſverſalement ſelon la longueur d'une ligne droite fixe, & que les côtez qui la terminent ſoient toûjours pendant ce mouvement paralleles à eux mêmes conſiderez dans la premiere poſition ; lorſque cette ſurface ceſſera de ſe mouvoir, l'eſpace qu'elle aura parcouru ſera un priſme. Car 1°. il y aura deux des ſurfaces qui termineront ce ſolide, qui ſeront paralleles entr'elles. 2°. Les autres ſurfaces ſeront des ſurfaces parallelogrammes ; puiſqu'elles ſeront décrites par le mouvement tranſverſal des lignes droites, qui termineront cette ſurface plane en mouvement, & puiſque ce mouvement tranſverſal ſera fait parallelement & ſelon la longueur d'une ligne droite, ſans varier de part ni d'autre.

COROLLAIRE II.

Donc la ſolidité d'un priſme rectangle eſt décrite & exprimée par une des ſurfaces paralleles mûë tranſverſalement ſelon la longueur d'une ligne droite qui lui eſt perpendiculaire ; c'eſt à dire,par une des ſurfaces paralleles,repetée autant de fois qu'il y a de points dans la longueur de cette ligne; ce qui eſt la même choſe que de multiplier une des ſurfaces paralleles d'un priſme rectangle par ſa hauteur. Par exemple, pour connoître la ſolidité du priſme rectangle ABCDEFGH ,



dont la largeur eſt de deux pieds lineaires, & la longueur de 3 pieds , & la hauteur de 4 ; il faut connoître la baſe A C : ſi cette baſe A C eſt un rectangle , on multipliera 2 par 3 , & on aura 6 pieds quarrez pour la ſurface A C , laquelle étant multipliée par la hauteur , ſçavoir 6 pieds quarrez par 4 pieds lineaires ; on aura 24 pieds cubes pour la ſolidité de ce priſme entier. Parceque chaque pied quarré de la ſurface AC étant mû transversalement selon la hauteur d'un pied lineaire en IK, décrira un pied cube. Or dans la surface AC il y a 6 pieds quarrez ; donc lorsque cette surface AC sera mûë parallelement à elle-même de la hauteur d'un pied lineaire, qu'elle sera, par exemple, en IK, elle aura décrit 6 pieds cubes. Donc cette surface de 6 pieds quarrez étant mûë de la hauteur de 4 pieds lineaires, elle aura décrit 24 pieds cubes, solidité du prisme entier proposé.

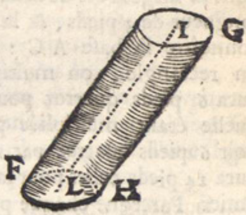
76. Un cylindre est un prisme, dont deux surfaces qui sont paralleles, sont terminées chacune par une infinité de côtez, c'est à dire, dont deux surface paralleles sont deux cercles ; par exemple AB.

77. L'axe d'un cylindre est une ligne droite menée du centre d'un des cercles paralleles au centre de l'autre, par exemple la ligne CD.

Il y a de deux sortes de cylindres, de droits & d'obliques.

78. Un cylindre droit est celui dont l'axe est perpendiculaire à la base. Par exemple le cylindre AB, dont l'axe CD est perpendiculaire à la base AE, est un cylindre droit.

79. Un cylindre oblique est celui, dont l'axe n'est pas perpendiculaire à la base ; par exemple le cylindre FG, dont l'axe IL n'est point perpendiculaire à la base FH, est un cylindre oblique.

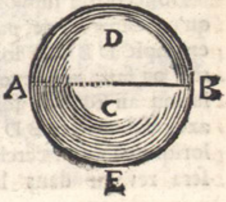


COROLLAIRE I.

Donc pour décrire un cylindre, il faut ſuppoſer une ligne droite fixe par une de ſes extrêmitez dans le centre d'un cercle, & immobile ſelon ſa longueur ; enſuite que ce cercle ſoit mû toûjours parallelement à lui-même juſqu'à l'autre extrêmité de cette ligne : ce cercle après avoir ceſſé de ſe mouvoir aura décrit un cylindre par ſon mouvement, & cette ligne ſelon la longueur de laquelle il aura été mû en ſera l'axe. Car le ſolide décrit par le mouvement tranſverſal de ce cercle, ſera terminé par deux cercles égaux, & les côtez infiniment petits de la circonference de ce cercle, auront décrit par leur mouvement tranſverſal une infinité de parallelogrammes d'une largeur infiniment petite, & de la longueur du cylindre, qui termineront tous ce même cylindre.

COROLLAIRE II.

Donc pour connoître la ſolidité d'un cylindre rectangle, il ſuffit de multiplier la ſurface qui eſt le cercle de la baſe, par la hauteur de ce cylindre; & le produit de cette multiplication exprimera la valeur du cylindre. Parceque ce cylindre n'eſt que ſa baſe circulaire, repetée autant de fois qu'il y a de points dans ſa hauteur.



80. Une ſphere, globe, ou boule eſt un corps ou ſolide terminé par une ſurface courbe, dont tous les points poſſibles ſont également diſtans d'un ſeul point pris dans

ce ſolide. Par exemple le corps ADBEC qui eſt terminé par la ſurface ABCDE, & dans lequel le point C eſt également diſtant de tous les points de cette ſurface, eſt une ſphere.

81. Le centre d'une ſphere eſt le point pris dans ce ſolide, qui eſt également diſtant de tous les points de la ſurface de ce même corps; par exemple le point C.

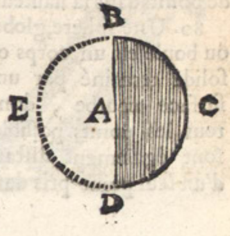
82. Un rayon de ſphere eſt une ligne droite menée du centre à ſa ſurface; & un diamêtre de ſphere eſt la ligne droite qui eſt menée d'un point à un autre point de ſa ſurface, & qui paſſe par le centre. CB par exemple eſt un rayon, & AB eſt un diametre.

COROLLAIRE I.

Donc les rayons d'une ſphere ſont égaux entr'eux. Car puiſque le centre d'une ſphere eſt également diſtant de tous les points de ſa ſurface, & que les rayons ſont des lignes droites menées du centre à la ſurface; il faut neceſſairement qu'ils ſoient tous égaux entr'eux. Pareillement tous les diametres de la même ſphere ſont égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont chacun doubles de Rayons qui ſont égaux entr'eux.

COROLLAIRE II.

Donc ſi on ſuppoſe qu'un demi cercle, par exemple DBCD ſoit mû ou faſſe une revolution au tour de ſon axe ou diamêtre BD, lorſque ce demi cercle ſera revenu dans la



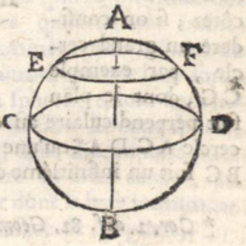
même ſituation, d'où il étoit parti; par ce mouvement il aura décrit une ſphere, puiſque l'arc B C D de circonference qui termine d'une part ce demi cercle D B C D, décrira une ſurface courbe dont tous les points ſeront également diſtans du point A, qui en ſera le centre: enfin cet eſpace ainſi décrit & terminé par cette ſurface courbe ſera un ſolide; puiſque outre la longueur & largeur qui ſont dans le demi cercle, il y aura profondeur à cauſe du mouvement tranſverſal qui ſe trouve dans la circonvolution de ce demi cercle.

83. L'axe d'une ſphere eſt un de ſes diamêtres, au tour duquel la ſphere tourne ou fait quelque revolution; par exemple B D.

84. Les poles d'une ſphere ſont les deux points qui ſont les extrêmitez de l'axe; par exemple le point B & le point D.

85. Un grand cercle d'une ſphere eſt celui, dont le plan paſſe par le centre de cette ſphere, & dont la circonference eſt décrite ſur la ſurface de cette même ſphere.

86. Un petit cercle d'une ſphere eſt celui, dont le plan ne paſſe point par le centre de cette ſphere, & dont la circonference eſt décrite ſur la ſurface de cette même ſphere.



87. Les poles d'un arc de cercle ou d'un cercle de la ſphere ſont deux points pris ſur la ſurface de la même ſphere, chacun également éloignez de la circonference de ce cercle; où (ce qui eſt la mê-

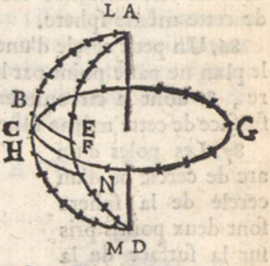
me chose) ce sont les extrêmitez du diamêtre de la sphere, qui est perpendiculaire au plan de ce cercle par le centre. Par exemple les poles du grand cercle C D, & du petit cercle E F qui lui est parallele, sont les deux points A & B.

88. Un polyêdre est un solide de plusieurs angles & de plusieurs surfaces planes.

En particulier on distingue les polyêdres par le nombre de leurs surfaces. Par exemple une pyramide triangulaire sera appellée un corps de quatre surfaces ou Tetraedre: un cube sera appellé un corps de six surfaces ou Exaedre, &c.

COROLLAIRE.

Donc une sphere doit être considerée comme un polyedre d'une infinité de surfaces, qui sont quadrilaterales & infiniment petites. Car puisque une sphere est * décrite par le mouvement de circonvolution d'un demi cercle par exemple A C D A au tour de son diamêtre A D ; & qu'une circonference de cercle est ** considerée comme un polygone d'une infinité de côtez ; si on considere un grand cercle, par exemple C G, dont le plan soit perpendiculaire au diamêtre AD du demi cercle A C D A ; qu'une petite ligne par exemple BC soit un infinitiéme côté de la demie circon-



* *Cor. 2. déf. 82. Geom.* ** *Cor. déf. 56. Geom.*

ference

ference du cercle A C D, & que CF soit un infinitiéme côté de la circonference du cercle CG. Lorsque le demi cercle A C D en faisant sa revolution aura avancé de la distance de la ligne CF infiniment petite qui est un côté de la circonference du cercle C G, la figure quadrilaterale C E infiniment petite, sera une de celles qui seront décrites pendant ce mouvement. La ligne infiniment petite CH décrira aussi par son mouvement des figures quadrilaterales C N, &c. & ainsi des autres infinitiémes. A l'égard de chacune des deux lignes infiniment petites AL & D M, qui ont une de leurs extrêmitez dans les extrêmitez du diamêtre A D, elles décriront pendant ce mouvement deux cercles infiniment petits; car chacune de ces deux infinitiémes est perpendiculaire à un diamêtre. Parcequ'on demontrera dans la suite qu'une ligne qui touche une circonference de cercle, est perpendiculaire au diamêtre qui se termine au point d'attouchement, & une de ces lignes infiniment petite étant prolongée est la touchante.

COROLLAIRE II.

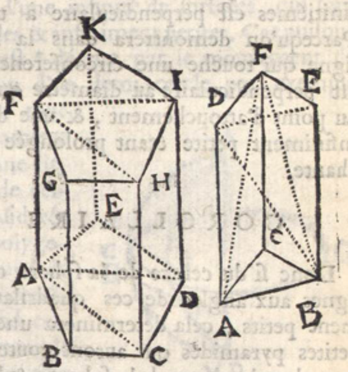
Donc si du centre de la sphere on mene des lignes aux angles de ces quadrilateres infiniment petits, cela determinera une infinité de petites pyramides qui auront toutes leur sommet dans le centre de la sphere, & leur base infiniment petite dans la surface de cette sphere. On aura aussi deux cones, dont chacun aura pour axe la moitié du diamêtre du demi cercle, qui aura fait la revolution, & dont la base infiniment petite sera aussi dans la surface de la sphere.

89. Deux solides semblables sont ceux, dont le premier est terminé par des plans semblables à ceux qui terminent le second, chacun à chacun, & en pareil nombre de part & d'autre.

90. Une figure est une grandeur étenduë en long & en large seulement, ou en long, en large, & en profond, terminée de toutes parts. Un triangle, par exemple, est une figure; une pyramide est un figure, &c.

AVERTISSEMENT.

1°. De même que les figures rectilignes peuvent être reduites en triangles, ainsi les corps ou solides peuvent être divisez & reduits en pyramides triangulaires. Par exemple, le solide ABCDEFGHIK sera reduit premierement en prismes triangulaires ABC FGH, ACDFHI, ADEFIK, en supposant des plans menez d'un des angles des plans qui terminent ce solide, aux angles des autres plans qui le terminent.



2°. Chaque prisme triangulaire ABCDEF sera reduit dans ces trois pyramides ABCF, DEFB & ABDF, en le supposant coupé par les deux plans ABF & BFD.

3. Afin de pouvoir facilement distinguer les

pyramides triangulaires dont il eſt queſtion dans le ſolide repreſenté par la ſeconde des deux dernieres figures, il faut premierement conſiderer un triangle comme baſe de la pyramide qu'on y cherche, & obſerver enſuite ([1]) les trois triangles qui auront chacun pour baſe un des trois côtez de ce premier triangle, & qui auront en outre un ſommet commun. Cette remarque eſt fort utile lorſque dans des ſolides on eſt obligé d'examiner des pyramides, ou de les comparer l'une à l'autre.

4°. Une grandeur exprimée par une ſeule petite lettre de l'alphabeth eſt ordinairement appellée une ligne. Parceque dans l'Algebre on n'exprime une ligne droite que par une petite lettre de l'alphabeth.

Un produit de deux grandeurs differentes exprimées generalement comme ab eſt appellé un plan ou rectangle compris ſous a & b. Parcequ'un rectangle dont un côté ſeroit a & l'autre b, auroit * ab pour l'expreſſion de ſa ſurface; un rectangle n'étant rien autre choſe qu'un de ſes côtez multipliez par l'autre.

Un produit formé par deux grandeurs égales comme aa eſt appellé le quarré de a. Parcequ'en multipliant par lui-même le côté appellé a d'un quarré, on a la ſurface aa de ce quarré.

En Geometrie on exprime le quarré d'une ligne, par exemple, de AB en cette maniere AB^2, ou AB^q, ou $AB \times AB$.

Un produit de trois grandeurs exprimées generalement, comme abc, eſt appellé un ſolide; parceque ces trois grandeurs expriment les

([1]) *Déf. 62. Geo.*
* *Cor. 2. déf. 52.*

trois dimenſions qui ſe rencontrent dans un corps ou ſolide.

Un produit de trois grandeurs égales, ou le produit d'une grandeur multipliée deux fois par elle-même, comme *b b b*, eſt un ſolide appellé cube, dont une racine eſt *b*.

DEMANDES
DE GEOMETRIE.

On ſuppoſe dans la Geometrie que ce qui eſt énoncé dans ces trois articles eſt poſſible, & qu'on ne refuſera point de l'accorder lorſque cela ſera neceſſaire pour une demonſtration.

1. Qu'il ſoit permis de mener une ligne d'un point à un autre point, ou du moins de ſuppoſer qu'elle ſoit menée.

2. Qu'il ſoit permis de prolonger ou continuer une ligne droite ſi loin qu'on voudra.

3. Qu'enfin on accorde qu'au tour d'un point on décrive une circonference de cercle, à telle ouverture de compas qu'on voudra.

AXIOMES
DE GEOMETRIE.

1. Les lignes appliquées l'une ſur l'autre, qui ne ſe ſurpaſſent point l'une l'autre, ſont égales entr'elles & ſemblables, de même des

angles. Pareillement les surfaces appliquées l'une sur l'autre, lesquelles ne se surpassent ou excedent aucunement l'une l'autre, c'est à dire, qui conviennent entre elles en toutes manieres, sont aussi égales entr'elles.

2. Il est impossible qu'entre plusieurs grandeurs prises à volonté *a*, *b*, *c*, *d*, &c. il y en ait deux, par exemple *a* & *b* qui soient telles que *a* soit plus grande ou plus petite que toutes les autres restantes *b*, *c*, *d*, & qu'en même-temps *b* soit aussi plus grande ou plus petite que toutes les autres *a*, *c*, *d*, &c.

Pour rendre cet axiome encore plus évident, supposons entre plusieurs grandeurs que *a* & *b* soient chacune plus petites que les autres; *a* est * plus petite que chacune des autres. Donc cette grandeur *a* sera plus petite que *b*. Pareillement *b* est * plus petite que chacune des autres. Donc *b* sera plus petite que *a*, c'est à dire que *a* sera plus grande que *b*. Donc *a* seroit en même-temps plus petite que *b*, & en même-temps plus grande que la même grandeur *b*. Il faudroit donc que *a* fût plus grande & ne le fût pas en même-temps, ce qui est (1) évidemment impossible.

COROLLAIRE I.

Il est impossible qu'entre plusieurs grandeurs il y en ait une plus petite que la plus petite.

COROLLAIRE II.

Donc pour aller d'un terme à un autre, il n'y a qu'un seul chemin, qui soit le plus court de tous.

* *Par supposit.* (1) *Ax. 1. general.*

COROLLAIRE III.

Donc d'un point à un autre point, on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite ; puiſque (1) la ligne droite occupe le plus court chemin qu'il y a d'un point à un autre point, & que (2) ce chemin eſt unique.

COROLLAIRE IV.

Donc la meſure de la diſtance d'un point à un autre point eſt une ligne droite menée d'un de ces points à l'autre. Car cette ligne droite eſt une meſure conſtante, unique & immuable ; puiſqu'on n'en peut mener qu'une ſeule d'un de ces points à l'autre.

(1) *Déf. 4. Geo.*
(2) *Cor. 2. Ax. preſent.*

CHAPITRE I.

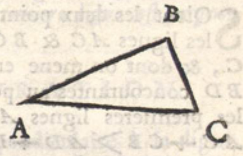
DES LIGNES.

PROPOSITION I.

Si des extrêmitez d'une ligne droite on mene deux autres lignes quelconques concourantes du même côté, la somme de ces lignes concourantes sera plus grande que la seule ligne droite des extrêmitez de laquelle elles sont menées.

DEMONSTRATION.

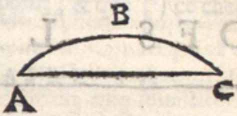
Soit la ligne droite *AC*, & que par ses extrêmitez *A* & *C*, on mene deux autres lignes *AB* & *CB* qui concourent du même côté : je dis que la somme de ces lignes concourantes *AB* + *BC* est plus grande que la seule ligne *AC*. Car la ligne droite *AC* occupe * le plus court chemin qui est du point *A* au point *C* : mais les lignes *AB* & *BC* n'occupent pas le chemin *AC* qui est le plus court. Donc elles



* *Déf. 4. Geo.*

occupent un chemin plus long que la ſeule ligne *AC*. Donc la ſomme des lignes *AB* + *BC* eſt plus grande que *AC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.



Il ſuit de cette propoſition que la ligne courbe *ABC* eſt plus grande que la ſeule ligne droite *AC*, ſi l'une & l'autre ſont terminées par les mêmes points.

PROPOSITION II.

Si de deux points on mene deux lignes qui concourent dans un 3^e point, & ſi de ces deux mêmes points on mene encore dans le même plan deux lignes droites qui concourent vers & entre les deux precedentes; la ſomme des deux premieres ſera plus grande que la ſomme des deux dernieres.

DEMONSTRATION.

Soient les deux points *A* & *B* dont on mene les lignes *AC* & *BC* concourantes au point *C*, & dont on mene encore les lignes *AD* & *BD* concourantes au point *D* vers *C*, & entre les premieres lignes *AC* & *BC*. Je dis que $AC + CB > AD + DB$. Pour le demontrer il faut * prolonger *AD* jusqu'à la rencontre de la ligne *BC* en *E*. Or (¹) $AC + CE > AE$,

* *Demand.* 2. *Geo.* (¹) *Prop.* 1. *Geo.*

Donc en ajoûtant de part & d'autre EB, on aura * $AC + CE + EB > AE + EB$. Mais (1) $CE + EB = CB$. Donc $AC + CB > AE + EB$. Enfin $BE + ED > BD$. Donc en ajoûtant de part & d'autre DA, on aura * $BE + ED + DA > BD + DA$. Ce qui est la même chose que de dire $AE + EB > AD + DB$; puisque $AD + DE = AE$. Mais on vient de trouver que $AC + CB > AE + EB$. Donc $AC + CB > AE + EB > AD + DB$. Donc enfin (2) $AC + CB > AD + DB$. *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION III.

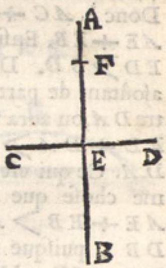
Chaque point d'une ligne droite perpendiculaire au milieu d'une autre ligne droite, est également distant des deux extrêmitez de la ligne, au milieu de laquelle cette premiere ligne est perpendiculaire.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne AB perpendiculaire à la ligne CD par le point E qui en est le milieu : je dis que chaque point de la ligne AB, par

* *Ax. 7. gener.* (1) *Ax. 3. Geo.*
(2) *Ax. 22. gener.*

exemple *F*, est également distant des points *C* & *D* extrêmitez de la ligne *CD*. Car pour que les points *F* & *C* fussent plus proches l'un de l'autre, que le même point *F* l'est du point *D*, il faudroit que la ligne *AB* fût plus inclinée vers *C* que vers *D*, ou que la ligne *AB* ne fût pas perpendiculaire à la ligne *CD* par son point du milieu *E*. Mais l'un & l'autre est contre la supposition. Donc le point *F* sera également distant du point *C* & du point *D* extrêmitez de la ligne *CD* au milieu de laquelle *AB* est perpendiculaire, *ce qu'il falloit demontrer.*



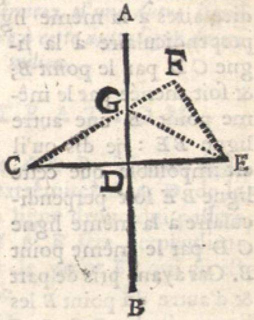
On dira la même chose de tous les autres points de la ligne *AB*.

PROPOSITION IV.

Une ligne perpendiculaire à une autre ligne droite par le point du milieu de cette derniere, passe par tous les points qui sont également distans des extrêmitez de la ligne au milieu de laquelle elle est perpendiculaire.

DEMONSTRATION.

SOit la ligne *AB* perpendiculaire à la ligne *CE* par le point *D*, milieu de cette ligne *CE* : je dis que la ligne *AB* passera par tous l points qui sont également distans des extremitez *C* & *E* de la ligne *CE*. Car la ligne *AB* prolongée si loin qu'on voudra ayant [1] chacun de ses points également distans des extrêmitez *C* & *E* de la ligne *CE*, il suffit pour la proposition presente de demontrer qu'il n'y a aucun point pris hors de la ligne *AB* qui soit également distant des extrêmitez *C* & *E*. Soit par exemple le point *F* pris à volonté hors la ligne *AB* : je dis que ce point *F* n'est pas également distant des extrêmitez *C* & *E*, c'est à dire qu'ayant mené les lignes *FC* & *FE*, on aura $FC > FE$. Du point *G* ou passe *FC*, au point *E*, soit menée la ligne *GE*. On sçait [1] que $CG = GE$. en ajoutant de part & d'autre *GF*, on aura [2] $CG + GF = EG + GF$. Mais [3] $EG + GF > EF$. Donc aussi [4] $CG + GF > EF$, c'est à dire que $FC > FE$. Donc le point *F* n'est point également distant de *C* & de *E*. Donc enfin *AB* passe par tous les points également distans de *C* & de *E*, *ce qu'il falloit démontrer.*

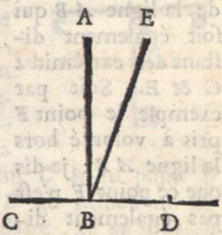


On fera le même raisonnement pour tous les autres points pris hors la ligne *AB*.

[1] *Prop.* 3. *Geo.*
[2] *Ax.* 4. *Gen.*
[3] *Prop.* 1. *Geo.*
[4] *Dem.* 1. *Gen.*

COROLLAIRE.

Par un même point, par exemple, par le point *B* de la ligne *C D*, on ne peut mener dans le même plan *C A E D* plusieurs lignes perpendiculaires à la même ligne. Soit la ligne *A B* perpendiculaire à la ligne *C D* par le point *B*; & soit menée par le même point *B* une autre ligne *B E* : je dis qu'il est impossible que cette ligne *B E* soit perpendiculaire à la même ligne *C D* par le même point *B*. Car ayant pris de part & d'autre du point *B* les lignes égales *B C* & *B D*, il faudroit [1] que cette ligne *B E* eût chacun de tous ses points également distans du point *C* & du point *D*. Or on vient de démontrer qu'il n'y a que les points de la perpendiculaire *A B* qui soient également distans des extrêmitez *C* & *D* de la ligne *C D*. Donc la ligne *E B* ne peut être perpendiculaire à *C D*.



[1] *Prop. 3. Geo.*

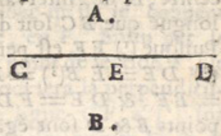
PROPOSITION

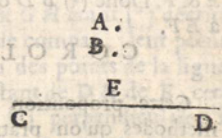
PROPOSITION V.

Une ligne droite qui passe par deux points, ou qui a deux de ses points, dont chacun est également distant des deux extrêmitez d'une autre ligne droite, est perpendiculaire à cette autre ligne droite par le point qui en est le milieu.

DEMONSTRATION.

Soient les deux points *A* & *B*, chacun également distant des extrêmitez *C* & *D* de la ligne *C D* : je dis que la ligne droite qui passera par ces deux points *A* & *B* sera perpendiculaire à la ligne *C D* par le point *E*, qui en est le milieu. Car la ligne droite qui passera par ces deux points *A* & *B*, passera par le même chemin par où passeroit la ligne qui seroit perpendiculaire à *C D* par son milieu *E*; puisque cette ligne qui seroit perpendiculaire à *CD* par le milieu *E*, passeroit [1] par les points *A* & *B*. Donc [2] elle se confondroit avec cette ligne droite menée par les points *A* & *B*. Et partant la ligne menée par les points *A* & *B*, seroit la même que la ligne perpendiculaire à *C D* par le milieu *E*, *ce qu'il falloit demontrer*.

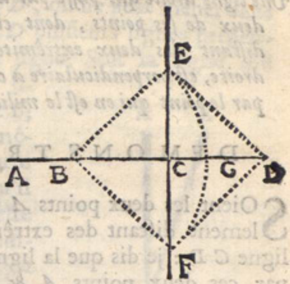




[1] *Prop.* 4. *Geo.* [2] *Cor.* 3. *Ax.* 2. *Geo.*

COROLLAIRE I.

Si une ligne, par exemple, *EF* eſt perpendiculaire à une autre ligne *AD*; reciproquement cette autre *AD* ſera auſſi perpendiculaire à *EF*. Car ſur la ligne *AD* de part & d'autre de *EF* prenons les parties *C B* & *CD* égales entr'elles. Du point *B* comme centre, & de l'intervalle *BF* priſe à volonté plus longue que *BC* ſoit décrit l'arc de cercle *FGE*. Puiſque (1) *EF* eſt perpendiculaire à *BD*, on a (2) $DE = EB$ (3) $= BF$ (2) $= FD$. Donc $BE = BF$, & $DE = FD$; & partant chacun des points *B* & *D* ſont également diſtans des points *E* & *F*. Donc (4) *BD* ou *AD* ſera perpendiculaire à *EF*.

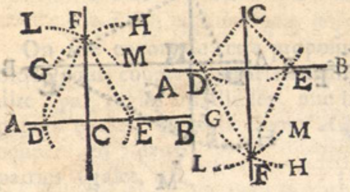


COROLLAIRE II.

Cette propoſition ſert de fondement à des methodes qu'on pratique ſouvent pour mener une ligne perpendiculaire à une autre ligne par un point donné. Ce point peut être donné hors la ligne donnée, ou peut être donné dans la ligne donnée.

(1) *Par ſuppoſit.* (2) *Prop. 3. Geo.*
(3) *Cor. 1. déf. 29.* (4) *Prop. preſ.*

Soit une ligne proposée *AB*, & un point donné, par exemple *C* dans cette ligne ou hors de

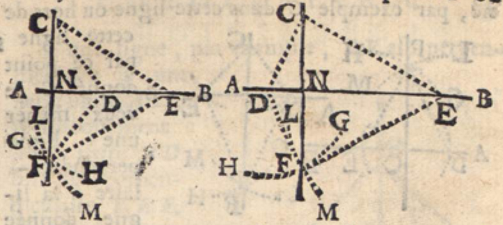


cette ligne; par ce point donné *C* je veux mener une ligne perpendiculaire à la ligne donnée *AB*. Pour y réussir, du point *C* pris pour centre & d'une même ouverture de compas, je décris deux petits arcs de sorte qu'ils coupent la ligne donnée *AB* en deux points, par exemple, en *D* & en *E*. Ensuite des points de section *D* & *E* pris pour centres, je décris deux arcs *LFM* & *GFH* d'une même ouverture de compas prise à volonté mais suffisante pour qu'ils se coupent l'un l'autre, par exemple, en *F*. Enfin par le point donné *C*, & par le point de section *F*, je mene la ligne droite *CF* qui sera la perpendiculaire cherchée. Car cette ligne *CF* a [1] son point *C* également distant des points *D* & *E*. Outre cela, les arcs *LM* & *GH* étant [2] décrits d'une même ouverture de compas, leur point commun *F* qui est aussi un des points de la ligne *CF*, sera également distant de *D* & de *E*; cette ligne *CF* sera donc [3] perpendiculaire à *DE*, c'est à dire, à la ligne entiere *AB*.

Si le point *C* donné hors de la ligne *AB* est proche d'une des extrémitez *A*, & si on ne peut prolonger cette même ligne; Alors de ce point *C* à deux points *D* & *E* pris à la volonté dans la ligne *AB* je menerai *CD* & *CE*; & du point *D* pris pour centre, en prenant un rayon égal à *DC* je decrirai l'arc *GFH*. Du point de rencontre *E*, comme centre en prenant un rayon égal à

[1] *Cor. 1. déf. 29. Geo.* [2] *Par. Supposit.*
[3] *Prop. pres.*

EC je decrirai l'arc *LFM*. Par le point *F* où



ce dernier arc coupera le précedent, & par le point donné *C* je menerai la ligne *CF* qui sera la perpendiculaire cherchée. Car le point *D* est autant éloigné de *C* comme de *F*, puisque [1] le rayon $DF = DC$. De même le point *E* est également distant de *C* & de *F*, Car $EF = EC$[1]. La ligne *AB* sera donc[2]perpendiculaire à *CF*, & [3]reciproquement *CF* sera perpendiculaire à *AB*.

Dans cette derniere circonstance, si le point *C* est sur le terrain, je prendrai à volonté sur la ligne *AB* les points *D* & *E* & j'attacherai une corde au point *D*, & une autre au point *E*. Aprés les avoir tenduës, je les joindrai par un nœud au point donné *C*; Ensuite je transporterai ce nœud vers l'autre côté de *AB*; & ces cordes étant droites je ficherai un picquet à l'endroit où se trouvera ce nœud, par exemple en *F*. La ligne menée par le point donné *C* & par ce point *F* sera [1] perpendiculaire.

Lorsque le point *C* est donné sur le terrain hors de la ligne *AB*, ces methodes peuvent seulement avoir lieu lorsqu'il n'est éloigné de *AB* que d'une distance mediocre. Il y a une autre methode [4] pour les grands éloignemens.

Si le point donné *C* est sur l'extrêmité d'une ligne droite, je donnerai dans la suite [5] une une methode pour satisfaire à ce problême.

[1] *Par Supposition.* [2] *Prop. pref.*
[3] *Cor 1. Prop. pref.* [4] *Page 396.*
[5] *Pag. 333.*

COROLLAIRE III.

On tire encore de cette propoſition une methode pour couper geometriquement, c'eſt à dire, par regles infaillibles, une ligne en deux parties égales. Soit la ligne *A B* qu'il faille couper en deux parties égales. Il faut des extrêmitez *A* & *B* de cette ligne *A B* décrire les arcs *DFG* & *DCG* d'une même ouverture de compas priſe à volonté, & aſſez grande pour que ces deux arcs ſe coupent dans les points *G* & *D*. Je

mene enſuite par ces deux points d'interſection *G* & *D* la ligne droite *GD* : je dis que le point *E* par où cette ligne *GD* coupe la ligne *AB* eſt le milieu de *AB*. Parceque les points *G* & *D* ſont également diſtans de *A* & de *B*, à cauſe que les rayons *AD*, *DB*; *AG*, *BG* ſont [1] meſurez par la même ouverture de compas. Et partant [2] la ligne *GD* eſt perpendiculaire à *AB* par le milieu. Donc enfin *AE*=*EB*.

[1] *Par ſuppoſ.*
[2] *Prop. preſ.*

PROPOSITION VI.

1. *La ligne menée d'un point pris hors d'une ligne droite perpendiculairement à cette même ligne, est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener de ce point à cette même ligne droite.*
2. *Reciproquement la ligne qui est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point pris hors d'une ligne droite à cette même ligne, lui est perpendiculaire.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

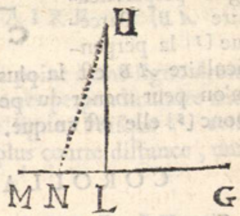
SOit le point *A* pris à volonté hors la ligne *BC*, & que de ce point *A* on mene la ligne *AE* perpendiculairement à la ligne *BC*. Je dis que cette ligne *AE* est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener du point *A* à cette ligne *BC*; qu'elle sera, par exemple, plus courte que la ligne *AD* menée à volonté du point *A* à cette ligne *BC*. Pour le demontrer soit [1] prolongée la perpendiculaire *AE* jusqu'en *F*, de sorte que *EF* devienne égale à *AE*; qu'on mene ensuite la ligne *DF*.

[1] *Demande 2. Geo.*

Puiſque *AF* eſt perpendiculaire à *BC*, reciproquement [1] *BC* eſt perpendiculaire à *AF*; & à cauſe que [2] $AE = EF$, *BC* eſt perpendiculaire au milieu de *AF*. Donc [3] $DA = DF$. Or [4] $AF < AD + DF$. Donc [5] la moitié de *AF*; c'eſt à dire la perpendiculaire *AE* ſera plus petite que la moitié de $AD + DF$ qui eſt *AD*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si du point *H* pris à volonté hors la ligne *MG*, on mene la ligne *HL* à cette ligne *MG*, de ſorte que la ligne *HL* ſoit la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point *H* à cette même ligne *MG*, je dis que cette ligne *HL* ſera perpendiculaire à *MG*. Car ſi *HL* n'étoit pas perpendiculaire à *MG*, & que ce fût, par exemple, la ligne *HN* qui fût perpendiculaire à *MG*, la ligne perpendiculaire *HN*



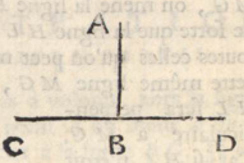
menée du point *H* à *MG* ne ſeroit pas la plus courte de toutes; car on en auroit une qui ſeroit encore plus courte, ſçavoir cette ligne *HL* qu'on ſuppoſe la plus courte de toutes; mais la ligne menée du point *H* perpendiculairement à la

[1] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.* [2] *Par construction.*
[3] *Prop. 3. Geo.* [4] *Prop. 1. Geo.*
[5] *Ax. 11. gen.*

ligne MG eſt [1] la plus courte de celles qu'on peut mener du point H à la ligne MG, & [2] il eſt évidemment impoſſible qu'il y ait une ligne plus courte que la plus courte. Donc la ligne HL étant la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point H à une autre ligne MG, eſt perpendiculaire à cette ligne MG, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc d'un même point, par exemple du point A pris hors d'une ligne droite CD dans un même plan, on ne peut mener à cette ligne CD que la ſeule ligne perpendiculaire AB. Parceque [3] la perpendiculaire AB eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point A à la ligne CD. Donc [3] elle eſt unique.



COROLLAIRE II.

Si par un point également diſtant des extrêmitez d'une ligne droite on lui mene une autre ligne droite perpendiculairement, cette derniere ſera perpendiculaire au milieu de la premiere.

Soit le point A également diſtant des ex-

[1] *Premiere partie de la Prop. preſ.*
[2] 2e. *Partie de la Prop. preſ.*
[3] *Ax. 2. Geo.*

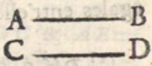
trêmitez *B* & *C* de la ligne *BC*; par ce point *A* ſoit menée une ligne, par exemple, *AD* perpendiculaire à *BC*: je dis que *AD* doit neceſſairement être perpendiculaire à *BC* par le point du milieu. Car ſi ce n'étoit pas par le point du milieu, ce ſeroit par un autre point; par le point *E* milieu de la ligne *BC* ſoit menée la ligne *EA* perpendiculaire à cette ligne *BC*, la ligne *EA* paſſera [1] par le point *A*; & partant du point *A* on pourroit mener deux lignes perpendiculaires à la même ligne *BC* dans le même plan, ce qui eſt [2] impoſſible.

COROLLAIRE III.

Donc la diſtance d'un point à une ligne droite doit être meſurée par une perpendiculaire menée de ce point à cette ligne. Puiſque [3] cette perpendiculaire eſt la plus courte diſtance, unique & immuable.

COROLLAIRE IV.

Donc ſi la ligne *AB* eſt parallele à la ligne *CD*, toutes les lignes menées perpendiculairement de l'une à l'autre, ſeront égales entr'elles. Car, puiſque

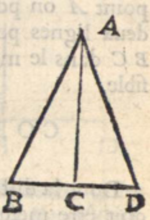


[1] *Prop. 4. Geo.* [2] *Cor. 1. Prop. preſ.*
[3] *Premiere part. Prop. preſ.*

[1] la ligne *AB* est également distante dans toute sa longueur de la ligne *CD*, chaque point de cette ligne *AB* sera aussi également distant de la ligne *CD*. Or la distance de chaque point de la ligne *AB* à la ligne *CD* est [2] mesurée par la ligne qui en est menée perpendiculairement à la ligne *CD*. Donc toutes les perpendiculaires menées d'une parallele à l'autre sont égales entr'elles.

COROLLAIRE V.

Si les lignes *AB* & *AD* sont menées du point *A* pris dans la perpendiculaire *AC* à des points de la ligne *BD* également distans de la perpendiculaire *AC*, ces lignes obliques *AB* & *AD* seront égales entr'elles. Puisque [3] la ligne *AC* perpendiculaire au milieu de *BD* a le point *A* également distant des points *B* & *D*.



COROLLAIRE VI.

Reciproquement si les obliques *AB* & *AD* menées d'un point *A* de la perpendiculaire sur la ligne *BD* sont égales entr'elles, les distances *BC* & *CD* de la perpendiculaire seront [2] aussi égales entr'elles.

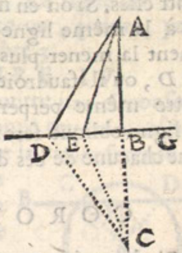
[1] *Déf. 8. Geo.* [2] *Cor. 2. Prop. pres.*
[3] *Prop. 3. Geo.*

PROPOSITION VII.

Entre les lignes droites menées d'un point pris hors d'une ligne droite à cette ligne, celles qui ſont plus éloignées de la perpendiculaire ſont plus longues, & celles qui en ſont plus proches ſont plus courtes.

DEMONSTRATION.

Soit donné le point *A* pris à volonté hors la ligne *DG*, de ce point *A* ſoit menée la ligne *AB* perpendiculairement à la ligne *DG*, & enſuite de ce point *A* à la ligne *DG* ſoient menées à volonté les lignes *AE*, *AD*, &c. Je dis que la ligne *AD* qui eſt plus éloignée de la perpendiculaire *AB*, eſt plus longue que la ligne *AE*, qui eſt plus proche de cette perpendiculaire. Pour le demontrer ſur la perpendiculaire *AB* prolongée ſuffiſamment ſoit priſe la partie $BC = AB$, & ſoient menées les lignes droites *CE* & *CD*. Puiſque *AC* eſt [1] perpendiculaire à *DG*, *DG* ſera [2] auſſi perpendiculaire à *AC*, même au milieu de *AC*. Donc [3] $AD = DC$ & $AE = EC$. Mais [4] $AD + DC > AE + EC$. Donc

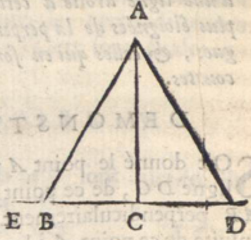


[1] *Suppoſit.* [2] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[3] *Prop. 3. Geo.* [4] *Prop. 2. Geo.*

[1] $AD > AE$, *ce qu'il falloit demontrer.*

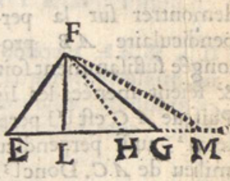
COROLLAIRE I.

Donc d'un même point *A* pris à volonté hors d'une ligne droite *ED*, on ne peut mener à cette même ligne plus de deux lignes droites égales entr'elles. Soient par exemple les lignes *AB* & *AD* également distantes de la perpendiculaire *AC*, elles seront [2] égales entr'elles. Si on en menoit une 3^{e} du même point *A* à la même ligne *ED*, il faudroit necessairement la mener plus proche de *AC* que *AB* ou *AD*, ou il faudroit la mener plus éloignée de cette même perpendiculaire *AC*. Donc cette 3^{e} ligne oblique seroit plus petite ou plus grande que chacune de ces deux *AB* ou *AD*.



COROLLAIRE II.

Si du point *F* on mene les lignes *FG* & *FE*, de sorte que *EG* se termine au point *G* plus éloigné de la ligne perpendiculaire *FL*, que le point *E* auquel se termine la ligne *FE* : je dis



[1] *Ax. 11. gen.* [2] *Cor. 6. Prop. 5. prec. Geo.*

que

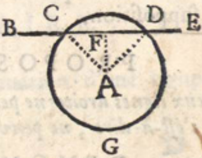
que la ligne *FG* eſt plus grande que *FE*. Car prenons le point *H* autant éloigné du point *L* que le point *E*, alors [1] nous aurons $FH = FE$. Or [2] $FG > FH$. Donc $FG > FE$.

COROLLAIRE III.

Une ligne droite ne peut couper une circonference de cercle qu'en deux points. Car ſi la ligne *AE*, par exemple, pouvoit couper la circonference *BFDC* en trois points *B*, *C*, *D*; du centre *G* on pourroit mener trois lignes droites [3] égales entr'elles à ces 3 points *B*, *C*, *D*, qui ſeroient [4] communs & à la ligne droite *AE* & à la circonference; & il eſt [5] impoſſible que du centre *G* on puiſſe mener 3 lignes droites à *AE* qui ſoient égales entre elles. La ligne *AE* ne peut rencontrer cette circonference en 4 points, puiſque le nombre 4 ſuppoſe le nombre 3.

COROLLAIRE IV.

Une ligne droite qui rencontre une circonference de cercle en deux points, coupe cette circonference. Soit la ligne *BE* qui rencontre la circonference *CGD* dans les points *C* & *D* : je dis que cette ligne *BE* coupe la circonference *CGD*. Pour le démontrer, il faut mener du centre *A* aux points *C* & *D* les rayons *AC*, *AD*, & la perpendiculaire *AF*. Il eſt évident que, lorſqu'une ligne prolongée, s'il eſt neceſſaire, ſe trouve de part & d'autre d'une autre ligne, cette premiere ligne coupera la ſeconde. Or la ligne *BE* rencontrant [4] la circonference *CGD* dans les points *C* & *D*, ſe trouve de part & d'autre de la circonference *CGD*.



Premierement, *BE* ſe trouve d'un côté de la cir-

[1] *Cor. 5. Prop. 6. Geo.* [2] *Prop. preſ.*
[3] *Cor. 1. déf. 29. Geo.* [4] *Suppoſit.*
[5] *Cor. 1. Prop. preſ.*

conference *DCG* ; car cette circonference se trouve entre le centre *A* & les parties *BC* & *DE* de la ligne *BE* ; puisque toutes les lignes menées du centre *A* à ces parties *BC* & *DE* sont [1] chacune plus longues que les rayons *AC* & *AD*, étant plus éloignés de la perpendiculaire *AF* que les rayons *AC* & *AD*.

Secondement, *CD* qui est partie de *BE*, se trouve d'un autre côté de la circonference ; car *CD* se trouve entre le centre & la circonference *CGD*, puisque [2] toutes les lignes qu'on pourra mener du centre *A* à la ligne *CD* seront chacune plus courtes que les rayons *AC* & *AD*, de sorte que la perpendiculaire *AF* sera [3] la plus courte. Toutes les lignes qu'on pourra mener du centre *A* à la ligne *CD*, se termineront donc [2] entre le centre & la circonference. Or toutes les extremitez de ces lignes seront dans la ligne même *CD*. Cette ligne *CD* sera donc entre le centre & la circonference. La ligne *BE* coupera donc le cercle.

COROLLAIRE V.

Si une ligne droite touche une circonference de cercle, elle la touchera donc en un seul point. Car si elle la touchoit en deux, elle la couperoit [4]. Elle ne seroit donc pas touchante ; ce qui est contraire à la supposition.

PROPOSITION VII.

Deux lignes droites ne peuvent avoir un segment commun, c'est-à-dire, ne peuvent avoir une partie commune.

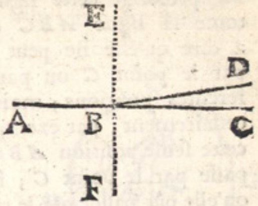
DEMONSTRATION.

Soient les lignes *BD* & *BC* : je dis que ces deux lignes *BD* & *BC* ne peuvent avoir une partie commune, par exemple *AB* ; c'est-à-dire, que si *ABC* est une ligne droite, *ABD* ne peut être aussi une ligne droite. Pour le démontrer, soit menée par le point *B* la ligne *EF* perpendiculaire à la ligne *ABC* qu'on suppose

[1] *Prop. presente.*
[2] *Cor. 2. déf. 29. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 6. Geo.*
[4] *Cor. 4. Prop. pres.*

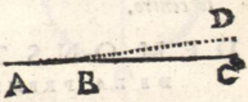
une ligne

une ligne droite. Reciproquement [1] toute cette ligne *ABC* sera perpendiculaire à *EF*. Pareillement *AB* partie de *AC* sera perpendiculaire à *EF*. Or si *AB* & *BD* étoient aussi une même ligne droite, la ligne *AB* étant prolongée passeroit par *BD*; & après avoir pris *BF* égale à *BE*, cette ligne *ABD* passeroit [2] par tous les points également distans des points *E* & *F*, & partant [3] *BD* seroit aussi perpendiculaire à *EF*. Donc les deux lignes *BC* & *BD* seroient perpendiculaires à la même ligne *EF* par le même point *B* dans un même plan, ce qui est [4] impossible. Et partant deux lignes droites, par exemple *BD*, *BC*, ne peuvent avoir une partie commune *AB*, *ce qu'il falloit demontrer*.



COROLLAIRE.

Donc la position ou situation d'une ligne droite est determinée par la position de deux de ses points. Soient les points *A* & *B*, je dis que la position de la ligne qui passe par ces deux points est de-



[1] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo.* [2] *Prop.* 4. *Geo.*
[3] *Prop.* 5. *Geo.* [4] *Cor. Prop.* 4. *Geo.*

terminée. 1°. Du point *A* au point *B* on ne peut [1] mener qu'une seule ligne droite. 2°. Si on prolonge cette ligne *AB*, la position de toute la ligne *ABC* est determinée, c'est à dire qu'elle ne peut passer indifferemment par le point *C* ou par le point *D* dans differentes positions; mais qu'elle doit passer necessairement, par exemple, par le point *C* dans cette seule position *ABC*. Car supposons qu'elle passe par le point *C*; supposons pareillement qu'elle pût passer par le point *D*, il faudroit donc que *ABD* & *ABC* fussent deux lignes droites, ce qui est [2] impossible.

PROPOSITION IX.

1. *Si on prend un point hors le centre & la circonference d'un cercle; la ligne droite menée de ce point à cette circonference, laquelle étant prolongée passe par le centre, sera la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonference.*

2. *Reciproquement si une ligne droite menée d'un point pris hors le centre, & la circonference d'un cercle à cette circonference, est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette cerconference; si on la prolonge, elle passera par le centre.*

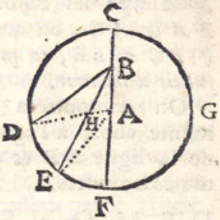
DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

UN point peut être pris hors le centre & la circonference d'un cercle en deux manieres;

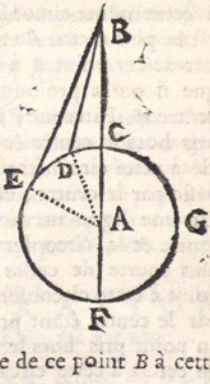
[1] *Cor. 3. Ax. 2. Geo.* [2] *Prop. pres.*

ſçavoir, ou entre le centre & la circonference, ou hors le cercle.

Soit le point *B* pris entre le centre *A* & la circonference *CDEFG* : je dis que *BC* menée de ce point *B* à cette circonference, laquelle ligne *BC* étant prolongée paſſe par le centre *A*, ſera plus courte que toute autre ligne poſſible menée de ce point à cette circonference ; qu'elle ſera, par exemple, plus courte que *BD*. Car



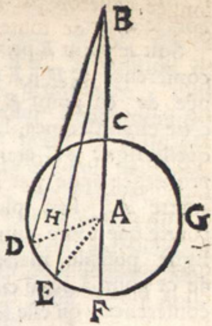
* $DB + BA > DA$. Or [1] $DA = AC$. Donc $DB + BA > CA$, c'eſt à dire, que $DB + BA > CB + BA$. En retranchant *BA* de part & d'autre, on aura [2] $BC\ BD <$; on demontrera de même que $BC < BE$.



Soit le point *B* pris hors le cercle, je dis que *BC* menée de ce point *B* à cette circonference, laquelle ligne *BC* étant prolongée paſſe par le centre *A*, ſera plus courte que toute autre ligne, qu'elle ſera, par exemple, plus courte que *BE* menée de ce point *B* à cette

* *Prop.* 1. *Geo.* [1] *Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.*
[2] *Ax.* 17. *gener.*

circonference. Car * $BE + EA > BA$, c'eſt à dire, que $BE + EA > BC + CA$. Donc en retranchant de part & d'autre les rayons EA & AC, on aura (1) $BC < BE$, *ce qu'il falloit demontrer.*



On demontrera la même choſe à l'égard de la ligne BD & de toutes les autres.

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne BC menée du point B pris hors le centre & la circonference du cercle $CDEFG$ à cette même circonference ; ſi cette ligne BC eſt la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point B à cette circonference : je dis que ſi on la prolonge, elle doit paſſer par le centre A. Parceque (2) la ligne menée d'un point pris hors le centre & la circonference d'un cercle à cette circonference, qui étant prolongée paſſe par le centre, eſt la plus courte de toutes. Or une ligne menée d'un point pris hors le centre & la circonference d'un cercle, étant la plus courte de celles qu'on peut mener de ce point à cette circonference, ſi elle ne paſſoit pas par le centre étant prolongée ; la ligne menée du point pris hors le centre & la circonference du cercle à cette circonference, qui étant pro-

* *Prop. 1. Geo.* (1) *Ax. 17. gener.*
(2) *Part. 1. Prop. preſ.*

longée passeroit par le centre ne seroit pas la plus courte de toutes celles qu'on peut mener de ce point à cette circonference. Car si cette ligne *BC* qui seroit (1) la plus courte de toutes ne passoit par le centre , elle passeroit par ailleurs & seroit plus courte que celle qui étant prolongée passeroit par le centre ; puisqu'on la supposeroit la plus courte de toutes, ce qui est contraire à la premiere partie de la Proposition presente. Or (2) il ne peut y avoir une ligne *BC* plus courte que la plus courte. Donc la ligne qui est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un point pris hors le centre & la circonference, étant prolongée passera par le centre, *ce qu'il falloit demontrer.*

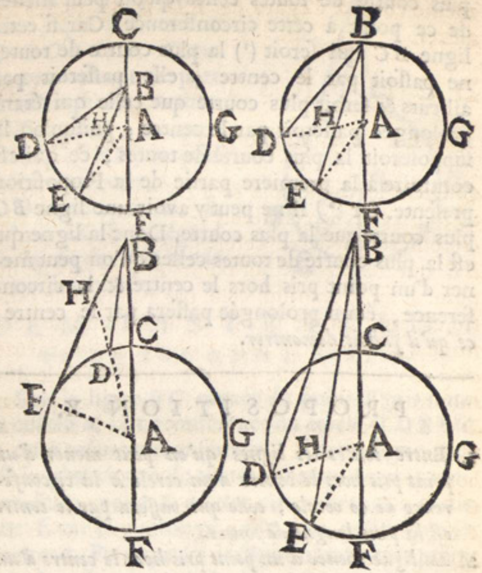
PROPOSITION X.

1. *Entre toutes les lignes qu'on peut mener d'un point pris hors le centre d'un cercle à la circonference de ce cercle, celle qui passera par le centre est la plus longue de toutes.*
2. *La ligne menée d'un point pris hors le centre d'un cercle à la circonference du même cercle, & qui se termine à un point de la circonference plus proche du point où se termine celle qui passe par le centre, est plus longue que celle qui se termine du même côté de celle qui passe par le centre, à un point plus éloigné.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le point *B* pris hors le centre du cercle *DEFGC*, c'est à dire, ou entre le centre &

(1) *Supposit.* (2) *Cor. 1. Ax. 2. gener.*



la circonference, ou sur la circonference, ou hors le cercle : je dis que la ligne *B F* qui passe par le centre *A* est la plus longue de toutes, par exemple, qu'elle est plus longue que *BE*, *BD*, &c. Soient menez les rayons *AE*, *AD*, &c. $AF = AE$* . Donc en ajoûtant de part & d'autre *AB*, on aura (1) $BA + AF = BA + AE$. Mais (2) $BA + AE > BE$. Donc (3) $BA + AF$, c'est à dire, $BF > BE$, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Cor. 1. déf. 29. Geo.* (1) *Ax. 4. gen.*
(2) *Prop. 1. Geo.* (3) *Demande 1. gen.*

Par le même raisonnement on démontrera la même chose à l'égard de *BD* & de toutes les autres.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes *BE* & *BD* menées du point *B* pris hors le centre du cercle *CDEFG* à la circonference de ce cercle : je dis que la ligne *BE* qui se termine au point *E* plus proche du point *F* où se termine celle qui passe par le centre, est plus longue que la ligne *BD* qui se termine à un point *D* plus éloigné & du même côté de celle qui passe par le centre. Pour le démontrer, soient menés du centre *A* aux points *D* & *E*, les rayons *AD* & *AE*. Il est constant * que $HD < HE$, puisque le point *H* est pris hors le centre & la circonference du cercle *CDEFG*. Donc en ajoûtant de part & d'autre *BH*, on aura [1] $EH + HB > DH + HB$. Mais [2] $DH + HB > BD$. Donc [3] *BE* sera plus grande que *BD*, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Part.* 1. *de la Prop.* 9. *Geo.*
[1] *Ax.* 7. *general.*
[2] *Prop.* 1. *Geo.*
[3] *Ax* 22. *general.*

PROPOSITION XI.

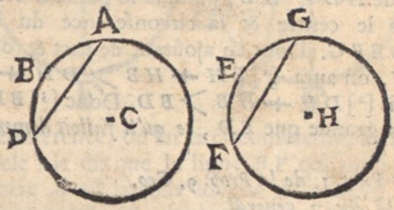
Entre les arcs du même cercle, ou des cercles égaux, qui n'excedent point une demie circonference;

1. *Ceux qui sont égaux sont soûtenus par des cordes égales;*

2. *Les plus grands sont soûtenus par des cordes plus grandes, & les plus petits, par des cordes plus petites.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les arcs égaux *ABD* & *GEF* de cercles égaux : je dis que les cordes *AD* & *GF* sont aussi égales entr'elles. Car supposons



que l'arc *GEF* soit appliqué sur l'arc *ABD*, de sorte que le point *G* soit posé sur le point *A*, & le point *F* sur le point *D*; ces deux arcs *ABD*, & *GEF* se confondront en un seul arc *ABD*; puisque l'un & l'autre sont * décrits à même distance des centres *C* & *H*. Les cordes *AD* & *GF* ayant donc par cette application les points *A* & *D* communs, cette ligne

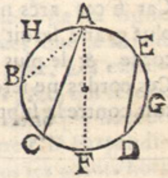
* *Par supposit.*

GF ſe confondra avec la ligne *AD*. Car [1] dans cette ſituation l'une & l'autre ne peuvent être deux lignes droites differentes. Les arcs égaux ſont donc ſoutenus par des cordes égales, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soit l'arc *AHC* plus grand que l'arc *DGE*; je dis que la corde *AC* eſt plus grande que la corde *DE*. Pour le démontrer; ſur le plus grand arc *AHC*, je prens un arc *AHB* qui ſoit égal à l'arc propoſé *DGE*, & je mene la corde *AB*. Alors cette corde *AB* ſera [2] égale à la corde *DE*. Or la corde *AC* eſt [3] plus grande que la corde *AB*. Cette corde *AC* eſt [4] donc plus grande que la corde *DE*, *ce qu'il falloit démontrer.*



COROLLAIRE I.

Reciproquement les plus grandes cordes ſoutiennent des arcs plus grands, & les plus petites cordes ſoutiennent des arcs plus petits. Soit la corde *AC* plus grande que la corde *ED*; je dis que l'arc *AHC* eſt plus grand que l'arc *EGD*. Car l'arc

[1] *Cor. 3. Ax. 2. Geo. page 234.*
[2] *Part. 1. Prop. preſ.*
[3] *Part. 2. Prop. 10. Geo. page 261.*
[4] *Demande 1. Gen.*

AHC peut ſeulement être plus grand ou plus petit que *EGD*, ou égal à *EGD*. Or dans la ſuppoſition preſente l'arc *AHC* ne peut être plus petit que l'arc *EGD*. Car [1] la corde *AC* ſeroit plus petite que la corde *ED*, ce qui eſt contre la ſuppoſition. L'arc *AHC* ne peut être égal à l'arc *EGD*. Car [2] la corde *AC* ſeroit égale à la corde *ED*; ce qui eſt encore contre la ſuppoſition. Il reſte donc que l'arc *AHC* eſt plus grand que l'arc *EGD*.

COROLLAIRE II.

Les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux. Car ſi ces arcs n'étoient égaux, celui qui ſeroit plus grand ſeroit [2] ſoutenu par une plus grande corde, & le plus petit par une plus petite corde. Ces cordes ne ſeroient donc pas égales, ce qui ſeroit contre la ſuppoſition.

PROPOSITION XII.

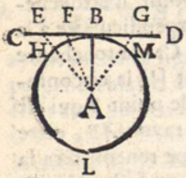
1. *Une ligne perpendiculaire à un rayon par le point qui eſt commun à ce rayon, & à la circonference, eſt touchante.*
2. *Si une ligne droite touche une circonference de cercle; une autre ligne droite étant menée par le centre au point d'attouchement, ſera perpendiculaire à cette touchante.*
3. *Une ligne menée perpendiculairement à une touchante par le point d'attouchement, paſſe par le centre.*

[1] *Part. 2. Prop. preſ.*
[2] *Part. 1. Prop. preſ.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit la ligne *CD* perpendiculaire au rayon *AB* par ſon extremité *B* : Je dis que cette ligne *CD* touche la circonference *BHLM*.



Car *CD* étant [1] perpendiculaire à *AB*, reciproquement [2] *AB* eſt perpendiculaire à *CD*. Toutes les lignes *AE*, *AF*, *AG*, &c. qui ſeront menées du point *A* à tous les points poſſibles de la ligne *CD* ſeront [3] chacune plus longues que le rayon *AB*, ou que ſes égaux *AH*, *AM*, &c. Les extremitez de ces lignes *AE*, *AF*, *AG*, &c. qui ſeront dans la ligne même *CD*, ſeront donc [4] hors de la circonference *BHLM*. La ligne *CD* perpendiculaire [1] au rayon *AB*, a donc tous ſes points hors de la circonference *BHLM*, excepté le point *B*. Cette ligne *CD* touche donc [5] la circonference *BHLM*, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

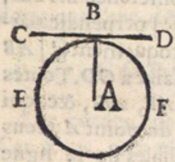
Une ligne droite peut toucher une circonference de cercle, & perſonne ne doit le nier : cela eſt évident par cette premiere partie.

[1] *Par ſuppoſition.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo. pag.* 242.
[3] *Part.* 1. *Prop.* 6. *Geo. pag.* 246.
[4] *Cor.* 2. *def.* 29. *Geo. pag.* 205.
[5] *Def.* 34. & *Cor.* 5. *Prop.* 7. *Geo. pag.* 254.

DEMONSTRATION.

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la touchante *CD*, & ſon point d'attouchement ſoit *B* : je dis que le rayon *AB* mené du centre *A* au point d'attouchement *B*, eſt perpendiculaire à la touchante *CD*. Car la touchante CD rencontrant [1] la circonference *BEF* par le point *B* qui eſt l'extremité du rayon *AB*, cette touchante *CD* ne rencontrera la circonference *BEF* [2] que dans ce ſeul point *B*. Tous les autres points de la ligne *CD* ſeront [3] donc plus éloignez du centre *A* que le point *B*. La ligne *AB* ſera donc la plus courte de celles qu'on peut mener du centre *A* à la touchante *CD*. Le rayon *AB* ſera donc [4] perpendiculaire à la touchante, *ce qu'il falloit démontrer*.



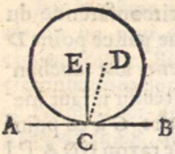
DEMONSTRATION

DE LA TROISIEME PARTIE.

SOit la ligne touchante *AB*, & par ſon point d'attouchement *C*; ſoit menée la ligne *CE* perpendiculaire à cette touchante *AB* : je dis que la perpendiculaire *CE* paſſera par le centre du cer-

[1] *Par Suppoſition.*
[2] *Cor. 5. Prop. 7. Geom. pag. 254.*
[3] *Cor. 2. def. 29. Geo. page 205.*
[4] *Part. 2. Prop. 6. Geo. pag. 246.*

cle. Pour le démontrer il ſuffit de faire voir qu'il eſt impoſſible que le centre du cercle puiſſe



être ailleurs que dans cette ligne *CE* prolongée, s'il eſt neceſ-ſaire. Car ſi le centre du cercle étoit ailleurs que dans la ligne perpendiculaire *CE*; s'il étoit, par exemple, en *D*, alors du point *D* au point d'attouchement *C* ayant mené la ligne *DC*, cette ligne *DC* ſeroit [1] perpendiculaire à la touchante *AB*. Mais [2] *CE* étoit auſſi perpendiculaire à *AB*. Par ce même point *C* il y auroit donc deux lignes perpendiculaires à la même ligne *AB* dans le même plan, ce qui eſt [3] impoſſible. Il eſt donc pareillement impoſſible que la ligne perpendiculaire à la touchante *AB* par le point d'attouchement, ne paſſe par le centre du cercle, *ce qu'il falloit démontrer*.

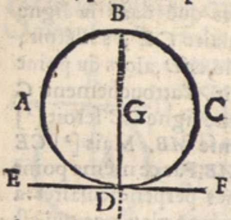
COROLLAIRE I.

La ligne touchante menée par l'extremité d'un rayon, eſt perpendiculaire à ce rayon. Car cette extremité de rayon eſt [4] le ſeul point qui ſoit commun à la circonference & à la touchante. Ce même rayon eſt donc [1] perpendiculaire à la touchante; & reciproquement la touchante lui eſt [5] perpendiculaire. Ce Corollaire eſt la converſe de la premiere partie de la propoſition preſente.

[1] *Partie 2. Prop. preſ.*
[2] *Par la ſuppoſition.*
[3] *Cor. Prop. 4. Geom. pag. 240.*
[4] *Cor. 5. Prop. 7. pag. 254.*
[5] *Cor. 1. Prop. 5. Geom. pag. 242.*

COROLLAIRE II.

Soit le point *D* donné dans la circonference du cercle, par exemple *ADCB*; & que par ce point *D* il faille mener une touchante. Pour y réussir il faut mener du centre *G* à ce point donné *D* le rayon *GD* & [1] ensuite mener la ligne *EF* perpendiculaire au rayon *GD* par ce point *D*; cette ligne *EF* sera [2] touchante de la circonference *ADCB* par le point donné *D*.



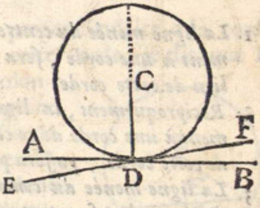
COROLLAIRE III.

Une ligne menée par le centre d'un cercle perpendiculairement à une touchante, passera par le point d'attouchement. Cette verité est évidente, puisqu'il est impossible que cette perpendiculaire ne passe par le point d'attouchement. Car si cette perpendiculaire passoit par un autre point de la touchante, que par celui d'attouchement, alors ayant mené du centre au point d'attouchement un rayon, il seroit [3] aussi perpendiculaire à la touchante. Il y auroit donc deux perpendiculaires menées du centre à la touchante, ce qui est [4] impossible. Ce Corollaire est l'inverse ou reciproque de la troisiéme partie de la proposition presente.

[1] *Cor. 2. Prop. 5. Page 243.*
[2] *Part. 1. Prop. pres.*
[3] *Part. 2. Prop. pres.*
[4] *Cor. Prop. 4. Geom. pag. 240.*

COROLLAIRE IV.

Par le même point d'une circonference de cercle on ne peut mener qu'une touchante à cette circonference. Soit par exemple le point *D* d'une circonference de cercle, si on pouvoit mener par ce point *D* les deux lignes *AB* & *EF*, de sorte que l'une & l'autre fussent touchantes, l'une & l'autre seroient [1] perpendiculaires à la même ligne ou au même rayon *C D* par le même point, & dans le même plan, ce qui est [2] impossible. Toute ligne menée par l'extremité d'un rayon, & qui forme avec ce rayon quelque angle oblique ne peut donc toucher la circonference du cercle. Car autrement il pourroit y avoir deux touchantes par le même point, sçavoir la perpendiculaire [1] & [3] cette oblique.



COROLLAIRE V.

Si on mene par quelque point d'une circonference de cercle une ligne droite touchante, & si par le même point on mene encore une autre ligne droite, cette derniere ligne droite coupera la circonference car ou elle coupera, ou elle touchera

[1] *Cor. 1. Prop. pres.*
[2] *Cor. Prop. 4. Geo. pag. 240.*
[3] *Par supposition.*

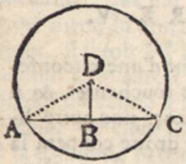
cette circonference. Or elle ne la peut toucher, car il y auroit par le même point deux lignes touchantes, ce qui est [1] impossible. Cette derniere lui coupera donc la circonference.

PROPOSITION XIII.

1. *La ligne menée du centre du cercle perpendiculairement à une corde, sera perpendiculaire par le milieu de cette corde.*
2. *Reciproquement, la ligne menée perdendiculairement à une corde de ce cercle par le point du milieu de cette corde, passera par le centre du cercle.*
3. *La ligne menée du centre du cercle par le milieu d'une corde, sera perpendiculaire à cette corde.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit la ligne *DB* menée du centre *D* du cercle perpendiculairement à la corde *AC*: je dis que cette ligne *DB* est perpendiculaire au milieu de cette corde. Car [2] la ligne menée d'un point également distant des extremitez *A* & *C* de la corde *AC*, perpendiculairement à cette ligne, sera perpendiculaire au milieu de cette même ligne *AC*. Or la ligne *DB* menée perpendiculairement à la ligne *AC* par le centre *D*, est menée par un point également distant des extremitez *A* & *C* de la ligne *AC*, puisque [3] les



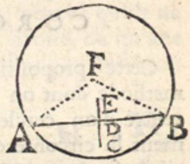
[1] *Cor. 4. Prop. pres.*
[2] *Cor. 2. Prop. 6. Geo. pag. 248.*
[3] *Cor. 1. Def. 29. Geo. Page 205.*

rayons

rayons *DA* & *DC* ſont égaux entr'eux. Donc la ligne *DB* menée perpendiculairement du centre *D* à la corde *AC* ſera perpendiculaire par le milieu de cette corde, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *EC* perpendiculaire à la corde *AB* par le milieu de cette corde : je dis que la ligne *EC* étant prolongée paſſera par le point *F* centre du cercle. Car la ligne *EC* étant perpendiculaire au milieu d'une autre *AB* paſſera [1] par tous les points qui ſont également diſtans des extrêmitez *A* & *B*. Or le centre *F* eſt également diſtant des extrêmitez *A* & *B*. Puiſque les rayons *FA*, *FB* ſont égaux entr'eux. Donc la ligne *EC* perpendiculaire à la corde *AB* par le milieu, paſſera par le centre *F* ſi elle eſt prolongée, *ce qu'il falloit demontrer.*

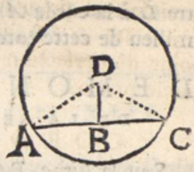


DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *DB* menée du centre *D* du cercle au milieu *B* de la corde *AC* : je dis que cette ligne *DB* ſera perpendiculaire à cette corde *AC*. Car cette ligne *DB* aura deux de ſes points également diſtans des ex-

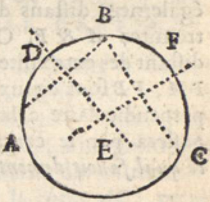
* *Cor*, 1. *déf.* 29. *Geo.*
[1] *Prop.* 4. *Geo.*

trêmitez *A* & *C*, sçavoir le point *D* à cause des rayons égaux *D A* & *D C*. Cette ligne *D B* aura encore le point *B* également distant des extrêmitez *A* & *C*; puisque ce point *B* est (1) le milieu de la corde *AC*. Donc (2) *D B* sera perpendiculaire à *AC*, *ce qu'il falloit demontrer.*



COROLLAIRE I.

Cette proposition sert de fondement à une methode dont on peut se servir pour trouver le centre d'un cercle lorsqu'on en connoît seulement la circonference. Soit, par exemple, la circonference *ACB* dont il faut trouver le centre. Du point *B* pris dans cette circonference il faut mener à volonté deux cordes de cercles *BA* & *BC*, & par le milieu de ces cordes on leur menera les perpendiculaires *DE* & *FE*; le centre du cercle proposé sera le point d'intersection *E*. Car la ligne *DE* perpendiculaire (1) à la corde *AB* par le milieu de cette corde passe [3] par le centre du cercle. Pareillement la ligne *FE* perpendiculaire au milieu de la corde *BC* passe par le centre du cercle. Donc le centre de ce cercle

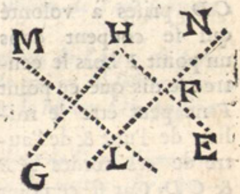


(1) *Par suppos*it. (2) *Prop. 5. Geo.*
(3) *Part. 2. Prop. pres.*

ſera en même-temps dans l'une & dans l'autre de ces perpendiculaires *DE* & *FE*; mais il n'y a qu'un ſeul point qui ſoit commun à ces deux lignes *DE* & *FE*, ſçavoir le point *E*. Donc ce point d'interſection *E* eſt le centre cherché du cercle propoſé.

COROLLAIRE II.

Si on ſe propoſe de faire paſſer une circonference de cercle par trois points pris dans un plan, par exemple, *G*, *H*, *E*, pourvû qu'ils ne ſoient pas pris dans une ligne droite, ou qu'une ligne droite ne puiſſe pas paſſer par ces trois points. Il faut conſiderer ces points comme appartenans à la circonference qu'on cherche. Du point *H* aux points *G* & *E* on menera les lignes *HG* & *HE* qu'on conſiderera comme cordes de la circonference qu'on cherche. Enfin par le milieu de ces cordes on leur menera des perpendiculaires *ML* & *NL*; ces perpendiculaires [1] paſſeront par le centre de la circonference cherchée. Donc le centre de cette circonference ſera dans l'une & dans l'autre; & partant ce centre ſera le point de concours *L*, & ſi on ouvre un compas de la diſtance *LH*, *LG* ou *LF*, de cette ouverture on décrira la circonference cherchée.



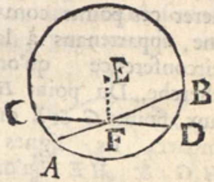
Puiſque [2] tous les points d'une circonference

[1] *Part. 2. Prop. preſ.* [2] *Déf. 26. Geo.*

doivent être également distans d'un même point qui est le centre, si ces trois points étoient en ligne droite, on n'y pourroit faire passer de * circonference de cercle, puisqu'on n'y pourroit trouver un quatriéme point dont on pût mener à ces trois points trois lignes droites égales entr'elles.

COROLLAIRE III.

Il suit de la troisiéme partie de cette proposition, que deux des cordes du même cercle qui se coupent dans un point qui n'est point le centre, ne se couperont jamais par le milieu l'une l'autre. Soient les deux cordes *AB* & *CD* prises à volonté qui se coupent dans un point *F* hors le centre: je dis que ce point *F* ne peut être le milieu de l'une & de l'autre de ces cordes *AB* & *CD*. Car si ce point



F étoit le milieu de ces deux cordes, soit menée la ligne *EF* du centre *E* au point d'intersection *F*, cette ligne *EF* seroit [1] perpendiculaire aux cordes *AB* & *CD*, & reciproquement [2] ces cordes *AB* & *CD* seroient perpendiculaires à la même ligne *EF* par le même point, dans le même plan, ce qui est [3] impossible. Donc il est pareillement impossible que les cordes *AB* & *CD* se puissent couper l'une l'autre par le milieu.

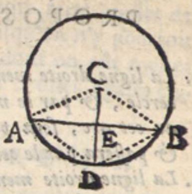
* *Cor. 1. Prop. 7. Geo.* [1] *3^e Part. Prop. pres.*
[2] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.* [3] *Cor. Prop. 4. Geo.*

PROPOSITION XIV.

1. *La ligne droite menée par le milieu d'un arc de cercle, & par le milieu de la corde ſoûtendante de cet arc, ſera perpendiculaire à cette corde, & paſſera par le centre du cercle.*
2. *La ligne droite menée perpendiculairement par le milieu de la corde de cercle, paſſera par le centre de ce cercle, & par le milieu de l'arc ſoûtenu par cette corde.*
3. *La ligne menée par le centre du cercle, & par le milieu de ſa corde, ſera perpendiculaire à cette corde, & paſſera par le milieu de l'arc ſoûtenu par cette corde.*
4. *La ligne menée par le milieu de l'arc, & perpendiculairement à la corde qui en eſt ſoûtendante, coupera cette corde par le milieu, & paſſera par le centre du cercle.*
5. *La ligne menée par le milieu de l'arc d'une circonference de cercle & par le centre, ſera perpendiculaire à la corde ſoûtendante de cet arc, & coupera cette corde par le milieu.*
6. *Enfin la ligne menée par le centre du cercle perpendiculairement à une corde, coupera cette corde par le milieu, & coupera pareillement en deux parties égales l'arc ſoûtenu par cette corde.*

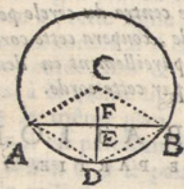
DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit la ligne droite *DE* menée par le milieu *D* de l'arc *ADB*, & par le milieu *E* de la corde *AB* ſoûtendante de cet arc *ADB* : je dis que cette ligne *D E* est perpendiculaire à la corde *A B*, & qu'elle passera par le centre C du cercle. Car 1°. la ligne *D E* aura [1] le point *E* également distant des extrêmitez *A* & *B* de la ligne *A B*. 2°. Puisque l'arc *A D* est [1] égal à l'arc *D B*, les cordes *AD* & *D B* seront [2] égales entr'elles. Donc la même ligne *D E* aura aussi le point *D* également distant des extrêmitez *A* & *B*. Donc la ligne *DE* sera [3] perpendiculaire à la corde *AB*, & [4] passera par le centre C, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *E F* menée perpendiculairement à la corde *A B* par son point du milieu : je dis que cette ligne passera par le centre du cercle.



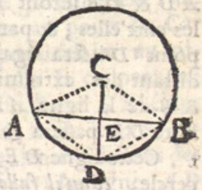
[1] *Supposit.* [2] *Part. 1. Prop. 11. Geo.*
[3] *Prop. 5. Geo.* [4] *Prop. 4. Geo.*

&

& par le milieu de l'arc ſoûtenu par cette corde. Car 1°. cette ligne *E F* paſſera [1] par le centre *C* du cercle. 2°. Cette même ligne aura [2] ſon point *D* également diſtant des extrêmitez *A* & *B*. Donc les cordes *A D* & *D B* ſeront [3] égales entr'elles ; & partant [4] les arcs *A D* & *D B* ſoûtenus par ces cordes ſeront auſſi égaux entr'eux. Donc le point *D* par où paſſe la ligne *F E* eſt le milieu de l'arc *A D B* ſoûtenu par la corde *A B*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *C E* menée par le centre *C* du cercle, & par le milieu *E* de la corde *A B*. Je dis que cette ligne *C E* eſt perpendiculaire à la corde *A B*, & que ſi on la prolonge elle paſſera par le milieu de l'arc *A D B* ſoûtenu par cette corde. 1°. La ligne *C E* [5] ſera perpendiculaire à la corde *A B*. 2°. Cette ligne *C E* paſſera par le milieu de l'arc *A D B* ſoûtenu par cette corde *A B*. Car puiſque *C E* eſt [5] perpendiculaire au milieu de la corde *A B*, cette même ligne *C E* aura [2] le point *D* également diſtant des extrêmitez *A* & *B* de cette corde *A B*; & partant les cordes *A D* & *D B* ſeront égales entr'elles. Donc les arcs *A D* & *D B* ſeront

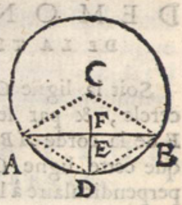


[1] *Prop.* 4. *Geo.* [2] *Prop.* 3. *Geo.*
[3] *Cor.* 4. *Ax.* 2. *Geo.* [4] *Cor.* 2. *Prop.* 11. *Geo.*
[5] 3e *Part. de la Prop.* 13. *Geo.*

[1] aussi égaux entr'eux. Donc la ligne C E étant prolongée partagera l'arc *A D B* en deux parties égales ; *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA QUATRIE'ME PARTIE.

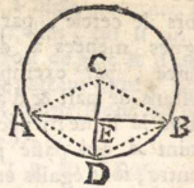
Soit la ligne *D E* menée par le milieu *D* de l'arc *A D B* perpendiculairement à la corde *A B* : je dis que cette ligne *D E* coupera la corde *A B* en deux parties égales, & qu'elle passera par le centre *C* du cercle. Car 1°. puisque l'arc *A D* est égal à l'arc *D B*, les cordes *A D* & *D B* seront [2] égales entr'elles ; & partant le point *D* sera également distant des extrêmitez *A* & *B* de la ligne *AB*. Donc [3] la perpendiculaire *D E* passera par le milieu *E* de la ligne *A B*. 2°. Cette ligne *D E* [4] passera par le centre *C* du cercle, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA CINQUIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *D C* menée par le milieu *D* de l'arc *ADB*, & par le centre *C* du cercle : je dis que cette ligne *D C* est perpendiculaire à la corde *A B*, & que le point *E* par où passe cette ligne *D C* est le milieu de la corde *A B*. Car 1°. le point *D* sera également distant des points *A* &

[1] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* [2] *Prop. 11. Geo.*
[3] *Cor. 2. Prop. 6. Geo.* [4] *Prop. 4. Geo.*



B, comme on l'a fait voir dans les demonſtrations precedentes. 2°. Le centre *C* eſt auſſi également diſtant des mêmes points *A* & *B*. Donc cette ligne *CD* ſera perpendiculaire au milieu de la corde *AB*, *ce qu'il falloit demontrer*.

DEMONSTRATION
DE LA SIXIE'ME PARTIE.

Soit la ligne *CE* menée par le centre *C* d'un cercle, perpendiculairement à une corde *AB* : je dis que la ligne *CE* coupera cette corde *AB* par le milieu *E*, & coupera pareillement l'arc *ADB* en deux parties égales au point *D*. Car 1°. la ligne *CE* ſera ([1]) perpendiculaire au milieu de la corde *AB*; donc elle la coupera en deux parties égales. 2°. Cette ligne *CE* étant perpendiculaire au milieu E de la corde *AB*, aura ([2]) chacun de ſes points également diſtans des extrêmitez *A* & *B*; & partant ([3]) les lignes *AD* & *DB* ſeront égales entr'elles. Donc ([4]) les arcs *AD* & *DB* ſeront égaux entr'eux, c'eſt à dire que l'arc *ADB* ſera partagé en deux parties égales par la ligne droite *CE* prolongée, *ce qu'il falloit demontrer*.

COROLLAIRE I.

D'un point pris hors le centre d'un cercle, c'eſt à dire, pris entre le centre & la circonference, ou ſur la circonference, ou

([1]) *Part. 1. Prop. 13. Geo.* ([2]) *Prop. 3. Geo.*
([3]) *Cor. 4. Ax. 2. Geo.* ([4]) *Cor. 2. Prop. 11.*

hors le cercle, par exemple du point *A* les lignes menées à des points de la circonference, par exemple *B* & *C*, également distans de part & d'autre du point *D* où se termine la ligne menée de ce point *A* qui passe par le centre, sont égales entr'elles. Car (1) la ligne qui passe par le centre & par ce point *D* est perpendiculaire à la soûtendante de l'arc *BDC* aux deux extrêmitez duquel ces lignes *AB* & *AC* sont menées. Donc le point *A* est [2] également distant de *B* & de *C*. Donc *AB* = *AC*.

COROLLAIRE II.

Donc reciproquement si les lignes *AB* & *AC* sont égales entr'elles, les points *B* & *C* sont également distans de part & d'autre de l'extrêmité *D* de la ligne menée du point *A*, & qui passe par le centre. Parcequ'alors les points *A* & *E* seront (3) également distans des points *B* & *C*; & partant (4) la ligne *AD* sera perpendiculaire au milieu de lacorde *BC*. Donc [3] son extrêmité ou point *D* sera également distante de *B* & de *C*.

COROLLAIRE III.

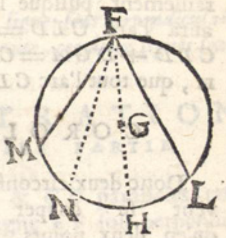
Donc d'un point *A* pris hors le centre d'un cercle, c'est à dire, ou entre le centre & la circonference, ou sur la circonference ou hors le

(1) *Prop. 5. Geo.* [2] *Prop. 3. Geo.*
(3) *Suppos. & Cor. 1. déf. 29. & Cor. 4. Ax. 2. Geo.*
[4] *Prop. 5. Geo.*

cercle, on ne peut mener à cette circonference que deux lignes égales entr'elles ; car si on en menoit une 3[e], on la meneroit de part & d'autre des lignes *A B* ou *A C* : & partant cette 3[e] ligne seroit * plus longue ou plus courte. Donc on n'en peut pas mener trois égales.

COROLLAIRE IV.

Donc si on prend un point, par exemple *F*, hors le centre d'un cercle *L F M N H*, la ligne *F L* qu'on menera de ce point *F* à la circonference, qui se terminera d'un côté de la ligne *F H* qui passe par le centre, à un point plus près du point *H* où se termine cette même ligne *F H*, sera plus longue que la ligne *F M* qui se terminera de l'autre côté à un point *M* plus éloigné. Car soit pris le point *N* autant éloigné du point *H* que le point *L*, on aura ** $FN = FL$; mais [1] $FM < FN$. Donc $FM < FL$.



COROLLAIRE V.

Donc le diamêtre d'un cercle partage la circonference en deux parties égales. Pour le demontrer soit menée à volonté la corde *D B*, & par son milieu soit menée la ligne *A C* perpendiculairement à cette même corde ; la ligne

* 2[e] *Part. de la Prop.* 10. *Geo.*

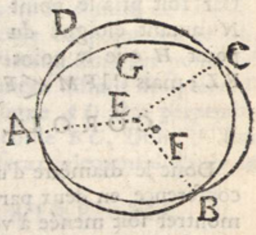
** *Cor.* 1. *Prop. pres.*

[1] 2[e] *Part. Prop.* 10.

AC passera * par le centre *E*, & étant terminée de part & d'autre par la circonference elle sera un diamêtre. Or ** les points *D* & *B* seront autant l'un que l'autre éloignez des points *A* & *C*; & partant la corde $DA = BA$. Donc l'arc $DGA = AHB$. Pareillement puisque la corde $CD = CB$, on aura l'arc $CLD = CMB$. Donc [1] les arcs $CLD + DGA = CMB + BHA$, c'est à dire, que tout l'arc $CLDGA = CMBHA$.

COROLLAIRE VI.

Donc deux circonferences de cercles ne peuvent se couper qu'en deux points. Car si les deux circonferences *ABCD* & *ABCG* se pouvoient couper en trois points *A*, *B*, & *C*, il faudroit que du point *E*, centre du cercle *ABCD*, on pût mener trois lignes droites à ces trois points *A*, *B*, & *C*, qui



* 2[e] *Part. Prop.* 13. *Geo.*
** *Prop.* 3. *Geo.*
[1] *Part.* 1. *Prop.* 11. *Geo.* & *Ax.* 4. *gen.*

fussent * égales entr'elles, ce qui est [1] impossible; puisque de ce point E qui est pris hors le centre F du cercle *ABCG* on ne peut mener à la circonference *ABCG* plus de deux lignes droites égales entr'elles.

PROPOSITION XV.

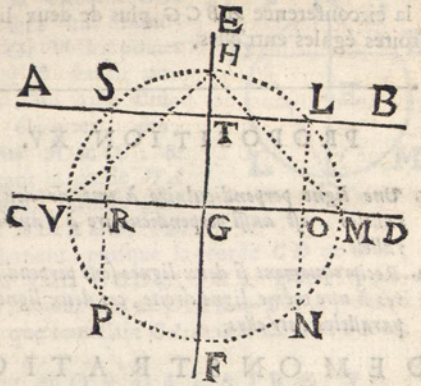
1. *Une ligne perpendiculaire à une de deux paralleles, est aussi perpendiculaire à l'autre parallele.*
2. *Reciproquement si deux lignes sont perpendiculaires à une même ligne droite, ces deux lignes sont paralleles entr'elles.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les lignes *AB* & *CD* paralleles entr'elles, & que la ligne *EF* soit perpendiculaire à la ligne *AB* : je dis que cette ligne *EF* est aussi perpendiculaire à l'autre parallele *CD*. Pour le demontrer du point *G* & d'une ouverture de compas *GH* prise à volonté plus grande que *GT* soit décrite la circonference de cercle *HSVFML*. Du point *L* soit menée la ligne *LO* perpendiculairement à *CD*, & prolongée jusqu'au point *N* rencontre de cette circonference. Pareillement du point *S* soit menée la ligne *SR* perpendiculairement à *CD*, & prolongée jusqu'à la rencontre *P* de la cir-

* *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[1] *Cor. 3. Prop. pres.*

conference ; ensuite du point *H* aux points *V* & *M* soient menées les cordes *HV* & *HM*.



Puisque *LN* est perpendiculaire à *GM*, reciproquement [1] *GM* est perpendiculaire à *LN* ; & partant [2] *LO* = *ON*. On aura par le même raisonnement *SR* = *RP*, puisque [3] *SP* est perpendiculaire à *GC*. Or à cause des paralleles *AB* & *CD*, la moitié *SR* de la ligne *SP* est [4] égale à la moitié *LO* de la ligne *LN*. Donc [5] toute la corde *SP* = *LN* ; & partant les arcs *SVP* & *LMN* sont [6] égaux entr'eux, & [7] la moitié *SV* de l'arc *SVP* sera aussi égale à la moitié *LM* de l'arc *LMN*. Or la ligne *EG* étant [8] perpendiculaire à la

[1] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.* [2] *Part. 1. Prop. 13. Geo.*
[3] *Par construction.* [4] *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*
[5] *Ax. 13. Geo.* [6] *Part. 1. Prop. 11. Geo.*
[7] *Ax. 12. general.* [8] *Supposit.*

corde SL, on aura [1] l'arc $HL = HS$. Donc en ajoûtant l'arc HL à l'arc LM, & l'arc HS à l'arc SV, on aura [2] $HLM = HSV$; & partant les cordes [3] HM & HV seront égales. Pareillement [4] $GV = GM$. Donc la ligne EF aura deux de ses points, sçavoir H & G également distans des points V & M. Donc enfin [5] EF sera aussi perpendiculaire à la seconde ligne parallele CD, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

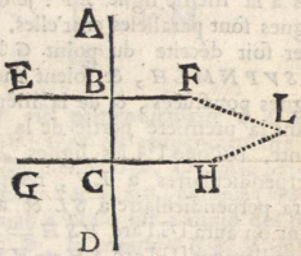
Soient les lignes AB & CD perpendiculaires à la même ligne EF : je dis que ces deux lignes sont paralleles entr'elles. Pour le demontrer soit décrite du point G la circonference $HSVPNMLH$, & soient menées les mêmes lignes ponctuées, & de la même maniere que dans la premiere partie de la proposition presente. Puisque [6] les lignes AB & CD sont perpendiculaires à EF, reciproquement EF sera perpendiculaire à SL & à VM; & partant on aura [7] l'arc $VSH = HLM$. On aura pareillement [1] l'arc $SH = HL$. Donc [8] l'arc SV sera égal à LM; mais puisque SP & LN sont [9] perpendiculaires à CD, l'arc $SV = VP$ [1] & $LM = MN$. Donc [3] la corde $SP = LN$. Donc [0] enfin la ligne perpendiculaire SR sera

[1] *Part. 6. Prop. 14. Geo.* [2] *Ax. 4. gener.*
[3] *Part. 1. Prop. 11. Geo.* [4] *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[5] *Prop. 5. Geo.* [6] *Supposit.*
[7] *Prop. 3. & Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[8] *Ax. 9. general.* [9] *Par construction.*
[0] *Ax. 12. general. & Part. 1. Prop. 13. Geo.*

égale à la perpendiculaire *L O* ; & partant, puisque * la position d'une ligne droite suit necessairement celle de deux de ses points, on trouvera que les deux points *S* & *L* de la ligne *A B* étant [1] également distans de la ligne *C D*, la ligne *A B* sera pareillement également distante de *C D*. Donc [2] ces deux lignes *A B* & *C D* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer*,

COROLLAIRE I.

Donc deux lignes perpendiculaires à une même ligne droite, ou deux lignes paralleles entr'elles étant prolongées ne peuvent jamais concourir nulle part. Soient les deux lignes *E F* & *G H* perpendiculaires à *A D*, ou paralleles entr'elles, &



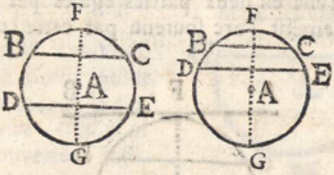
que *A D* leur soit perpendiculaire ; s'il étoit possible que ces lignes *E F* & *G H* étant prolongées pussent concourir en quelque lieu du monde, par exemple en *L*, il faudroit que de ce point *L* il y eût deux lignes *L B* & *L C* menées perpendiculairement à la même ligne *A D* dans un même plan, ce qui est [3] impossible. Donc

* *Cor. Prop. 8. Geo.* [1] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*
[2] *Déf. 8. Geo.* [3] *Cor. 1. Prop. 6. Geo.*

ces lignes *EF* & *GH* ne peuvent donc se rencontrer nulle-part.

COROLLAIRE II.

Les arcs *BD* & *CE* compris entre les cordes paralleles *BC* & *DE*, sont égaux entr'eux. Car soit mené

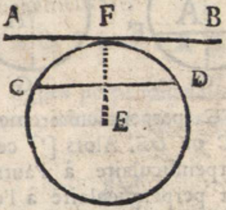


le diametre *FG* perpendiculairement à une des deux cordes *BC* ou *DE*. Alors [1] ce diametre *FG* sera aussi perpendiculaire à l'autre corde, & même [2] sera perpendiculaire à l'une & à l'autre par leur milieu. Outre cela [3] ce même diametre *FG* coupera les arcs *BFC* & *DGE* chacun en deux parties égales, c'est-à-dire que $BF = FC$, & que $DG = GE$. Si à l'arc *BF* on ajoute *DG* d'une part, & si à l'arc *CF* on ajoute *GE* d'une autre part; on aura $BF + DG = CF + EG$, & [4] l'arc entier $FDG = FEG$. Retranchons d'une part $BF + DG$, & de l'autre part $CF + EG$; les arcs *BD* & *CE* compris entre les cordes paralleles *BC* & *DE*, resteront [5] égaux entr'eux.

[1] *Prop. pref.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 13. *Geom.*
[3] *Part.* 6. *Prop.* 14. *Geom.*
[4] *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geom.*
[5] *Ax.* 9. *Geom.*

COROLLAIRE III.

Une ligne touchante parallele à une corde de cercle, divise en deux parties égales par le point d'attouchement l'arc soutenu par cette corde. Soit



la ligne touchante *AB* parallele à la corde *CD* : je dis que l'arc *CFD* soutenu par cette corde est divisé en deux parties égales par le point d'attouchement *F*. Car soit mené le rayon *EF* du centre *E* à ce point d'attouchement *F*. Alors le rayon *EF* sera [1] perpendiculaire à la touchante *AB*; ce même rayon *EF*, sera donc [2] aussi perpendiculaire à la corde *CD*, & partagera [3] en deux parties égales, l'arc *CFD* au point d'attouchement *F*, qui est aussi un point de la touchante *AB*.

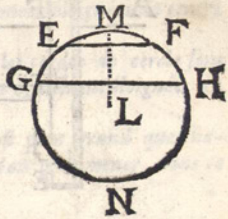
COROLLAIRE IV.

On peut tirer de cette proposition une me-

[1] *Part. 2. Prop. 12. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. pres.*
[3] *Prop. 14. Geo. Part. 6.*

thode

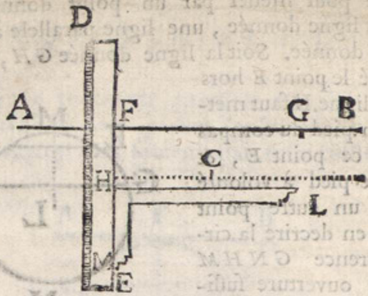
thode pour mener par un point donné hors d'une ligne donnée, une ligne parallele à cette ligne donnée. Soit la ligne donnée *G H*, & soit donné le point *E* hors cette ligne. Il faut mettre un pied du compas dans ce point *E*, & l'autre pied à volonté dans un autre point pour en decrire la circonference *G N H M* d'une ouverture suffisante pour que cette ligne donnée *G H* soit coupée par cette circonference. Alors du point *H* on prendra l'arc *H F* égal à l'arc *G E*, & par les points *E* & *F* on menera la ligne *E F* : je dis que cette ligne *E F* est la ligne parallele cherchée, c'est à dire, qu'elle est parallele à *G H*. Car du centre *L* soit mené le rayon *L M* perpendiculaire à la ligne donnée *G H*, on aura (1) l'arc *G M* = *M H*. Donc si de l'arc *G M* on retranche d'une part l'arc *G E*, & de l'autre arc *M H* si on retranche l'arc *H F* qui est (2) égal à *E G*, il restera (3) l'arc *E M* = *F M*; & partant *L M* sera (4) aussi perpendiculaire à *E F*. Donc (5) cette ligne *E F* sera parallele à *G H*, qui est ce qu'on cherchoit.



COROLLAIRE V.

La seconde partie de la proposition presente

(1) *Part. 6. Prop. 14. Geo.* (2) *Par construction.*
(3) *Ax. 9. gen.* (4) *Part. 5. Prop. 14. Geo.*
(5) *Prop. pres. 2e Part.*



eſt encore le fondement d'une autre methode dont on ſe ſert fort commodément, principalement dans les deſſeins d'Architecture civile, ou militaire, lorſqu'il s'agit de mener une ligne parallele à une autre ligne par un point donné. Soit par exemple le point *C* donné hors la ligne *A B*, & que par ce point *C* il faille mener une ligne parallele à *A B*. Il faut prendre une regle de bois *D E* avec une équerre *L H M* d'une aſſez bonne épaiſſeur, parcequ'on s'en ſert avec plus de juſteſſe pour mener les lignes neceſſaires; on applique d'abord le côté *H L* de cette équerre ſur la ligne *A B*, par exemple de *F* en *G*, & on poſe la regle le long du côté *H M* de cette équerre. Enſuite retenant avec une main la regle *D E* toûjours dans la même ſituation, avec l'autre main on fait gliſſer l'équerre le long de la regle *D E* juſqu'à ce que le point *C* paroiſſe; enfin on mene la ligne *H C*, qui eſt * la ligne parallele qu'on cherchoit.

* *Part. 2. Prop. preſ.*

PROPOSITION XVI.

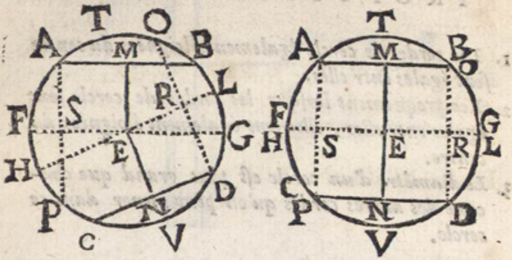
1. *Les cordes de cercle également éloignées du centre ſont égales entr'elles.*
2. *Reciproquement lorſque les cordes de cercle ſont égales entr'elles, elles ſont également éloignées du centre.*
3. *Le diamêtre d'un cercle eſt plus grand que chacune des autres cordes qu'on peut mener dans ce cercle.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les cordes *AB* & *CD* également éloignées du centre E du cercle *ACDB* : je dis que ces cordes ſont égales enrr'elles. Pour le demontrer ſoit mené par le centre E le diamêtre *FG* parallele à la corde *AB*; par le même centre E ſoit encore mené le diamêtre *HL* parallele à l'autre corde *CD*. Du centre E ſoient menées les lignes *EM* & *EN* perpendiculaires aux cordes *AB* & *CD* ; ces perpendiculaires ſeront [1] les meſures des diſtances du centre à ces cordes. D'une des extrêmitez d'une des cordes *AB* ou *CD*, par exemple du point *A* ſoit menée la ligne *AS* perpendiculairement au diamêtre *FG*, & cette ligne *AS* ſoit prolongée juſqu'à la rencontre de la circonference en *P*. Enfin d'une extrêmité de l'autre corde ſoit

[1] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*

menée la ligne *DR* perpendiculaire ſur le diamêtre *HL*, & cette ligne *DR* ſoit prolongée juſqu'au point *O* rencontre de la circonference.



Puiſque [1] les diſtances *EM* & *EN* du centre à ces cordes ſont égales, les perpendiculaires *AS* & *DR* ſeront [2] auſſi égales, c'eſt à dire, [3] que les cordes entieres *AP* & *DO* ſeront égales. Donc [4] les arcs *AFP* & *DLO* ſeront égaux : & enfin [5] leurs moitiez *AF* & *DL* ſeront égales entr'elles. Or puiſque *AP* eſt perpendiculaire au diamêtre *FG*, reciproquement *GF* ſera [6] perpendiculaire à *AP*, & même [7] partagera l'arc *AFP* en deux parties égales au point *F*; par le même raiſonnement le diamêtre *HL* partagera l'arc *DLO* en deux parties égales au point *L*. Puiſque nous venons de trouver que les moitiez de ces arcs qui ſont *AF* & *DL* ſont égales entr'elles, il eſt conſtant

[1] *Suppoſit.* [2] *Cor. 4. Prop. 6. & Dem. 1. gen.*
[3] *Part. 1. Prop. 13. Geo. & Ax. 13. gen.*
[4] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* [5] *Ax. 12. gen.*
[6] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[7] *Part. 6. Prop. 14. Geo.*

qu'en ajoûtant à *AF* son égal [1] *BG*, & en ajoûtant à *DL* son égal *HC*, on aura [2] la somme des arcs $AF + BG = DL + HC$. Mais l'arc *FTG* est [3] une moitié de la circonference, qui est égale à l'autre moitié *HVL*. Donc en ôtant $AF+BG$ de l'arc *FTG*, & ôtant $DL + HC$ de l'arc *HVL*, il restera l'arc [4] $ATB = CVD$. Donc [5] les cordes *AB* & *CD* seront égales entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les cordes *AB* & *CD* égales entr'elles : je dis qu'elles sont également éloignées du centre *E*, c'est à dire [6] que les perpendiculaires *EM* & *EN* sont égales entr'elles. Pour le demontrer, aprés avoir mené les perpendiculaires *EM* & *EN*, soient menées les autres lignes *FG*, *HL*; *AP*, *DO* comme dans la premiere partie de la proposition presente.

Puisque [7] $AB = CD$, les arcs *ATB* & *CVD* seront [8] égaux entr'eux; mais [3] l'arc $FTG = HVL$. Donc ôtant d'une part l'arc *ATB* & ôtant de l'autre part l'arc *CVD*, il restera [4] la somme des arcs $AF+BG = HC + LD$; mais [9] les moitiez de chacune de ces deux sommes d'arcs, sçavoir *AF* & *DL* seront égales entr'elles. Donc [0] deux fois *AF*, c'est à

[1] *Cor. 2. Prop. 15. Geo.* [2] *Ax. 4. gen.*
[3] *Cor. 5. Prop. 14. Geo.* [4] *Ax. 9. gen.*
[5] *Part. 1. Prop. 11. Geo.* [6] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*
[7] *Supposit.* [8] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[9] *Cor. 2. Prop. 15. & Ax. 12. gener.*
(0) *Ax. 13. gen. & Part. 6. Prop. 14. Geo.*

dire, l'arc *AFP* sera égal à deux fois *DL* qui est l'arc *DLO* : or puisque les arcs *AFP* & *DLO* sont égaux entr'eux, les cordes *AP* & *DO* seront (1) égales entr'elles. Donc les lignes *GF* & *HL* menées par le centre *E*, & par le milieu de ces arcs *AFP* & *DLO* (2) seront perpendiculaires par le milieu de ces cordes ; & partant (3) les perpendiculaires *AS* & *DR* seront égales entr'elles. Or (4) la perpendiculaire *AS* $=$ *EM*, & la perpendiculaire *RD* $=$ *EN*. Donc (5) la perpendiculaire *EM* $=$ *EN* ; donc les cordes égales *AB* & *CD* seront (6) également éloignées du centre *E*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit le diamêtre *TV*, je dis que ce diamêtre est plus grand que toute autre ligne *YZ* menée dans le cercle, & terminée de part & d'autre à la circonference. Pour le demontrer soient menez les rayons *XY* & *XZ*. Il est constant [7] que *TX* $=$ *YX*, & que *VX* $=$ *ZX*. Donc [8] *TX* $+$ *XV* $=$ *YX*

(1) *Part. 1. Prop. 11. Geo.* (2) *Part. 5. Prop. 14. Geo.*
(3) *Part. 1. Prop. 13. & Ax. 12. gen.*
(4) *Cor. 4. Prop. 6. Geo.* (5) *Demande 1. gen.*
(6) *Cor. 3. Prop. 6. Geo.* [7] *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[8] *Ax. 4. gen.*

$+XZ$. Or [1] $YX + XZ > YZ$. Donc [2] le diametre $TXV > YZ$, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVII.

1. *Les cordes de cercle les plus proches du centre sont plus grandes que celles qui en sont plus éloignées.*
2. *Reciproquement lorsqu'une corde de cercle est plus grande qu'une autre, celle qui est plus grande est plus proche du centre que celle qui est plus petite.*

DEMONSTRATION

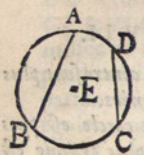
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la corde *BF* plus proche du centre *A*, que la corde *CE* : je dis que cette corde *BF* est plus grande que la corde *CE*. Pour le démontrer, je mene du centre *A* la ligne *AG* perpendiculaire à la corde *BF*, & la ligne *AL* perpendiculaire à la corde *CE*; ces perpendiculaires *AG* & *AL* seront [3] les distances des cordes *BF* & *CE*. La distance *AL* étant [4] plus longue que *AG*, j'en retrancherai la partie *AH* égale à *AG*, & par le point *H* je menerai la corde *MN* perpendiculaire à *AL*. Alors les cordes *BF* & *MN* seront [5] égales entr'elles. Or la corde *MN* étant soutendante de l'arc *MDN*, sera [6] plus grande que la corde *CE* qui est soutendante de l'arc plus petit *CDE*. Au lieu de *MN* prenant son égale *BF*, je trouverai donc que la corde *BF* qui est plus proche du centre *A*, est plus grande que la corde *CE* qui en est plus éloignée, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Prop. 1. Geo.*
[2] *Demande 1. gen.*
[3] *Cor. 3. prop. 6. Geo.*
[4] *Supposition.*
[5] *Part. 1. prop. 16. Geo.*
[6] *Part. 2. prop. 11. Geo.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la corde *AB* plus grande que *CD* : je dis que



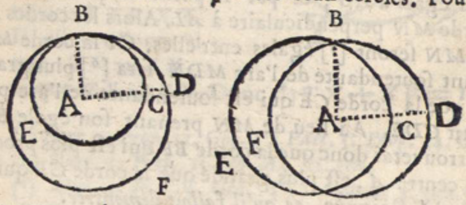
AB est plus proche du centre *E* que la corde *CD*. Car *AB* ne peut être qu'en ces trois situations, sçavoir, plus proche du centre *E* que la corde *CD*, ou autant éloignée que la corde *CD*, ou enfin plus éloignée que la corde *CD*. Or *AB* ne peut être autant éloignée du centre *E* que *CD*. Car *AB* seroit [1] égale à *CD*, ce qui est contre la supposition. *AB* ne peut être plus éloignée du centre *E* que *CD* ; car cette corde *AB* seroit [2] plus petite que *CD*, ce qui est encore contre la supposition. La corde *AB* qui est la plus grande, sera donc plus proche du centre *E*, que *CD*, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION XVIII.

Deux circonferences de cercles qui se coupent, ou qui se touchent interieurement, n'ont pas le même centre.

DEMONSTRATION.

Soient les circonferences des cercles *BEC* & *BFD* qui se coupent, ou qui se touchent au point *B*, je dis qu'aucun point, par exemple le point *A*, ne peut être un centre commun à ces deux cercles. Pour le



démontrer, de ce point *A* soit menée au point de rencontre la ligne droite *AB*, & du même point soit encore menée une autre ligne *ACD* qui se ter-

[1] *Part. 1. prop. 16. Geo.* [2] *Part. 1. prop. pres.*

mine à

mine à la derniere circonference. S'il étoit possible que ce point *A* fût un centre commun à ces deux cercles, les rayons du cercle *BFD* seroient égaux aux rayons du cercle *BEC*, & partant [1] on auroit $AD = AB$. Pareillement [1] *AC* seroit égal à *AB*. Donc [2] il faudroit que la ligne *AD* fût égale à *AC*; ce qui est [3] impossible. Donc les cercles dont les circonferences se coupent, ou se touchent intérieurement ne peuvent avoir un centre commun, *ce qu'il falloit demontrer*.

COROLLAIRE.

Donc deux circonferences de cercles qui ont le même centre, ne peuvent se couper ni se toucher. Car si elles pouvoient se couper ou se toucher, ces cercles [4] n'auroient pas le même centre, ce qui est contre la supposition.

PROPOSITION XIX.

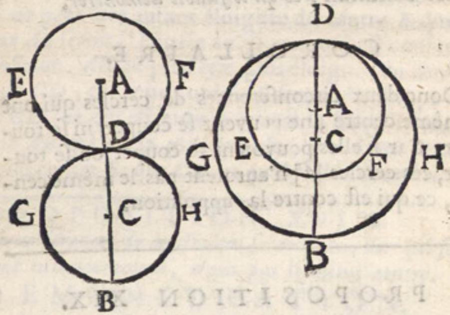
La ligne droite menée par les centres de deux cercles dont les circonferences se touchent, passe par l'attouchement ou rencontre de ces circonferences.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne *AB* menée par les deux centres *A* & *C* des deux cercles *EDF* & *GBHD*: je dis que cette ligne *AB* prolongée, s'il est ne-

[1] *Cor. 1. déf. 29. Geo.*
[2] *Ax. 18. general.*
[3] *Ax. 2. gen.* [4] *Prop. pres.*

cessaire, passera par l'attouchement *D* des circonferences de ces cercles. Car si on considere le centre *A* comme un point pris hors le centre *C* du cercle *HDGB*, la ligne *AD* qui passe par le centre *C* est [1] la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du point *A* à la circonference du cercle *HDGB*. Donc cette ligne se termine à l'endroit de cette circonference *GBHD*, qui est le plus proche de ce centre *A*.



Or l'endroit de cette circonference touchante *GBHD* qui est le plus proche du centre *A* est l'attouchement *D*. Puisque les circonferences qui se touchent, se rencontrent de telle sorte que l'une n'entre point dans le cercle de l'autre. Donc la ligne *AB* qui passe par les centres des circonferences *FDE* & *HBGD* qui se touchent passe par l'attouchement, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

Donc l'attouchement de deux circonferences

[1] *Part. 1. Prop. 9. Geo.*

de

de cercles n'eſt qu'un ſeul point. Car ſi l'attouchement *D*, par exemple, conſiſtoit en pluſieurs points qui fuſſent communs aux deux circonferences *FED* & *HDGB*, on pourroit mener de ce point *A* à la circonference *H D G B* pluſieurs lignes qui ſe termineroient à ces points communs. Donc [1] ces lignes ſeroient égales à la ligne *A D* qui eſt partie de *A B* laquelle paſſant par le centre, paſſe [2] par l'attouchement. Donc cette ligne *A D* ne ſeroit pas la plus courte de toutes, puiſque ces autres lignes menées du point *A* à ces points communs lui ſeroient égales. Or cette ligne *A D* eſt (3) la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du centre *A* à la circonference *H D G B*. Donc l'attouchement *D* n'eſt qu'un ſeul point.

DES ANGLES RECTILIGNES.

PROPOSITION XX.

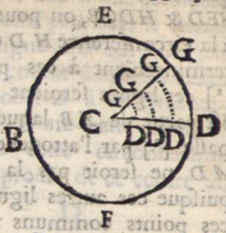
La meſure d'un angle rectiligne eſt l'arc decrit de ſon ſommet & compris entre ſes côtez.

DEMONSTRATION.

Soit l'angle rectiligne *G C D*: je dis que ſa meſure eſt l'arc *G D* compris entre ſes côtez

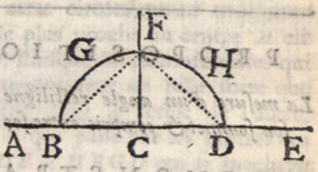
[1] *Cor. 1. déf. 29. Geo.* [2] *Prop. preſ.*
[3] *Part. 1. Prop. 9. Geo.*

C G & *C D*, & decrit de son sommet *C* pris pour centre. Car considerons la ligne *C G* appliquée sur *C D*, & qu'ensuite cette ligne *C G* soit mûë vers *E*, ou bien *C D* vers *F* autour de leur extrêmité fixe *C*, afin que cette ligne parvienne dans la situation *C G*, le point *G* en s'écartant du point *D*, ou le point *D* en s'écartant du point *G* décrira l'arc *D G* qui en [1] sera comme la trace ou le vestige. Donc l'arc *D G* sera la mesure de l'ouverture ou écartement de l'angle *G C D*, *ce qu'il falloit demontrer.*



COROLLAIRE I.

Donc chaque angle droit a pour mesure un quart de circonference de cercle. Soit la ligne *F C* perpendiculaire à la ligne *A E*; du point *C* soit décrit l'arc de cercle *B G F H D* qui est [2] une demie circonference. Il est [3] constant que le point *F* est également distant des points *B* & *D*; & partant les cordes *B F* & *F D* étant (4) égales, les arcs



[1] *Cor. 1. déf. 3. Geo.* [2] *Cor. 5. Prop. 14. Geo.*
[3] *Prop. 3. Geo.* (4) *Cor. 4. Ax. 2. Geo.*

BGF & *FHD* seront (1) aussi égaux entr'eux. Or (2) *BGF* est la mesure de l'angle droit *BCF*. Pareillement l'arc *FHD* est la mesure de l'angle *FCD*, & les arcs *BGF* & *FHD* étant égaux, sont chacun la moitié de la moitié d'une circonference. Donc les angles droits *BCF* & *FCD* ont chacun pour mesure un quart de circonference de cercle.

COROLLAIRE II.

Donc on connoîtra l'égalité ou inégalité des angles rectilignes par l'égalité ou inégalité des arcs compris entre leurs côtez decrits de leurs pointes ou sommets à la même ouverture de compas prise à volonté. On connoîtra par exemple, que l'angle *ABC* est plus petit que *DEF*, si l'arc *AC* est plus petit que *DF*, l'un & l'autre arc étant décrits à même ouverture de compas; & si l'arc *AC* étoit égal à l'arc *DF*, l'angle *ABC* seroit égal à *DEF*.

Reciproquement lorsqu'un angle est égal à un autre, l'arc qui en est la mesure est égal à l'arc qui est la mesure de l'autre, lorsque ces deux arcs sont décrits à même ouverture de compas; & lorsque deux angles sont inégaux, les arcs qui en sont mesures sont inégaux; enfin l'angle qui est le plus grand a le plus grand arc pour mesure.

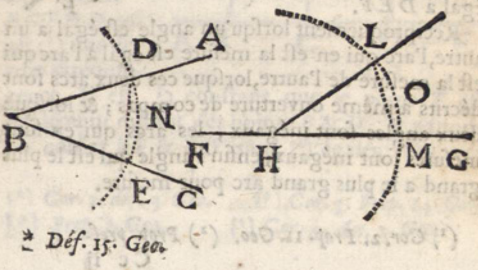
(1) *Cor. 2. Prop. 11. Geo.* (2) *Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Puiſque les Mathematiciens ſont convenus entr'eux que la diviſion ordinaire de la circonference d'un cercle ſeroit de 360 parties égales qu'ils ont appellées degrez ; il ſuit du Corollaire premier de la Propoſition preſente qu'un angle droit a pour meſure un arc de 90 degrez. Donc tous les angles droits ſont égaux entr'eux, parcequ'ils ont chacun la même meſure. Puiſqu'un angle obtus eſt * plus grand qu'un angle droit, il aura pour meſure un arc de cercle plus grand qu'un quart de circonference, c'eſt à dire, plus grand qu'un arc de 90 degrez. Enfin puiſqu'un angle aigu eſt plus petit qu'un angle droit, il aura pour meſure un arc plus petit qu'un arc de 90 degrez.

COROLLAIRE IV.

Donc il eſt facile de faire un angle rectiligne égal à un autre. Soit par exemple l'angle *ABC*, & que ſur la ligne *FG*, on ſe propoſe de faire un angle égal à l'angle *ABC*, & dont

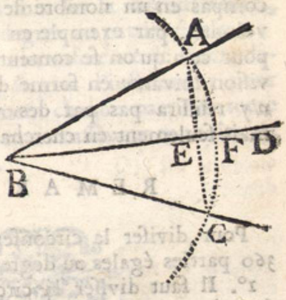


* *Déf.* 15. *Geo.*

le sommet soit au point *H*. On décrira des points *B* & *H* des arcs *DNE* & *LOM* à même ouverture de compas; ensuite on ouvrira le compas du point *E* au point *D*, & on transportera cette ouverture sur l'arc *MOL* de *M* en *L*, & enfin on menera par les points *H* & *L* la ligne *HL*: je dis que l'angle $LHG = ABC$. Car après avoir mené les cordes *ED* & *ML*, on trouve qu'elles sont égales entr'elles, l'une & l'autre étant mesurée par la même ouverture de compas. Donc * les arcs *DNE* & *LOM* sont aussi égaux entr'eux; & partant [1] $ABC = LHG$.

COROLLAIRE V.

On peut tirer de cette proposition une methode pour partager ou couper geometriquement un angle en deux parties égales. Soit l'angle *ABC*; pour le partager en deux parties égales on décrira du sommet *B*, d'une intervale ou ouverture de compas prise à volonté l'arc *AFC*. On menera la corde *AC*, ensuite on coupera [2] cette corde en deux parties égales au point *E*; & du point *B* par le point *E* milieu de cette corde,



* *Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[1] *Cor. 3. Prop. 5. Geo.*
[2] *Prop. pref.*

on menera la ligne *BD* : je dis que l'angle *ABD* = *DBC* ; & partant que la queſtion eſt reſoluë. Car l'arc *AF* qui eſt [1] la meſure de cet angle *ABD* eſt [2] égal à l'arc *CF* meſure de l'angle *DBC*.

COROLLAIRE VI.

On trouve par le moyen du Corollaire 5e de la Propoſition preſente, une methode pour diviſer un angle geometriquement en parties égales 4, 8, 16, &c. en continuant à diviſer en deux parties égales chaque partie de cet angle.

AVERTISSEMENT.

Parcequ'on n'a pas encore trouvé une methode pour diviſer un angle avec la regle & le compas en un nombre de parties égales pris à volonté, par exemple en 3, 5, 7, 9, &c. c'eſt pour cela qu'on ſe contentera d'indiquer la diviſion ſuivante en forme d'obſervation ; car on n'y réüſſira pas par des voyes geometriques, mais ſeulement en cherchant ou tâtonnant.

REMARQUE.

Pour diviſer la circonference d'un cercle en 360 parties égales ou degrez ;

1°. Il faut diviſer la circonference du cercle donné en deux parties égales entr'elles par le moyen d'un diamêtre ; chacune de ces moitiez vaudra 180 degrez, puiſque le tout en vaut 360.

[1] *Prop. preſ.*
[2] *Part. 3. Prop. 14. Geo.*

2°. Il faut diviſer chacune de ces moitiez en deux parties égales : chacune de ces parties égales vaudra ou contiendra 90 degrez, ce qui eſt la 4^e partie de la circonference.

3°. Il faut diviſer ce quart de cercle en trois parties égales : chacune de ces parties vaudra ou contiendra 30 degrez, on tranſportera enſuite ces 3 parties ſur chacun des 3 autres quarts de cercle.

4°. Il faut diviſer une de ces dernieres parties en trois autres parties égales, dont chacune contiendra 10 degrez, & tranſporter ces mêmes parties ſur le reſte de la circonference avant que de changer l'ouverture du compas.

5°. Il faut diviſer chacune de ces dernieres parties en deux autres dont chacune comprendra 5 degrez.

6°. Enfin il faut diviſer chacune de ces dernieres parties en cinq autres parties, dont une étant tranſportée 360 fois ſur la circonference, determinera ces 360 degrez ou parties égales.

Un cercle ou une circonference de cercle diviſée de cette ſorte, ſervira d'inſtrument pour connoître non ſeulement chaque partie de toute autre circonference, mais auſſi pour connoître la grandeur des angles.

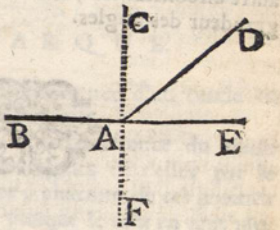
PROPOSITION XXI.

1. *Une ligne droite rencontrant une autre ligne droite, forme de part & d'autre deux angles qui sont, pris ensemble, égaux à deux droits.*
2. *Reciproquement si deux lignes droites rencontrent une autre ligne, & forment avec elle deux angles, qui, pris ensemble, soient égaux à deux droits, ces deux lignes droites qui seront particulieres à chaque angle ne formeront qu'une seule ligne droite.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

UNe ligne droite en peut rencontrer une autre en deux manieres, ou perpendiculairement ou obliquement.

Si une ligne droite en rencontre une autre perpendiculairement, il est constant qu'elle forme avec elle deux angles pris ensemble égaux à deux droits, puisque chacun est [1] droit.



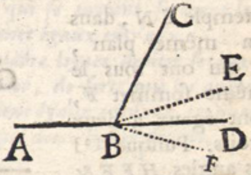
Mais si une ligne, par exemple *AD* en rencontre une autre *BF* obliquement dans le point *A*: je dis que la somme des angles *BAD* & *DAE* est égale à deux angles droits. Pour le demontrer soit me-

[1] *Déf. 14. Geo.*

née par le même point *A* la ligne *C F* perpendiculairement à *B E*; il eſt évident que la ſomme des angles *B A D* & *D A E* a la même ouverture que les deux angles droits *B A C* & *C A E* pris enſemble. Donc * les angles *BAD* & *D A E* pris enſemble ſont égaux aux deux angles droits *B A C* & *C A E*, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes droites *A B* & *D B* qui rencontrent la ligne *C B* au point *B*, de ſorte que les angles *A B C* & *C B D* pris enſemble ſoient égaux a deux droits : je dis que ces lignes *A B* & *D B* ne ſeront qu'une ſeule ligne droite, c'eſt à dire que la ligne droite *A B* étant prolongée paſſera par *B D*, ne pouvant paſſer par ailleurs. Car ſi cette ligne droite pouvoit paſſer par ailleurs, ce ſeroit de part & d'autre de *B D*, par exemple par *B E* ou par *B F*. Si cette ligne *AB* étant prolongée paſſoit par *BE*, la ligne *ABE* ſeroit une ligne droite; & partant [1] l'angle *C B E* avec *C B A* feroit la valeur de deux angles droits. Mais [2] pareillement



l'angle *C B D* avec le même angle *C B A* fait auſſi la même valeur de deux angles droits. Donc [3] l'angle *CBD* ſeroit égal à l'angle *C B E*, ce qui eſt [4] impoſſible. Donc la ligne *A B* étant prolongée ne peut paſſer par *B E*. On demon-

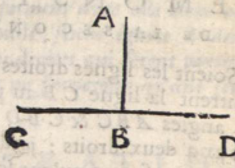
* *Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*
[1] *Part.* 1. *Prop. preſ.* [2] *Suppoſit.*
[3] *Ax.* 5. *general.* [4] *Ax.* 2. *gen.*

trera de la même maniere que *A B* étant prolongée ne peut passer par *B F*. Donc cette ligne *A B* passera par *B D*, *ce qu'il falloit demontrer.*

Il suit trois Corollaires de la premiere partie de la Proposition presente.

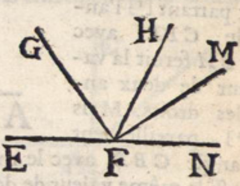
COROLLAIRE I.

Si une ligne droite, par exemple *A B*, rencontre une autre ligne droite *C D*, de sorte qu'elle forme d'une part un angle *A B C* qui soit droit; l'autre angle *A B D* sera aussi droit. Car les deux pris ensemble sont égaux à deux droits, & on en connoît déja un [1] qui est *A B C*.



COROLLAIRE II.

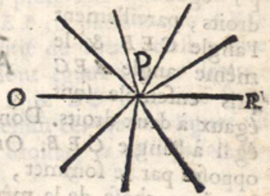
Tous les angles *E F G*, *G F H*, *H F M*, *M F N* posez du même côté d'une ligne droite, par exemple *E N*, dans un même plan, & qui ont tous le même sommet *F*, sont égaux à deux droits. Puisque [2] les angles *H F E* & *H F N* sont égaux à la somme des angles *E F G*, *G F H*, *H F M*, *M F N*; & que les angles *H F E* & *H F N* sont [3] ensemble égaux à deux droits.



[1] *Supposit.* [2] *Ax. 3. general.*
[3] *Part. 1. Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Donc enfin tous les angles possibles autour du même point *P* & dans un même plan sont, pris ensemble, égaux à quatre angles droits. Parceque la somme des angles posez d'un même côté de la ligne *OR* est égale à deux droits, & la somme des autres angles posez de l'autre côté de cette ligne droite est aussi égale à deux droits ; ce qui fait pour la somme totale, quatre angles droits.



PROPOSITION XXII.

1°. *Deux lignes droites qui se coupent forment les angles opposez au sommet égaux entr'eux.*

2°. *Reciproquement si quatre lignes droites se rencontrent dans un point, de sorte que les angles opposez au sommet soient égaux entr'eux, ces quatre lignes ne seront que deux lignes droites.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les deux lignes droites *AB* & *CD* qui se coupent l'une l'autre dans le point *E* : je dis que les angles *AED* & *CEB* qui sont opposez au sommet sont égaux entr'eux ; & que pareillement les angles *AEC* & *DEB* auſſi opposez par le ſommet ſont égaux entr'eux. Car l'angle *AED* & l'angle *AEC* ſont [1] égaux à deux droits ; pareillement l'angle *CEB* & le même angle *AEC* pris enſemble ſont égaux à deux droits. Donc [2] l'angle *AED* eſt égal à l'angle *CEB*. Or ces deux angles ſont opposez par le ſommet, & on peut demontrer la même choſe de la même maniere à l'égard des angles *AEC* & *DEB*. Donc les angles opposez au ſommet ſont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les lignes *AE*, *DE*, *CE*, *BE* qui ſe rencontrent du point *E*, de ſorte que l'angle *AEC* ſoit égal à l'angle *DEB* qui lui eſt opposé par le ſommet, & que l'angle *AED* ſoit égal à l'angle *CEB* ; je dis que les lignes *AE* & *EB*, *CE* & *ED* ne ſont que deux lignes droites. Car puiſque [3] l'angle $AEC = DEB$, ſi on ajoûte d'une part l'angle *AED* & de l'autre l'angle *CEB*, on aura [4] $AEC + AED = DEB + CEB$. Mais [5] la ſomme de ces quatre angles qui ont leur ſommet dans le point *E* vaut

[1] *Part. 1. Prop. 21. Geo.* [2] *Ax. 5. gen.*
[3] *Suppoſit.* [4] *Ax. 4. gen.*
[5] *Cor. 3. Prop. 21. Geo.*

quatre

quatre angles droits. Donc *AEC* + *AED* en vaudra la moitié, c'est à dire deux droits. Donc * les lignes *CE* & *ED* ne feront qu'une seule ligne droite. On trouvera par un raisonnement semblable au precedent que *AED* + *DEB* = *AEC* + *CEB*; & partant que *AED* + *DEB* sont la moitié du total, c'est à dire que *AED* + *DEB* sont égaux à deux droits: & que * les lignes *AE* & *EB* sont une seule ligne droite. Donc enfin ces quatre lignes ne font que deux lignes droites, *ce qu'il falloit démontrer.*

* *Part. 2. Prop. 21. Geo.*

PROPOSITION XXIII.

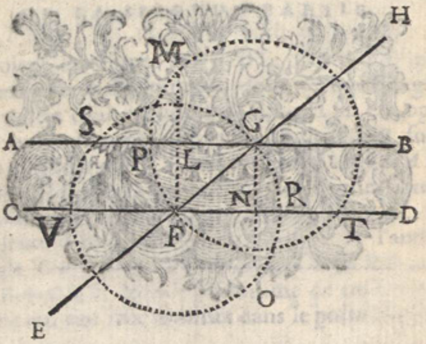
1°. Si deux lignes paralleles sont coupées par une troisiéme ligne droite, les angles alternes internes sont égaux entr'eux.

2°. Reciproquement si deux lignes droites sont coupées par une troisiéme, & si les angles alternes internes sont égaux entr'eux; ces deux lignes droites seront paralleles entr'elles.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Deux lignes paralleles peuvent être coupées par une troisiéme ou perpendiculairement



ou obliquement. Si elles sont coupées perpendiculairement, il est constant * non seulement

* *Part. 1. Prop. 15. Geo.*

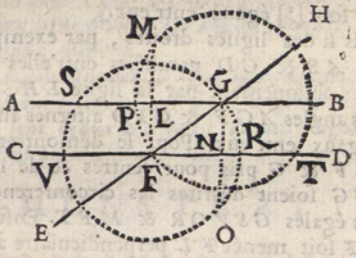
que les angles alternes internes ſont égaux entr'eux, mais auſſi que les huit angles qui ſont formez par cette interſection ſont égaux entr'eux, chacun à chacun ; Car tous les angles droits ſont [1] égaux entr'eux.

Mais ſi des lignes droites, par exemple les lignes *A B* & *C D* paralleles entr'elles, ſont coupées obliquement par la ligne *E H* : je dis que les angles *A G F* & *G F D* alternes internes ſont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des points *F* & *G* pris pour centres & de l'intervale *F G* ſoient décrites les circonferences de cercles égales *G S V O R* & *M F T*. Enſuite du point *F* ſoit menée *F L* perpendiculaire à *A B*, & prolongée juſques en *M* ; & du point *G* ſoit menée *G N* perpendiculaire à *C D*, & prolongée juſques en *O*.

Puiſque *F M* eſt [2] perpendiculaire à *G P*, reciproquement [3] *G P* eſt perpendiculaire à *F M*. Donc *G P* coupe *F M* en deux parties égales, & [4] coupe pareillement l'arc *M P F* ſoûtenu par cette corde *F M* en deux parties égales au point *P*. On dira la même choſe à l'égard de la ligne *F R*, de la corde *G O*, & de l'arc *G R O*. Mais à cauſe des paralleles *A B* & *C D*, les perpendiculaires *F L* égale à la moitié de *F M*, & *G N* égale à la moitié de *G O*, ſont [5] égales entr'elles ; & [6] les cordes

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[2] *Par conſtruction.*
[3] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[4] *Part. 6. Prop. 14. Geo.*
[5] *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*
[6] *Ax. 12. general.*

entieres *GO* & *FM* sont aussi égales entre elles. Donc les arcs *FPM* & *ORG* de cercles égaux soûtenus par ces cordes égales



sont [1] égaux. Donc les moitiez *FP* & *GR* de ces arcs sont égales entr'elles, c'est à dire que les mesures des angles alternes internes *AGF* & *GFD* sont égales. Donc ces angles seront [2] égaux entr'eux. Pareillement puisque [3] l'arc *VSGR*=*PFTB* ; retranchant d'une part l'arc *GR* & de l'autre l'arc *PF*, il restera [4] l'arc *VSG*=*FTB*. L'angle obtus *VFG* sera donc [2] égal à son alterne *FGB*. Donc en general les angles alternes internes seront égaux entr'eux , *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Cor.* 2. *Prop.* 11. *Geo.*
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geo.*
[4] *Ax.* 9. *gener.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si une 3^e^ ligne droite en coupe deux autres, de ſorte que les angles alternes internes qu'on ſuppoſe égaux ſoient droits, * il eſt déja conſtant que ces lignes ſeront paralleles; mais ſi ces angles ſont obliques, elles ſeront auſſi paralleles : ce qu'on demontre de cette maniere. Soient les lignes *AB* & *CD* coupées par une 3^e^ ligne droite *EH*, & que l'angle *AGF* ſoit égal à ſon alterne *GFD* : je dis que ces lignes *AB* & *CD* ſont paralleles entr'elles. Des points G & *F* pris pour centres, & de l'intervale *GF* ſoient décrites des circonferences de cercles, & menées des lignes perpendiculaires de la même maniere que dans la premiere partie de la Propoſition preſente.

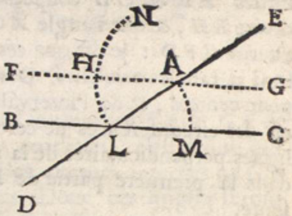
L'angle *AGF* étant [1] égal à *GFR*, l'arc *PF* meſure de l'angle *AGF*, ſera égal à *GR* meſure de l'angle *GFT*. Donc [2] le double de l'arc *FP*, c'eſt à dire, l'arc *FPM* ſera égal à *GRO* double de l'arc *GR*. Donc [3] la corde *FM* ſera égale à *GO*; mais la ligne *FR* étant [4] menée perpendiculairement à *GO* partage également cette corde *GO*, & l'arc *GRO*; on dira la même choſe à l'égard de la ligne *GP* de la corde *MF* & de l'arc *MPF*. Donc la perpendiculaire *GN* qui eſt une moitié de *GO*, ſera [5] égale à la perpendiculaire *LF* qui eſt une moitié de *MF*. Donc

* *Part. 2. Prop. 15. Geo.* [1] *Suppoſit.*
[2] *Part. 6. Prop. 14. Geo. & Ax. 6. gener.*
[3] *Part. 1. Prop. 11. Geo.*
[4] *Par conſtruction, & Cor 1. Prop. 5. Geo.*
[5] *Ax. 12. gen.*

puisque les points *L* & *G* de la ligne *AB* sont également distans de la ligne *CD*, leur distance étant * mesurée par les perpendiculaires égales *LF* & *GN*, la position de la ligne *AB* suivra [1] celle de ses deux points *L* & *G*, c'est à dire, que *AB* sera [2] parallele à *CD*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

On peut tirer de cette seconde partie une methode pour mener une ligne parallele à une autre par un point donné. Soit le point donné *A*, & que par ce point il faille mener une ligne parallele à une ligne donnée *BC*. Il faut mener par ce point *A* la ligne droite *DE* qui coupe la ligne droite donnée *BC* au point *L*. Ensuite du point *L* pris pour centre, & de l'intervale *LA* on décrira l'arc *AM*. Du point *A* & du même intervale *AL* on décrira encore l'arc *LN* sur lequel on prendra avec un compas de *L* en *H* l'arc *LH* égal à *AM*; & par le point *H* & le point *A* on menera la ligne *FG* : je dis que cette ligne *FG* est la ligne parallele cherchée. Car les angles alternes internes *FAL* & *ALC* sont égaux entr'eux; puisque les arcs égaux *HL* &



* *Cor.* 3. *Prop.* 6. *Geo.*

[1] *Cor. Prop.* 8. *Geo.*

[2] *Déf.* 8. *Geo.*

AM en [1] sont la mesure. Donc [2] les lignes *FG* & *BC* sont paralleles.

PROPOSITION XXIV.

Si une ligne droite FE *coupe deux lignes paralleles, par exemple* AB *&* CD.

1°. *L'angle exterieur* FGB *& l'angle interieur* GHD *du même côté sont égaux entr'eux.*

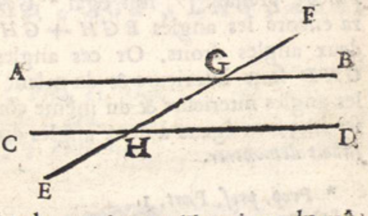
2°. *Les angles alternes externes* FGB *&* CHE *sont aussi égaux entr'eux.*

3°. *La somme des angles interieurs* BGH *&* GHD *du même côté est égale à deux angles droits.*

4°. *La somme des angles exterieurs* FGB *&* DHE *du même côté est égale à deux angles droits.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

L'Angle [3] *FGB*=*AGH*. Or [4] l'angle *GHD*=*AGH*. Donc [5] l'angle *FGB* =*GHD*.



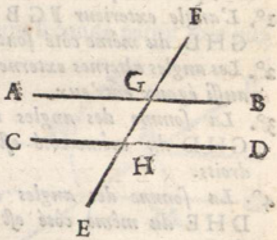
Or ces deux angles sont l'exterieur & l'interieur du même côté. Donc l'angle exterieur & l'interieur du mê-

[1] *Prop. 20. Geo.* [2] *Prop. pres. 2e Part.*
[3] *Part. 1. Prop. 22. Geo.* [4] *Part. 1. Prop. 23. Geo.*
[5] *Ax. 18. gen.*

même côté sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle * *FGB*=*GHD*. Or [1] l'angle *CHE*=*GHD*. Donc [2] l'angle *FGB*=*CHE*. Or ces deux angles sont alternes externes. Donc les angles alternes externes sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*



DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

[3] La somme des angles *FGB* & *BGH* est égale à deux angles droits; au lieu de l'angle *FGB*, prenant [4] son égal * *GHD*, on aura encore les angles *BGH*+*GHD* égaux à deux angles droits. Or ces angles *BGH* & *GHD* sont interieurs & du même côté. Donc les angles interieurs & du même côté, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Prop. pres. Part.* 1.
[1] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *general.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.*
[4] *Demande* 1. *gen.*

DEMONSTRATION
DE LA QUATRIE'ME PARTIE.

L'angle *DHE* & l'angle *DHG*, pris ensemble, sont [1] égaux à deux angles droits ; au lieu de l'angle *DHG*, prenant [2] son égal [3] *FGB*, on aura les angles *FGB* & *DHE*, pris ensemble, égaux à deux droits. Or ces angles *FGB* & *DHE* sont exterieurs & du même côté. Donc la somme des angles exterieurs & du même côté, est égale à deux angles droits ; *ce qu'il falloit demontrer.*

AVERTISSEMENT.

Ce qu'on vient de demontrer dans la Proposition precedente, & ce qu'on demontrera dans la suivante, touchant les angles *AGH* & *GHD* ; *FGB* & *CHE* ; *BGH* & *GHD* ; *FGB* & *CHE* ; on le demontrera tres-facilement, & on concluëra la même chose par le même raisonnement à l'égard des angles *CHG* ; *HGB* ; *AGF*, *EHD* ; *AGH*, *CHG* ; *AGF*, *CHE*.

[1] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.*
[2] *Demande* 1. *gen.*
[3] *Prop. pref. Part.* 1.

PROPOSITION XXV.

Si deux lignes droites, par exemple AB *&* CD, *sont coupées par une troisiéme ligne droite* EF, *de sorte qu'il arrive,*

1°. *Ou que les angles exterieur & interieur du même côté* FGB *&* GHD *soient égaux entr'eux;*

2°. *Ou que les angles alternes externes* FGB *&* CHE *soient égaux entr'eux;*

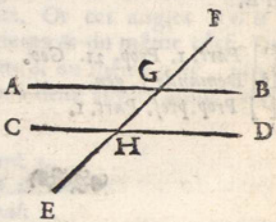
3°. *Ou que la somme des angles interieurs du même côté* BGH *&* GHD *soit égale à deux angles droits;*

4°. *Ou enfin que la somme des angles exterieurs du même côté* FGB *&* DHE *soit égale à deux angles droits:*

Les lignes AB *&* CD *seront paralleles l'une à l'autre.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

L'angle *GHD* est* égal à l'angle *FGB*; mais l'angle *AGH* est [1] aussi égal au même angle *FGB*. Donc [2] l'angle *AGH* sera égal à l'angle *GHD*. Donc



* *Supposit.* [1] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *general.*

* les lignes *A B* & *C D* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle *F G B* & l'angle *C H E* sont [1] égaux entr'eux. Donc au lieu de l'angle *F G B* en prenant [2] son [3] égal *A G H*; & au lieu de l'angle *C H E* prenant son [3] égal *G H D*: on trouvera les angles alternes internes *AGH* & *GHD* égaux entr'eux. Donc * les lignes *A B* & *C D* seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

L'angle *D H G* joint avec l'angle *B G H* fait [1] la valeur de deux angles droits. Or l'angle *A G H* joint avec le même angle *B G H* fait aussi la même valeur de deux angles droits. Donc [5] l'angle *A G H* sera égal à l'angle *D H G*. Donc * les lignes *A B* & *C D* sont paralleles, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA QUATRIE'ME PARTIE.

L'angle *F G B* joint avec l'angle *D H E* fait [1] la valeur de deux angles droits. Au lieu de l'angle *F G B*, si [2] on prend son [3] égal *AGH*, on trouvera aussi que l'angle *A G H* joint à l'angle *E H D* fera la valeur de deux angles droits. Mais [4] l'angle *G H D* joint avec l'angle *E H D*

* *Part.* 2. *Prop.* 23. *Geo.* [1] *Par supposit.*
[2] *Deman.* 1. *gen.* [3] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.* [5] *Ax.* 5. *gen.*

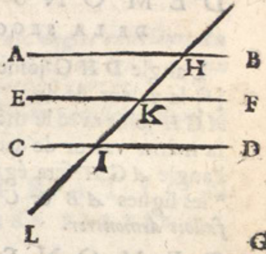
fait auſſi la valeur de deux angles droits. Donc [1] l'angle *AGH* eſt égal à l'angle *GHD* ; & partant [2] les lignes *AB* & *CD* ſont paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XXVI.

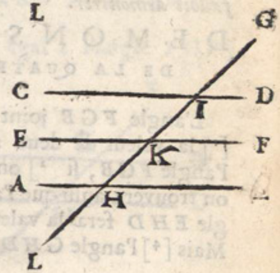
Les lignes paralleles à une 3e ſont paralleles entr'elles.

DEMONSTRATION.

Soient les lignes *AB* & *EF* paralleles à une une troiſiéme ligne *CD* : je dis que *AB* &



EF ſont paralleles entr'elles. Car puiſque *AB* eſt [3] parallele à *CD*, on aura [4] l'angle *GHB* égal à l'angle *GID*. Pareillement puiſque [4] la ligne *EF* eſt parallele à *CD*,



[1] *Ax. 5. gen.* [2] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*
[3] *Suppoſit.* [4] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*

l'angle

l'angle *G K F* eſt [1] égal au même angle *G I D* Donc [2] l'angle *G H B* eſt égal à l'angle *G K F*. Donc [3] la ligne *A B* eſt parallele à *E F*, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XXVII.

Si un angle a le ſommet poſé dans la circonference d'un cercle, & s'il eſt compris par deux lignes qui coupent cette circonference, ou par une ligne qui la coupe & l'autre qui la touche ; il a pour ſa meſure la moitié de l'arc qui eſt compris entre ſes côtez.

DEMONSTRATION.

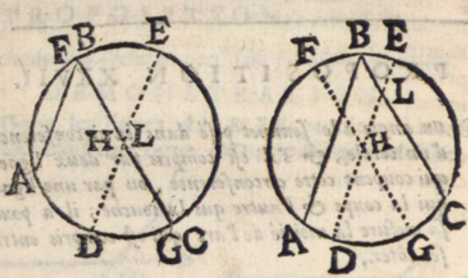
PREMIERE CIRCONSTANCE.

SI un angle, par exemple *A B C*, a ſon ſommet *B* poſé dans la circonference d'un cercle, & eſt formé par deux lignes *A B* & *B C* qui coupent cette circonference, de ſorte que le centre ſe trouve ſur une de ces lignes, ou entre ces mêmes lignes, la Demonſtration de la Propoſition preſente eſt telle. Soient menées les lignes *D E* & *F G* par le centre parallelement aux deux autres lignes *A B* & *B C* qui comprennent cet angle.

[4] L'angle *D H G* = *F H E*. Donc [5] l'arc *DG*

[1] *Part. 1. Prop. 24. Geo.* [2] *Ax. 18. gener.*
[3] *Part. 1. Prop. 25. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*
[5] *Part. 2. Cor. 2. Prop. 20. Geo.*

$= FE$; mais [1] l'arc $FB = GC$, & l'arc $BE = AD$. Donc au lieu de FE, c'est à dire de $FB + BE$, on peut prendre ce qui y est égal, sçavoir $AD + GC$. Donc l'arc $DG = AD + GC$.



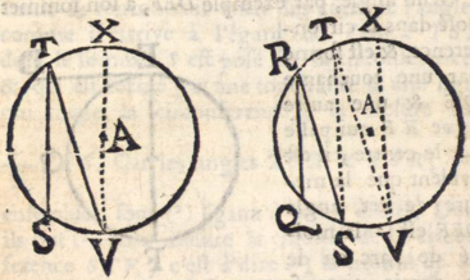
Donc puisque $AD + GC = DG$, l'arc DG sera la moitié de AC. Car lorsqu'une grandeur est partagée en deux parties telles que l'une est égale à l'autre, chacune de ces deux parties est la moitié du tout. Mais l'angle DHG a pour mesure çet arc DG : ce même angle $DHG = DLC = ABC$ [2]. Donc l'angle ABC qui a son sommet dans la circonference, aura la même mesure, sçavoir DG, c'est à dire la moitié de l'arc AC sur lequel il est appuyé, *ce qu'il falloit demontrer.*

SECONDE CIRCONSTANCE.

Un angle peut avoir son sommet dans la circonference, & être formé par deux lignes qui coupent cette circonference de telle ma-

[1] *Cor. 2. Prop. 15. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*

niere que le centre du cercle n'est sur une des lignes qui comprennent l'angle, ni entre ces mêmes lignes : tel est l'angle *SRQ*. Alors il faut mener par le point *S* où le côté le plus proche du centre *A* coupe la circonference, une ligne parallele à l'autre côté *QR* de l'angle;& par l'autre point *T* où cette derniere parallele coupera la circonference, il faut (s'il est necessaire) mener encore une ligne *TV* parallele au côté *RS* de l'angle le plus proche du centre *A*. Il faut continuer ainsi alternativement jusqu'à ce que le centre se trouve entre deux de ces dernieres lignes paralleles ou sur une de ces mêmes lignes.



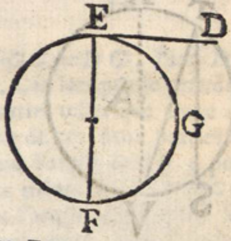
Il est évident [1] que l'angle *TVX*, par exemple, a pour sa mesure $\frac{1}{2}$ *TX*. Mais les [2] arcs *TX*, *SV*, *RT*, *QS*, &c. sont égaux entr'eux, & [3] tous les angles *TVX*, *STV*, *TSR*, *QRS*, &c. sont égaux entr'eux, parcequ'ils sont alternes & entre paralleles. Or ces

[1] *On le vient de demontrer.*
[2] *Cor. 2. Prop. 15. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 23. Geo,*

angles égaux ont des mesures égales. Puisque l'angle TVX a pour sa mesure $\frac{1}{2} TX$, l'angle QRS qui lui est égal, aura aussi pour sa mesure $\frac{1}{2} TX = \frac{1}{2} QS$. Donc l'angle QRS aura pour mesure $\frac{1}{2} QS$, *ce qu'il falloit demontrer.*

TROISIE'ME CIRCONSTANCE.

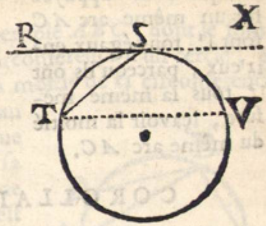
Si un angle, par exemple *DEF*, a son sommet posé dans la circonference, & est formé par une touchante DE & une autre ligne EF qui passe par le centre ; il est évident que la mesure de cet angle *DEF* est [1] la moitié de l'arc ou de la demie circonference EGF comprise entre ses côtez, puisque l'angle [2] DEF est droit.



Mais si un angle, par exemple RST, est formé par une ligne RS qui touche, & par une autre ST qui coupe la circonference, de sorte que le centre du cercle ne soit pas entre les côtez de cet angle, ni sur un de ces côtez ; il faut mener par le point T la ligne TV paralle-

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.*
[2] *Prop.* 12. *Geo.*

le à la touchante RS. On vient de demontrer que l'angle STV a pour mesure $\frac{1}{2}SV =$ * $\frac{1}{2}ST$.



Or [1] l'angle $RST = STV$. Donc l'angle RST aura pour sa mesure la moitié de l'arc ST compris entre ses côtez, *ce qu'il falloit demontrer.*

Si le centre du cercle se rencontroit entre les côtes de l'angle, comme il arrive à l'égard de l'angle TSX dont le sommet S est posé sur la circonference, & qui est formé par une touchante & une ligne qui coupe la circonference, sa mesure sera $\frac{1}{2}TVS$. Car les angles TSX & TSR, pris ensemble, sont [2] égaux à deux droits. Donc ils ont [3] pour mesure la moitié de la circonference STV, c'est à dire [4] la moitié de $ST + TVS$; mais l'angle RST a déja pour sa mesure $\frac{1}{2}TS$. Donc l'angle TSX aura pour sa mesure la moitié du reste qui est l'arc TVS compris entre ses côtez, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc tous les angles ABC, ADC, AEC,

* *Cor. 3. Prop. 15. Geo.* [1] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 21. Geo.* [3] *Cor. 1. Prop. 20. Geo.*
[4] *Ax. 3. general.*

&c. (quelque nombre qu'il y en ait) qui ont leur pointe ou sommet dans une même circonference de cercle, & qui sont appuyez sur un même arc *AC* sont [1] tous égaux entr'eux; parcequ'ils ont [2] tous la même mesure, sçavoir la moitié du même arc *AC*.

COROLLAIRE II.

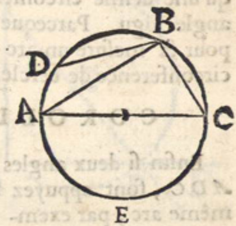
Non-seulement les angles qui sont appuyez sur le même arc, & qui ont leur sommet dans la même circonference sont égaux entr'eux; mais aussi les angles qui sont appuyez sur des arcs égaux, & qui ont leur sommet dans la même circonference, sont pareillement égaux entr'eux. Si l'arc *AC*, par exemple, est égal à l'arc *DF*; l'angle *ABC* ayant [2] pour sa mesure la moitié de cet arc *AC*, & l'angle *DEF* ayant pour mesure la moitié de l'arc *DF*; & puisque [3] $\frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DF$: ces deux angles *ABC* & *DEF* auront [2]

[1] *Cor. 2. Prop. 20. Geo.* [2] *Prop. pres.*
[3] *Ax. 12. gen.*

pour mesure des arcs égaux. Donc ils seront pareillement égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Un angle, par exemple *ABC*, dont le sommet *B* est dans la circonference d'un cercle, & qui est appuyé sur la moitié de la circonference de ce cercle, est un angle droit. Parceque cet angle a [1] pour sa mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé, ou qui est compris entre ses côtez, c'est à dire la moitié de la demie circonference *AEC*. Or la moitié d'une demie circonference est un quart de circonference, mesure [2] d'un angle droit. Donc l'angle *ABC* sera droit.



COROLLAIRE IV.

L'angle *DBC* qui a son sommet dans la circonference; & qui est appuyé sur un arc plus grand qu'une demie circonference de cercle est obtus. Parceque cet angle comprenant entre ses côtez un arc *DAEC* plus grand qu'une demie circonference de cercle, aura pour sa mesure la moitié de cet arc *DAEC*. Or [3] $\frac{1}{2} DAEC > \frac{1}{2} AEC$, c'est à dire que cet angle

[1] *Prop. pres.* [2] *Cor. 1. Prop. 20. Geo.*
[3] *Ax. 11. gen.*

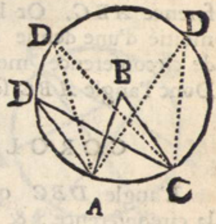
DBC aura pour ſa meſure un arc plus grand qu'un quart de cercle. Donc ce même angle *DBC* ſera [1] un angle obtus.

COROLLAIRE V.

Donc l'angle *BAC* qui a auſſi ſon ſommet poſé dans la circonference du cercle, & qui comprend entre ſes côtez l'arc *BC* plus petit qu'une demie circonference de cercle, ſera un angle aigu. Parceque cet angle *BAC* aura pour ſa meſure un arc plus petit qu'un quart de circonference de cercle.

COROLLAIRE VI.

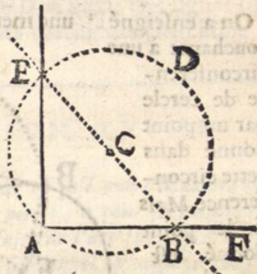
Enfin ſi deux angles, par exemple *ABC* & *ADC*, ſont appuyez ſur le même arc, par exemple *AC*, & ſi le ſommet B d'un, ſçavoir de l'angle *ABC*, eſt dans le centre d'un cercle, & le ſommet *D* ou pointe de l'autre *ADC* eſt dans la circonference du même cercle; il ſuit neceſſairement que celui qui ſera poſé dans le centre du cercle, ſera double de celui dont le ſommet ſera dans la circonference. Parceque l'angle du centre aura [2] pour ſa meſure tout l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & l'angle dont le ſommet eſt dans la circonference, a * pour ſa meſure ſeulement la moitié de ce même arc ſur lequel il eſt appuyé.



[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.* [2] *Prop. 20. Geo.*
* *Prop. preſ.*

COROLLAIRE VII.

On peut tirer de la proposition presente une methode pour mener une ligne perpendiculairement à une autre ligne par un point pris dans cette autre ligne.



Soit par exemple le point *A*, extrêmité de la ligne *AF*, par lequel il faille mener une ligne perpendiculaire à cette ligne *AF*. Il faut mettre un pied du compas dans ce point donné *A*, & l'autre pied du compas dans un autre point pris à volonté hors la ligne donnée *AF*, par exemple en *C*. Ensuite de l'intervale *CA* on décrira une circonference de cercle *AB DE*, de sorte qu'elle coupe la ligne donnée *AF* dans les points *A* & B. Par ce point B & par le centre *C* on menera la ligne droite B*C* qui coupera la circonference au point E. Par ce point E & par le point donné *A* on menera la ligne *A*E : je dis que cette *A*E est la perpendiculaire qu'on cherchoit.

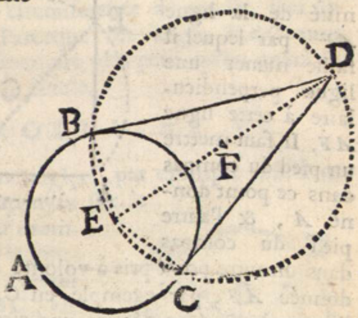
Car la ligne BE passant par le centre *C* est un diamêtre du cercle, & partant l'angle B*A*E sera * appuyé sur une demie circonference, dont [1] il aura la moitié pour mesure. Donc cet angle B*A*E sera [2] droit. Donc [3] la ligne

* *Cor.* 5. *Prop.* 14. *Geo.* [1] *Cor.* 3. *Prop. pres.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.* [3] *Déf.* 14. *Geo.*

AE sera perpendiculaire à *AF*. C'est du Corollaire present dont j'ai fait mention à la fin du Corollaire 2 de la Proposition 5[e] de cette Geometrie.

COROLLAIRE VIII.

On a enseigné [1] une methode pour mener une touchante à une circonference de cercle par un point donné dans cette circonference. Mais si le point donné est hors du cercle, on tirera de la Proposition presente une



methode pour mener une touchante à la circonference de ce cercle. Soit par exemple le point donné *D* hors la circonference *ABC*, & que par ce point il faille mener une touchante à la circonference *ABC*. Du point donné *D* on menera au centre E du cercle donné la ligne droite *DE*. Ensuite on prendra cette ligne *DE* pour un diamêtre, en décrivant de son milieu *F*, & de l'intervale *FE* ou *FD* la circonference B*ECD*. Enfin du point *D* au point B ou *C* où cette derniere circonference coupe la premiere, on menera la ligne *DB* ou *DC* : je dis qu'au lieu

[1] *Cor. 4. Prop. 12. Geo.*

d'une touchante menée du point donné D à la circonference donnée ACB, on en a deux, ſçavoir DB & DC. Car aprés avoir mené aux points B & C les rayons EB & EC, on connoîtra [1] que les angles DBE & DCE ſont des angles droits; puiſque chacun de ces angles eſt appuyé ſur une demie circonference ECD ou EBD. Ces lignes DB ou DC ſont donc [2] les touchantes cherchées.

PROPOSITION XXVIII.

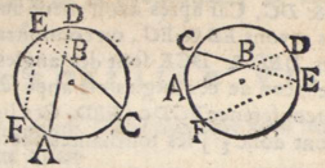
Un angle dont le ſommet eſt poſé entre le centre & la circonference d'un cercle, a pour ſa meſure la moitié de la ſomme faite de l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & de l'arc ſur lequel eſt appuyé langle oppoſé par le ſommet.

DEMONSTRATION.

Soit l'angle ABC dont le ſommet B ſoit poſé entre le centre & la circonference du cercle $ACDE$: je dis que cet angle ABC a pour ſa meſure la moitié de la ſomme faite des arcs AC ſur lequel il eſt appuyé, & ED ſur lequel eſt appuyé celui qui lui eſt oppoſé au ſommet. Pour le demontrer ſoient prolongées les lignes AB & CB qui comprennent cet angle, juſqu'à la rencontre de la circonference en D & en E. Enſuite d'un de ces points D ou E ſoit menée une ligne EF qui coupe la circonference, & qui ſoit parallele à un des côtez BA, ou BC del'angle. Alors

[1] *Cor. 3. Prop. preſ. page 331.*
[2] *Part. 1. de la prop. 12. Geo. page 264.*

l'angle FEC a [1] pour sa mesure la moitié de l'arc $FAC = FA + AC$. Or [2] l'arc $FA = ED$.



Au lieu de FA, si je prens ED, je trouverai que l'angle FEC aura pour sa mesure la moitié de $AC + ED$. L'angle $FEC = ABC$ [3]. L'angle ABC aura donc aussi pour sa mesure la moitié de $AC + ED$.

L'angle ABE ou [4] son égal CBD, aura aussi pour sa mesure la moitié de la somme des arcs $AFE + CD$. Car [5] les angles ABC & ABE sont égaux à deux angles droits. La mesure de ces deux angles pris ensemble, est donc la moitié de la circonference de cercle $ACDEF$. Or [6] la moitié de cette circonference est la moitié des arcs AC, CD, DE, & EFA qui la composent. Je viens de trouver que l'angle ABC a déja pour sa mesure la moitié de la somme des arcs $AC +$ ED. L'angle CBD a donc pour sa mesure la moitié du reste, c'est à dire la moitié de CD sur lequel il est appuyé, & de l'arc EFA sur lequel est appuyé l'angle qui est opposé par le sommet.

En general tout angle, par exemple ABC dont le sommet B est posé entre le centre & la

[1] *Prop.* 27 *Geo. p.* 325.
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 15. *Geo. p.* 287.
[3] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo. p.* 319.
[4] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo. p.* 311.
[5] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo. p.* 308.
[6] *Ax.* 3. *Gen. p.* 3.

circonference d'un cercle, ſoit que ce centre ſoit entre les côtez ou non, a donc pour ſa meſure la moitié de la ſomme faite de l'arc *AC* ſur lequel il eſt appuyé & de l'arc *ED* ſur lequel eſt appuyé l'angle *EBD* oppoſé au precedent par le ſommet. *Ce qu'il falloit demontrer.*

REMARQUE.

Quand les côtez d'un angle rectiligne rencontrent une circonference de cercle, le ſommet de cet angle peut être en 4 principales poſitions. Nous venons de voir quel arc de cet circonference on doit prendre, premierement pour être la meſure de l'angle qui a ſon ſommet poſé dans le centre du cercle [1]; ſecondement, pour être la meſure de celui qui a ſon ſommet poſé dans la circonference [2]; troiſiémement, pour être la meſure de celui qui a ſon ſommet poſé entre le centre & la circonference [3]. Il reſte encore à demontrer quelle eſt la meſure de cet angle lorſqu'il a ſon ſommet poſé hors d'un cercle, ce qui ſera determiné évidemment dans la propoſition ſuivante.

PROPOSITION XXIX.

1. *Si le ſommet d'un angle eſt poſé hors d'un cercle; & ſi ſes deux côtez rencontrent la circonference de ce cercle; ſa meſure ſera la moitié de l'excès dont l'arc compris entre ſes côtez & plus éloigné de ſon ſommet, ſurpaſſe l'arc compris entre ces mêmes côtez & plus près de ſon ſommet.*
2. *Lorſqu'il y a pluſieurs angles appuyez ſur le même arc; celui qui a ſon ſommet poſé entre le centre*

[1] *Prop.* 20. *Geo. page* 301.
[2] *Prop.* 27. *Geo. page* 325. [3] *Prop. preſ.*

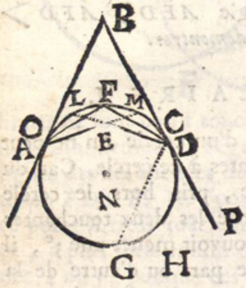
& la circonference est plus grand que celui qui a son sommet posé sur la circonference ; & celui qui a son sommet posé sur la circonference, est plus grand que celui qui a son sommet posé hors le cercle.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit l'angle *ABD* dont le sommet *B* est posé hors le cercle *AGDCO*, & dont les deux côtez touchent, ou coupent la circonference de ce cercle; ou enfin dont un côté la touche & l'autre la coupe : je dis que la mesure de l'angle *ABD* est la moitié de l'excès dont l'arc *AGHD* compris entre les côtez *BA* & *BD* surpasse l'arc *OC* compris entre ces mêmes côtez, & qui est le plus proche du sommet *B*. Pour le demontrer, il faut mener par un des points où les côtez de l'angle *ABD* rencontrent cette circonference, par exemple par le point *C*, la ligne *CG* parallele à l'autre côté *BA*. Si de l'arc *AGHD* je retranche l'arc *AG* = *OC* [1], je trouverai [2] que l'arc *GHD* est l'excès dont cet arc *AGHD* surpasse l'arc *OC*. Mais la moitié de cet arc *GHD* est [3] la mesure de l'angle *GCD*, ou de *GCP* si *BD* est touchante, & [4] l'angle *GCD* = *ABD*. L'angle *ABD* a donc aussi pour sa mesure la moitié de l'arc *GHD*, c'est à dire la moitié de l'excès dont l'arc *AGD* surpasse l'arc *OC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Cor. 2. ou 3. Prop. 15. Geo. p. 287.*
[2] *Déf. 2. d'Alg. p. 59.*
[3] *Prop. 27. Geo. p. 325.*
[4] *Part. 1. Prop. 24. Geo. p. 319.*

DEMONSTRATION



DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

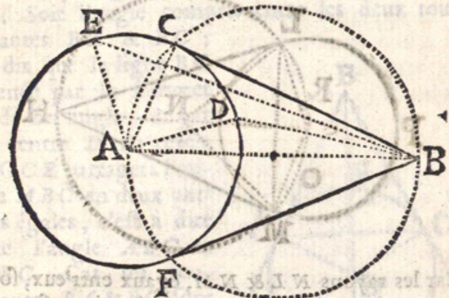
Soient les angles *ABD*, *AFD* & *AED* appuyez ſur le même arc *AGD* ; le ſommet *E* de l'angle *AED* ſoit poſé entre le centre *N* & la circonference *AGDF* ; le ſommet *F* de l'angle *AFD* poſé ſur la circonference même, & le ſommet *B* de l'angle *ABD* poſé hors le cercle : je dis 1° que l'angle *AED* est plus grand que *AFD* ; 2° que cet angle *AFD* est plus grand que *ABD*. Pour le demontrer soient prolongez les côtez *AE* & *DE* de l'angle *AED* jusqu'aux points *L* & *M* où ils rencontrent la circonference. L'angle *AED* a * pour sa mesure la moitié de l'arc *AGHD* & encore la moitié de l'arc *LM*. L'angle *AFD* a [1] pour sa mesure seulement la moitié de l'arc *AGHD*. Donc [2] l'angle *AED* est plus grand que l'angle *AFD*. Or l'angle *AFD* qui a pour sa mesure la moitié de l'arc *AGHD* est plus grand que l'angle *ABD*, qui a seulement pour sa mesure [3] la moitié de l'arc *GHD* partie de l'arc *AGHD* ; & partant l'angle $AFD > ABD$. Donc [4] enfin l'angle $AED > AFD > ABD$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

D'un point pris hors d'un cercle on ne peut mener que deux touchantes à ce cercle. Car du point *B*, par exemple, pris hors le cercle *FDCE* après avoir mené les deux touchantes *BC* & *BF*, si on en pouvoit mener une 3[e], il faudroit la mener d'une part ou d'autre de la ligne *AB*, ou vers *F* ou vers *C* : si on la pouvoit mener vers *C*, il faudroit encore necessairement la mener de part ou d'autre, par exemple en *E* ou en *D*. Or la ligne *BE* ne peut être touchante, ni la ligne *BD*. Car après avoir mené les rayons *AE* & *AD*, cette ligne *BE* fait

* *Prop. 28. Geo.* [1] *Prop. 27. Geo.*
[2] *Cor. 2. Prop. 20. Geo.* [3] *Part. 1. Prop. pres.*
[4] *Ax. 22. gen.*

* avec le rayon *AE* l'angle aigu *BEA*, qui eſt appuyé ſur l'arc *AFB*, & la ligne *BD* fait avec le rayon *AD* l'angle *BDA* obtus, étant plus grand que l'angle droit *BCA*. Or ſi ces lignes étoient touchantes, elles feroient [1] avec le rayon mené du centre à leurs points d'attouchement, des angles droits. Donc ces



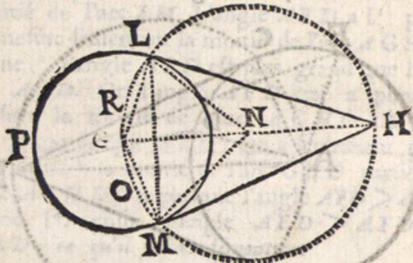
lignes ne ſont point touchantes. On fera le même raiſonnement à l'égard de toutes les autres lignes droites menées du point *B* à la circonference *FDCE*. Ne pouvant donc mener de ce point *B* trois touchantes à cette circonference, à plus forte raiſon on n'en pourra pas mener 4 ou 5, puiſque ces nombres renferment le nombre 3.

COROLLAIRE II.

D'un même point pris hors d'un cercle, les deux touchantes qu'on peut [2] mener de ce

* *Prop. preſ. & déf. 16. Geo.*
[1] *Prop. 12. Geo.*
[2] *Cor. 1. Prop. preſ.*

point à ce cercle seront égales entr'elles. Soient les deux touchantes *H L* & *H M* menées du point *H* à la circonference *P M L* : je dis qu'elles sont égales entr'elles. La ligne menée de ce point *H* au centre *G* de la circonference *P M L* est perpendiculaire au milieu de la ligne *L M*.

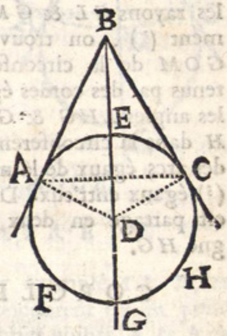


Car les rayons *N L* & *N M*, égaux entr'eux, sont menez du point *N* centre de la circonference *M H L* aux extrêmitez *L* & *M* de la ligne *L M*, qui sont aussi extrêmitez des touchantes *H L* & *H M*. Pareillement les rayons *G L* & *G M* sont égaux entr'eux, étant menez du centre G de la circonference *M L P* aux mêmes extrêmitez *L* & *M* de la ligne *L M*. La ligne *H* G aura donc le point *N* & le point G également distans des extrêmitez *L* & *M* de la ligne *L M*. Donc *H* G sera * perpendiculaire au milieu de *L M*. Donc le point *H* sera (1) aussi également distant des mêmes points *L* & *M*. Donc les touchantes *H L* & *H M* seront égales entr'elles.

* *Prop.* 5. *Geo.*
(1) *Prop.* 3. *Geo.*

COROLLAIRE III.

Une ligne menée par le ſommet d'un angle compris entre deux lignes qui touchent la circonference d'un cercle, & par le centre de ce cercle, partage cet angle en deux parties égales. Soit l'angle compris entre les deux touchantes *BA* & *BC* : je dis que la ligne *B*G menée par le ſommet *B* de cet angle, & par le centre *D* du cercle *A*G*CE* partagera l'angle *ABC* en deux parties égales, c'eſt à dire que l'angle *AB*G = G*BC*. Car les touchantes *BA* & *BC* ſont * égales entr'elles. Les lignes *DA* & *DC* ſont ([1]) auſſi égales entr'elles. Donc la ligne *B*G a deux de ſes points *B* & *D* qui ſont également diſtans des points extrêmes *A* & *C* de la ligne *AC*. Donc ([2]) cette ligne *B*G eſt perpendiculaire à *AC*. Donc ([3]) cette ligne *B*G partage l'arc *AEC* en deux parties égales, & partage auſſi l'arc *A*G*C* en deux parties égales. Mais l'angle *AB*G a ([4]) pour ſa meſure la moitié de l'excès dont l'arc *AF*G ſurpaſſe l'arc *AE* ; & l'angle G*BC* a pour ſa meſure la moitié de



* *Cor.* 2. *Prop. preſ.* ([1]) *Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.*
([2]) *Prop.* 5. *Geo.* ([3]) *Part.* 2. *Prop.* 14. *Geo.*
([4]) *Part.* 1. *Prop. preſ.*

l'excès dont l'arc *GHC* surpasse l'arc *EC*. Puisque *AE* = *EC*, & que *AFG* = *GHC*, ces deux excès sont * égaux entr'eux. Donc les mesures des angles *ABG* & *GBC* sont égales entr'elles. Donc (1) l'angle *ABC* est partagé en deux parties égales par la ligne *BG* qui passe par le sommet *B* & par le centre *D*.

On pourroit encore demontrer la même chose d'une autre maniere. Car après avoir mené les rayons *GL* & *GM* aux points d'attouchement (2), on trouve que les arcs *GRL* & *GOM* de la circonference *MHLG* sont soûtenus par des cordes égales *GL* & *GM*. Donc les angles *LHG* & *GHM* ayant leur sommet *H* dans la circonference, & étant appuyez sur des arcs égaux de la même circonference, sont (3) égaux entr'eux. Donc enfin l'angle *LHM* est partagé en deux parties égales par la ligne *HG*.

COROLLAIRE IV.

Reciproquement si une ligne menée par le sommet d'un angle compris entre deux touchantes de circonference de cercle partage cet angle en deux parties égales, elle passera par le centre de ce cercle. Soit l'angle *ABC* compris entre les deux touchantes *BA* & *BC* : je dis que si la ligne *BG* partage en deux parties égales cet angle *ABC*, elle passera par le centre du cercle *AGCE*. Car puisque (4) l'angle *ABG* = *GBC*, les mesures de ces deux angles seront

* *Ax. 21. general.* (1) *Cor. 2. Prop. 20. Geo.*
(2) *Fig. du Coroll. 2. de la Prop. pres.*
(3) *Cor. 2. Prop. 27. Geo.* (4) *Supposit.*

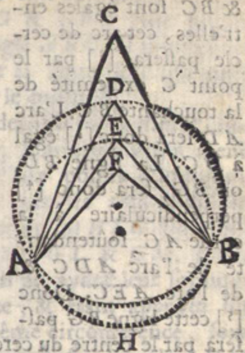
égales entr'elles. Et alors si, d'une ouverture de compas égale à *BA* & du sommet *B* pris pour centre, on décrit un arc de cercle; puisque [1] les touchantes *BA* & *BC* sont égales entr'elles, cet arc de cercle passera [2] par le point *C* extremité de la touchante *BC*. L'arc *AD* sera donc [3] égal à *DC*. La ligne *BD*, ou *BG*, sera donc [4] perpendiculaire à la corde *AC* soûtendante de l'arc *ADC* & de l'arc *AEC*. Donc [5] cette ligne *BG* passera par le centre du cercle *AGCE*.

COROLLAIRE V.

Si de deux points, par exemple *A* & *B*, on mene deux lignes qui concourent en un point *C*, & si de ces deux mêmes points *A* & *B* on mene encore dans le même plan plusieurs lignes droites *AD*, *BD*; *AE*, *BE*; *AF*, *BF*, &c. qui concourent en differens points *D*, *E*, *F*, vers

[1] *Cor. 2. Prop. Pref.*
[2] *Cor. 1. Def. 29. Geo.*
[3] *Part. 2. du Cor. 2. Prop. 20. Geo.*
[4] *Part. 5. Prop. 14. Geo.*
[5] *Part. 2. Prop. 13. Geo.*

& entre les deux precedentes *A C* & *B C*; l'angle, par exemple *A F B*, dont le sommet sera plus prés de la ligne droite qu'on peut menes du point *A* au point *B*, sera plus grand que l'angle *A E B* qui en est plus éloigné : car si par les trois points *A*, *E* & *B* on fait [1] passer la circonference de cercle *A H B E*, on trouvera [2] que l'angle *A F B* posé entre le centre & la circonference est plus grand que l'angle *A E B*; & que l'angle *A E B* est plus grand que l'angle *A D B*. On trouvera de la même maniere que l'angle *A D B* est plus grand que l'angle *A C B*, en faisant passer par les trois points *A*, *D*, *B* une autre circonference; & ainsi des autres angles quelque nombre qu'il y en ait.



[1] *Cor. 1. Prop. 13. Geo.*
[2] *Part. 2. Prop. pres.*

CHAPITRE II.

DES SURFACES.

ENTRE les proprietez des ſurfaces, je conſidererai d'abord celles des ſurfaces planes, & je ne ferai attention qu'à ce qui s'y rencontre de plus neceſſaire pour s'inſtruire des principales propoſitions des premiers élemens de Geometrie. Enſuite dans le chapitre troiſiéme j'enſeignerai la maniere dont on peut connoître la grandeur des ſurfaces cylindriques & ſpheriques.

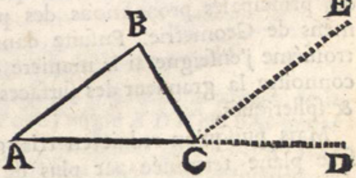
Mais puiſqu'on reduit en triangles une ſurface plane terminée par plus de trois lignes droites, en y prenant un point à volonté, & de ce point menant des lignes droites à tous les angles de cette ſurface ; il eſt évident que le triangle eſt la ſurface plane rectiligne la plus ſimple de toutes. C'eſt pour cela que dans la recherche de ce qu'il y a de plus élementaire dans l'étude des proprietez qui conviennent aux ſurfaces planes, nous commencerons par les triangles.

PROPOSITION XXX.

Si on prolonge un côté d'un triangle rectiligne, l'angle exterieur sera égal aux deux interieurs opposez pris ensemble.

DEMONSTRATION.

SOit le triangle rectiligne *ABC* dont on prolongera un côté, par exemple *AC* : je dis que l'angle exterieur *BCD* est égal aux deux interieurs opposez *A* & *B*, pris ensemble. Pour le



demontrer, par le point *C* soit * menée la ligne *CE* parallele à *AB*. Il est évident ** que l'angle *ABC* = *BCE*, & [1] que l'angle *ECD* = B*AC*. Or l'angle B*CD* = B*CE* + *ECD*; au lieu de B*CE* + *ECD*, on peut prendre ce qui y est égal, sçavoir *AB*C + B*AC*. Donc l'angle exterieur B*CD* = *AB*C + B*AC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Cor. 4. Prop. 15. ou Cor. Prop. 23. Geo.*

** *Part. 1. Prop. 23. Geo.*

[1] *Part. 1. Prop. 24. Geo.*

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

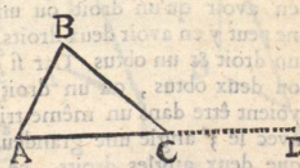
Ayant prolongé un côté pris à volonté d'un triangle, l'angle exterieur, par exemple *BCD*, formé par ce moyen, sera * plus grand qu'aucun des interieurs *A* & *B* opposez, puisqu'il sera [1] égal à la somme des angles *A* & *B* qui en seront les parties.

PROPOSITION XXXI.

Les trois angles de chaque triangle rectiligne, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits.

DEMONSTRATION.

Soit un triangle rectiligne pris à volonté, par exemple *ACB*: je dis que ses trois angles pris ensemble $ABC + BAC + BCA$ sont égaux à deux angles droits. Pour le demontrer soit prolongé un côté pris a volonté, par exemple *AC*.



L'angle exterieur $BCD = ABC + BAC$ [2]. Donc en ajoûtant de part & d'autre l'angle *ACB*, on aura [3] $BCD + ACB = ABC + BAC + ACB$. Or [4] les angles *BCD* &

* *Ax. 2. gen.* [1] *Prop. pres.*
[2] *Prop. 30. Geo.* [3] *Ax. 4. gen.*
[4] *Part. 1. Prop. 21. Geo.*

A C B pris enſemble ſont égaux à deux droits. Donc * la ſomme des trois angles *A B C*, *B A C*, & *A C B* du triangle *A B C* eſt égale à deux angles droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Si un des angles d'un triangle eſt droit, les deux autres angles pris enſemble ſeront égaux à un droit. Car tous ces trois angles pris enſemble ne ſont [1] égaux préciſément qu'à deux droits.

Et reciproquement ſi un des angles d'un triangle eſt égal aux deux autres, cet angle eſt droit; parcequ'alors il ſera égal à la moitié du total de ces trois angles, lequel total ou ſomme eſt [1] la valeur de deux angles droits.

COROLLAIRE II.

Chacun des trois angles *A*, *B*, *C* du triangle *A B C* peut être aigu; mais il ne peut y en avoir qu'un droit ou un obtus. Parcequ'il ne peut y en avoir deux droits ou deux obtus, ou un droit & un obtus. Car ſi deux angles droits ou deux obtus, ou un droit & un obtus pouvoient être dans un même triangle, ils feroient avec le 3[e] angle une grandeur plus grande que que deux angles droits, ce qui eſt contre la verité de la Propoſition preſente. Et partant lorſque dans un triangle rectiligne il ſe rencontre un angle droit, ou un angle obtus, chacun des deux autres doit être aigu.

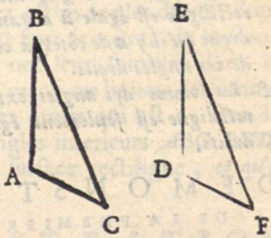
* *Demande* 1. *gen.*
[1] *Prop. preſ.*

COROLLAIRE III.

La ſomme des trois angles d'un triangle rectiligne pris à volonté, eſt égale à la ſomme des trois angles d'un autre triangle rectiligne. Puiſque la ſomme des trois angles d'un de ces triangles eſt * égale à deux angles droits, & que la ſomme des trois angles de l'autre triangle eſt auſſi égale à la même grandeur qui eſt deux angles droits,

COROLLAIRE IV.

Si deux angles, par exemple *A* & *C* d'un triangle *ABC* (pris enſemble ou ſeparément) ſont égaux aux deux angles *D* & *F* d'un autre triangle *DEF*, pris enſemble ou ſeparément; le 3^e^ angle reſtant *B* d'un de ces triangles *ABC* ſera égal au 3^e^ angle reſtant *E* de l'autre triangle *DEF*. Parceque [1] la ſomme des trois angles *A*, *B*, *C* d'un triangle *ABC* étant égale à la ſomme des trois angles *D*, *E*, & *F* de l'autre; ſi on ôte d'une part la ſomme *A* + *C* faite des angles *A* & *C*, & ſi on ôte de l'autre part la ſomme *D* + *F* faite des autres angles *D* & *F*; on



* *Prop. preſ.*

[1] *Cor. 3. Prop. preſ.*

aura * le 3^e angle B restant d'un triangle *ABC* égal au 3^e angle *E* restant de l'autre triangle *DEF*.

COROLLAIRE V.

Reciproquement si un angle, par exemple B, d'un triangle *ABC* est égal à un angle *E* d'un autre triangle *DFE*; la somme des autres angles *A* + *C* d'un de ces triangles sera égale à la somme des deux autres angles *D* + *F* de l'autre triangle. On en connoîtra l'évidence par un raisonnement semblable à celui du Coroll. precedent.

PROPOSITION XXXII.

1°. *La somme des angles interieurs d'une surface rectiligne est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtez à cette surface, moins 4 de ces angles droits.*

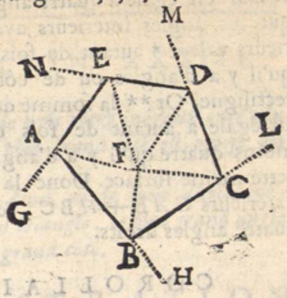
2°. *La somme des angles exterieurs d'une surface rectiligne est seulement égale à quatre angles droits.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit la surface rectiligne *ABCDE*: je dis que la somme des angles interieurs *ABC* + *BCD* + *CDE* + *DEA* + *EAB* est égale à dix angles droits moins quatre, c'est à dire à six angles droits. Pour le demontrer d'un point par exemple *F*, pris dans cette surface soient menées les lignes droites *FA*, *FE*, *FD*, *FC*, *FB* aux

* *Ax. 9. gen.*

ſommet sde tous les angles *A*, E, *D*, C, B. La ſomme des angles de chaque triangle qui ſera formé par ce moyen ſera * égale à la ſomme de deux angles droits; mais il y aura autant de triangles *AFB*, B*FC*. *CFD*, &c. qu'il y aura de côtez



à cette ſurface, puiſque chaque côté ſert de baſe à un triangle. Donc il y aura autant de fois deux angles droits que de côtez à cette ſurface. Or dans la ſurface propoſée il y a 5 côtez. Donc la ſomme des angles de tous les 5 triangles qui ont pour baſes ces 5 côtez eſt 10 angles droits, dont en ôtant quatre, qui ſont la valeur de la ſomme des angles qui ont leur ſommet dans le point F d'où on aura mené ces lignes, la ſomme du reſte de ces angles droits qui eſt 6, ſera la valeurs de tous les angles interieurs *ABC*, BC*D*, *CDE*, &c. de cette ſurface rectiligne, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit prolongé chaque côté de la ſurface *ABCDE*, par exemple *EA* vers *G*, *A*B vers *H*, &c. je dis que la ſomme des angles exterieurs *GA*B + *H*BC + *LCD* + *MDE* +

* *Prop.* 31. *geo.*

NEA eſt égale à quatre angles droits ; parceque les angles interieurs avec les angles exterieurs valent * autant de fois deux angles droits qu'il y a d'angles ou de côtez à cette ſurface rectiligne. Or ** la ſomme des angles interieurs eſt égale à autant de fois deux angles droits moins quatre qu'il y a d'angles ou de côtez à cette même ſurface. Donc la ſomme des angles exterieurs *GAB*+*HBC*, &c. eſt égale à ces quatre angles droits.

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la premiere partie de la Propoſition preſente que toutes les ſurfaces planes rectilignes qui auront un pareil nombre de côtez, auront le même nombre d'angles droits pour la valeur de la ſomme de leurs angles interieurs.

COROLLAIRE II.

Il ſuit de la ſeconde partie de la Propoſition preſente que toutes les ſurfaces rectilignes de quelque eſpéce qu'elles ſoient, c'eſt à dire, quel nombre de côtez qu'elles ayent chacune, auront les ſommes des angles exterieurs égales entr'elles ; puiſque la ſomme des angles exterieurs de chacune eſt égale à quatre angles droits.

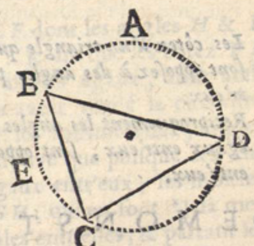
* *Part. 1. Prop. 21. Geo.*
** *Part. 1. Prop. preſ.*

PROPOSITION XXXIII.

1. *De deux côtez, ou de trois côtez inégaux entr'eux d'un triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.*
2. *Reciproquement de deux, ou de trois angles inégaux entr'eux d'un triangle, le plus grand angle est opposé au plus grand côté.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle BCD dont le côté BD est plus grand que le côté BC : je dis que l'angle BCD > BDC. Car supposant * une circonference de cercle décrite par les sommets des trois angles B, C, D ; l'arc BAD sera [1] plus grand que l'arc BEC. Donc [2] la moitié de cet arc BAD qui est [3] la mesure de l'angle C est plus grande que la moitié de l'arc BEC, qui est la mesure de l'angle D. Donc l'angle C opposé au plus grand côté BD sera plus grand que l'angle D opposé au plus petit côté BC, *ce qu'il falloit demontrer.*



* *Cor. 2. Prop. 13. Geo.* [1] *Cor. 1. Prop. 11. Geo.*
[2] *Ax. 11. gen.* [3] *Prop. 27. Geo.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Si l'angle *C* du même triangle B*CD* est plus grand que l'angle *D* : je dis que le côté B*D* sera plus grand que le côté B*C*. Car * l'angle C étant plus grand que l'angle *D*, la moitié de l'arc B*AD* qui est la mesure de cet angle *C*, sera [1] plus grande que la moitié de l'arc BEC qui est la mesure de l'angle *D*. Donc l'arc B*AD* double de sa moitié sera [2] plus grand que l'arc BEC pareillement double de sa moitié. Donc [3] le côté B*D* sera plus grand que le côté *BC*, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XXXIV.

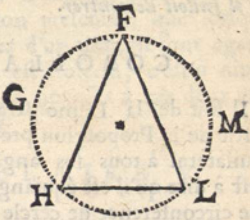
1. *Les côtez d'un triangle qui sont égaux entr'eux, sont opposez à des angles pareillement égaux entr'eux.*
2. *Reciproquement les angles d'un triangle qui sont égaux entr'eux, sont opposez à des côtez égaux entr'eux.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle *FHL*, dont les côtez *FH* & *FL* soient égaux entr'eux : je dis que les angles *H* & *L* opposez à ces côtez égaux, sont

* *Supposit.* [1] *Ax.* 11. *gener.*
[2] *Ax.* 14. *gener.* [3] *Part.* 2. *Prop.* 11. *Geo.*

aussi égaux entr'eux. Pour le demontrer supposons une circonference de cercle *HLMFG* décrite * par le sommet des trois angles *H*, *L*, *F*. Il est constant [1] que les arcs *FGH* & *FML* seront aussi égaux entr'eux ; & que les angles *H* & *L* sont [2] mesurez par la moitié de ces arcs *FML* & *FGH*.



Donc les angles *H* & *L* seront égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer*.

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle *HLF* dont les angles *H* & *L* soient égaux entr'eux : je dis que les côtez *FL* & *FH* opposez à ces angles égaux, sont aussi égaux entr'eux. Après avoir mené la circonference *HLMFG* par les sommets des 3 angles de ce triangle ; on trouve que puisque les angles *H* & *L* sont [3] égaux entr'eux, les moitiez des arcs *FML* & *FGH*, qui en sont [2] la mesure, sont aussi [4] égales entr'elles ; & partant les arcs *FML* & *FGH* qui sont doubles de ces moitiez, sont [5] aussi égaux entr'eux. Donc [6] les côtez *FL* & *FH*, qui sont des cordes ou soûtendantes de ces arcs, sont égaux entr'eux.

* *Cor. 2. Prop. 13. Geo.* [1] *Cor. 2. Prop. 11. Geo.*
[2] *Prop. 27. Geo.* [3] *Supposit.*
[4] *Cor. 2. Prop. 20. Geo.* [5] *Ax. 6. gen.*
[6] *Part. 1. Prop. 11. Geo.*

Or ces côtez *F L* & *F H* sont opposez aux angles égaux *H* & *L*. Donc les angles d'un triangle égaux entr'eux sont opposez a côtez égaux, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Il suit de la Demonstration de la premiere partie de la Proposition presente, qu'un triangle équilateral à tous ses angles égaux entr'eux, c'est à dire qu'il est équiangle. Car si on suppose une circonference de cercle menée par les sommets des trois angles d'un triangle équilateral les côtez de ce triangle seront soûtendantes d'arcs égaux entr'eux, dont les moitiez seront * mesures des angles opposez.

COROLLAIRE II.

Il suit encore de la Demonstration de cette premiere partie, qu'un triangle Isoscele, c'est à dire **, qui a deux côtez égaux entr'eux, a les angles opposez à ces côtez égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

Il suit pareillement de la Demonstration de la 2e partie de la Proposition presente, que lorsque les 3 angles d'un triangle sont égaux entr'eux, c'est à dire, que lorsqu'un triangle est équiangle, il est équilateral, ou que ce triangle à tous ces côtez égaux entr'eux. Puisqu'ayant [1] décrit une circonference de cercle par les sommets de ces trois angles, les côtez de ce triangle seront cords ou soûtendantes d'arcs égaux.

* *Prop. 27. Geo.* ** *Déf. 40. Geo.*

[1] *Cor. 2. Prop. 13. Geo.*

COROLLAIRE IV.

Il ſuit enfin de la Demonſtration de la 2e partie de la Propoſition preſente, que lorſque ſeulement deux angles d'un triangle ſont égaux entr'eux, ce triangle eſt Iſoſcele, c'eſt à dire, * qu'il a les deux côtez oppoſez à ces deux angles, égaux entr'eux.

COROLLAIRE V.

Entre les uſages de la propoſition preſente, j'en propoſerai un pour meſurer une diſtance acceſſible ſeulement par une de ſes extremités. Mais auparavant, il eſt neceſſaire de faire attention à la maniere de determiner une ligne droite ſur le terrain.

Pour tracer dans la Campagne une ligne droite du point *B* au point *C*, à chacune des deux extremités *B* & *C*, il faut ficher dans la terre un picquet ou bâton; enſuite il faut ſe mettre un peu éloigné d'une des extremités de cette ligne, par exemple en *A*, & regarder le bâton planté en *B*, de telle ſorte que ce même bâton couvre à la vûë & empêche d'appercevoir le bâton *CD*. Alors on fera planter ou ficher en terre, d'eſpace en eſpace, d'autres bâtons *E*, *F* &c. de ſorte que regardant le bâton *B* en ſe tournans vers *CD*, il arrive que ce même bâtons *B* couvre à la vûë les autres bâton *E*, *F* &c. La ligne *BEFC* ſera une ligne droite; parceque nous jugeons à la vûë qu'une ligne eſt droite, lorſqu'en la regardant par un bout ſelon ſa longueur, on n'apperçoit aucun de ſes points s'écarter à

* *Déf.* 40. *Geo.*

droit ou à gauche. On peut par ce moyen planter une rangée d'arbres ou d'autres choses en ligne droite. Si le bâton *C D* étoit difficile à appercevoir, à cause de son éloignement, on peut mettre du papier ou du linge blanc au point *D*, pour le rendre plus visible, ou bien on se sert de lunettes d'approches.

Soit la largeur d'une riviere, par exemple *G I*, qu'on souhaite connoître exactement, sans pour cela être obligé de la traverser.

Je suppose que cette largeur est accessible par le point *G*, & que rien n'empêche les operations suivantes. Il faut construire un triangle Isoscele rectangle *G K L*. Aprés en avoir ajusté le plan sur un bâton fiché en terre, on dirigera le côté *G L*, selon la ligne donnée *G I*; le triangle demeurant en cette situation, on prolongera la longueur du côté *G K* en ligne droite *G M*, comme on vient d'enseigner. Au sommet de l'angle droit *G*, on fichera en terre un bâton *GH*. Ensuite on transportera le triangle *GKL* vers *M*, jusqu'à ce qu'on soit parvenu en *P N O*; de sorte que ce triangle étant soutenu fixement par le bâton *Q*,

& son côté *NO* étant dirigé selon la longueur de la ligne droite *GM*, en regardant le long du côté *OP*, on puisse appercevoir le point *I*. Alors on connoîtra la distance *GO* qui sera la même que *GI*; & lorsqu'on mesurera *GO*, c'est la même chose que si on mesuroit *GI*. Parceque dans le triangle Isoscele *PON* l'angle *PNO* étant * droit, l'angle *NOP* sera [1] un demi angle droit. Et dans le triangle *GOI* l'angle *IGO* est droit, & l'angle *GOI* étant égal à la moitié d'un droit, on aura [2] *GIO* aussi égal à un demi droit. Donc [3] $GO = GI$.

On peut sur le même principe connoître la mesure de la hauteur d'une tour *RS*, ou d'un arbre sans y monter. Pour cela il faut construire un triangle rectangle Isoscele *TVX*, & attacher son côté *TV* sur un bâton pour le supporter. Au point *X* il faut attacher un filet, & à son extrêmité un plomb. On éloignera ce triangle, ou on l'approchera de la tour *RS*, jusqu'à ce qu'ayant fiché en terre le bâton qui le supporte, & regardant le long du côté *TX*, on puisse appercevoir l'extremité *S*. Alors sans remuer le triangle *TVX*, on regardera par le point *X* le long de ce côté *XT*, & on marquera le point *Y* où se termine le rayon visuel *XTY*: Je dis que la longueur *YR* est égale à la hauteur *RS* qu'on cherche. Car la ligne à plomb *XZ* est perpendiculaire à la ligne horizontale *YR* qui est sur la surface de la terre. Reciproquement cette ligne *YR* est [4] perpendiculaire à *XZ*; mais la ligne *TV* est * aussi per-

* *Par construction.*

[1] *Cor. 2. Prop. pres. & Prop. 31. Geo.*

[2] *Prop. 31. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. pres.*

[4] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*

pendiculaire à *XZ*. Donc *TV* & *YZ* sont * paralleles. Or l'angle *XTV* est [1] égal à la moitié d'un droit & [2] l'angle $XTV = SYR$. Dans le triangle *YRS*, l'angle *SYR* sera donc égal à la moitié d'un droit. Donc aussi l'angle *YSR* sera [1] aussi égal à la moitié d'un droit ; car on suppose que l'angle *SRY* est droit. Donc [3] la hauteur *RS* est égale à la distance *YR* qu'on peut mesurer facilement.

PROPOSITION XXXV.

1°. *Deux côtez pris separément d'un triangle étant égaux aux deux côtez aussi pris separément d'un autre triangle, si l'angle compris par deux de ces côtez d'un de ces triangles est égal à l'angle compris par deux de ces mêmes côtez de l'autre triangle ; la base de l'un sera égale à la base de l'autre.*

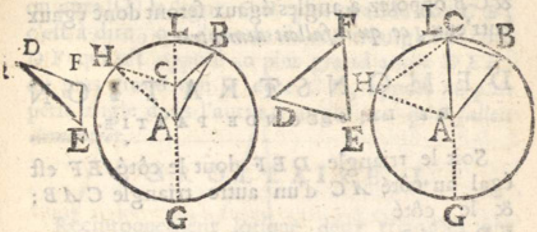
2°. *Deux côtez pris separément d'un triangle étant égaux aux deux côtez aussi pris separément d'un autre triangle, si l'angle compris par deux de ces côtez d'un de ces triangles est plus grand que l'angle compris par deux de ces mêmes côtez de l'autre ; le triangle qui aura ce plus grand angle aura une base plus grande que celle de l'autre triangle.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les deux triangles *ABC* & *DEF* tels que le côté *EF* du triangle *DEF* soit égal

* *Part. 2. Prop. 15. Geo.*
[1] *Prop. 31. Geo. & Cor. 2. Prop. pres.*
[2] *Part. 1. Prop. 24. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. pres.*

au côté *A C* du triangle *A B C*, & que le côté *E D* ſoit égal au côté *A B*, enfin que l'angle *D E F* ſoit égal à l'angle *C A B* : Je dis que le



côté *F D* oppoſé à cet angle *D E F* eſt égal au côté *C B* oppoſé à l'angle *C A B*. Pour le demontrer, conſiderons le triangle *D E F* appliqué en *H A C*, de ſorte que le côté *E F* ſoit poſé ſur le côté *A C* ; en appliquant le point *E* ſur le point *A*, le point *F* tombera ſur le point *C* à cauſe de l'égalité ſuppoſée. Le côté *A H* ſera le même que le côté *E D*. Du point *A* comme centre, & de la diſtance de *A H*, on décrira une circonference de cercle *H G B*, qui paſſera par l'extrêmité *B* du côté de *A B* ; car [1] *A H* = *A B*.

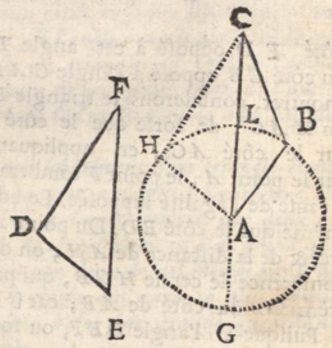
Puiſque [1] l'angle *D E F*, ou ſon égal *H A C*, eſt égal à l'angle *C A B*, leurs meſures qui ſont [2] les arcs *H L* & *B L*, ſeront égales entr'elles. Or [3] l'arc *L H G* = *L B G*. Donc ôtant d'une part l'arc *L H*, & de l'autre l'arc *L B*, il reſtera [4] l'arc *H G* = *B G* ; & partant les lignes *C H* & *C B* étant menées du point *C* pris hors le centre *A* du cercle, à la circonference, ſe ter-

[1] *Suppoſit.* [2] *Prop. 20. Geo.*
[3] *Cor. 5. Prop. 14. Geo.* [4] *Ax. 9. gen.*

mineront aux points *H* & *B* également diſtans du point *G* où ſe termine la ligne *C G*, qui paſſe par le centre *A*. Donc [1] *C H* = *C B*. Dans les triangles *D E F* & *C A B*, les côtez *H C* ou *DF* & *C B* opposez à angles égaux ſeront donc égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle *D E F* dont le côté *E F* eſt égal au côté *A C* d'un autre triangle *C A B*: & le côté *E D* = *A B*, & l'angle *D E F* eſt plus grand que l'angle *C A B*: je dis que le côté *FD* opposé à ce plus grand angle *D E F* eſt plus grand que le côté *C B* opposé au plus petit angle. Pour le demontrer ſoient appliquez ces deux triangles, comme dans la premiere partie de la Propoſition preſente, & ſoit décrite la circonference *H G B L*.



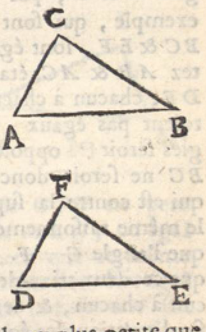
Puiſque [2] l'angle *D E F* ou *H A C* > *C A B*, ſa meſure [3] *L H* eſt plus grande que l'arc *L B*,

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 14. *Geo.* [2] *Suppoſit.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 20. *Geo.*

mesure de l'angle *CAB*. Or [1] l'arc *LHG*=*LBG*. Donc en ôtant d'une part l'arc *LH*, & ôtant de l'autre l'arc *LB*, il restera [2] l'arc $HG < GB$; & partant le point *C* étant pris hors le cercle, on aura [3] la ligne *CH* plus grande que *CB*; c'est à dire, que dans un de ces triangles le côté *DF* qui est opposé au plus grand angle *DEF*, est plus grand que le côté *CB*, opposé au plus petit angle dans l'autre triangle, *ce qu'il falloit demontrer*.

COROLLAIRE I.

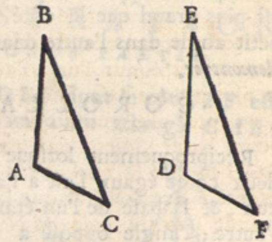
Reciproquement lorsque deux triangles ont deux côtez égaux l'un à l'autre, chacun à chacun, & la base de l'un étant égale à la base de l'autre; l'angle opposé à la base de l'un, est égal à l'angle opposé à la base de l'autre. Soient par exemple les deux triangles *ABC* & *DEF*, tels que le côté *AB* soit égal au côté *DE*, & le côté *BC*=*EF*, & enfin la base *AC*=*DF*: je dis que l'angle *ABC*=*DEF*. Car si l'angle *ABC* étoit plus grand, ou plus petit que l'angle *DEF*, on auroit [4] la base *AC* plus grande ou plus petite que *DF*, ce qui est contre la supposition presente. Donc l'angle *ABC*=*DEF*.



(1) *Cor. 5. Prop. 14. Geo.* [2] *Ax. 15. general.*
(3) *Cor. 4. Prop. 14. Geo.*
[4] *Prop. pres. Part. 2.*

COROLLAIRE II.

Donc en general deux triangles équilateraux l'un à l'autre, sont équiangles l'un à l'autre de telle sorte que les angles opposez à côtez égaux, sont égaux entre eux. Soient les deux triangles *ABC* & *DEF* équilateraux l'un à l'autre, c'est à dire que le côté *AB* = *DE*, que *BC* = *EF*, que *AC* = *DF* : je dis que les angles *A* & *D*, par



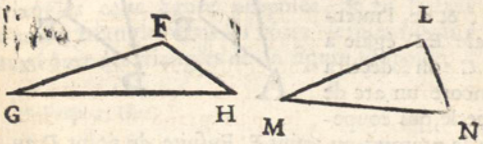
exemple, qui sont opposez aux côtez égaux *BC* & *EF*, sont égaux entr'eux. Car [1] les côtez *AB* & *AC* étant égaux aux côtés *DE* & *DF*, chacun à chacun, si les angles *A* & *B* n'étoient pas égaux, le plus grand de ces angles seroit [2] opposé au plus grand côté. Le coté *BC* ne seroit donc pas égal au coté *EF*, ce qui est contre la supposition. On trouvera par le même raisonnement que l'angle *B* = *E*, & que l'angle *C* = *F*. Parcequ'on trouve toûjours que ces deux triangles ont deux cotez égaux, chacun à chacun, & des bases égales entr'elles. Enfin deux triangles équilateraux l'un à l'autre sont [3] égaux. Car en les appliquant l'un sur l'autre, de sorte qu'on pose les cotez égaux sur les cotez égaux ; ces triangles conviendront en toute

[1] *Supposit.* [2] *Prop. pres. part.* 2.
[3] *Ax.* 1. *Geo.*

maniere, c'eſt à dire, qu'ils ne s'excederont point l'un l'autre. Parceque autrement les cotez de l'un ne ſeroient pas égaux aux cotés de l'autre, chacun à chacun, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

COROLLAIRE III.

Reciproquement de deux triangles qui ont deux cotez égaux l'un à l'autre, celui qui aura la plus grande baſe, aura l'angle compris par ces deux cotez plus grand que celui qui aura la plus petite baſe. Soient par exemple les triangles *FGH* & *LMN* tels que le coté *FG*=*LM*, & le coté *FH*=*LN*, & que la baſe *GH* ſoit plus grande que la baſe *MN* : je dis que l'angle



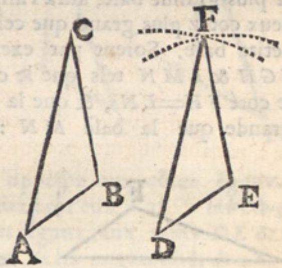
GFH>*MLN*. Car cet angle *GFH* ne peut être que plus grand que l'angle *MLN*, ou égal à cet angle *MLN*, ou plus petit que ce même angle *MLN*. Or l'angle *GFH* ne peut être égal à *MLN*; car il faudroit * que la baſe *GH* fût égale à la baſe *MN*, ce qui eſt contre la ſuppoſition. Pareillement l'angle *GFH* ne peut être plus petit que l'angle *MLN*; car [1] la baſe *GH* ſeroit plus petite que la baſe *MN*, ce qui

* *Part.* 1. *Prop. preſ.*
[1] *Part.* 2. *Prop. preſ.*

eſt encore contre la ſuppoſition. Donc l'angle *GFH* qui eſt oppoſé à la plus grande baſe, ſera plus grand que l'angle *MLN*, qui eſt oppoſé à la plus petite baſe.

COROLLAIRE IV.

Pour décrire un triangle qui ſoit équilateral, équiangle & égal à un autre triangle donné *ABC*. Avec un compas on prendra la ligne *DE* égale à *AB*. Du point *D* comme centre, & de l'intervalle *DF* égale à *AC*, on décrira un arc de cercle. Du point *E*, & de l'intervale *EF* égale à *BC* on décrira encore un arc de cercle, qui coupera le premier au point *F*. Enſuite du point *D* au point *F* on menera *DF*, & du point *E* au même point *F* on menera *EF* : je dis que le triangle *DEF* ſera équilateral au triangle *ABC*, comme il eſt évident [1]; ce triangle *DEF* ſera [2] auſſi équiangle au triangle *ABC*; enfin [3] ces deux triangles ſeront égaux entre eux.



On ſe ſerviroit de cette methode ſi on vouloit décrire un triangle qui eût ſes cotez égaux à trois lignes données, chacun à chacune; pourvû que

[1] *Par conſtruction.*
[2] *Cor. 2. Prop. preſ.*
[3] *Ax. 1. Geo.*

deux de ces lignes prises ensemble à volonté fussent * plus grandes que la troisiéme. Car autrement les arcs décrits des deux extrêmitez d'une de ces lignes, & d'ouvertures de compas égales à chacune des deux autres, ne pourroient pas se couper, par exemple, au point F.

C'est ainsi qu'on peut décrire un triangle équilateral sur une ligne, en décrivant des deux extrêmitez de la ligne proposée deux arcs d'une ouverture de compas égale à cette ligne; ces deux extrêmitez seroient les sommets de deux angles, & le point d'intersection de ces deux arcs seroit le sommet du troisiéme.

On se peut servir de ce Corollaire, pour décrire une figure égale, équilaterale, & équiangle à une autre figure proposée, en divisant en triangles cette figure proposée, & en faisant d'autres triangles dont les côtez seroient égaux aux côtez des triangles de la figure proposée.

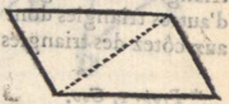
* *Prop. 1. Geo.*

PROPOSITION XXXVI

Les lignes paralleles & égales comprennent par leurs extrêmitez de même côté, des lignes paralleles & égales.

DEMONSTRATION.

SOient les lignes *AB* & *CD* paralleles, & égales entr'elles ; Je dis que les lignes *AC* & *BD* seront aussi paralleles & égales : pour le démontrer, soit menée la diagonale *AD*. Les angles alternes internes *BAD* & *ADC* sont * égaux entr'eux.



Puisque [1] *AB*=*CD* & que le côté *AD* est commun aux deux triangles *BAD* & *ADC*, le triangle *BAD* aura les deux côtez *BA* & *AD* égaux aux côtez *CD* & *DA* du triangle *ADC*, chacun à chacun, & les angles *BAD* & *ADC* seront aussi égaux entr'eux. Et partant [2] 1° les bases *AC* & *BD* seront égales entr'elles. 2° Les angles *BDA* & *DAC* opposez aux côtez égaux *AB* & *CD*, seront [3] aussi égaux entr'eux. Ces lignes *AC* & *BD* seront donc [4] paral-

* *Part.* 1. *Prop.* 23. *Geo.*
[1] *Supposit.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 35. *Geo.*
[4] *Part.* 2. *Prop.* 23. *Geo.*

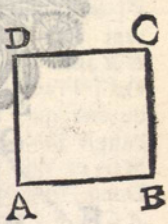
leles entr'elles. Donc les lignes paralleles & égales *AB* & *CD* comprennent, par leurs extremitez, des lignes *AC* & *BD* égales & paralleles, *ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

La démonstration qu'on vient de faire est seulement pour les lignes menées aux extremités *A* & *C*, *B* & *D* du même côté. Car les lignes menées par les extremités *A* & *D*, *C* & *B* de ces paralleles, de differens côtés, ne seroient jamais paralleles, parcequ'elles se couperoient toujours, & ne seroient égales que fort rarement.

COROLLAIRE.

Si on veut construire un quarré sur la ligne *AB*; par les deux extremités *A* & *B*, il faut mener deux lignes *AD* & *BC* perpendiculaires & égales à cette ligne *AB*, & par leurs extremités *D* & *C*. Il faut mener la ligne *DC*. Alors la figure *AC* sera le quarré qu'on souhaittoit.



Car 1° la ligne *AD* sera [1] parallele à *BC*.

2°. La ligne *DC* sera [2] parallele & égale à *AB*.

[1] *Part. 2. Prop. 15. Geo.*
[2] *Prop. pres.*

La figure *AC* sera donc [1] un parallelogramme.

3°. Les angles *DAB* & *ADC* étant [2] égaux à deux droits, & l'angle *A* étant [3] droit ; l'angle D sera droit. On trouvera par le même raisonnement que l'angle *C* est droit ; enfin l'angle *B* est aussi [3] droit. Donc *AC* est [4] un quarré.

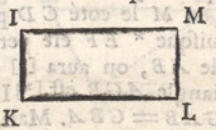
[1] *Def.* 49. *Geo.*
[2] *Part.* 3. *Prop.* 24. *Geo.*
[3] *Def.* 14. *Geo.*
[4] *Def.* 50. *Geo.*

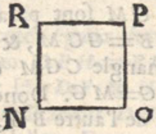
PROPOSITION XXXVII.

1. *Les côtez opposez d'un parallelogramme sont égaux entr'eux.*
2. *Reciproquement un quadrilatere, ou surface quadrilaterale, dont les côtez opposez sont égaux entr'eux, est un parallelogramme.*

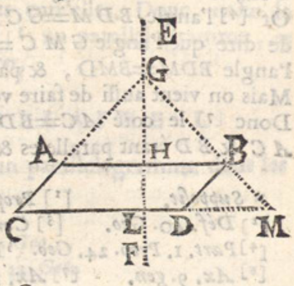
DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

SI un parallelogramme est rectangle, par exemple *KM*, il est constant que les cotez opposez *IK* & *LM* sont égaux entr'eux. Parceque ce sont perpendiculaires entre paralleles, qui * sont égales entr'elles. Par le même raisonnement *KL*=*IM*. On dira la même chose du quarré *NP*.

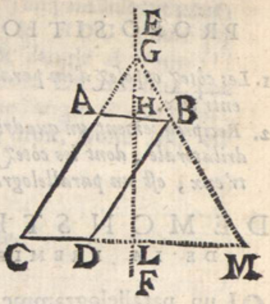




Si le parallelogramme est obliquangle, par exemple *CB* : je dis que *CA* =*DB*, & que *AB*=*CD*. Pour



* *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*



le démontrer : par le milieu d'un des cotez, par exemple, par le milieu *H* de *AB* soit menée *FE* perpendiculairement à ce coté *AB*. Ensuite soit prolongé le coté *CA*, jusqu'à la rencontre *G* de la perpendiculaire *EF*, & de ce point *G* soit menée par le point *B* la ligne *GM* qui rencontrera en *M* le coté *CD* prolongé.

Puisque * *EF* est perpendiculaire au milieu de *AB*, on aura [1] *GA*=*GB*. Et partant le triangle *AGB* est [2] Isoscele. Donc [3] l'angle *GAB* = *GBA*. Mais puisque * les lignes *AB* & *CM* sont paralleles entr'elles, l'angle [4] *GAB*=*GCM*, & *GBA*=*GMC*. Donc [5] le triangle *CGM* est aussi Isoscele : & partant *CG*=*MG*. Donc retranchant d'une part *GA*, & de l'autre *BG*, il restera [6] *AC*=*BM*. Or [4] l'angle *BDM*=*GCM*, on vient aussi de dire que l'angle *GMC* = *GCM*. Donc [7] l'angle *BDM*=*BMD*, & partant [5] *DB*=*BM*. Mais on vient aussi de faire voir que *AC*=*BM*. Donc [7] le coté *AC*=*BD* ; donc les lignes *AC* & *BD* étant paralleles & égales, compren-

* *Supposit.* [1] *Prop.* 3. *Geo.*
[2] *Déf.* 40. *Geo.* [3] *Cor* 2. *Prop.* 34. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo.* [5] *Cor.* 4. *Prop.* 34. *Geo.*
[6] *Ax.* 9. *gen.* [7] *Ax.* 18. *gen.*

dront

dront par leurs extrêmitez les lignes égales *AB* & *CD*; & partant en general les côtez opposez d'un parallelogramme, par exemple de *CB*, sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le quadrilatere *DG* dont les cotez *DH* & *FG*; *DF* & *HG* sont égaux entr'eux : je dis que ce quadrilatere est un parallelogramme. Pour le demontrer soit menée la diagonale *FH*. Les triangles *DFH* & *GFH* sont équilateraux l'un à l'autre. Car le côté *FH* est commun à tous les deux, & * $DH = FG$, $DF = HG$. Donc [1] les angles opposez à cotez égaux sont égaux entr'eux, c'est à dire que $DFH = FHG$; & $DHF = HFG$. Donc [2] *DF* & *HG* sont paralleles entr'elles; pareillement *DH* & *FG* sont aussi paralleles entr'elles. Donc enfin la surface *DFGH* est [3] un parallelogramme, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Un quarré est un parallelogramme dont les

* *Supposit.*
[1] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[2] *Part. 2. Prop. 23. Geo.*
[3] *Déf. 49. Geo.*

quatre cotez sont égaux entr'eux. Soit le quarré NP : je dis que $NO = OP = PR = RN$. Car * $NO = OP$; & [3] $NR = OP$, enfin $PR = NO$.

COROLLAIRE II.

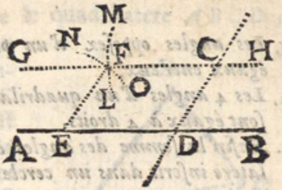
Il suit de la Proposition presente qu'une diagonale d'un parallelogramme, par exemple la diagonale FH du parallelogramme DG, divise ce parallelogramme en deux parties égales, c'est à dire que le triangle DHF est égal au triangle FHG. Car [1] le coté $DH = FG$; $DF = HG$, & FH est un coté commun aux deux triangles DHF & FHG. Donc ces deux triangles seront équilateraux l'un à l'autre. Donc [2] ils seront égaux entr'eux.

COROLLAIRE III.

La seconde partie de la Proposition presente est le fondement d'une methode dont on se sert pour mener par un point donné une ligne parallele à une ligne donnée. Soit par exemple la ligne donnée AB, & le point C par

* Déf. 50. Geo. [1] Part. 1. Prop. pres.
[2] Ax. 1. Geo.

lequel il faille mener une ligne parallele à cette ligne *A B*. Il faut mener à volonté par ce point *C* une ligne *C D* qui coupe la ligne donnée *A B* au point *D*. Ensuite on ouvre un compas du point *D*, de part ou d'autre, par exemple en *E*, & de cette



ouverture *D E* on décrit du point *C* l'arc *L F M*. De l'ouverture *D C* on décrit du point *E* l'arc *N F O* qui coupe le precedent au point F ; par ce point F & par le point *C* on mene la ligne *G H* : je dis que cette ligne *G H* est la ligne parallele cherchée. Car dans le quadrilatere *E C* les cotez opposez sont * égaux entr'eux. Donc [1] ce quadrilatere est un parallelogramme ; & partant [2] les cotez opposez sont paralleles. Donc *F C* ou *G H* est parallele à *A B*.

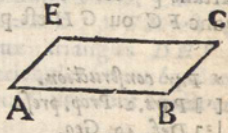
* *Par construction.*
[1] *Part. 2. Prop. pres.*
[2] *Déf. 49. Geo.*

PROPOSITION XXXVIII.

1. *Les angles opposez d'un parallelogramme sont égaux entr'eux.*
2. *Les 4 angles d'un quadrilatere, pris ensemble, sont égaux à 4 droits.*
3. *Enfin la somme des angles opposez d'un quadrilatere inscrit dans un cercle valent deux angles droits.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

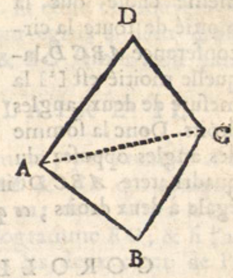
SOit le parallelogramme *BE* : je dis que l'angle $A = C$, que $B = E$. Car les angles *B* & *C* pris ensemble sont [1] égaux à deux droits ; pareillement les angles *E* & *C* pris ensemble sont égaux à la même grandeur, qui est deux angles droits. Donc [2] la somme des angles $B + C = E + C$. Donc en otant de part & d'autre l'angle *C*, il restera [3] l'angle $B = E$. Par un raisonnement semblable on trouvera que $A + B = C + B$; & partant que $A = C$. Or *A* & *C* ; *B* & *E* sont des angles opposez de parallelogramme. Donc les angles opposez d'un parallelogramme sont égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*



[1] *Part.* 3. *Prop.* 24. *Geo.* [2] *Ax.* 18. *gener.*
[3] *Ax.* 9. *general.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit par exemple le quadrilatere *ABCD*; il faut mener aux sommets de deux angles opposez *A* & *C* la ligne *AC*. Il est constant [1] que la somme des 3 angles du triangle *ADC* est égale à deux droits; pareillement que la somme des angles du triangle *ABC* est aussi égale à deux angles droits.



Or la somme des angles du quadrilatere *ABCD* est la même que la somme de ceux des deux triangles *ADC* & *ABC*. Donc la somme des angles du quadrilatere *ABCD* est égale à 4 angles droits, *ce qu'il falloit demontrer*.

DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

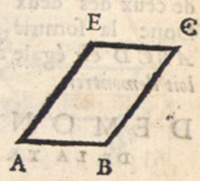
La somme de deux angles opposez, par exemple *A* & *C*; *B* & *D* d'un quadrilatere *ABCD* inscrit dans un cercle est égale à deux angles droits. Car ces deux angles *A* & *C*, pris ensemble, ont [2] pour mesure la moitié d'une circonference de cercle, c'est à dire [3], la moitié de ses deux parties *BCD* & *BAD*. Les deux

[1] *Prop. 31. Geo.* [2] *Prop. 27. Geo.*
[3] *Ax. 3. gener.*

angles *B* & *D* ont * pareillement pour mesure la moitié des arcs *ADC* & *ABC* sur lesquels ils sont appuyez, ce qui est [1] la même chose que la moitié de toute la circonference *ABCD*, laquelle moitié est [2] la mesure de deux angles droits. Donc la somme des angles opposez du quadrilatere *ABCD* inscrit dans le cercle est égale à deux droits, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

La converse de la premiere partie de la Proposition presente est telle : un quadrilatere dont les angles opposez sont égaux entr'eux, est un parallelogramme. Soit le quadrilatere *AC* dont les angles opposez *A* & *C* sont égaux entr'eux, & dont les angles *E* & *B* sont aussi égaux entr'eux : je dis que les cotez *EC* & *AB* sont paralleles entr'eux; de même des cotez *AE* & *BC*. Car si à l'angle *A* on ajoûte l'angle *E*, & si à l'angle *C* d'une autre part on ajoûte l'angle *B*, on aura [3] $A+E=C+B$. Or ces angles

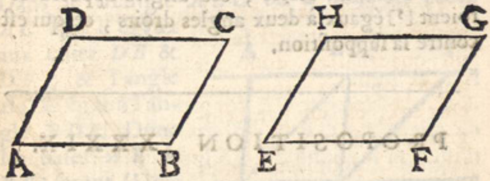


* *Prop.* 27. *Geo.* [1] *Ax.* 3. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Ax.* 4. *gen.*

A + E + C + B ſont [1] égaux à quatre droits. Donc les angles *A + E* ſeront égaux à deux droits. Donc [2] les lignes *EC* & *AB* ſont paralleles entr'elles. De même ſi on ajoute l'angle *B* à l'angle *A*, & l'angle *E* à l'angle *C*, on aura *A + B = C + E*. Et enfin on trouvera que les angles *A + B* ſeront égaux à deux droits. Donc les lignes *AE* & *BC* ſeront auſſi paralleles.

COROLLAIRE II.

Si un parallelogramme, par exemple *AC*, à deux de ſes côtez *AD* & *AB* qui comprennent un angle, égaux aux deux côtez *HE* & *EF* d'un autre parallelogramme *EG*; & ſi l'angle *DAB* compris par les deux côtez de l'un



eſt égal à l'angle *HEF* compris par les deux côtez de l'autre : un de ces parallelogrammes *AC* ſera égal à l'autre *EG*, en toutes manieres. Car 1° les côtez *DC* & *CB* étant [3] égaux aux côtez *AB* & *AD*, ces mêmes côtez *DC* & *CB* ſeront auſſi égaux aux côtez *EF* & *EH*, & enfin [3] aux côtez *GH* & *GF*, chacun à chacun. 2° Les angles *A* & *B* ſont égaux [4] à deux droits. Pareillement *E* & *F* ſont [4] égaux à la même

[1] 2e *Part. de la Prop. preſ.* [2] *Part.3. Prop.25.Geo.* [3] *Part. 1. Prop. 37. Geo.* [4] *Part. 3. Prop. 24. Geo.*

grandeur qui est deux droits. Donc* $A+B=E+F$. Mais [1] $A=E$. Donc retranchant d'une part A, & de l'autre E, il restera [2] l'angle $B=F$. Or [3] l'angle $C=A$, & $G=E$. Donc * l'angle $C=G$. Pareillement [3] $D=B$, & $H=F$. Donc * l'angle $D=H$. 3° Enfin les côtez d'une de ces surfaces étant égaux aux côtez de l'autre, chacun à chacun, de même des angles; une de ces surfaces sera [4] égale à l'autre.

COROLLAIRE III.

Lorsque la somme des angles opposez d'un quadrilatere n'est point égale à deux angles droits, ce quadrilatere ne peut être inscrit dans un cercle. Car si ce quadrilatere pouvoit être inscrit dans un cercle, ces angles opposez seroient [5] égaux à deux angles droits, ce qui est contre la supposition.

PROPOSITION XXXIX.

Les parallelogrammes posez sur la même base & entre les mêmes lignes paralleles sont égaux entr'eux.

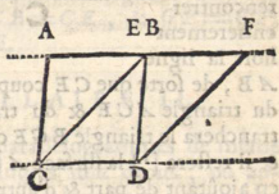
DEMONSTRATION.

Soient les parallelogrammes AD & ED posez sur la même base CD, & entre les

* *Ax.* 18. *gen.* [1] *Supposit.*
[2] *Ax.* 9. *gen.* [3] *Part.* 1. *Prop. pres.*
[4] *Ax.* 1. *Geo.* [5] *Part.* 3. *Prop. pres.*

mêmes paralleles *AF* & *CD* : je dis que la surface du parallelogramme *ACDB* est égale à la surface du parallelogramme *ECDF*.

Car les triangles *ACE* & *BDF* ont * les angles *CAE* & *DBF* égaux entr'eux, & ont pareillement les angles *AEC* & *BFD* aussi égaux entr'eux. Donc l'angle *ACE* sera [1] égal à l'angle *BDF*. Or [2] le côté *AC* = *BD*, parceque ce sont côtez opposez de parallelogrammes, de même le côté *CE* = *DF*. Dans le triangle *AEC* on a donc les côtez *AC* & *CE* égaux aux côtez *DB* & *DF*, & l'angle *ACE* égal à l'angle *BDF*. Donc les bases *AE* & *BF* seront [3] égales entr'elles, & les triangles *ACE* & *BDF* seront [4] aussi égaux entr'eux.



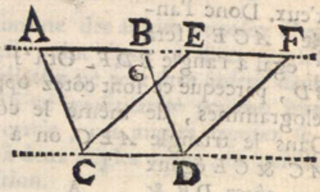
Mais les parallelogrammes *AD* & *CF* peuvent être posez sur la même base *CD* en 3 manieres.

1° Le point E ou F se peut rencontrer entre les points *A* & *B* : alors on ajoûtera au trian-

* Part. 1. Prop. 24. Geo. [1] Cor. 4. Prop. 31. Geo. [2] Part. 1. Prop. 37. Geo. [3] Part. 1. Prop. 35. Geo. [4] Ax. 1. Geo.

gle ACE la surface $CDBE$; & au triangle BDF on ajoûtera la même surface $CDBE$; on * aura $CAE + CDBE = BDF + CDBE$, c'est à dire, le parallelogramme AD sera égal à ED.

2° Le point E se peut rencontrer sur le point B, ou F sur A: alors au triangle ACE on ajoûtera le triangle CBD; & au triangle BDF on ajoûtera le même triangle CBD, & * on aura $ACB + CBD = BDF + CBD$, c'est à dire, le parallelogramme $AD = CF$.



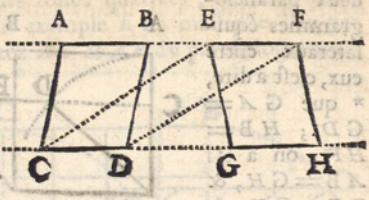
3° Enfin les points E & F se peuvent rencontrer entierement hors la ligne AB, de sorte que CE coupera BD en G. Alors du triangle ACE & du triangle BDF on retranchera le triangle BGE qui leur est commun, & il restera [1] la surface $ACGB = EGDF$. Et en ajoûtant de part & d'autre le triangle CGD, on aura * $ACGB + CGD = EGDF + CGD$, c'est à dire, le parallelogramme $AD = CF$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Les parallelogrammes posez sur des bases égales & entre les mêmes lignes paralleles ou

* *Ax. 4. general.*
[1] *Ax. 9. general.*

* de même hauteur sont aussi égaux entr'eux. Soient les bases *CD* & *G H* des parallelogrammes *C B* & *G F* de même hauteur, égales entr'elles :



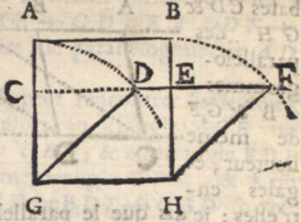
je dis que le parallelogramme $CB = GF$. Pour le demontrer soient menées les lignes *CE* & *DF*, la surface *CF* sera un parallelogramme. Car, puisque [1] $EF = GH$, & que [2] $CD = GH$, on aura $CD = EF$; ces deux lignes *CD* & *EF*, étant égales & paralleles, comprendront [3] par leurs extrêmitez les lignes *CE* & *DF* paralleles & égales. Or [4] le parallelogramme $CB = CF$, & $GF = CF$. Donc [5] $CB = GF$.

COROLLAIRE II.

Les surfaces des parallelogrammes de même circuit, dont les angles sont droits, ou approchent le plus des angles droits, sont plus grandes que les surfaces des autres parallelogrammes dont les angles approchent moins des angles droits. Soit le parallelogramme *AH*

* *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*
[1] *Part. 1. Prop. 37. Geo.*
[2] *Supposit.*
[3] *Prop. 36. Geo.*
[4] *Prop. pref.*
[5] *Ax. 18. general.*

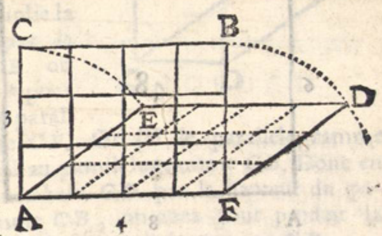
rectangle, & *DH* obliquangle, & soient ces deux parallelogrammes équilateraux entre eux, c'est à dire, * que *GA* = *GD*; *HB* = *HF*, on a [1] *AB* = *GH*, & *DF* = *GH*, & [2] enfin *AB* = *DF*; le côté *GH* est commun: je dis que le parallelogramme *AH* > *GF*. Car [3] le parallelogramme *DH* = *CH*; mais *CH* < *AH*, & *AH* est rectangle, & *DH* obliquangle; l'un & l'autre d'égal circuit. Donc les parallelogrammes rectangles sont plus grands que les obliquangles quoique équilateraux entr'eux. On dira la même chose des triangles.



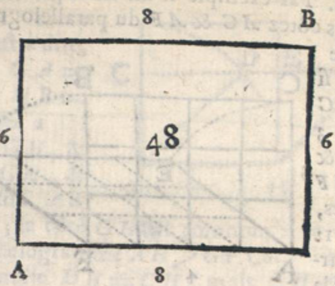
C'est pour cela que j'ay déja remarqué ailleurs [4] que pour avoir en pieds quarrez, ou en toises quarrées, &c. la surface d'un parallelogramme dont les angles sont obliques, il ne falloit pas multiplier l'un par l'autre les côtez qui comprennent un de ces angles. Parcequ'en faisant cette multiplication on trouve seulement pour produit le nombre des parallelogrammes obliques qui composent le parallelogramme total & qui lui sont équiangles; mais on ne trouve pas le nombre des parallelogrammes d'une toise quarrée ou d'un pied quarré, &c. que le parallelogramme contient. Et quand on veut connoî-

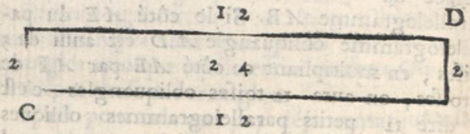
* *Supposit.* [1] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[2] *Ax.* 18. *gener.* [3] *Prop. pres.*
[4] *fin du Cor.* 2. *déf.* 53. *page* 212. *Geo.*

tre une ſurface ſur le terrain ou ailleurs, l'uſage eſt de chercher des toiſes quarrées, perches quarrées, &c. Par exemple ſi on multiplie l'un par l'autre les côtez *AC* & *AF* du parallelogramme rectangle *AB*, & ſi le côté *AC* eſt de 3 toiſes, & le côté *AF* de 4 toiſes, on aura 12 toiſes quarrées pour la ſurface du parallelogramme *AB*. Si le côté *AE* du parallelogramme obliquangle *AD* eſt auſſi de 3 toiſes, en multipliant ce côté *AE* par *AF* de 4 toiſes, on aura 12 toiſes obliquangles, c'eſt à dire 12 petits parallelogrammes obliques qui ſont la valeur du parallelogramme total *AD*, mais qui n'expriment point la valeur des toiſes quarrées qu'on cherche. Car on vient de faire voir qu'un rhombe dont chaque côté eſt d'une toiſe de longueur, eſt plus petit qu'une toiſe quarrée.



Au lieu qu'on vient d'examiner les ſurfaces de deux parallelogrammes de même circuit, lorſque les côtez de l'un ſont égaux aux côtez de l'autre, & que chaque angle de l'un differe de chaque angle de l'autre; ſi on examine preſentement les ſurfaces de deux de ces parallelogrammes, lorſque les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, & que chaque côté de l'un differe de chaque côté de l'autre : On trouvera encore que les parallelogrammes de même circuit qui approchent le plus du quarré, seront plus grands que les autres qui en approchent moins.





Soit par exemple le parallelogramme rectangle *A* B, dont un côté est de 8 toises, & l'autre de 6; soit un autre parallelogramme rectangle *C D* dont un côté soit de 2 toises & l'autre de 12: on trouve * que la surface du parallelogramme *A* B est de 48 toises quarrées, & que la surface du parallelogramme *C D* est seulement de 24 toises, quoique chacun soit de 28 toises lineaires de circuit.

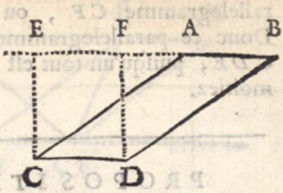
Enfin de ce Corollaire on concluera que les quarrez sont les surfaces planes les plus grandes de toutes celles qui ont le même circuit.

COROLLAIRE III.

La surface d'un parallelogramme obliquangle

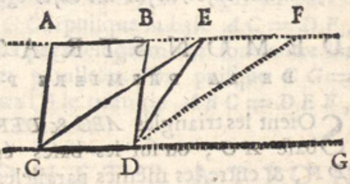
* *Cor. 2. déf. 53. Geo.*

eſt égale au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Soit par exemple le parallelogramme obliquangle *CB*, lorſqu'on multiplie la baſe *CD* par la hauteur *CE* ou *DF*, on a * pour produit le parallelogramme *CF*. Or [1] le parallelogramme *CF* eſt égal au parallelogramme *CB*. Donc en multipliant la baſe *CD* par la hauteur du parallelogramme *CB*, on aura pour produit la valeur de ce même parallelogramme *CB*.



COROLLAIRE IV.

Les parallelogrammes ſont doubles des triangles de même baſe & de même hauteur. Soient le parallelogramme *CB*, par exemple, & le triangle *CDE*, poſez ſur la même baſe *CD* & entre les mêmes lignes paralleles *AF* & *CG* : je dis que ce parallelogramme *CB* eſt double du triangle *CDE*. Pour le demontrer, ſoit menée par le point *D* la ligne *DF* parallele à la ligne *CE*, on aura [1] le parallelogramme *CF*=*CB*.



* *Cor. 2. déf. 53. Geo.*
[1] *Prop. preſ.*

Or * le triangle *CDE* est la moitié du parallelogramme *CF*, ou de son égal *CB*. Donc ce parallelogramme *CB* sera double de *CDE*, puisqu'un tout est double d'une de ses moitiez.

PROPOSITION XL.

1°. *Les triangles posez sur la même base ou sur des bases égales, & entre les mêmes lignes paralleles, sont égaux entr'eux.*

2°. *Reciproquement les triangles qui sont sur la même base, ou sur des bases égales, en ligne droite, du même côté, & qui sont égaux entre eux, sont entre les mêmes lignes paralleles.*

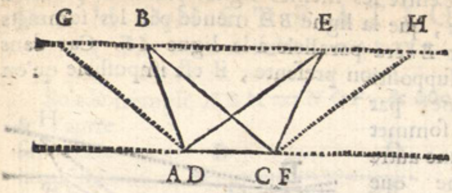
3°. *Reciproquement enfin les triangles qui sont entre les mêmes paralleles & égaux entr'eux, sont sur la même base, ou sur des bases égales.*

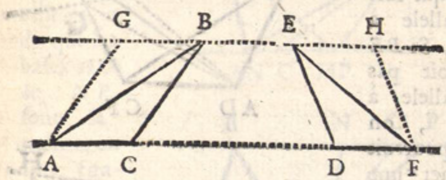
DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les triangles *ABC* & *DEF* sur la même base *AC*, ou sur les bases égales *AC* & *DF*, & entre les mêmes paralleles *AF* & *GH*: je dis que le triangle *ABC* est égal au triangle *DFE*. Pour le demontrer, soit menée par le point *A* du triangle *ABC* une ligne parallele à *CB*; puisque *GB* est [1] parallele à *AC*, on aura le parallelogramme *CG*: la même chose seroit arrivée, si par le point *C* on avoit mené une

* *Cor. 2. Prop. 37. Geo.*

[1] *Supposit.*





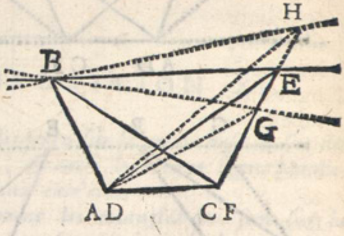
ligne parallele à *AB*. Soit encore menée par le point *F* la ligne *FH* parallelement au côté *DE*. Le parallelogramme *DH* ſera * égal au parallelogramme *GC*, puiſque la baſe *AC* = *DF*, & que ces deux parallelogrammes ſont entre les mêmes lignes paralleles. Or puiſque *CG* = *DH*, on aura [1] le triangle *ABC* = *DEF*, *ce qu'il falloit demontrer.*

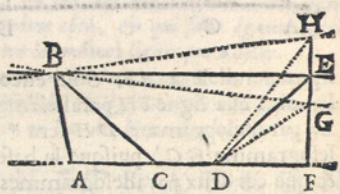
DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les deux triangles *ABC* & *DEF* égaux entr'eux, poſez ſur la même baſe *AC*, ou ſur des baſes égales *AC* & *DF*, en ligne droite & du même côté : je dis que ces deux triangles

* *Prop.* 39. & *Cor.* 1. *Prop.* 39. *Geo.*
[1] *Ax.* 12. *general.*

ſont entre les mêmes lignes paralleles, c'eſt à dire, que la ligne *BE* menée par les ſommets *B* & *E* ſera parallele à la ligne *AF*. Car dans la ſuppoſition preſente, il eſt impoſſible qu'on mêne par le ſommet *B* une autre ligne que *BE* qui ſoit parallele à *AF*. Si *BE* n'étoit pas parallele à *AF*, on en pourroit mener * une par ce point *B*, qui paſſeroit de part ou d'autre du point *E*, ſçavoir *BH* ou *BG*. Si c'étoit par exemple *BH* qui fût parallele à *AF*, on auroit [1] le triangle *DHF* = *ABC*; mais [2] *DEF* = *ABC*. Donc le triangle *DHF* ſeroit [3] égal à *DEF*, c'eſt à dire, la partie ſeroit égale au tout, ce qui eſt [4] impoſſible. Par la même raiſon *BG* ne peut être parallele à *AF*. C'eſt donc la ſeule ligne *BE* qui eſt parallele à *AF*, *ce qu'il falloit demontrer.*

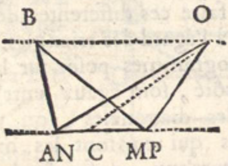


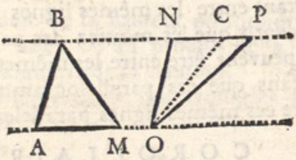


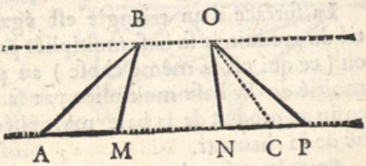
* *Cor. Prop. 23. Geo.* [1] *Part. 1. Prop. preſ.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Ax. 18. gen.*
[4] *Ax. 2. gen.*

DEMONSTRATION
DE LA TROISIE'ME PARTIE.

Soit le triangle *ABM* = *NOP*, & que l'un & l'autre ſoit entre les mêmes lignes paralleles: je dis que les baſes *AM* & *NP* ſont la même, ou ſont égales entre elles. Car ſi l'une de ces deux baſes n'étoit pas égale à l'autre, & que *NP*, par exemple, fût plus grande que *AM*, retranchant ſon excès *CP*, on auroit la baſe *NC* du triangle *NOC* égale à *AM* baſe du triangle *ABM*. Le * triangle *NOC* ſeroit donc égal à *ABM*; mais [1] *NOP* = *ABM*. Donc le tout *NOP* ſeroit [2] égal à ſa partie *NOC*, ce qui eſt [3] impoſſible. Donc







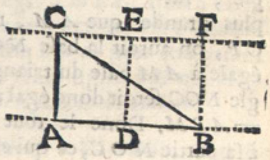
* *Part. 1. Prop. preſ.*
[1] *Suppoſit.*
[2] *Ax. 18. gen.*
[3] *Ax. 2. gen.*

la baſe *AM* ſera égale à *NP*, *ce qu'il falloit demontrer.*

Ce qui a été demontré dans la 2e & 3e partie de la Propoſition preſente à l'égard des triangles, peut être demontré de la même maniere à l'égard des parallelogrammes. J'ai crû qu'il ſuffiroit de faire ces differentes demonſtrations ſeulement à l'égard des triangles. Car, lorſque des parallelogrammes poſez ſur la même baſe, du même côté, ſont égaux entr'eux; après avoir mené des diagonales, on y trouve auſſi des triangles qui en ſont les moitiez, qui ſont égaux entr'eux, poſez ſur la même baſe; & partant entre les mêmes lignes paralleles. Il eſt évident * que les moitiez des parallelogrammes ne peuvent être entre les mêmes lignes paralleles ſans que ces parallelogrammes ſoient auſſi entre ces mêmes lignes paralleles.

COROLLAIRE I.

La ſurface d'un triangle eſt égale à la moitié du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur, ou (ce qui eſt la même choſe) au produit de la moitié de la baſe multipliée par ſa hauteur; ou enfin au produit de la baſe multipliée par la moitié de la hauteur.

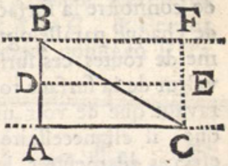


Soit le triangle rectangle *ABC*. Si on multiplie l'un par l'autre les côtez qui comprennent l'angle droit, c'eſt à dire, ſi on multiplie la baſe *AB* par la hauteur *AC*, on a pour pro-

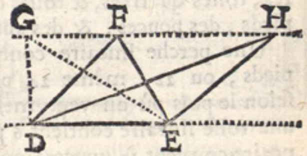
* *Cor. 1. Prop. 15. Geo.*

duit le parallelogramme rectangle *AF* ; & en prenant la moitié de ce produit, on aura la surface du triangle *ACB*, qui est * la moitié de *AF*.

Si on multiplie le côté *AC* par *AD* moitié du côté *AB*, on a le parallelogramme rectangle *AE* qui est la moitié du parallelogramme *AF* ; puisque [1] *AE*=*DF*. Mais le triangle *ABC* est [2] égal à la moitié du parallelogramme *AF*. Donc le triangle *ABC* est égal au produit de sa hauteur multipliée par la moitié de sa base, ou au produit de sa base multipliée par la moitié de sa hauteur.



On dira la même chose des triangles obliquangles, c'est à dire, oxigones ou obtusangles. Par exemple le triangle *DEF* ou *DEH* est égal à un triangle rectangle *DEG* de même base & de même hauteur ; & partant ce qu'on vient de dire du triangle rectangle *DEG* convient aussi aux triangles obliquangles *DEF*, *DEH*, &c.



COROLLAIRE II.

Il est donc facile de connoître combien de

* *Cor.* 2. *Prop.* 37. *Geo.* [1] *Cor.* 1. *Prop.* 39. *Geo.*
[2] *Cor.* 4. *Prop.* 39. *Geo.*

toises quarrées, ou combien de perches, &c. contiendra une surface plane rectiligne proposée, pourvû qu'on la puisse parcourir à volonté. Car il suffira de reduire cette surface en triangles rectangles, ou en parallelogrammes rectangles, & de connoître la surface de chaque triangle, ou de chaque parallelogramme rectangle. La somme de toutes ces surfaces particulieres sera * la valeur de la surface totale proposée. Mais auparavant que de voir un exemple de cette pratique, il est necessaire de faire attention 1° aux espéces de mesures les plus en usage; 2° aux manieres de mesurer une longueur ou distance sur le terrain; 3° par un point donné dans une ligne droite, ou hors de cette ligne comment on lui mêne une autre ligne perpendiculaire dans une plaine ou campagne.

1° Il faut remarquer qu'il y a des toises lineaires, toises quarrées, & toises cubes; de même des pieds, des pouces, & des autres mesures.

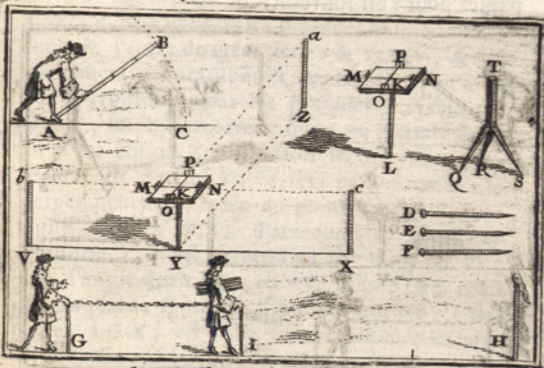
Une perche lineaire contient 18 pieds, 20 pieds, ou 22, même 24 pieds de longueur, selon le païs où on veut mesurer ou arpenter; une toise lineaire contient 6 pieds; un pied lineaire contient 12 pouces; un pouce contient 12 lignes.

Une toise quarrée contient 36 pieds; un pied quarré contient 144 pouces. On connoîtra de la même maniere les autres mesures, en quarrant leur longueur. La toise cube contient 216 pieds cubes, &c. Il est encore facile de connoître le cube des autres mesures.

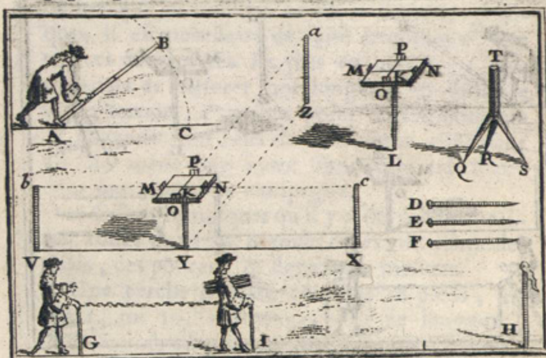
2° On mesure la longueur d'une ligne droite sur la terre avec une perche, ou une toise de bois. Et alors un homme seul peut appliquer cette per-

* *Ax. 3. gen.*

che en partie, ou entierement; une ou plusieurs fois successivement sur la ligne qu'il veut mesurer. Cet homme commence à appliquer un bout *A* de sa perche au bout de la ligne, en mettant un de ses pieds au point *A* pour empêcher cette perche de glisser; enfin il l'a couche successivement en abaissant le point *B* en *C*, & élevant ensuite le point *A*, il compte combien il l'a couchée de fois.



On mesure aussi une distance sur la terre avec une perche, une chaîne, ou une corde qui ne s'alonge ou ne racourcit aucunement; on se sert de picquets *D*, *E*, *F*, &c. Alors il faut deux personnes, qui s'aideront l'un l'autre. Soit la distance du point *G* au point *H*; si on se propose de la mesurer, le premier mesureur se mettra à l'extrêmité *G*, & l'autre mesureur en *I*, qui sera averti par la personne qui est en *G* de se détourner de part ou d'autre jusqu'à ce qu'il fiche son picquet en ligne droite de *G* en *H*. Après que le mesureur *I* a fiché son picquet en *I*, il marche vers *H* jusqu'à ce que le mesureur *G* ſoit parvenu en *I*; & alors le meſureur *G* prend le picquet qui étoit en *I*, & ils continuent ainſi juſqu'en *H*. Etant parvenus en *H*, le meſureur *G* compte combien il y a de picquets. Enfin ſi la derniere perche ne ſe termine pas en *H* exactement, le meſureur *G* compte encore combien il y a de pieds & de pouces depuis le dernier picquet juſqu'au point *H*, & écrit le tout ſur un papier pour s'en ſouvenir.



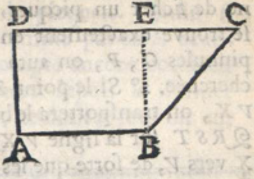
3° Par un point donné dans une ligne droite ou hors d'une ligne droite donnée dans la campagne pour mener une ligne perpendiculaire à cette ligne donnée, on ſe ſert d'un bâton *K L*, ou d'un ſupport à 3 pieds *Q R S T*, & à l'extrêmité *K* ou *T* il y a 4 pinnules, ou points *M*, *N*, *O*, *P* immobiles, placées chacune à chaque extrêmité des lignes *MN* & *O P* menées perpendiculairement l'une à l'autre ſur une planche. Lorſqu'on ne peut ficher en terre l'extrêmité du bâton *K L*, on ſe ſert du ſupport à 3 pieds *Q R S T*.
1° Soit le point *Y* donné dans la ligne *V X*, ayant placé le bâton *K L* ſur la ligne donnée *V X* au point

point *Y*, & ayant dirigé les pinnules *MN* vers les picquets *cX* & *bV*; en regardant ensuite par les deux autres pinnules *O*, *P*; si on ordonne de ficher un picquet en *aZ*, de sorte qu'il se trouve exactement en ligne droite avec ces pinnules *O*, *P*, on aura la perpendiculaire *YZ* cherchée. 2° Si le point *Z* est pris hors la ligne *VX*, on transportera le bâton *KL*, ou le support *QRST* sur la ligne *VX* de *V* vers *X*, ou de *X* vers *V*, de sorte que les pinnules *M* & *N* soient l'une & l'autre dirigées vers *c* & vers *b*, & on continuera de transporter ce bâton jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules traversantes *O* & *P*, on apperçoive le signe ou picquet fiché au point donné *Z*. Le bâton se trouvant alors placé dans le point *Y*, ce sera par où passera la perpendiculaire menée du point donné *Z* à la ligne donnée *VX*. Parceque le parallelogramme *YA* est perpendiculaire au plan *Vc*; car l'angle droit *cKa* est * le même que celui de ces plans. Donc la ligne *YZ* qui est [1] parallele à *OA*, est aussi perpendiculaire au plan *VC*. Donc [2] la ligne *YZ* est perpendiculaire à *VX*.

Soit une surface plane sur le terrain qu'on souhaite mesurer ou arpenter; on examinera si cette surface, lorsqu'il n'y a que quatre angles est un parallelogramme rectangle, ce qui est facile à connoître, en appliquant à chacun des angles de cette surface le bâton *KL* avec ses pinnules *M*, *N*, *O*, *P*. Si cette surface est un parallelogramme rectangle, il est facile [3] de connoître le nombre des perches, ou toises, &c.

* *Déf.* 18. *Geo.* [1] *Prop.* 36. *Geo.*
[2] *Déf.* 20. *Geo.* [3] *Cor.* 2. *Déf.* 53. *Geo.*

qu'on cherche. S'il n'y a que deux angles droits, comme il arrive dans la surface *ABCD*, dont les angles *A* & *D* sont droits, on menera du point *B* la perpendiculaire *BE*, & on aura le parallelogramme rectangle *AE*, & le triangle rectangle *BEC*. Après avoir mesuré les côtez du rectangle *AE*, on mesurera ensuite les côtez *BE* & *EC* du triangle rectangle *BEC*. On connoîtra * ensuite la surface du rectangle, [1] celle du triangle rectangle *BEC*, & [2] enfin on connoîtra la surface entiere *ABCD*.

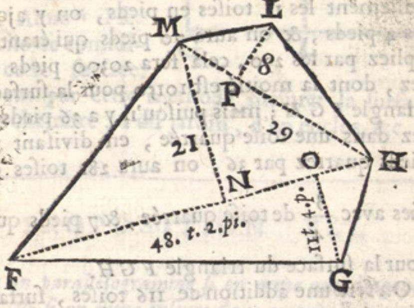


Soit une autre surface, par exemple *FGHLM*, dont aucun des angles n'est droit. On divisera cette surface en triangles, en menant du sommet d'un de ses angles, par exemple du point *H*, des lignes aux sommets de chacun des autres angles. Ensuite du point *G* on menera la ligne *GO* perpendiculaire à *FH*. Du point *M* on menera la ligne *MN* perpendiculaire à la même ligne *FH*. Enfin du point *L* on menera la ligne *LP* perpendiculaire à *MH*; si quelqu'un de ces angles, par exemple *MLH*, avoit été droit, on n'auroit pas eu besoin d'autre perpendiculaire que *LH*.

On mesurera chacune de ces perpendiculaires, sçavoir *LP* que je suppose par exemple de 8 toises, & la base *MH* que je suppose de 29 toises,

* *Cor. 2. déf. 53. Geo.* [1] *Cor. 1. Prop. 40. Geo.* [2] *Ax. 3. gen.*

On mesurera la base *FH* que je suppose être de 48 toises 2 pieds, & la perpendiculaire *MN* de 21 toises; enfin la perpendiculaire *GO*, que je suppose de 11 toises 4 pieds.



Pour connoître combien le triangle *MLH* contient de toises, il faut multiplier la base *MH* = 29 toises par 4 toises qui sont la moitié de la perpendiculaire *LP*, le produit qui est 116 toises est * la surface du triangle *MLH*.

Pour connoître la surface du triangle *FMH*, on multipliera la base *FH* = 48 toises 2 pieds par la perpendiculaire *MN* qui est de 21 toises; le produit de 21 fois 2 pieds sera 42 pieds = 7 toises, & le produit de 21 multiplié par 48 sera 1008 toises : de sorte que le produit total de 21 toises multipliées par 48 toises 2 pieds, sera 1015 toises quarrées, dont la moitié 507 toises & demie est la surface du triangle *FMH*.

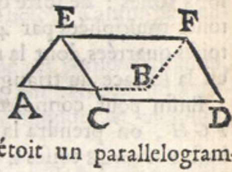
Enfin pour connoître la surface du triangle *FGH*, on prendra la moitié du produit de la base *FH* = 48 toises 2 pieds multipliées par la

* *Cor. 1. Prop. 40. Geo.*

perpendiculaire *GO* = 11 toises 4 pieds. Pour faire cette multiplication, on reduira les 48 toises en pieds, & on ajoûtera les 2 pieds, cela fera 290 pieds (s'il y avoit eu des pouces, on auroit reduit le tout en pouces.) On reduira pareillement les 11 toises en pieds, on y ajoûtera les 4 pieds, & on aura 70 pieds qui étant multipliez par les 290, cela fera 20300 pieds quarrez, dont la moitié est 10150 pour la surface du triangle *FGH*; mais puisqu'il y a 36 pieds quarrez dans une toise quarrée, en divisant 10150 pieds quarrez par 36, on aura 281 toises quarrées avec $\frac{3}{4}$ de toise quarrée, & 7 pieds quarrez pour la surface du triangle *FGH*.

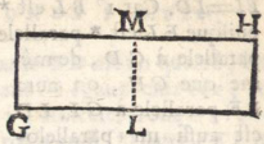
On fera une addition de 116 toises, surface du triangle *MLH* avec 507 toises & demie, surface du triangle *FMH*, & avec 281 toises $\frac{3}{4}$ & 7 pieds, surface du triangle *FGH*. On aura pour total 905 toises $\frac{1}{4}$ & 7 pieds quarrez pour * la surface entiere *FGHLM*.

Pour toiser une couverture de maison, telle que seroit, par exemple *ABCD*, dont le fête est *EF*, il faudroit mesurer le côté *CD* & la somme des côtez *CE* & *EA*. On considereroit le tout comme si c'étoit un parallelogram-



* *Ax. 3. gener.*

me rectangle *GH*, les surfaces *GM* & *LH* qu'on suppose être les mêmes que *AF* & *CF*, étant considerées comme une seule. Alors * il sera facile de connoître cette surface.



On peut par cette methode mesurer la surface d'une chambre, d'un jardin, d'un enclos, &c.

PROPOSITION XLI.

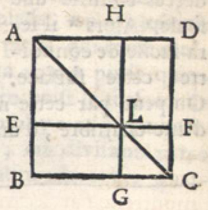
Dans un parallelogramme si on mene une diagonale, & si on mene ensuite dans ce parallelogramme une ligne parallele à un de ses côtez; & par le point où cette derniere ligne coupe la diagonale si on mene encore une autre ligne parallele à un autre côté: 1° les parallelogrammes par où la diagonale ne passera point, seront égaux entre eux. 2° Si le parallelogramme proposé est un quarré, les parallelogrammes par où passera la diagonale seront aussi des quarrez.

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le parallelogramme *BD* dont une diagonale est *AC*; soit menée la ligne *EF* parallele au côté *BC*; & par le point *L* où cette

* *Cor. 2. déf. 53. Geo.*

ligne *EF* coupe la diagonale *AC* soit menée la ligne *GH* parallele au côté *CD* : je dis que *BL*=*LD*. Car 1° *BL* est * un parallelogramme, puisque *EL* est * parallele à *BG* : & *BA* étant parallele à *CD*, de même que *GH*, on aura *BE* parallele à *GL*. *LD* est aussi un parallelogramme, puisque *LH* est * parallele à *FD*, *EF* étant * parallele à *BC*, & *AD* étant [1] parallele à *BC*, on aura [2] *AD* parallele à *EF*.



Donc *HD* sera parallele à *LF*. Par le même raisonnement *EH* & *GF* sont des parallelogrammes. 2° [3] Le triangle *ABC*=*ADC*. Mais à cause des parallelogrammes *EH* & *GF*, le triangle *AEL*=*AHL*, & *LGC*=*LFC*. Donc [4] *AEL*+*LGC*=*AHL*+*LFC*. Donc si du triangle *ABC* on retranche *AEL*+*LGC* d'une part, & si du triangle *ADC* on retranche *AHL*+*LFC* d'une autre part ; les parallelogrammes *BL* & *LD* par où la diagonale ne passe point, resteront [5] égaux entr'eux, *ce qu'il falloit demontrer.*

* *Par construction.*
[1] *Déf.* 49. *Geo.*
[2] *Prop.* 26. *Geo.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 37. *Geo.*
[4] *Ax.* 4. *gen.*
[5] *Ax.* 9. *gener.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

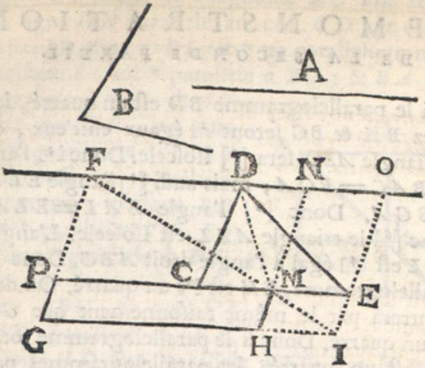
Si le parallelogramme *BD* eſt un quarré, les côtez *BA* & *BC* ſeront [1] égaux entr'eux, & le triangle *ABC* ſera [2] Iſoſcele. Donc [3] l'angle $BAC = BCA$; mais auſſi [4] l'angle $ELA = BCA$. Donc [5] l'angle $EAL = ELA$. Donc [6] le triangle *AEL* eſt Iſoſcele. L'angle *AEL* eſt [4] égal à l'angle droit *ABC*. Donc le parallelogramme *EH* eſt [7] un quarré. On demontrera par le même raiſonnement que *GF* eſt un quarré. Donc ſi le parallelogramme total *BD* eſt un quarré, les parallelogrammes par où paſſera la diagonale, ſeront des quarrez, *ce qu'il falloit demontrer*.

COROLLAIRE.

Entre les uſages de la premiere partie de la Propoſition preſente, elle contribue à la demonſtration de la maniere dont on peut ſe ſervir pour faire un parallelogramme égal à un triangle, par exemple, au triangle *CDE*; & même, ſi on veut, ce parallelogramme aura un de ſes côtez égal à la ligne *A*, & un de ſes angles égal à un angle donné *B*.

1° Ayant mené par le ſommet *D* du triangle *CDE* la ligne *FO* parallele à la baſe *CE*, & ayant pris la moitié de cette baſe pour celle d'un

[1] *Déf.* 50. *Geo.* [2] *Déf.* 40. *Geo.*
[3] *Cor.* 2. *Prop.* 34. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 24. *Geo.* [5] *Ax.* 18. *gen.*
[6] *Cor.* 4. *Prop.* 34. *Geo.* [7] *Déf.* 50. *Geo.*



parallelogramme. Du milieu M de cette même base CE on menera la ligne MN, laquelle fera avec ME l'angle $NME = B$. Ensuite on achevera le parallelogramme MO qui est * double du triangle MDE, dont le triangle CDE est [1] aussi double. Donc [2] le parallelogramme MO est égal au triangle CDE.

2° Sur la ligne FO on prendra $NF = A$. Ensuite du point F on menera par le point M la ligne indefinie FI, & on prolongera le côté OE jusques en I, rencontre de FI. On achevera le parallelogramme GO, & on prolongera EC en P, & NM en H, pour avoir le parallelogramme qu'on cherchoit qui est GM égal [3] à MO, & enfin égal au triangle donné CDE. Ce parallelogramme GM a [4] le côté $GH = FN = A$ [5]. L'angle $PMH = NME = B$.

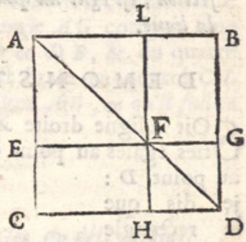
* *Cor.* 4. *Prop.* 39. *Geo.*
[1] *Part.* 1. *Prop.* 40. *Geo & Ax.* 3. *gen.*
[2] *Ax.* 6. *general.* [3] *Part.* 1. *Prop. pres.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.* [5] *Par construction.*

PROPOSITION XLII.

Le quarré d'une ligne divisée en deux parties à volonté, est égal aux quarrez de chacune de ses deux parties & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne *CD* coupée en deux parties au point *H* : je dis que le quarré de cette ligne est égal aux quarrez de chacune des parties *CH* & *HD*, & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties *CH* & *HD*. Pour le demontrer, soit *CB* quarré de la ligne *CD*. Par le point de division *H* soit menée *HL* parallele au côté *DB*. Soit menée la ligne diagonale *AD*.



Enfin par le point *F* où la diagonale coupe la ligne *LH* soit menée *EG* parallele au côté *CD*.

1° Le parallelogramme *EL* est * le quarré de *CH*, puisqu'il est le quarré de *EF*=*CH*. Le parallelogramme *HG* est le quarré de la ligne *HD*. 2° Le parallelogramme *CF* est compris sous *CH* & *HD*, puisque [1] *FH*=*HD* ; & le parallelogramme *FB* est aussi compris sous *CH* & *HD*; car *LF*=*EF*=*CH*, de même *FG*

* *Part. 2. Prop. 41. Geo. & Part. 1. Prop. 37. Geo.*
[1] *Déf. 50. Geo.*

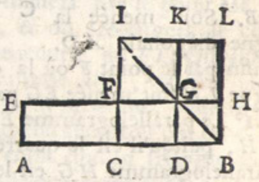
$=HD$. Donc le quarré CB est * égal aux deux quarrez EL & HG des deux parties CH & HD, & encore à deux rectangles CF & FB compris sous ces mêmes parties CH & HD, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XLIII.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, & ensuite en deux parties inégales ; le rectangle compris sous les parties inégales avec le quarré de la partie interceptée entre les deux points de section, est égal au quarré de la moitié de toute la ligne.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne droite AB divisée en deux parties égales au point C, & en deux inégales au point D : je dis que le rectangle compris sous les parties inégales AD & DB avec le quarré de la partie CD est égal au quarré de CB moitié de AB.



Pour le demontrer, il faut faire le quarré de CB, & mener la diagonale IB, &

* *Ax. 3. gen.*

par le point D mener DK parallele au côté BL. Enfin par le point de section G on menera EH parallele au côté AB, & on fera AE parallele à BH.

Puisque * DG est parallele à BH, & que AE est aussi parallele à BH, on aura [1] AE parallele à DG; mais [2] $DG = DB$. Donc le parallelogramme AG est compris sous les parties inégales AD & DB. Le parallelogramme $AF = CH$ [3]; mais [4] $CG = GL$. Donc en ajoûtant de part & d'autre DH, on aura $CG + DH = GL + DH$, c'est à dire, $DL = CH$. Donc [5] $AF = DL$. Donc en ajoûtant de part & d'autre $CG + FK$, on aura $AF + CG + FK = DL + CG + FK$, ce qui est [6] la même chose que $AG + FK = CL$, c'est à dire que la somme du rectangle AG compris sous les parties inégales AD & DB, & du quarré FK de la partie CD, est égale au quarré CL de la moitié CB de la ligne AB, *ce qu'il falloit demontrer.*

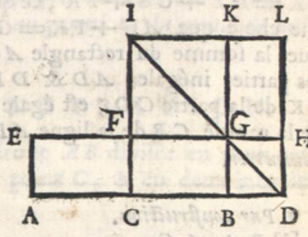
* *Par construction.*
[1] *Prop.* 26. *Geo.*
[2] *Part.* 2. *Prop.* 41. *Geo.* & *déf.* 50. *Geo.*
[3] *Prop.* 39. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Prop.* 41. *Geo.*
[5] *Ax.* 18. *general.*
[6] *Ax.* 3. *general.*

PROPOSITION XLIV.

Si on ajoûte une ligne droite à une autre divisée en deux également; le rectangle compris sous toute la ligne composée de la divisée, & de l'ajoûtée & sous l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié de la divisée, est égal au quarré de la ligne composée de la moitié de la divisée & de l'ajoûtée.

DEMONSTRATION.

Soit la ligne droite *AB* divisée en deux également au point *C*; à laquelle soit ajoûtée la ligne *BD*: je dis que le rectangle compris sous la ligne entiere *AD*, & sous la ligne *BD* avec le quarré de la partie *CB* moitié de la ligne *AB*,



est égal au quarré de la ligne *CD* composée de la moitié *BC* & de l'ajoûtée *BD*. Pour le demontrer, il faut faire le quarré de *CD*, & mener la diagonale *ID*; par le point *B*, mener *BK* parallele au côté *DL*; par le point de section *G*, il faut mener *EH* parallele au côté *AD*, & *AE* parallele à *DH*.

Le parallelogramme *AH* est compris sous *AD* & *DH*; mais* $DH = DB$. Donc le parallelogramme *AH* est compris sous *AD* & *BD*.

* *Part. 2. Prop. 41. Geo. & déf. 50. Geo.*

FK est

FK eſt * le quarré de $FG=CB$. Donc FK eſt le quarré de CB moitié de AB. Le parallelogramme $AF=CG$ [1], & [2] $LG=CG$. Donc [3] $AF=GL$. Donc en ajoûtant CH de part & d'autre, on aura [4] $AF+CH=GL+CH$, c'eſt à dire $AH=GL+CH$. Donc ajoûtant encore de part & d'autre le quarré FK, on aura $AH+FK=GL+CH+FK$, ce qui eſt la même choſe [5] que $AH+FK=CL$; c'eſt à dire que le rectangle compris ſous la ligne AD composée de la diviſée AB & de l'ajoûtée BD & ſous l'ajoûtée BD, avec le quarré FK de la ligne CB moitié de la diviſée, ſont, pris enſemble, égaux au quarré CL de la ligne CD compoſée de la moitié CB de la diviſée,& de l'ajoûtée BD, *ce qu'il falloit demontrer.*

PROPOSITION XLV.

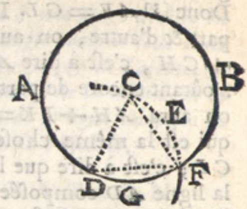
Un rayon de cercle eſt égal à la corde d'un arc de 60 degrez de la circonference du même cercle.

DEMONSTRATION.

SOit le cercle AB; du centre C ſoit mené le rayon CD : je dis que ce rayon CD eſt égal à une corde de 60 degrez pris dans la circon-

* *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[1] *Cor.* 1. *Prop.* 39. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 41. *Geo.*
[3] *Ax.* 18. *general.*
[4] *Ax.* 4. *general.*
[5] *Ax.* 3. *general.*

ference du même cercle *AB*. Pour le demontrer, du point *D* & d'une ouverture de compas égale au rayon *CD* on décrira l'arc *CEF*. On menera de ce point *D* au point de section *F* la ligne *DF*. Enfin du point *C* on menera le rayon *CF*.



Le triangle *DFC* sera * équilateral. Donc chacun des angles *DCF*, *CDF*, *CFD* sera[1] égal à la troisiéme partie de deux angles droits, c'est à dire [2], à la troisiéme partie de 180 degrez. Donc chacun de ces angles aura pour sa mesure 60 degrez. Mais la ligne *DF* est [3] égale au rayon *DC*, & est soûtendante de l'arc *DGF* qui est de 60 degrez, puisqu'il est la mesure de l'angle *DCF* qui a pour sa mesure la troisiéme partie de 180 degrez. Donc le rayon du cercle *AB* est égal à une corde de ce même cercle soûtendante d'un arc de 60 degrez, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

De la même maniere qu'on a mené du point *D* au point *F* la ligne *DF* égale au rayon *DC*, on pourra continuer à mener jusqu'à six cordes égales à cette ligne *DF* ou au rayon *DC*; & alors on aura un exagone inscrit dans le cer-

* *Déf.* 39. *& Cor.* 1. *déf.* 29. *Geo.*
[1] *Cor.* 1. *Prop.* 34. *& Prop.* 31. *Geo.*
[2] *Cor.* 3. *Prop.* 20. *Geo.*
[3] *Supposit.*

cle. Car dans une circonference qui eſt de 360 degrez, on trouve préciſément ſix arcs de chacun 60 degrez, dont les 6 cordes ou ſoûtendantes ſont * égales.

COROLLAIRE II.

Si on prend la ſomme des arcs dont deux des côtez de l'exagone ſont cordes ou ſoûtendantes, c'eſt à dire, ſi on prend un arc de 120 degrez; ſa corde ſera le côté d'un triangle équilateral qu'il ſera facile d'inſcrire dans un cercle. Car la circonference entiere contient préciſément 3 fois 120 degrez qui compoſent 3 arcs égaux, dont les trois cordes étant * égales entr'elles, forment [1] un triangle équilateral.

COROLLAIRE III.

Puiſque chaque côté de l'exagone eſt égal au rayon, ſon circuit qui vaut 6 rayons pris enſemble, ſera égal à trois diamêtres. Le circuit de l'exagone regulier eſt donc au diamêtre du cercle auquel il eſt inſcrit, comme 3 à 1. Or la circonference de ce cercle eſt plus grande que le circuit de l'exagone. Car chaque arc eſt [2] plus grand que chaque corde qui en eſt ſoûtendante. Donc [3] la circonference du cercle eſt au diamêtre du même cercle en plus grand rapport que 3 à 1, c'eſt à dire que cette circonference contient 3 fois le diamêtre, & quelque choſe de plus. C'eſt pour cela que

* *Part.* 1. *Prop.* 11. *Geo.*
[1] *Déf.* 39. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Prop.* 1. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 10. *Algeb.*

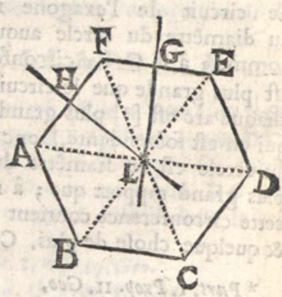
les ouvriers, par exemple quelques Horlogeurs, sont dans l'erreur, lorsqu'ils croyent que la circonference des roües d'une horloge est précisément triple du diamêtre de ces mêmes roües.

PROPOSITION XLVI.

Si par le milieu d'un côté d'un polygone regulier on mene une ligne perpendiculaire à ce côté; & si par le milieu d'un autre côté qui forme un angle avec le precedent, on lui mene encore une autre ligne perpendiculaire : le concours de ces deux perpendiculaires sera le centre d'une circonference de cercle qui passera par tous les sommets des autres angles de ce polygone.

DEMONSTRATION.

Soit le polygone regulier *ABCDEF*; par le milieu *H* du côté *AF* soit menée la ligne perpendiculaire *HL*; par le milieu *G* du côté prochain *FE* soit encore menée la ligne perpendiculaire *GL* : je dis que le point *L* qui est le concours de ces deux perpendiculaires, est le centre de la circonference qu'on cherche; c'est à dire, que si du point *L* & d'une ouverture de compas égale à *LA* on décrit une circonference de cercle, elle passera par les points *B*, *C*, *D*, &c. Pour le



demontrer, il suffit de demontrer que les lignes *LA*, *LB*, *LC*, *LD*, &c. sont égales entr'elles. Puisque le point *L* appartient à la ligne *HL* & à la ligne *GL*, il est * également distant des points *E*, *F* & *A*. Donc [1] la ligne $LE = LF = LA$. Donc les triangles *ELF* & *FLA* sont équilateraux l'un à l'autre; les côtez *EF* & *FA* étant [2] égaux entr'eux. Ils sont donc équiangles. L'angle *LFE* sera donc [3] égal à *LAF*; mais puisque [2] l'angle $EFA = FAB$, on aura [4] l'angle $LFA = LAB$. Donc [5] la ligne $LA = LB$. Les deux triangles *LFA* & *LAB* étant équilateraux, on aura [3] l'angle $FAL = ABL$. Donc [6] l'angle *LAB* restera égal à *LBC*, & outre cela on aura encore [7] *LA* & *AB* égaux aux côtez *LB* & *BC*. Donc [5] la base $LB = LC$. On demontrera de la même maniere que $LC = LD$, &c. Donc toutes les lignes droites menées du point *L* aux sommets des angles *A*, *B*, *C*, &c. sont égales entr'elles, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE.

Quand on dit [8] qu'un polygone est inscrit dans un cercle, en même-temps ce cercle est appellé circonscrit à ce polygone; & lorsque [9] le polygone est circonscrit, en même-temps le cercle est appellé inscrit au même polygone. Il est donc évident que la Proposition presente enseigne la maniere de circonscrire un cercle à

* *Prop. 3. Geo.* [1] *Cor. 4. Ax. 2. Geo.*
[2] *Déf. 55. Geo.* [3] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[4] *Ax. 9. gen.* [5] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
[6] *Déf. 55. Geo. & Ax. 9. gen.*
[7] *Part. 1. Prop. 35. & déf. 55. Geo.*
[8] *Déf. 58. Geo.* [9] *Déf. 57. Geo.*

un polygone regulier donné, en faisant passer une circonference par les sommets de tous les angles. On a encore une maniere facile pour inscrire un cercle à un polygone donné. Car après avoir trouvé * le point *L* centre de la circonference qui passe par tous les sommets des angles *A*, *B*, *C*, &c. Si de ce point *L* & d'une ouverture de compas égale à la perpendiculaire *LG*, on décrit une circonference de cercle, elle touchera les autres côtez F*A*, *AB*, *BC*, &c. pour cela il suffit [1] que toutes les perpendiculaires menées de ce point *L* à ces côtez *FA*, *AB*, &c. soient égales entr'elles. Or cela est évident, parceque les côtez de ce polygone étant [2] égaux entr'eux, seront cordes égales de la circonference circonscrite. Donc elles seront [3] également distantes du centre *L*; mais ces distances sont [4] mesurées par des perpendiculaires menées du point *L* à ces côtez F*A*, *AB*, *BC*, &c. Donc toutes ces perpendiculaires seront égales entr'elles.

PROPOSITION XLVII.

Les quarrez, & generalement tous les polygones reguliers d'un pareil nombre de côtez, sont des figures semblables.

DEMONSTRATION.

Soient les deux quarrez *AC* & *EG*. 1° chaque angle de l'un est [5] égal à chaque angle de l'au-

* *Par la Prop. pres.*

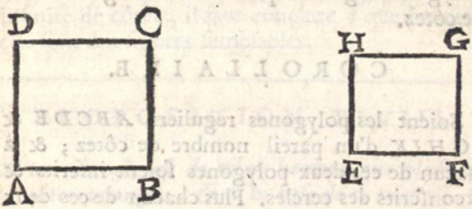
[1] *Déf. 34. Geo. & Cor. 3. Prop. 12. Geo.*

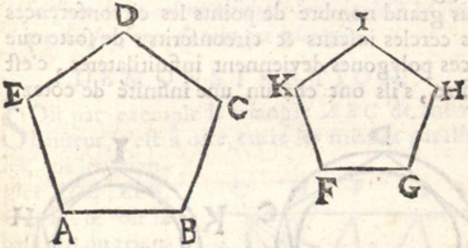
[2] *Déf. 55. Geo.* [3] *Part. 2. Prop. 16. Geo.*

[4] *Cor. 3. Prop. 6. Geo.*

[5] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*

tre. 2° * $AB . BC :: EF . FG$, & $BC . CD :: FG . GH$ &c. Donc [1] les quarrez AC & EG font des figures femblables.





Soient, par exemple, deux pentagones reguliers $ABCDE$ & $FGHIK$. 1° [2] $AB . BC :: FG . GH$. & $BC . CD :: GH . HI$. &c. 2° La fomme des angles interieurs du pentagone $ABCDE$ eft [3] égale à la fomme des angles interieurs du pentagone $FGHIK$. Donc [4] un angle de l'un fera égal à un angle de l'autre. Donc [4] chaque angle de l'un fera égal à chaque angle de l'autre. Donc deux pentagones reguliers

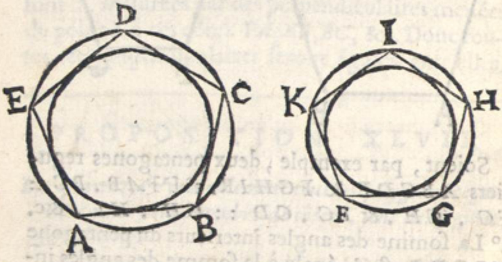
* *Déf.* 50. *Geo.* & *Cor.* 1. *Prop.* 37 *Geo.*
[1] *Déf.* 60. *Geo.* [2] *Déf.* 55. *Geo.*
[3] *Cor.* 1. *Prop.* 32. *Geo.* [4] *Ax.* 12. *gen.*

ſont deux figures ſemblables, *ce qu'il falloit demontrer.*

On fera le même raiſonnement pour les autres polygones reguliers qui ſeront d'un égal nombre de côtez.

COROLLAIRE.

Soient les polygones reguliers *ABCDE* & FG*HIK* d'un pareil nombre de côtez; & à chacun de ces deux polygones ſoient inſcrits & circonſcrits des cercles. Plus chacun de ces deux polygones aura de côtez, il rencontrera en un plus grand nombre de points les circonferences des cercles inſcrits & circonſcrits: de ſorte que ſi ces polygones deviennent infinitilateres, c'eſt à dire, s'ils ont chacun une infinité de côtez;



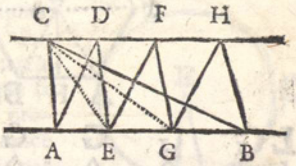
le cercle circonſcrit & l'inſcrit au même polygon e ſe confondront en un ſeul cercle. Parceque le p olygone qui ſe trouve comme comprimé entre c es deux cercles eſt toûjours plus grand que le cercl e inſcrit, & plus petit que le cercle circonſcrit, juſqu'à ce qu'enfin ces polygones ayant une infi nité de côtez, & le cercle inſcrit & le circo nſcrit au même polygone ſe confondant en un ſeul cercle, le même circuit & la même ſurface deviennent communes à ces cercles inſcrits & circonſcrits. Donc ces cercles étant devenus la même choſe que des polygones reguliers d'une infinité de côtez, il faut conclure * que les cercles ſont des figures ſemblables.

PROPOSITION XLVIII.

Si un triangle eſt de même hauteur que pluſieurs autres triangles, & ſi la baſe de ce triangle eſt égale à la ſomme des baſes de ces triangles, la ſurface de ce même triangle ſera égale à la ſomme des ſurfaces de tous ces triangles.

DEMONSTRATION.

SOit par exemple le triangle *ABC* de même hauteur, c'eſt à dire, entre les mêmes paralleles, que les triangles *ADE*, *EFG*, *GHB*; & ſoit la baſe *AB* du triangle *ABC* égale à la ſomme des baſes *AE*, *EG* & *GB* des triangles



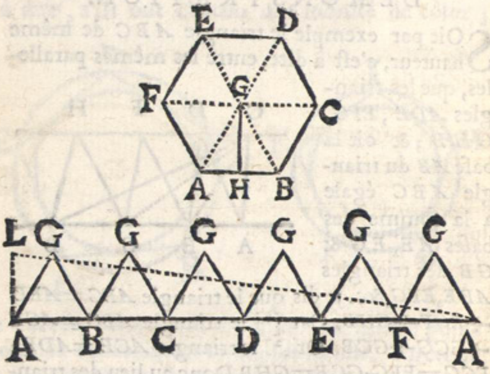
ADE, *EFG*, &c. je dis que le triangle *ABC*=*AED*+*EGF*+*GHB*. Car [1] le triangle *ABC*=*ACE*+*ECG*+*GCB*. Or [2] le triangle *ACE*=*ADE*; *ECG*=*EFG*; *GCB*=*GHB*. Donc au lieu des triangles *ACE*+*ECG*+*GCB*, ſi [3] on prend ce qui leur eſt égal, ſçavoir *ADE*+*EFG*+*GHB*; on trou-

* *Prop. preſ.* [1] *Ax. 3. gen.*
[2] *Prop. 40. Geo.* [3] *Deman. 1. gen.*

vera que le triangle *ABC* eſt égal à la ſomme des triangles *ADE*, *EFG*, *GHB*, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à *AB*, & dont les hauteurs ſont égales à celle du triangle *ABC*; étant tous entre les mêmes lignes paralleles, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

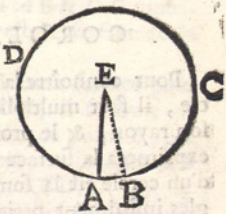
Si on multiplie le circuit d'un polygone regulier par la moitié de la perpendiculaire menée du centre du cercle qui lui eſt inſcrit ou circonſcrit, à un des côtez de ce polygone; le produit de cette multiplication ſera la ſurface de ce polygone regulier. Soit par exemple le polygone



regulier *ABCDEF*: je dis que le produit du contours ou circuit *ABCDEF* multiplié par la moitié de la perpendiculaire *GH* eſt la ſurface même de ce polygone. Car aprés avoir mené du point G qui eſt * également diſtant des points *A*, *B*, *C*, &c. les lignes *GA*, *GB*, *GC*, *GD*, *GE*, &c. on diviſera ce polygone en triangles qui ſont tous de même hauteur, puiſque [1] toutes les perpendiculaires menées du point G à ces côtez *AB*, *BC*, *CD*, ſont égales entr'elles. Suppoſons que la ſomme des baſes de tous ces triangles, qui eſt le circuit du polygone, ſoit la ligne *AA*, & que la ligne *AL* perpendiculaire à *AA* ſoit égale à la hauteur commune de tous ces mêmes triangles. Il eſt évident [2] que le produit de la baſe *AA* multipliée par la moitié de la hauteur *AL* du triangle *ALA* eſt égal au triangle *ALA* = [3] *AGB* + *BGC* + *CGD* + *DGE* + *EFG* + *FGA* = [4] *ABCDEF*.

COROLLAIRE II.

La ſurface d'un cercle eſt donc égale au produit de la circonference de ce cercle multipliée par la moitié de ſon rayon. Soit le cercle *ABCD* : je dis que ſa ſurface eſt égale au produit de la circonference *ABCDA* multipliée par la moitié du rayon *AE*. Car ce cercle eſt [5] un polygone regulier d'une infinité de côtez infiniment petits. Suppoſons qu'un de ces côtez infiniment petits ſoit *AB*, les lignes *EA* & *EB*



* *Suppoſit. ou Prop.* 46. *Geo.* [1] *Cor. Prop.* 46. *Geo.* [2] *Cor.* 1. *Prop.* 40. *Geo.* [3] *Prop. preſ.* [4] *Ax.* 3. *gen.* [5] *Cor. déf.* 56. *Geo.*

qui sont côtez du triangle *AEB* seront infiniment proches l'une de l'autre ; & partant la hauteur de ce triangle *EAB* sera considerée comme un rayon de ce cercle *ABCD*. Si on multiplie la somme de toutes les bases infiniment petites de ces petits triangles dont le sommet est dans le centre *E*, par la moitié de leur hauteur commune, c'est à dire, si on multiplie la circonference du cercle par la moitié du rayon, on aura [1] donc pour produit la surface de ce cercle.

Dans la pratique il est facile de connoître la longueur de la circonference d'un cercle, il suffit pour cela d'appliquer le bout d'un cordeau dans le point *A*, par exemple, & de coucher ensuite le reste de ce cordeau sur la circonference *ABCDA*. Après cela on étendra ce cordeau en ligne droite, & on mesurera combien il contient de pieds, de pouces, &c. ce qui fera connoître la grandeur de la circonference dont il s'agit.

COROLLAIRE III.

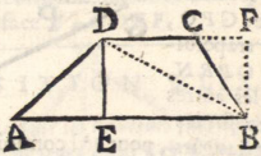
Pour connoître la surface d'un secteur de cercle, il faut multiplier son arc par la moitié de son rayon, & le produit de cette multiplication exprimera la surface de ce secteur. Car le secteur d'un cercle est la somme d'une infinité de triangles infiniment petits, dont la somme des bases est l'arc de ce secteur, & dont la hauteur commune est un des rayons qui terminent ce même secteur.

[1] *Prop. pres.*

COROLLAIRE

COROLLAIRE IV.

Si on ſe propoſe de meſurer la ſurface du trapeſoide *ABCD*, il faut multiplier la moitié de la ſomme des côtez *AB* & *DC* par la hauteur de cette figure qui eſt la perpendiculaire *DE*, & le produit exprimera la valeur de la ſurface qu'on cherche. Car, ſi on mene la diagonale *DB*, il eſt évident que les triangles *ABD* & *DBC*



*ſont de même hauteur étant entre les mêmes paralleles *AB* & *DC*. Or [1] la moitié de la ſomme des baſes *AB* & *DC* multipliée par la hauteur commune *DE* exprime la valeur des deux triangles *ABD* & *DBC*. Donc le produit de la moitié de la ſomme des côtez *AB* & *DC* multipliée par la perpendiculaire eſt la ſurface de la figure *ABCD*.

Si on ne pouvoit parcourir cette ſurface pour meſurer la perpendiculaire *DE*; il ſuffiroit de prolonger le côté *DC*, enſuite du point *B*, par exemple, on meneroit la perpendiculaire *BF* qui feroit connoître ſon * égale *ED*.

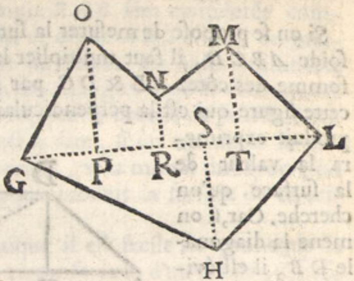
S'il ſe rencontre un polygone irrégulier, par exemple, *GHLMNO* dont on ſe propoſe de meſurer la ſurface ; il faut mener une ligne du ſommet G de l'angle *OGH* au ſommet *L* de l'angle *MLH* qui paroît le plus éloi-

* *Cor. 4. Prop. 6. Geo.*

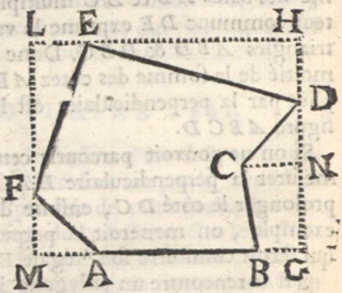
[1] *Prop. pref. & Cor. 1. Prop. 40. Geo.*

Nn

gné. Ensuite du sommet de chacun des autres angles de la figure on menera sur cette ligne *G L* les perpendiculaires *OP*, *NR*, *HS*, *MT*. On [1] mesurera le triangle *GPO*, le trapesoïde *OPRN*, & les autres trepesoïdes & triangles, pour [2] connoître enfin la surface entiere *GHLMNO*.



Si on veut mesurer une surface irréguliere qu'on ne peut parcourir librement en ligne droite, par exemple celle d'un étang *ABCDEF*, du terrain où est construite une maison, d'un bois taillis, &c. lorsqu'il n'y a aucun obstacle, on prolongera le côté *A*B, ou *AF*, &c. Sur le côté *AB* prolongé on menera la perpendiculaire *D*G que l'on prolongera vers *H*. A cette ligne G*H* on menera perpendiculairement la ligne *H L* par le point E, qui sera * parallele à *MG*. Par le point *F*



[1] *Cor.* 1. *Prop.* 40. *Geo.* & *Cor. pres.*

[2] *Ax.* 3. *gen.*

* *Part.* 2. *Prop.* 15. *Geo.*

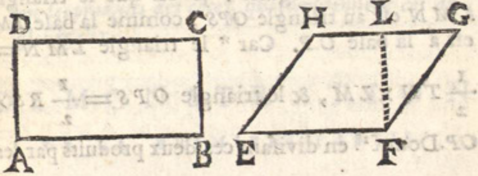
on menera la ligne *LM* perpendiculaire à *HL*, cette ligne *ML* sera * aussi parallele à *HG*. On mesurera le parallelogramme *MH*. Ensuite on mesurera les surfaces des triangles *CND*, *DHE*, *ELF*, *FMA*, & du trapese *BGNC*. Enfin de la valeur du parallelogramme *MH* on retranchera la somme de ces triangles & trapese, le reste fera connoître combien de toises ou de perches contient la surface *ABCDEF*.

PROPOSITION XLIX.

Les parallelogrammes dont les hauteurs sont égales, sont entre eux comme leurs bases; & si les bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.

DEMONSTRATION.

SOient les parallelogrammes *AC* & *EG* dont les hauteurs *BC* & *FL* soient égales entr'elles:



je dis que *AC . EG :: AB . EF*. Car [1] le parallelogramme $AC = AB \times BC$, & [2] le parallelogramme $EG = EF \times FL$. Or en divisant ces deux produits par les hauteurs égales *BC* & *FL*, on aura [3] $AB \times BC . EF \times FL :: AB . EF$. c'est à dire [4] que le parallelogramme *AC . EG :: AB . EF*, *ce qu'il falloit demontrer*.

* *Part. 2. Prop. 15. Geo.* [1] *Cor. 2. déf. 53. Geo.*
[2] *Cor. 3. Prop. 39. Geo.* [3] *Prop. 6. Algeb.*
[4] *Dem. 1. gen.*

Si les bases avoient été supposées égales, on auroit divisé ces deux produits par AB & par EF; & on auroit eu $AB \times BC \,.\, EF \times FL :: BC \,.\, FL$.

COROLLAIRE.

Les triangles dont les hauteurs sont égales sont aussi entr'eux comme leurs bases. Soient

les triangles LMN & OPS, dont les hauteurs TN & RS sont égales : je dis que le triangle LMN est au triangle OPS, comme la base LM est à la base OP. Car * le triangle $LMN = \frac{1}{2} TN \times LM$, & le triangle $OPS = \frac{1}{2} RS \times OP$. Donc [1] en divisant ces deux produits par les grandeurs [2] égales $\frac{1}{2} TN$, & $\frac{1}{2} RS$, on aura $\frac{1}{2} TN \times LM \,.\, \frac{1}{2} RS \times OP :: LM \,.\, OP$, c'est à dire le triangle $LMN \,.\, OPS :: LM \,.\, OP$.

* *Cor. 1. Prop. 40. Geo.* [1] *Prop. 6. Algeb.*
[2] *Supposit. & Ax. 12. gen.*

Si les bases LM & OP avoient été supposées égales, on auroit divisé les deux premiers termes de l'analogie par LM & par OP, & on auroit * trouvé $\frac{1}{2}TN \times LM . \frac{1}{2}RS \times OP :: \frac{1}{2}TN . \frac{1}{2}RS :: TN . RS$ [1].

PROPOSITION L.

1° *Si un parallelogramme a un de ses angles égal à un angle d'un autre parallelogramme; ces parallelogrammes seront entre eux comme les produits des côtez qui comprennent ces angles égaux.*

2° *Si un triangle a un de ses angles égal à un angle d'un autre; ces triangles sont aussi entr'eux comme les produits des côtez qui comprennent ces angles égaux.*

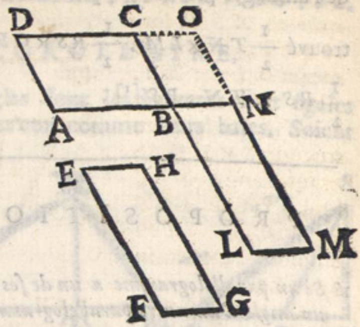
DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le parallelogramme AC dont l'angle ABC soit égal à l'angle HEF du parallelogramme EG : je dis que $AC . EG :: AB \times BC . EF \times EH$ Pour le demontrer, il

* *Prop. 6. Algeb.*
[1] *Prop. 5. Algeb.*

faut prolonger les côtez *AB* & *CB* jusques aux points *N* & *L*, de sorte que $BN = EH$, & que $BL = EF$. Ensuite par le point *N* on menera *NM* parallele à *BL*, & par le point *L* on menera *LM* parallele à *BN* : & on aura [1] le parallelogramme $LN = EG$. Enfin on prolongera le côté *DC*, & on prolongera le côté *MN* pour avoir le parallelogramme *BO*.



[2] Le parallelogramme $AC . BO :: AB . BN$.

[2] Le parallelogramme $BO . LN :: CB . BL$.

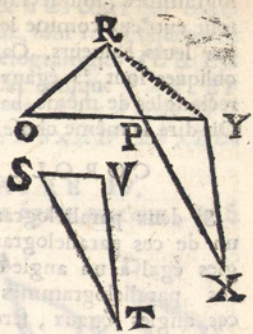
Donc [3] $AC \times BO . BO \times LN :: AB \times CB . BN \times BL$. Or si on divise les deux premiers termes de cette derniere analogie par *BO*, on aura [4] $AC . LN = EG :: AB \times CB . BN \times BL = EH \times EF$ [5], *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit le triangle *OPR* dont l'angle *RPO* soit égal à l'angle *VST* du triangle *STV* : je dis que le triangle $OPR . STV :: OP \times PR . SV \times ST$. Pour le demontrer, il faut prolonger le côté *OP*

[1] *Cor. 2. Prop. 38. Geo.* [2] *Prop. 49. Geo.*
[3] *Prop. 12. Algeb.* [4] *Prop. 6. Alg.*
[5] *Par const uction.*

jusques en Y, de sorte que $PY = SV$, & prolonger RP jusques en X, de sorte que $PX = ST$, & mener la ligne XY. Alors * le triangle PXY sera égal au triangle SVT, ** ayant l'angle XPY égal à l'angle VST du triangle STV. Ensuite on menera la ligne RY.



[1] Le triangle $OPR \,.\, RPY :: OP \,.\, PY$.

[1] Le triangle $RPY \,.\, PXY :: RP \,.\, PX$.

Donc [2] $OPR \times RPY \,.\, RPY \times PXY :: OP \times RP \,.\, PY \times PX$; & en divisant les deux premiers termes de cette derniere analogie par la grandeur RPY qui se trouve multipliée dans l'un & dans l'autre, on aura [3] le triangle $OPR \,.\, PXY = STV :: OP \times PR \,.\, PY \times PX = SV \times ST$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Les parallelogrammes rectangles sont [4] entr'eux comme les produits de leurs côtez qui comprennent un angle droit, puisque [5] tous les angles droits sont égaux : ce qui est la même chose que de conclure en general que les parallе-

* *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
** *Supposit. & Part. 1. Prop. 22. Geo.*
[1] *Cor. Prop. 49. Geo.* [2] *Prop. 12. Alg.*
[3] *Prop. 6. Alg.* [4] *Part. 1. Prop. pres.*
[5] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*

logrammes, soit rectangles, soit obliquangles; sont entr'eux comme les produits de leurs bases par leurs hauteurs. Car les parallelogrammes obliques sont [1] égaux aux parallelogrammes rectangles de même base & de même hauteur. On dira la même chose des triangles rectangles.

COROLLAIRE II.

Si deux parallelogrammes sont égaux, & si un de ces parallelogrammes a un de ses angles égal à un angle de l'autre; les côtez de ces parallelogrammes qui comprendront ces angles égaux, seront entre eux reciproquement proportionels. Soit le parallelogramme $AC = EG$, & l'angle $DAB = HEF$:

je dis que $AB \,.\, EF :: EH \,.\, AD$. Car [2] $AC \,.\, EG :: AD \times AB \,.\, EH \times EF$. Or [3] $AC = EG$. Donc $AD \times AB = EH \times EF$. Donc [4] $AB \,.\, EF :: EH \,.\, AD$.

COROLLAIRE III.

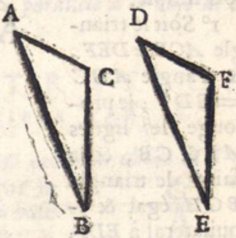
Si un parallelogramme, par exemple, AC a l'angle DAB égal à l'angle HEF d'un autre

[1] *Prop. 39 Geo.* [2] *Part. 1. Prop. pres.*
[3] *Supposit.* [4] *Prop. 3. Alg.*

parallelogramme *EG*, & ſi les côtez qui comprennent ces angles égaux, ſont reciproquement proportionels ; ces parallelogrammes *AC* & *EG* ſeront égaux entr'eux. Car puiſque * $AB \,.\, EF :: EH \,.\, AD$; on aura ** $AB \times AD = EF \times EH$. Or [1] $AC \,.\, EG :: AB \times AD \,.\, EF \times EH$. Donc $AC = EG$.

COROLLAIRE IV.

Si deux triangles ſont égaux entr'eux, & ſi un angle d'un de ces triangles eſt égal à un angle d'un autre ; les côtez qui comprendront ces angles ſeront reciproquement proportionels. Soit le triangle $ABC = DEF$; ſoit l'angle *CAB* égal à l'angle *FDE* : je dis que $AB \,.\, DE :: DF \,.\, AC$. Car [2] le triangle $ABC \,.\, DEF :: AB \times AC \,.\, DE \times DF$. Or * le triangle $ABC = DEF$. Donc $AB \times AC = DE \times DF$. Donc [3] $AB \,.\, DE :: DF \,.\, AC$.



COROLLAIRE V.

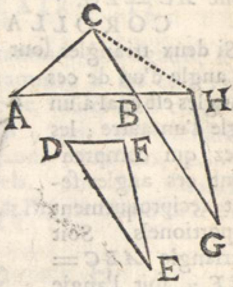
Si un triangle, par exemple *ABC*, a l'angle *CAB* égal à l'angle *FDE* d'un autre triangle *DEF*, & ſi les côtez qui comprennent ces angles égaux ſont reciproquement proportionels ; ces triangles *ABC* & *DEF* ſeront égaux entr'eux. Car ſi $AB \,.\, DE :: DF \,.\, AC$. On aura ** $AB \times AC = DE \times DF$; mais [2] le triangle *ABC*,

* *Suppoſit.* ** *Prop. 2. Algeb.*
[1] *Part. 1. Prop. preſ.* [2] *Part. 2. Prop. preſ.*
[3] *Prop. 3. Algeb.*

DEF :: *AB*×*AC* . *DE*×*DF*. Donc *ABC* =*DEF*.

R E M A R Q U E.

Les Corollaires 4 & 5 de la Proposition presente pouvoient encore être demontrez d'une autre maniere fort simple.



1° Soit le triangle *ACB*=*DEF*, & l'angle *ABC* =*EDF*; je prolonge les lignes *AB* & *CB*, & je fais * le triangle *BGH* égal & équilateral à *EDF*; enfin je mene la ligne *CH*. Le triangle *ABC* . *CBH* :: *BGH* . *CBH* **. Or [1] *ABC* . *CBH* :: *AB* . *BH* . & *BGH* . *CBH* : *GB* . *BC*. Au lieu des rapports égaux qui sont entre *ABC* & & *CBH*, & entre *BGH* & *CBH*, substituant leurs égaux, on aura *AB* . *BH* :: *GB* . *BC*.

2° Si *AB* . *BH* :: *GB* . *BC*, on aura le triangle *ABC*=*BGH*. Car *ABC* . *CBH* :: *AB* . *BH*, & *GBH* . *CBH* :: *GB* . *BC*. Donc *ABC* . *CBH* :: *BGH* . *CBH*. Donc [2] *ABC* =*BGH*=*DEF* [3]. Les Corollaires 2e & 3e de la Proposition presente peuvent encore être demontrez par le même raisonnement.

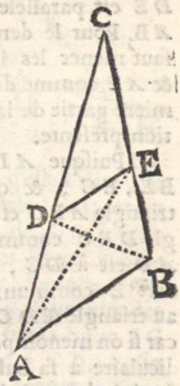
* *Part.1.Prop.35. Geo.* ** *Part.1.Prop.8. Alg.*
[1] *Prop. 49. Geo.* [2] *Part. 2. Prop. 8. Geo.*
[3] *Par construction.*

PROPOSITION LI.

1° *Si une ligne droite menée parallelement à la base d'un triangle, coupe les deux autres côtez de ce triangle ; elle les coupera en quatre parties proportionelles entr'elles.*

2° *Reciproquement si une ligne droite coupe deux côtez d'un triangle en quatre parties proportionelles entr'elles ; elle sera parallele à la base de ce triangle.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.



Soit le triangle *ABC* dont les côtez *AC* & *BC* soient coupez par la ligne *DE* parallele à la base *AB* : je dis que *AD . DC* :: *BE . EC*. Pour le demontrer, par les points *D* & *E* soient menées aux angles B & *A* les lignes *DB* & *EA*.

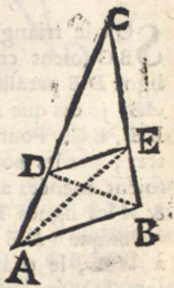
Puisque * *DE* est parallele à *AB*, le triangle *ADE* sera [1] égal au triangle *BDE*. Donc [2] le triangle *AED . DEC* :: *BDE . DEC*. Or le triangle *AED* est [3] au triangle *DEC*, comme sa base *AD* à la base *DC* du triangle *DEC*, puisqu'ils ont même hauteur,

* *Supposit.* [1] *Part. 1. Prop. 40. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 8. Alg.* [3] *Prop. 49. Geo.*

ayant le sommet *E* commun. De même B *D E* . *E D C* :: B E . *E C* , au lieu du rapport du triangle *A E D* au triangle *DEC* , si on substitue dans la premiere analogie le rapport qui lui est égal, sçavoir celui de la base *A D* à *DC* , & au lieu du rapport du triangle B*D*E au triangle *E D C* si on prend le rapport qui lui est égal, qui est celui de la base BE à la base *E C*. On aura * *A D* . *D C* :: BE . *E C* , *ce qu'il falloit demontrer.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

Soit la ligne *D E* qui coupe les côtez *A C* & B *C* du triangle *A* B *C*, de telle maniere que *A D* soit à *DC* comme BE est à *E C* : je dis que cette ligne *D E* est parallele à la base *A* B. Pour le demontrer, il faut mener les lignes *D* B & *A E* comme dans la premiere partie de la Proposition presente.



[1] Puisque *A D* . *D C* :: BE . *E C* , & que [2] le triangle *A E D* est au triangle *D E C* comme la base *A D* est à *D C* , l'un & l'autre ayant le sommet E commun. Le triangle B *D E* est aussi au triangle *E D C* comme la base B *E* à *E C*; car si on menoit par le point *D* une ligne perpendiculaire à la base B *C* , cette perpendiculaire seroit la hauteur de chacun de ces deux triangles.

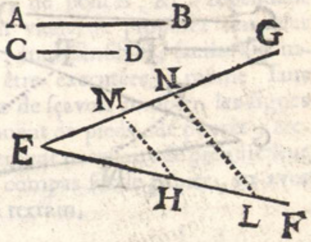
* *Demande* 1. *gen.* [1] *Supposit.*
[2] *Cor. Prop.* 49. *Geo.*

Dans

Dans la premiere analogie, au lieu du rapport de la base *AD* à *DC* si on substitue le rapport qui lui est égal, sçavoir celui du triangle *AED* au triangle *DEC*; & au lieu du rapport de la base *BE* à *EC*, si on substitue son égal qui est le rapport du triangle *BDE* au triangle *EDC* : on aura *AED.DEC* : : *BDE. EDC.* donc * le triangle *ADE* = *BDE.* [c] Donc la ligne *DE* est parallele à la ligne *AB*, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

La premiere partie de la proposition presente est le principe d'une métode dont on se peut servir pour trouver une 3e ligne proportionnelle à deux lignes donées. Soient les lignes *AB* & *CD* ausquelles on se propose de trouver une



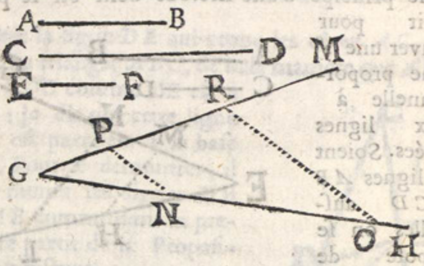
troisiéme ligne proportionnelle, c'est à dire, de trouver une ligne qui soit telle que le raport de *AB* & *CD* soit égal au raport de *CD* à cette ligne cherchée. Il faut mener les lignes indéfinies *EF* & *EG* qui forment l'angle *GEF* à volonté. Sur la ligne *EF* il faut prendre *EH* = *AB*, & *HL* = *CD*; & sur la ligne *EG* il faut prendre *EM* encore égale à *CD*. Enfin par les points *H* & *M*, il faut mener la ligne *HM*, & mener par le point *L* la ligne *LN* parallele à *HM* : je dis que *MN* est la troisié-

* *Part. 2. Prop. 8. Algeb.* [c] *Part. 2. Prop. 40. Geo.*

me proportionnelle cherchée. Car dans le triangle ELN la ligne HM est * parallele à la base LN. Donc $EH . HL :: EM . MN$. Mais * $AB = EH$, & $CD = HL = EM$. donc[1] $AB . CD :: CD . MN$.

COROLLAIRE II.

On trouvera facilement à trois lignes données une quatriéme proportionnelle. Soient les lignes AB, CD, EF ausquelles il faille trouver une quatriéme proportionnelle. Par le point G pris à volonté, on menera les lignes indéfinies GH & GM. Sur la ligne GH, on prendra $GN = AB$; & $NO = CD$; sur la ligne GM on prendra $GP = EF$. Enfin par les points N & P, on menera NP; & par le point O on menera OR parallele à NP: je dis que la ligne PR est la quatriéme proportionnelle cherchée. Car dans le triangle GOR la ligne NP



* *Par construction.*

[1] *Part. 1. Prop. pres. & Demande 1. Gen.*

est * parallele à OR. Donc [1] $GN . NO :: GP . PR$. Mais * $AB = GN$; $CD = NO$; & $GP = EF$. Donc [2] $AB . CD :: EF . PR$.

REMARQUE.

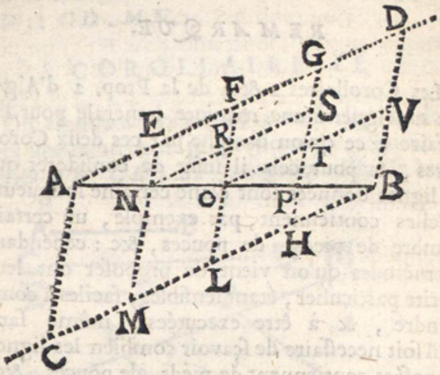
Les Corollaires 2 & 4 de la Prop. 2 d'Algebre enseignent une maniere generale pour satisfaire à ce qu'on cherche par ces deux Corollaires, & pour cela il suffit de considerer que les lignes données sont d'une certaine longueur, qu'elles contiennent, par exemple, un certain nombre de pieds, de pouces, &c : cependant les métodes qu'on vient de proposer ont leur merite particulier, étant sensibles, faciles à comprendre, & à être executées, même sans qu'il soit necessaire de sçavoir combien les lignes proposées contiennent de pieds, de pouces, &c. Parcequ'il est seulement necessaire de prendre leur longueur avec un compas sur le papier, ou avec un cordeau sur le terrain.

COROLLAIRE III.

Soit une ligne droite AB, qu'on se propose de diviser géometriquement en un certain nombre de parties égales, par exemple, en quatre; ou qui ayent entre elles tel raport qu'on voudra.

* *Par construction.*
[1] *Part. 1. Prop. pres.*
[2] *Deman. 1. gen.*

Par le point *A*, on menera la ligne indéfinie *AD*, qui fera avec la ligne donnée *AB* un angle *DAB* à volonté. Par l'autre extré-



mité *B*, on menera * la ligne *BC*, parallele à la ligne *AD*. Sur cette ligne *AD* on prendra, d'une ouverture de compas à volonté, les parties *AE*, *EF*, *FG*, *GD* &c. égales entre elles, ou telles qu'elles soient entre elles dans un rapport donné. Ensuite sur la ligne *BC* on prendra *BH*, égale à la quatriéme partie *GD*, on prendra $HL = GF$, $LM = FE$, & $MC = AE$. Enfin par les points correspondants *D* & *B*, *G* & *H*, *F* & *L*, *E* & *M*, &c, on menera les lignes *DB*, *GH*, *FL* &c : je dis que la ligne *AB* est divisée dans les quatre parties égales proposées, c'est à dire, que $AN = NO = OP = PB$. Car [1] les lignes *AC*, *EM*,

* *Cor. 4. Prop. 15. ou Cor. Prop. 23. Geo.*
[1] *Supposit.*

FL, *GH*, *DB*, étant menées par des extrémitez de lignes paralleles & égales qui sont parties des lignes droites *AD* & *BC*; ces mêmes lignes *AC*, *EM*, &c. seront * paralleles entre elles. Donc [1] *AN*. *NO* :: *AE*. *EF*. Or [2] *AE* = *EF*. Donc aussi *AN* = *NO*. Pareillement ayant mené *NS* parallele à *EG*; on aura [3] *NR* = *EF*, *RS* = *FG* : & partant [4] *NR* = *RS*. Mais [1] *NO*. *OP* :: *NR*. *RS*. Donc aussi *NO* = *OP*. Ayant encore fait *OV* parallele à *FD*; on aura par le même raisonnement *OT* = *TV* : & partant [1] *OP* = *PB*. Donc la ligne droite *AB* est divisée dans le nombre des parties égales cherchées.

PROPOSITION LII.

1°. *Les triangles qui sont équiangles l'un à l'autre, ont leurs côtez homologues proportionnels.*

2°. *Reciproquement les triangles dont les côtez sont proportionnels, sont équiangles l'un à l'autre.*

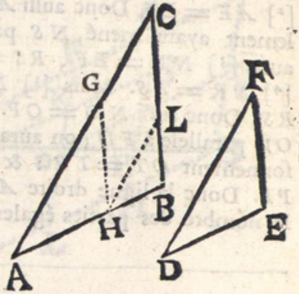
DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle *ABC* dont l'angle *CAB* est égal à l'angle *FDE* d'un autre triangle *DEF*, & l'angle *ABC* = *DEF*, enfin l'angle *BCA*

* *Prop. 36. Geo.*
[1] *Part. 1. Prop. pres.* [2] *Par Construction.*
[3] *Part. 1. Prop. 37. Geo.*
[4] *Demande 1. Geo.*

= *EFD*: je dis que ces deux triangles sont semblables; c'est à dire * qu'outre que ces deux triangles sont équiangles l'un à l'autre, leurs côtez homologues sont proportionnels, que *CA*. *AB* :: *FD*. *DE*, que *AB*. *BC* :: *DE*. *EF*, enfin que *BC*. *CA* :: *EF*. *FD*. Pour le demontrer, sur le plus grand des deux côtez homologues, par exemple sur *AC*, soit prise la partie *AG* égale au côté *DF* qui lui



correspond, & sur *AB* soit prise *AH* égale à *DE*, & soit menée la ligne *GH*. Le triangle *AGH* ayant les côtez *AG* & *AH*, égaux ** aux côtez *FD* & *DE*, & l'angle *GAH* étant [1] égal à l'angle *FDE*; la base *GH* sera [2] égale à la base *FE*. Ces deux triangles *GAH* & *FDE* étant équilateraux, & par consequent égaux entre eux, ce qu'on dira des côtez de l'un, sera la même chose que si on le disoit des côtez de l'autre.

Puisque [1] l'angle *ACB* = *DFE*, & [3] que l'angle *AGH* = *DFE*; l'angle *AGH* sera [4] égal

* *Déf. 60. Geo.*
** *Par construction.*
[1] *Par Supposit.*
[2] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
[3] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[4] *Ax. 18. gen.*

à ACB. La ligne GH sera donc * parallele à CB. Donc ** $CG . GA :: BH . HA$. & [o] $CG + GA . GA :: BH + HA . HA$; c'est à dire, $CA . GA = FD :: BA . HA = DE$ [1] & [2] enfin $CA . AB :: FD . DE$.

Pour demontrer que $AB . BC :: DE . EF$; par le point H, il faut mener la ligne HL parallele au côté AC. Alors il est évident [3] que $AH . HB :: CL . LB$, [4] que $BH . HA :: BL . CL$, & [5] que $BH + HA . HA :: BL + LC . LC$; enfin [2] que $BH + HA . BL + LC :: HA = DE . LC =$ [6] $GH = EF$. C'est à dire [7] que $BA . BC :: DE . EF$.

Si par le point G on mene une ligne parallele au côté AB, on trouvera que $BC . CA :: EF . FD$, ce qui sera facilement demontré, de la même maniere qu'on a demontré que $AB . BC :: DE . EF$.

Les triangles équiangles ABC & DEF ont donc leurs côtez homologues proportionnels, *ce qu'il falloit demontrer.*

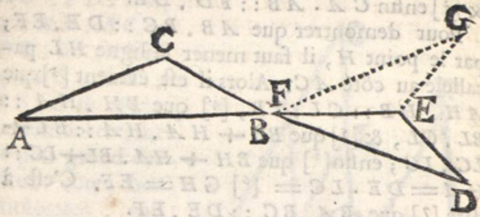
DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Si les triangles ABC & DEF, par exem-

* *Part.* 1. *Prop.* 25. *Geo.* ** *Prop.* 51. *Geo.*
[o] *Part.* 3. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[1] *Supposit.* [2] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 51. *Geo.*
[4] *Part.* 1. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[5] *Part.* 3. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[6] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.*
[7] *Demande* 1. *gen.*

ple, sont tels que *BC . CA :: DE . EF*, & *AB . AC :: FD . FE*; on aura [1] encore *BC .*



DE :: CA . EF, & *AB . FD :: AC . FE*. Donc [2] *BC . DE :: AB . FD*; & enfin [1] *BC . AB :: DE . FD*. Cela étant : je dis que ces deux triangles sont équiangles ; c'est à dire que les angles *BAC* & *EFD* qui sont opposez aux antecedens *BC* & *ED* de la premiere analogie, sont égaux entr'eux ; que les angles *ABC* & *FDE* qui sont opposez aux consequens *CA* & *EF*, sont aussi égaux entr'eux ; enfin que l'angle *BAC* = *EFD*. Pour le demontrer, il faut sur un des côtez du triangle *FED*, par exemple sur le côté *FE*, construire un triangle équiangle au triangle *ABC*, & pour cela on fera [3] l'angle *GFE* = *BAC*, on fera encore l'angle *GEF* = *ACB*; le troisiéme angle *FGE* se trouvera [4] égal au troisiéme *ABC*.

[1] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[2] *Cor. 3. def. 12. Algeb.*
[3] *Cor. 4. Prop. 20. Geo.*
[4] *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*

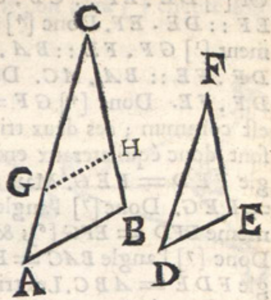
Il est [1] constant que $GE \,.\, EF :: CB \,.\, CA$. Or [2] $DE \,.\, EF :: CB \,.\, CA$. Donc [3] $GE \,.\, EF :: DE \,.\, EF$. Donc [4] $GE = DE$. Pareillement [1] $GF \,.\, FE :: BA \,.\, CA$. Mais [2] aussi $DF \,.\, FE :: BA \,.\, AC$. Donc [3] $GF \,.\, FE :: DF \,.\, FE$. Donc [4] $GF = DF$. Le côté FE est commun ; ces deux triangles FEG & EFD sont donc équilateraux entr'eux. Donc [5] l'angle $FED = FEG$. Mais aussi [6] l'angle $ACB = FEG$. Donc [7] l'angle $ACB = FED$. De même $EFD = EFG$ [6]; & $BAC = EFG$ [6]. Donc [7] l'angle $BAC = EFD$. Donc [8] l'angle $FDE = ABC$. Les triangles ACB & FDE sont donc équiangles l'un à l'autre, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Si un triangle, par exemple ABC, a un de ses angles ACB égal à un angle DFE d'un autre triangle DEF ; & si les côtez CA & CB qui comprennent cet angle ACB, sont proportionnels aux deux côtez FD & FE qui compren-

[1] *Part. 1. Prop. pres.*
[2] *Supposit.*
[3] *Cor. 3. déf. 12. Algeb.*
[4] *Part. 2. Prop. 8. Algeb.*
[5] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[6] *Par construction.*
[7] *Ax. 18. gener.*
[8] *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*

nent un pareil angle dans l'autre triangle ; c'est à dire, si *AC . CB* : : *DF . FE* : je dis que ces deux triangles seront équiangles entre eux, de telle maniere que les angles opposez aux antecedens de cette analogie seront égaux entre eux, de même que ceux qui seront opposez aux consequens. Pour le



demontrer, sur le plus grand des antecedens de cette analogie, par exemple sur le côté *CA*, on prendra *CG* = *FD*, & sur *CB* on prendra *CH* = *FE*. Ce qui est possible ; car si l'antecedent *AC* > *FD*, on aura aussi le consequent *CB* > *FE*; puisque * *AC . DF* : : *CB . FE*. Enfin on menera la ligne *GH*, & on aura [1] le triangle *CGH*, équilateral, & équiangle au triangle *FDE*.

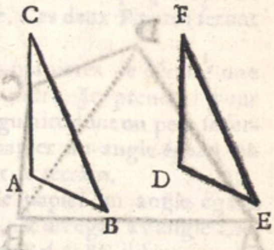
Puisque * *AC . CB* : : *DF* = *GC . FE* = *CH*; on aura [2] *AC . GC* : : *CB . HC* ; & [3] *AC* — *GC . GC* : : *CB* — *HC . HC*, c'est à dire ; *AG . GC* : : *BH . HC*. La ligne *CH* sera [4] donc parallele à *AB*. L'angle *CAB* sera [5] donc égal à *CGH*. Mais aussi [6] l'angle *FDE* = *CGH*. Donc [7] l'angle *CAB* = *FDE*. Pareillement [5] l'angle *CBA* = *CHG*, & [6] *FED* = *CHG*. Donc [7] *CBA* = *FED*. Ces

* *Supposit. & Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[1] *Part.1.Prop.35.Geo.* [2] *Part.2.Cor.Prop.3.Alg.*
[3] *Part. 4. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[4] *Part. 2.Prop.51. Geo.* [5] *Part.1.Prop.24. Geo.*
[6] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.* [7] *Ax. 18. gen.*

deux triangles *ABC* & *DEF* seront donc [°] semblables.

COROLLAIRE II.

Si un triangle a un de ses côtez égal au côté d'un autre triangle ; & si deux des angles qui ont leurs sommets dans les extremités de ce côté du premier triangle, sont égaux à deux angles qui ont aussi leurs sommets dans les extremitez de ce côté de l'autre triangle, chacun à chacun : ces deux triangles seront égaux entre eux en toutes manieres. Soit le triangle *ABC* dont le côté *AC* soit

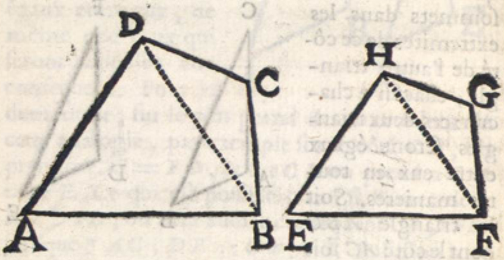


égal au côté *DF* du triangle *DEF* ; dont l'angle *ACB* soit égal à l'angle *DFE*, & dont l'angle *CAB* soit égal à l'angle *FDE* : il est * évident que le troisiéme angle *ABC* = *DEF*. Donc [1] *AC* . *DF* : : *AB* . *DE*. Mais [2] *AC* = *DF*. Donc aussi *AB* = *DE*. Enfin [1] comme *AB* est à *DE*, ainsi *BC* est à *EF*. Or on vient de voir que *AB* = *DE*. Donc aussi *BC* = *EF*. Ces deux triangles *ABC* & *DEF* sont donc équilateraux, ils sont donc égaux l'un à l'autre, en toutes manieres.

[°] *Déf.* 60. *Geo.*
* *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*
[1] *Prop. presente, & Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[2] *Supposition.* [3] *Cor.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*

COROLLAIRE III.

On peut tirer de la Proposition presente une maniere de décrire une figure rectiligne qui ait pour côté une ligne donnée, & qui soit semblable à une autre terminée par plus de trois côtez. Soit une figure donnée *ABCD*, à laquelle on se propose de décrire une figure semblable qui



ait pour un de ses côtez la ligne donnée *EF*. Du sommet d'un des angles de cette figure on menera des lignes aux autres angles qui la diviseront en triangles. On menera donc du point *D*, par exemple, la ligne *DB*, qui partagera cette figure en deux triangles. Ensuite ayant fait * l'angle *E*=*A*, il faut encore faire l'angle *EFH* =*ABD*, & mener les lignes *FH* & *EH* jusques au point de leur concours *H*. On fera enfin *FHG* = *BDC* & *HFG* = *DBC* : je dis que la figure *EFGH* sera semblable à *ABCD*. Car 1°. il est constant [1] que les angles d'une de ces figures sont égaux aux angles de l'autre, chacun

* *Cor. 4. Prop. 20. Geo.* [1] *Par construction.*

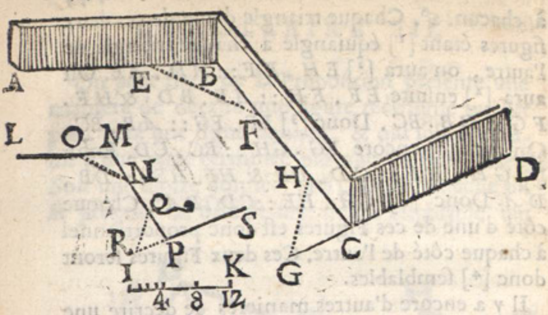
à

à chacun. 2°. Chaque triangle d'une de ces deux figures étant [1] équiangle à chaque triangle de l'autre, on aura [2] *EH . EF :: AD . AB*. On aura [2] ensuite *EF . FH :: AB . BD . & HF . FG :: DB . BC*. Donc [3] *EF . FG :: AB . BC*. On aura [2] encore *FG . GH :: BC . CD*. Enfin [2] *GH . HF :: CD . DB .& HF. HE :: DB . DA*. Donc [3] *GH . HE ::CD . DA*. Chaque côté d'une de ces Figures est donc proportionnel à chaque côté de l'autre. Ces deux Figures seront donc [4] semblables.

Il y a encore d'autres manieres de décrire une figure semblable à une autre. Je prendrai pour exemple la figure triangulaire dont on peut se servir pour décrire sur le papier un angle égal à un autre angle proposé sur le terrain.

Pour décrire sur le papier un angle égal à l'angle r'entrant *ABC*, & un égal à l'angle saillant *BCD*; sur les lignes *BA* & *BC* il faut prendre les parties *BE* & *BF*, chacune de quatre toises, par exemple, & mesurer la distance du point E au point F, que je suppose de huit toises. Ensuite sur la ligne droite *DC* prolongée on prendra aussi *CG* de quatre toises, & *CH* de quatre toises, on mesurera la distance du picquet *G* au picquet *H*; & on écrira ces mesures sur un papier pour s'en souvenir. Sur un autre papier il faut mener à volonté, une ligne *IK* qu'on divisera, par exemple, en douze parties égales, qui servira d'une

[1] *Par construction.*
[2] *Prop. pres.*
[3] *Part. 1. Cor. Prop. 12. Algeb.*
[4] *Def. 60. Geo.*

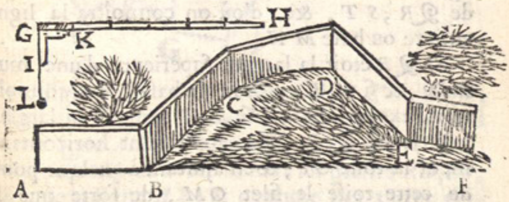


échelle de douze toises. On menera la ligne *LM*, & sur l'échelle *IK*, on prendra quatre parties égales qui representent quatre toises, & on les transportera du point *M* en *O*. On prendra huit toises sur la même échelle *IK* & encore quatre toises dont avec la ligne *MO* on fera [1] le triangle *ONM*. Je dis que l'angle *LMP* = *ABC*. Car le triangle *ONM* a [2] ses côtés proportionnels aux côtés du triangle *EFB*; puisque le côté *ON* contient autant des parties égales du côté *NM*, que le côté *EF* contient de celles du côté *FB*; & que le côté *NM* contient autant de celles du côté *MO*, que le côté *FB* en contient du côté *BE*: on dira la même chose à l'égard des côtés *MO*, *ON*; & *BE*, *EF*. Le triangle *ONM* est donc [3] équiangle au triangle *EFB*. L'angle *EBF* est donc égal à *OMN*, l'un & l'autre étant opposés aux côtés correspondants *EF* & *ON*. On trouvera par le même raisonnement que le triangle *PQR* est équian-

[1] *Cor. 4. Prop. 5.* [2] *Def. 13. Algeb.*
[3] *Part. 2. Prop. Pies.*

gle au triangle *C G H* ; & [1] l'angle *R P Q* estant égal à *G C H*, on aura [2] *M P S* = *B C D*. On peut donc décrire, ou dessiner exactement le plan d'une maison, d'un jardin, d'un enclos, &c. en se servant d'une échelle, comme on vient de voir, afin de transferer leurs angles sur le papier ; de mener ensuite des lignes qui serviront à representer les côtés de cette Maison, Jardin, &c. dans la même proportion qu'on les a trouvés sur le terrain.

S'il est necessaire de representer un mur *A B C D E F* construit en partie sur un plan horizontal, & le reste sur une petite montagne B *C D E*, tel qu'est quelquefois l'enceinte d'un



Parc ; outre la longueur du mur considerée suivant la pante de la Montagne, il faut encore avoir égard à la longueur de la base de cette Montagne, & pour la connoître en toise, le mur toujours à niveau, c'est à dire parallelement à la ligne horizontale *A* F. Dans cette circonstance il faut se servir d'une toise *G H* à laquelle on a ajusté une equerre ou triangle rectangle *G I K*, de sorte qu'au point *G* il y ait un filet attaché, & à son autre extremité un plomb *L*, & que ce filet touche librement le côté *G I* de ce triangle. Supposons pour exemple, qu'il faille

[1] *Part. 2. Prop. Pres.*
[2] *Prop. 21. Geo. & ax. 9. gen.*

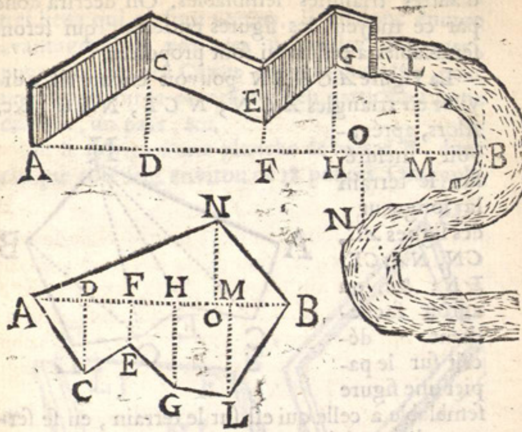
connoître la longueur de la base *M N* de la Montagne *M Z N* ; il faut poser à Niveau la toise *O P*, & alors on connoît [1] la longueur *M S*, les lignes *O M* & *P S* étant perpendiculaires à la ligne horizontale *M N*. On dira la même chose de *Q R*, *S T*, &c. d'où on connoîtra la ligne entiere ou base *M N*.

Si *Q R* étoit la largeur superieure d'une muraille, & si *M T* en étoit la base ; on connoîtroit l'excés dont la base *M T* surpasse la largeur superieure *Q R*, en appliquant horizontalement la toise *O P*, & en ajustant à quelque point de cette toise le filet *O M*, de sorte que le plomb attaché à son extremité inferieure touche legerement le point *M*, alors la distance *O P* feroit [1] connoître l'excés *M S*.

On peut encore connoître la hauteur *V Z* de la Montagne, en mesurant toutes les hauteurs pertiales *M O* = *V X* [1], *P Q* = *X Y*, &c. dont la somme est [2] égale à *V Z*.

Pour représenter proportionnellement la situation d'une muraille *A C E G* qui forme plusieurs angles, ou le cours d'une Riviere *G L B N*, ou enfin une prairie, ou autre terrain semblable *A C G B N* : on peut [3] mener sur le terrain

[1] *Part.* 1. *Prop.* 37. *Geo.* [2] *Ax.* 3. *gener.*
[3] *Part.* 1. *Cor.* 5. *Prop.* 34. *Geo.*

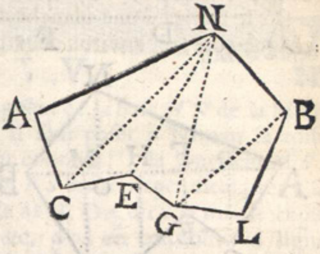


une ligne droite *A B* du ſommet *A* d'un angle, à un autre *B*, & mener [1] de chaque angle à cette ligne *A B* des perpendiculaires *C D*, *E F*, *G H*, &c. Aprés avoir meſuré les parties *AD*, *DF*, &c. de la ligne *A B*, & chacune des autres perpendiculaires, *D C*, *F E*, &c. il eſt facile de les décrire ſur le papier, proportionnellement à celles qui ſont ſur le terrain, en ſe ſervant d'une ligne diviſée en parties égales, que les Deſſinateurs appellent *échelle*. Enſuite on menera dans le deſſein les lignes *A C*, *C E*, *E G*, &c. Les triangles *A D C*, *L M B*, *B N O* du deſſein ſeront [2] ſemblables à ceux qui leur correſpondront ſur le terrain. Et ſi on mene des Diagonales dans les Trapeſoides, on trouvera encore [3]

[1] *Part. 3. Cor. 2. Prop. 40. Geo.*
[2] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. & Cor. 1. Prop. Preſ.*
[3] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. ax. 9. gen. & Cor. 1. Prop. preſ.*

d'autres triangles ſemblables. On décrira donc par ce moyen des figures entieres, qui ſeront ſemblables à celles qui ſont propoſées.

La Figure *A C G B N* pouvoit encore eſtre diviſée en triangles *A C N*, *N C E*, *N E G*, &c. Alors, aprés avoir meſuré ſur le terrain la longueur des lignes *AC*, *CN*, *NA*; *CE*, *E N*; &c. on auroit facilement * décrit ſur le papier une figure



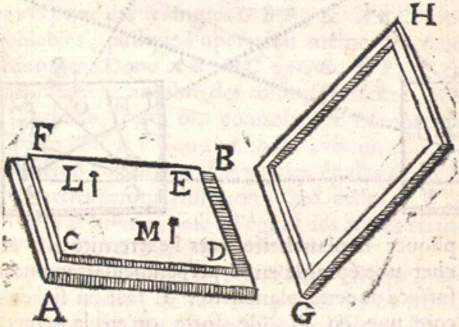
ſemblable à celle qui eſt ſur le terrain, en ſe ſervant d'une échelle comme on a vû dans les operations precedentes. Cette maniere eſt fort exacte.

La deſcription des figures ſemblables eſt tres-utile pour bien réuſſir dans le deſſein, & pour faire enſuite des ouvrages conſiderables. Les Architectes, Maſſons, Charpentiers, Menuiſiers, Serruriers, Sculpteurs, Fondeurs, &c. ne peuvent éviter de s'en ſervir, pour perfectionner des bâtimens, ou pour en conſtruire de nouveaux ſur le terrain dont on fait la repreſentation; & généralement pour executer des ouvrages conformement aux deſſeins qu'on leur propoſe. Enfin cette pratique eſt fort neceſſaire aux Geographes, aux Ingenieurs mêmes, qui ſont ſouvent obligés de repreſenter une Ville avec ſes avenuës, les Mareſts, Rivieres, ou au-

* *Cor. 4. Prop. 35. Geo. Def. 13. Algeb. & Part. 2. Prop. preſ.*

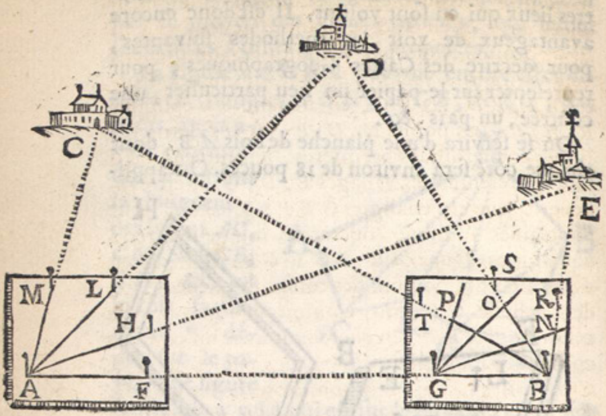
tres lieux qui en ſont voiſins. Il eſt donc encore avantageux de voir les methodes ſuivantes, pour décrire des Cartes Geographiques, pour repreſenter ſur le papier un lieu particulier, une contrée, un païs, &c.

On ſe ſervira d'une planche de bois *A B*, dont chaque côté ſera environ de 18 pouces. On appli-



quera un papier blanc ſur cette planche en *A B*, qui y ſera retenu par un quadre ou chaſſis *G H*, qu'on emboëtera au tour de l'eſpace *C D E F*. Enſuite on ajuſtera cette planche horizontalement ou à niveau, ſur un ſupport à trois pieds, ſemblable à celui qui eſt repreſenté dans la page 396. Les épingles *L*, *M* &c. ſerviront de pinnules & de petits piquets; il faut que ces épingles ſoient fort menues, afin qu'elles ne faſſent que de petits trous. Cet inſtrument eſt connu ſous le nom de Planchette.

Pour repreſenter ſur le papier pluſieurs Villages, par exemple *C*, *D*, *E*, il faut prendre une diſtance *A B* connue, de 400 toiſes, d'une demie lieue, &c. en ſorte que de ſes extremités *A* & *B* on découvre ces Villages *C*, *D*, *E*. Il faut ap-



pliquer la planchette vers l'extremité *A*, & ficher une épingle en *A* perpendiculairement à la surface de cette planchette. Il faut en ficher encore une en F, de sorte qu'en la regardant par le bas elle soit en même ligne droite [1] que les extremités *A* & *B*. Cette ligne *A* F servira d'échelle, qu'on divisera en autant de parties qu'on sçait que la ligne *A B* contient de toises ou de lieues, &c. Il faut ensuite ficher les épingles *H*, *L*, *M*, de sorte qu'en regardant l'épingle du point *A*, ces autres épingles *H*, *L*, &c. & les Clochers, ou autres lieux remarquables de ces Villages *E*, *D*, *C*, soient aussi en ligne droite : & on menera les lignes droites *A H*, *A L*, *A M*, sur lesquelles il faut écrire le nom des Villages où elles sont dirigées, afin de s'en souvenir.

Enfin il faut transporter la planchette vers l'autre extremité *B* de la distance *A B*; de sorte que

[1] *Part. 1. Cor. 5. Prop. 34. Geo.*

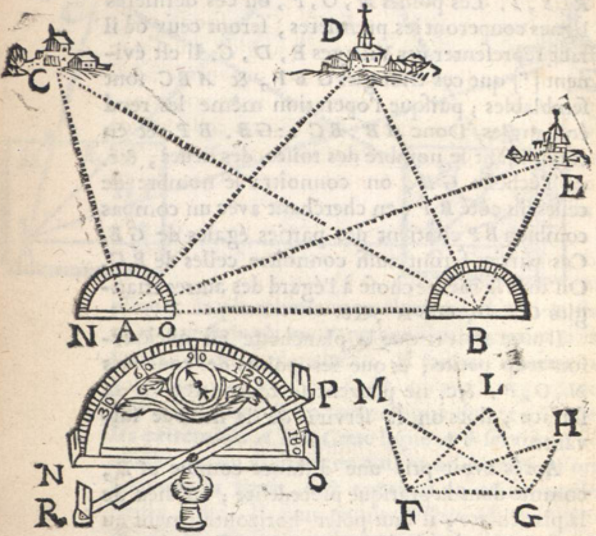
le point F se trouve en *B*, & que les épingles fichées en *B* & en *G*, & le point *A* se trouvent en ligne droite. Alors par le point *B*, on menera vers ces mêmes Villages E, *D*, *C* les lignes droites *BE*, *BD*, & *BC*, en fichant les épingles *R*, *S*, *T*. Les points *N*, *O*, *P*, où ces dernieres lignes couperont les premieres, seront ceux où il faut representer ces Villages *E*, *D*, *C*. Il est évident [1] que ces triangles *GBP*, & *ABC* sont semblables; puisque l'operation même les rend équiangles. Donc *AB*. *BC* : : *GB*. *BP*. & en connoissant le nombre des toises, des lieues, &c. de l'échelle *GB*, on connoîtra le nombre de celles du côté *BP*, en cherchant avec un compas combien *BP* contient des parties égales de *GB*. Ces parties feront aussi connoître celles de *BC*. On dira la même chose à l'égard des autres triangles *GBO*, *GBN*, &c.

Il peut arriver que la planchette est quelquefois trop petite, & que les points de concours *N*, *O*, *P*, &c. ne peuvent se rencontrer sur sa surface; alors on se servira de la métode suivante.

Aprés avoir pris une distance connue *AB*, comme dans la pratique precedente; au lieu de la planchette, il faut poser horizontalement au point *A* un demi cercle *NOP* divisé en degrés, de sorte que par les pinnules *N*, & *O* ajustées aux extremités de son diametre, on puisse appercevoir quelque marque au point *B*. Ce demi cercle demeurant fixe en cette situation, il faut diriger les pinnules *R* & *P* de la regle mobile *RP* attachée au centre du demi cercle, vers chacun de ces Villages dont est question; observer de

[1] *Part. 1. Prop. pres.*

combien de degrés est l'angle *C A B*, par exemple, de combien est l'angle *D A B*, &c. & écrire le nombre des degrés, qui sont [1] la mesure de chacun de ces angles, pour s'en souvenir. On transportera cet instrument à l'autre station *B*,



& on observera aussi le nombre des degrés qui conviennent aux angles *C B A*, *D B A*, &c. Enfin on menera sur le papier la ligne *F G* sur laquelle on fera [2] les triangles *M G F*, *F L G* & *F G H* équiangles aux triangles *A B C*, *ABD*, *A B E* qui sont sur le terrain, & qui leur seront

[1] *Prop.* 20. *Geo.*
[2] *Cor.* 4. *Prop.* 20. & *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*

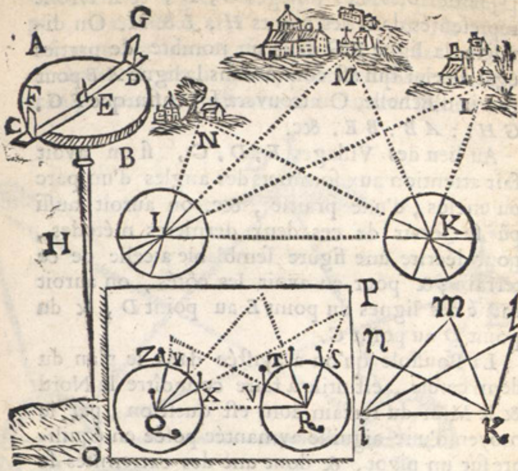
[1] ſemblables. Les Villages *C*, *D*, & *E* ſeront repreſentés dans les points *H*, *L* & *M*. On diviſera la ligne *F G* dans un nombre de parties égal à celui qui eſt connu dans la ligne *A B* pour ſervir d'Echelle. On trouvera [1] enfin que *F G*. *G H* : : *A B* . *B E*. &c.

Au lieu des Villages *E*, *D*, *C*, ſi on avoit fait attention aux ſommets des angles d'un parc ou enclos, d'une prairie, &c. on auroit auſſi pû ſe ſervir de ces deux dernieres métodes, pour décrire une figure ſemblable a celle de ce terrain; & pour en avoir les côtés, on auroit mené des lignes du point E au point *D*, & du point *D* au point *C*.

La Bouſſole qu'on a ajuſtée dans le plan du demi cercle, eſt utile à faire connoître le Nord & le Midi du terrain dont eſt queſtion, par le moyen d'une aiguille aymantée poſée en équilibre ſur un pivot, & dont une des extremités ſe tourne vers le Nord, & l'autre vers le Midi.

On peut encore ſe ſervir de l'inſtrument *A B*, qui n'eſt qu'une planche de bois, taillée en forme de cercle, de douze ou quinze pouces de diametre, & de trois quarts de pouce d'épaiſſeur, ou environ. Il faut placer dans le centre *E* un pivot ou aiguille fine & déliée, & ajuſter à ce pivot une regle mobile fabriquée de ſorte que la ligne droite *C D* paſſe par le centre *E*. Il faut encore ajuſter à cette regle deux pinnules de telle maniere que leurs côtés *C F* & *D G* ayent leurs extremités dans la ligne droite *C D*, & ſoient

[1] *Part. 1. Prop. preſ.*



perpendiculaires au plan de la regle. Le trou du pivot doit être petit, afin que son centre se trouve exactement dans la ligne *C D*. On applique cet instrument à l'extremité d'un bâton ou support *H*. Il faut mettre sous cette regle *C D* un papier blanc, auquel on aura collé par le dessous du milieu un autre petit papier, pour empêcher que le trou du pivot ne soit augmenté, & que rien n'y soit déchiré pendant l'operation. Il faut ensuite avoir la précaution de coller ce papier blanc à la planche de bois en trois ou quatre petits endroits, par l'extremité seulement.

Pour se servir de cet instrument, il faut le poser, par exemple, en *I*, dirigeant les côtés *C F* & *D G* des pinnules en ligne droite vers un autre point *K*, d'une distance connue & un peu grande à proportion que les lieux qu'on veut representer

representer sur le papier, sont éloignés. La regle mobile demeurant située de maniere que sa ligne droite *C D* soit sur la ligne *I K*, il faut sur le papier blanc de dessous décrire une ligne avec du crayon ou de l'encre, sur laquelle on écrit, *Ligne de stations*. On fait la même chose à l'égard des Villages *N*, *M*, *L*, Moulins, Hameaux, &c. en écrivant les noms sur les lignes qui leur appartiennent. Aprés cela il faut ôter le papier sur lequel on vient de mener ces lignes, & transporter l'instrument en *K*. Aprés y avoir appliqué un nouveau papier blanc, on dirigera la regle mobile vers le premier point de station *I*, & ensuite vers les Villages *N*, *M* & *L*, comme dans l'operation precedente, & on menera des lignes sur le nouveau papier, qui exprimeront les angles *IKN*, *IKM*, &c; & sur ces lignes on écrira encore le nom des lieux où elles seront dirigées. Il faut ensuite prendre ces deux papiers, & poser leurs centres sur un autre papier *O P* en *Q*, & en *R*, observant que deux de leurs lignes qui avoient été dirigées vers *I* & *K* fassent la ligne droite *Q R*, ce qui sera facilité par une ligne droite menée sur le papier *O P*. Ensuite avec la pointe d'une épingle il faut marquer sur le papier *OP* les points *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, *Y*, *Z*, pour y mener des lignes jusqu'à leurs autres points de rencontre, & décrire la figure *i k l m n*, dont chaque triangle est [1] semblable à chacun de ceux de la figure *I K L M N*. Enfin on décrira les Villages aux points *l*, *m*, & *n*, avec leurs noms à côté.

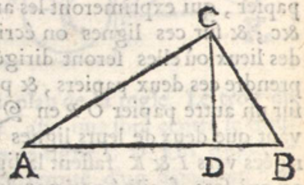
[1] *Cor. 4. Prop. 31. & Part. 1. Prop. 52. Geo.*

PROPOSITION LIII.

Dans un triangle rectangle, la ligne menée du sommet de l'angle droit perpendiculairement au côté qui lui est opposé, divise ce triangle en deux autres qui lui sont semblables.

DEMONSTRATION

SOit le triangle *A B C* dont l'angle *A C B* est droit ; du sommet *C* de cet angle soit menée la ligne *C D* perpendiculairement au côté *A B* : Je dis que les triangles *A D C* & *C D B* sont semblables au triangle *A B C*. Car l'angle droit *A D C* du triangle *A C D* est [1] égal à l'angle droit *B C A* ; & l'angle *D A C* est commun aux



deux triangles *A B C* & *A D C* ; le troisiéme angle *A C D* est [2] donc égal au troisiéme *A B C* du triangle *A C B*. Le triangle *C A D* est [3] donc semblable au triangle *A B C*.

Pareillement l'angle *C D B* = *A C B*, & l'angle *C B A* est commun aux deux triangles *CDB*, & *A C B* ; le troisiéme angle *B C D* est donc [2] égal au troisiéme *C A B* du triangle *A B C*. Le

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[2] *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*

triangle $B C D$ eſt donc ſemblable auſſi au triangle $A B C$; *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

On vient de voir dans la demonſtration de la propoſition preſente, que l'angle $A C D = DBC$, que l'angle $C A D = D C B$, on ſçait auſſi [1] que l'angle droit $A D C = C D B$. Les triangles $A D C$ & $C D B$ ſont donc [2] ſemblables l'un à l'autre, & découvrent évidemment les verités ſuivantes.

1°. La ligne perpendiculaire $C D$ eſt une moyenne proportionnelle entre les parties $A D$ & $D B$ du côté oppoſé à l'angle droit $A C B$. Car [2] le côté $A D$ du triangle $A D C$ eſt au côté $D C$ du triangle $D B C$, comme le côté $D C$ du triangle $A D C$ eſt au côté $D B$ du triangle $D B C$; c'eſt à dire [3] que $\div\!\!\div A D . D C . D B$.

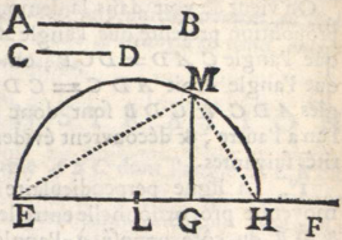
2°. Le côté $A C$ eſt une ligne moyenne proportionnelle entre le côté entier AB & ſa partie AD. Car [2] le côté entier $A B$ du triangle $A B C$ eſt au côté $A C$ du triangle $A D C$; comme le côté $A C$ du triangle $A B C$ eſt au côté $A D$ du triangle $A D C$; c'eſt à dire que $\div\!\!\div AB . AC . AD$;

3°. Le côté $B C$ eſt une ligne moyenne proportionnelle entre le côté $A B$ & la partie $D B$. Car [2] le côté $A B$ du triangle $A B C$ eſt au côté $C B$ du triangle $C D B$, comme le côté $C B$ du triangle $CA B$ eſt au côté DB du triangle $C D B$.

[1] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 52. & Part. 2. def. 60. Geo.*
[3] *Déf. 15. Algeb.*

COROLLAIRE II.

Le Corollaire precedent eſt le fondement d'une métode dont on peut ſe ſervir, pour trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soient les lignes *A B* & *C D*; ſi on ſe propoſe d'en chercher encore une, qui ſoit telle que *A B* ſoit à cette ligne cherchée, comme cette ligne cherchée eſt à *C D*; il faut mener une ligne indéfinie *E F*, & ſur cette ligne prendre les parties *E G* & *G H* égales aux lignes données *A B* & *C D*. Enſuite, prenant la ligne totale *E H* pour un diametre, ou ſa moitié *E L* pour un rayon, il faut décrire la demie circonference *E M H*, & par l'extremité *G* de la ligne $EG = AB$ il faut [1] mener une perpendiculaire à *E H*, & la prolonger juſqu'à ce qu'elle ſe termine dans la demie circonference au point *M*: Je dis que cette perpendiculaire *G M* eſt une moyenne proportionnelle entre *E G* & *G H*. Car l'angle *E M H* eſt [2] droit; *G M* eſt [3] perpendiculaire à *EH*. Donc [4] *G M* eſt une moyenne proportionnelle entre *A B* & *CD*, c'eſt à dire que ∺ $EG = AB \,.\, GM \,.\, GH = CD$.



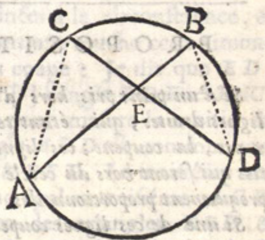
[1] *Part. 2. Cor. 2. Prop. 5. Geo.*
[2] *Cor. 7. Prop. 27. Geo.*
[3] *par conſtruction.*
[4] *Part. 1. Cor. 1. Prop. preſ.*

PROPOSITION LIV.

Si deux cordes se coupent dans un cercle, les parties de l'une sont reciproquement proportionnelles aux parties de l'autre.

DEMONSTRATION

Soient les cordes *AB* & *CD* qui se coupent mutuellement au point *E* pris dans le cercle *ADBC* : Je dis que les parties de ces cordes sont entr'elles en rapport reciproque, c'est à dire, par exemple, que *CE.EB::AE.ED*. Pour le démontrer ; d'une extremité *C* d'une de ces cordes, je mene une ligne à l'extremité *A* d'une autre corde ; & par les autres extremités *B* & *D*, je mene encore une autre ligne *BD*.



Les triangles *ACE* & *EBD* sont équiangles. Car [1] l'angle *CEA* = *BED*, & [2] l'angle *ACE* = *EBD*; enfin [3] l'angle *CAE* = *EDB*. Ces triangles ont [4] donc leurs côtés homolo-

[1] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*
[2] *Prop. 27. Geo. premiere circonstance.*
[3] *Prop. 27. ou Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*

gues proportionnels. Donc $CE \,.\, EB :: AE \,.\, ED$, ou $AE \,.\, EC :: ED \,.\, EB$, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Le rectangle compris sous les parties CE & ED d'une de ces cordes est donc égal au rectangle compris sous les parties AE & EB de l'autre. Car, puisque [1] $CE \,.\, EB :: AE \,.\, ED$, on [2] aura $CE \times ED = EB \times AE$, c'est à dire, [3] le rectangle compris sous CE & ED, égal au rectangle compris sous EB & AE.

PROPOSITION LV.

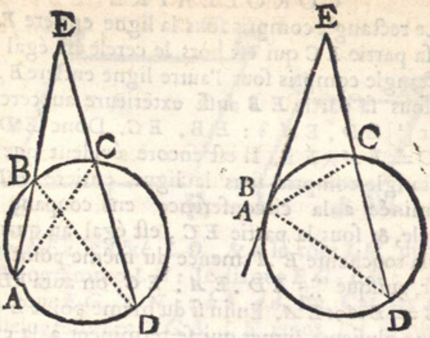
Si d'un point pris hors d'un cercle on mene deux lignes droites, qui, étant terminées à sa circonference, la coupent ; ces lignes entieres & leurs parties qui seront hors du cercle, seront entr'elles reciproquement proportionnelles.

Si une de ces lignes coupe la circonference, & si l'autre la touche ; la touchante menée de ce point pris hors le cercle au point d'attouchement, sera une moyenne proportionnelle entre l'autre ligne entiere, & sa partie qui se trouvera hors le cercle.

DEMONSTRATION

Soit le point E pris hors le cercle $ADCB$; de ce point E soient menées les lignes EA

[1] *Prop. Pres.*
[2] *Prop. 2. Algeb.*
[3] *Cor. 2. Def. 53. Geo.*



& *E D* qui ſont terminées à la circonference, & qui la coupent, ou dont une touche cette circonference, & l'autre la coupe : Je dis que *E D*. *E A* : : *E B* . *E C* . car [1] l'angle *B D E* = *EAC*, l'un & l'autre ayant pour meſure la moitié du même arc *B C*. L'angle *A E D* eſt commun aux deux triangles *A E C* & *B E D*. Le troiſiéme angle *E B D* eſt [2] donc égal au troiſiéme *A C E*. Les côtés homologues des triangles *E B D* & *E A C* ſont [3] donc proportionnels entr'eux. Donc le côté *E D* du triangle *E B D* eſt au côté *E A* du triangle *E C A*, comme le côté *E B* du triangle *E D B* eſt au côté *E C* du triangle *EAC*, *ce qu'il falloit démontrer.*

Il eſt évident que, ſi la ligne *E A*, par exemple, eſt touchante, cette ligne *E A* devient égale à *E B* . donc ∺ *E D* . *E A* . *E C*.

[1] *Prop. 27. Geo.*
[2] *Cor. 4. Prop. 31. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*

COROLLAIRE

Le rectangle compris ſous la ligne entiere *ED* & ſa partie *EC* qui eſt hors le cercle eſt égal au rectangle compris ſous l'autre ligne entiere *EA*, & ſous ſa partie *EB* auſſi exterieure au cercle. Car [1] $ED . EA :: EB . EC$. Donc $ED \times EC = EA \times EB$. Il eſt encore évident que le rectangle compris ſous la ligne entiere *ED*, terminée à la circonference en coupant le cercle, & ſous la partie *EC*, eſt égal au quarré de la touchante *EA* menée du même point *E*. Car, puiſque $\div\!\!\div ED . EA . EC$, on aura $ED \times EC = EA \times EA$. Enfin ſi du même point *E* on mene pluſieurs lignes qui ſe terminent à la circonference en coupant le cercle ; les rectangles compris ſous ces lignes entieres & ſous leurs parties exterieures au cercle ſeront égaux entr'eux : puiſque chacun eſt égal au quarré de la touchante.

PROPOSITION LVI.

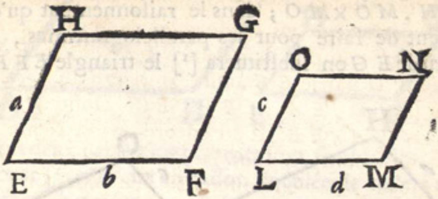
Les parallelogrammes ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Les triangles ſemblables ſont auſſi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

DEMONSTRATION

Soient les parallelogrammes ſemblables *EG* & *LN*, & ſoit nommé *a* le côté *EH*, & *b* le côté *EF* du parallelogramme *EG*. Soit enfin

[1] *Prop. Preſ.*
[2] *Prop. 2. Algeb.*



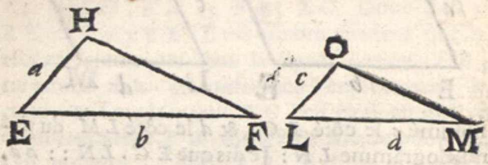
nommé c le côté LO, & d le côté LM du parallelogramme LN: Je dis que $EG . LN :: aa . cc$; que $EG . LN :: bb . dd$. &c. Car les parallelogrammes EG & LN étant [1] semblables, on a [2] $a . c :: b . d$. Donc [3] $ad = cb$. Mais [4] le parallelogramme EG est à $LN :: ab . cd$. En multipliant les deux derniers termes de cette derniere analogie par ad & cb, on aura [5] $ab . cd :: aabd . ccbd$. & en divisant ces deux derniers termes par ce qu'ils ont de commun qui est bd, on aura [6] $aabd . ccbd :: aa . cc$. ces quatre raports seront donc égaux entr'eux, $EG . LN :: ab . cd :: aabd . ccbd :: aa . cc$, Donc $EG . LN :: aa . cc$.

Au lieu de multiplier ab par ad, & cd par cb, si on avoit multiplié ab par cb, & cd par ad, & continué le reste comme on vient de voir; on auroit aussi trouvé que $EG . LN :: bb . dd :: FG \times FG . MN \times MN$*$:: GH \times GH . NO \times NO$.

Pour démontrer que le triangle EFH est au

[1] *Supposit.*
[2] *Part. 2. Def. 60. Geo.*
[3] *Prop. 2. Algeb.*
[4] *Part. 1. Prop. 50. Geo.*
[5] *Prop. 5. Algeb.*
[6] *Prop. 6. Algeb.*
* *Part. 1. Prop. 37. Geo.*

triangle *LMO* : : *aa* . *cc* : : *bb* . *dd* : : *FH* × *FH* . *MO* × *MO* ; dans le raisonnement qu'on vient de faire pour les parallelogrammes, au lieu de *E G* on substituera [1] le triangle *EFH*,



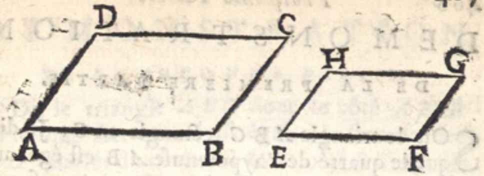
& au lieu de *LN* on substituera *LMO*. Alors la verité de la proposition presente sera évidente dans toutes ses circonstances.

Les parallelogrammes semblables *EG* & *LN*, ou les triangles semblables *EFH* & *LMO*, sont donc entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si un parallelogramme, par exemple *AC*, a l'angle *DAB* égal à l'angle *HEF* d'un autre parallelogramme *EG* : Je dis que le raport de ce parallelogramme *AC* au parallelogramme *EG* sera composé des raports des côtés qui comprennent ces angles égaux. Car [2] le parallelogramme *AC* . *EG* : : *AB* × *AD* . *EF* × *EH*. Or [3] le raport de *AB* × *AD* au produit *EF* × *EH* est composé du raport de *AB* à *EF*, & de *AD* à *EH*; ou de *AB* à *EH* & de *AD* à *EF*. Et

[1] *Part.* 2. *Prop.* 50. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 50. *Geo.*
[3] *Prop.* 18. *Algeb.*



ſi ces deux parallelogrammes ſont ſemblables, ils ſeront [1] entr'eux en raiſon doublée de celle d'un côté du premier, au côté homologue du ſecond. Car ils ſont [2] entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & ces quarrés ſont [3] entr'eux en raiſon doublée d'un de ces côtés à un autre côté homologue.

On démontrera de la même maniere que ſi un angle d'un triangle eſt égal à un angle d'un autre, le raport d'un de ces triangles à l'autre, eſt [4] compoſé des raports des côtés qui comprennent ces angles égaux. Et ſi ces triangles ſont ſemblables, le raport de l'un à l'autre [3] eſt doublé de celui du côté d'un de ces triangles au côté homologue de l'autre.

PROPOSITION LVII.

1°. *Le quarré du côté oppoſé à l'angle droit d'un triangle rectiligne eſt égal à la ſomme des quarrés des côtés qui comprennent cet angle droit.*

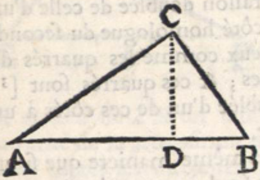
2°. *Reciproquement ſi le quarré d'un des côtés d'un triangle eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres côtés; l'angle oppoſé à ce côté eſt droit.*

[1] *Def.* 18. *Algeb.* & *Cor. Prop.* 18. *Algeb.*
[2] *Prop. Preſ.*
[3] *Cor. Prop.* 18. *Algeb.*
[4] *Part.* 2. *Prop.* 50. *Geo.* & *Prop.* 18. *Algeb.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le triangle *A* B *C* rectangle en *C*: Je dis que le quarré de l'hypotenuse *A* B est égal au quarré de *A C* & au quarré de B *C*, pris ensemble. Car du sommet *C* de l'angle droit *A C* B, ayant [1] mené la ligne *C D* perpendiculairement sur la base *A* B, le triangle *A*B*C* sera divisé en deux autres triangles *A D C* & *D* B *C*, qui lui seront [2] semblables. Or [3] le triangle *A* B *C* est au triangle *A D C* comme le quarré de *A* B au quarré de *A C*; & le même triangle *A* B *C* est au triangle *C D* B : : *A* B*q*. B *Cq*. Donc [4] *A* B *C*. *A D C* + *C D* B : : *A* B*q*. *A C q* + *C* B*q*. Mais [5] le triangle *A* B*C* est égal à la somme des triangles *A D C* + *C D* B; le quarré de *A* B est donc pareillement égal à la somme des quarrés des côtés *A C* & B *C*, *ce qu'il falloit démontrer.*



$$\left\{ \begin{array}{l} ABC \,.\, ADC : : AB^2 \,.\, AC^2. \\ ABC \,.\, CDB : : AB^2 \,.\, CB^2. \end{array} \right\}$$

Donc $ABC \,.\, ADC + CDB : : AB^2 \,.\, AC^2 + CB^2$;

Mais $ABC = ADC + CDB$.

Donc $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

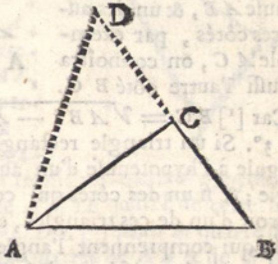
[1] *Part.* 1. *Cor.* 2. *Prop.* 5. *Geo.*
[2] *Prop.* 53. *Geo.* [3] *Prop.* 56. *Geo.*
[4] *Prop.* 14. *Algeb.* [5] *Ax* 3. *gen.*

DEMONSTRATION

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

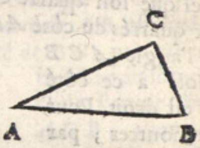
SOit le triangle ABC dont le côté AB est tel que son quarré est égal à la somme des deux quarrés du côté AC & du côté BC : je dis que l'angle ACB opposé à ce côté AB est droit. Pour le demontrer ; par le point C sommet de l'angle ACB soit menée la ligne CD perpendiculairement à la ligne AC, & soit faite $CD = CB$. On aura [1] $ADq = ACq + CDq$. Mais [2] $CDq = BCq$; puisque [3] $CD = BC$. Dans cette égalité $ADq = ACq + CDq$, au lieu de CDq, substituant CBq [4] ; on aura $ADq = ACq + CBq$. Mais [5] $ABq = ACq + CBq$. Donc [6] $ABq = ADq$. Donc [7] $AB = AD$. Ces deux triangles ACD & ABC seront donc équilateraux l'un à l'autre, & [8] les angles opposés à côtés égaux dans l'un & dans l'autre triangle, seront égaux. Donc l'angle $ACB = ACD$. Donc l'angle ACB sera droit, *ce qu'il falloit démontrer.*



[1] *Part. 1. Prop. Pres.*
[2] *Cor. 3. Prop. 5. Algeb.*
[3] *Par construction.*
[4] *Dem. 1. Geo.*
[5] *Supposit.*
[6] *Ax. 18. Geo.*
[7] *Cor. 4. Prop. 5. Algeb.*
[8] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*

COROLLAIRE I.

1°. Si on connoît la longueur des côtés AC & BC qui comprennent l'angle droit ACB, on connoîtra [1] celle de la base AB. Car la base $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$.



2°. Si on connoît la longueur de l'hypotenuse AB, & un des autres côtés, par exemple AC, on connoîtra aussi l'autre côté BC. Car [1] $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}$.

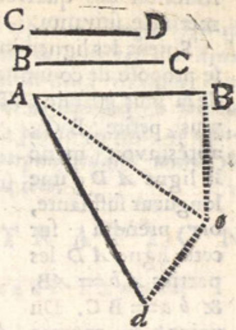
3°. Si un triangle rectangle a son hypotenuse égale à l'hypotenuse d'un autre triangle rectangle; & si un des côtés qui comprennent l'angle droit d'un de ces triangles, est égal à un des côtés qui comprennent l'angle droit dans l'autre triangle; le troisiéme côté d'un de ces triangles sera égal au troisiéme côté de l'autre. Parceque le quarré d'une de ces hypotenuses est [2] égal au quarré de l'autre. Or retranchant de part & d'autre les quarrés des autres côtés égaux, les restes seront [3] égaux. Les restes sont le quarré du troisiéme côté d'un de ces triangles, & le quarré du troisiéme côté de l'autre, dont les racines sont [4] égales.

COROLLAIRE II.

Pour décrire un quarré égal à un nombre d'autres quarrés proposés à volonté, par exemple, à trois quarrés dont les côtés soient AB, BC, & CD; il faut mener par l'extremité B de

[1] Part. 1. Prop. Pref.
[2] Cor. 3. Prop. 5. Algeb. [3] Ax. 9. Gen.
[4] Cor. 4. Prop. 5. Algeb.

la ligne *A B* la ligne *B c* perpendiculairement à cette ligne *A B*, & égale au costé *B C* du second quarré proposé. Menez la ligne *A c*. Alors [1] le quarré de $Ac = AB^2 + Bc^2$. Ensuite par le point *A*, ou par le point *c* extremitez de la ligne *A c*, menez la ligne *c d* perpendiculairement à cette ligne *A c*, & égale au costé *C D* du troisiéme quarré proposé; enfin menez la ligne *A d*. Le quarré de cette ligne $Ad = Ac^2 + CD^2$. [2] Mais le quarré de *A c* est déja égal aux quarrés de *A B* & de *B C*. Donc [2] le quarré de *A d* est égal à la somme des trois quarrés dont les costez sont *A B*, *B C*, *C D*.



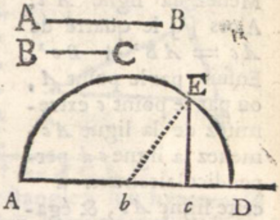
Si on avoit cherché un quarré triple du quarré dont le costé est *A B*; il auroit fallu faire les perpendiculaires *B c* & *c d*, égales chacune à la ligne *AB*. Alors le quarré de *A c* valant deux fois le quarré de *A B*, & le quarré de *c d* valant [3] une fois le quarré de *A B*; on auroit trouvé que le quarré de *A d* qui vaut [4] les quarrez de *A c* & de *c d*, auroit esté triple du quarré de *AB*. On continueroit de même, pour trouver un quarré quadruple.

C'est ainsi qu'on peut faire l'addition & la multiplication des quarrez. A l'égard de la sou-

[1] *Part. 1. Prop. Pres.* [3] *Cor. 3. Prop. 5. Algeb.*
[2] *Demande 1. Gen.* [4] *Part. 1. Prop. pres.*

ſtraction des quarrez, on la peut faire par la methode ſuivante.

Soient les lignes inégales *AB* & *BC*. Si on ſe propoſe de connoître le quarré dont le quarré de la plus grande *AB* ſurpaſſe le quarré de la plus petite BC; aprés avoir mené la ligne *AD* d'une longueur ſuffiſante, on prendra ſur cette ligne *AD* les parties $Ab = AB$, & $bc = BC$. Du point *b* comme



centre, & d'une ouverture égale à *Ab* on décrira la demie circonference *AED*, & par le point *c* on menera une perpendiculaire *cE* qui ſe terminera à cette demie circonference en *E*. Enfin on menera le rayon *bE*. Alors [1] $bEq = bc^2 + cE^2$. Or [2] $bEq = ABq$. Donc $ABq = BCq + cEq$, c'eſt à dire que le quarré de *A* B ſurpaſſe le quarré de B C de la valeur du quarré de *cE*.

PROPOSITION LVIII.

1°. *Le quarré du côté oppoſé à l'angle obtus d'un triangle rectiligne ſurpaſſe la ſomme faite des quarrez des deux autres côtez, d'un excés égal à deux rectangles dont chacun eſt compris ſous un des côtez, & ſous la partie de ce côté prolongé, terminée par le ſommet de l'angle obtus, & par une*

[1] *Part.* 1. *Prop. Preſ.*

[2] *Cor.* 1. *Def.* 29. *Geo, Cor.* 3. *Prop.* 5. *Algeb.* & *demande* 1. *Gen.*

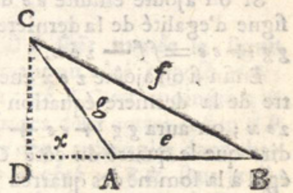
perpendiculaire menée du sommet de l'angle opposé, à ce côté prolongé.

2°. *Le quarré du côté opposé à l'angle aigu est moindre que la somme faite des quarrez des deux autres côtez, de la valeur de deux rectangles dont chacun est compris sous un de ces côtez & sous la partie de ce côté, terminée par le sommet de l'angle aigu, & par une perpendiculaire menée de l'angle opposé, à ce même côté.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit le triangle obtusangle *ABC*; soit prolongé un des côtez qui comprennent l'angle obtus *CAB*, par exemple B*A*; & du point *C* sommet de l'angle *ACB* soit menée la perpendiculaire *CD* à ce costé B*A* prolongé : je dis que le quarré du côté *C*B opposé à l'angle obtus, excede la somme des quarrez des costez *AC* & *AB*, de la valeur de deux rectangles compris sous *AB* & *AD*. Pour le demontrer, soit nommé *e* le costé *AB*; *f*, le costé B*C*; *g*, le costé *AC*; & *x*, la ligne *AD*.



Si du quarré du costé *CA* qui est gg, on retranche le quarré du costé *DA* qui est xx; on aura [1] $gg - xx = CD^2$. Et si du quarré de

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*

CB qui eſt ff on retranche le quarré de $DB = e + x$, qui eſt $ee + 2ex + xx$; on aura [1] $ff - ee - 2ex - xx = CD^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} gg - xx = CD^2 \\ ff - ee - 2ex - xx = CD^2 \\ \text{Donc } gg - xx = ff - ee - 2ex - xx. \\ gg = ff - ee - 2ex. \\ gg + ee = ff - 2ex \\ gg + ee + 2ex = ff. \end{array}\right\}$$

Donc [2] $gg - xx = ff - ee - 2ex - xx$.

Si on ajoûte xx de part & d'autre du ſigne d'egalité de cette derniere équation, [3] on aura $gg = ff - ee - 2ex$.

Si on ajoûte enſuite ee de part & d'autre du ſigne d'egalité de la derniere équation, on aura $gg + ee = ff - 2ex$.

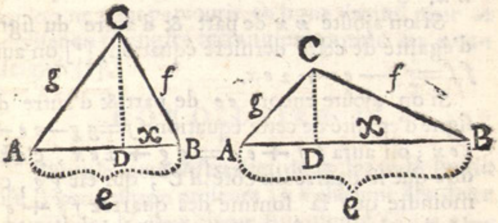
Enfin ſi on ajoûte $2ex$ encore de part & d'autre de la derniere équation $gg + ee = ff - 2ex$; on aura $gg + ee + 2ex = ff$. C'eſt à dire que le quarré du côté CB, qui eſt ff, eſt égal à la ſomme des quarrez $gg + ee$ des deux autres côtez, & à deux rectangles ex, compris ſous $AB = e$ & ſous $AD = x$. Donc le quarré ff du côté CB ſurpaſſe la ſomme des quarrez $gg + ee$ des deux autres côtez AC & AB de la valeur de deux rectangles compris ſous AB & AD, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*
[2] *Ax. 18. Gen.*
[3] *Ax. 4. Gen.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit le triangle ACB dont le côté AC est opposé à l'angle aigu ABC ; & du sommet C



d'un autre angle ACB soit menée la ligne CD perpendiculairement au côté opposé AB : je dis que le quarré du côté AC est moindre que la somme des quarrez des deux autres costez AB & CB, de la valeur de deux rectangles dont chacun est compris sous le côté AB & sous la ligne DB terminée par le sommet B de l'angle aigu & par la perpendiculaire CD.

Si du quarré de BC, qui est ff, on retranche le quarré de DB qui est xx, on aura [1] $ff - xx = CD^2$. & si du quarré de AC, qui est gg, on retranche $ee - 2ex + xx$ qui est le quarré de $e - x = AD$ partie du côté AB, on aura [1] encore $gg - ee + 2ex - xx = CD^2$.

[1] Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.

$$\left\{\begin{array}{l} ff - xx = CD^2 \\ gg - ee + 2ex - xx = CD^2 \\ \text{Donc } ff - xx = gg - ee + 2ex - xx. \\ ff = gg - ee + 2ex \\ ff + ee = gg + 2ex \end{array}\right\}$$

Donc [1] $ff - xx = gg - ee + 2ex - xx$.

Si on ajoûte xx de part & d'autre du signe d'égalité de cette derniere équation; [2] on aura $ff = gg - ee + 2ex$.

Si on ajoûte encore ee de part & d'autre du signe d'egalité de cette équation $ff = gg - ee + 2ex$; on aura $ff + ee = gg + 2ex$, c'est à dire que le quarré du côté AC, qui est gg, est moindre que la somme des quarrez $ff + ee$ des deux autres côtez AB & CB, de la valeur des deux rectangles ex, dont chacun est compris sous le côté $AB = e$ & sous la ligne $DB = x$, *ce qu'il falloit demontrer.*

COROLLAIRE I.

Si de la derniere équation $gg + ee + 2ex = ff$ de la demonstration de la premiere Partie de la proposition presente on retranche $gg + ee$ de part & d'autre du signe d'egalité, il restera $2ex = ff - gg - ee$. Enfin si on divise chacune des deux parties de cette derniere equation par $2e$, on aura pour quotiens [3] egaux $x = \frac{ff - gg - ee}{2e}$. Ce qui donne une methode pour connoître la longueur de la ligne, ou par-

[1] *Ax.* 18. *gen.*
[2] *Ax.* 4. *Gen.*
[3] *Prop.* 6. *Algeb.*

tie AD, lorſqu'on connoît la longueur de chacun des côtez d'un triangle obtuſangle ; & connoiſſant la ligne AD & le côté AC, on connoîtra [1] la perpendiculaire CD, & enfin [2] on connoîtra la ſurface du triangle obtuſangle ABC ; ce qui eſt fort commode lorſque cette ſurface triangulaire eſt, par exemple, un Mareſt, un Etang, un Bois, un Village, &c. qu'on ne peut parcourir en ligne droite pour le diviſer en triangles rectangles comme on a enſeigné [3].

COROLLAIRE II.

Dans la demonſtration de la ſeconde Partie de la propoſition preſente, ſi à chacune des deux parties de la penultiéme équation $ff = gg - ee + 2ex$ on ajoûte ee, & ſi de chacune de ces deux mêmes parties on retranche gg ; on aura $ff + ee - gg = 2ex$. Enfin ſi on diviſe l'une & l'autre des deux parties de cette derniere équation par $2e$, on aura [4] les quotients egaux $x = \frac{ff + ee - gg.}{2e}$ Lorſqu'on connoît la longueur de chacun des trois coſtez d'un triangle rectiligne ABC, cette derniere équation enſeigne la maniere de connoître la longueur de la partie $DB = x$; & enſuite il eſt [1] facile de connoître la hauteur de ce triangle qui eſt la perpendi-

[1] *Part. 2. Cor. 1. Prop. 57. Geo.*
[2] *Cor. 1. Prop. 40. Geo.*
[3] *Cor. 2. Prop. 40. Geo.*
[4] *Prop. 6. Algeb.*

culaire *C D*. Et enfin [1] on connoîtra la valeur de la ſurface.

La metode qu'on vient d'enſeigner dans les Corollaires precedens pour trouver la meſure de la ſurface, ou de l'aire d'un triangle rectiligne dont on connoît ſeulement chacun des trois côtez, ſatisfait à un problême fort utile dans la Geometrie pratique. Car quand on peut meſurer les coſtez d'un triangle, on peut toujours connoître ſa ſurface plus facilement, plus exactement & avec plus de briéveté par cette metode tres-ſimple, que par toute autre; puiſque pour cela il n'eſt pas neceſſaire de ſe ſervir d'inſtrument diviſé en degrez, ni de connoître aucune meſure d'angle, ni de l'uſage des tables de Sinus; une ſeule toiſe ou chaine êtant ſuffiſante pour toute l'operation.

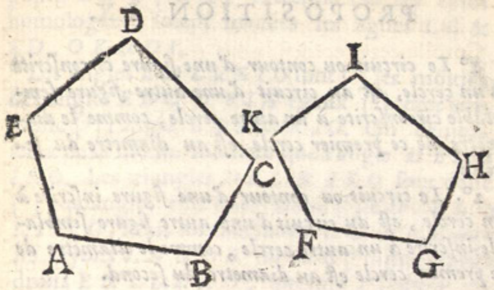
PROPOSITION LIX.

Les circuits de deux figures ſemblables ſont entr'eux comme un côte de l'une eſt à un côté homologue de l'autre.

DEMONSTRATION.

Soient les figures ſemblables *A B C D E*, & *F G H I K*: je dis que le circuit de la premiere eſt au circuit de la ſeconde, comme un côté de cette premiere, par exemple *A B*, eſt à un côté homologue *F G* de la ſeconde. Car,

[1] *Cor. 1. Prop. 40. Geo.*



puisque [1] ces figures sont semblables, [2] on aura $AB . FG :: BC . GH$. & $BC . GH :: CD . HI$. & $CD . HI :: DE . IK$, enfin $DE . IK :: EA . KF$. la somme de tous les antece-

$$\left\{\begin{array}{l} AB . FG :: BC . GH :: CD . HI :: \\ \quad DE . IK :: EA . KF. \\ \text{Donc } AB+BC+CD+DE+EA . FG+ \\ \quad GH+HI+IK+KF :: AB . FG. \\ \text{ou } ABCDE . FGHIK :: AB . FG. \end{array}\right\}$$

cedens $AB + BC + CD + DE + EA$ est donc [3] à la somme de tous les consequents $FG + GH + HI + IK + KF$, comme un antecedent AB est à un consequent FG. C'est à dire, le contours ou circuit $ABCDEA$ est au circuit $FGHIK$ comme le côté AB est au côté FG qui lui est homologue, *ce qu'il falloit démontrer*.

[1] *Supposit.* [2] *Part. 2. Def. 60. Geo.*
[3] *Prop. 15. Algeb.*

PROPOSITION LX.

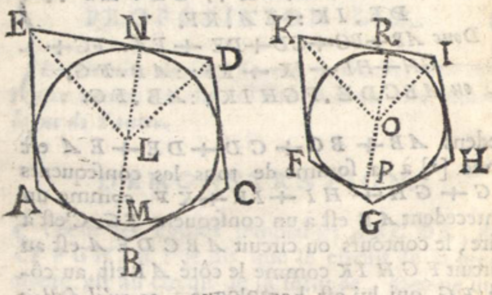
1° Le circuit ou contour d'une figure circonscrite à un cercle, est au circuit d'une autre figure semblable circonscrite à un autre cercle, comme le diametre de ce premier cercle est au diametre du second.

2°. Le circuit ou contour d'une figure inscrite à un cercle, est au circuit d'une autre figure semblable inscrite à un autre cercle, comme le diametre de ce premier cercle est au diametre du second.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les figures semblables *ABCDE* & *FGHIK* circonscrites à des cercles : je dis



que les circuits *ABCDE* & *FGHIK* sont entr'eux comme les diametres *MN* & *PR* des cercles ausquels ces figures sont circonscrites. Pour le demontrer, aux poins d'attouchemens *N* & *R* de deux côtés homologues soient menés les dia-

metres

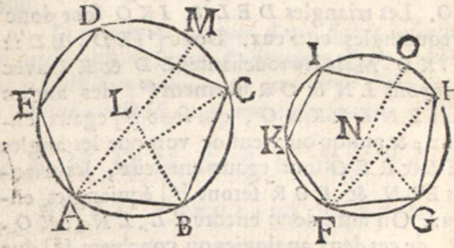
metres *M N* & *P R*; & des centres *L* & *O* par les points *E* & *D*, *K* & *I* extremités de ces côtés homologues, ſoient menées les lignes *L E* & *L D*, *O K* & *O I*.

Les angles *E D L* & *K I O* ſont [1] les moitiez des angles *E D C* & *K I H* egaux [2] entr'eux. Donc [3] l'angle *E D L* = *K I O*. On demontrera de la même maniere que l'angle *D E L* = *I K O*. Les triangles *D E L* & *I K O* ſont donc [4] equiangles entr'eux. Donc [5] *E D . E L* :: *K I . K O*. Mais les touchantes *E D* & *K I* avec les rayons *L N* & *O R* forment [6] des angles droits *E N L* & *K R O*, qui ſont [7] egaux entr'eux; & puiſqu'on vient de voir que les angles *N E L* & *R K O* ſont egaux entr'eux, les triangles *E L N* & *K O R* ſeront [4] équiangles entr'eux. On aura donc encore *E L . L N* :: *K O . O R*. de ces deux analogies on concluera [8] que *E D . L N* :: *K I . O R*. Donc [9] *E D . K I* :: *L N . O R*. Or [10] le contours *A B C D E . F G H I K* :: *E D . K I*. Dans l'analogie precedente au lieu du raport qui eſt entre *E D* & *K I*, ſubſtituant ſon égal, on aura *A B C D E . F G H I K* :: *L N . O R* :: 2 *L N* = *M N* [11]. 2 *O R* = *P R*. Donc enfin *ABCDE . FGHIK* :: *M N . P R* [12], *ce qu'il falloit demontrer*.

[1] *Cor.* 3. *Prop.* 29. *Geo.* [2] *Def.* 60. *Geo.*
[3] *Ax.* 12. *Gen.* [4] *Cor.* 4. *Prop.* 31. *Geo.*
[5] *Part.* 1. *Prop.* 52. *Geo.* [6] *Prop.* 12. *Geo.*
[7] *Cor.* 3. *Prop.* 20. *Geo.*
[8] *Part.* 1. *Cor. Prop.* 12. *Algeb.*
[9] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[10] *Prop.* 59. *Geo.*
[11] *Cor. Def.* 31. *Geo.*
[12] *Prop.* 5. *Algeb.*

DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les figures ſemblables *A B C D E* & *F G H I K* inſcrites à des cercles : je dis que les circuits *A B C D E* & *F G H I K* ſont en-



tr'eux comme les diametres *A M* & *F O* des cercles auſquels ces figures ſont inſcrites. Pour le demontrer, par les extremitez *A* & *F* de deux côtez homologues ſoient menez les diametres *A M* & *F O*, & par les autres extremitez de ces mêmes côtez ſoient menez les rayons *BL* & *GN*. Enfin par une des extremitez *B* ou *A* d'un de ces côtez homologues ſoit menée une ligne *A C* terminée au ſommet d'un des autres angles prochains ; & par le point *F* extremité d'un autre côté homologue on menera une pareille ligne *F H*.

Les triangles *A B C* & *F G H* ſont [1] ſemblables, de ſorte que les angles *A C B* & *F G H* qui ont leurs ſommets dans les circonferences de cercles, ſont égaux entr'eux. Les angles *A L B* & *F N G* dont les ſommets ſont dans les centres des

[1] *Cor. 1. Prop. 52. Geo.*

mêmes cercles, sont donc [1] aussi égaux entr'eux, chacun étant [2] double des autres angles égaux *A C B* & *F H G*. Or à cause de l'égalité des rayons *A L* & *B L* d'un même cercle, & des rayons *F N* & *N G*; on aura *A L . L B* : : *F N . N G*; & [3] les triangles *A B L* & *F G N* seront semblables. Donc [4] *A B . F G* : : *A L . F N*. Mais [5] *A B C D E . F G H I K* : : *A B . F G*. Donc [6] *A B C D E . F G H I K* : : *A L . F N* : : 2 *A L* = *A M* . 2 *F N* = *F O* [7]. Enfin *ABCDE. F G H I K* : : *A M . F O*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Puisque [8] les cercles sont des figures semblables, infinitilateres, circonscrites ou inscrites à eux-mêmes, il est [9] évident que les circonferences des cercles sont entr'elles comme leurs diametres.

PROPOSITION LXI.

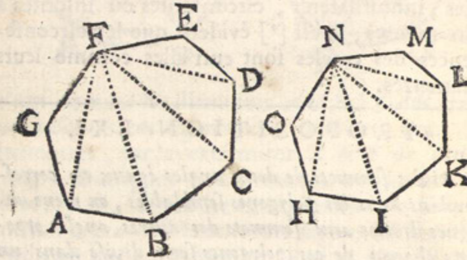
Si des sommets de deux angles égaux & correspondans dans les polygones semblables, on mene des lignes droites aux sommets des autres angles opposez; chacun de ces polygones sera divisé dans un nombre égal de triangles semblables.

[1] *Ax. 6. Gen.*
[2] *Cor. 6. Prop. 27. Geo.*
[3] *Cor. 1. Prop. 52. Geo.* ou *Cor. 5. Prop. 34. Cor. 2. Prop. 34. & Ax. 12. Gen.*
[4] *Part. 2. def. 60. Algeb.*
[5] *Prop. 59. Geo.*
[6] *Cor. 3. def. 12. Algeb.*
[7] *Prop. 5. Algeb.*
[8] *Cor. Prop. 47. Geo.*
[9] *Prop. pres.*

DEMONSTRATION.

Soient les polygones ſemblables *ACEG* & *HKMO*; ſi des ſommets *F* & *N* des angles égaux *EFG* & *MNO* on mene des lignes droites *FA*, *FB* &c. *NH*, *NI* &c. aux ſommets des autres angles oppoſés: Je dis 1°. qu'un de ces polygones contiendra autant de triangles, que l'autre; 2°. que les triangles d'un de ces polygones ſeront ſemblables aux triangles de l'autre, chacun à chacun.

Lorſque du ſommet *F* on mene des lignes droites aux ſommets des angles oppoſés, les



deux prochains *E* & *G* en êtant exceptés; on partage le polygone en autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux de ces côtés, quelque nombre qu'il y en ait. C'eſt à dire que s'il y a cinq côtés on le partage en trois triangles; s'il y en a huit, on le partage en ſix, &c. Le nombre des côtés ſurpaſſe de deux celui des triangles qui en font partie: parcequ'il eſt neceſſaire que les deux côtés *FG* & *FE* qui comprennent cet angle *F*, ſoient joints avec les côtés ſuivans *DE* & *AG* pour former des triangles avec les lignes

F A & *F D* qu'on a menées : parceque *F D* & *D E*, ou *F A* & *A G*, ne peuvent ſeules terminer un eſpace. Et ces deux côtés *F G* & *F E* étant retranchés du nombre des côtés du polygone, le reſte eſt égal au nombre des triangles. Car alors chacun de ces triangles a pour baſe un côté du polygone. Dans les polygones ſemblables il y a un pareil nombre de côtés ; puiſque [1] chaque côté de l'un eſt proportionnel à chaque côté de l'autre. Retranchant 2 du nombre de ces côtés, de part & d'autre; les reſtes égaux [2], exprimeront le nombre des triangles, égal dans chaque polygone.

Puiſque les figures ſont [3] ſemblables, [1] on a *F G . G A* : : *N O . O H* ; & outre cela l'angle *F G A* = *N O H*. Les triangles *G F A* & *O H N* ſont donc [4] ſemblables entr'eux ; partant *F A*. *G A* : : *N H . O H*, & l'angle *G A F* = *OHN*. Mais [1] *G A . A B* : : *O H . H I*, & l'angle *G A B* = *O H I*. On concluera donc de ces deux

$$\left\{\begin{array}{l} \quad FA\,.\,GA\,.\,AB \\ \quad NH\,.\,OH\,.\,HI. \\ \textit{Donc}\ FA\,.\,AB :: NH\,.\,HI\,.\,\&c. \end{array}\right\}$$

dernieres analogies [5] que *FA . AB* : :*NH . HI*, or [6] l'angle *F A B* = *N H I*. Les triangles *AFB* & *H N I* ſont [4] donc ſemblables. On démontrera de la même maniere que les triangles *B C F* & *I K N*, *F C D* & *N K L*, &c. ſont ſemblables. Les polygones ſemblables *A C D F*

[1] *Def. 60. Geo.* [2] *Ax. 9. Gen.*
[3] *Suppoſit.* [4] *Cor. 1. Prop. 52. Geo.*
[5] *Part. 1. Cor. Prop. 12. Algeb.*
[6] *Ax. 9. Gen.*

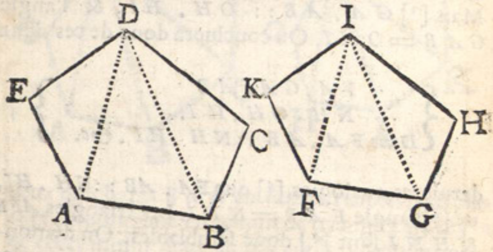
& *HKMO* seront donc divisés chacun en un pareil nombre de triangles, & chaque triangle d'un de ces polygones, sera semblable à chaque triangle correspondant de l'autre polygone, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXII.

Les polygones semblables sont entr'eux, comme les quarrés de leurs côtés homologues.

DEMONSTRATION

SOient les polygones semblables *ABCDE* & *FGHIK* : je dis que *ABCDE* est à *FGHIK*, comme le quarré de *DC*, par exemple, est au



quarré de *IH*. Pour le démontrer, des sommets *D* & *I* des angles égaux *EDC* & *KIH* soient menées aux sommets des autres angles les lignes *DA*, *DB*; *IF*, *IG*.

Les triangles *DEA* & *IKF*, *ABD* & *FGI*, *DBC* & *IGH*, seront [1] semblables.

[1] *Prop.* 61. *Geo.*

Or [1] *DEA . IKF* : : *D Aq . I Fq* ; pareillement *ABD . FGI* : : *D Aq . I Fq* . Donc *DEA . IKF* : : *ABD . FGI*.

Enfin *ABD . FGI* : : *DBq . IGq* . & *DBC . IGH* : : *DBq . I Gq*. Donc [2] *ABD . FGI* : : *DBC . IGH*.

On trouve donc cette ſuite de raports égaux *DEA . IKF* : : *ABD . FGI* : : *DBC . IGH*. La ſomme des triangles antecedens, dont eſt composée la ſurface *ABCDE*, eſt [3] donc à la ſomme des conſequens, dont eſt composée la ſurface *FGHIK*, comme le triangle *DBC* eſt au triangle *IGH*. Mais [1] le triangle *DBC* eſt à ſon ſemblable *IGH*, comme le quarré de *DC* eſt au quarré de *IH*. Les ſurfaces des polygones ſemblables *ABCDE* & *FGHIK* ſont donc auſſi entr'elles comme les quarrés des côtés homologues *DC* & *IH*, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEA . IKF : : A Dq . I Fq.
ABD . FGI : : A Dq . I Fq.
Donc DEA . IKF : : ABD . FGI.
ABD . FGI : : DBq . IGq.
DBC . IGH : : DBq . I Gq.
Donc ABD . FGI : : DBC . IGH.
Donc DEA . IKF : : ABD . FGI : : DBC . IGH.
Donc, DEA + ABD + DBC . IKF + FGI + IGH : : DBC IGH : : DCq . IHq.
Donc ABCDE . FGHIK : : DCq . IHq.

On trouvera auſſi par un raiſonnement pa-

[1] *Part. 2. Prop. 56. Geo.*
[2] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.*
[3] *Prop. 15. Algeb.*

reil au precedent, que les trapeſoïdes & trapeſes ſemblables, ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & ce qui eſt dit dans les Corollaires ſuivans leur convient comme aux polygones.

COROLLAIRE I.

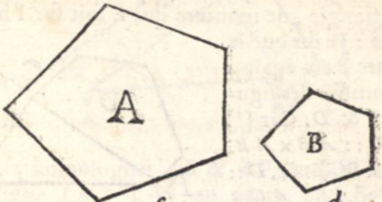
Le rapport d'un polygone à un autre polygone ſemblable, eſt doublé du rapport d'un côté de ce premier à un côté homologue du ſecond. Car [1] les polygones ſemblables ſont entr'eux, comme les quarrés de leurs côtés homologues; & [2] les quarrés de ces côtés homologues ſont entr'eux, en raiſon doublée de celle qui eſt entre ces mêmes côtés.

COROLLAIRE II.

Si de deux figures ſemblables, la premiere a chacun de ſes côtés double de chacun de ceux de la ſeconde, la ſurface de cette premiere figure ſera quadruple de la ſurface de la ſeconde. Parceque la premiere ſera [1] à la ſeconde, comme le quarré d'un des côtés de cette premiere eſt au quarré d'un côté homologue de la ſeconde; & le quarré du côté de cette premiere ſera quadruple du quarré homologue de la ſeconde. Soient pour exemple deux figures ſemblables *A* & B; j'appellerai *c* un côté de la premiere figure *A*, & *d* un côté homologue de la ſeconde figure *B*. Donc [1] $A . B :: cc . dd$. Or

[1] *Prop. Preſ.*
[2] *Cor. Prop.* 18. *Algeb.*

[1] le quarré de c eſt au quarré de d, comme la premiere de trois lignes continuement proportionnelles $\div c \,.\, d \,.\, f$. eſt à une troiſiéme f; le



côté c eſtant la premiere, & la ſeconde eſtant le côté d. C'eſt à dire que $cc \,.\, dd :: c \,.\, f$. Mais puiſque [2] c eſt double de d, on aura pareillement d double de f. Donc c ſera double du double de f, c'eſt à dire quadruple de f. Donc cc ſera quadruple de dd. Donc enfin la figure A ſera [3] auſſi quadruple de B.

Si chaque côté d'une de ces deux figures ſemblables eſt triple de chacun de la ſeconde; la premiere ſera noncuple de la ſeconde, &c. De ce qu'on vient de démontrer on peut encore conclure que les figures ſemblables ne ſont pas entr'elles comme leurs côtés; puiſque chaque côté de l'une eſtant double de chaque coté de l'autre; l'une eſt quadruple de l'autre, &c.

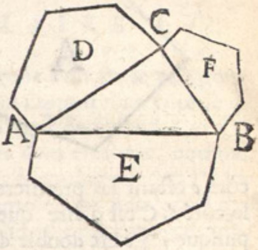
COROLLAIRE III.

Une figure qui aura pour côté l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, eſt égale aux deux figures qui lui ſeront ſemblables, & qui auront les

[1] *Cor. Prop.* 19. *Algeb.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. Preſ.*

deux autres côtés de ce triangle pour côtés homologues à ce côté de la premiere.

Soit le triangle rectangle *ABC*, & les figures semblables *E*, *F*, *D*, décrites sur les côtés de ce triangle, de maniere que E soit sur l'hypotenuse : Je dis que la figure E est égale à la somme des figures *F* & *D*. Car [1] $E . F :: AB \times AB . BC \times BC$, & $E . D :: AB \times AB . AC \times AC$. Donc [2] $E . F + D :: AB \times AB . CB \times CB + AC \times AC$. Or [3] $AB \times AB = CB \times CB + AC \times AC$. Donc $E = F + D$.

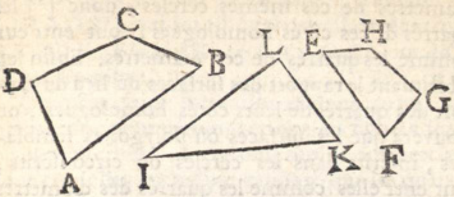


$$\left\{ \begin{array}{l} E . F :: ABq . BCq. \\ E . D :: ABq . ACq. \\ \textit{Donc } E . D + F :: ABq . BCq + ACq. \\ \textit{Mais } ABq = BCq + ACq. \\ \textit{Donc } E = D + F. \end{array} \right\}$$

COROLLAIRE IV.

Pour décrire une figure égale & semblable aux deux figures *ABCD*, & *EFGH* qui sont semblables aussi entr'elles : il faut [4] faire un angle droit *ILK*, & en faire les côtés *IL* & *LK* égaux

[1] *Prop. Pres.*
[2] *Prop.* 14. *Algeb.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 57. *Geo.*
[4] *Cor.* 7. *Prop.* 27. *Geo.*



aux côtés homologues *AB* & *EF*; enſuite mener la ligne *IK*. Si [1] on décrit une figure ſemblable aux deux figures precedentes, qui ait pour côté *IK* homologue aux autres côtés *AB* & *EF* des autres figures, cette derniere figure ſera [2] égale aux deux precedentes. On peut faire par ce moyen l'addition des figures ſemblables.

PROPOSITION LXIII.

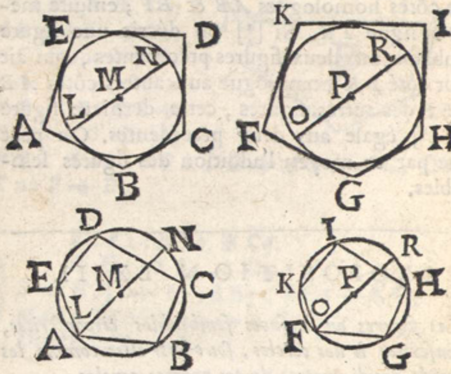
Les figures ou ſurfaces ſemblables circonſcrites, ou inſcrites à des cercles, ſont entr'elles comme les quarrés des diametres de ces mêmes cercles.

DEMONSTRATION

LEs figures ſemblables ſont[3]entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Et les quarrés des côtés homologues des figures circonſcrites ou inſcrites à des cercles, ſont entr'eux comme les quarrés des diametres. Car les

[1] *Cor. 3. Prop. 52. Geo.*
[2] *Cor. 3. Prop. Preſ.*
[3] *Prop. 62. Geo.*

côtés homologues sont [1] entr'eux comme les diametres de ces mêmes cercles ; donc [2] les quarrés de ces côtés homologues, sont entr'eux comme les quarrés de ces diametres. Enfin en substituant le rapport des surfaces au lieu du rapport des quarrés de leurs côtés homologues, on trouvera que les surfaces ou polygones semblables, inscrits dans les cercles ou circonscrits, sont entr'elles comme les quarrés des diametres



de ces mêmes cercles. Soient les figures semblables $ABCDE$ & $FGHIK$ circonscrites, ou inscrites à des cercles dont les diametres sont LN & OR : Je dis que $ABCDE \,.\, FGHIK :: LN^2 \,.\, OR^2$. Car $ABCDE \,,\, FGHIK :: ED^2 \,.\, KI^2$. Mais puisque $ED \,.\, KI :: LN \,.\, OR$, je trouve que $ED^2 \,.\, KI^2 :: LN^2 \,.\, OR^2$. Dans la

[1] *Demonst. de la prop. 60. Geo. & Prop. 5. Algeb.*
[2] *Part. 1. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.*

premiere

premiere analogie, au lieu du raport qui eſt entre ED^2 & KI^2, en ſubſtituant le rapport de LN^2 à OR^2, qui lui eſt égal; il eſt évident que $ABCDE . FGHIK :: LN^2 . OR^2$. *ce qu'il falloit démontrer.*

On peut faire un raiſonnement pareil au precedent, pour démontrer que les figures ſemblables inſcrites, ou circonſcrites à des cercles, ſont entr'elles en même rapport que les quarrés des rayons de ces mêmes cercles; puiſque leurs côtés homologues ſont entr'eux comme les rayons des cercles auſquels elles ſont inſcrites ou circonſcrites.

COROLLAIRE I.

Les figures ſemblables inſcrites ou circonſcrites à des cercles, ſont entr'elles en raiſon doublée de celle de leurs diametres. Car ces figures ſemblables ſont [1] entr'elles comme les quarrés des diametres des cercles auſquels elles ſont inſcrites ou circonſcrites, & ces quarrés ſont [2] entr'eux en raiſon doublée de celle de ces mêmes diametres qui en ſont racines.

COROLLAIRE II.

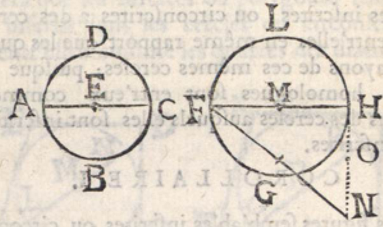
Les ſurfaces des cercles ſont entr'elles comme les quarrés des diametres de ces mêmes cercles. Car les cercles ſont [3] des figures ſemblables d'une infinité de côtés, inſcrites & circonſcrites à eux-mêmes; & ces figures ſemblables ſont [1] entr'elles comme les quarrés de leurs diametres.

[1] *Prop. Preſ.*
[2] *Cor. Prop. 18. Algeb.*
[3] *Cor. Prop. 47. Geo.*

On concluera donc aussi [1] que les cercles sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs diametres.

COROLLAIRE III.

Pour décrire un cercle égal à deux autres cercles ; par exemple, à *ABCD* & *FGHL* ; par



l'extremité *H* d'un des diametres de ces cercles il faut mener la perpendiculaire *HN* égale au diametre *AC* de l'autre cercle, & ensuite mener la ligne *FN* : Je dis que le cercle qui aura pour diametre la ligne *FN*, sera égal aux cercles *ABCD* & *FGHL*, pris ensemble. Car [2] le cercle dont le diametre est *FN*, sera aux cercles *ABCD* & *FGHL* comme le quarré de ce diametre *FN* aux quarrés des diametres *FH* & *HN* ; & [3] le quarré du diametre $FN = FH^2 + HN^2$.

Au lieu de faire $HN = AC$, on pouvoit faire $HO = EC$, & alors la ligne menée du point *M* au point *O* auroit été le rayon du cercle égal [4] aux deux cercles *ABCD* & *FGHL*.

[1] *Cor. 1. Prop. Pres.*
[2] *Cor. 2. Prop. Pres.*
[3] *Part. 1. Prop. 57. Geo.*
[4] *Prop. Pres. & Part. 1. Prop. 57. Geo.*

PROPOSITION LXIV.

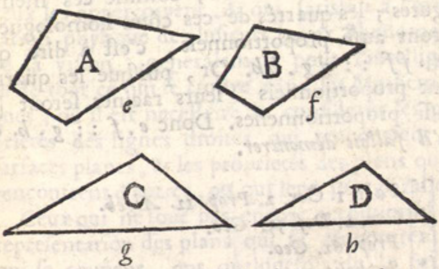
1°. *Si quatre figures ſemblables ont pour côtés homologues chacune de quatre lignes proportionnelles; ces quatre figures ſeront auſſi proportionnelles entr'elles.*

2°. *Reciproquement ſi quatre figures ſont ſemblables & proportionnelles entr'elles; les quatre lignes qui en ſont côtés homologues, ſont auſſi proportionnelles entr'elles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les quatre lignes proportionnelles *e* . *f* : : *g* . *h*, dont la premiere *e* eſt côté de la figure *A*, & la deuxiéme *f* eſt côté homolo-



gue de la figure *B* ſemblable à la premiere; la troiſiéme *g* eſt côté de la figure *C*, & enfin la quatriéme *h* eſt côté homologue de la figure *D* qui eſt ſemblable à la figure *C*: Je dis que *A* . *B* : : *C* . *D*. Car les quarrés de ces lignes seront [1] proportionnels entr'eux ; puisque le quarré d'une ligne est [2] cette ligne multipliée par elle-même. Mais les figures semblables qui auront ces lignes pour côtés homologues, seront [3] entr'elles comme les quarrés de ces mêmes lignes *e*, *f*, *g*, *h*. Ces figures semblables seront donc aussi proportionnelles, *ce qu'il falloit démontrer*.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les quatre figures semblables & proportionnelles *A*, *B*, *C* & *D*, c'est à dire que *A . B :: C . D*. Je dis que leurs côtés homologues sont proportionnels, par exemple, que *e . f :: g . h*. Car, puisque [4] *A . B :: C . D*. & que [3] les quarrés des côtés homologues de ces figures sont entr'eux, comme ces mêmes figures ; les quarrés de ces côtés homologues, seront aussi proportionnels, c'est à dire que *ee . ff :: gg . hh*. Or, puisque les quarrés sont proportionnels, leurs racines seront [5] aussi proportionnelles. Donc *e . f :: g . h*. *Ce qu'il falloit démontrer*.

[1] *Part. 1. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.*
[2] *Cor. 2. Def. 53. Geo.*
[3] *Prop. 62. Geo.*
[4] *Supposit.*
[5] *Part. 2. Cor. 2. Prop. 12. Algeb.*

DE LA SITUATION des lignes droites comparée à celle des plans; & de la situation des plans comparée à celle d'autres plans.

LES propositions suivantes sont d'un grand usage pour bien entendre la Trigonometrie Spherique, qui est un des principaux fondemens de l'Astronomie; pour la theorie & la pratique de la Gnomonique ou de la science des Cadrans solaires; pour la Perspective, c'est à dire l'art de representer les objets tels que nos yeux les apperçoivent, & qui satisfait à l'explication physique de plusieurs beaux Phenomenes de la vision; generalement pour l'intelligence de tout ce qui se trouve dans les Mathematiques, où il est necessaire de considerer les proprietés des lignes droites qui rencontrent des surfaces planes, & les proprietés des plans qui en rencontrent d'autres, ou qui leur sont paralleles.

Ceux qui ne sont pas encore accoûtumés à la representation des plans qui se rencontrent ou qui se coupent, ont quelquefois de la peine à découvrir les verités qu'on y propose. Mais lorsqu'ils y font un peu d'attention, & qu'ils persévérent, la difficulté se dissipe peu à peu, & ils ne trouvent plus qu'évidence. De sorte que pour achever heureusement l'étude de ces

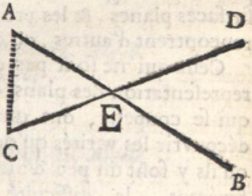
Elemens, & en tirer un fruit avantageux, il ne s'agit que d'avoir un peu de fermeté; de faire une lecture frequente de ce qui d'abord peut paroître obscur; de former la resolution de vaincre courageusement tout obstacle. Et alors on connoîtra par sa propre experience le bon succés de son travail. On peut assurer qu'il n'y a rien dans toute la suite capable d'arrêter un esprit un peu laborieux; de sorte qu'aprés avoir fini ces Elemens, en continuant avec la même vigueur à s'appliquer à d'autres traités de Mathematiques, il aura le plaisir, non seulement d'apprendre ce que les autres sçavent; mais même il se trouvera en état d'inventer.

PROPOSITION LXV.

Deux lignes qui se coupent, sont dans le même plan.

DEMONSTRATION.

SOient les deux lignes *AB* & *CD* qui se coupent au point *E*: je dis que ces deux lignes sont dans le même plan. Car on peut considerer une ligne droite, menée du point *A* au point *C*, qui soit ensuite mûë vers *E* transversalement sur les lignes *AE* & *CE*. Alors [1] on aura décrit le plan triangulaire



ACE dans lequel sont les lignes partiales *AE*

[1] *Cor. 1. Def. 9. Geo.*

& *C E*. Donc [1] les lignes entieres *A B* & *C D* seront toujours dans le même plan, c'est à dire que si on prolonge le plan *A C E* il passera par le plan *E B D* dans lequel se trouvent les autres parties *E B* & *E D* des lignes *A B* & *C D*, *ce qu'il falloit demontrer*.

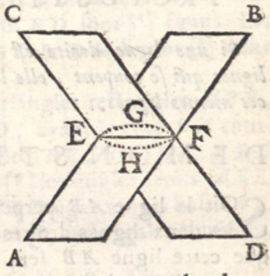
PROPOSITION LXVI.

Si deux plans se coupent, leur commune section sera 1° une ligne ; 2°, une ligne droite.

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les deux plans *A B* & *C D* qui se coupent en *E F* : Je dis que leur commune section *E F* est une ligne. Car si cette commune section *E F* n'étoit pas une ligne seulement, & que ce fût, par exemple, une surface ; il faudroit que quelqu'un des deux plans *A B* & *C D* eût de l'épaisseur ou profondeur, ce qui est [2] contre la définition de la surface. Donc la commune section *E F* des deux plans *A B* & *C D* est une ligne, *ce qu'il falloit démontrer*.



[1] *Cor. def.* 10. *Geo.* [2] *Def.* 9. *Geo.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la ligne *E F* commune ſection des deux plans *A B* & *C D* : je dis que cette ligne *E F* eſt une ligne droite. Car des deux mêmes points *E* & *F* de cette ligne *E F* ſi on mene dans le plan *C D* une ligne droite *E G F*, & dans le plan *A B* encore une ligne droite *E H F*, il eſt conſtant [1] que ces deux lignes droites ſe confondront en une ſeule, laquelle ſe trouvera en même temps dans les deux plans. Or il n'y a que la ligne qui eſt la commune ſection de deux plans, qui ſe trouve en même temps dans les deux plans. Donc cette commune ſection eſt une ligne droite, *ce qu'il falloit démontrer*.

PROPOSITION LXVII.

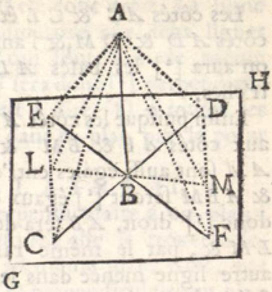
Si une ligne droite eſt perpendiculaire à deux lignes qui ſe coupent, elle le ſera auſſi au plan de ces mêmes lignes.

DEMONSTRATION

SOit la ligne *A B* perpendiculaire à chacune des deux lignes droites *C D* & *E F* : Je dis que cette ligne *A B* ſera auſſi perpendiculaire au plan *G H*, c'eſt à dire [2], à toutes les lignes menées dans ce plan par le point *B*, par exem-

[1] *Cor*. 3. *Ax*. 2. *Geo*.
[2] *Def*. 20. *Geo*.

ple à la ligne *LBM*. Pour le démontrer soient prises à volonté les lignes égales *BC*, *BF*, *BD*, *BE*; & par leurs extremités soient menées les lignes droites *EC* & *FD*. Du point *A* aux points *E*, *L*, *C*, *F*, *M*, & *D*, il faut mener autant de lignes droites.



Puisque les lignes *BE* & *BC* sont [1] égales aux lignes *BF* & *BD*, & les angles *EBC* & *DBF* étant [2] égaux entr'eux; les bases *EC* & *DF* seront [3] égales. Les angles *ECB* & *BDF* seront [4] égaux entr'eux.

Les angles *LBC* & *DBM* sont [2] égaux entr'eux. Les deux angles *LCB* & *LBC* seront donc égaux aux angles *BDM* & *DBM*. Outre cela les côtés *CB* & *BD* sont [1] égaux. Les lignes *CL* & *MD*, *BL* & *BM* seront [5] donc égales.

Mais les quatre triangles rectangles *ABE*, *ABC*, *ABF*, *ABD*, ayant le côté *BA* commun, & les autres côtés *BE*, *BC*, *BF*, & *BD* égaux [1], & encore [6] les angles droits *ABE*, *ABC*, *ABF*, & *ABD* égaux, les bases *AE*, *AC*, *AF*, *AD* seront [4] aussi égales entr'elles,

[1] *Par construction.*
[2] *Part. 1. Prop. 22. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
[4] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[5] *Cor. 4. Prop. 31. & Cor. 2. Prop. 52. Geo.*
[6] *Cor. 3. Prop. 20. Geo.*

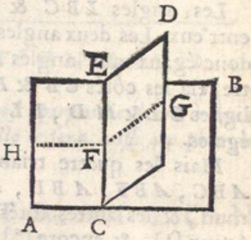
& puiſqu'on vient de voir que *C E* = *F D*, les angles *A D F* & *A C E*, c'eſt à dire, les angles *A D M* & *A C L* ſeront [1] égaux entr'eux.

Les côtés *A C* & *C L* étant donc égaux aux côtés *A D* & *D M*, & l'angle *A C L* = *A D M*; on aura [2] les baſes *A L* & *A M* égales entr'elles.

Enfin puiſque les côtés *A B* & *B L* ſont égaux aux côtés *A B* & *B M*, & que les baſes *A L* & *A M* ſont auſſi égales entr'elles, les angles *ABL* & *A B M* ſeront [1] égaux entr'eux. Chacun ſera donc [3] droit. *A B* ſera donc perpendiculaire à *L M* &, par le même raiſonnement, à toute autre ligne menée dans le plan *G H*, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Dans un des plans *A B* & *C D* perpendiculaires l'un à l'autre, ſi on mene la perpendiculaire *G F* à leur commune ſection *C E*; cette ligne *G F* ſera perpendiculaire à l'autre plan *A B*. Car ſi dans ce plan *A B* par le point *F* on mene la ligne *F H* perpendiculaire à *C E*, on aura l'angle



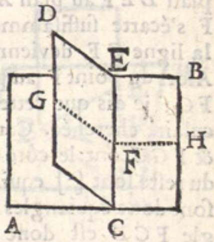
H F G qui ſera [2] l'angle des plans *A B* & *C D*. Et puiſque ces plans ſont [3] perpendiculaires

[1] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 3. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 21. Geo.*
[4] *Def. 18. Geo.*
[5] *Suppoſit.*

l'un à l'autre, & que des plans perpendiculaires l'un à l'autre, ſont ceux qui forment des angles droits; cet angle *H F G* eſt donc droit. La ligne *G F* ſera donc perpendiculaire aux deux lignes *F H* [1] & *F C* [2], qui ſont dans le même plan *A B*. La ligne *G F* ſera donc [3] perpendiculaire au plan *A B*, c'eſt à dire [4] à toutes les lignes droites menées dans ce plan par le point *F*.

COROLLAIRE II.

Si une ligne eſt perpendiculaire à un plan, tous les plans dans leſquels elle ſe trouvera ſeront perpendiculaires au même plan. Soit, par exemple, la ligne *F G* perpendiculaire au plan *A B*: je dis que le plan *C D* dans lequel ſe trouve cette perpendiculaire *F G*, eſt auſſi perpendiculaire au plan *A B*.



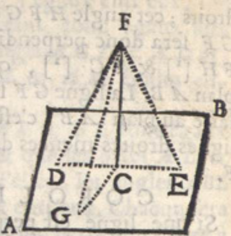
Car ſi on mene par le point *F* la ligne *F H* perpendiculaire à la commune ſection *C E*, l'angle *H F G* ſera [5] droit. Donc le plan *C D* ſera perpendiculaire au plan *A B*, puiſqu'ils formeront [1] l'angle droit *H F G*.

COROLLAIRE III.

La propoſition preſente donne une maniere de mener une ligne perpendiculaire à un plan par un point donné dans ce plan. Soit, par

[1] *Def. 14. Geo.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. preſ.*
[4] *Def. 20. Geo.*
[5] *Def. 20. & Def. 14. Geo.*

exemple, le plan *A B* auquel il faille mener une perpendiculaire par le point *C*. Il faut mener dans ce plan *A B* & par le point *C* une ligne droite *D E*, & prendre de part & d'autre du point *C* les parties *C D* & *C E* égales entr'elles, & faire les lignes droites *D F* & *E F* d'une longueur prise à volonté



& égales entr'elles pour [1] construire le triangle Isoscele *D F E*. Ensuite par le point *C* il faut mener à volonté dans le plan *A B* la ligne *C G* égale à *C D*, ou à *C E*. Enfin on inclinera le plan *D E* F au plan *A B* jusqu'à ce que le point F s'écarte suffisamment du point *G* pour que la ligne *G* F devienne égale à *D* F, ou à *E* F. Alors du point F au point *C* on menera la ligne F*C* : je dis que cette ligne F *C* est la perpendiculaire cherchée. Car les triangles *D* F *C*, F*EC*, & F *G C* ont le côté *C* F commun, & à l'égard du reste sont [2] equilateraux l'un à l'autre. Ils sont donc équiangles [3] aussi l'un à l'autre. L'angle F *C D* est donc égal à F *C E*. Ces angles F *C D* & F *C E* sont donc [4] des angles droits. Donc F *C G* qui leur est [2] égal est aussi droit. Donc la ligne *C* F est [5] perpendiculaire aux lignes *D E* & *G C*. Donc [6] elle est perpendiculaire au plan *A B*.

[1] *Cor. 4. Prop. 35. Geo.* [2] *Par construction.*
[3] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[4] *Part. 1. Prop. 21. Geo.*
[5] *Def. 14. Geo.* [6] *Prop. pres.*

PROPOSITION

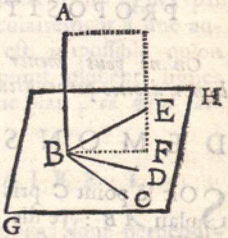
PROPOSITION LXVIII.

Si une ligne droite eſt perpendiculaire à trois autres qui ſe coupent en un même point, ces trois autres lignes ſont dans un même plan.

DEMONSTRATION

SOit la ligne droite *AB* perpendiculaire aux trois lignes droites *BC*, *BD* & *BE* : je dis que ces trois dernieres lignes ſont dans un même plan.

Les lignes *BC* & *BD* ſont [1] dans le même plan. Soient les lignes *BC* & *BD* dans le plan *GH* ; alors puiſque la ligne *AB* eſt [2] perpendiculaire aux lignes *BC* & *BD*, elle ſera [3] perpendiculaire à ce plan *GH*. S'il êtoit poſſible que la troiſiéme ligne *BE* ne fût pas dans le plan *GH* ; puiſque cette ligne *BE* rencontre la ligne *AB* au point *B*, conſiderons [1] un autre plan *AE* qui paſſe par la perpendiculaire *AB* & par cette ligne *BE*: il eſt évident que ce plan *AE* & le plan *GH* ſe rencontrant déja au point *B*, ſi on prolonge le plan *AE*, il coupera neceſſairement le plan



[1] *Prop. 65. Geo.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. 67. Geo.*

G H. Soit B F leur commune ſection. La ligne A B ſera [1] perpendiculaire à la commune ſection B F, parcequ'elle eſt perpendiculaire au plan G H; & la ligne B F ſera [2] perpendiculaire à A B. Mais [3] la ligne B E eſt auſſi perpendiculaire à la ligne A B. Il y auroit donc deux lignes B E & B F perpendiculaires à une même ligne A B dans un même plan A F, & par un même point B; ce qui eſt [4] impoſſible. Donc la ligne B E ne peut être dans un autre plan que G H. Donc la ligne B E eſt dans le même plan que les lignes B C & B D, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXIX.

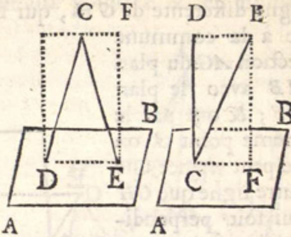
On ne peut mener par un même point deux lignes droites perpendiculaires à un même plan.

DEMONSTRATION

Soit le point C pris dans le plan ou hors le plan A B: Je dis qu'il eſt impoſſible qu'on puiſſe mener pluſieurs perpendiculaires, par exemple, C D, C E, à ce plan. Car [5] ſi on ſuppoſe qu'il paſſe un autre plan D F par ces deux lignes C D & C E, & que la commune ſection de ce dernier plan D F avec le plan A B ſoit D E dans la premiere figure, & C F dans

[1] *Def. 20. Geo.*
[2] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[3] *Suppoſit. & Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[4] *Cor. Prop. 4. Geo.*
[5] *Prop. 65. Geo.*

la seconde ; les lignes *C D* & *C E* seroient [1] perpendiculaires à cette commune section *D E* dans la premiere figure ; & dans la seconde *C D* & *C E* seroient aussi perpendiculaires à la commune section *C F*, le tout dans le même plan *DF* puisque les communes sections *D E* & *CF* sont en même temps dans le plan *D F* & dans le plan *A B*. Ce qui est [2] impossible. Car il faudroit que dans un même plan on pût mener deux lignes par un même point perpendiculairement à une autre ligne. Donc aussi il est impossible qu'on puisse mener d'un même point plusieurs lignes perpendiculaires à un même plan, *ce qu'il falloit démontrer.*

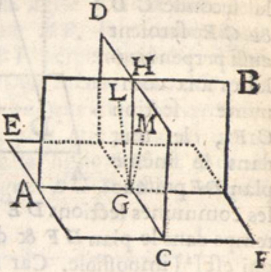


COROLLAIRE I.

*S*i deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un autre plan, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire. *S*oient les plans *A B* & *C D* dont chacun est perpendiculaire au plan *E F*; & soit *G H* la commune section de ces deux plans *A B* & *C D* : Je dis que cette commune section *G H* sera aussi perpendiculaire

[1] *Def. 20. Geo.*
[2] *Cor. Prop. 4. Geo.*

au plan *EF*. Pour le démontrer il suffit de faire voir que par le point *G* on ne peut mener une ligne differente de *GH*, qui soit perpendiculaire à la commune section *AG* du plan *AB* avec le plan *EF*; & que par le même point *G* on ne peut mener une autre ligne que *GH* qui soit perpendiculaire à la commune section *CG* du plan *DC* avec le plan *EF*. Car s'il estoit possible que *GL* menée dans le plan *AB* fût perpendiculaire à la commune section *AG* des plans *AB* & *EF*; & que *GM* menée dans le plan *CD* fût aussi perpendiculaire à la commune section *CG* des plans *CD* & *EF*: chacune de ces deux lignes seroit [1] perpendiculaire au plan *EF* par le même point *G*. Ce qui est [2] impossible. Donc la ligne *GH* qui est la commune section des plans *AB* & *CD* perpendiculaires au plan *EF*, est aussi perpendiculaire à ce plan *EF*.

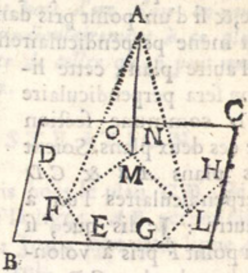


COROLLAIRE II.

Du point *A* pris hors le plan *BC* si on se propose de mener une ligne perpendiculaire à ce plan *BC*; il faut mener à volonté les lignes *DE* & *GH* sur ce plan *BC*, de sorte qu'elles fassent un angle étant prolongées. Ensuite du

[1] *Cor. 1. Prop. 67. Geo.*
[2] *Prop. Pres.*

point *A* il faut mener [1] les lignes *AF* & *AL* perpendiculairement à ces lignes *DE* & *GH*, qui les rencontreront aux points *F* & *L*. Enfin par le point *F* il faut mener la ligne *FN* perpendiculairement à la ligne *DE*, & par le point *L* il faut encore mener la ligne *LO* aussi perpendiculaire à *GH*: Je dis que la ligne *AM* menée du point donné *A* au

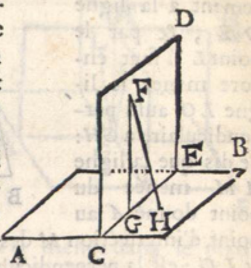


point d'intersection *M* des perpendiculaires *FN* & *LO*, est la perpendiculaire cherchée. Car les lignes *AL* & *OL* étant [2] perpendiculaires à la ligne *GH*, reciproquement [3] *GH* est perpendiculaire à ces lignes *AL* & *OL*. Donc [4] *GH* est perpendiculaire au plan *OLA*. Donc [5] le plan *BC* est perpendiculaire au plan *OLA*, & reciproquement le plan *OLA* est perpendiculaire au plan *BC*. De même à cause que les lignes *AF* & *FN* sont perpendiculaires à la ligne *DE*, le plan *AFN* sera [4] perpendiculaire au plan *BC*. Donc la commune section *AM* de ces plans *AFN* & *ALO*, qui sont perpendiculaires à *BC*, sera [6] aussi perpendiculaire au plan *BC*.

[1] *Part. 1. Cor. 2. Prop. 5. Geo.*
[2] *Par construction.* [3] *Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[4] *Prop. 67. Geo.*
[5] *Cor. 2. Prop. 67. Geo.*
[6] *Cor. 1. Prop. pres.*

COROLLAIRE III.

Si deux plans ſont perpendiculaires l'un à l'autre,& ſi d'un point pris dans un de ces deux plans on mene perpendiculairement une ligne droite à l'autre plan ; cette ligne ſera perpendiculaire à la commune ſection de ces deux plans. Soient les plans *AB* & *CD* perpendiculaires l'un à l'autre : Je dis que, ſi du point *F* pris à volonté dans le plan *CD* on mene une ligne perpendiculaire au plan *AB*, cette ligne ſera perpendiculaire à la commune ſection *CE* de ces deux plans *AB* & *CD*. Car, ſi cette ligne menée du point *F* perpendiculairement au plan *AB* n'eſtoit pas perpendiculaire à la commune ſection *EC*, & ſi elle étoit,par exemple *FH*; alors ayant [1] mené du point *F* la ligne *FG* perpendiculairement à la commune ſection *CE*, cette ligne *FG* ſeroit auſſi [2] perpendiculaire au plan *AB*. Il y auroit donc deux perpendiculaires menées du point *F* au plan *AB*, ce qui eſt [3] impoſſible. Donc la ligne menée du point *F* perpendiculairement au plan *AB* ſera la ſeule ligne *FG* qui eſt perpendiculaire à la commune ſection *CE*.



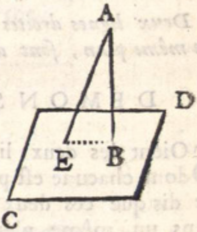
[1] *Part. 1. Cor. 2. Prop. 5. Geo.*
[2] *Cor. 1. Prop. 67. Geo.*
[3] *Prop. preſ.*

PROPOSITION LXX.

Si d'un point pris hors d'un plan on mene une ligne droite perpendiculairement à ce plan ; elle sera la plus courte de celles qu'on peut mener de ce point à ce plan.

DEMONSTRATION.

Soit le point *A* pris hors le plan *CD* ; de ce point soit menée la ligne *AB* perpendiculairement à ce plan : Je dis que cette ligne *AB* est la plus courte de celles qu'on peut mener du point *A* au plan *CD* ; qu'elle est plus courte que la ligne *AE* menée à volonté du point *A* au plan *CD*. Pour le démontrer, dans le plan *CD* & par les extremités de ces lignes *AB* & *AE* soit menée la ligne *EB*. Alors



l'angle *ABE* du triangle *AEB* étant [1] droit ; chacun des angles *A* & *E* sera [2] aigu. Donc [3] la ligne *AB* sera plus courte que *AE*, & , par le même raisonnement, elle sera aussi plus courte que toute autre menée du point *A* au plan *CD*, *ce qu'il falloit demontrer.*

[1] *Def.* 20. & *Def.* 14. *Geo.*
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 31. *Geo.*
[3] *Part.* 2. *Prop.* 33. *Geo.*

COROLLAIRE.

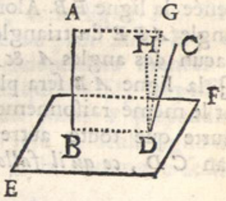
La distance d'un point à un plan, est mesurée par la longueur de la perpendiculaire menée de ce point à ce plan ; puisque [1] il n'y en a pas de plus courte que cette perpendiculaire. Il est donc évident [2] que toutes les perpendiculaires menées d'un plan à un autre qui lui est parallele, sont égales entr'elles. Et enfin on conclura [2] que lorsque toutes les perpendiculaires menées d'un plan à un autre sont égales, ces deux plans sont [2] paralleles entr'eux.

PROPOSITION LXXI.

Deux lignes droites qui sont perpendiculaires à un même plan, sont dans un même plan.

DEMONSTRATION.

Soient les deux lignes droites *A B* & *C D* dont chacune est perpendiculaire au plan *E F*: Je dis que ces deux lignes *A B* & *C D* sont dans un même plan.



Pour le démontrer, du point *B* au point *D* soit menée la ligne *B D*.

Les lignes *A B* & *B D* sont [3] dans le même plan que j'appellerai *B G*, qui est [4] perpendiculaire au plan *E F*. La ligne *C D* doit aussi

[1] *Prop. Pres. & Cor. 1. Ax. 2. Geo.*
[2] *Def. 21. Geo.*
[3] *Prop. 6. Geo.*
[4] *Cor. 2. Prop. 65. Geo.*

ſe trouver dans le même plan *BG*. Car ſi elle n'y étoit pas ; par le point *D* ſoit [1] menée dans ce plan *BG* la ligne *DH* perpendiculairement à la commune ſection *BD* du plan *BG* avec le plan *EF*. Alors [2] cette ligne *HD* ſera perpendiculaire au plan *EF*. Mais [3] la ligne *CD* étoit auſſi perpendiculaire au même plan *EF* par le même point *D*. Il y auroit donc par le même point *D* deux lignes *HD* & *CD* perpendiculaires au même plan *EF*, ce qui eſt [4] impoſſible. La ligne perpendiculaire *CD* eſt donc dans le même plan que l'autre perpendiculaire *AB*, *ce qu'il falloit démontrer.*

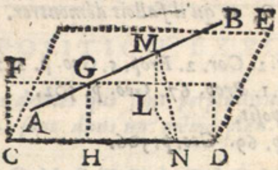
[1] *Part. 2. Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 242.*
[2] *Cor. 1. Prop. 67. Geo. p. 502.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Prop. 69. Geo. p. 506.*

PROPOSITION LXXII.

Deux lignes paralleles sont dans le même plan.

DEMONSTRATION.

POUR démontrer que deux lignes paralleles entre elles sont toujours dans le même plan il suffit de faire voir que, si deux lignes ne sont



pas dans le même plan, elles ne seront point paralleles. Soient les lignes *AB* & *CD* dans des plans differens : je dis que *AB* n'est point parallele à *CD*. Pour le démontrer, considerons le plan *CE* mené par la ligne *CD* parallelement à la ligne *AB*, c'est à dire, de telle sorte que la ligne *AB* en soit également distante dans toute sa longueur. Par cette même ligne *CD* considerons encore un autre plan *FD* qui soit mené perpendiculairement au precedent *CE*; ce dernier plan *FD* ne passera point par la ligne *AB*, car *AB* & *CD* seroient dans le même plan, ce qui est contre la supposition presente, *FD* coupera donc *A B* par exemple au point *G*. Alors du point *G* soit [1]

[1] *Cor. 2. Prop. 5. Geo. p. 243.*

menée *GH* perpendiculaire à la commune section *CD*. Cette ligne *GH* sera [1] perpendiculaire au plan *CE*. Ensuite du point *M* pris à volonté dans la ligne *AB* soit [2] menée *ML* perpendiculairement au plan *CE*. Puisque la ligne *AB* dans toute sa longueur est [3] également distante du plan *CE*, les perpendiculaires *GH* & *ML* seront [4] égales entre elles. Enfin du point *M* soit [5] menée *MN* perpendiculairement à la ligne *CD*, & du point *L* au point *N* soit menée *LN*.

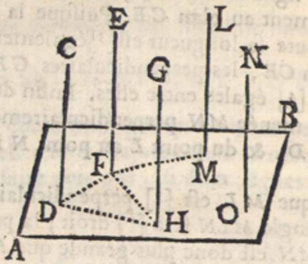
Puisque *ML* est [3] perpendiculaire au plan *CE*, l'angle *MLN* sera [6] droit ; la perpendiculaire *MN* est donc plus grande que *ML* [7], ou que son [4] égale *GH*. Les lignes *MN* & *GH* menées de la ligne *AB* perpendiculairement à *CD* n'étant donc point égales, *AB* n'aura pas [8] tous ses points également distans de *CD*. Les deux lignes *AB* & *CD* ne seront donc point [9] paralleles, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les lignes droites qui sont perpendiculaires à

[1] *Cor.* 1. *Prop.* 67. *Geo. p.* 502.
[2] *Cor.* 2. *Prop.* 59. *Geo. p.* 508.
[3] *Par construction.*
[4] *Cor. Prop.* 70. *Geo. p.* 512.
[5] *Cor.* 2. *Prop.* 5. *Geo. p.* 243.
[6] *Def.* 20. *Geo. pag.* 202.
[7] *Part.* 1. *Prop.* 6. *Geo. p.* 246.
[8] *Cor.* 3. *Prop.* 6. *Geo. p.* 249.
[9] *Def.* 8. *Geo. p.* 196.

un même plan ſont paralleles entr'elles. Soient les lignes *CD*, *EF*, *GH*, *LM*, *NO*, &c.



perpendiculaires au plan *AB* : Je dis qu'elles ſont paralleles entr'elles. Pour le démontrer, ſoient menées les lignes droites *DF*, *DH*, &c. dans le plan *AB* par leurs extremités. Alors les lignes *CD* & *GH*, par exemple, ſont [1] dans le même plan, ce qui eſt [2] une condition requiſe pour le paralleliſme. Outre cela ces deux lignes perpendiculaires ſont [3] perpendiculaires à la ligne *DH*. Ces lignes *CD* & *GH* ſont [4] donc paralleles l'une à l'autre. On fera le même raiſonnement pour les lignes *CD*, *LM*, *EF*, &c.

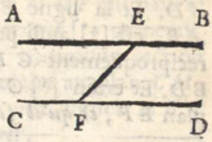
COROLLAIRE II.

Si les lignes *AB* & *CD* ſont paralleles, la ligne droite *EF* menée du point *E* d'une de

[1] *Prop. 71. Geo. p. 512.*
[2] *Prop. Preſ.*
[3] *Def. 20. Geo. p. 202.*
[4] *Part. 2. Prop. 15. Geo. p. 283.*

ces

ces paralleles au point F de l'autre, sera dans le plan de ces deux paralleles. Car, puisque [1] la ligne EF est droite & qu'elle a déja deux de ses points E & F dans la surface plane qui [2] passe par les paralleles AB & CD. Il faut necessairement [3] que cette ligne droite soit entierement dans le plan de ces paralleles.

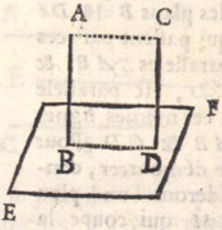


PROPOSITION LXXIII.

Si de deux lignes droites paralleles entr'elles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre sera aussi perpendiculaire au même plan.

DEMONSTRATION

Soient les lignes AB & CD paralleles entr'elles, & soit la ligne AB perpendiculaire au plan EF : Je dis que l'autre ligne CD est aussi perpendiculaire au même plan EF. Pour le démontrer, soit menée dans le plan EF la ligne BD par les extremités de ces lignes AB & CD. Et par leurs autres extremités soit menée la ligne AC.



Puisque [1] la ligne AB est perpendiculaire au plan EF, cette ligne AB sera [4] perpendiculaire à BD ; & reciproquement BD sera [5]

[1] *Supposit.* [2] *Prop. Pref.* [3] *Def.* 10. *Geo.* [4] *Def.* 20. *Geo.* [5] *Cor.* 1. *Prop.* 5. *Geo.*

perpendiculaire à *A B*. Le plan *A D* ſera donc [1] perpendiculaire au plan *E F*. Mais *C D* êtant [2] parallele à *A B*, eſt [3] dans ſon même plan *A D*. Et la ligne *B D* êtant perpendiculaire à *A B*, eſt [4] auſſi perpendiculaire à *C D*. Donc reciproquement *C D* ſera [4] perpendiculaire à *B D*. Et enfin [5] *C D* ſera perpendiculaire au plan *E F*, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXIV.

1°. *La commune ſection de deux plans qui paſſent par deux lignes paralleles, eſt parallele à ces mêmes lignes.*

2°. *Les lignes droites paralleles à une même ligne ſont paralleles entr'elles, quoique elles & cette même ligne droite ſoient dans des plans differens.*

DEMONSTRATION
DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les lignes *AB* & *C D* paralleles entr'elles : Je dis que la commune ſection *G H* des plans *B E* & *DF* qui paſſent par ces paralleles *A B* & *C D*, eſt parallele à ces mêmes lignes *A B* & *C D*. Pour le démontrer, conſiderons un plan *L M* qui coupe la ligne *A B* de ſorte

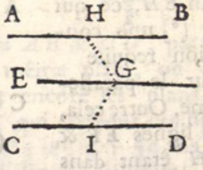
[1] *Cor. 2. Prop. 67. Geo.* [2] *Suppoſit.*
[3] *Prop. 72. Geo.* [4] *Part. 1. Prop. 15. Geo.*
[5] *Cor. 1. Prop. 67. Geo.*

qu'elle lui ſoit perpendiculaire. Alors l'autre parallele *C D* ſera [1] auſſi perpendiculaire au même plan *L M* ; & les plans *B E* & *D F* qui paſſent par ces lignes *A B* & *C D*, ſeront [2] perpendiculaires au plan *L M*. Leur commune ſection *G H* ſera donc [3] perpendiculaire au plan *L M* ; elle ſera donc [4] parallele aux lignes *A B* & *C D*, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOit la ligne *A B* parallele à *E F*, & la ligne *C D* auſſi parallele à *E F*. Soit le plan des lignes paralleles *A B* & *E F* different du plan des lignes *C D* & *E F*, c'eſt à dire que *E F* ſoit la commune ſection de deux plans dont un paſſe par la ligne *A B* & l'autre par *C D* ; car ſi ces trois lignes *A B*, *E F* & *C D* étoient dans le même plan, la propoſition preſente ſeroit la même que la vingt-ſixiéme : Je dis que la ligne *A B* eſt parallele à *C D*.



Pour le démontrer, par un point de la ligne *E F*, par exemple *G*, & dans le plan des deux paralleles *A B* & *E F* ſoit menée *G H* perpendiculaire à *E F*. Par le même point *G* & dans le plan des deux paralleles *C D* & *E F* ſoit menée *G I* perpendiculaire à la même ligne *E F*.

[1] *Prop. 73. Geo.*
[2] *Cor. 2. Prop. 67. Geo.*
[3] *Cor. 1. Prop. 69. Geo.*
[4] *Cor. 1. Prop. 72. Geo.*

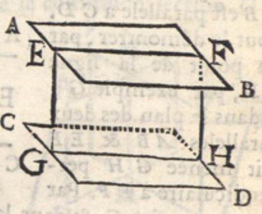
Puiſque *E F* eſt [1] perpendiculaire aux lignes *G I* & *G H*, cette ligne *E F* ſera [2] perpendiculaire au plan qui paſſe par ces deux lignes *G H* & *G I*. Les lignes *A B* & *C D* qui ſont [3] paralleles à la ligne *E F*, ſeront [4] auſſi perpendiculaires au même plan des deux lignes *G H* & *G I*. Donc [5] les lignes *A B* & *CD* ſeront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXV.

Si deux plans paralleles ſont coupés par un troiſiéme plan, leurs communes ſections ſeront auſſi paralleles.

DEMONSTRATION.

Soient les plans paralleles *A B* & *C D* coupés par un troiſiéme plan *E H* : Je dis que leurs communes ſections *E F* & *G H* ſeront paralleles entr'elles. Car ces lignes *E F* & *G H* ſont dans un même plan *E H*, ce qui eſt [6] une condition requiſe pour le paralleliſme. Outre cela, ces lignes *E F* & *G H* étant dans les plans *A B* & *C D* qui ſont [3] paralleles, c'eſt à dire [7] également diſtans l'un de l'autre dans toute leur

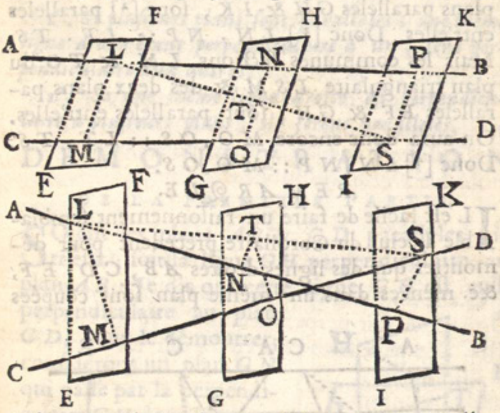


[1] *Par conſtruction & Cor. 1. Prop. 5. Geo.*
[2] *Prop. 67. Geo.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Prop. 73. Geo.*
[5] *Cor. 1. Prop. 72. Geo.*
[6] *Prop. 72. Geo.*
[7] *Def. 21. Geo.*

étenduë ; ces lignes seront aussi également distantes l'une de l'autre dans toute leur longueur. Donc [1] elles seront paralleles entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les lignes droites coupées par des plans paralleles, seront coupées proportionnellement.



Soient les lignes droites *AB* & *CD*, paralleles, ou non ; dans le même plan, ou dans differens plans. Soient encore les plans paralleles *EF*, *GH*, *IK* qui coupent ces lignes aux points *L*, *M* ; *N*, *O* ; *P*, *S* : Je dis que ces lignes *AB* & *CD* seront coupées proportionnellement, c'est à dire que *LN*. *NP* :: *MO*. *OS*. Pour le démontrer, du premier point de section *L* d'une de ces lignes droites *AB* au deuxiéme point de section *S* de la seconde ligne *CD* soit menée la ligne *LS*. Et du point *L* au point *M* ; de *N* à *T*, & de *T* à *O* ;

[1] *Def.* 8. *Geo.*

enfin de P à S, où ces trois lignes AB, CD & LS sont coupées, soient menées des lignes droites.

Les lignes LP & LS seront [1] dans le même plan ; les lignes LS & SM seront aussi dans le même plan. Or les communes sections TN & SP du plan triangulaire LSP & des plans paralleles GH & IK, sont [2] paralleles entr'elles. Donc [3] $LN . NP :: LT . TS$. Mais les communes sections LM & TO du plan triangulaire LSM & des deux plans paralleles EF & GH, sont paralleles entr'elles. On aura donc encore $MO . OS :: LT . TS$. Donc [4] $LN . NP :: MO . OS$.

REMARQUE.

IL est facile de faire un raisonnement semblable à celui du Corollaire precedent pour démontrer que des lignes droites AB, CD, EF, &c. menées dans un même plan sont coupées

proportionnellement par les lignes paralleles AE, GL, HM, BF, &c. Car du point C au point H ayant mené CH ; on trouve [4] que $AG . GH :: CN . NH :: CI . IK$. Donc

[1] *Prop.* 65. *Geo.*
[2] *Prop. Pres.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 51. *Geo.*
[4] *Cor.* 3. *Def.* 12. *Algeb.*

[1] *AG.GH :: CI.IK.* On prouvera de même que *CI. IK :: EL.LM*, &c. Ensuite si on mene la ligne *IB*, on trouvera encore de la même maniere que *GH.HB :: IK.KD*. &c.

PROPOSITION LXXVI.

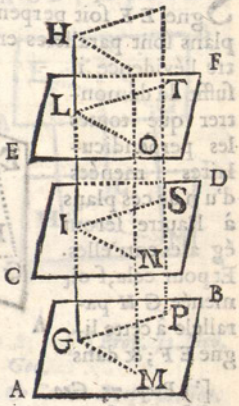
1°. *Si plusieurs plans sont paralleles ; une même ligne droite étant perpendiculaire à un, sera perpendiculaire aux autres.*

2°. *Si une même ligne droite est perpendiculaire à plusieurs plans, ils seront paralleles.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soient les plans *AB* & *CD* paralleles entr'eux ; soit la ligne *GH* perpendiculaire au plan *AB* : Je dis que cette ligne *GH* est aussi perpendiculaire au plan *CD*. Pour le démontrer ; considerons un plan *GN* qui passe par la perpendiculaire *GH*, dont les communes sections avec les plans *AB* & *CD* soient *GM* & *IN*. Faisons encore passer un autre plan *GS* par cette perpendiculaire *GH*, dont les communes sections avec les plans *AB* & *CD* soient *GP* & *IS*.



Puisque les plans *AB* & *CD* sont paralleles,

[1] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.*

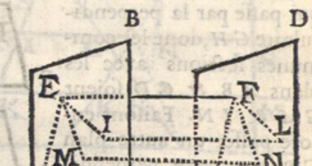
les communes ſections *G M* & *I N* ſeront [1] paralleles ; par la même raiſon *G P* & *I S* ſeront auſſi paralleles entr'elles. Mais [2] la ligne *G H* étant perpendiculaire à *A B*, l'angle *I G M* ſera [3] droit ; & l'angle *G I N* ſera auſſi [4] droit. *G I* ſera donc perpendiculaire à *I N*. Par la même raiſon *I G P* étant [3] droit, *G I S* ſera auſſi droit. *G I* ſera donc perpendiculaire à *I S*. Donc [5] la ligne *G I* ſera perpendiculaire au plan *C D*, *ce qu'il falloit démontrer.*

Et ſi le plan *C D* eſt encore parallele à *E F*, on démontrera que la ligne *G H* eſt encore perpendiculaire à ce plan *E F* par un raiſonnement ſemblable à celui qu'on vient de faire.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les plans *A B* & *C D*, auſquels la ligne *E F* ſoit perpendiculaire : Je dis que ces plans ſont paralleles entr'eux. Pour en connoître l'évidence il ſuffit de démontrer que toutes les perpendiculaires menées d'un de ces plans à l'autre ſeront égales entr'elles. Et pour cela, ſoit menée *G H* parallele à cette ligne *E F* ; & dans



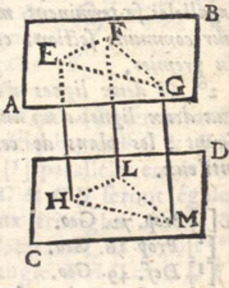
[1] *Prop.* 75. *Geo.*
[2] *Suppoſit.*
[3] *Def.* 20. & *Def.* 14. *Geo.*
[4] *Part.* 3. *Prop.* 24. *Geo.*
[5] *Prop.* 67. *Geo.*

le plan *AB* d'un point de rencontre E de la ligne *EF* à un autre G de la ligne G*H* soit menée E G ; de même soit menée *F H* dans le plan *CD*.

Puisque [1] G *H* est parallele à la perpendiculaire E F, cette ligne G *H* sera aussi [2] perpendiculaire aux plans *AB* & *CD*. Or [3] les angles *FEG*, G*HF*, *EGH* & *HFE* sont droits. La figure E *H* sera donc [4] un parallelogramme. Donc [5] la perpendiculaire G *H* sera égale à E F. On démontrera de la même maniere que les autres perpendiculaires *IL*, *MN*, &c. menées d'un de ces plans à l'autre, sont égales entr'elles, chacune étant égale à E F. Ces plans seront donc [6] également distans l'un de l'autre dans toute leur étendue. Donc [7] ils seront paralleles entr'eux, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Si chacun des trois points *E*, *F* & G sont également distans du plan *CD*, le plan *AB* sera parallele au plan *CD*. Car puisque les distances de ces points sont [6] mesurées par des perpendiculaires, les lignes *EH*, *FL*, & G*M* menées de ces points perpendiculairement au plan *CD* seront égales entr'elles. Or [8] elles sont



[1] *Par construction.* [2] *Prop. 73. Geo.*
[3] *Def. 20. & Def. 14. Geo.*
[4] *Cor. 3. Prop. 20. Geo. & Cor. 1. Prop. 38. Geo.*
[5] *Part. 1. Prop. 37. Geo.* [6] *Cor. Prop. 70. Geo.*
[7] *Def. 21. Geo.* [8] *Cor. 1. Prop. 72. Geo.*

paralleles entr'elles, & prises deux à deux elles sont [1] dans le même plan. Les lignes *L M* & *F G*; *H L* & *E F*; *H M* & *E G* seront [2] égales entr'elles. Les figures *E M*, *E L* & *F M* seront donc [3] des parallelogrammes. Or l'angle *E H L* étant [4] droit, l'angle *E F L* sera [5] droit. On trouvera encore par un raisonnement semblable que l'angle *L F G* est droit. Donc la ligne *L F* sera [6] perpendiculaire au plan des lignes *E F* & *F G*, c'est à dire [7] à *A B*. Donc *L F* sera perpendiculaire aux plans *A B* & *C D*. Ces plans seront donc [8] paralleles entr'eux.

PROPOSITION LXXVII.

1°. *Si dans un plan les côtés d'un angle rectiligne sont paralleles aux côtés d'un autre qui est dans un autre plan; & si les plans de ces paralleles se terminent mutuellement d'une part à leur commune section; ce dernier angle sera égal au premier.*

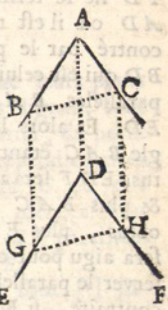
2°. *Si deux lignes d'un angle sont paralleles aux deux lignes d'un autre dont le plan est different, les plans de ces angles seront paralleles entr'eux.*

[1] *Prop.* 72. *Geo.*
[2] *Prop.* 36. *Geo.*
[3] *Def.* 49. *Geo.*
[4] *Def.* 20. *& Def.* 14. *Geo.*
[5] *Part.* 1. *Prop.* 38. *Geo.*
[6] *Prop.* 67. *Geo.*
[7] *Def.* 10. *Geo.*
[8] *Part.* 2. *Prop. Pres.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOit l'angle *BAC* dont lés côtés *AB* & *AC* sont paralleles aux côtés *DE* & *DF* d'un autre angle *EDF* dont le plan n'est pas le même que celui du premier angle *BAC*; ces lignes paralleles *AB* & *DE*, *AC* & *DF* étant disposées de maniere que leurs plans se terminent à leur commune section *AD*: Je dis que cet angle $BAC = EDF$. Pour le démontrer, sur la ligne *DE* il faut prendre $DG = AB$, & sur *DF* il faut prendre $DH = AC$; ensuite menez *BG*, *AD*, *CH*; *BC* & *GH*.

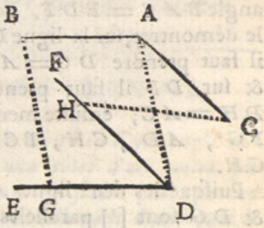


Puisque les deux lignes *AB* & *DG* sont [1] paralleles & [2] égales, les deux lignes *BG* & *AD* seront [3] égales & paralleles; & par la même raison les deux lignes *CH* & *AD* seront aussi égales & paralleles. Les deux lignes *BG* & *CH* seront donc égales [4] & [5] paralleles entr'elles; & enfin [3] les lignes *BC* & *GH* seront égales l'une à l'autre. Les deux triangles *BAC* & *GDH* étant donc équilateraux, ils seront [6] équiangles. Donc [6] l'angle $BAC = EDF$, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Supposit.*
[2] *Par construction.*
[3] *Prop. 36. Geo.*
[4] *Ax. 18. Gen.*
[5] *Part. 2. Prop. 74. Geo.*
[6] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*

REMARQUE.

Les plans des paralleles *AB* & *DE*, *AC* & *DF* se terminent l'un & l'autre à leur commune section *AD*; car autrement la premiere partie de la proposition presente se trouveroit fausse, parcequ'elle seroit trop générale. Puisque les côtés de l'angle *BAC* peuvent être disposés de maniere que le plan des paralleles *AC* & *FD* ne se termine pas à la commune section *AD* où il est rencontré par le plan *BD* qui est celui des paralleles *BA* & *ED*. Et alors l'angle *BAC* étant obtus, *EDF* sera aigu; & plus *BAC* sera obtus, plus *EDF* sera aigu pour conserver le parallelisme des lignes *AC* & *FD*. Au contraire, si *BAC* est aigu *EDF* sera obtus. Cela vient encore de ce que les lignes *AD* & *HC* se coupant, on ne peut pas [1] conclure certainement que *AD* = *HC*.



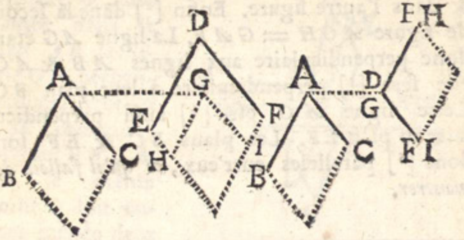
DEMONSTRATION
DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les deux lignes droites *AB* & *AC* qui se rencontrent au point *A*, paralleles aux

[1] *Remarque de la Prop. 36. Geo.*

deux

deux lignes *DE* & *DF* qui se rencontrent au point *D* dans un autre plan que celui des



lignes *AB* & *AC* : Je dis que leurs plans *BC* & *EF* qui passent par ces lignes, sont paralleles entr'eux. Pour le démontrer, du point *A* soit menée la ligne *AG* perpendiculairement au plan *EF*. Par le point *G* où elle rencontre ce plan *EF*, soient menées dans le plan *EF* les lignes *GH* & *GI* paralleles aux lignes proposées *DE* & *DF*.

Puisque les lignes *GH* & *GI* sont [1] paralleles aux lignes *DE* & *DF*, & que [2] *AB* & *AC* sont paralleles aussi aux lignes *DE* & *DF* ; la ligne *AB* sera [3] parallele à *GH*, & *AC* sera parallele à *GI*. Or les paralleles *AB* & *GH* étant [4] dans le même plan, on trouvera dans la premiere figure que les angles $AGH + GAB$ seront [5] égaux à deux droits. Mais l'angle *AGH* est

[1] *Par construction.*
[2] *Supposit.*
[3] *Prop. 74. Geo.*
[4] *Prop. 72. Geo.*
[5] *Part. 3. Prop. 24. Geo.*

[1] droit ; l'angle *GAB* sera donc droit. On trouvera encore par un raisonnement semblable, que l'angle *GAC* est droit dans l'une & dans l'autre figure. Enfin [2] dans la seconde figure *AGH* = *GAB*. La ligne *AG* étant donc perpendiculaire aux lignes *AB* & *AC*, elle sera [3] perpendiculaire à leur plan *BC*. Cette ligne *AG* est [4] aussi perpendiculaire au plan *EF*. Les plans *BC* & *EF* sont donc [5] paralleles entr'eux, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXVIII.

1°. *Si un plan rencontre un autre plan, les angles formés de part & d'autre d'un de ces plans seront droits ou égaux à deux droits.*

2°. *Si deux plans se coupent, leurs angles opposés par le sommet seront égaux entr'eux.*

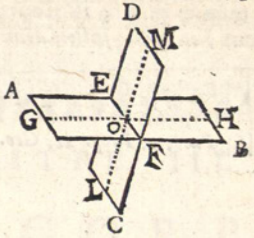
DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

Soit le plan *DF* qui rencontre le plan *AB*: Je dis que les angles qui sont formés de part & d'autre de ce plan *DF*, pris ensemble,

[1] *Def. 20. & Def. 14. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 23. Geo.*
[3] *Prop. 67. Geo.*
[4] *Par construction.*
[5] *Part. 2. Prop. 76. Geo.*

ſont égaux à deux droits. Pour le démontrer, par un point de la commune ſection *E F*, par exemple *O*, ſoit menée dans le plan *A B* la ligne *G H* perpendiculairement à cette commune ſection *E F*, & par le même point *O* ſoit encore menée dans



le plan *D F* la ligne *L M* perpendiculaire à cette commune ſection *E F*. Alors les angles *G O M* & *M O H* ſont [1] les angles des plans *D F* & *A B*. Et parceque la ligne *G H* eſt droite, ces angles *G O M* & *M O H* ſont [2] dans le même plan. Enfin ces angles *G O M* & *M O H* ſont [3] droits ou égaux à deux droits, *ce qu'il falloit démontrer.*

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

SOient les plans *A B* & *C D* qui ſe coupent ; je dis que les angles de ces plans qui ſont oppoſés par le ſommet, ſont égaux entr'eux. Car les angles *G O L* & *M O H*

[1] *Def.* 18. *Geo.*
[2] *Prop.* 65. & *Cor. Def.* 10. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 21. *Geo.*

ſont [1] les angles de ces plans, & ces angles ſont oppoſés par le ſommet, & [2] dans le même plan ; ils ſont donc [3] égaux entr'eux, *ce qu'il falloit démontrer.*

[1] *Def.* 18. *Geo.*
[2] *Prop.* 65. *&* *Cor. Def.* 10. *Geo.*
[3] *Part.* 1. *Prop.* 22. *Geo.*

CHAPITRE III.

DES CORPS OU SOLIDES.

IL eſt impoſſible de faire un grand progrés dans la Phyſique nouvelle, ſans ſçavoir la maniere de connoître combien de maſſe ont certains corps, & combien de ſurface. Parceque leur repos, leurs differens degrés de mouvement, leur ſituation, figure & volume, ſont ordinairement l'origine des Phenomenes les plus conſiderables.

La connoiſſance des ſolides eſt fort avantageuſe dans les Mechaniques pour la conſtruction des Machines, pour déterminer les Centres de gravité, pour trouver les Equilibres, &c. Dans la Navigation pour la conſtruction des Vaiſſeaux, pour comparer la peſanteur de leur volume à un pareil volume d'eau, pour connoître leur plus grande charge, &c.

On ſe trouve ſouvent dans la neceſſité de mesurer des murailles selon leur trois dimensions, pour sçavoir combien de toises cubes elles contiennent, combien de pieds, &c. Il y a tant d'ouvrages qui se rencontrent continuellement dans l'Architecture, dont la perfection dépend de la coupe des pierres, & d'une Theorie exacte des corps ! s'il est necessaire d'estimer des ouvrages de Fortifications, par exemple, des excavations de fossés, la solidité des remparts, &c, on n'y peut reussir sans la connoissance des solides. Enfin les usages de cette partie de la Geometrie sont tres-frequens & d'une grande utilité dans le reste des Mathematiques ; & quand même cette utilité ne paroîtroit que dans les exemples qu'on vient d'apporter ; cela seroit suffisant pour en rendre l'étude recommandable, & pour animer le zéle de ceux qui commencent à s'appliquer à ces sciences.

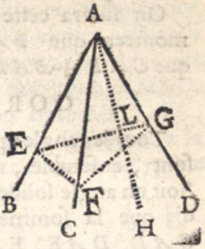
PROPOSITION LXXIX.

Si trois angles plans font un angle solide ; deux, pris ensemble, seront plus grands que le troisiéme.

DEMONSTRATION.

Soient les angles plans *BAC*, *CAD* & *DAB* qui forment un angle solide dont le sommet est *A* : Je dis que deux de ces angles plans pris à volonté, par exemple *BAC* & *CAD* sont plus grands que le troisiéme *DAB*.

Si un de ces deux angles *BAC*, *CAD*, est plus grand que l'angle *DAB*, ou s'il eſt égal à l'angle *DAB*; il eſt évident que ces deux angles *BAC* & *CAD*, pris enſemble, ſont plus grands que l'angle *DAB*. Car c'eſt ajouter quelque choſe à une de deux grandeurs égales, ou à la plus grande, & rien à l'autre égale ou plus petite.



Mais ſi chacun des angles *BAC* & *CAD* eſt plus petit que le troiſiéme angle *DAB*; par les points *E* & *G* éloignés du point *A*, & pris à volonté dans les lignes *AB* & *AD*, ſoit menée *EG*. De cet angle *DAB* retranchons une partie *HAB* qui ſoit égale à l'angle *CAB*. Sur la ligne *AC* prenons la partie *AF* égale à *AL*. Enfin du point *E* au point *F*, & du point *F* au point *G* ſoient menées les lignes *EF* & *FG*.

Les triangles *LAE* & *FAE* ont le côté *AE* commun, & [1] $AL = AF$. Outre cela [1] l'angle $LAE = FAE$. Les baſes *EL* & *EF* ſeront [2] donc égales. Mais [3] $EF + FG > EG$. Donc [4] $FG > LG$. Le côté *AG* eſt commun aux deux triangles *FAG* & *LAG*, & [1] $AF = AL$. L'angle *FAG* eſt donc [5] plus grand que l'angle *LAG*. En ajoutant d'une part l'angle *FAE*, & de l'autre

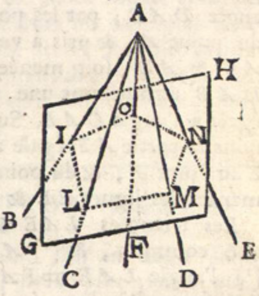
[1] *Par conſtruction.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 35. *Geo.*
[3] *Prop.* 1. *Geo.*
[4] *Ax.* 17. *Geo.*
[5] *Cor.* 3. *Prop.* 35. *Geo.*

part l'angle *LAE* égal [1] au precedent ; on trouvera [2] que la somme des angles $BAC + CAD > BAD$, *ce qu'il falloit démontrer.*

On suivra cette même methode, pour démontrer que $BAC < BAD + CAD$, & que $CAB + BAD > CAD$.

COROLLAIRE.

Tous les angles plans qui font un angle solide sont, ensemble, moindres que quatre droits. Soit un angle solide dont le sommet est *A* : Je dis que la somme des angles plans *BAC*, *CAD*, *DAE*, *EAF*, *FAB*, qui le forment, quelque nombre qu'il y en ait, est plus petite que quatre angles droits. Pour le démontrer, considerons un plan, par exemple *GH*, qui coupe transversalement les plans de ces angles qui composent l'angle solide dont le sommet est *A*. Alors les communes sections de ces plans & du plan *GH* formeront la figure rectiligne *ILMNO* ; & il y aura des angles solides dont les sommets seront les points *I*, *L*, *M*, *N*, &c.



La somme des angles de tous les triangles *IAL*, *LMA*, *MNA*, *ANO*, *AIO*, qui ont chacun pour base un côté du polygone

[1] *Par Construction.*
[2] *Ax. 7. gen.*

ILMNO, eſt [1] égale à autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés à ce polygone *ILMNO*.

La ſomme des angles interieurs du polygone *ILMNO* & de quatre angles droits, eſt auſſi égale [2] à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés à ce même polygone *ILMNO*.

La ſomme des angles des triangles *IAL*, *LAM*, *MNA*, &c. eſt donc [3] égale à la ſomme faite des angles interieurs du polygone *ILMNO* & de quatre droits.

Mais [4] la ſomme des angles *AIO* & *AIL* eſt plus grande que l'angle *OIL* du même polygone. De même $ALI + ALM > ILM$. & $AML + AMN > LMN$. De plus $ANM + ANO > MNO$. Enfin $AON + AOI > NOI$. C'eſt à dire que la ſomme des angles qui ſont à la baſe des triangles *IAL*, *LMA*, *AMN*, &c. eſt plus grande que la ſomme des angles interieurs du polygone *ILMNO*.

Si de la ſomme des angles des triangles *IAL*, *ALM*, *AMN*, &c. on retranche la ſomme des angles plans qui ſont à leur baſe, dont les ſommets ſont *I*, *L*, *M*, & *O*; & ſi de la ſomme faite des angles interieurs du polygone *ILMNO* & de quatre droits, on retranche la ſomme de ces angles interieurs: on trouvera [5] que le reſte des angles des triangles *AIL*, *AML*, &c. c'eſt à dire, que la ſomme des angles plans qui forment l'angle ſolide dont le ſommet eſt *A*, ſera plus petite que quatre angles droits, *ce qu'il falloit démontrer*.

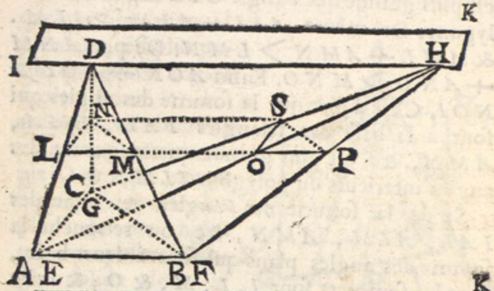
[1] *Prop.* 31. *Geo.*
[2] *Part.* 1. *Prop.* 32. *Geo.*
[3] *Ax.* 18. *gen.*
[4] *Prop. Pref.*
[5] *Ax.* 15. *gen.*

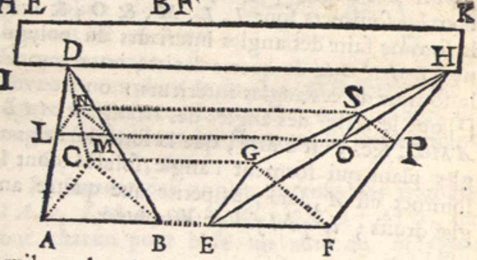
PROPOSITION LXXX.

Les pyramides triangulaires posées sur la même base, ou sur des bases équilaterales l'une à l'autre, sont égales entr'elles.

DEMONSTRATION.

SOient les deux pyramides *ABCD* & *EFGH* sur la même base *A-BC*, ou sur des bases





équilaterales *ABC* & *EFG*, & de même hauteur, c'est à dire [1] entre les mêmes plans paralleles *IK* & *AFGC* : Je dis que ces deux py-

[1] *Def. 21. & Cor. Prop. 70. Geo.*

ramides ſont égales entr'elles. Pour le démontrer, conſiderons ces deux pyramides comme diviſées en feuillets, lames, ou plans triangulaires paralleles aux baſes ABC & EFG, & d'une épaiſſeur indefiniment petite. Il eſt conſtant que dans l'une de ces pyramides il y aura autant de ces plans, lames, ou feuillets, que dans l'autre; puiſqu'on ſuppoſe ces mêmes pyramides être de même hauteur. Il reſte donc à démontrer que chaque coupe, lame, feuille, ou plan d'une de ces pyramides, ſera égale à chaque coupe, feuille, ou lame, qui ſera à même hauteur dans l'autre pyramide.

Soit le plan $LPSN$ qui coupe ces deux pyramides parallelement au plan $AFGC$. Les communes ſections LM & AB du plan DAB & des plans $LPSN$ & $AFGC$ ſeront [1] paralleles entr'elles. Les triangles ABD & DLM ſeront [2] donc ſemblables; on dira la même choſe des triangles HEF & HOP; DAC & LND; EGH & HOS; DCB & DNM; HGF & HSP.

Donc [3] $AB.LM :: AD.LD$, & $EF.OP :: EH.OH$.

Mais [4] $AL.LD :: EO.OH$. & [5] $AL+LD.LD :: EO+OH.OH$, c'eſt à dire, $AD.LD :: EH.OH$.

Donc [6] $AB.LM :: EF.OP$. Or [7] $AB = EF$. Donc [8] $LM = OP$.

[1] *Prop. 75. Geo.*
[2] *Part. 1. Prop. 24. & part. 1. prop. 52. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. 52. Geo.*
[4] *Cor. Prop. 74. Geo.*
[5] *Part. 3. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[6] *Cor. 3. Def. 12. Algeb.*
[7] *Suppoſit.*
[8] *Part. 2. Prop. 9. Algeb.*

On trouvera par un raisonnement semblable à celui qu'on vient de faire, que $CB \,.\, NM :: BD \,.\, MD :: FH \,.\, PH :: FG \,.\, PS$. & de ces rapports égaux, on concluera que $CB \,.\, NM :: FG \,.\, PS$. & [1] $CB \,.\, FG :: NM \,.\, PS$. Mais [2] $CB = FG$. Donc $NM = PS$.

On démontrera de la même maniere que $LN = OS$.

Une de ces lames triangulaires LMN d'une de ces pyramides est donc équilaterale à une autre lame triangulaire OPS correspondante à même hauteur dans l'autre pyramide. Ces deux triangles LMN & OPS sont donc égaux entr'eux.

Ce qu'on a démontré à l'égard des feuilles ou lames LMN & OPS peut estre démontré de la même maniere & par les mêmes raisons de toutes les autres lames ou feuilles comparées entr'elles à même hauteur, c'est à dire dans les mêmes plans paralleles aux bases.

Les pyramides triangulaires $ABCD$ & $EFGH$ de même hauteur & posées sur des bases équilaterales ABC & EFG sont donc égales entr'elles, *ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION LXXXI.

Une pyramide triangulaire est la troisiéme partie d'un prisme de même base & de même hauteur.

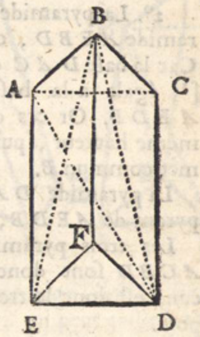
DEMONSTRATION.

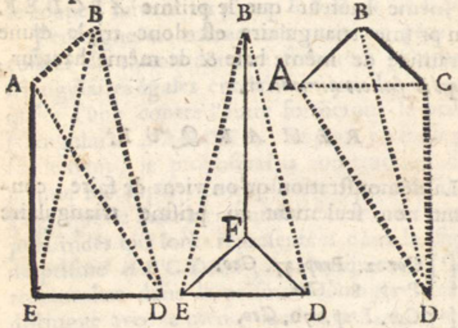
Soit le prisme triangulaire $ABCDEF$: Je dis qu'une pyramide qui aura par base un des

[1] *Part. 2. Cor. Prop. 3. Algeb.*
[2] *Supposit.*

deux

triangles *A B C*, *D E F*, qui ſont les deux baſes paralleles, ſemblables, & égales du priſme triangulaire *ABCDEF*, & qui ſera de même hauteur que ce priſme; par exemple, la pyramide *E D F B*, ſera la troiſiéme partie de ce même priſme. Pour le démontrer; par un même point, par exemple *B*, ſoient menées les diagonales *B D* & *B E* ſur les deux faces *C F* & *A F*, & ſur la troiſiéme face *C E* ſoit encore menée la diagonale *A D*, qui feront ſix triangles & [1] repreſenteront ce priſme diviſé par les deux plans *EDB* & *ABD*, en trois pyramides *EDFB*, *EABD*, & *ABCD*. Il faut démontrer qu'elles ſont égales, & pour y réuſſir conſiderons-les [2] dans le priſme *ABCDEF*.





[1] *Prop. 65. Geo.*
[2] *Part. 3. de l'avertiſſ. pag. 230.*

1°. La pyramide *EDFB*, ou *BEFD* qui eſt la même, eſt égale à la pyramide *AEBD*. Car la baſe *BEF* de la pyramide *BEFD* eſt [1] égale à la baſe *AEB* de la pyramide *AEBD*. Or ces deux pyramides ont une même hauteur, puiſqu'elles ont le même ſommet commun *D*. Donc [2] la pyramide *BEFD* = *AEBD*.

2°. La pyramide *DACB* eſt égale à la pyramide *AEBD*, ou *AEDB* qui eſt la même. Car la baſe *DAC* de la pyramide *DACB* eſt [1] égale à la baſe *AED* de la pyramide *AEDB*. Or ces deux pyramides ont [3] une même hauteur, puiſqu'elles ont le même ſommet commun *B*.

La pyramide *DACB* eſt [2] donc égale à la pyramide *AEDB*, ou *AEBD*.

Les trois pyramides *EDFB*, *AEBD* & *ACBD* ſont donc [4] égales entr'elles. Chacune eſt donc la troiſiéme partie du priſme propoſé.

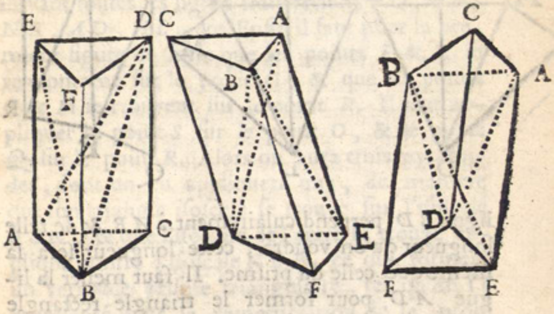
Or la pyramide *EDFB* a la même baſe & la même hauteur que le priſme *ABCDEF*. Un priſme triangulaire eſt donc triple d'une pyramide de même baſe & de même hauteur, *ce qu'il falloit démontrer*.

REMARQUE.

La démonſtration qu'on vient de faire, convient non ſeulement au priſme triangulaire

[1] *Cor.* 2. *Prop.* 37. *Geo.*
[2] *Prop.* 80. *Geo.*
[3] *Cor. Prop.* 70. *Geo.*
[4] *Ax.* 18. *Gen.*

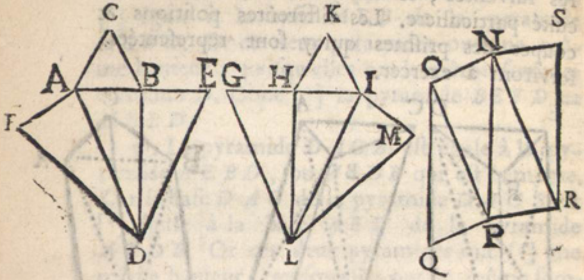
droit, mais aussi aux obliques triangulaires. C'est pourquoi on la peut appliquer aux figures suivantes, & on n'y trouvera aucune difficulté particuliere. Les differentes positions & coupes des prismes qui y sont representées, serviront à exercer.



Pour faciliter encore davantage l'intelligence de la proposition presente, on peut tailler un prisme triangulaire de bois ou de cire, & ensuite le couper suivant les plans *EBD* & *ABD*.

J'enseignerai même une maniere pour découper du carton dont on fera trois pyramides triangulaires égales entr'elles, qui étant appliquées l'une contre l'autre formeront le prisme triangulaire *ABCDEF*. Et pour y réussir plus facilement, je proposerai la construction d'un prisme rectangle; ce qui suffira, parcequ'il ne s'agit que de faire bien entendre le relief des trois pyramides qui sont representées dans la figure du prisme *ABCDEF*, car lorsqu'on les sçait reconnoître dans le prisme rectangle, on les distingue avec la même facilité dans le prisme oblique. Aprés avoir mené à volonté la ligne

AB, il faut [1] construire sur cette ligne un triangle équilateral *ABC*. Il faut [2] mener la

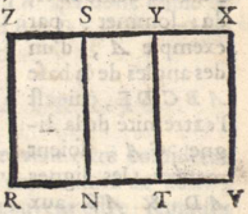


ligne *BD* perpendiculairement à *AB* & de telle longueur qu'on voudra, cette longueur sera la même que celle du prisme. Il faut mener la ligne *AD* pour former le triangle rectangle *ABD*. Et sur le côté *BD* on formera encore [3] le triangle rectangle *DBE* = *ABD*. Ensuite sur l'hypotenuse *AD*, il faut [2] construire un triangle Isoscele, & faire le côté *AF* = *AB*. Il faut encore [4] construire une seconde figure *GLMK* équilaterale à la precedente; observant seulement de faire le triangle isoscele *ILM* sur l'hypotenuse *IL* vers la main droite. Ensuite sur la ligne *OP* = *BD* il faut décrire deux triangles rectangles égaux chacun au triangle *ABD*, pour former le parallelogramme *NQ*, sur une des hypotenuses *NP* ou *OQ*, il faut former le triangle isoscele *NPR*, faisant le

[1] *Part.* 3. *Cor.* 4. *Prop.* 35. *Geo.*
[2] *Cor.* 7. *Prop.* 27. *Geo.*
[3] *Cor.* 4. *Prop.* 35. *Geo.*
[4] *Part.* 4. *Cor.* 4. *Prop.* 35. *Geo.*

troisiéme côté $RP = PQ$, & sur le côté RN on fera encore un autre triangle isoscele $SN = NO$. Il faut se servir de ciseaux pour couper le carton sur lequel on a décrit ces trois figures, & le couper en suivant les lignes *DFACBED*, &c. & avec un couteau on le coupera à moitié, suivant toutes les lignes transversales *P O*, *P N*, *N R*, *A D*, *H L*, &c. Enfin il faut plier la premiere figure de sorte que les points *F* & *E* se rencontrent sur le point *C*, & que les points *G* & *M* se trouvent sur le point *K*. Il faut appliquer le point *S* sur le point *O*, & le point *Q* sur le point *R*. Alors on aura trois pyramides, dont on en appliquera une, de maniere que son triangle isoscele se trouve sur l'isoscele *R S N*, & que l'isoscele de l'autre se trouve appliqué contre l'isoscele *N R P*; ce qui formera un veritable prisme triangulaire, tel qu'on l'a representé dans la démonstration de la prop. pres. Car les bases qui seront opposées *A B C* & *H I K* seront [1] égales & semblables, & les trois autres surfaces qui le termineront seront [2] des parallelogrammes.

On peut encore [3] faire les trois parallelogrammes rectangles *R S*, *N Y*, & *T X*, dont les trois bases *R N*, *N T*, *T V* soient égales entr'elles & chacune un peu plus grande que le côté *A B* d'une des figures precedentes, & la hauteur *R Z* soit égale à *B D*. Aprés



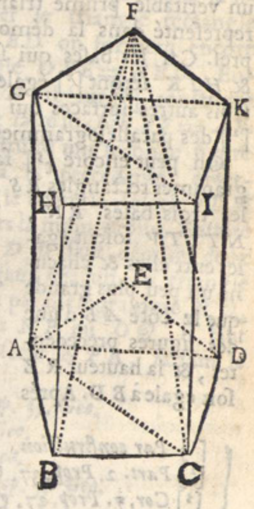
[1] *Par construction.*
[2] *Part. 2. Prop. 37. Geo.*
[3] *Cor. 7. Prop. 27. & Cor. 3. Prop. 37. Geo.*

cela il faut couper le carton, ſuivant le circuit du parallelogramme total *RX*, & enſuite le couper à moitié ſuivant les deux lignes *NS* & *TY*; & enfin appliquer la ligne *RZ* ſur la ligne *VX* pour former les contours d'un priſme dans lequel ſeront ajuſtées les trois pyramides qu'on vient de conſtruire.

COROLLAIRE I.

Non ſeulement la pyramide triangulaire, mais auſſi toute autre pyramide eſt la troiſiéme partie du priſme qui a même baſe & même hauteur que cette pyramide. Tout priſme, c'eſt à dire triangulaire ou autre, eſt donc triple d'une pyramide qui a même baſe & même hauteur que ce priſme.

Soit le priſme *ABCDEFGHIK*, & la pyramide pentagone *ABCDEF*, de même baſe & de même hauteur que ce priſme: Je dis que la pyramide *ABCDEF* eſt la troiſiéme partie du priſme *ABCDEFGHIK*. Pour le démontrer, du ſommet, par exemple *A*, d'un des angles de la baſe *ABCDE*, qui eſt l'extremité de la ligne *GA*, ſoient menées les lignes *AD* & *AC* aux ſommets de autres angles pour diviſer cette baſe en trian-



gles; & de l'autre extremité *G* de la même ligne *A* G soient encore menées les lignes *GK* & *GI* aux sommets des autres angles.

Le prisme *ABCDEFGHIK* sera divisé par les plans *GC* & *GD* en trois prismes triangulaires *ABCGHI*, *ACDGIK*, & *ADEGKF*. Pareillement la pyramide *ABCDEF* sera divisée en trois pyramides *ABCF*, *ACDF*, & *ADEF*. Mais chaque pyramide *ABCF*, *ACDF*, &c. qui fait partie de la pyramide totale *ABCDEF*, est [1] la troisiéme partie de chaque prisme triangulaire *ABCGHI*, *ACDGIK*, &c. qui fait partie du prisme total *ABCDEFGHIK*. Puisque toutes ces pyramides qui sont parties de la pyramide *ABCDEF*, & tous ces prismes qui sont parties du prisme *ABCDEFGHIK*, sont entre les mêmes plans paralleles *ABCDE* & *GHIKF*; les pyramides *ABCF*, *ACDF*, & *ADEF*, prises ensemble, c'est à dire la pyramide entiere *ABCDEF* est donc la troisiéme partie des prismes *ABCGHI*, *ACDGIK*, & *ADEGKF*, pris ensemble, c'est à dire du prisme entier *ABCDEFGHIK*. Enfin le prisme *ABCDEFGHIK* est donc triple de la pyramide polygone *ABCDEF* de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE II.

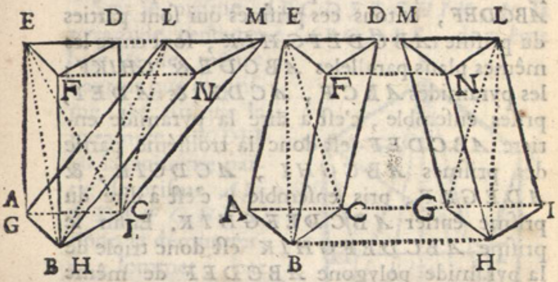
Puisque [2] les cones peuvent estre considerez comme des pyramides d'une infinité de côtez, & que [3] les cylindres peuvent estre regardez

[1] *Prop. pref.*
[2] *Def. 67. Geo.* [3] *Def. 76. Geo.*

comme des prismes aussi d'une infinité de côtez; il suit de la prop. pres. qu'un cone est la troisiéme partie d'un cylindre qui a même base & même hauteur ; ou que les cylindres sont triples des cones de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE III.

Les prismes triangulaires de même base & de même hauteur, ou qui sont sur des bases équilaterales, & entre les mêmes plans paralleles,

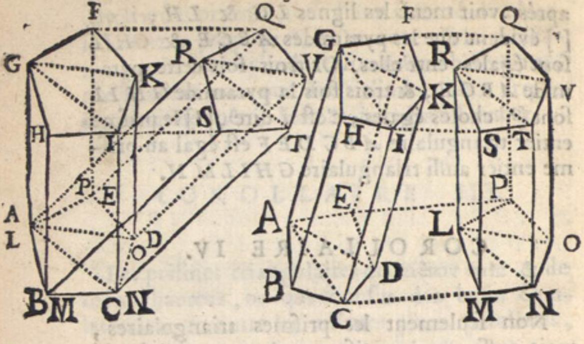


sont égaux entr'eux. Soient les prismes *ABC-DEF* & *GHILMN* sur la même base *ABC*, ou sur les bases égales *ABC* & *GHI*, & entre les mêmes plans paralleles *ABHI* & *EFNL* : Je dis que ces deux prismes sont égaux entr'eux. Car du point *E*, par exemple, aux points *B* & *C* aprés avoir mené les lignes *EB* & *EC*; & du point *L* aux points *G* & *H* aprés avoir mené les lignes *LG* & *LH*; il est [1] évident que les pyramides *ABCE* & *GHIL* sont égales entr'elles. Or trois fois cette pyramide *ABCE*, & trois fois la pyramide *GHIL* sont [2] choses égales; c'est à dire, [3] le prisme entier triangulaire *ABCDEF* est égal au prisme entier aussi triangulaire *GHILMN*.

COROLLAIRE IV.

Non seulement les prismes triangulaires, mais aussi tous les prismes polygones qui seront posez sur la même base, ou sur des bases équilaterales & équiangles l'une à l'autre, & qui seront de même hauteur, ou entre les mêmes plans paralleles, sont égaux entr'eux. Soient les prismes *ABCDEFGHIK* & *LMNOPQRSTV*, sur la même base *ABCDE*, ou sur les bases *ABCDE* & *LMNOP* équilaterales & équiangles l'une à l'autre, & posez entre les mêmes plans paralleles *ABCMNOPE* & *GHISTVQF*: Je dis que ces deux prismes sont égaux entr'eux. Pour le démontrer, des sommets *G* & *A*, *R* & *L* d'angles égaux de ces bases, soient menées des lignes droites aux sommets des autres angles, pour diviser ces bases en triangles. Alors les triangles d'une de ces bases seront égaux aux triangles de l'autre, chacun à chacun.

[1] *Prop. 80. Geo.*
[2] *Ax. 4. ou Ax. 6. gen.*
[3] *Prop. Pres.*



Car, puisque [1] l'angle $AED = LPO$, & [1] que $EA = PL$, & $ED = PO$; on [2] aura $AD = LO$. Ainsi [3] le triangle $AED = LOP$. L'angle $EDC = PON$ [1]; & [4] l'angle $EDA = POL$. Donc [5] l'angle $ADC = LON$. On vient de voir que le côté $AD = LO$; & [1] le côté $DC = ON$. Donc [2] le côté $AC = LN$. Donc le triangle $ACD = LNO$. Par le même raisonnement on trouvera que le triangle $ABC = LMN$.

Le prisme triangulaire $ADEFGK$ est [6] égal au prisme $LOPQRV$, & le prisme $ACDKGI = LNOVRT$, & le prisme $ABCIGH = LMNTRS$, c'est à dire [7] que le prisme total $ABCDEFGHIK$ est égal au prisme entier $LMNOPQRSTV$.

[1] *Supposit.*
[2] *Part. 1. Prop. 35. Geo.*
[3] *Ax. 1. Geo.*
[4] *Cor. 2. Prop. 35. Geo.*
[5] *Ax. 9. Gen.*
[6] *Cor. 3. Prop. Pref.*
[7] *Ax. 3. Gen.*

COROLLAIRE V.

Il ſuit du Corollaire 4. de la prop. preſ. que les cylindres qui ont même baſe & même hauteur ſont égaux entr'eux.

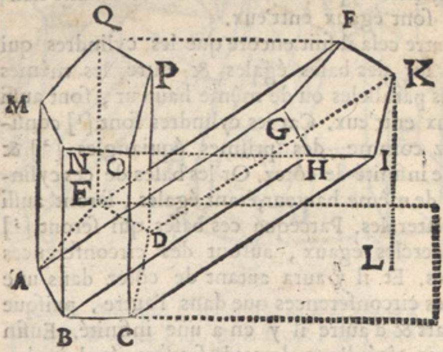
Outre cela il ſuit encore que les cylindres qui ſont ſur des baſes égales & entre les mêmes plans paralleles ou de même hauteur, ſont auſſi égaux entr'eux. Car les cylindres ſont [1] conſiderez comme des priſmes équiangles [2] & d'une infinité de côtez. Or les baſes de ces cylindres de même hauteur, étant égales, ſeront auſſi équilaterales. Parceque ces baſes qui ſeront [3] des cercles égaux, auront des circonferences égales. Et il y aura autant de côtez dans une de ces circonferences que dans l'autre, puiſque de part & d'autre il y en a une infinité. Enfin chaque côté d'une de ces baſes ſera égal à chaque côté de l'autre; puiſque [4] chaque infinitiéme partie de la circonference d'une de ces baſes égales, eſt égale à chaque infinitiéme partie de la circonference de l'autre baſe. Non ſeulement les cylindres de même baſe & de même hauteur; mais auſſi ceux qui auront des baſes égales, & qui ſeront auſſi de même hauteur, ſeront donc égaux entr'eux.

COROLLAIRE VI.

Un priſme oblique eſt égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Soit, par exemple, le priſme oblique *ABCDEFGHIK*: Je dis que ſi on multiplie la baſe *ABCDE* par la hauteur *KL*, ou *AM*, qui eſt une ligne

[1] *Def. 76. Geo.*
[2] *Cor. Prop. 47. & Def. 60. Geo.*
[3] *Suppoſit.*
[4] *Ax. 12. Geo.*

menée perpendiculairement d'un point d'une des bases, par exemple *ABCDE*, à l'autre base



parallele, & semblable *GHIKF* prolongée; le produit de cette multiplication exprimera la grandeur de la masse, du volume, ou de la solidité de ce prisme. Car ce produit est [1] le prisme rectangle *ABCDEQMNOP*, qui est [2] égal au prisme oblique proposé *ABCDEFGHIK*. Pour connoître combien de pieds cubiques, de toises cubiques, &c. contient un prisme oblique, il suffit donc de multiplier sa base par sa hauteur.

COROLLAIRE VII.

Un cylindre oblique est égal au produit de sa base multipliée par sa hauteur. Car lorsqu'on multiplie la base de ce cylindre oblique par sa hauteur, on a pour produit un cylindre rectangle égal au cylindre oblique dont il s'agit.

[1] *Cor. 2. Def. 75. Geo.*
[2] *Cor. 4. Prop. Pres.*

COROLLAIRE

COROLLAIRE VIII.

Une pyramide eſt donc égale au tiers du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur. Car ſi on multiplie la baſe d'une pyramide droite, ou oblique, par la hauteur de cette pyramide, le produit eſt un priſme de même hauteur, dont cette pyramide eſt [1] la troiſiéme partie. Si on multiplie la baſe d'une pyramide par la troiſiéme partie de ſa hauteur, ou ſa hauteur par la troiſiéme partie de ſa baſe ; le produit exprimera auſſi la ſolidité de cette pyramide. Parceque la moitié du produit de deux grandeurs multipliées l'une par l'autre, eſt égal au produit d'une de ces grandeurs multipliée par la moitié de l'autre.

COROLLAIRE IX.

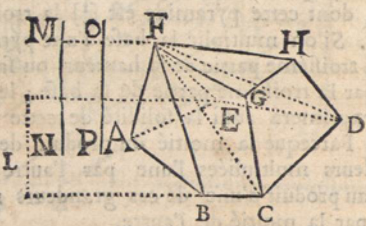
Un cone eſt égal au tiers du produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur ; ou au produit de ſa baſe multipliée par la troiſiéme partie de ſa hauteur ; ou enfin au produit de ſa hauteur multipliée par le tiers de ſa baſe. Car lorſqu'on multiplie la baſe d'un cône par ſa hauteur, le produit eſt un cylindre dont ce cône eſt [2] la troiſiéme partie.

COROLLAIRE X.

Pour connoître la ſolidité des autres corps terminez par des ſurfaces planes, il faut les

[1] *Prop. preſ. ou Cor.* 1. *Prop. preſ.*
[2] *Cor.* 2. *Prop. preſ.*

considerer comme divisez en pyramides ; de même que les surfaces planes irregulieres ont été [1] considerées comme divisées en triangles. Ensuite il faut [2] chercher la solidité de chaque pyramide, & la somme des soliditez de ces pyramides sera la masse ou solidité du corps proposé.



Soit le corps *ABCD FGH* que je suppose estre une grosse piece de marbre terminée par sept surfaces, sçavoir *A BCDE*, *FGH*, *ABF*, *BCGF*, *CDHG*, *EDHF*, & *AEF*; si on mene les lignes *FC* & *FD*, ce corps sera divisé en ces deux pyramides *ABC-DEF* & *GCDHF*. Si on peut mener [3] du point *F* une ligne perpendiculaire à la base *ABCDE* prolongée, cette perpendiculaire sera la hauteur de la pyramide *ABCDEF*. Si on ne peut mener cette perpendiculaire du point *F*, aprés avoir prolongé cette base *ABCDE* vers L, par exemple ; il faut lui ajuster perpendiculairement deux bâtons *MN* & *OP*, de maniere que ces deux bâtons & le point *F* se trouvent dans le même plan, ce qui se fera

[1] *Cor. 2. Prop. 40. Geo. page 398,*
[2] *Cor. 8. Prop. pres.*
[3] *Cor. 2. Prop. 69.*

[1] en regardant le bâton *M N* & le point *F*, & en posant le bâton *O P* de sorte que le bâton *M N* le couvre à la vûe. Ensuite en borneiant, il faut chercher le point *M* jusqu'à ce qu'en regardant par le point *M* & par le point *F*, on rencontre le point *O* de sorte que la longueur *O P* soit égale à *M N*. Alors *M N* sera égale à la hauteur de la pyramide *A B C D E F*. Parceque la ligne *M F* ayant [2] ses deux points *M* & *O* également [3] distans du plan *LBCDEL*, elle sera [4] parallele au plan *LBCDEL*. On pourra de même trouver la hauteur de la pyramide *G C D H F*, en prolongeant la base *G C D H* par le moyen de quelque planche ou ais aplani qu'on apliquera à cette base. Enfin la solidité de ces deux pyramides fera [5] connoître la solidité totale du corps proposé.

REMARQUE.

Il y a des corps irreguliers, par exemple une Statue, un Vaisseau dont la surface est en partie plane & en partie courbe, selon l'ornement qui s'y rencontre, &c. Alors on ne peut pas facilement diviser ces corps en des pyramides, ou en d'autres corps reguliers, pour en connoître la solidité. Mais on pourra se servir de cette methode qui est assez exacte, quoiqu'elle ne soit pas entierement geometrique.

Il faut construire une caisse ou coffre de bois, dont la figure soit un parallelepipede rectangle,

[1] *Part. 1. Cor. 5. Prop. 34. Geo.*
[2] *Par construction.*
[3] *Cor. Prop. 70. Geo.*
[4] *Cor. Prop. 8. & Def. 8. Geo.*
[5] *Ax. 3. Gen.*

& d'une grandeur suffisante pour que le corps dont on veut connoître la solidité puisse y être contenu & y être couvert d'eau. Il faut exactement enduire le dedans de cette caisse avec de la poix, afin que l'eau qu'on y mettra y soit retenue sans qu'elle s'écoule aucunement.

Ayant posé le fond de cette caisse parallelement à l'horizon, par le moyen d'un niveau ; il faut mettre dans cette caisse le corps irregulier, & y verser ensuite de l'eau pour la remplir, de sorte que le corps irregulier soit couvert entierement de cette eau. Aprés cela il faut marquer sur les côtez de la caisse, l'endroit où se termine la surface superieure de l'eau dans laquelle est plongé le corps irregulier.

Enfin il faut retirer ce corps hors de l'eau, & aprés qu'elle sera tranquille, il faudra encore marquer sur les côtez de la caisse l'endroit où se termine la surface superieure de l'eau, & mesurer [1] la solidité des deux parallelepipedes, dont la base commune est le fond de cette caisse, & les hauteurs particulieres de chacun sont les lignes droites menées depuis chacune de ces deux marques perpendiculairement à cette base commune. Ensuite il faut soustraire le plus petit parallelepipede du plus grand, ce qu'on trouvera pour reste exprimera la solidité du corps irregulier proposé.

[1] *Cor. 2. Def. 75. Geo.*

PROPOSITION LXXXII.

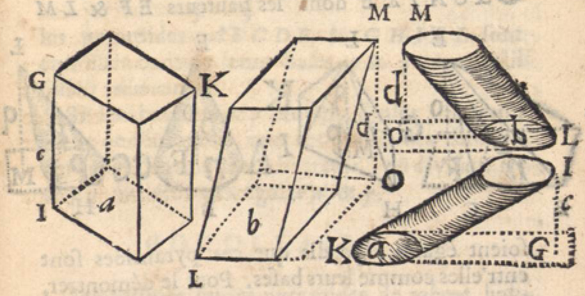
1°. *Les prismes & les cylindres dont les hauteurs sont égales, sont entr'eux comme leurs bases ; & si les bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.*

2°. *Les pyramides & les cones dont les hauteurs sont égales, sont aussi entr'eux comme leurs bases ; & si leurs bases sont égales, ils sont entr'eux comme leurs hauteurs.*

DEMONSTRATION

DE LA PREMIERE PARTIE.

SOient les prismes, ou les cylindres, *I K* & *L M* dont les hauteurs *I G* & *M O* sont éga-



les : Je dis qu'ils sont entr'eux comme leurs bases. Pour le démontrer, soit nommée *a* la base du prisme *I K*, & sa hauteur *G I* soit nommée *c*. Soit ensuite nommée *b* la base du prisme *L M*, & *d* sa hauteur *M O*.

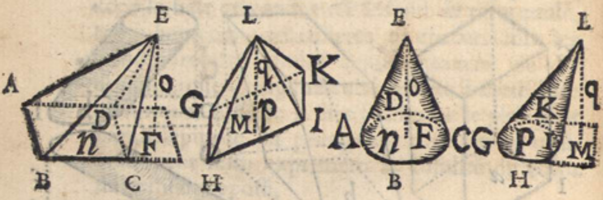
[1] Le priſme ou le cylindre $IK = ac$, & le priſme $LM = bd$. Donc [2] $IK . ac :: LM . bd$. & [3] $IK . LM :: ac . bd$. Mais puiſque [4] la hauteur $c = d$; on [5] aura $ac . bd :: a . b$. on aura donc cette ſuite de rapports égaux $IK . LM :: ac . bd :: a . b$. Donc [6] $IK . LM :: a . b$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si les baſes a & b étoient égales, puiſque $IK . LM :: ac . bd$, en diviſant les deux derniers termes de cette analogie par a & b; on trouveroit que $ac . bd :: c . d$. Donc $IK . LM :: ac . bd :: c . d$. Donc IK ſeroit à LM comme la hauteur c à la hauteur d.

DEMONSTRATION

DE LA SECONDE PARTIE.

Soient les pyramides ou les cones $ABCDE$ & $GHIKL$ dont les hauteurs EF & LM



ſoient égales : Je dis que ces pyramides ſont entr'elles comme leurs baſes. Pour le démontrer,

[1] *Cor.* 2. *Def.* 75. *Cor.* 6. & 7. *Prop.* 81. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *Def.* 12. & *Def.* 13. *Algeb.*
[3] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[4] *Suppoſit.*
[5] *Prop.* 6. *Algeb.*
[6] *Cor.* 3. *Def.* 12. *Algeb.*

j'appellerai n la base AC de la pyramide $ABCDE$, & j'appellerai o sa hauteur EF; je nommerai p la base de la pyramide $GHIKL$ & q sa hauteur LM.

[1] La pyramide ou le cone $ABCDE = \frac{no}{3}$, & la pyramide ou le cone $GHIKL = \frac{pq}{3}$.

Donc [2] $ABCDE . \frac{no}{3} :: GHIKL . \frac{pq}{3}$;

& [3] $ABCDE . GHIKL :: \frac{no}{3} . \frac{pq}{3}$.

Or[4] $\frac{no}{3} . \frac{pq}{3} :: no . pq$. & [5] en divisant no & pq par les hauteurs [6] égales o & q, on aura $no . pq :: n . p$. On trouvera donc cette suite de rapports égaux $ABCDE . GHIKL :: \frac{no}{3} . \frac{pq}{3} :: no . pq :: n . p$. Donc les pyramides $ABCDE$ & $GHIKL$ sont entr'elles comme leurs bases n & p, *ce qu'il falloit démontrer.*

Si les bases n & p étoient égales, il seroit facile de démontrer que ces pyramides seroient entr'elles comme leurs hauteurs, en divisant no & pq par ces bases égales n & p.

COROLLAIRE I.

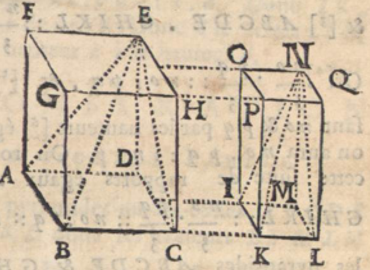
Les prismes ou les pyramides de même hau-

[1] *Cor.* 8. & 9. *Prop.* 81. *Geo.*
[2] *Def.* 13. *Algeb.*
[3] *Part.* 2. *Cor. Prop.* 3. *Algeb.*
[4] *Prop.* 5. *Algeb.*
[5] *Prop.* 6. *Algeb.*
[6] *Supposit.*

teur & de même base, ou dont les bases sont égales, quand même ces bases ne seroient ni équilaterales, ni équiangles, sont [1] égaux, ou égales entr'elles.

COROLLAIRE II.

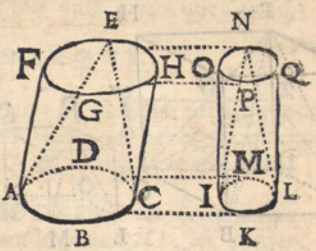
Si deux prismes de même hauteur, par exemple *ACFH* & *ILOQ*, ont des bases semblables *ABCD* & *IKLM*, de sorte que chaque côté de cette base *ABCD* soit double de chaque côté de la base *IKLM*, le prisme *ACFH* sera égal à quatre fois le prisme *ILOQ*. Car alors la base *AC* sera [2] quadruple de la base *IL*. Le prisme *ACFH* sera [3] donc quadruple du prisme *ILOQ*.



De même, si le diametre de la base *AC* du cylindre *ACFH* est double du diametre de la base *IL* du cylindre *ILOQ* de même hauteur; le quarré de ce diametre de la base *AC* sera [2] quadruple du quarré du diametre de la base *IL*. Et puisque les cercles sont [4] entr'eux comme les quarrez de leurs diametres, le cercle *AC* sera

[1] *Prop. Pres.*
[2] *Cor. 2. Prop. 62. Geo.*
[3] *Part. 1. Prop. Pres.*
[4] *Cor. 2. Prop. 63. Geo.*

aussi quadruple du cercle *I L.* Enfin [1] le cylindre *A C F H* sera donc quadruple du cylindre *I L O Q.*



On peut [2] dire la même chose des pyramides, ou des cones, *ABCDE* & *I K L M N* de même hauteur.

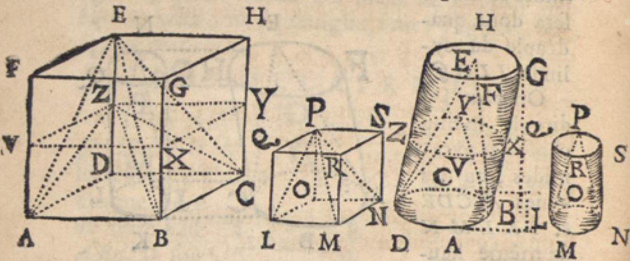
COROLLAIRE III.

Si deux prismes, ou pyramides, ont des bases semblables, & si chaque côté de la base du premier de ces corps, est double de chaque côté de la base du second, & si la hauteur du premier est double de celle du second de même genre; le premier vaudra huit fois autant que le second. Soit le prisme *A C F H* dont la base *A C* est semblable à la base *L N* du prisme *L N Q S*, & chaque côté de cette base *A C* soit double de chaque côtè de la base *L N*; soit le diametre de la base *A C* du cylindre *A C F H* double du diametre de la base *L N* du cylindre *L N Q S.* Enfin la hauteur *G B* de ce premier prisme ou cylindre soit double de la hauteur *N S* du second: ce premier prisme sera octuple du second.

Car dans le prisme, ou cylindre *A H* si nous considerons un autre prisme ou cylindre *A C V Y* de même hauteur que le prisme ou cylindre

[1] *Part. 1. Prop. Pres.*
[2] *Part. 2. Prop. Pres.*

LNQS, ce priſme *ACVY* ſera [1] quadruple du priſme *LNQS*. Mais le priſme entier



AH dont la hauteur eſt [2] double de celle du priſme *LS*, ou du priſme *AY*, ſera [3] double du priſme *AY*; puiſqu'ils ſont entr'eux comme leurs hauteurs, étant l'un & l'autre ſur la même baſe *AC*. Le priſme *AH* ſera donc double du quadruple du priſme *LS*. Or ce double du quadruple eſt octuple; parceque le priſme *VH* ſera auſſi quadruple du priſme *LS*. Le priſme ou le cylindre *AH* ſera donc octuple du priſme ou du cylindre *LS*.

La même choſe eſt évidente par le même raiſonnement à l'égard des pyramides *ABCDE* & *LMNOP*, ou des cones *ABCDE* & *LMNOP*.

On trouvera auſſi par un raiſonnement ſemblable que, ſi deux de ces corps de même genre ont leurs baſes ſemblables, & ſi chaque côté d'une de ces baſes eſt triple de chaque côté de la baſe de l'autre, la hauteur de l'un étant double de la hauteur de l'autre; un de ces corps ſera dix-

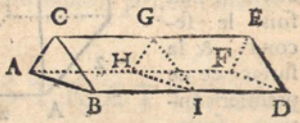
[1] *Cor. 2. Prop. Pref.*
[2] *Suppoſit*
[3] *Part. 1. Prop. Pref.*

huit fois aussi grand que l'autre. Enfin, si la hauteur de l'un est triple de la hauteur de l'autre, l'un sera vingt-sept fois aussi grand que l'autre, &c.

REMARQUE.

Si on divise un corps en plusieurs parties; la somme des surfaces de toutes ces parties sera plus grande que la surface de ce même corps avant qu'il fût divisé.

Soit le corps *ABCDEF*; il est évident que si on le coupe suivant le plan *GHI*, les parties *ABCIGH* & *IGHFDE* seront terminées par les mêmes surfaces qui terminoient le corps entier, & seront



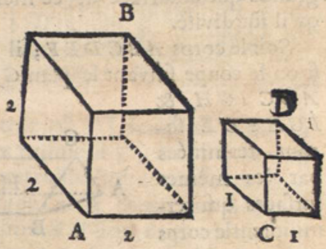
encore en outre terminées par deux nouvelles surfaces *IGH* & *IGH*.

Si on continue à diviser à volonté ces parties; on trouvera encore que, y ayant de nouvelles parties plus petites, la somme de leurs surfaces deviendra encore plus grande que la surface qui appartenoit au tout avant la division. Enfin la multitude des coupes multiplie les surfaces sans augmenter la masse totale, qui est toujours la même.

Il est donc évident que le rapport de la masse d'un grand corps à celle d'un petit de figure semblable, est plus grand que celui de la surface de ce grand corps à celle du petit. Car ce grand corps contient plus de fois le petit, que la surface de ce grand corps ne contient celle du petit.

Soit le corps *A* qui contienne le corps *B*, par exemple six fois. Le corps *A* sera donc égal à 6 *B*. Mais la surface du corps *A* ne contiendra pas six fois la surface du corps *B*; puisque, comme on vient de voir, six fois la surface du corps *B*, ou de 6 *B*, est plus grande que la surface du corps *A*.

Soit le cube *AB* dont chacune des trois dimensions est de deux pieds; & le cube *CD* dont chacune des trois dimensions est d'un pied. Le premier cube [r] contient huit fois le second : & la surface de ce premier contient seulement quatre fois celle du second; c'est à dire que le corps *AB* . *CD* : : 8. 1. & la surface de *AB* est à la surface de *CD*, comme 24 à 6. ce qui fait voir que les petits corps ont plus de surface par rapport à leurs masses, que les grands, dont la figure est semblable à celle des petits.



On pourroit encore dire que plus la figure des corps approche de la cubique, ou de la spherique, moins ils ont de surface par rapport à leur masse.

Enfin, comme les quarrez ou les cercles ont plus de surface par raport à leur circuit, que toute autre figure plane; de même les cubes, ou les Spheres, sont les corps qui ont le plus de masse par raport à leurs surfaces. La brieveté que je me suis proposée dans ces élémens m'empêche de le démontrer plus amplement.

[r] *Cor.* 3. *Prop. Pres.*

PRO-

PROPOSITION LXXXIII.

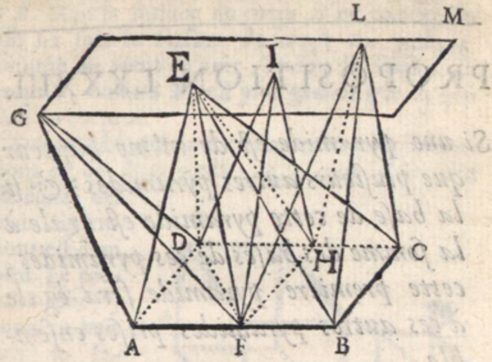
Si une pyramide eſt de même hauteur que pluſieurs autres pyramides ; & ſi la baſe de cette pyramide eſt égale à la ſomme des baſes de ces pyramides, cette premiere pyramide ſera égale à ces autres pyramides priſes enſemble.

DEMONSTRATION.

Soit la pyramide *ABCDE* de même hauteur que les pyramides *AFDG*, *DFHI*, *FBCHL*; & ſoit la baſe *ABCD* de la pyramide *ABCDE* égale à la ſomme des baſes *AFD*, *DFH*, & *HFBC* de ces autres pyramides : je dis que la pyramide *ABCDE* ſera égale à la ſomme des pyramides *AFDG*, *DFHI*, & *FBCHL*. Pour le démontrer, ſoient menées les lignes *EF* & *EH*.

La pyramide *ABCDE* eſt [1] égale aux pyramides *AFDE*, *FHDE*, & *FBCHE*, priſes enſemble. Or [2] la pyramide *AFDE* eſt égale à

[1] *Ax. 3. Gen.*
[2] *Prop. 80. Geo.*



AFDG ; la pyramide *FHDE* = *FHDI* ; & la pyramide *FBCHE* eſt égale à la pyramide *FBCHL*. Au lieu des pyramides *AFDE* + *FHDE* + *FBCHE*, ſi [1] on prend ce qui leur eſt égal ſçavoir *AFDG* + *FHDI* + *FBCHL* ; on trouvera donc que la pyramide *ABCDE* ſera égale à la ſomme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL*, dont les baſes priſes enſemble ſont égales à la baſe *ABCD*, & dont les hauteurs ſont égales à celle de la pyramide *ABCDE* ; ces pyramides étant entre les mêmes plans paralleles *ABCD* & *GM*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On vient de voir [2] que la pyramide *ABCDE* eſt égale à la ſomme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL*, qui ſont [3] de même hauteur que cette pyramide *ABCDE*. Or la pyramide

[1] *Demande* 1. *gen.*
[2] *Prop. Preſ.*
[3] *Suppoſit.*

ABCDE eſt [1] égale au produit de ſa baſe *ABCD* multipliée par le tiers de la hauteur, & cette baſe *ABCDE* eſt [2] la ſomme des baſes de ces pyramides *AFDG*, *FHDE*, & *FBCHL*, Il eſt donc évident [3] que la ſomme des pyramides *AFDG*, *FHDI*, *FBCHL* qui ſont de même hauteur, eſt égale au produit de la ſomme de leurs baſes, multipliée par le tiers de leur hauteur commune.

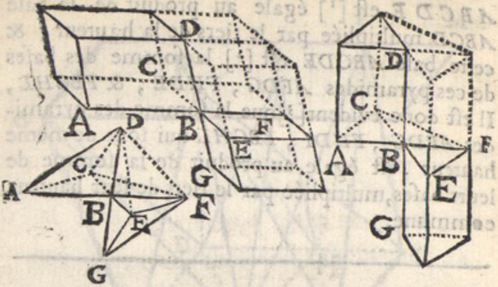
PROPOSITION LXXXIV.

Le rapport qui eſt entre les pyramides triangulaires ſemblables; entre les priſmes triangulaires ſemblables; entre les parallelepipedes ſemblables; eſt triplé de celui qui eſt entre deux des côtez homologues des ſurfaces ſemblables qui les terminent.

DEMONSTRATION.

Soient deux de ces ſolides ſemblables *ABCD* & *BEFG*. Soient *AB* & *BF*; *CB* & *BE*; *DB* & *BG*, côtez homologues des ſurfaces ſemblables *ABC*, *BEF*; *CBD* & *BGE* : c'eſt à dire que *AB* ſoit à *BF* : : *CB*. *BE* : : *DB*. *BG*. Je dis que le rapport du ſolide *ABCD* au ſolide *BEFG*, eſt doublé du rapport de *AB* à *BF*. Pour le démontrer je conſidererai le ſolide *BEFG* appliqué prés le ſolide *ABCD*, de ſorte que les trois lignes *BE*, *BF*, & *BG* qui comprennent les angles plans d'un angle ſolide

[1] *Cor. 8. Prop. 81. Geo.*
[2] *Suppoſition.*
[3] *Dem. 1. gener.*



du corps *BEFG*, & les trois lignes *AB*, *BC*, & *BD*, qui comprennent des angles plans égaux [1] aux precedens dans le solide *ABCD*, soient trois lignes droites *ABF*, *CBE*, & *DBG*. Ce qui est [2] possible, en faisant l'angle *ABE* = *CBF*, & en faisant l'angle *DBE* = *CBG*. Ensuite soient prolongées les surfaces de ces deux solides *ABCD* & *BEFG*, pour décrire les deux nouveaux solides *CBFD*, & *BEFD*.

[3] Le solide *ABCD* est au solide *CBFD* :: *ABC* . *CBF* :: *AB* . *BF*. [4].

[3] Le solide *CBFD* est au solide *BEFD* :: *CBF* . *BEF* :: *CB* . *BE*. [4]

Enfin [3] le solide *BEFD*, ou *DBEF*, est au solide *BEFG*, ou *BGEF*, comme la base *DBE* est à la base *BGE* :: *DB* . *BG*.

Puisque les surfaces *ABC*, *BEF*; *CBD* & *BGE* sont [5] semblables, nous avons *AB* . *BF* :: *CB* . *BE* :: *DB* . *BG*. C'est à dire que nous avons ces trois rapports égaux entr'eux.

[1] *Suppos. & Def. 60. Geo.*
[2] *Part. 2. Prop. 22. Geo.*
[3] *Prop. 82. Geo.*
[4] *Prop. 49. Geo.* [5] *Supposit.*

ABCD . *CBFD* :: *ABC* . *CBF* :: *AB* . *BF* .
CBFD . *BEFD* :: *CBF* . *BEF* :: *CB* . *BE* .
BEFD . *BEFG* :: *DBE* . *BGE* :: *DB* . *BG* .

AB . *BF* :: *CB* . *BE* :: *DB* . *BG* .
ABCD . *CBFD* :: *CBFD* . *BEFD* :: *BEFD* . *BEFG* .

Donc ∺ *ABCD* . *CBFD* . *BEFD* . *BEFG* .

On vient de démontrer que le rapport du ſolide *ABCD* au ſolide *CBFD* eſt égal à celui de *AB* à *BF* ; que le rapport du ſolide *CBFD* au ſolide *BEFD* eſt égal à celui de *CB* à *BE* ; enfin que le rapport du ſolide *BEFD* au ſolide *BEFG* eſt égal à celui de *DB* à *BG*.

On trouvera donc cette progreſſion geometrique ∺ *ABCD* . *CBFD* . *BEFD* . *BEFG*.

Le rapport du ſolide *ABCD* à *BEFG* ſera donc [1] triplé du rapport de *ABCD* à *CBFD*.

Au lieu du rapport de *ABCD* à *CBFD* , prenons [2] le rapport des deux côtez homologues *AB* & *BF* des ſurfaces ſemblables , qui lui eſt égal. Nous trouverons le rapport du ſolide *ABCD* au ſolide ſemblable *BEFG* , triplé de celui des côtez homologues *AB* & *BF* des ſurfaces qui les terminent , *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Les pyramides triangulaires ſemblables ; les priſmes triangulaires ſemblables ; & les parallelepipedes ſemblables étant [3] entr'eux. En rapport ou en raiſon triplée des côtez homologues

[1] *Prop.* 19. *Algeb.* & *def.* 18. *d'Algeb.*
[2] *Demande* 1. *Geo.*
[3] *Prop. pref.*

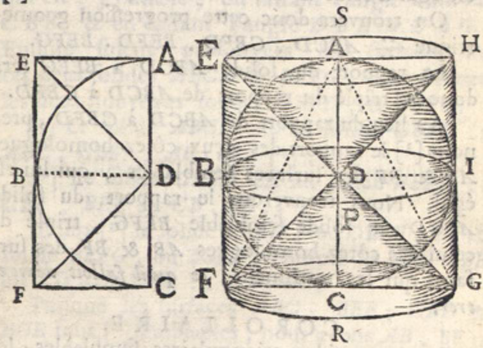
des ſurfaces ſemblables qui terminent ces ſolides : & les cubes de ces côtez homologues étant [1] auſſi entr'eux en raiſon triplée de ces mêmes côtez homologues ; il eſt évident [2] que ces ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes des côtez homologues des ſurfaces ſemblables qui les terminent.

PROPOSITION LXXXV.

Une boule, ou Sphere, eſt égale aux deux tiers d'un cylindre qui lui eſt circonſcrit.

DEMONSTRATION.

Le parallelogramme rectangle *FCAE* étant [3] circonſcrit au demi cercle *ABCD* ; le



rayon *DB* étant mené du centre *D* au point d'attouchement B ; enfin les lignes *DE* & *DF* qui ſeront les diagonales des [4] quarrez BA

[1] *Cor.* 1. *prop.* 18. *Algeb.*
[2] *Cor.* 3. *def.* 12. *Algeb.*
[3] *Cor.* 4. *prop.* 12. *Geo.*
[4] *Prop.* 12 ; *prop.* 15 ; *& def.* 50. *Geo.*

& BC, étant menées du même centre *D* aux points *E* & *F* : si on considere que ce parallelogramme *EC* tourne, ou fasse une revolution au tour du diametre *AC* ; il est évident [1] qu'il y aura des corps de trois sortes qui seront décrits par ce mouvement,

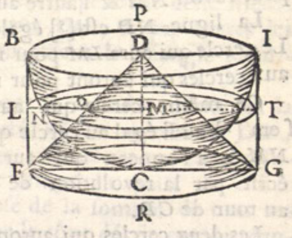
1°. Le cylindre droit *FH*, par le mouvement du parallelogramme rectangle *EC*,

2°. Une Sphere *ABCI*, par le mouvement du demi cercle *ABCD*,

3°. Deux cones droits *ESHD* & *FRGD*, par le mouvement des triangles rectangles *EDA* & *FDC*.

Alors la [2] perpendiculaire *DB* ayant décrit le grand cercle B*PI* de la Sphere parallelement à la base *FRG*, le cylindre *FI* sera [3] la moitié du cylindre *FH*.

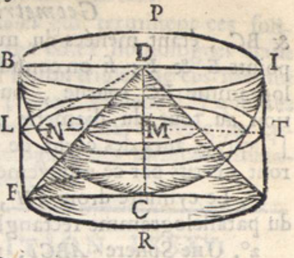
Je démontrerai premierement que l'excés dont le cylindre *FI* circonscrit à l'hemisphere ou demie boule B*CI*, surpasse cette demie sphere B*CI*, est égal au cone *FRGD*.



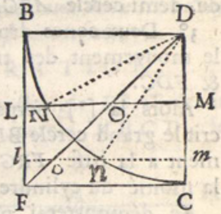
Considerons ces trois corps coupez par des plans dont le nombre est indéfini, & qui soient tous paralleles à la base B*PI*, ou *FRG* ; & faisons ensuite attention à un de ces plans, par exemple *LM* ou *LT*.

Le cercle qui aura pour rayon *ND* sera

[1] *Cor.* 1. *def.* 61. *Geo.*
[2] *Prop.* 12. *Geo.* [3] *Part.* 1. *prop.* 82. *Geo.*



[1] égal aux cercles dont un aura pour rayon *NM*, & l'autre aura pour rayon *MD*. Parceque *LM* étant parallele à la base *FC*, l'angle *NMD* est [2] droit : or puisque [3] *FC* . *CD* :: *OM* . *MD*. & que [4] *FC* = *CD*, on aura donc aussi *OM* = *MD*. Au lieu du cercle qui a pour rayon *MD*, prenons donc son égal, sçavoir celui qui aura pour rayon *OM*. Nous



trouverons que le cercle qui aura pour rayon *ND*, sera égal aux deux cercles dont un aura pour rayon *NM* & l'autre aura pour rayon *OM*.

La ligne *ND* est [5] égale à *BD* = *LM* [6]. Le cercle qui aura *LM* pour rayon sera donc égal aux cercles qui auront pour rayons *NM* & *OM*.

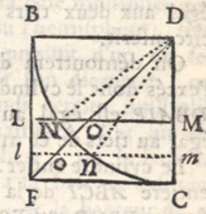
Ce même cercle qui aura *LM* pour rayon sera [7] aussi égal au cercle qui aura pour rayon *NM* & à l'anneau qui aura *LN* pour largeur, écrit par la revolution de la ligne droite *LN* au tour de *CD*.

Les deux cercles qui auront pour rayons *NM* & *OM*, seront donc [8] égaux au cercle qui aura

[1] *Cor. 2. prop. 63. & part. 1. prop. 57. Geo.*
[2] *Part. 1. prop. 24. Geo.*
[3] *Part. 1. prop. 52. Geo.*
[4] *Cor. 1. prop. 37. Geo.*
[5] *Cor. 1. def. 29. Geo.*
[6] *Part. 1. prop. 37. Geo.*
[7] *Ax. 3. gen.*
[8] *Ax. 18. gen.*

pour rayon *NM*, & à l'anneau qui aura *LN* pour largeur.

Rettanchons de part & d'autre le cercle qui aura pour rayon *NM*, l'anneau qui aura pour largeur *LN* reſtera [1] égal au cercle qui aura pour rayon *OM*. On peut démontrer cette verité de la même maniere à l'égard de chaque anneau & de chaque cercle correſpondant à même hauteur dans le cône *FRGD* pour chaque coupe ou ſection poſſible de ce cylindre, faite parallelement à ſa baſe dans toutes les hauteurs poſſibles.



Or la ſomme de tous ces anneaux décrits dans la révolution de la figure *BC* au tour de *CD*, par *LN* & par toutes les autres lignes qui compoſent le triangle mixte *BFC*, ſera égale à la ſomme des cercles décrits pendant cette même révolution par le rayon *OM*, & par toutes les autres lignes qui compoſent le triangle rectiligne *FCD*.

Puiſque l'excés dont le cylindre décrit par la révolution du quarré *BFCD* au tour de *CD*, ſurpaſſe l'hemiſphere auſſi décrit par la révolution faite en même temps du quart de cercle *BNCD*, eſt compoſé de la ſomme de tous ces anneaux; & puiſque le cône décrit par la révolution du triangle *FCD* faite auſſi au tour de *CD*, eſt compoſé de la ſomme des cercles décrits par le rayon *OM*, & par toutes les autres lignes qui compoſent ce même triangle rectangle *FCD*: Il ſuit que cet excés dont le cylindre ſurpaſſe l'hemiſphere, ſera égal à ce cône.

[1] *Ax. 9. gen.*

Or ce cône *FRGD* étant de même base & de même hauteur que le cylindre *FI*, il sera [1] la troisiéme partie de ce même cylindre. L'excés dont ce cylindre *F I* surpasse l'hemisphere *DBCIP*, sera donc égal à la troisiéme partie de ce même cylindre *FI*. L'hemisphere restera donc égal aux deux tiers du cylindre *FI* qui lui est circonscrit.

On démontrera de la même maniere que l'excés dont le cylindre *BH* surpasse l'hemisphere *DBAIP* est égal au cône *ESHD* qui est aussi égal au tiers de ce même cylindre *BH*.

Le cylindre entier *FH* surpasse donc la Sphere entiere *ABCI* de la valeur des deux cônes [2] égaux *FRGD* & *ESHD*.

Mais le cône *FRGA* étant [3] double du cône *FRGD* est égal à ces deux cônes égaux *FRGD* & *ESHD*; & ce même cône *FRGA* est [1] le tiers du cylindre entier *FH*.

L'excés dont ce cylindre *FH* surpasse la Sphere *ABCI* qui lui est inscrite, est donc égal au tiers de ce même cylindre. La Sphere *ABCI* reste donc égale aux deux tiers du cylindre *FI* qui lui est circonscrit, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Une Sphere, ou hemisphere, est double du cône qui a même base & même hauteur. Parceque ce cône est [3] le tiers du cylindre circonscrit à la Sphere, ou à l'hemisphere, & cette

[1] *Cor.* 2. *prop.* 81. *Geo.*
[2] *Cor.* 1. *prop.* 82.
[3] *Part.* 2. *prop.* 82.

Sphere, ou hemiſphere eſt [1] les deux tiers de ce même cylindre.

COROLLAIRE II.

Il eſt donc évident que, puiſqu'un cylindre eſt [2] égal au produit de ſa baſe multipliée par ſa hauteur, la Sphere, ou l'hemiſphere, ſera égale aux deux tiers du produit d'un de ſes grands cercles multiplié par ſon diametre ; ou au produit d'un de ſes grands cercles multiplié par les deux tiers du diametre. Car un des grands cercles de cette Sphere, ou la baſe de l'hemiſphere, eſt [3] égal à la baſe du cylindre auquel elle eſt circonſcrite ; & la hauteur de ce cylindre eſt égale à un des diametres de la Sphere, ou au rayon de l'hemiſphere. Ce qui eſt un moyen tres-facile pour connoître la ſolidité d'une Sphere.

COROLLAIRE III.

Puiſque l'hemiſphere eſt [4] égal au produit de la baſe multipliée par les deux tiers de ſa hauteur, ou de ſon rayon ; le double de l'hemiſphere, ou la Sphere entiere, ſera égale au produit d'un de ſes grands cercles par les quatre tiers du rayon ; c'eſt à dire [5], par les deux tiers du diametre.

Or le produit des quatre tiers d'un rayon mul-

[1] *Prop. preſ.*
[2] *Cor. 2. def. 79. Geo.*
[3] *Def. 76. Geo.*
[4] *Cor. 2. prop. preſ.*
[5] *Pag. 56. des fract. de fract.*

tipliez par un grand cercle, eſt égal au produit de quatre grands cercles multipliez par un tiers de rayon. Car appellons ce rayon a; & appellons b ce grand cercle : les quatre tiers du rayon [1] ſeront donc $\frac{4a}{3}$. Or $\frac{4a}{3} \times b = \frac{4ab}{3}$, & il eſt évident que $\frac{4ab}{3} = 4b \times \frac{a}{3}$.

Une Sphere eſt donc égale au produit de la ſomme de quatre grands cercles multipliez par la 3e partie de leur rayon. Ce qui peut encore faire connoître la ſolidité d'une Sphere, & ce qui ſervira pour en connoître la ſurface.

PROPOSITION LXXXVI.

Les Cylindres dont les hauteurs ſont égales aux diametres de leurs baſes, ou qui ſont circonſcrits à des Spheres, ſont entr'eux comme les Cubes de ces mêmes diametres.

DEMONSTRATION.

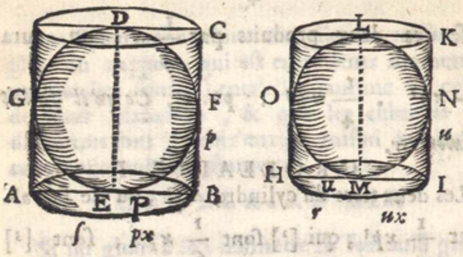
Soit le cylindre AC dont la hauteur DE ſoit égale au diametre AB de ſa baſe; ſoit encore le cylindre HK dont la hauteur LM ſoit égale au diametre HI de ſa baſe : je dis que ces deux cylindres ſont entr'eux comme les cubes des diametres AB & HI de ces baſes.

Pour le démontrer, ſoit nommée f la circonference de la baſe du cylindre AG, & p ſon

[1] *Page 44. def. 1. des fract.*

diametre

diametre *AB* ; ſoit nommée r la circonference de la baſe du cylindre *HK* & u ſon diametre *HI* ;



ſoit enfin appellé x l'expoſant du rapport de la circonference s à ſon diametre p, c'eſt à dire que $\frac{s}{p} = x$, alors [1] $px = s$. L'expoſant du rapport de la circonference r à ſon diametre u, ſera auſſi x, c'eſt à dire $\frac{r}{u} = x$. [2] Car $s . r :: p . u$. Donc [3] $s . p :: r . u$. On aura donc encore [1] $ux = r$.

[4] La ſurface de la baſe du cylindre *AC* ſera $\frac{1}{4} ppx$, ou $\frac{1}{4} xpp$. Et ſi on multiplie cette ſurface par la hauteur p, on aura $\frac{1}{4} xp^3$ pour la ſolidité du cylindre *AC*, [5]. De même [6]

[1] *Cor.* 3. *de la diviſ. pag.* 42.
[2] *Cor. prop.* 60. *Geo. pag.* 483.
[3] *Part.* 2. *du cor. prop.* 3. *Algeb.*
[4] *Cor.* 2. *prop.* 48. *Geo.*
[5] *Cor.* 2. *def.* 79. *ou cor.* 7. *prop.* 81. *Geo.*
[6] *Cor.* 2. *prop* 48, *& cor.* 2. *def.* 79. *Geo.*

le cylindre HK sera $\frac{1}{4}xu^3$. Or [1] si on divise ces deux produits par $\frac{1}{4}x$, on aura $\frac{1}{4}xp^3 . \frac{1}{4}xu^3 :: p^3 . u^3$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Les deux tiers du cylindre AC, ou de sa valeur $\frac{1}{4}xp^3$, qui [2] sont $\frac{1}{6}xp^3$, sont [3] égaux à la Sphere $GEFD$ inscrite au cylindre AC dont [4] la hauteur DE est un des diametres de cette même Sphere. De même les $\frac{2}{3}$ du cylindre HK, qui sont $\frac{1}{6}xu^3$, sont [3] égaux à la Sphere $OMNL$ qui lui est inscrite, & dont un des diametres est la hauteur LM de ce cylindre. Or [1] $\frac{1}{6}xp^3 . \frac{1}{6}xu^3 :: p^3 . u^3$. Au lieu de $\frac{1}{6}xp^3$ & de $\frac{1}{6}xu^3$ substituant [5] ce qui y est égal, sçavoir les Spheres $GEFD$, & $OMNL$; on aura la Sphere $GEFD . OMNL :: p^3 . u^3$. Les Spheres sont donc entr'elles comme les cubes de leurs diametres.

[1] *Prop. 6. d'Algeb.*
[2] *Page 56. des fract. de fract.*
[3] *Prop. 85. Geo.*
[4] *Supposit.*
[5] *Demande 3. Geo.*

COROLLAIRE II.

Les Spheres ſont donc entr'elles en raiſon triplée du rapport qui eſt entre leurs diametres; puiſqu'elles ſont [1] entr'elles comme les cubes de leurs diametres , & que les cubes de ces diametres ſont [2] entr'eux en raiſon triplée de celle de ces mêmes diametres.

COROLLAIRE III.

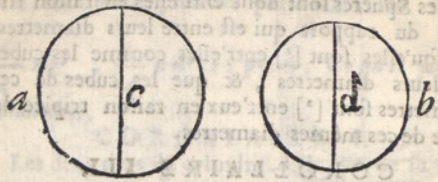
Si un globe a ſon diametre 20 fois auſſi grand que celui d'un autre ; la maſſe de ce premier globe ſera 8000 fois auſſi grande que la maſſe de cet autre. Car [3] ce premier globe ſera au ſecond , comme ſon diametre ſera à une 4^e de quatre grandeurs continuement proportionnelles dont la premiere & la ſeconde ſeront entre-elles comme les diametres de ces deux globes ; & ainſi de ſuite. Soit appellée *a* la derniere de ces quatre grandeurs continuement proportionnelles , la 3^e grandeur [4] ſera $20a$; la 2^e ſera $400a$; & la premiere $8000a$. Ce qui ſera cette progreſſion $\div\!\!\div\; 8000a \,.\, 400a \,.\, 20a \,.\, a\,.$ dans laquelle il paroit évidemment que la premiere de ces quatre grandeurs eſt 8000 fois auſſi grande que la derniere.

REMARQUE.

De la même maniere que dans la démonſtr. de la prop. preſ. j'ai employé les expoſants des rapports qui ſont entre les circonferences des cercles & leurs diametres, j'aurois peû les em-

[1] *Cor. 1. prop. preſ.*
[2] *Cor. prop. 18. Algeb.*
[3] *Cor. 1. prop. 19. d'Algeb.*
[4] *Def. 16. Algeb.*

ployer pour démontrer que les cercles, ou ses secteurs de cercles, sont entr'eux comme les quarrez de leurs diametres. Soit un cercle dont



la circonference soit appellée a, & son diametre soit c. Soit encore un autre cercle dont la circonference est b, & son diametre est d. Soit enfin $\frac{a}{c} = f$, on appellera donc[1] aussi f le quotient de la circonference b divisée par d. Et on aura $cf = a$, & $df = b$. Le premier cercle sera [2] donc $\frac{1}{4} fcc$. & le 2^e sera $\frac{1}{4} fdd$. Donc $\frac{1}{4} fcc . \frac{1}{4} fdd :: cc . dd$.[3].

PROPOSITION LXXXVII.

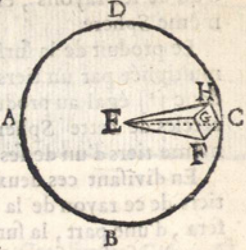
La surface d'une Sphere est égale à quatre des grands cercles de cette même Sphere.

DEMONSTRATION.

Soit la Sphere *ABCD* dont le centre soit *E*. Je la considererai comme un solide composé

[1] *Cor. prop. 60. Geo.*
[2] *Cor. 2. prop. 48.* [3] *Prop. 6. Algeb.*

[1] d'une infinité de pyramides dont le sommet commun sera le centre *E*, & dont les bases prises ensemble forment la surface de ce même solide. Alors chacune de ces pyramides aura pour hauteur un des rayons de la Sphere.



Car, soit *GFCH* une de ces pyramides dont la base *GFCH* est infiniment petite; la perpendiculaire menée du centre E à cette surface *GFCH* infiniment petite, sera un des rayons de la Sphere, par exemple *EG*. Parceque les lignes *GF* & *GH* infiniment petites terminées par les rayons *EF* & *EH*, étant prolongées deviennent [2] touchantes des circonferences des cercles qui ont pour rayon *EG*, & dont les plans passent par *EF* & *EH*.

Or les hauteurs de toutes ces pyramides sont [3] égales. La somme de ces pyramides sera donc [4] égale au produit de la somme de leurs bases, multipliée par la 3^e^ partie de leur hauteur commune. La somme de ces pyramides est la Sphere même *ABCD*; la somme de leurs bases est la surface de la Sphere *ABCD*, & leur hauteur commune est un rayon de cette Sphere.

Le produit de la surface de la Sphere *ABCD*, multipliée par un tiers d'un de ses rayons, est donc égal à cette Sphere.

[1] *Cor. 2. def. 88. Geo.*
[2] *Fin du cor. 1. def. 88. & prop. 12. Geo.*
[3] *Cor. 1. def. 82. Geo.*
[4] *Cor. prop. 83. Geo.*

Or le produit de quatre des grands cercles de la Sphere *ABCD*, multipliez auſſi par un tiers d'un de ſes rayons, eſt [1] encore égal à cette même Sphere.

Le produit de la ſurface de la Sphere *ABCD*, multipliée par un tiers d'un de ſes rayons, eſt donc [2] égal au produit de quatre des grands cercles de cette Sphere multipliez auſſi par le même tiers d'un de ſes rayons.

En diviſant ces deux produits égaux, par un tiers de ce rayon de la Sphere; un des quotients ſera, d'une part, la ſurface de la Sphere *ABCD*, laquelle ſurface ſera [3] égale à l'autre quotient qui ſera quatre grands cercles de cette Sphere, *ce qu'il falloit démontrer.*

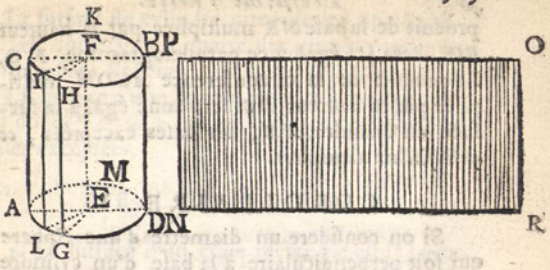
PROPOSITION LXXXVIII.

La ſurface d'un cylindre droit, ſes baſes exceptées, eſt égale au produit du contours ou circonference de la baſe multipliée par la hauteur.

DEMONSTRATION.

Soit le cylindre droit *AB*; ſon axe *FE* ſera [1] perpendiculaire à la baſe *AD*. Si des centres *F* & *E*, on conſidere un nombre indéfini de rayons *FC*, *EA*; *FI*, *EL*; *FH*, *EG*; *FB*, *ED*; &c. qui ſoient menez paralleles entr'eux: on trouvera que toutes les lignes *CA*, *IL*, *HG*, *BD*, &c. menées par les extrémitez de ces rayons, ſeront [4] paralleles à l'axe *EF*, &

[1] *Cor. 3. prop. 85. Geo.*
[2] *Ax. 18. gener.*
[3] *Prop. 6. Algeb.*
[4] *Prop. 36. Geo.*



[1] paralleles entr'elles. Ces lignes *CA*, *LI*, *HG*, &c. ſeront donc [2] perpendiculaires aux baſes paralleles *AGDM* & *CHBK*. Elles ſeront donc [3] toutes égales entr'elles. Or toutes ces lignes poſſibles *CA*, *LI*, *HG*, &c. conſiderées indéfiniment proches l'une de l'autre, ſont les côtez des faces infinitiémes du cylindre droit *AB*, qui ſeront [4] des parallelogrammes rectangles de même hauteur & dont les baſes ſeront les lignes droites infiniment petites qui [5] forment les circonferences *AGDM* & *CHBK*.

Si on conſidere que cette ſurface courbe ſoit déroulée, de ſorte que la circonference *AGDM* devienne la ligne droite *NR*, & que la circonference *CHBK* devienne la ligne droite *PO*; alors le parallelogramme total *NO* ſera égal à tous les parallelogrammes de même hauteur qui forment le contours du cylindre *AB*. Le

[1] *Part. 2. prop. 74. Geo.*
[2] *Prop. 73. Geo.*
[3] *Prop. 70. Geo.*
[4] *Prop. 36. & def. 49. Geo.*
[5] *Cor. def. 56. Geo.*

produit de la base *NR* multipliée par la hauteur *RO*, sera [1] égal à ce parallelogramme *NO*. Le produit de la circonference *AGDM* multipliée par la hauteur *DB* sera donc égal à la surface du cylindre *AB*, les bases exceptées, *ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si on considere un diametre d'une Sphere qui soit perpendiculaire à la base d'un cylindre qui lui est circonscrit ; ce diametre sera la hauteur du cylindre. Et si on considere un grand cercle de cette même Sphere qui soit parallele à la base du cylindre droit circonscrit ; sa circonference sera [2] égale à celle de la base de ce cylindre, & son diametre sera égal à celui de cette base : puisque la circonference de ce grand cercle de la Sphere se trouve dans la surface du cylindre circonscrit. Un diametre de la Sphere est [3] le même qu'un diametre d'un de ses grands cercles. Le diametre de la base de ce cylindre sera donc égal à la hauteur de ce même cylindre.

En multipliant la circonference de la base du cylindre circonscrit à une Sphere, par son diametre, on aura [4] la surface de ce cylindre, les bases exceptées.

Le produit d'une circonference de cercle multipliée par son diametre est [5] égale à quatre fois ce même cercle.

[1] *Cor. 2. def. 53. Geo.*
[2] *Cor. 1. def. 78. geo.*
[3] *Cor. 1. def. 82. geo.*
[4] *Prop. pres.*
[5] *Cor. 2. prop. 48. Geo.*

La ſurface du cylindre circonſcrit à une Sphere, eſt donc égale à quatre des grands cercles de cette même Sphere.

La ſurface d'une Sphere inſcrite à un cylindre eſt donc [1] égale à la ſurface de ce cylindre, les baſes exceptées.

REMARQUES.

1. La ſurface d'un cône rectangle eſt [2] égale au produit de la circonference de ſa baſe multipliée par la moitié de la ligne droite, menée du ſommet de ce cône à la circonference de ſa baſe. Car le ſommet de ce cône étant un point de l'axe qui eſt [3] perpendiculaire au milieu de tous les diametres de cette baſe, ce même ſommet ſera également éloigné de tous les points de la circonference de la baſe; toutes les lignes menées du ſommet à cette circonference, ſeront [4] égales entr'elles. Outre cela, la ſomme de tous les angles qui ont pour ſommet celui de ce cône, & qui ſont apuyez ſur chaque côté infiniment petit de cette circonference, eſt [5] moindre que la ſomme de quatre angles droits. La ſurface du cône droit étant déroulée ſera donc un ſecteur de cercle.

2. Il y a des corps qu'on appelle *Reguliers*, parcequ'ils ſont terminez par des ſurfaces regulieres. Entre ceux dont les ſurfaces de chacun ſont égales entr'elles, on en compte cinq.

[1] *Ax. 18. gen.*
[2] *Cor. 3. prop. 48. Geo.*
[3] *Def. 68. & def. 20. Geo.*
[4] *Cor. 4. ax. 2. Geo.*
[5] *Cor. prop. 79. Geo.*

Le premier est terminé par quatre triangles égaux & équilateraux, ce qui fait qu'on l'appelle, *Tetraëdre.*

Le second est terminé par six quarrez égaux, ce qui fait qu'on l'appelle, *Exaëdre.* On l'appelle aussi *Cube* [1].

Le troisiéme est terminé par huit triangles égaux & équilateraux. On l'appelle, *Octaëdre.*

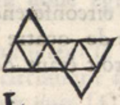
Le quatriéme est terminé par douze pentagones reguliers & égaux. On l'appelle, *Dodecaëdre.*

Le cinquiéme enfin est terminé par vingt triangles égaux & équilateraux. On l'appelle, *Icosaëdre.*

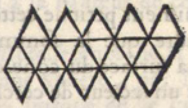
Si on veut representer facilement ces cinq corps reguliers, il faut se servir de carton, & y tracer des triangles équilateraux, des quarrez, & des pentagones reguliers, en les disposant comme dans chacune de ces cinq figures.

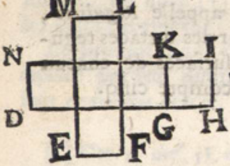
Tetraëdre

Octaëdre

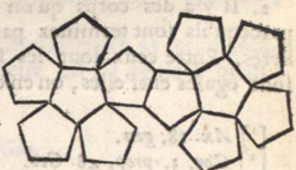


Icosaëdre.





Exaëdre



Dodecaëdre

Ensuite il faut, avec des ciseaux, couper le

[1] *Def. 75. Geo.*

carton ſuivant les lignes droites qui terminent ces figures composées de triangles, de quarrez, &c. & avec un couteau bien aiguiſé, il faut couper à moitié ce même carton ſuivant les lignes tranſverſales de ces mêmes figures.

Enfin il faut plier le carton de maniere que les plans qui repreſenteront les ſurfaces de chacun de ces corps reguliers ſe joignent l'un l'autre. Les points *A* & *B*, par exemple, ſeront appliquez ſur le point *C*, & on retiendra le tout en cette ſituation avec de la colle, ou du fil, pour former le Tetraëdre. La ligne *HI* ſera appliquée ſur *DN*, *EF* ſur *GH*, & *ML* ſur *KI*, pour former l'Exaëdre. L'ajuſtement des trois autres figures eſt auſſi facile que celui de ces deux premieres.

J'ai crû qu'il ſuffiſoit de faire ces deux dernieres remarques pour ceux qui commencent à s'appliquer à l'étude des Mathematiques; parcequ'une plus longue Theorie ſur ce ſujet & ſur les autres ſolides pourroit rebuter les moins ſtudieux, & ne ſeroit peut-être pas d'une utilité aſſez conſiderable, pour meriter une plus longue attention de ceux qui ſeroient plus zélez & plus laborieux.

Je finirai donc ici ces Elemens, où j'ai tâché de renfermer ce que j'ai crû être d'abord le plus neceſſaire à ceux qui veulent apprendre les Mathematiques. Outre les premiers fondemens de l'Arithmetique & de l'Algebre, j'ai expoſé le plus clairement qu'il m'a été poſſible la Theorie & la Pratique de la Geometrie ordinaire. L'utilité particuliere de chacune de ces trois parties elementaires eſt fort étendue. On y trouve beaucoup de lumieres pour entendre les ouvrages qui ſuppoſent qu'on ſçache ces premiers Elemens. L'experience fait connoître tous les jours, qu'il faut abſolument avoir puiſé dans ces premieres ſources des veritez qui ſont ſi importantes, que ſans elles on ſe trouve privé d'une infinité d'avantages tres-conſiderables, qu'on peut tirer des Mathematiques.

FIN.

TABLE

TABLE

DES PRINCIPALES CHOSES contenues dans ces Elemens.

A

ADDITION des Nombres, page 11
Addition des Fractions, 50
Addition des Grandeurs litterales, 71
Addition des Racines sourdes, 128
Algebre, ce que c'est, 59
Analogie, définition 13. 65
Antecedent d'un raport, déf. 10. 63
Angle, déf. 12. 199
Angles, rectiligne, curviligne, mixte, def. 12. 199
Angle droit, obtus, aigu, déf. 14. 15. 16. 200
Angle oblique, déf. 16. 200
Angles posez de suite, 308
Angles opposez au sommet, 311
Angles opposez au sommet égaux, 311
Angle plan. Déf. 17. 201
Angle de plans. Déf. 18. 201
Angles alternes. Déf. 19. 201
Angles alternes égaux, 314
Angle dont le sommet est dans le centre du cercle, sa mesure, 306
Angle dont le sommet est sur la circonference, sa mesure, 325

Angles alternes égaux, 314
Angle dont le ſommet eſt dans le centre du cercle, ſa meſure, 302
Angle dont le ſommet eſt ſur la circonference, ſa meſure, 325
Angle dont le ſommet eſt entre le centre & la circonference, ſa meſure, 335
Angle dont le ſommet eſt hors le cercle, ſa meſure, 337 & 338
Angle appuyé ſur une demie circonference, droit; ſur un arc plus grand, obtus; ſur un arc plus petit, aigu, 331 & 332
Angle ſolide. Déf. 63. 219
Angle ſolide, ſes proprietez, 534 & 535
Approximation des Racines, 114
Arithmetique, ce qu'on entend par ce mot, *page* 9
Arc de cercle. Déf. 27. 204
Attouchement d'une ligne droite & d'une circonference, n'eſt qu'un point, 266
Attouchement de deux circonferences, n'eſt qu'un point, 301
Axe d'un cône. Déf. 70. 221
Axe d'un cylindre. Déf. 77. 224
Axe d'une Sphere. Déf. 83. 227

B

BASE d'un triangle. Déf. 46. 209
Baſe d'un corps. Déf. 46. 209
Baſe d'un cône. Déf. 67. 220
Baſe d'un cylindre. Déf. 76. 224
Borneier, 555

C

COROLLAIRE, ce que c'eſt, 2
Connoître laquelle de deux fractions eſt la plus grande, 52

Conséquent d'une raison ou raport. Def. 10. 63
Composition de raison, 135
Conversion de raison, 136
Combinaisons, 138
Changemens d'ordre, - 139
Chapitre premier de Geometrie. Des Lignes, 235
Chapitre II. Des Surfaces, 347
Chapitre III. Des Solides, 533
Cercle. Déf. 25. 204
Circonference de cercle. Déf. 26. 204
Centre d'un cercle. Déf. 28. 204
Centre d'une Sphere. Déf. 81. 226
Cercle circonscrit à une figure rectiligne. Cor. 413
Cercle inscrit. Cor. 413
Cone. Déf. 67. 220
Cone rectangle. Déf. 68. 220
Cone oblique. Déf. 69. 220
Contour. 478 & 480
Circuits de Polygones semblables, leur rapport. 479
Corde de cercle. Déf. 30. 205
Corps. Déf. 61. 217
Cube. Déf. 75. 222
Cubes sont entr'eux en raison triplée. 166
Cylindre droit. Déf. 78. 224
Cylindre oblique. Déf. 79. 224
Cylindres circonscrits à des Spheres, sont entre-eux comme les cubes des diametres de leurs bases. 576

D

DEFINITION, ce que c'est. 1
Demande, ce que c'est. 1
Définitions generales. 1
Démonstration, ce que c'est. 2
Demandes ou suppositions generales. 3
Demandes d'Arithmetique. 10
Demandes d'Algebre. 69

Demandes de Geometrie. 232
Démonstr. des oper. des fract. 166, 167, 168, & 169
Division des nombres. 32
Diviseur. 32
Division des fractions. 54
Division des grandeurs litterales. 81
Division des Racines sourdes. 136
Division de raison. 135
Dénominateur d'une fraction. 45
Degré. Déf. 35. 207
Diametre d'un Cercle. Déf. 31. 206
Diagonale. Déf. 54. 213
Diametre d'une Sphere. Déf. 82. 226
Dodecaëdre, 586
De ces trois choses, *une ligne droite être touchante d'un cercle, une autre ligne droite être perpendiculaire à cette touchante par le point d'attouchement & dans le plan du Cercle, une ligne droite passer par le centre & par le point d'attouchement*; deux étant prises à volonté, la troisiéme suivra necessairement. Cor. Prop. 12. 266, 267, 268
De ces quatre choses, *une ligne droite menée dans le plan d'un cercle, passer par le milieu d'une corde de ce cercle; cette ligne être perpendiculaire à cette corde; l'arc soutenu par cette corde être coupé en deux parties égales; cette ligne passer par le centre*; deux étant prises à volonté, les deux autres suivront necessairement. Prop. 14. 275
De ces trois choses, *triangles être égaux, être sur la même base ou sur bases égales, être de même hauteur ou entre mêmes paralleles*, deux étant prises ou supposées à volonté; les deux autres suivront necessairement. Prop. 40. 388
Des Angles, 301

E

EXPOSANT d'un rapport, 64
Equation. Déf. 22. 69

Extrêmes proportionnelles, 61. 66
Extraction de la racine quarrée, 95
Extraction de la racine Cubique, 108
Exaëdre, 586
Exagone, 214
Extremitez d'une ligne sont des points, 194
Extremitez d'une surface sont des lignes, 197
Extremitez d'un corps sont des surfaces, 218

F

FRACTION, 44
Fractions de Fractions, 56
Figure. Déf. 90. 230
Figure rectiligne, curviligne, & mixte, 203
Figure reguliere. Déf. 55. 213
Figure inscrite, ou circonscrite à un cercle, 214
Figures semblables. Déf. 60. 215

G

GRANDEUR, ce qu'on entend par ce mot, 1
Geometrie, ce que c'est, 193
Geometriquement, ce que c'est, 245
Grand cercle d'une Sphere. Déf. 85. 227

H

HYPOTHENUSE, ce que c'est. Déf. 45. 208
Hypothenuse, ses proprietez, 467
Homologue. Déf. 59. 215

I

INVERSION de raison, 135
Instrumens pour lever des plans, 451 & 454
Icosaëdre, 586

L

LIGNE. Déf. 3. 194
Ligne, droite, courbe ; 195
Ligne perpendiculaire, 195
Ligne parallele, 196
Ligne circulaire. Déf. 26. 204
Ligne touchante. Déf. 34. 206
Lignes également ou inégalement éloignées du centre d'un cercle, leurs proprietez, 291. & 295
Ligne perpendiculaire à un plan. Déf. 20. 202
Ligne perpendiculaire à une même ligne, ou à un même plan par un même point, unique, 240. 248. & 506
Ligne touchante unique par un même point de circonference, 269

M

MATHEMATIQUES, ce que c'est, 1
Multiplication des nombres, 21
Multiplication des fractions, 53
Multiplication des grandeurs litterales, 76
Multiplication des racines sourdes, 129
Methode generale pour toutes les extractions de racines, 98. & 113
Moyenne proport. Arithmetique. Déf. 6. 61
Moyenne propor. Géometr. Déf. 15. 66
Mesure d'un angle, 301
Minute. Déf. 36. 207

N

NOMBRE, 9
Nombre pair, ou impair, Déf. 21. 68
Numerateur d'une fraction, 45

O

OCTOGONE, 214
Octaëdre, 586

P

PROBLEMES, ce que c'eſt. Déf. 7. 2
Parties 1. 2. 3. de ces Elemens, 9, 59, 193
Preuves d'Add.& de Souſtract.des nomb. 18 & 20
Preuves de Multip. & de la Diviſ. des nomb. 42
Preuve de la regle de trois, 185
Preuve de la regle de ſocieté, 188
Produit d'une Multiplication, 22
Proportion Arithmetique, Déf. 5. 61
Proportion Géometrique, Déf. 13. 65
Proportion continue. Déf. 7. 62
Proportion ordonnée, 154
Proportion troublée, 155
Progreſſion Arithmetique. Déf. 8. 62
Progreſſion Géometrique. Déf. 16. 66
Propoſition converſe. Déf. 20. 68
Puiſſance, ce que c'eſt. Déf. 2. 95
Parallelogramme. Déf. 49. 209
Parallelogr. rectangle, ou oblong. Déf. 52. 210
Parallelogr. entre mêmes parall. leurs propri. 380
Pentagone, 214
Pied linéaire, quarré, cube, 394
Plan. Déf. 10. 197
Plan perpendiculaire à un autre, 503
Plans paralleles. Déf. 21. 202
Plan d'un Edifice, &c. 449
Point mathematique. Déf. 2. 194
Point d'attouchement, 266
Pointe ou ſommet d'un angle, 199
Polygone. Déf. 56. 213
Polygone regulier. Déf. 55. 213
Priſme droit, ou oblique, 221
Pyramide, droite, oblique, 219
Pyramides égales, ſi elles ſont de même baſe & de même hauteur, 538

Pyramide qui est la troisiéme partie d'un prisme de même base & de même hauteur, 541
Pyramide d'une infinité de côtez. Déf. 67. 220
Poles d'un cercle. Déf. 87. 227
Poles d'une Sphere. Déf. 84. 227
Parallelepipedes semblables, leurs proprietez, 567
Polyédre. Déf. 88. 228

Q

QUOTIENT, 32
Quotient multiplié par le diviseur, fait un produit égal à la grandeur à diviser. Cor. 3. 42
Quadrilatere; combien de sortes, 209
Quadrilatere inscrit dans un cercle; proprietez de ses angles, 378
Quadril. dont les côtez opposez sont égaux. 371
Quadrilatere, dont les angles opposez sont égaux, est un Parallelogramme, 378
Quarré. Déf. 50. 210
Quart de circonference, 302

R

REDUCTION des sols en livres, 25
Reduct. de fract. à de moindres termes, 45
Reduct. de fract. à même dénomin. 47 & 48
Réduction d'entiers en fractions, 49
Reduction des grandeurs irrationnelles à un même nom, 121
Reduction des grandeurs irrationnelles aux expressions les plus simples, 123
Raison ou rapport, Déf. 3. 60
Raison Arithmetique, Déf. 4. 60
Raison Geometrique. Déf. 9. 63
Raisons ou rapports égaux. Cor. 1. 64
Raison composée, Déf. 17. 66
Raison doublée, triplée, &c. Déf. 18. 67

Raison inverse, 135
Raison alterne, 135
Racine quarrée, 97
Racine cubique, 97
Racine sourde, ou irrationnelle. Déf. 3. 120
Racine imaginaire. Déf. 4. 120
Regle de trois, 168
Regle de trois directe, 171
Regle de trois indirecte, ou inverse, 174
Regle de trois composée, 178
Regle de Societé, ou de Compagnie, 186
Rayon d'un cercle. Déf. 29. 205
Rayon d'une Sphere. Déf. 82. 226
Rectangle. Déf. 52. 210
Rhombe. Déf. 51. 210
Rhomboide. Déf. 53. 211

S

SOMME ou total, 11
Soustraction des nombres, 14
Soustraction des fractions, 51
Soustraction des grandeurs litterales, 75
Soustraction des racines sourdes, 129
Surface. Déf. 9. 196
Surface plane, courbe, concave, convexe, 197, 198
Surface curviligne, rectiligne, mixte, 203
Secteur de cercle. Déf. 33. 206
Segment de cercle. Déf. 32. 206
Secondes, tierces, &c. 207
Sommet d'un angle, Déf. 13. 199 & 219
Sommet d'une pyramide, 219
Solide. Déf. 61. 217
Sphere, ce que c'est. Déf. 80. 225
Sphere inscrite à un Cylindre en est les deux tiers, 570

Surface de Sphere égale à quatre grands Cercles, 580
Les Spheres sont entr'elles comme les cubes de leurs diametres, 578

T

THEOREME, ce que c'est. Déf. 6. 2
Termes d'une raison, ou d'un rapport. Déf. 11. 63
Termes extrêmes d'une proportion. Déf. 14. 66
Termes moyens d'une proportion. Déf. 14. 66
Trouver à trois grandeurs données une quatriéme proportionnelle Arithmetique, &c. 128
Trouver une moyenne proportionnelle géomet. à deux grandeurs données. Cor. 4. prop. 2. 132
Trouver une 3e continuement proportionelle à deux grandeurs données. Cor. 4. 131
A Trois grandeurs données, trouver une quatriéme proportionnelle géometrique; fondement de la regle de Trois, 130
Tierces, quartes, &c. 207
Toise linéaire, quarrée, cubique, 394
Touchante d'un cercle. Déf. 34. 206
Trapese. Déf. 47. 209
Tropesoïde. Déf. 48. 209
Triangle. Déf. 38. 207
Triangle Equilateral, Isoscele, Scalene, 208
Triangle Rectangle, Ambligone, Acutangle, 208
Triangles entre les mêmes paralleles, leurs proprietez. 388
Triangle équilateral inscrit dans un cercle, Cor. 2. 412
Tetraëdre, 586

V

UNITE', 9
Valeur des Chifres, 10

TABLE

DE LA GEOMETRIE PRATIQUE.

PROBLEMES.

1. PAR *un point donné hors d'une ligne droite, mener une perpendiculaire à cette ligne,* page 243
2. *Par un point donné dans une ligne droite, mener une perpendiculaire à cette ligne,* 244
3. *Par un point donné, même à l'extremité d'une ligne, mener une ligne perpend. à cette ligne,* 333
4. *Par un point donné hors d'une ligne droite, mener une ligne parallelle à cette ligne,* 289
5. *Autre Methode,* 318
6. *Autre Methode,* 375
7. *Par un point donné dans une circonference, mener une touchante à cette circonference,* 267
8. *Par un point donné hors d'une circonference, lui mener une touchante,* 334
9. *Par trois points donnez, faire passer une circonference de cercle, pourvû que ces trois points ne soient pas en ligne droite,* 273
10. *Trouver le centre d'un cercle,* 272
11. *Diviser une circonf. de cercle en degr.* 307
12. *Diviser un arc & un angle qui est mesuré par cet arc, en deux parties égales,* 305
13. *Diviser une ligne donnée selon une raison donnée,* 436

14. *Diviser une ligne donnée en autant de parties égales qu'on voudra. Cor. 3.* 435
15. *Diviser une ligne donnée en deux parties égales geometriquement,* 245
16. *A deux lignes données, trouver une troisiéme ligne proportionnelle,* 433
17. *A trois lignes données, trouver une quatriéme proportionnelle,* 434
18. *Entre deux lignes données, trouver une moyenne proportionnelle,* 460
19. *Mener sur le terrain une ligne droite,* 360
20. *Mener sur la terre une ligne perpendiculaire à une autre, par un point donné hors cette ligne,* 397
21. *Mener sur la terre une ligne perpendiculaire à une autre, par un point pris dans cette ligne,* 396
22. *Par un point pris dans un plan, mener une perpendiculaire à ce plan,* 504
23. *Par un point pris hors d'un plan, mener une perpendiculaire à ce plan,* 509
24. *Connoître l'égalité ou inégalité de deux angles,* 303
25. *Faire un angle égal à un autre angle proposé,* 304
26. *Décrire sur une ligne donnée un triangle équilateral,* 369
27. *Faire un triangle égal à un autre proposé; ou, ce qui est la même chose, faire un triangle dont les côtez soient égaux à trois lignes données: pourvû que deux de ces lignes prises ensemble soient plus grandes que la troisiéme,* 368
28. *Décrire une figure rectiligne égale à une autre proposée,* 369
29. *Décrire un cercle égal à plusieurs cercles,* 494
30. *Décrire une figure rectiligne semblable à une autre figure rectiligne donnée,* 444
31. *Décrire sur une ligne donnée un quarré. Cor. de la prop. 36.* 372

32. *Décrire un Parallelogramme égal à un triangle proposé, qui ait un angle égal à un angle proposé, & un côté égal à une ligne proposée*, 404
33. *Inscrire un exagone dans un cercle. Cor. 1. prop. 45.* 410
34. *Inscrire un triangle équilateral dans un Cercle. Cor. 2. prop. 45.* 411
35. *Circonscrire un Cercle à un Polygone regulier. Cor. de la prop. 46.* 413
36. *Inscrire un cercle à un Polygone regulier. Cor. de la prop. 46.* 414
37. *Décrire un quarré égal à un nombre d'autres quarrez pris à volonté*, 470. & 471
38. *Connoître le quarré qui est l'excés de celui d'une ligne par dessus celui d'une autre*, 472
39. *Décrire une figure semblable & égale à deux autres figures semblables & égales proposées*, 490 & 491
40. *Lever le plan d'une place accessible*, 445
41. *Autre Methode pour lever le plan d'une Plaine, d'un Parc, &c.* 449
42. *Faire des Cartes Topographiques*, 452
43. *Autre Methode*, 454
44. *Autre Methode encore plus commode que les precedentes*, 456
45. *Connoître la hauteur ou profondeur d'une Montagne*, 448
46. *Connoître la base d'une Montagne*, 448
47. *Les deux côtez d'un triangle rectangle étant connus, connoître le troisiéme*, 470
48. *Les trois côtez d'un triangle obliquangle étant donnez, connoître la hauteur de ce triangle, ou connoître la perpendiculaire menée du sommet d'un de ses angles sur le côté opposé prolongé s'il est neceßaire*, 477
49. *Les trois côtez d'un triangle rectiligne étant donnez, connoître la surface, sans aucuns in-*

ſtrumens diviſez en degrez, 476. 477 & 478

50. *Conſtruire trois pyramides avec du carton, leſquelles jointes enſemble formeront un priſme triangulaire,* 544

51. *Conſtruire ou repreſenter les cinq corps reguliers avec du carton,* 586

52. *Meſurer une diſtance acceſſible par une de ſes extremitez ſeulement,* 360

53. *Meſurer en ligne droite une longueur propoſée dans la Campagne,* 395

54. *Meſurer la ſurface d'un triangle,* 393

55. *Meſurer la ſurface d'un Parallelogramme,* 212, & 387

56. *Meſurer la ſurface d'un Trapeſoide,* 421

57. *Meſurer la ſurface d'un terrain irregulier,* 399

58. *Autre Methode,* 421. & 422

59. *Meſurer la ſurface d'un terrain irregulier ſans entrer dedans, ou lorſqu'on ne peut le parcourir,* 422. & 423

60. *Meſurer un Polygone regulier,* 418

61. *Meſurer la ſurface d'un cercle,* 419

62. *Meſurer un ſecteur de cercle. Cor. 3.* 420

63. *Meſurer la ſurface d'un cône droit,* 585

64. *Meſurer la ſurface d'un cylindre droit, Prop. 88.* 583

65. *Meſurer la ſurface d'une Sphere. Prop. 87.* 581

66. *Meſurer la hauteur d'une pyramide dont on voit ſeulement le ſommet & la baſe; cette pyramide étant même enclavée dans la maſſe d'un corps irregulier,* 554 & 555

67. *Meſurer une pyramide,* 553

68. *Meſurer pluſieurs pyrami. de même hauteur,* 567

69. *Meſurer un Cône,* 553

70. *Meſurer un Priſme,* 223. 551. & 552

71. *Meſurer un Cylindre,* 552

72. *Meſurer les Corps irréguliers,* 554. & 555

73. *Autre Methode,* 555. & 556

74. *Meſurer une Sphere,* 575

TABLE

DES PROPOSITIONS des Elemens de Geometrie d'Euclide, qui sont démontrées dans ces nouveaux Elemens.

J'Ajoute la Table suivante pour rendre l'étude de ces Elemens encore plus utile dans la lecture des Traitez des Mathematiques, où on cite Euclide. Les propositions qui sont dans les six premiers Livres, dans l'onziéme & dans le douziéme des Elemens de Geometrie de cet ancien Autheur sont celles qui sont ordinairement citées. On ne cite presque jamais les propositions de ses autres Livres. Et entre celles de ces huit livres, il y en a encore plusieurs qui sont inutiles, ou qui ne servent que pour en démontrer d'autres que j'ai démontrées sans leurs secours. Pour montrer que mes Elemens sont pour le moins équivalens à ces huit Livres d'Euclide qu'on a coutume d'apprendre; dans la place de ces propositions que j'ai crû inutiles, j'ai fait mention de celles que j'y pouvois substituer tres-utilement.

Euclide Livre 1.	*Elemens des Math.*
Prop. 1.	Penultiéme art. du Cor. 4. prop. 35. *page* 369
Prop. 2 & 3.	Je leur substitue les prop. 3. 4. 5. 6. 7. & 8. avec leurs Coroll. *p.* 237

Euclide Livre 1.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 4.	Prop. 35. *page* 362.
Prop. 5.	Cor. 2. prop. 34. *page* 358.
Prop. 6.	Cor. 4. prop. 34. *page* 359.
Prop. 7.	Je lui ſubſtitue la prop. 9.
Prop. 8.	Cor. 1. prop. 35. *page* 365.
Prop. 9.	Cor. 5. prop. 20. *page* 305.
Prop. 10.	Cor. 3. prop. 5. *page* 245.
Prop. 11.	Part. 2. du cor. 2 prop. 5. *page* 243.
Prop. 12.	Part. 1. cor. prop. 5. *page* 243.
Prop. 13.	Part. 1. prop. 21. *page* 308.
Prop. 14.	Part. 2. prop. 21. *page* 309.
Prop. 15.	Part. 1. prop. 22. *page* 311.
Prop. 16.	Prop. 30. *page* 348.
Prop. 17.	Elle ſuit de la prop. 31. *page* 349.
Prop. 18.	Part. 1. prop. 33. *page* 355.
Prop. 19.	Part. 2. prop. 33. *page* 355.
Prop. 20.	Prop. 1. *page* 235.
Prop. 21.	Prop. 2. & cor. 5. pr. 29. p. 236. 346.
Prop. 22.	Cor. 4. prop. 35. *page* 368.
Prop. 23.	Cor. 4. Prop. 20. *page* 304.
Prop. 24.	Part. 2. prop. 35. *page* 364.
Prop. 25.	Cor. 3. prop. 35. *page* 367.
Prop. 26.	Cor. 2. prop. 52. *page* 443.
Prop. 27.	Part. 2. prop. 23. *page* 314.
Prop. 28.	Part. 1. & 3. prop. 25. *page* 322.
Prop. 29.	Part. 1. pr. 23. & part. 2. 1. 3. prop. 24. *pages* 314. & 319.
Prop. 30.	Prop. 26. *page* 324.
Prop. 31.	Cor. prop. 23. & cor. 3. prop. 37. *pages* 318. & 375.
Prop. 32.	Prop. 30. & 31. *pages* 348. & 349.

Prop. 33.	Prop. 36. *page* 370.
Prop. 34.	Part. 1. prop. 37. & cor. 2. de la même prop. & part. 1. prop. 38. *pages* 371. 374. & 376.
Prop. 35.	Prop. 39. *page* 380.
Prop. 36.	Cor. 1. prop. 39. *page* 382.
Prop. 37.	Part. 1. prop. 40. *page* 388.
Prop. 38.	Part. 1. prop. 40. *page* 388.
Prop. 39.	Part. 2. prop. 40. *page* 388.
Prop. 40.	Part. 2. prop. 40. *page* 388.
Prop. 41.	Cor. 4. prop. 39. *page* 387.
Prop. 42.	Cor. prop. 41. *page* 403.
Prop. 43.	Part. 1. prop. 41. *page* 401.
Prop. 44.	Cor. prop. 41. *page* 404.
Prop. 45.	Même cor. de la prop. preced.
Prop. 46.	Cor. prop. 36. *page* 371.
Prop. 47.	Part. 1. prop. 57. *page* 467.
Prop. 48.	Part. 2. prop. 57. *page* 467.

Euclide Livre 2.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1. 2. & 3.	Je leur substitue la prop. 15. avec ses quatre Corollaires.
Prop. 4.	Prop. 42. *page* 405.
Prop. 5.	Prop. 43. *page* 406.
Prop. 6.	Prop. 44. *page* 408.
Pr. 7. 8. 9. 10. & 11.	Je leur substitue les prop. 20. 27. 28. & 29. avec leurs corollaires.
Prop. 12.	Part. 1. prop. 58. *page* 473.
Prop. 13.	Part. 2. prop. 58. *page* 473.
Prop. 14.	Je lui substitue la prop. 32.

Euclide Livre 3.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1. & corol.	Cor. 1. & part. 2. prop. 13. *pages* 272. & 270.
Prop. 2.	Je lui ſubſtitue la pr. 38. & ſes cor.
Prop. 3.	Part. 3. & part. 1. prop. 13. *page* 270.
Prop. 4.	Cor. 3. prop. 13. *page* 274.
Prop. 5.6.	Prop. 18. *page* 298.
Prop. 7. & 8.	Prop. 9. & 10. & cor. 1. prop. 14. *pages* 256. 259. & 279.
Prop. 9.	Cor. def. 28. Geo. & cor. 3. prop. 14. *page* 204. & 280.
Prop. 10.	Cor. 6. prop. 14. *page* 282.
Pr. 11. 12.	Prop. 19. *page* 299.
Prop. 13.	Cor. prop. 19. *page* 300.
Prop. 14.	Part. 1. & 2. prop. 16. *page* 291.
Prop. 15.	Part. 3. prop. 16. *page* 291.
Prop. 16. & cor.	Prop. 12. & ſon cor. 7. *pages* 264. & 269.
Prop. 17.	Cor. 8. prop. 27. *page* 334.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 12. *page* 266.
prop. 19.	Cor. 5. prop. 12. *page* 268.
Prop. 20.	Cor. 6. prop. 27. *page* 332.
Prop. 21.	Cor. 1. prop. 27. *page* 329.
Prop. 22.	Part. 3. prop. 38. *page* 376.
Prop. 23. & 24.	Je leur ſubſtitue les cor. 2. & 3. de la prop. 39.
Prop. 25.	Cor. 1. prop. 13. *page* 272.
Pr. 26.27.	Cor. 2. prop. 20. *page* 303.
Prop. 28.	Prop. 11. *page* 262.
Prop. 29.	Cor. 2. prop. 11. *page* 264.
Prop. 30.	Cor. 5. prop. 20. *page* 305.
Prop. 31.	Cor. 3. prop. 27. *page* 331.

Prop. 32.	Art. 2. 3[e] circonst. & Cor. 1. prop. 27. *pages* 328. & 329.
Pr. 33. 34.	Je leur substitue les cor. 1. & 2. pr. 40.
Prop. 35.	Prop. 54. & 55. *page* 461. & 462.
Prop. 36.	Cor. prop. 55. *page* 464.
Prop. 37.	Je lui substitue la prop. 45. & ses corollaires.

Euclide Livre 4.	*Elemens des Mathematiques.*
Pr. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.	Je leur substitue la prop. 46. son coroll. & la prop. 49. & ses 4. cor.
Pr. 8. 9. 14.	Cor. prop. 46. *page* 413.
Prop. 10. 11. 12. 13.	Je leur substitue la prop. 50. ses trois premiers coroll. & son 5[e].
Prop. 15.	Cor. 1. prop. 45. *page* 410.

Euclide Livre 5.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1. 2. 3. 4. 5. 6.	Je leur substitue les prop. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. d'Algeb. & leurs coroll.
Prop. 7.	Part. 1. prop. 8. & part. 1. prop. 9. d'Algeb. *pages* 146. & 147.
Prop. 8.	Part. 1. prop. 10. & part. 1. prop. 11. d'Algeb. *page* 148. & *page* 149.
Prop. 9.	Part. 2. prop. 8. & part. 2. prop. 9. d'Algeb. *pages* 146. & 147.
Prop. 10.	Part. 1. prop. 10. & part. 2. prop. 11. d'Algeb. *pages* 148. & 149.
Prop. 11.	Cor. 3. Déf. 12. d'Algeb. *page* 65.
Prop. 12.	Prop. 15. d'Algeb. *page* 160.

Pr. 13.14.	Je leur ſubſtitue les prop. 7. d'Alg.
Prop. 15.	Prop. 5. d'Algeb. *page* 139.
Pr. 16. 17. 18. 19.	Part. 2. 3. 4. & 5. cor. prop. 3. d'Algeb. *page* 135.
Prop. 20.	Je lui ſubſtitue la prop. 13. d'Algeb.
Pr. 21. 22.	Part. 1. cor. prop. 12. d'Algeb. *p.* 153.
Prop. 23.	Part. 2. cor. prop. 12. Algeb. *p.* 154. & 155.
Prop. 24.	Prop. 14. Algeb. *page* 158.
Prop. 25. &c.	Je leur ſubſtitue les pr. 15. 16. 17. 18. 19. & 20. d'Algeb. avec leurs cor.

Euclide Livre 6.	*Elémens des Mathematiques.*
Prop. 1.	Cor. prop. 49. *page* 424.
Prop. 2.	Prop. 51. *page* 431.
Prop. 3.	Je lui ſubſtitue la 2e part. du cor. 3. de la prop. 52.
Prop. 4.	Part. 1. prop. 52. *page* 437.
Prop. 5.	Part. 2. prop. 52. *page* 437.
Prop. 6.	Cor. 1. prop. 52. *page* 441.
Prop. 8.	Prop. 53. *page* 458.
Prop. 9.	Je lui ſubſtitue le cor. 2. de la prop. 53.
Prop. 10.	Cor. 3. prop. 51. *page* 435.
Prop. 11.	Cor. 1. prop. 51. *page* 433.
Prop. 12.	Cor. 2. prop. 51. *page* 434.
Prop. 13.	Cor. 2. prop. 53. *page* 460.
Prop. 14.	Cor. 2. & 3. prop. 50. *page* 428.
Prop. 15.	Cor. 4. & 5. prop. 50. *page* 429.
Prop. 16.	Prop. 2. & 3. Algeb.
Prop. 17.	Cor. 1. prop. 2. Algeb.
Prop. 18.	Cor. 3. prop. 52. *page* 444.
Prop. 19.	Part. 2. cor. prop. 56. *page* 467.

Prop. 20.	Prop. 61. & cor. 1. prop. 62. *pages* 483. *&* 488.
Prop. 21.	Je lui substitue le cor. 3. de la pr. 63.
Prop. 22.	Prop. 64. *page* 495.
Prop. 23.	Cor. prop. 56. *page* 466.
Prop. 24. 25. &c.	Je leur substitue les coroll. 1. & 2. de la prop. 58. les prop. 59. 60. 62. & leurs coroll.
Prop. 31.	Cor. 3. prop. 62. *page* 489.

Euclide Livre II.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1.	Cor. Déf. 10. Geo. *page* 197.
Prop. 2.	prop. 65. *page* 498.
Prop. 3.	prop. 66. *page* 499.
Prop. 4.	prop. 67. *page* 500.
Prop. 5.	prop. 68. *page* 505.
Prop. 6.	Cor. 1. prop. 72. *page* 516.
Prop. 7.	Cor. 2. prop. 72. *pages* 516. *&* 517.
Prop. 8.	prop. 73. *page* 517.
Prop. 9.	part. 2. prop. 74. *page* 518.
Prop. 10.	part. 1. prop. 77. *page* 526.
Prop. 11.	Cor. 2. prop. 69. *page* 508.
Prop. 12.	Cor. 3. prop. 67. *page* 504.
Prop. 13.	prop. 69. *page* 506.
Prop. 14.	part. 2. prop. 76. *page* 523.
Prop. 15.	part. 2. prop. 77. *page* 526.
Prop. 16.	prop. 75. *page* 520.
Prop. 17.	Cor. prop. 75. *page* 521.
Prop. 18.	Cor. 2. prop. 67. *page* 503.
Prop. 19.	Cor. 1. prop. 69. *page* 507.
Prop. 20.	prop. 79. *page* 534.
Prop. 21.	Cor. prop. 79. *page* 536.

Prop. 22. 23. 24. 26. &c.	Je ſubſtitue les cor. 1. & 2. de la prop. 67. la prop. 70. ſon coroll. le cor. 1. de la prop. 72. & la part. 1. de la prop. 74.
Prop. 25.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
Prop. 29. 30. & 31.	Cor. 3. & 4. prop. 81. *p.* 548. & 549.
Prop. 32.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
Prop. 33.	prop. 84. *page* 567.
Prop. 34. 35. &c.	Je leur ſubſtitue la part. 1. pr. 76. & ſon coroll. la prop. 78. les cor. 6. 7. 8. 9. 10. 11. de la prop. 81. les trois coroll. de la prop. 82.

Euclide Livre 12.	*Elemens des Mathematiques.*
Prop. 1.	prop. 63. *page* 491.
Prop. 2.	Cor. 2. prop. 63. *page* 493.
Prop. 3.	Je lui ſubſtitue le cor. 2. prop. 81. *page* 547.
Prop. 4.	Je lui ſubſtitue la prop. 83.
Pr. 5. 6.	part. 2. prop. 82. *page* 557.
prop. 7.	prop. 81. *page* 540.
prop. 8.	prop. 84. *page* 567.
prop. 9.	pr. 3. & 2. d'Algeb. & cor. 8. pr. 81.
prop. 10.	Cor. 2. prop. 81. *page* 547.
prop. 11.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
prop. 12. & 13.	Je leur ſubſtitue la prop. 85. & ſes trois corollaires.
prop. 14.	part. 1. prop. 82. *page* 557.
prop. 15.	pr. 3. & 2. d'Algeb. cor. 7. & 9. pr. 81.
prop. 16. & 17.	Je leur ſubſtitue les prop. 86. 87. & 88. avec leurs Corollaires.
prop. 18.	Cor. 2. prop. 86. *page* 579.

DEMONSTRATIONS NOUVELLES, particulieres à ces Elemens.

DANS L'ALGEBRE.

PRop. 3. *avec son Coroll. prop.* 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. & 20. *avec leurs Corollaires.*

DANS LA GEOMETRIE.

Cor. 1. & 3. *de la prop.* 5. *Cor.* 1. 2. 3. 4. 5. & 6. *de la prop.* 6. *Cor.* 2. 3. & 4. *de la prop.* 7. *Prop.* 8. & *son cor. Part.* 2. *de la prop.* 9. *Part.* 2. *de la prop.* 10. *Prop.* 11. & *ses cor. Prop.* 12. & *ses cor.* 1. & 4. *le cor.* 2. *de la prop.* 13. & *la Combinaison des* 4 *choses de la prop.* 14. *les cor.* 1. 2. 3. 4. 5. & 6. *de la prop.* 14. *Prop.* 15. *Part.* 1. & 2. *de la prop.* 16. *Prop.* 17. *prop.* 19. & *son cor. Cor.* 1. 3. & 5. *de la prop.* 20. *Prop.* 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. *Les cor.* 1. 2. 3. 4. & 5. *de la prop.* 29. *Prop.* 35. & *ses cor.* 1. 2. 3. & 4. *Prop.* 37. *Part.* 1. *de la prop.* 38. & *ses cor.* 1. 2. & 3. *les cor.* 2. & 3. *de la prop.* 39. *Cor.* 1. *de la prop.* 40. *Prop.* 46. & *son cor. Prop.* 47. & *son cor. Prop.* 50. & *ses cor. Prop.* 56. & *son cor. Les prop.* 58. & 61. *sont en partie nouv. Cor.* 1. 2. & 4. *de la prop.* 62. *Cor.* 1. & 3. *de la prop.* 63. *Prop.* 64. *Cor.* 1. 2. 3. *de la prop.* 67. *Cor.* 2. *de la prop.* 69. *Prop.* 70 ; & *son cor. Prop.* 71. *Prop.* 72 ; & *ses cor.* 1. & 2. *prop.* 73. *Part.* 1. *prop.* 74. *prop.* 76. & *son cor. le cor. de la prop.* 79. & *la demon-*

strat. de la prop. 80. sont presqu'entierement nouv. les cor. 2. 3. 4. 5. 6. &c. de la prop. 81. Les cor. 2. & 3. de la prop. 82. prop. 83. Presque toute la prop. 84. son Coroll. &c.

Il y a encore plusieurs autres propositions, & Corollaires, même dans tout l'ouvrage une maniere de proposer, d'expliquer & de démontrer, dont ceux qui ont lû plusieurs Livres elementaires, remarqueront facilement la nouveauté.

APPROBATION.

J'Ay lû par ordre de Monseigneur le Chancelier ces *Elemens des Mathematiques*, & n'y ay rien trouvé qui en doive empêcher l'impression. Fait à Paris ce 24 Novembre 1702.

FONTENELLE.

PRIVILEGE GENERAL.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre, à nos Amez & Feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Grand Conseil, Prevost de Paris, Baillifs, Senechaux, leurs Lieutenans Civils & autres nos Justiciers qu'il appartiendra; SALUT. *Le Sieur* POLYNIER, *Docteur en Médecine*, nous ayant fait remontrer, qu'il desireroit faire part au public d'un ouvrage de sa composition intitulé, ELEMENS DES MATHEMATIQUES, s'il nous plaisoit lui en permettre l'impression, & lui accorder nos Lettres de Privilege sur ce neceſſaires ; Nous lui avons permis & accordé, permettons & accordons par ces preſentes, de faire imprimer par tel Imprimeur ou Libraire qu'il voudra choiſir ledit Livre, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui ſemblera, pendant le temps de huit années conſecutives, *à compter du jour de la date des preſentes*, & de le faire vendre & diſtribuer par tout nôtre Royaume ; Faiſant défenſe à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre & diſtribuer ledit Livre ſous quelque pretexte que ce ſoit, même d'impreſſion étrangere & autrement, ſans le conſentement de l'Expoſant, ou de ſes ayans cauſe, ſur peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amande contre chacun des Contrevenans, applicable un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & intereſts ; à la charge d'en mettre avant de l'expoſer en vente deux Exemplaires en nôtre Bibliotheque publique, un autre dans le Cabinet des Livres de nôtre Château du Louvre, & un en celle de nôtre tres-cher & Feal Chevalier, Chancelier de France le Sieur Phelippeaux de Pontchartrain Commandeur de nos Ordres, de faire imprimer ledit Livre dans *nôtre Royaume & non ailleurs*, & en beau caractere & papier, ſuivant ce qui eſt porté par *les Reglemens des années 1618. & 1686.* & de faire enregiſtrer les preſentes *és Regiſtres de la Communauté des Libraires de nôtredite bonne Ville de Paris*, le tout à peine de nullité d'icelles, du contenu deſquelles Nous vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Expoſant ou ſes ayans cauſe, pleinement & paiſiblement, ceſſant, &

faisant cesser tous troubles & empêchemens contraires. VOULONS que la copie desdites presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin dudit Livre, soit tenue pour dûement signifiée, & qu'aux Copies collationnées par l'un de nos Amez & Feaux Conseillers & Secretaires, foy soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier nôtre Huissier ou Sergeant, de faire pour l'execution des presentes toutes significations, défenses, saisies, & autres actes requis & necessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande & Lettres à ce contraires; Car tel est nôtre plaisir. Donné à Versailles le sixiéme jour de Décembre l'an de grace mille sept cens deux, & de nôtre Regne le soixantiéme; par le Roy en son Conseil.

LE COMTE.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs, conformement aux Reglemens. A Paris ce 12 de Décembre 1702. Signé P. TRABOUILLET, *Syndic.*

A PARIS,
De l'Imprimerie de JACQUE QUILLAU,
Imprimeur Juré Libraire de l'Université,
rue Galande, proche la rue du Fouare.