SCD LYON 1

1800 L

ITHRD 032

SCD LYON 1

EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Accessit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, *accuratisq; scholijs illustrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum accessione post primam editionem locupletati.*

Auctore CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI e Societate IESV.



SCD LYON 1

ROMAE,
Apud Aloysium Zannettum. MDCIII.

PERMISSV SVPERIORVM.

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

CHRISTOPHORVS CLAVIVS E Societate Iesu S. P. D.

SCRIPSERAM superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum, commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quod te non fugit, Dux Sereniſſime, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui a principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparent iterum ac sæpius cogitanti, quæ

SCD LYON 1

aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbiũ, quod Publio tribuitur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaque, cum priorem editionem sumerem postea in manus, multa esse animaduerti, quæ si adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumque inuentis videbantur melius explicari posse: si videlicet e pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipsum etsi tunc etiam præstiti, multo tamen nunc feci copiosius: interijciens ea scilicet, quæ vel vtilia, vel necessaria fore censui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt specimen dem aliquod rerum, quæ hoc volumine accesserunt, demonstrationem Geometricam, eamque apertissimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam scimus a Proclo, mutila esse atque imperfecta videatur. Descriptionẽ item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum a veteribus, tum a recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accurate, ac subtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquisite rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale

circulo,

circulo, quam exquisite rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immo (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quam ad figuram rectilineam plurimorum angulorũ, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc meum, qualiscumque est, cum iterum essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, quam tibi, Dux Serenissime, dedicari posse. Primum quidem quod cum superiorem illam editionẽ sub Emmanuelis Phi liberti clarissimi Ducis patris tui nomine apparere voluerim, stulte feciſſem, si posteriorem hãc alij, quam tibi, qui eius es & ditionis, & humanitatis, & pietatis hæres, eiusque imago corporis, atque animi, consecrassem: Deinde uero quod in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscribenda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod cũ ita sit, quid ni hoc tibi potissimum deberetur donum, (si tamen donum dicendum est id, quod qui dat, uidetur accepisse) quem Ioannes Baptista Benedictus scientissimus rerum Mathematicarum ita testatur excellere in his artibus, illa præcipue in parte, quæ principes uiros, atque ex-

SCD LYON 1

cellentes Imperatores decet, ut ea, quæ pertinent ad instruendos exercitus, oppidaque munienda, per te ipse implere possis. Neque uero hæc postrema fuit causa, etsi postremo in loco ponitur: ut tibi, aliisque, quorum in manus hæc scripta peruenerint, hac saltem ratione ostenderem, ita tibi obligatam esse Societatem nostram uniuersam, ut iure tibi omnia mea opera, & labores uindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui uideatur, atque exile, non dubito tamen futurum, quin ubi tuam istam attigerit dexteram fortitudine fideque præstantem, plurimum sit accepturum uel magnitudinis, uel gratiæ. Vale. Cal. Sept. MDLXXXIX.

QVAE

QVAE PRAECIPVE *primæ editioni addita sint.*

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propos. 28. lib. 1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. propos. lib. *1.* absque ope proportionum sexti lib. *Ad propos. 40. lib. 1.*

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apperere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. *12.* & *13.* lib. 2. *Ad propos. 12. & 13. lib. 2.*

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarii, de angulo contactus. *Ad propos. 16. lib. 3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoque

SCD LYON 1

æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

V I.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

V I I.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. *Ad defin. 8. lib. 5.*

V I I I.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra; Et denique alia scitu iucundissima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

I X.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, siue ipsis adhæreant numeri integri, siue non. *Ad propositiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, siue numerorum fractorum demonstrationes clarissimæ. *Ad finem lib. 7.*

X I.

DE Proportionum compositione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio

SCD LYON 1

ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data ſphæra, ex Pappo Alexãdrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad finem lib. 16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe. *Ad finem lib. 16.*

Cætera quæ paſſim hiſce commentariis adiecta ſunt non pauca, quæ in alijs editionibus deſunt, cuiuſmodi eſt præſertim accuratior inuentio vltimorũ punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum interſectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

SCD LYON 1

PROPOSITIONES OMNIVM XVI. Librorum, quarum eas, quæ in lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non sunt, quamuis in numerum propositionum relatæ sint, alio charactere expressimus.

PRIMI LIBRI.

1  VPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

2 AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique, habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

6 SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus ini-

SCD LYON 1

tio ductis rectis lineis habentes.

8 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia; habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

10 DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

11 DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13 CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdē partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

15 SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

16 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

17 CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

18 OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

19 OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

20 OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

21 SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint: hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

22 EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autē

SCD LYON 1

duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

23 AD datam rectam lineam, datumque in ea punctũ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

24 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

25 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

26 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: Parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

28 SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

29 IN parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externũ interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

30 QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

SCD LYON 1

32 CVIVS CVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis: Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

33 RECTAE lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt: Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

34 PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli: Atque illa bifariam secat diameter.

35 PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis cõstituta, inter se sunt æqualia.

36 PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

37 TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

38 TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

39 TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta: Et in eisdem sunt parallelis.

40 TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta: Et in eisdem sunt parallelis.

41 SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

42 DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

43 IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quę circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

44 AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammũ applicare, in dato angulo rectilineo.

45 AD datam rectam lineã, dato rectilineo æquale parallelogrammũ cõstituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum describere.

47 IN triangulis rectangulis, quadratum, quod a latere

rectum

rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

48 SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

SECVNDI LIBRI.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rect angulis.

2 SI recta linea secta sit vtcunque; Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

3 SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.

4 SI recta linea secta sit vtcunque; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est & illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei. quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato,

6 SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tan-

quam

SCD LYON 1

quam ab vna, descripto.

7 SI recta linea secetur vtcunque; Quod a tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

8 SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquem ab vna linea describitur, quadrato.

9 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum adiuncta quæpiam recta linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

11 DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

12 IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum, comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 IN oxygoniis triangulis, quadratum a latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendi-

cula-

cularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14 DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

TERTII LIBRI.

1 DATI circuli centrum reperire.

2 SI in circuli peripheria duo quælibet pũcta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 SI in circulo duæ rectæ lineæ seſe mutuo secent non per centrum extensæ: Seſe mutuo bifariam non secabunt.

5 SI duo circuli seſe mutuo secent, non erit illorum idem centrum.

6 SI duo circuli seſe mutuo interius tangant, eorum non erit idem centrum.

7 SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrũ non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximę.

8 SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propin-

qui-

SCD LYON 1

quior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

9 SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales: Acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

10 CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

11 SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorū cadet.

12 SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorū adiungitur, per contactū transibit.

13 CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

14 IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro: Et quę æqualiter distant a centro, æquales sunt inter se.

15 IN circulo maxima quidē linea est diameter; aliarū autem propinquior centro, remotiore semper maior.

16 QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

18 SI circulum tangat recta quæpiam linea, a centro aūt ad contactū adiūgatur recta quædā linea: quæ adiūcta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

19 SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à conta-

ctu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

21 IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.

22 QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

23 SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

24 SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

25 CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

26 IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

28 IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineę æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 IN æqualibus circulis, æquales peripherias, ęquales rectę lineæ subtendunt.

30 DATAM peripheriam bifariam secare.

31 IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32 SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentē facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmētis cōsistunt, angulis.

33 SVPER data recta linea describere segmentū circu

SCD LYON 1

li, quod capiat angulũ æqualẽ dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 SI in circulo duę rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctũ, & conuexã peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

37 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

QVARTI LIBRI.

1 IN dato circulo rectã lineã accõmodare æqualẽ datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

2 In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

3 CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

4 IN dato triangulo circulum inscribere,

5 CIRCA datum triangulum circulum describere.

6 IN dato circulo quadratum describere.

7 CIRCA datum circulum quadratum describere,

8 IN dato quadrato circulum describere.

9 CIRCA datum quadratum circulum describere.

10 ISOSCELES triangulum constituere, quod habeat vtrũque eorũ, qui ad basin sũt, angulorũ, duplũ reliqui.

11 IN dato circulo Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SCD LYON 1

12 CIRCA datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.
13 IN dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.
14 CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.
15 IN dato circulo hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.
16 IN dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum describere.

QVINTI LIBRI.

1 SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices: quàm multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.
2 SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: Erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.
3 SI sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo sumptarũ vtraque vtriusq; æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autẽ quartæ.
4 SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secũdæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptę fuerint.
5 SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.
6 SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

AEQVA-

SCD LYON 1

7 AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

8 INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationē habet, quam minor: Et eadē ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

10 AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

11 QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

12 SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

13 SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartā, maiorē rationem habuerit, quam quinta ad sextam. Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

14 SI prima ad secundam eandem habuerit rationem quam tertia ad quartam; prima vero, quam tertia, maior fuerit; Erit & secunda maior, quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

15 PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

16 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.

17 SI compositæ magnitudines proportionales fuerint; hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

18 SI diuisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ proportionales erunt.

19 SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se

SCD LYON 1

habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

20 SI sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quam tertia, maior fuerit; Erit & quarta quam sexta, maior. Quod si prima quam tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextę: Sin illa minor, hęc quoque minor erit.

21 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fuerit-que perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quam tertia, minor fuerit; Erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

22 SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam, eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

35 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

16 SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

27 SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

SCD LYON 1

28 SI prima ad secũdam habuerit maiorem proportionẽ, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.

29 SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam, maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

30 SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam.

31 SI sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam: Item secundæ priorũ ad tertiã maior, quã secundæ posteriorũ ad tertiã: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertium.

32 SI sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundã: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiã.

33 SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

34 SI sint quotcunque magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primã posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorẽ proportionem, quàm omnes priores, relictã primã, ad omnes posteriores, relictã quoque primam; minorem autem, quã prima priorum ad primam posteriorum, maiorem denique etiam quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SCD LYON 1

SEXTI LIBRI.

1 TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

2 SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

3 SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

4 AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

5 SI duo triangula latera proportionalia habeant: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

6 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

SCD LYON 1

8 SI in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta linea imperatam partem auferre.

10 DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

11 DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

12 TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

13 DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

14 AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 AEQVALIVM, & vnũ vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnũ angulum vni æquales habentium reciproca sunt latetera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis cõprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

17 SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

SCD LYON 1

19 SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similerque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint, ipsę etiam rectę lineæ proportionales erunt.

23 AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24 IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

25 DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26 SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27 OMNIVM parallelogrammorum secundum eandē rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis ei, quod a dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28 AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrāmo dato. Oportet autē datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

29 AD datam rectā lineam, dato rectilineo æquale parallelogrāmum applicare excedēs figura parallelogrā

SCD LYON 1

ma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 PROPOSITAM rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione secare.

31 IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positę a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

32 SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum cõposita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

33 IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SEPTIMI LIBRI.

1 SI duobus numeris inęqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad assumpta sit vnitas: qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

2 DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

3 TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

4 OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

5 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

6 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eedem partes erit, quæ vnius unius.

7 SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati:

SCD LYON 1

Et reliquus reliqui eadē pars erit, qualis totus totius

8 SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

9 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertii, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

10 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædē partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertii, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

11 SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

12 SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſſim proportionales erunt.

14 SI ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

15 SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

16 SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

17 SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quā multiplicati.

18 SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

19 SI quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecūdo & tertio fit, numero. Et ſi qui ex primo, & quarto

SCD LYON 1

fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero: ipsi quatuor numeri proportionales erũt.

20 SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur. æqualis est ei, qui a medio efficitur. Et si qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

21 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

22 SI fuerint tres numeri, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

24 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

25 SI duo numeri primi inter se fuerint: qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

26 SI duo numeri ad quempiam primi fuerint: etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

27 SI duo numeri primi inter se fuerint; Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

28 SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

29 SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque seipsum fecerit aliquẽ: Et geniti ex ipsis primi inter se erũt. Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt; Et semper circa extremos hoc eueniet.

30 SI duo numeri primi inter se fuerint; Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Et si vterque simul ad vnum aliquẽ illorum primus fuerit; Etiã qui in principio, numeri primi inter se erunt.

31 OMNIS primus numerus, ad omnẽ numerum, quem

non

non metitur, primus est.
32 SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquē; genitū aūt ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: Is etiam vnum eorū, qui in principio, metietur.
33 OMNEM compositum numerum aliquis primus numerus metitur.
34 OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.
35 NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.
36 DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.
37 SI duo numeri numerum quempiā metiantur. Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.
38 TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.
39 SI numerum quispiam numerus metiatur: Ille quē metitur, partem habebit à metiente denominatam.
40 SI numerus partem habuerit quamlibet: metietur illum numerus à parte denominatus.
41 NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

OCTAVI LIBRI.

1 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint: Ipsi minimi sunt omnium eandē cum eis rationē habentiū.
2 NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.
3 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationē habentium: Illorum extremi sunt inter se primi.
4 RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.
5 PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.
6 SI sint quotcunque numeri deinceps proportiona-

SCD LYON 1

les, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur.

7 SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus aũt extremũ metiatur: is etiã metietur secundũ.

8 SI inter duos numeros medij cõtinua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij cõtinua proportione cadunt numeri, tot & inter alios eandẽ cũ illis habẽtes rationẽ medij cõtinua proportione cadẽt.

9 SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri: quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac unitatem medij cõtinua proportione cadent.

10 SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrũque ipsorum & vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

11 DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus. Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

12 DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri. Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

13 SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt; & semper circa extremos hoc eueniet.

14 SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

15 SI cubus numerus cubum numerũ metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur: & cubus cubum metietur.

16 SI quadratus numerus quadratũ numerum non me-

SCD LYON 1

tiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

17 SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

18 DVORVM similium planorũ numerorum vnus medius proportionalis est numerus. Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

19 DVORVM similium solidorum numerorum duo medii proportionales sunt numeri. Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

20 SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus, similes plani erunt illi numeri.

21 SI inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri, similes solidi sunt illi numeri.

22 SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

23 SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus: Et quartus cubus erit.

24 SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

25 SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

26 SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

27 SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

NONI LIBRI.

1 SI duo similes plani numeri multiplicantes se mu-

tuo

tuo faciant quendam: Productus quadratus erit.

2 SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum: similes plani erunt.

3 SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem Productus cubus erit.

4 SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

5 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum: Et multiplicatus cubus erit.

6 SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

7 SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat: Factus solidus erit.

8 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes oēs.

9 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatē, sit quadratus: Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus: Et reliqui omnes cubi erunt.

10 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatē, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit; præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

11 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

12 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

13 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit;

Maximum nullus alius metietur, preter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

14 SI minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

15 SI tres numeri deinceps proportionales fuerint mini mi omnium eandē cum ipsis rationē habentium: Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

16 SI duo numeri, primi inter se fuerint: Nō erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

17 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; Non erit, vt primus secundum, ita vltimus ad alium quēpiā.

18 DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

19 TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

20 PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

21 SI pares numeri quotcunque componantur; Totus par erit.

22 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

23 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: Et totus impar erit.

24 SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

25 SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

26 SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

27 SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

28 SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

29 SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

30 SI impar numerus parem numerum metiatur: Et illius dimidium metietur.

SCD LYON 1

31 SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

32 NVMERORVM a binario duplorum, vnusquisque pariter par est tantum.

33 SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

34 SI par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidiū habeat imparē: Pariter par est, & pariter impar.

35 SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & vltimo ęquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

36 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit Perfectus.

DECIMI LIBRI.

1 DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quę minor erit proposita minore magnitudine.

2 SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

3 DVABVS magnitudinibus commēsurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

4 TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

5 COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

6 SI duæ magnitudines inter se proportionem ha-

SCD LYON 1

beant, quam numerus ad numerum: Commensurabiles erunt magnitudines.

7 INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quã numerus ad numerũ.

8 SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

9 QVAE a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata: inter se proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata: inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

10 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis: Et tertia quartæ commensurabilis erit: Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis: Et tertia quartæ incommensurabilis erit.

11 PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

12 QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles; & inter se sunt commensurabiles.

13 SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

14 SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

15 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit, quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitu

SCD LYON 1

dine; Et tertia tanto plus poterit, quam quarta, quantũ est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit, quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit, quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

16 SI duæ magnitudines cõmensurabiles cõponantur: Et tota magnitudo vtriq; ipsarum commẽsurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ cõmẽsurabilis fuerit: Et quæ a principio magnitudines cõmẽsurabiles erũt.

17 SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit: Et quæ a principio magnitudines, incommensurabiles erunt.

18 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrãmum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: Maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: In partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

19 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ aũt parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrãmum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incõmẽsurabiles lõgitudine ipsã diuidat: Maior tãto plus poterit quã minor, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi lõgitudine incõmẽsurabilis. Quod si maior tãto plus possit quã minor, quantũ est quadratũ rectæ lineæ sibi lõgitudine incõmẽsurabilis, quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur deficiens figura quadrata: In partes lõ-

gitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

20 QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum, Rationale est.

21 SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinē efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

22 Quod sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

23 QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

24 MEDIAE commensurabilis, Media est.

25 QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

26 QVOD sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

27 MEDIVM non superat Medium Rationali.

28 MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

29 MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant.

30 INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi cōmensurabilis.

31 INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi lōgitudine incōmēsurabilis.

32 INVENIRE duas Medias potentia tantū cōmēsurabiles, quæ Rōnale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

33 INVENIRE duas Medias potētia solū cōmēsurabiles, quę Mediū cōtineāt, ita vt maior plus possit, quā minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmēsurabilis.

IN-

SCD LYON 1

34 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles,quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis,Rationale:Rectangulum vero sub ipsis contentum,Medium.

35 INVENIRE duas rectas lineas potentia incōmensurabiles, quæ faciant commpositum quidem ipsarum quadratis, Medium: Rectangulum vero sub ipsis contentum,Rationale.

36 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles,quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis,Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

37 SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

38 SI duæ mediæ potentia tantum commensurabiles componantur,quæ Rationale contineant:tota Irrationalis erit.Vocetur autem ex binis Mediis prima.

39 SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur,quæ Medium contineant:tota Irrationalis erit.Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

40 SI duæ rectæ lineæ potentia incōmensurabiles cōponantur,quæ faciant compositum quidē ex ipsarū quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

41 SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur,Rationale:tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

42 SI duæ rectę lineę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

SCD LYON 1

43 QVAE ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
44 QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
45 QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
46 MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
47 RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
48 BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
49 INVENIRE ex binis nominibus primam.
50 INVENIRE ex binis nominibus secundam.
51 INVENIRE ex binis nominibus tertiam.
52 INVENIRE ex binis nominibus quartam.
53 INVENIRE ex binis nominibus quintam.
54 INVENIRE ex binis nominibus sextam.
55 SI spatium contineatur sub Rationali,& ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est,quæ ex binis nominibus appellatur.
56 SI spatium contineatur sub Rationali,& ex binis nominibus secunda: Recta linea spatium potens Irrationalis est,quæ ex binis Mediis prima appellatur.
57 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia:Recta linea spatium potens Irrationalis est,quæ ex binis Medijs secunda dicitur.
58 SI spatium contineatur sub Rationali,& ex binis nominibus quarta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.
59 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta:Recta linea spatium potẽs Irrationalis est,quæ Rationale & Medium potens appellatur.
60 SI spatium contineatur sub Rationali,& ex binis nominibus sexta: Recta linea spatium potens Irrationalis est,quæ bina Media potens nominatur.
61 QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex bi-

SCD LYON 1

nis nominibus primam.

62 QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

63 QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

64 QVADRATVM Maioris ad Rationalē applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

65 QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66 QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

67 EI, quæ est ex binis noībus, lōgitudine cōmensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atq; ordine eadē.

68 EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atq; ordine eadem.

69 MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

70 RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

71 BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

72 SI Rationale & Medium componantur: quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

73 SI duo Media inter se incommensurabilia componantur: duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

74 SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

75 SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

SCD LYON 1

76 SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

77 SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositũ quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

78 SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis cõtinetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

79 SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

80 APOTOMAE vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solũ commensurabilis existens toti.

81 MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

82 MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

83 MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium.

84 EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tãtum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

85 EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum

SCD LYON 1

tum cõgruit recta linea potentia incõmensurabilis existens toti, & cũ tota faciens & cõpositum ex ipsarũ quadratis Mediũ, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

86 INVENIRE primam Apotomen.

87 INVENIRE secundam Apotomen.

88 INVENIRE tertiam Apotomen.

89 INVENIRE quartam Apotomen.

90 INVENIRE quintam Apotomen.

91 INVENIRE sextam Apotomen.

92 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima: Recta linea spatium potens Apotome est.

93 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

94 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia: Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

95 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta: Recta linea spatium potens, Minor est.

96 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

97 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

98 QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

99 QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalẽ applicatum, latitudinẽ facit Apotomen secundã.

100 QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatũ, latitudinẽ facit Apotomen tertiã.

101 QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

102 QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

103 QVADRATVM eius, quæ cũ Medio Mediũ totũ effi-

cit,

cit,ad Rationalem applicatum,latitudinem facit Apotomen ſextam.

104 RECTA linea Apotomæ longitudine commenſurabilis,& ipſa Apotomę eſt,atque ordine eadem.

105 RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, & ipſa Mediæ Apotome eſt,atque ordine eadem.

106 RECTA linea Minori commenſurabilis, & ipſa Minor eſt.

107 RECTA linea cõmenſurabilis ei, quæ cũ Rationali Medium totum efficit;& ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

108 RECTA linea cõmẽſurabilis ei,quę cũ Medio Mediũ totũ efficit,& ipſa cũ Medio Mediũ totũ efficiens eſt.

109 MEDIO a Rationali detracto:Recta linea,quæ reliquum ſpatium poteſt,vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome,vel Minor.

110 RATIONALI a Medio detracto;aliæ duę Irrationales fiunt,vel Medię Apotome prima,vel cum Rationali Medium totum efficiens.

111 MEDIO a Medio detracto,quod ſit incommenſurabile toti:reliquæ duæ Irrationales fiũt,vel Mediæ Apotome ſecunda,vel cũ Medio Medium totum efficiens.

112 APOTOME non eſt eadẽ,quæ ex binis nominibus.

113 QVADRATVM Rationalis ad eam quæ ex binis nominibus,applicatum,latitudinem facit Apotomen,cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius,quę eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome,quæ fit,eundem habet ordinem, quẽ ea,quæ eſt ex binis nominibus.

114 QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum,latitudinem facit eam,quę ex binis nominibus,cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomę nominibus,& in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit,eundẽ habet ordinẽ,quẽ ipſa Apotome.

115 SI ſpatium contineatur ſub Apotoma,& ea,quę ex binis nominibus,cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomę,& in eadem proportione; Recta linea ſpatium potens,eſt Rationalis.

SCD LYON 1

116 A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

117 PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

VNDECIMI LIBRI.

1 RECTAE lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

2 SI duæ rectæ lineæ se mutuo secent; in vno sunt plano. Atque Triangulum omne in vno est plano.

3 SI duo plana se mutuo secent; communis eorum sectio est linea recta.

4 SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secanti bus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

5 SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

6 SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

7 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta; Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

8 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

9 QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

10 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tãgentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodẽ plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

11 A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12 DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad

SCD LYON 1

rectos angulos rectam lineam excitare.

13 DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

14 AD quæ plana, eadem recta linea recta est: Illa sunt parallela.

15 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistētes plano; Parallela sunt, quę per illa ducūtur, plana.

16 SI duo plana parallela plano quopiam secentur; cōmunes illorum sectiones sunt parallelæ.

17 SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

18 SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19 SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos; communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

20 SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

21 OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

22 SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores, comprehendant autem ipsos rectælineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cōnectentibus triangulum cōstituatur.

23 EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

24 SI solidum parallelis planis contineatur: aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

25 SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

26 AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SCD LYON 1

27 A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

28 SI solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidũ ab ipso plano.

29 SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineę in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

30 SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

31 SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

32 SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine: inter se sunt, vt bases.

33 SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

34 AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur: Illa sunt æqualia.

35 SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique, in sublimibus autem lineis quælibet sumptæ fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus cosistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt; ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

36 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SCD LYON 1

37 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. Et solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

38 SI planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum perpendicularis ducta fuerit. In communem sectionē cadet planorum ducta perpendicularis.

39 SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint, per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

40 SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorū hoc quidem habeat basin parallelogrammum, illud vero triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

DVODECIMI LIBRI.

1 QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

2 CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum â diametris quadrata.

3 OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; & in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

4 SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triāgulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se & similes toti; & in duo prismata æqualia: Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ

SCD LYON 1

in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

5 SVB eadem altitudine existétes pyramides, & triãgulares habentes bases: inter se sunt, vt bases.

6 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases; inter se sunt, vt bases.

7 OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se triangulares bases habentes.

8 SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorũ laterum ratione.

9 AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases, & altitudines. Et quarũ pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines: illæ sunt æquales.

10 OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

11 SVB eadem altitudine existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt bases.

12 SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

13 SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

14 SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines.

15 AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines; illi sunt æquales.

16 DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulũ

17 DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

18 SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SCD LYON 1

TERIIDECIMI LIBRI.

1 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur: maius segmentum assumēs dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

2 SI recta linea suiipsius segmenti quintuplum possit: Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

3 SI recta linea secundum extremā & mediam rōnem secetur: minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

4 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur: Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata; tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

5 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

6 SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentum Irrationalis linea est, quæ uocatur Apotome.

7 SI pētagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipsum pentagonum.

8 SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

9 SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

SCD LYON 1

10 SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

11 SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Trianguli latus potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

13 PYRAMIDEM constituere, & data sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

14 OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

15 CVBVM constituere, & sphæra complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quod sphærę diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

16 ICOSAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras, & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

17 DODECAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras, & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome.

18 LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

QVARTIDECIMI LIBRI.

1 QVAE ex centro circuli cuispiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

2 SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

3 SI in circulo pẽtagonũ æquilaterũ describatur: quĩ ex

SCD LYON 1

latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

4 *SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione: maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.*

5 IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

6 SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni: Erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

7 SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli: Erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Icosaedri superficiei æquale.

8 RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æqui lateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono.

9 SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

10 SI recta linea secetur extrema ac media ratione: Erit vt recta potens id, quod à tota, & id, quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

11 DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.

12 *LATVS trianguli æquilateri potētia sesquitertiū est lineæ perpēdicularis ab vno angulo ad latus oppositū deductæ.*

SCD LYON 1

13 SI sphæra diameter fuerit Rationalis: Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

14 SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur: Erit basis Tetraedri sesquitertia basis octaedri; superficies aũt Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

15 RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrũ sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

16 OCTAEDRVM in sphæra descriptũ diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ.

17 TETRAEDRVM sphæræ impositum ad Octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea potente viginti septem sexagesimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ.

Vel vt Campanus habet.

TETRAEDRVM sphæræ impositum ad octaedrum in eadem sphæra descriptum se habet, vt rectangulum sub linea, quæ potentia est subsesquitertia trium quartarũ partiũ lateris Tetraedri, & sub linea superquintupartiẽte vigesimas septimas partes earundẽ triũ quartarũ partiũ lateris Tetraedri contentũ, ad quadratũ diametri sphæræ.

18 LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa, tripla est eius perpendicularis, quæ ex cẽtro trianguli ad eandem basim deducitur.

19 SI Octaedrũ sphæræ inscribatur: Erit semidiameter sphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro sphæræ in basin quamcunque Octaedri ducitur.

20 DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphæra collocati; Perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquã basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

21 IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

SCD LYON 1

22 SI Octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæræ inscribantur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.

23 SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineã sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris linea latus Icosaedri, minus aũt segmentum posterioris linea latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit.

24 SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

25 SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

26 SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectæ: Latus Icosaedri eidem sphæræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

27 CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt superficies cubi ad Octaedri superficiem: Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

28 SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omniũ: Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

29 QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

30 SI Cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: Erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt

SCD LYON 1

latus Tetraedri ad lineã perpendicularẽ, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

31 LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius; Axis vero, siue altitudo Tetraedri potẽtia sesquitertia est lateris cubi in eadẽ sphæra descripti.

32 CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

QVINTIDECIMI LIBRI.

1 IN dato cubo pyramidem describere.
2 IN data pyramide Octaedrum describere.
3 IN dato cubo Octaedrum describere.
4 IN dato Octaedro cubum inscribere.
5 IN dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.
6 IN dato Octaedro pyramidem describere.
7 IN dato Dodecaedro Icosaedrum describere.
8 IN dato Dodecaedro cubum describere.
9 IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.
10 IN dato Dodecaedro pyramidem describere.
11 IN dato Icosaedro cubum describere.
12 IN dato Icosaedro Pyramidem describere.
13 IN dato cubo Dodecaedrum describere.
14 IN dato cubo Icosaedrum describere.
15 IN dato Icosaedro Octaedrum describere.
16 IN dato Octaedro Icosaedrum describere.
17 IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.
18 IN data pyramide Cubum describere.
19 IN data pyramide Icosaedrum describere.
20 IN data pyramide Dodecaedrum describere.
21 IN dato solido regulari sphæram describere.

SEXTIDECIMI LIBRI.

1 SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: Erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus recta linea diuisa extrema ac media ratione, triplicata.

SCD LYON 1

2 LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

3 SI ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ appositæ latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius; Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

4 MINVS segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti duplum est potentia lateris Icosaedri in ea Pyramide descripti.

5 LATVS cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descriptæ: Latus vero pyramidis duplum est longitudine lateris Octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplũ est potentia lateris sibi inscripti Octaedri.

6 LATVS Dodecaedri maius segmentum est recta, quę potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscriptæ.

7 SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrũ: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cuai, & Dodecaedri.

8 LATVS pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

9 LATVS pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

10 SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.

11 LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

12 LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.

SCD LYON 1

13 LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione: Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

14 LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ pyramidis.

15 SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

16 LATVS Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extremæ ac mediæ ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

17 DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

18 LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extremæ ac mediæ ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

19 SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac mediæ ratione sectum fuerit, minusq; eius segmentū a toto latere Icosaedri sublatum; a reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta. Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

20 CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

21 PYRAMIS sibi inscripti Octaedri dupla est.

22 CVBVS sibi inscripti Octaedri sextuplus est.

23 OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

24 OCTAEDRVM sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

25 PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

26 OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases Octaedri ad quinque bases Icosaedri.

SCD LYON 1

27 ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem, habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadē cū Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

28 DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, at vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

29 DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionē habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

30 DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdē cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit: Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

31 OCTAEDRVM excedit sibi descriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

SCD LYON 1

INDEX PROBLEMATVM Ac Theorematum, quæ præter propositiones in sexdecim libris Euclidis contentas in hisce commentariis demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.

1 REGVLAM *pro lineis rectis ducendis examinare, num recta sit, nec ne.* Ad defin. 4.

2 ANGVLVM *rectilineum examinare, num rectus sit, an obtusus, vel acutus.* Ad defin. 12.

3 NORMAM *pro angulis rectis constituendis examinare, num accurate fabricata sit.* Ad def. 12.

4 CIRCVLVS *bifariam a diametro secatur.* Ad def. 18.

5 CIRCVLVS *a linea per centrum non transeunte secatur in partes inæquales, maiorque est ea, in qua centrum.* Ad defin. 18.

6 DVAE *rectæ lineæ non habent vnum & idem segmentum commune.* Ad Axioma 10.

7 DVAE *rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.* Ad Axioma 11.

8 OMNES *anguli recti sunt inter se æquales.* Ad Axioma. 12.

9 DVAE *rectæ lineæ spatium non comprehendunt.* Ad axioma 14.

10 SVPER *data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere.* Ad propos. 1.

11 OMNE *triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum.* Coroll propos. 5.

12 OMNE *triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum.* Coroll. propos. 6.

13 SI *trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basin fiant æquales: Et duo latera illa æqualia inter se erunt.* Ad propos. 6.

SCD LYON 1

14 *SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtẽdũtur, angulosque reliquos hiſce lateribus incluſos, æquales.* Ad propoſ. 8.

15 *SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrumque vtrique æqualia, habuerint uero & baſim baſi æqualem: æquiangula inter ſe erunt, & æqualia.* Coroll. propoſ. 8.

16 *DVAE lineæ rectæ ſe mutuo ſecantes efficiunt ad punctum ſectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales.* Coroll. 1. propoſ. 15.

17 *QVOTLIBET anguli circa vnum & idẽ punctum conſtituti, quatuor rectis ſunt æquales.* Coroll. 2. propoſ. 15.

18 *SI ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt.* Ad propoſ. 15.

19 *SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint: Erũtqualibet duæ lineæ aduerſæ in rectum ſibi, & continuum coniunctæ.* Ad propoſ. 15.

20 *AB vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plures lineæ rectæ, quam duæ inter ſe æquales.* Ad propoſ. 16.

21 *AB vno puncto ad eandẽ lineã rectam non poſſunt duci plures lineæ perpẽdiculares, quã vna.* Ad propoſ. 17.

22 *IN omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, aut obtuſus, reliqui ſunt acuti.* Coroll. 1. propoſ. 17.

23 *SI linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum obtuſum, & acutum alterum: Linea perpendicularis ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſa cadit ad partes anguli acuti.* Coroll. 2. propoſ. 17.

24 *OMNES tres anguli in triangulo æquilatero, & duo ſupra baſin in Iſoceles, ſunt acuti.* Coroll. 3. propoſ. 17.

25 *OMNES tres anguli in triangulo Scaleno ſunt inæquales.* Coroll. propoſ. 18.

26 *OMNIVM rectarum ex quouis puncto ad rectam quam*

cun-

SCD LYON 1

cunque ductarum, ea quæ perpendicularis est, minima existit. Coroll. propos. 19.

27 SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basim ducta in partes inæquales ipsam diuidat: Latera illum angulū continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori. Ad propos. 19.

28 SI trianguli duo latera inæqualia fuerint; Linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basim in partes inæquales, maiusque segmentum erit prope maius latus. Ad propos. 19.

29 SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basim bifariam quoque secet: Erunt duo latera angulum continentia æqualia. Quod si latera æqualia fuerint, basim etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit. Ad propos. 19.

30 IN triangulo aliquo duci possunt duæ rectæ vnæ quidē ab extremo lateris, altera vero a puncto prope alterum extremum eiusdem lateris, intra triangulum concurrentes, quæ maiores sint duobus lateribus trianguli. Ad propos. 21.

31 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: ipsa æqualia inter se erunt. Coroll. propos. 26.

32 IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum vel basim bifariam, perpendicularis est ad basim; Et si quidem angulum bifariam diuidat; secabit quoque basim bifariam: si vero basim secet bifariā, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra, Linea perpendicularis ad basim ducta diuidit & basim, & angulum bifariam. Ad propos. 26.

33 TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulū

com-

comprehendentia æqualia. Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur, si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam. Ad propos. 26.

34 *SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, semper magis ac magis inter se distabunt, omnemque finitam magnitudinem ipsarum distantia excedet.* Ad propos. 28.

35 *SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.* Ad propos. 28.

36 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.* Ad propos. 28.

37 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.* Ad propos. 28.

38 *SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutũ: duæ illæ rectæ minus semper inter se distabũt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.* Ad propos. 28.

39 *SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat: Duæ illæ rectæ lineæ in infinitũ productæ sibi mutuo incidẽt ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.* Ad propos. 28. Estque axioma 13. Hæ porro quatuor vltimæ propositiones demonstrantur ex solis 28. propositionibus Euclidis, nulla adhibita proprietate parallelarum.

40 *PARALLELOGRAMMVM constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duabus rectis li-*

neis

neis æqualia. Ad propos. 31.

41 *A dato pũcto extra datã rectam lineam, rectam lineam ducere, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem.* Ad propos. 31.

42 *A dato puncto in extremo lineæ rectæ, ad ipsam, licet non producatur, aut produci non possit, perpendicularem lineam excitare.* Ad propos. 31.

43 *A dato puncto in extremo fere plani, & extra lineam rectam, ad ipsam rectam, lineam perpendicularem demittere.* Ad propos. 31.

44 *SI ab vno angulo trianguli linea recta extra triangulum ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis, & oppositis: illa linea erit in directum ipsi lateri constituta.* Ad propos. 32.

45 *OMNES anguli figuræ cuiusuis rectilineæ, sunt æquales bis tot rectis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.* Ad propos. 32.

46 *OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis æquales sũt bis tot rectis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.* Ad propos. 32.

47 *SI singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur versus eandem partem; omnes anguli externi æquales sunt quatuor tantum rectis.* Ad propos. 32.

48 *SI pentagoni singula latera producantur in vtram que partem, ita vt qualibet duo extra pentagonum coeant: efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.* Ad propos. 32.

49 *TRES anguli cuiuslibet trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cuiusuis alterius trianguli simul sumptis.* Coroll. 1. propos. 32.

50 *IN triangulo Isoscele, si angulus a lateribus æqualibus comprehensus fuerit rectus, erit vteruis æqualium angulorum supra basem semirectus; si vero obtusus, minor semirecto, si denique acutus, maior semirecto.* Coroll. 2. propos. 32.

51 *QVILILIBET angulus trianguli æquilateri continet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum.* Coroll. 3. propos. 32.

SCD LYON 1

52 *SI ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constituentur duo triangula scalena, quorum vnumquoque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem, alium vero perpendiculari oppositum æqualem duabus tertijs partibus unius recti, reliquum denique æqualem tertiæ parti vnius recti* Coroll. 4. propos. 32.

53 *ANGVLVM rectum in tres angulos æquales diuidere* Ad propos. 32.

54 *OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.* Ad propos. 34.

55 *OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.* Ad propos. 34.

56 *OMNE quadrilaterum habens, omnes angulos rectos, est parallelogrammum.* Ad propos. 34.

57 *IN quadrato & Rhombo anguli oppositi bifariam secantur a diametro.* Ad propos. 34.

58 *IN altera parte longiori, & Rhomboide, anguli oppositi non bifariam secantur a diametro.* Ad propos. 34.

59 *IN quadrato, & altera parte longiori, duæ diametri sunt inter se æquales.* Ad propos. 34.

60 *IN Rhombo, et Rhomboide, duæ diametri non sunt inter se æquales.* Ad propos. 34.

61 *IN omni parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt.* Ad propos. 34.

62 *OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.* Ad propos. 34.

63 *RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum quoque bifariam. Et recta linea diuidēs parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariā.* Ad propos. 34.

64 *A quouis dato puncto lineam rectā ducere, quæ parallelogrammum datum secet bifariam.* Ad propos. 34.

65 *INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cū altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui li-*

neis

neis datis continetur, minores esse duobus rectis. Ad propos. 34.

66 IN aliquo triangulo constitui possunt intra ipsum duæ rectæ a duobus punctis basis, æquales duobus lateribus. Ad propos. 34.

67 IN omni figura rectilinea latera habēte numero paria, si quidem fuerit æquilatera & æquiangula, duo qualibet latera opposita parallela inter se sunt. Ad propos. 34.

68 PARALLELOGRAMMA æqualia super eandem basim, ad easdemque partes constituta, inter easdem sunt parallelas. Ad propos. 35.

69 PARALLELOGRAMMA æqualia super bases æquales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas. Et parallelogramma æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basem. super æquales bases sunt constituta. Ad propos. 36.

70 SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et cōtra, si duo parallelogramma sunt inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit. Ad propos. 36.

71 TRIANGVLA, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque utrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, si quidem ambo simul duobus sint rectis æquales, æqualia sunt: Si uero duobus sint rectis maiores, minus illud est, quod maiorem habet angulum; si denique sint minores duobus rectis, maius illud erit, quod maiorem angulum habet. Ad propos. 37.

72 SI a quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secabit. Ad propos. 38.

73 A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum. Ad propos. 38.

74 LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam; reliquo lateri est parallela. Ad propos. 39.

75 OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bi-

SCD LYON 1

fariam diuiditur, parallelogrammum est. Ad propos. 39.
76 TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basem, super æquales bases erunt constituta. Ad propos. 40.
77 SI duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et cõtra, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit. Ad propos. 40.
78 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases æquales sint, sunt inter se æqualia. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas æquales. Ad propos. 40.
79 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est. Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est. Ad propos. 40.
80 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt. Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales. Ad prop. 40.
81 TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est. Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est. Ad propos. 40.
82 SI in triangulo linea recta uni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensque alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam. Ad propos. 40.
83 DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare. Ad propos. 40.
84 SI triangulum duplam habuerit basim, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo: triangulum parallelogrammo æquale est. Ad propos. 41.
85 SI parallelogrammum & triangulum æquales habue-

SCD LYON 1

rint baſes, in eiſdemque fuerint parallelis : duplum erit parallelogrammum trianguli. Ad propoſ. 41.

86 SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint baſem, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis: Erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem. Ad propoſ. 41.

87 SI triangulum & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli: Erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli. Ad propoſ. 41.

88 TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſem habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppoſiti. Ad propoſ. 41.

89 DATO parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in dato angulo rectilineo. Ad propoſ. 42.

90 SI parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia: conſiſtent reliqua duo circa diametrum. Ad propoſ. 43.

91 AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo. Ad propoſ. 44.

92 DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere. Ad propoſ. 45.

93 LINEARVM æqualium æqualia ſunt quadrata. Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ. Ad propoſ. 46.

94 TRES numeros inuenire, ita vt quadrati numeri duorum quadrato numero reliqui ſint æquales. Ad propoſ. 47.

95 SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro deſcriptum, duplum erit prædicti quadrati. Ad propoſ. 47.

SCD LYON 1

96 QVADRATVM diametri figura altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium. Ad propos. 47.

97 SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia: Erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. Ad propos. 47.

98 DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. Ad propos. 47.

99 PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. Ad propos. 47.

100 PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. Ad propos. 47.

101 PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata. Ad propos. 47.

102 COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire. Ad propos. 47.

103 SI ex angulo a duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum: Secabitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bifariam: Erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori basis segmento adiacet. Ad propos. 47.

104 IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrãmo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctũ, in quo conueniũt latera parallelogrammorũ lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producãtur. Ad propos. 47.

SCD LYON 1

105 TRIANGVLORVM comparationes in primo libro demonstratas explicare. Ad finem lib. 1.

106 QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia sunt, utrumque utrique, & unus angulus uni angulo, qui uni æqualium laterum opponitur; baſes æquales eſſe nequeunt, niſi quando angulus in utroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus vel eſt minor recto, vel non minor recto. Ad finem lib. 1.

107 QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia sunt, utrumque utriq; & unus angulus uni angulo, ita vt unus uni æqualium laterum, & alter alteri opponatur: nihil colligi poteſt. Ad finem lib. 1.

108 QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia sunt, utrumque utrique, & angulus in uno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur uni illorum laterum: nihil poteſt inferri. Ad finem lib. 1.

IN SECVNDO LIBRO.

1 IN omni parallelogrammo, ſi unus angulus duntaxat detur rectus, reliqui etiam tres recti erunt. Ad defin. 1.

2 SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis unius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis. Ad propoſ. 1.

3 SI ſins duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehẽſum ſub illis duabus rectis lineis, una cum rectangulo ſub una parte unius, & una parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, et dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, una cum rectangulo ſub reliquis partibus cõprehenſo. Ad propoſ. 1.

4 SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Qua-

SCD LYON 1

dratum, quod a tota sit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. Ad propos. 2.

5 *PARALLELOGRAMMA circa diametrum quadrati sunt quadrata.* Ad propos. 4.

6 *DIAMETER cuiusuis quadrati diuidit eius angulos bifariam.* Ad propos. 4.

7 *SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.* Ad propos. 4.

8 *NVMERVM quadratum inuenire, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Et vicissim quadratum numerum reperire, a quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum.* Ad propos. 4. 5. 6. & 8.

9 *SI tres lineæ habeant proportionalitatem Arithmeticam; Rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale est quadrato mediæ.* Ad propos. 6.

10 *SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.* Ad propos. 7.

11 *IN omni triangulo obtusangulo, linea perpendicularis ducta ex quouis acutorum angulorum ad latus oppositum, cadit in ipsum latus ad partes anguli obtusi protractum.* Ad propos. 12.

12 *SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus est.* Ad propos. 12.

13 *SI in triangulo quadratum unius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productũ perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.* Ad propos. 12.

SCD LYON 1

14 *AMBLYGONIA triangula constituere laterum commensurabilium, in quibus segmentum inter angulum obtusum, & perpendicularem commensurabile etiam sit lateribus.* Ad propos. 12.

15 *SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.* Ad propos. 13.

16 *SI in triangulo quadratū unius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.* Ad propos. 13.

17 *TRIANGVLA commensurabilium laterum constituere, in quibus segmenta inter perpendicularem, quæ in basem cadit, eisdem lateribus commensurabilia quoque sint.* Ad propos. 13.

18 *SI in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam: erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorū quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum uero ex dimidiato latere describitur.* Ad propos. 13.

19 *AREAM cuiusque trianguli latera habentis nota inuenire.* Ad propos. 13.

20 *DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdē: Inuenire latus ipsius quadrati.* Ad propos. 14.

21 *DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra utrumque latus: Inuenire latera ipsius rectanguli.* Ad propos. 14.

IN TERTIO LIBRO.

1 *SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineā bifariam, & ad angulos rectos secet: in secante est centrum circuli.* Coroll. propos. 1.

SCD LYON 1

2 *LINEA recta, qua circulum tangit, ita vt eum non secet; in vno tantum puncto ipsum tangit.* Coroll. propos. 2

3 *IN triangulo æquilatero, vel Isoscele, recta secans basem bifariam, ad basem perpendicularis est. Et perpendicularis ad basem, secat basem bifariam.* Coroll. propos. 3.

4 *DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans: Erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se æqualia.* Ad propos. 3.

5 *SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidē maxima sit, vna verò minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum trāsibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores; æquales autem ab eadem maximæ, vel minimæ æqualiter distabunt.* Ad propos. 7.

6 *SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.* Ad propos. 13.

7 *RECTA linea a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circulum tangit. Hinc facile per datum punctum in circunferentia duci poterit linea circulum tangens.* Coroll. propos. 16.

8 *DIGRESSIO de angulo contactus aduersus Iacobum Peletarium.* Ad propos. 16.

9 *QVOTLIBET anguli contactus æquales simul sumpti, minores sunt quouis angulo acuto rectilineo.* Ad prop. 16.

10 *ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui: & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.* Ad propos. 16.

11 *TRANSITVR a minori ad maius, vel cōtra, & per omnia media: & tamen non per æquale. Ita reperitur maius hoc, & minus eodē: & tū nō æquale.* Ad propos. 16. & 31.

PRO-

SCD LYON 1

12 *PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.* Ad propos. 17.

13 *PER datum punctum describere circulum, qui alium tangat siue interius, siue exterius.* Ad propos. 17.

14 *CIRCVLVM, qui duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium, tangat, describere.* Ad propos. 17.

15 *LINEAE rectæ, quæ circulũ secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.* Ad propos. 17.

16 *DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis: erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.* Ad propos. 18.

17 *IN circulo spatium ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis spatij & anguli.* Ad propos. 20.

18 *SI a duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: Circulus per duo illa puncta, & alterutrũ illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.* Ad propos. 21.

19 *SI in quadrilatero anguli qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales: circulus, qui per tres quoscũque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.* Ad propos. 22.

20 *SI ex semicirculis, aut circulis, segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.* Ad propos. 22.

21 *ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circunferentias insistunt, similes sunt.* Ad propos. 22.

22 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti,*

similes.

similes. Ad propos. 22.

23 *SI duo aut plures circuli se mutuo tangãt interius in uno puncto, a quo duæ aut plures rectæ educantur: erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.* Ad propos. 22.

24 *SI unum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.* Ad propos. 22.

25 *SEGMENTA circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, sunt similia.* Ad propos. 24.

26 *IN æqualibus circulis inæquales anguli inæqualibus peripherijs insistunt, maior maiori, & minor minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.* Ad propos. 26.

27 *IN æqualibus circulis anguli, qui inæqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.* Ad propos 27.

28 *DVAE rectæ lineæ, quæ in eodē circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, sunt parallelæ. Et contra, duæ lineæ parallelæ in eodem circulo arcus æquales intercipiunt.* Ad propos. 27.

20 *LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.* Ad propos. 27.

30 *ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti: acutus vero arcui quadrante minori: & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistēs rectus est: insistens vero arcui quadrante minori, acutus: & arcui quadrante maiori, obtusus.* Ad propos. 27.

31 *RECTA linea e centro circuli ducta, secansque aliam rectam nō per centrū ductam bifariam, secabit et arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet & arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam,* Ad propos. 27.

32 *SI in circulo, ductis duabus diametris se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex una*

par-

parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro productæ: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vna cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis. Ad propos. 27.

33 IN æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo: At vero si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior minorem, & minor maiorem. Ad propos. 28.

34 IN æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales rectæ lineæ subtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo: At vero si de segmentis semicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & maiorem minor. Ad propos. 29.

35 CIRCVLI, e quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt. Ad propos. 29.

36 EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt. Ad propos. 29.

37 EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt. Ad propos. 29.

38 RECTAE lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt. Ad propos. 29.

39 SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales: Rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent ad diametrum angulos æquales, abscindentque æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales. Ad propos. 29.

40 SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum

ctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior est. Ad propos. 29.

41 *ANGVLVS trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est.* Coroll. propos. 31.

42 *SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus: Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius: cuius uero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.* Ad propos. 31.

42 *SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus illud circulus describatur: transibit necessario circulus ille per angulum rectum.* Ad propos. 31.

43 *A dato puncto extra circulum, rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.* Ad propos 31.

44 *SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, a puncto vero, vbi hæc recta a posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque; secabitur eius portio intra priorem circulum a circumferentia posterioris bifariã.* Ad propos. 31.

45 *QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.* Ad propos. 31.

46 *SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis: Linea ducta circulum tanget.* Ad propos. 32.

47 *SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo: describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per qualibet tria puncta earum extrema descriptus,*

per

per quartum queque punctum transibit. Ad propos. 35.

48 SI a puncto quouis extra circulum assumpto plurima linea recta circulum secantes ducantur: Rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se sunt æqualia. Coroll. 1. propos. 36.

49 DVAE rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter se sunt æquales. Coroll. 2. propos. 36.

50 AB eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum possunt duæ lineæ, quæ circulum tangant. Coroll. 3. propos. 36.

51 SI duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in cõuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, altera quoque circulum tanget. Coroll. 4. propos. 36.

52 SI a puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitę egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint æqualia; describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit. Ad propos. 36.

53 DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alteri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, et adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale. Ad propos. 36.

54 SI a puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli ejecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam. Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit Ad propos. 37.

IN QVARTO LIBRO.

1 IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam. Ad propos. 1.

IN

2 IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quilibet latera superãt reliquum recta linea, cuius quadratũ quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti. Ad propos. 4.

3 SI circulo circa triangulũ descripto, centrũ intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si vero in vnum latus trianguli, rectangulum: Si denique extra triangulum, obtusangulum. Coroll. propos. 5.

4 CENTRVM circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum vero, in latus recto angulo oppositum: circa obtusangulum denique, extra triangulam. Coroll propos. 5.

5 PER data tria puncta non in vna recta linea existentia circulum describere. Ad propos. 5.

6 SI circa datum circulum describatur quadratum, & in eodẽ circulo quadratum inscribatur. Erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Ad propos. 9.

7 IN triangulo Isoscele, cuius vterque angulorum æqualium reliqui duplus est: Angulus æqualibus lateribus comprehensus, quinta pars est duorum rectorum, vterlibet autem æqualium, duæ quintæ partes. Item ille duas quintas partes vnius recti continet, vterlibet autem horum quatuor quintas partes. Coroll. propos. 10.

8 SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est: Isosceles triangulũ, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumus vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrũlibet angulorum æqualium duplum reliqui. Ad propos. 11.

9 ANGVLVS pentagoni æquilateri, & æquianguli complectitur tres quintas partes duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. Coroll. propos. 11.

10 SVPER data recta linea terminata Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituere. Ad propos. 11.

SCD LYON 1

11 *SI in circulo quacunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpẽdiculares: Hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam.* Coroll. propos. 12.

12 *IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est: Recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoque latus oppositum bifariam. Si vero numerus angulorum est par, Recta linea ex quouis angulo ad oppositũ angulũ ducta, secat utrumque angulum bifariam: Et contra, Recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.* Ad propos. 12.

13. *LATVS hexagoni æquale est semidiametro circuli, in quo describitur.* Coroll propos. 15.

14 *ISOSCELES triangulum oxygonium constituere, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit.* Ad propos. 15.

15 *SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarũ æquilaterarum, & æquiangularũ: Cõtinebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterũ. Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.* Ad propos. 16.

16 *OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, æquiangula quoque est: at non omnis figura æquilatera circulo circumscripta necessario æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab eo, vel sextum, octauum, decimum, &c.* Ad propos. 16.

17 *OMNIS figura æquiangula circulo circumscripta, est etiam æquilatera: at non omnis figura æquiangula*

SCD LYON 1

circulo inscripta, necessario æquilatera quoque est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab eo, vel sextum, octauum, decimum, duodecimum, &c. Ad propos. 16.

18 IMPARIVM laterum figuræ inscribuntur in circulo beneficio Isoscelium triangulorum, quorum anguli æquales ad basem multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figuræ inscribuntur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli ad basim æquales, multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum. Ad propos. 16.

19 FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam in circulo practice describere, sine ope triangulorum Isoscelium prædictorum. Ad propos. 16.

20 FIGVRAM quamcunque æquilateram, & æquiangulam supra datam rectam practice describere. Ad propos. 16.

21 LATERA pentagoni, & decagoni in circulo describendorum, vna eademque opera inuenire. Ad propos. 16.

22 SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilaterę, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque, & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens. Ad propos. 16.

23 INTER omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triangulum, quadratum, & hexegonum, locum replere possunt. Ad propos. 16.

IN QVINTO LIBRO.

1 TRACTATVS de proportionibus, & Proportionalitatibus copiosissimus. Ad defin. 4.

2 ANGVLVM curuilineum angulo rectilineo exhibere æqualem. Ad defin. 5.

SCD LYON 1

3 CVR Euclides in defin.6.& 8.quatuor magnitudines proportionales,& non proportionales,per earum æque multiplicia definierit. Ad defin. 8.

4 NVMERVS integer cum fractione in se multiplicatus producit necessario numerum integrum cum fractione. Ad defin. 8.

5 SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertendo proportionales erunt. Coroll.propos.4.

6 AEQVALES magnitudines ad æquales eandem habent rationem. Ad propos.7.

7 QVAE eidem sunt eadem rationes,& inter se sunt eadem. Ad propos.11.

8 SI prima ad secũdam eãdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vera ad quartam,minorem rationem habuerit, quã quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. Ad propos.13.

9 SI prima ad secundam maiorem habuerit rationẽ, quã tertia ad quartã, tertia autem ad quartam maiorem habuerit quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam multo magis maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam. Ad propos.13.

10 SI prima ad secundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam multo magis minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. Ad propos.13.

11 SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diuisionem rationis conuersam proportionales erunt. Ad propos.17.

12 SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per Diuisionem rationis contrariam proportionales erunt. Ad propos.17.

13 SI diuisæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque per compositionem rationis conuersam proportionales erunt. Ad propos 18.

14 SI diuisæ magnitudines proportionales fuerint,hæ quoque per compositionem rationis contrariam proportio-

SCD LYON 1

nales erunt. Ad propos. 18.

15 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales: Et quo que per conuersionem rationis proportionales erunt.* Coroll. propos. 19.

16 *SI prima ad secundam eãdem habuerit rationem, quã tertia ad quartam: Habebũt etiam æque multiplices pri mæ ac tertiæ ad secundam, & quartam, eandem rationẽ: Item æque multiplices secundæ, & quartæ ad primam, & tertiam, eandem rationem habeb unt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æque multiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.* Ad propos. 22.

17 *SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: Et reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.* Ad propos. 24.

18 *SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima et minima maiores erũt, quã dupla reliquæ.* Ad propos. 25.

19 *SI prima ad secundam habuerit minorem proportionẽ. quã tertia ad quartam habebit conuertendo secunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam.* Ad propos. 26.

20 *SI prima ad secundam habuerit minorem proportionẽ, quam tertia ad quartam: habebit quoque vicissim prima ad tertiam, minorem proportionem, quam secunda ad quartam.* Ad propos. 27.

21 *SI prima ad secundam habuerit minorem proportionẽ quam tertia ad quartã: habebit quoque composita prima cũ secunda ad secũdam, minorem proportionem, quã com posita tertia cum quarta ad quartam.* Ad propos. 28.

22 *SI composita prima cum secunda ad secundam habue rit minorem proportionem, quã composita tertia cũ quarta ad quartã, habebit quoq; diuidendo prima ad secũdam minorẽ proportionẽ, quã tertia ad quartã.* Ad propos. 29.

23 *SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit minorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuersionẽ rationis pri-*

SCD LYON 1

ma cum secunda ad primam, maiorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam. Ad propos. 30.

24 *SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque minor proportio primæ priorum ad secundam, quã primæ posteriorum ad secundam: Item secundæ priorum ad tertium minor, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorũ ad tertiã, quã primæ posteriorũ ad tertiã.* Ad propos. 31.

25 *SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque minor proportio primæ priorum ad secundam, quã secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam minor, quam primæ posteriorum ad secundã: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio primæ priorũ ad tertiã, quã primæ posteriorũ ad tertiã.* Ad propos. 32.

26 *SI fuerit minor proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum minor proportio quam totius ad totum.* Ad propos 33.

IN SEXTO LIBRO.

1 *PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio prima ad vltimam componitur ex proportionibus omnibus intermedijs.* Ad defin. 5.

2 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.* Ad propos. 1.

3 *TRIANGVLA, & parallelogrammæ, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.* Ad propos. 1.

4 *TRIANGVLA, & parallelogrammæ, quæ ita se habent inter se, vt altitudines: æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.* Ad propos. 1.

5 *LINEA recta, quæ parallela ducitur vni lateri in triã gulo, aufert triãgulũ toti triãgulo simile.* Coroll. prop. 4.

6 *SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterũ extremũ punctum inclusæ: Rectæ coniungens extremũ vnius*

SCD LYON 1

earum cum extremo prioris linea, trāsibit per extremum alterius linea. Ad propos. 4.

7 *SI ex duobus punctis cuiuſuis recta duæ parallelæ educantur in diuerſas partes, habentes eandem proportionē, quam ſegmenta rectæ inter parallelas conterminas, & aliquod idem punctum intra, datam rectam: Recta coniungens extrema puncta parallelarum tranſibit per dictum punctum intra rectam.* Ad propoſ. 4.

8 *SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppoſitum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud in eaſdem rationes.* Ad propoſ. 4.

9 *RECTA perpendicularis, quæ in rectangulo triāgulo ab angulo recto in baſim demittitur, eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta: Item latus vtrūlibet angulū rectum ambiens, medium proportionale eſt inter totam baſim, & illud ſegmentum baſis, quod dicto lateri adiacet.* Coroll. propoſ. 8.

10 *DATAM rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere.* Ad propoſ. 10.

11 *DATAM rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.* Ad propoſ. 10.

12 *SI duæ rectæ lineæ ſecētur in binis punctis proportionaliter: Erūt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.* Ad propoſ. 10.

13 *SI linea recta ſit ſecta in quotcunque partes Arithmetice proportionales, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.* Ad propoſ. 10.

14 *SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorū, vt priorum linearum vna ad vnā poſteriorū.* Ad propoſ. 10.

15 *LINEAM rectam datam, vel numerū, in quotuis partes Arithmetice proportionales ſecare.* Ad propoſ. 10.

16 *QVOTLIBET lineas continue proportionales in data ratione inuenire.* Ad propoſ. 11.

SCD LYON 1

17 *INTER duas rectas, duas medias proportionales practice inuenire.* Ad propos. 11.

18 *DATIS duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione inuenire.* Ad propos. 12.

19 *TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.* Ad propos. 12.

20 *RECTA linea, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiã vsque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt.* Ad propos. 13.

21 *DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.* Ad propos. 13.

22 *RECTA linea qualibet est media proportionalis inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale.* Ad propos. 17.

23 *SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutrã earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales.* Ad propos. 17.

24 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmitica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

25 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

26 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatẽ in proportionalitate Arithmetica inuenire.* Ad propos. 17.

27 *DATIS duabus rectis lineis, medium proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire, aliter, quam propos. 13. factum est.* Ad propos. 17.

28 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propos. 11. factum est.* Ad propos. 17.

29 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propos. 11. factum est.* Ad propos. 17

30 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

31 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.* Ad propos. 17.

SCD LYON 1

32 DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. Ad propos. 17.

33 QVANDO duo numeri proportionē habent dupla maiorem, nō potest illis adiungi tertius maior in proportionalitate Harmonica. Ad propos. 17.

34 EX datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorū extremi eādem proportionē habeant, quam dati duo numeri, reperire. Ad propos. 17.

35 TRES numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi proportionem habeāt datam, & medius sit dato numero aqualis. Ad propos. 17.

36 DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire. Ad propos. 17.

37 DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire. Ad propos. 17.

38 DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire. Ad propos. 17.

39 PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus siue aqualibus, siue inaqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo et tertio semel; ac tertius semel, sunt Geometrice proportionales. Ad propos. 17.

40 PROPOSITIS tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmetice proportionales. Ad propos. 17.

41 PROPOSITIS tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonice proportionales sunt. Ad propos. 17.

42 A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, expeditius, quam ab Euclide factum est. Ad propos. 18.

43 SI tres recta linea proportionales fuerint: erit vt prima ad tertiam, ita triangulum super primam descriptum ad

SCD LYON 1

triangulum super secundã simile, similiterq; descriptum: Item ita triangulum super secundã ad triangulum super tertiam simile, similiterque descriptũ. Coroll. propos. 19.

44 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erit vt prima ad tertiam, ita polygonum super primã descriptum ad polygonum super secundam similiterque descriptum: Item ita polygonum super secundam ad polygonum super tertiam simile, similiterque descriptum.* Coroll. propos. 20.

45 *POLYGONA similia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in similia triangula, & numero æqualia, ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis.* Ad propos. 20.

46 *SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius. Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplũ erit lateris huius.* Ad propos. 20.

47 *AEQVALIA rectilinea similia, similiterq; descripta, cõstituta sunt super æquales rectas lineas.* Ad propos. 22.

48 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erunt & rectilinea similia, similiterq; descripta ab eis, proportionalia. Et si a tribus rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ proportionales erunt.* Ad propos. 22.

49 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent: proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositã.* Ad propos. 23.

50 *PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.* Ad propos. 23.

51 *PROPORTIONEM minorẽ ex minore auferre.* Ad propos. 23

52 *TRIANGVLA, quæ vnũ angulũ vni angulo æqualem habent, eãdem proportionẽ habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.* Ad propos. 23.

53 *PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandẽ habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorũ æqualẽ angulũ cõtinẽtibus cõprehẽsa.* Ad propos. 23.

54 *TRIANGVLA & parallelogrãma in se proportionẽ habent compositam ex proportione basium, & proportione*

altitudinum. Ad propos. 23.

55 *DATIS duobus parallelogrãmis æquiãgulis, sed nõ simi libus: ex quouis illorũ alteri simile resecare.* Ad prop. 24.

56 *DATO parallelogrammo, describere aliud maius, aut minus simile illi, similiterque descriptum.* Ad propos. 24.

57 *SI ad rectam lineam applicetur parallelogrammũ defi ciens quadrato ipsum applicatum æquale est rectangulo quod sub segmentis lineæ per applicationem factis con tinetur.* Ad propos. 28.

58 *SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æ qualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describun tur, figuris similibus, similiterque positis: Angulus compre hensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.* Ad propos. 31.

59 *SECTOR ad sectorem est, vt angulus ad angulum.* Co roll. 1. propos. 33.

60 *Angulus in centro circuli ita est ad quatuor rectos, vt arcus illi subtensus ad totam circumferentiam. Et contra Ita se habent quatuor recti ad angulum in centro, vt to ta circumferentia ad arcum illi angulo subtensum.* Co roll. 2. propos. 33.

61 *SIMILIA circulorum segmẽta, hoc est, in quibus angu li sunt æquales, eandem proportionem habent ad integras circumferentias circulorum.* Ad propos. 33.

62 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro describãtur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, si miles.* Ad propos. 33.

63 *AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferũt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli: et ẽt maior, q̃ vt similis sit arcui circuli maioris.* Ad prop. 33

64 *A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamẽ, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis re ctilineo dato, similiterque positum.* Ad propos. 33.

65 *DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inue nire.* Ad propos. 33.

66 *TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inue nire.* Ad propos. 33.

SCD LYON 1

67 DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire. Ad propos. 33.

68 DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque. Ad propos. 33.

69 DATO rectilineo duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, latera-que eorum homologa habeant inter se propartionem datam. Ad propos. 33.

70 DVOBVS datis rectilineis æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato. Ad propos. 33.

71 SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: Erũt segmenta vnius segmẽtis alterius reciproca. Ad prop 33.

72 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quòd si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectã, quæ circulum secet, & eius segmentũ exterius. Ad propos. 33.

73 SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: Erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciproca. Ad propos. 33.

74 IN parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia. Ad propos. 33.

75 OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuò secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia. Ad propos. 33.

76 IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione, tria latera sunt continue proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continue proportionalia, perpendicularis ad basem ex angulo recto demissa secat

basem

baſem extrema ac media ratione. Ad propoſ. 33.

77 *A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, qua triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam*. Ad propoſ. 33.

78 *IMPERATAM partem ex triangulo auferre per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducitur*. Ad propoſ. 33.

79 *DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius vel minus, ſecundum proportionem datam*. Ad propoſ. 33.

80 *IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere*. Ad propoſ. 33.

81 *INTRA datum quadratum, aliud quadratum deſcribere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem*. Ad propoſ. 33.

82 *SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnũ idemque punctum circumferentiæ, duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: Erit rectangulum comprehenſum ſub vtralibet ſecantium, & eius ſegmento interiore, quadrato diametri æquale*. Ad propoſ. 33.

83 *SI in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecẽt, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non productam: Erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum verò inter idem punctũ extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto*.

VEL VNIVERSALIVS.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius inter-

SCD LYON 1

sectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris linea, quorum vnum sit inter praedictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam, aquale quadrato prioris recta inter eundem terminum, & circferentiam, seu perpendicularem intercepta. Ad propos. 33.

84 *DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia: per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctũ circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ datæ duo puncta connectenti.* Ad propos. 33.

85 *QVADRATRICEM lineam describere.* Ad finem lib. 6.

86 *SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, et ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: Erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.* Ad finem lib. 6.

87 *DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.* Ad finem lib. 6.

88 *ANGVLVM quemuis rectilineum in duos angulos data tam habentes proportionem partiri: atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes aquales distribuere.* Ad finem lib. 6.

89 *ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.* Ad finem lib. 6.

90 *OMNES figuras æquilateras in circulo describere.* Ad finem lib. 6.

91 *SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit: erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continue proportionales.* Ad finem lib. 6.

SCD LYON 1

92 *RECTAM cuilibet arcui circuli, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem reperire.* Ad finem lib.6.

93 *SI basis Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli: Erit eius latus Quadranti eiusdem circuli æqualis.* Ad finem lib.6.

94 *SI duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam basis Quadratricis ad eius latus, minor autem fiat semidiameter alicuius circuli; erit maior æqualis Quadranti eiusdem circuli.* Ad finem lib.6.

95 *DATO circulo quadratum æquale constituere.* Ad finem lib.6.

96 *DATO quadrato circulum æqualem describere.* Ad finem lib.6.

97 *RECTILINEO cuicunque circulum æqualem: Et circulo figuram rectilineam æqualem constituere, quæ dato rectilineo cuicunque similis sit, & similiter descripta.* Ad finem lib.6.

98 *DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.* Ad finem lib.6.

99 *DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum: ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.* Ad finem lib.6.

IN SEPTIMO LIBRO.

1 *SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.* Ad propos. 1.

2 *SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.* Ad propos. 1.

3 *NVMERVS duos numeros metiens, metitur quoque ma*

SCD LYON 1

ximam eorum mensuram communem. Coroll. propos. 2.

4 *PROPOSITIS duobus, aut pluribus numeris, explorare, an sint inter se primi, nec ne.* Ad propos. 2.

5 *NVMERVS tres numeros, vel plures metiens, metitur quoque maximam eorum mensuram communem.* Ad propos. 3.

6 *SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars: Et simul vtraq; vnitas, vel vnitas, & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.* Ad propos. 5.

7 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.* Ad propos. 5.

8 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorũ æqualium numero, singuli singulorum æque multiplices: quàm multiplex est unius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium.* Ad propos. 5.

9 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes: Et omnes omnium simul eadem partes erunt, quæ vnus vnius.* Ad propos. 6.

10 *SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.* Ad propos. 7.

11 *SI primus secundum æqualiter contineat, atque tertius quartum, eandemque insuper partem, vel partes: Erit e contrario secundus primi eadem partes, quæ quartus tertij. Et si fuerit primus secundi eadem partes quæ tertius quarti: Continebit è contrario secundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem vel partes.* Ad propos. 11.

12 *QVAE proportiones numerorum eidem proportioni eadem sunt, inter se quoque sunt eadem.* Ad propos. 14.

13 *SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent: Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.* Ad propos. 18.

SCD LYON 1

14 *SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.* Ad propos. 19.

15 *SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad terrium: maior fiet numerus ex primo in tertiũ, quam ex secundo in se. Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundũ, quã secundi ad tertiũ.* Ad propos 20.

16 *QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarũ proportionum, siue eadem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.* Ad propos. 21.

17 *SI quatuor numeri proportionales sint: Et conuertendo proportionales erunt.* Ad propos. 22.

18 *SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.* Ad propos. 22.

19 *SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.* Ad propos. 22.

20 *SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionẽ rationis proportionales erunt.* Ad propos. 22.

21 *SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartũ: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.* Ad propos. 22.

22 *SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habent.* Ad propos. 22.

23 *SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum, habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem ra-*

SCD LYON 1

tionem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. Ad propos. 22.

24 *SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad aliũ illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.* Ad propos. 22.

25 *QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.* Ad propos. 24.

26 *NVMERVS, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque est primus.* Ad propos. 30.

27 *SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit cõpositus: is etiã ad vnum eorũ, qui in principio, cõpositus erit.* Ad propos. 32

28 *MAXIMA mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt eandem proportionem cum ipsis habentium.* Coroll. propos. 35.

29 *DVOS minimos numeros inuenire, qui eandem habeãt proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales.* Ad propos. 35.

30 *SI duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, vel minor maiorem, producitur minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propos. 36.

31 *SI tres, vel plures numeri numerum quempiam metiantur: metietur quoque eundem minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propos. 38.

32 *MINIMVS numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus est, habens partes à numeris metientibus denominatas.* Ad propos. 41.

SCD LYON 1

33 NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars subsequentem partem contineat. Ad propos. 41.

IN OCTAVO LIBRO.

1 SI tres numeri minimi sint continue proportionales: erüt extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, erunt cubi, &c. Coroll. 1. propos. 2.

2 EXTREMI numeri proportionalium quotcunque secundum doctrinam propos. 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter se primi sunt. Coroll. 2. propos. 2.

3 DVO numeri minimi in data ratione, metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione. Coroll. 3. propos. 2.

4 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi nõ sit multiplex: neque alius quisquam ullius multiplex erit. Ad propos. 6.

5 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur: et quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex: et quicunq; alius cuiuslibet sequentium multiplex erit. Ad propos. 6.

6 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur: neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit. Ad propos 6.

7 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet à secundo metiatur: metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex: primus quoque secundi multiplex erit. Ad propos. 7.

8 INTER numeros duplæ proportiones, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis. Ad propos. 8.

SCD LYON 1

9 *MVSICVM interuallum, quod Diapason appellatur, bifariam secari non potest in duas proportiones aquales. quod etiam de Tono dicendum est.* Ad propos. 8.

10 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem est incommensurabilis.* Ad propos. 8.

11 *SI numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: erunt omnes producti continue proportionales ab vnitate.* Ad propos. 9.

12 *SI quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales: secundus ab vnitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc fit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic de cæteris.* Ad propos. 10.

13 *SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium: habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.* Ad propos. 10.

14 *SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam, &c.* Ad propos. 10.

15 *SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri: quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.* Ad propos. 10.

16 *INTER duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportione lateris ad latus.* Ad propos. 11.

17 *NVMERVS medius proportionalis inter duos quadratos, & vteruis ipsorum quadratorum, compositi inter se sunt.* Ad propos. 11.

18 *INTER duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportione lateris ad latus.* Ad propos. 12.

SCD LYON 1

19 *DVO numeri medij proportionales inter duos cubos, & vteruis ipsorum cuborum, inter se compositi sunt.* Ad propos. 12.

20 *SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi sit multiplex: & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex: & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi nō sit multiplex: neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex: neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.* Ad propos. 17.

21 *INTER duos similes planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, per qua medius proportionalis inquiritur.* Ad propos. 18.

22 *NVMERVS medius proportionalis inter duos planos similes, & vteruis ipsorum planorum, sunt inter se compositi.* Ad propos. 18.

23 *INTER duos similes solidos cadunt duo medij proportionales in proportione laterum homologorum, per qua medij proportionales inquiruntur.* Ad propos. 19.

24 *DVO numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & vteruis ipsorum solidorum, inter se sunt compositi.* Ad propos. 19.

25 *DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.* Ad propos. 19.

26 *PROPORTIO cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi nullo modo potest in duobus numeris quadratis.* Coroll. propos. 24.

27 *NVMERI in dupla proportione vel quintupla proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Coroll. propos. 24.

28 *PROPORTIO cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum reperiri non potest in duobus numeris cubis.* Coroll. propos. 25.

29 *NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.* Ad propos. 26.

SCD LYON 1

30 *PLANI numeri non similes, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Ad propos. 26.

31 *NVMERI, qui proportionem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.* Ad propos. 27.

32 *NVLLI numeri habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, sunt similes pani, vel solidi.* Ad propos. 27.

33 *DVO quiuis numeri primi, non sunt similes plani, vel solidi.* Ad propos. 27.

34 *DVO quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes non sunt, vel solidi.* Ad propos. 27.

35 *DVO numeri plani, vel solidi similes, quorum minor sit Primus, minor maiorem numerat.* Ad propos. 27.

36 *DVO numeri inter se primi, quorum minor Primus sit, non possunt esse plani, vel solidi similes.* Ad propos. 27.

37 *DVOS numeros planos, vel solidos, non similes inuenire.* Ad propos. 27.

IN NONO LIBRO.

1 *SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.* Ad prop. 2.

2 *SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus: Et reliquus quadratus erit.* Ad propos. 2.

3 *SI duo numeris se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus: Reliquus nō quadratus erit.* Ad propos. 2.

4 *SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem, Productus non quadratus erit.* Ad propos. 2.

5 *SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem, Factus non cubus erit.* Ad propos. 5.

SCD LYON 1

6 *SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum: Et multiplicatus non cubus erit.* Ad propos. 5.

7 *SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet maior numerus acceptus tantum distabit ab assumpto quouis minore, quantum ab vnitate abest is numerus, per quem minor maiorem metitur.* Ad propos. 11.

8 *SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet illorum seipsum multiplicans producit numerum, qui tantum ab eo distat in numeris proportionalibus, quantum ipse ab vnitate. Minor vero quiuis maiorem quempiam multiplicans producit numerũ, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab vnitate.* Ad propos. 11.

9 *NVLLVS numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, aut minor proximum vnitati non metiẽs, metiri potest vltimum, vel quemuis maiorem in proportionalibus numeris.* Coroll. propos. 12.

10 *SI quotcũque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ rationẽ habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit cõpositus.* Ad propos. 14.

12 *PRIORA 10. theoremata secundi libri in numeris demonstrare.* Ad prop. 15.

13 *NVLLVS numerus secari potest in duas partes ita, vt qui fit ex toto in minorem partem, quadrato maioris partis æqualis sit.* Ad propos. 14. & 29.

14 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.* Ad propos. 15.

15 *PROPOSITIS quotcunque numeris continue proportionalibus, an ipsis possit alius proportionalis adiungi, considerare.* Ad propos. 19.

16 *SI sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps quorum primus & tertius primi inter se sint, fieri non po-*

SCD LYON 1

test, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium. Ad propos. 19.

17 *PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire aliũ primum numerum ab illis diuersum.* Ad propos. 20.

18 *IMPAR numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus, facit imparem.* Ad prop. 23.

19 *SI par numerus parem, aut seipsum multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.* Ad propos. 28.

20 *IMPAR numerus in se multiplicatus, imparem gignit.* Coroll. propos. 29.

21 *IMPAR numerus numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.* Ad propos. 29.

22 *IMPAR numerus numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.* Ad propos. 29.

23 *NVMERVS impar, qui ad aliquem numerum primus est; Primus quoque est ad eius duplum, quadruplum, octuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo.* Coroll. propos. 31.

24 *NVMEROS omnes pariter tantum pares inuenire,* Ad propos. 32.

25 *NVMEROS omnes pariter tantum impares inuenire.* Ad propos. 33.

26 *NVMEROS omnes, qui & pariter pares sint & pariter impares inuenire.* Ad propos. 34.

27 *QVOTCVNQVE numerorum continue proportionalium, quorum primus, secundus, & vltimus noti sunt, summam inuenire.* Ad propos. 35.

28 *NVMEROS omnes perfectos, & eorum partes aliquotas inuenire.* Ad propos. 36.

29 *QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso; Erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.* Ad propos. 36.

30 *QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso: Erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.* Ad propos. 36.

31 *QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso; Erunt Quotientes conuerso ordine*

in eadem proportione continue proportionales. Ad propos. 36.

32 *SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus: Erit vt summa priorum ad quē libet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet:* Ad propos. 36.

33 *SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus: Summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.* Ad propos. 36.

34 *SI summa quotuis numerorum continue proportionaliū per eos sigillatim diuidatur, & Quotientum summa per ipsos Quotientes: & horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes. & sic deinceps in infinitum: Procreabuntur alternis semper ijdem primi Quotientes ordine conuerso.* Ad propos. 36.

35 *SI summa quotuis numerorum continue proportionaliū per eos sigillatim diuidatur: Erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, vel denique (si Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.* Ad propos. 36.

36 *SI summa quotuis numerorum cōtinue proportionaliū, quorum numerus sit impar, per eos sigillatim diuidatur: Erit summa omnium Quotientum numerus quadratus, cuius latus, siue radix est medius terminus.* Ad propos. 36.

37 *NVMEROS quotcunque in data ratione continue proportionales reperire, quorum omnium summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant.* Ad propos. 36.

38 *DVOS numeros in data proportione reperire, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alterum.* Ad propos. 36.

39 *MINVTIARVM, siue numerorum fractorum proprie*

SCD LYON 1

tates, operationesque varias demonstrare. Ad finem lib. 9.

40 PROPORTIONVM compositionem, contra quosdam Recentiores, explicare. Ad finem lib. 9.

IN DECIMO LIBRO.

1 SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua praecedentem metietur. Ad propos. 2.

2 SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quadam reliqua praecedentem: Ad propos. 2.

3 MAGNITVDO metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. Coroll. propos. 3.

4 AN quotlibet magnitudines propositae sint commensurabiles, necne, considerare. Ad propos. 3.

5 MAGNITVDO metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem. Coroll. propos. 4.

6 SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadē ratione sumantur, in qua bina magnitudines: Et ex aqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri. Ad propos. 4.

7 MAGNITVDINES commēsurabiles proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur. Ad propos. 5.

8 LINEAM rectam inuenire, ad quam ita se habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum: Item rectam, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datae rectae, vt numerus ad numerum. Coroll. propos. 6.

9 SI sint quotuis quantitates continue proportionales, & aliae totidem continue quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad vltimā, ita prima harum ad vltimā:

SCD LYON 1

Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. Ad propos. 8.

10 *RECTAE lineæ, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.* Coroll. propos. 9.

11 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem incommensurabilis est.* Ad propos. 9.

12 *DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* Ad propos. 10.

13 *QVOTLIBET numeros inuenire, quorũ quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ad propos. 10.

14 *RECTA media proportionalis inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vtrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia.* Ad propos. 11.

15 *SI sint duæ magnitudines incommensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis: erit & reliqua eidem commensurabilis.* Ad propos. 12.

16 *QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles: & inter se incommensurabiles erunt.* Ad propos. 14.

17 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor. Item datis duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.* Ad propos. 14.

18 *SI tota magnitudo ex duabus composita commensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua commensurabilis est.* Coroll. propos. 16.

19 *SI tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua incommensurabilis est.* Coroll. propos. 17.

20 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.* Ad propos. 17.

SCD LYON 1

21 *DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulũ sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamẽ maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum.* Ad propos. 17.

22 *SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.* Ad propos. 17.

23 *QVOTCVNQVE lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles inuenire.* Ad propos. 19.

24 *RATIONALES lineæ non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles.* Ad propos. 19.

25 *SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundã, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primã, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.* Ad propos. 19.

26 *SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.* Ad propos. 19.

27 *RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.* Ad propos. 21.

28 *DVAS, aut plures quotcunque lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire.* Ad propos. 21.

29 *PROPOSITIS quotcunque Rationalibus lineis potentia solum commensurabilibus, inuenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum.* Ad propos. 21.

30 *LINEA media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Irrationalis est, quæ vocatur Media.* Ad propos. 22.

31 *OMNE spatium Medium æquale est cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, si ipsum sub talibus iam non contineatur.* Ad propos. 22. & 23.

32 *SPATIVM Medio spatio commensurabile, Medium est.* Ad propos. 24.

33 *DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles:*

Item

Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire. Ad propos. 24.

34 *RECTANGVLVM sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus contentum, neque Rationale est, neque Medium, sed æquale alteri cuipiã rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* Ad propos. 26.

35 *RATIONALE superat Rationale Rationali.* Ad propos. 27.

36 *DVOS numeros planos similes inuenire.* Ad propos. 29

37 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.* Ad propos. 29.

38 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum excessus sit numerus quadratus.* Ad propos. 29.

39 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit numerus quadratus.* Ad propos. 29.

40 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.* Ad propos. 29.

41 *DVOS numeros inuenire, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* Ad propos. 29.

42 *SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris. Et vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum maioris.* Ad propos. 31.

43 *SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.* Ad propos. 32.

44 *SI recta linea secetur in duas partes inæquales: erit vt vna pars ad alteram, ita rectangulum sub tota & illa parte, ad rectangulum sub tota & hac altera parte contentum.* Ad propos. 33.

45 *SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, vna autẽ secetur bifariam: erit rectangulum sub ipsis contentum, duplum rectanguli, quod sub inæqua linea, & dimidia parte lineæ sectæ continetur.* Ad propos. 33.

46 *FIERI potest, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale.* Ad propos. 34.

SCD LYON 1

47 *DVO spatia Rationalia Rationale spatium componunt.* Ad propos. 34.

48 *INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.* Ad propos. 36.

49 *QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.* Ad propos. 38.

50 *SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius linea, qua maior pars minorem superat.* Ad propos. 39.

51 *SI recta linea in partes inaquales secetur, & rursus in alias partes inaquales: erunt quadrata partium magis inaqualium simul maiora quadratis partium minus inaqualium simul.* Ad propos. 42.

52 *SI recta linea secta sit vtcunque: erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Itē rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius linea, & quadratum dicta partis.* Ad propos. 54.

53 *EI, qua est ex binis nominibus, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, sed non semper ordine eadem.* Ad propos. 67.

54 *EI, qua est ex binis Medijs, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.* Ad propos. 68.

55 *RECTA linea, qua ex binis nominibus, & reliqua Irrationales per compositionē facta ipsam subsequentes, neque ipsi Media, neque inter se eadem sunt.* Ad propos. 73.

56 *RECTA linea media proportionalis secundum Analogiam Arithmeticā inter duo nomina cuiusuis linea Irrationalis, qua per compositionē fit, est quoque Irrationalis eadē illi, inter cuius nomina media existit.* Ad propo. 73

57 *SI a maiori nomine eius, qua ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.* Ad propos. 74.

58 *SI à maiori nomine eius, qua ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.* Ad propos. 75.

SCD LYON 1

59 SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda. Ad propos. 76.

60 SI à maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. Ad propos. 77.

61 SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. Ad propos. 78.

62 SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autē cum Medio Medium totum efficiens. Ad propos. 79.

63 SI idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam: erit vicissim idem excessus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam: Ac proinde Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque vicissim Arithmeticam Analogiam. Ad propos. 79.

64 RECTA linea Apotomæ potentia tantum commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem. Ad propos. 104.

65 APOTOME, & cæteræ ipsam consequentes Irrationales lineæ per detractionem factæ, neque ipsi Mediæ, neque inter se sunt eadem. Coroll. propos. 112.

66 FIERI potest, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Coroll. prop. 115.

67 NON solum lineæ, sed magnitudines etiam planæ, ac solidæ incommensurabiles esse possunt. Ad propos. 117.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 A puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ad propos. 13.

2 SI fuerint duo plana parallela: Recta linea, quæ ad

SCD LYON 1

vnum eorum recta fuerit, ad reliquũ quoque recta erit Ad propos. 14.

3 *DATO plano, per datum punctum, quod in eo non sit, parallelum planum ducere.* Ad propos. 15.

4 *QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela: Vel si concurrunt, vnũ planũ efficiunt.* Ad propos. 16.

5 *SI in planis parallelis duo anguli sint aquales, & linea vna vnius anguli, linea vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri linea parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.* Ad propos. 16.

6 *SI dua, aut plures linea rectæ in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis: Segmenta illarum linearum inter parallelas proportionalia erunt.* Ad propos. 17.

7 *DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas: parallela sunt. Et duorũ planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterũ ad idem rectum.* Ad propos. 18.

8 *PER rectam in plano quouis datam, planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.* Ad propos. 18.

9 *SI Prisma quodcunque secetur plano aduersis planis parallela: erit vt basis ad basem, ita solidum ad solidum.* Ad propos. 25.

10 *SI Prisma quodcunque secetur plano aduersis planis parallelo: sectio est figura aqualis, & similis planis oppositis.* Coroll. propos. 25.

11 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super eandem basim, siue insistentes linea in eisdem collocentur rectis, siue non: in eadem sunt altitudine.* Ad propos. 30.

12 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super aquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda aqualia in eadem altitudine, super aquales sunt bases, si non habuerint basim eandem.* Ad propos. 31.

13 *SI solida parallelepipeda inter se sunt, vt bases: ipsa erunt sub eadem altitudine.* Ad propos. 32.

14 *SI fuerint quatuor linea rectæ proportionales continue: vt est prima ad quartam, ita erit parallelepipedum su-*

SCD LYON 1

per primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundã. Coroll. propos. 33.

15 PRISMATA, quorum bases sunt triangula super eandem basim, vel æquales, & in eadem altitudine, sunt inter se æqualia. Ad propos. 34.

16 PRISMATA, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases. Ad propos. 34.

17 PRISMATA similia, quorum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Ad propos. 34.

18 PRISMATVM æqualium, quorum bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismata, quæ triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. Ad propos. 34.

19 SI fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Coroll. propos. 35.

20 SI parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: Erunt tres rectæ lineæ continue proportionales. Ad propos. 36.

21 SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. Ad propos. 37.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangulares bases habentia, quæ & similia, similiterque describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Ad propos. 37.

23 SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata

SCD LYON 1

triangulares bases habentia, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. Ad propos. 37.

24 *IN omni parallelipipedo diametri se mutuo bifariam secant in vno puncto.* Coroll. propos. 39.

25 *SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrũ: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.* Ad propos. 39.

IN DVODECIMO LIBRO.

1 *CIRCVLVS ad circulum est, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum.* Coroll. propos. 2.

2 *SI pyramides triangulares inter se sint, vt bases: ipsæ erunt sub eadem altitudine.* Ad propos. 5.

3 *PYRAMIDES triangulares eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides triangulares æquales super eandẽ, vel æquales bases: eandem habent altitudinem. Item pyramides triangulares æquales, eandemque habentes altitudinem: bases habent æquales, si non habuerint eandem.* Coroll. propos. 5.

4 *PYRAMIDES quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.* Ad propos. 6.

5 *PYRAMIDES eiusdem altitudinis super æquales bases quaslibet, vel super eandem constitutæ: sunt inter se æquales. Et pyramides æquales super æquales bases quaslibet, vel super eandem constructæ: eandem habent altitudinem. Item pyramides quarumlibet basium æquales, eandemque habentes altitudinem: æquales habent bases, si non habuerint eandem.* Coroll. propos. 6.

6 *PYRAMIS qualibet tertia pars est prismatis, quod eandem habet & basem, & altitudinem; Siue, Prisma quodlibet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim, & altitudinem.* Coroll. 1. propos. 7.

SCD LYON 1

7 PYRAMIS qualibet tertia pars est Prismatis, quod æqualem habet & basem, & altitudinem, licet basis vnius plura vel pauciora latera contineat, quam basis alterius. Ad propos. 7.

8 PRISMATA sub eadem altitudine, quascunque habeant bases: inter se sunt, vt bases. Et prismata quarumcunque basium, si inter se sint, vt bases: sub eadem sunt altitudine. Ad propos. 7.

9 PRISMATA eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque: inter se sunt æqualia. Et Prismata æqualia super æquales bases quascunque, vel super eandem: in eadem sunt altitudine. Coroll. 2. propos. 7.

10 PYRAMIDES similes, quarum bases plura latera, quã tria, continent: proportionem habent homologorum laterum triplicatam. Coroll. propos. 8.

11 PRISMATA similia quarumcunque basium: proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Ad propos. 8.

12 PYRAMIDES multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Ad propos. 8.

13 PRISMATA multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Ad propos. 8.

14 PYRAMIDVM æqualium quascunque bases habentium, reciprocantur bases, atque altitudines. Et quarum pyramidum quascunque bases habentium, reciprocantur bases, atque altitudines: illæ sunt æquales. Ad propos. 9.

15 PRISMATVM quorumlibet æqualium reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum prismatum bases, atque altitudines reciprocantur, illa inter se sunt æqualia. Ad propos. 9.

16 OMNIS conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni, & cylindri. Ad propos. 10.

17 CONI, & cylindri sub eadem altitudine, siue ambo

SCD LYON 1

sint recti, siue scaleni; siue vnus rectus, & alter scalenus: inter se proportionem habent, quam bases. Ad propos. 11.

18 *SI coni, & cylindri inter se sint, vt bases: ipsi sub eadem altitudine erunt.* Ad propos. 11.

19 *CONI, & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases constituti, siue ambo sint recti, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus: inter se sunt æquales.* Coroll. propos. 11.

20 *CONI, & cylindri æquales super eandem, vel æquales bases in eadem sunt altitudine. Et coni, ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, si non habuerint eandem.* Coroll. propos. 11.

21 *CONI, & cylindri scaleni similes, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.* Ad propos. 12.

22 *CONI, & cylindri scaleni super æqualibus basibus, vel etiam si vnus sit rectus, & alter scalenus: inter se sunt, vt altitudines.* Ad propos. 14.

23 *SVPER æqualibus basibus prismata, parallelepipeda, & pyramides; inter se sunt, vt altitudines.* Ad propos. 14.

24 *CONI, & cylindri tam recti, quam scaleni: Item prismata, parallelepipeda & pyramides, si sint, vt altitudines, bases habent æquales.* Ad propos. 14.

25 *CONORVM, & cylindrorum æqualium, siue ambo scaleni sint, siue vnus rectus, & alter scalenus: bases & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, siue ambo sint scaleni, siue vnus rectus & alter scalenus, bases & altitudines reciprocantur: illi sunt æquales.* Ad propos. 15.

26 *SI duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum perpendicularis ducatur: hæc nullo modo circulum minorem tangit, sed extra ipsum cadit.* Coroll. propos. 16.

27 *DVO polyedra similia in duabus sphæris descripta, proportionem habent triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri.* Coroll. propos. 17.

SCD LYON 1

28 SPHAERA ad sphæram est, vt polyedrum in illa descriptum, ad polyedrum in hac descriptū. Coroll. propos. 18.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

1 SI recta inæqualiter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati: Recta illa linea secta erit extrema & media ratione. Ad propos. 3.

2 SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti: Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur. Ad prop. 4.

3 SI recta linea extrema ac media ratione secetur: tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Recta illa linea extrema & media ratione secta est. Ad propos. 4.

4 SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus: erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & minus segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat. Ad propos. 5.

5 SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ. Ad propos. 5.

6 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis: Erit minus segmentum Apotome: Ad propos. 6.

7 RECTA, quæ angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli subtendit, parallela est opposito lateri. Ad propos. 8.

8 SI latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione: maius illius segmentum est la-

tus

tus decagoni in eodem circulo descripti. Ad propos. 9.

9 SI linea diuisa extrema ac media ratione, maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli: erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli: Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli. Ad propos. 9.

10 LINEA recta, quæ ex centro circuli ducta diuidit arcum quempiam bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Coroll. 1. propos. 10.

11 DIAMETER circuli ex angulo quouis pentagoni in eo descripti ducta, & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Coroll. propos. 10.

10. IN dato circulo latera pentagoni, & decagoni vna eademque opera inuenire. Ad propos. 10.

11 DIAMETER circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. Coroll. 1. propos. 12.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariã, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito. Ad propos. 12.

13 SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ: Semicirculus circa illam lineam rectam descriptus, transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. Ad propos. 13.

14 DIAMETER sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basem pyramidis in ea sphæra constructæ descripti. Coroll. 1. propos. 13.

15 LINEA perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis in ea sphæra cõstructæ demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Coroll. 2. propos. 13.

16 ALTITVDO pyramidis in sphæra descriptæ, duas tertias partes diametri sphæræ continet. Coroll. 2. prop. 13.

SCD LYON 1

17 *IN Octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant in centro sphæræ: nec non & tria quadrata ex lateribus Octaedri composita se mutuo ad angulos rectos secant.* Coroll. 1. propos. 14.

18 *OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes, & æquales, quarum basis communis est quadratum ex Octaedri lateribus compositum.* Coroll. 2. propos. 14.

19 *SI Tetraedrum, et Octaedrum in eadem sphæra describãtur; erit Tetraedri latus potentia sesquitertium lateris Octaedri.* Coroll. 3. propos. 14.

20 *BASES Octaedri oppositæ, sunt parallelæ.* Coroll. 4. propos. 14.

21 *OMNES diametri cubi sunt inter se æquales, seseq; mutuo bifariam secant in centro sphæræ: nec non & rectæ lineæ, quæ centra basium cubi oppositarum coniũgunt, bifariam in eodem centro diuiduntur.* Coroll. 1. propos. 15.

22 *POTENTIA diametri sphæræ æqualis est potentijs laterum Tetraedri, & cubi simul sumptis.* Coroll. 2. prop. 15.

23 *DIAMETER sphæræ potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri pentagonum constituentia ambientis.* Coroll. 1. propos. 16.

24 *DIAMETER sphæræ composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex Semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli, qui circa quinque Icosaedri latera describitur.* Coroll. 2. propos. 16.

25 *ICOSAEDRI latera opposita, sunt parallela.* Coroll. 3 propos. 16.

26 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.* Coroll. 1. propos. 17.

27 *LATVS cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulũ pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehẽsi.* Coroll. 2. propos. 17.

28 *SI recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum est latus Dodecaedri, maius segmentum est latus cubi eiusdem sphæræ.* Coroll. 2. propos. 17.

29 *IN Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita*

SCD LYON 1

sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos, à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Coroll. 3. propos. 17.

30 *SI recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione: maius segmentum est latus cubi, minus vero latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi.* Coroll. 4. propos. 17.

31 *PRAETER quinque corpora regularia, quæ Euclides hoc lib. 13. cõstruxit, nullũ aliud dari potest.* Ad prop. 18.

32 *QVOTNAM latera, & angulos quoduis Regularium solidorum contineat.* Ad propos. 18.

33 *CVBVS, & Octaedrum: Item Icosaedrum, & Dodecaedrum, reciproca sunt, quod ad numerum basium, & angulorum solidorum attinet: Solum Tetraedrum cum nullo reciprocatur, sed tot bases habet, quot angulos solidos.* Ad propos. 18.

IN QVARTODECIMO LIBRO

1 *LINEA perpendicularis ducta ex centro ciculi ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secat arcum, quem dicta hæc linea subtendit, bifariam.* Coroll. 1. propos. 1.

2 *LINEA perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, æqualis est vtrique linea simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni.* Coroll. 2. propos. 1.

3 *LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.* Ad propos. 2.

4 *SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione: maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni in eodem circulo descriptorum.* Ad propos. 2.

SCD LYON 1

5 SI in sphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur: quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis. Coroll. propos. 3.

6 SVPERFICIES cuiuslibet Dodecaedri ad superficiē cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum cōtentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. Coroll. propos. 7.

7 SI ex centro circuli triangulū Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus. Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidē sumptū sexies, superficiei Tetraedri; In Octaedro vero, & cubo, duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Ad propos. 7.

8 RECTANGVLVM comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnū eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, æquale est pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti. Coroll. propos. 8.

9 QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi, & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. Ad propos. 10.

10 SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habet eandem proportionem, quam latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 6. huius lib. sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra. Ad propos. 10.

11 SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. Ad propos. 10

12 SI planum sphæram secans trāsierit per centrum, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra: Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur

SCD LYON 1

circulus habens aliud centrum quam sphæra, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Coroll. propos. 10.

13 *CIRCVLI in sphæra æquales æqualiter distant à centro sphæræ. Et circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.* Ad propos. 10.

14 *EADEM proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quæ superficiei Dodecaedri ad superficiē Icosaedri: Et lineæ potentis totā quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad lineam potentem totam eandem, & minus segmentum illius. Et Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ.* Coroll. propos. 11.

15 *LINEA perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bifariam.* Coroll. propos. 12.

16 *OMNE triangulum æquilaterum, cuius latus sit Rationale, est superficies Media.* Coroll. propos. 13.

17 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basem oppositā ducta sesquialtera est eius, quæ inter centrum trianguli, & dictum angulum interijcitur: Hæc autem inter centrum trianguli, & dictum angulum interiecta dupla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli, ad basem eiusdem ducitur,* Coroll. propos. 18.

18 *SOLIDVM, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale est cubo. Vel solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo.* Coroll. propos. 20.

19 *SOLIDVM, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basem ducta, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari.* Ad propos. 20.

20 *LINEÆ perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quam Octaedri in eadem sphæra circumscribunt, inter se æquales sunt.* Coroll. propos. 21.

SCD LYON 1

21 *ALTITVDO Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiusdem sphæra est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.* Coroll.prop.22.

22 *DIAMETER sphæra ad latus Tetraedri est, vt latus Octaedri ad latus cubi eiusdē sphæra.* Coroll.propos.22.

23 *SI linea quauis recta secetur extremā ac media ratione, et alia linea potētia huius sesquialtera sit latus Octaedri: maius segmētum erit latus Dodecaedri eiusdem sphæra, in qua Octaedrum describitur.* Coroll.propos. 25.

24 *SI in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo.* Coroll.propos.29.

25 *DIAMETER sphæra potentia est dupla sesquiquartæ axis Tetraedri, seu altitudinis ipsius; atque adeo diameter longitudine est sesquialtera axis, vel altitudinis Tetraedri.* Coroll.1.propos.31.

26 *AXIS, seu altitudo Tetraedri ad latus cubi eidem sphæra inscripti est, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam.* Coroll. 2. propos. 31.

27 *PRISMA eandem habens & basem, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto.* Coroll.propos.32.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 *SI in Tetraedro Octaedrum inscribatur, diuidetur Tetraedrum bifariā tribus quadratis æqualibus, qua Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.* Coroll.propos.2.

2 *RECTAE lineæ centra basium cubi oppositarum connectentes se mutuo & bifariam, & ad angulos rectos secant.* Coroll.propos.3.

3 *IDEM est centrum Icosaedri, ac sibi inscripti Dodecaedri.* Coroll.propos.5.

SCD LYON 1

4 *SI Tetraedrum Octaedro inscribatur, erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallelæ, singulæ videlicet binis oppositis.* Coroll. 1. propos. 6.

5 *SI in Octaedro Tetraedrum inscribatur; recta, quæ centra basium Octaedri oppositarum coniungit, sesquialtera est axis Tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo Tetraedri ad basim oppositam deducta.* Coroll. 2. propos. 6.

6 *RECTA subtendens vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallela est opposito lateri.* Coroll. propos. 8.

7 *DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum inscribitur.* Ad propos. 13.

8 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.* Ad propos. 13.

9 *LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.* Ad propos. 13.

10 *RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, æqualis est lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.* Ad propos. 13.

11 *DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.* Ad propos. 14.

12 *BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.* Ad propos. 14.

13 *SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.* Ad propos. 14.

14 *ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita sunt inter se parallela.* Ad propos. 14.

15 *IDEM est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti.* Coroll. propos. 15.

16 *SI duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alte-*

rius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum: Recta connectens dictas sectiones duplum potest minoris segmenti. Coroll.1. propos.16.

17 *SI in Octaedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus Octaedri, idemque erit centrum basis Octaedri, & basis Icosaedri.* Coroll. 2. propos.16.

18 *IDEM centrum est Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri.* Coroll.3.propos.16.

19 *IDEM est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti.* Coroll. 1. propos.18.

20 *RECTA coniungens bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, triplaq; est lateris cubi in pyramide descripti.* Coroll.2.prop.:8.

21 *IDEM est centrum pyramidis, & Octaedri in ea descripti.* Ad propos. 18.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 *LATVS Icosaedri Octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis Octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione.* Coroll.propos.3.

2 *LATVS Icosaedri in pyramide descripti, est Apotome.* Coroll. propos.4.

3 *LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti, vel eius rectæ extremæ, ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti.* Coroll.propos.11.

4 *DIAMETER Icosaedri binas rectas potest, diametrũ scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis.* Coroll.propos.15.

5 *IDEM centrum est Octaedri, atque cubi sibi inscripti.* Coroll.1.propos.23.

6 *OCTAEDRVM ad sibi inscriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum laterum quadrata habent.* Coroll.2. propos.23.

SCD LYON 1

7 *DODECAEDRVM a duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ partis minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: Alterius vero & longitudo & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autē minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales.* Coroll. propos. 28.

8 *PYRAMIS excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens.* Coroll. propos. 31.

9 *DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.* Ad finem lib. 16.

10 *SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes: erunt duæ rectæ coniungētes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.* Ad finem lib. 16.

11 *SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; Rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque, & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.* Ad finem lib. 16.

12 *SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarū extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecāt, ac proinde diametri sphæræ erūt, & inter se æquales: Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, et cum parallelis rectos angulos constituunt.* Ad finem lib. 16.

SCD LYON 1

13 IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. Ad finem lib. 16.

14 IN data sphæra Pyramidem aliter, quam ab Euclide factum est, describere. Ad finem lib. 16.

15 IN data sphæra Octaedrum alicer, quam ab Euclide factum est, describere. Ad finem lib. 16.

16 IN data sphæra cubum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. Ad finem lib. 16.

17 IN data sphæra Icosaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. Ad finem lib. 16.

18 IN data sphæra Dodecaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere. Ad finem lib. 16.

19 SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera: erūt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul. Ad finem lib. 16.

20 OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. Ad finem lib. 16.

21 SI Octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis a centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim Octaedri, & cubi ducta. Ad finem lib. 16.

22 SI cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur: superficies Icosaedri superficie cubi maior est. Ad finem lib. 16.

23 DODECAEDRVM Icosaedro in eadem sphæra maius est. Ad finem lib. 16.

24 ICOSAEDRVM cubo in eadem sphæra maius est. Ad finem lib. 16.

25 CVBVS Octaedro in eadem sphæra maius est. Ad finem lib. 16.

26 OCTAEDRVM Tetraedro in eadem sphæra maius est. Ad finem lib. 16.

27 SVPERFICIES conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri in eadem sphæra: Et superficies Icosaedri maior superficie cubi: Et superficies cubi maior

SCD LYON 1

superficie Octaedri: Superficies denique Octaedri maior superficie Tetraedri. Ad finem lib. 16.

28 *ANGVLVM inclinationis duarum basium cuiuscunque corporis regularis inuenire.* Ad finem lib. 16.

29 *OMNES inclinationes basium cuiuscunque corporis regularis, æquales inter se sunt.* Ad finem lib. 16.

ITAQVE in Codicibus Græcis habentur in primo libro propositiones 48: *In secundo,* 14. *In tertio,* 37. *In quarto,* 16: *In quinto,* 25: *In sexto,* 33: *In septimo,* 41: *In octauo,* 27: *In nono,* 36: *In decimo,* 117: *In vndecimo,* 40: *In duodecimo,* 18: *In tertiodecimo,* 18: *In quartodecimo,* 11: *In quintodecimo,* 5: *Atque in uniuersum,* 486.

PROPOSITIONES vero additæ, in quinto libro, 9: *In quartodecimo,* 21: *In quintodecimo,* 16: *In sextodecimo,* 31: *Atque omnes numero,* 77:

IN scholijs denique, & corollarijs demonstrantur propositiones in primo libro, 108: *In secũdo,* 21: *In tertio,* 54: *In quarto,* 23: *In quinto,* 26: *In sexto,* 99: *In septimo,* 33: *In octauo,* 37: *In nono,* 40: *In decimo,* 67: *In vndecimo,* 25: *In duodecimo,* 28: *In tertiodecimo,* 33: *In quartodecimo,* 27: *In quintodecimo,* 21: *In sextodecimo,* 29: *Quæ omnes conficiunt numerum* 671.

IN uniuersum ergo 1234. *propositiones in nostro Euclide demonstrantur.*

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRAEFATIO.

SI QVIS forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facile sibi persuadebit, non temere id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaq. experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasq. Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumq. illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à ple-

SCD LYON 1

risque omnino negligi, à perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumq. habeant hac in re ducē, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile consequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, verbaq. propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus germanusq. auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maxime in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonem intelligo) pene in numeris mendis, vitijsq. incuria librariorum ita est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstranionibus adhibentur, obscuras illas ac male expressas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemq. gignat. Quo fit, vt Euclidem sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsque memoriam maius aliquod studium operamq. in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios edide

runt,

runt, hi perſæpe, relictis antiquorum demonſtrationibus certiſſimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerunq. non tam firmæ ſunt, neque rem ipſam ſimpliciter & abſolute conficiunt; præſertim quòd modo è propoſitionibus voces quaſdã perperam detrahunt, modò alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero proprioq. Euclidis ſenſu dubitare quis poſſit. Qua tamen in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latine redditum in priſtinum nitorem reſtituit, paucis locis exceptis, in quibus nõ parum à vero aberrauit, vt ſuo loco monebimus. Quæ cum ita ſint, resq. ac ſcientia tam præclara digna ſit, quæ ope, ſtudio, induſtria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre poſſunt, poſt diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubrationes noſtras ac vigilias ſtudioſis harum rerum nonnihil (niſi fallimur) ſubſidij allaturas in publicum ederemus. Acceſsit editionis cauſa altera: Nam cum Euclides, propter ſingularem vtilitatem, inſtar enchiridij, manibus ſemper debeat circumgeſtari, neque vnquam deponi ab his, qui fructum aliquem ſerium ex hoc ſuaui Matheſeos ſtudio capere volunt, in eoq. progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impreſſis, necdum factum videamus; hoc noſtra editio certe, ſi nihil aliud attulerit commodi, atque

emolumenti. Sunt enim hi noſtri Commentarij in vniuerſum Enclidem conſcripti commodiore nunc forma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere à nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertracte tur, quidq. in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriſque aſſeueramus, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresq. reddere conati ſumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantiſsimo Poeta dictum eſt: *Breuis eſſe laboro, obſcurus fio.* Interdum etiam cum breuius, atque ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quàm ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut ἀπαραστικῶς, atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publicè Euclidem interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides facilius à ſtudioſis, ijs præſertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia nunc primum auſpi-

cantur,

SCD LYON 1

cantur, ac maiore voluptate, vtilitateq. cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque à scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, alijsq. auctoribus decerpsimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, assiduisq. meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam incidentes, à recto cursu deflexerunt, & in errores varios atque absurdos, prorsusq. ab instituto disciplinæ abhorrentes dilapsi sunt.) dilucide atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile iudicabunt. Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excresceret, quam vt vnius libri spatijs, hac præsertim forma commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus. Altera sex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vna cum decimosexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quę ex Francisco Flussate Candalla, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adijcere voluimus, complectitur.

SCD LYON 1

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multo locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq. loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationem vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentarijs est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq. partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquam, nouã demon-

SCD LYON 1

strationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quod eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquam enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessario iam dubitationi locus esset. Neque enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclidis de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certæ quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadem linea via quædam & ratio ad circulum quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri aperte ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremo (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometrice demonstrauimus. Hæc fere præcipua sunt, quæ

SCD LYON 1

hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sane plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facile comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulo considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas reserant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenam Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primum ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia atque vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

MATHEMATICAE DISCIPLINAE cur sic dictæ sunt.

DISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easq. de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamq. illius scientiæ, qua anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, vt puer, gradatim tamen ascendens, eo deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solæ modum rationemq. scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdã principijs ad conclusiones demonstrãdas, quod proprium est

munus

munus, atque officium doctrina, siue disciplina, vt & Aristoteles 1. Posteriorum testatur; neque vnquam aliquid non probatū assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinasve non semper obseruare videmus, cū plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratave adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARUM diuisio.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atque Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam secundū se, quàm comparatione alterius possit considerari; visum fuit illis consentaneum quatuor prædictas facultates instituere, quæ vtramque quantitatem pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accuratè explicãdo omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, siue quãtitate continua, secundum se quoque, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique eandem magnitudinẽ, vt est mobilis, considerat; qualia sunt cælestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria pura, Musica verò atque Astronomia mixta dicuntur, omnes aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est Perspectiua, Geographia, & cætera huiusmodi, vel facile, vt ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab a-

lijs, vt auctor est Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica disciplina diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quænam sese extendant Mathematica disciplina, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subijcere statui. Volunt itaque prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam vero in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasq. scientias, Arithmeticam & Geometriã: In posteriori vero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicam, siue Musicam, Supputatricem, atque Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cælestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraq. distãtijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituũtur partes; Gnomonica, quæ in horarũ dimensione, positu gnomonũ exercetur: Metheoroscopica, quæ eleuationum differentias, siderumq. reperit distantias, necnon multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumq. stellarum distantias huiuscemodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt à Geometria gigni, atque vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub viũ cadũt, alios situs & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularem, quæ circa varias, multiplicesq. versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographice, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesq. videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos

tan-

tanquam conos; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partem, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusq. vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat, nõ vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæq. coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra mariq. obsidentibus resistentia. Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status verò æquilibrium esse causam censendum est, vt Timæus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisq. animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιΐα appellatur, ad cælestium circumuolutionũ imitationẽ, qualem Archimedes etiã fabricatus est. Atque, vt vno verbo dicã, omnis, quæ materiã mouẽdi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarẽ autẽ artem, eã inquã, quæ ad instruendas, coordinandasq. portinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluere, sed vti eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendisq. castrametationi spatijs in campo.

Quem-

Quemadmodum neque Historicam, neque medendi artem Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusue colligendo: Medici vero quamplurimas res in arte sua huiusce modi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, qui cunque aliquid de opportunis temporibus, locisq. dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, pauciſſimam ostendere multitudinem, castra suosq. exercitus ad figuram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimã apparere cupit. Hæc igitur fere sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarũ partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICA-rum disciplinarum.

OMNES disciplinas Mathematicas à varijs & diuersis auctoribus ortum originemq. duxisse, perspicue historiæ testantur: Immo vero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequẽtes mercaturas, atque commercia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq. successores, necnon Aegyptij, Græci denique atque Arabes amplificarunt, varijsq. problematis, atq. theorematis illustrarunt. Musicam deinde à Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt, quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri & Lino. Linus vero Herculi, & sic succes-

sionibus

sionibus continuis per alios Musicos praclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumq. habuit ab agrorũ dimensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretq. vt nemo agrum digno scere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod terram metior. Cæterum paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri, & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiã cælestia dimetienda conuertit, traditq. principia vniuersa Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quamplurimis, quæ ex ipsa, veluti radice, dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciã primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisq. demonstrationibus locupletarũt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiã denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumant: Vnde ob ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere. Alij putant Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoque maxime illustres auctores cla-

ruerunt,

ruerunt, quod non est huius loci declarare. Caterum præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.

NOBILITAS ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt recte à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si vero nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda; haud dubie Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locũ. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq., ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemq prorsus dubitationem tollant: Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis sæpenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum sectæ, (vt alios interim Philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exortæ, adeo & inter se, & nonnumquam à fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, aly Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe à Mathematicis demon

stratio-

strationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumq; Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse dignierem, præstantioremque, quæ magis synceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMAticarum disciplinarum.

NON *solum vtiles, verumetiam necessarias admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam a rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res Metaphysicas, quæ sunt ab eadem maxime auulsæ, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem*

affir-

affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasq. conferant, multis pulcherrime nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Christiana, demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translate, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla nō pauca in medium adducit, eandemq. sententiam longe post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem docet D. Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco. Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rursum B. Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Diuum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisq. scientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesq. perfectè acquirendas, vt perspicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philosophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis sequendos ad bene rectèq. philosophandum proponimus, eorumq. fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimum de causa, vt ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisq. perspicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione perciptet is, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expers. Quidi quod olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnasium frequentare, qui prius optime Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolū dicitur pinxisse, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de

Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiose scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosq., adeo vt etiamsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamē infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemq. ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidem experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra vero eos, qui ad hasce facultates idonei minime reperiuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ vium appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, quâ cuiusque animus his artibus colendis, exercendisq. perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeq. liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumq. versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excæcatur, defoditurq., à Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitariq. rursus

SCD LYON 1

ad eius quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum vtilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque præstantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq. Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscripito, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisq. auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq. (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de vitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. lib. 2. vbi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, à quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq. tempore Ptolemæi primi, qui Aegypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissime enumerans, nullam

prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse praterire, vel ab Euclide suo esse compositum ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longe alius est, qui cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicarit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaq. doctrina facilè elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, numquam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaq. eruditione contexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea duntaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atque vtilia ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Caterum, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersæ Geometriæ præstantia, atq. vtilitas, partim ex ijs, quæ ante scripsimus, partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam

ob

ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demõstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene ac perfectè calleat prius necesse est. Ex his etenim elemẽtis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatũ, omnis agrorum, montium, insularũ dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cæli vniuersi, siderumq. perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumq. toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusq. varij tam expedite cognoscuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis ac Lunæ defectiones certissime, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumq. fidem superant, perspicua facere, credibiliaq. esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historiæ. Cùm enim Hieron Syracusarum Rex nauem, quam Ptolemæo Aegyptiorum Regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, vt

SCD LYON 1

eam omnes vnà Syracusij à loco dimouere minime valerent: Archimedes Geometra peritissimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promisit, se effecturum, vt ipsam solus Rex absque vllo labore subduceret. Quod cum præstitisset, in conspectu omnium Rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factũ, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro argentoq; confecta, quã Rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendit. Neque silẽtio prætereri debet, eundem Archimedem robori ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumerò iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, è loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere. Et alia id genus, non solùm ab Archimede, verum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse, memoriæ proditum est. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq. honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero à se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam vtilitatemq; Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maximè illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit vis demonstrationum, nemoq. eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenue fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscri-

pſit.

SCD LYON 1

pſit. Is enim inſtructiſsimus rebus Dialecticis, cum ſcholas Peripateticorum ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta mira cum animi ardore ſtudioq. arripuiſſet, nihil fere ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad demonſtrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperiſſe. Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonij Philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) hæſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmetica, Geometria, Dialecticaq. (quibus artibus ab auis & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione ſcientiaq. reuocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe characteres illos Arithmeticos, & linearum demonſtrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quòd eius cognitio maxime ſit vtilis, vt alia artes facilius & rectius percipiantur. Poſtremo eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibusq. modis prædicanda, quòd nõ hæſit in exiguis & inferioribus hiſce machinis, à quibus originem traxit, ſed euolauit in cælum vſque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurſus cæleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusq. adminiſtrationem & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, qua generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè ſibi hunc ſcopum proponit, vt plana, aut ſolida vel conſtituat, vel conſtituta inter ſe comparet, aut diuidat. Neque vero mirum alicui videri debet, quod cum tria ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolum de duobus poſterioribus extent propriæ contemplationes, vt di-

ximus, non autem de lineis, vel etiã punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam constituunt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis & lineis scientiam instituere; Superficiebus vero, siue planis, & corporibus, solidisve maxime conueniebat, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus verò quinque de solidis acutissime disputat, eorumq. proprietates maxime illustres perueltigat. Quoniam vero cum res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absque linearum commensurabilium, atque incommensurabilium notitia; Immo vero quam plurimæ magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenumero sint talia, vt ea communis & nota mensura data metiri nequeat, vt liquido constat iis, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atque vsum: idcirco vt hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiã, dimensionemq. requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis disserit. Intelligens rursum Euclides, neque hanc tractationem linearum commensurabilium & incommensurabilium sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimũ librum agit de numerorum passionibus, easq. copiose & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totum hoc volumen elementorũ Geometricorum quindecim libris comprehensum (quorum quidem priores tredecim sine vlla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus; posteriores vero duo à nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secun-

da

da tres sequentes complectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq. disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum æqualitatem & inæqualitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figurarum planarum discutiuntur. Quid vero Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREma, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterum constitui, appellabitur huiuscemodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum æquilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema, ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipsi loquuntur) est probabilis, qualis hæc est quæstio; An totum distinguatur realiter à suis partibus simul acceptis: Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat se demonstraturum, supra lineam rectã finitam triangulum æquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non æquilaterum, nempe Isosceles, vel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi po-

test

teſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantum probabiliter, ita vt intellectus cuiuſque ambigat, vtranam illius pars vera ſit: In Mathematico vero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendũ eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolum paſſionem, aliquam, proprietatemve vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, contradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque ſint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus eſt intelligenda. Itaque vt vno verbo dicam, quæſitum illud Mathematicum conſtruere aliquid docens, cuius etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuo falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, vt demonſtrabitur libro 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterum tam problema, quàm theorema dici conſueuit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quod vtrumque aliquid nobis proponit, vt

in

in exemplis adductis constat. Hac ideo dixerim, vt studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur his fere verbis: Quod faciendum erat; Theorematum vero hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & non vna tantum, quamuis vltimus syllogismus demonstrationis solùm concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM verò ad demonstrationes problematum atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, vt breuius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd solum assumuntur ad alias demonstrationes; non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisq. disciplina ex præexistente cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq. ex assumptis, & cõcessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autẽ scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumq. Philosophorũ sententia sua principia demonstret; habebunt vtique & Mathematica disciplina sua principia, ex

quibus positis, & concessis sua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeãt confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum expoſcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ non solum in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles: A ianua quis aberrabit? Vt præclare à Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorũ præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidẽ facile à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusq. seculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq. certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiusce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, vt in ipso quidem introitu scientia proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque vero omnia principia Geometri-

ca

ca ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

SCD LYON 1

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

TOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus proprietatesque triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: qua quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquodque per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemq. varijs rationibus inquirit in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq. contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Vt

autem

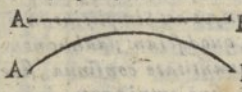
autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime primæ, ac præcipuæ, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur à principijs, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam denique præter duplices has partes, tertias quoque altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solùm est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neque aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq. sine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem. Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem punctum alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum

ctum verò indiuiduum prorsus debet existimari. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq. in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latã, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absque latitudine, non absurde concipere, intelligereq. poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & omumbrati, longitudo quadam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbra extensa, carens omni latitudine, cum sit limes vtriusque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vere interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quadam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem secari, atque diuidi.



LI-

III.

LINEAE autem termini, sunt puncta.

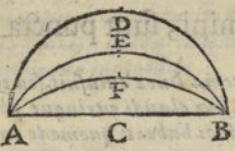
DOCET, quanam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq. in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines posita progrediuntur. Proclus hanc definitionē exponens ait, tunc demū lineam aliquā ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatiū ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B: Lineæ vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spatia, quam sit

SCD LYON 1

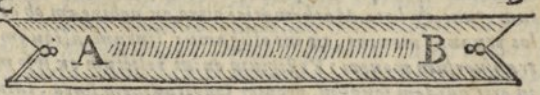


extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F. subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchre sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C. punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes vero ait, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius lineæ, quæ minor diceretur, quam A C B. Campanus deniq. describens rectam lineã, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodũ autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaque si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus, ita vt semper æquali-

ter

ter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si vero vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & aliæ huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis linea helicæ, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose coacludit Aristoteles in libro de Cælo, iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum.

Sed quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus,



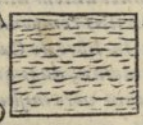
num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula AB, secundum cuius latus CD, recta CD, describatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur re-

gula, vt manente eadem parte superiore, punctum C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundum idem latus regulæ CD, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctũ D. Nam si posterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regulæ AB, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud CD, perfectè rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq. tantum habet.

POST lineam, quæ est primæ quantitatis continuæ species, vnicamq. habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq. primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperitur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas ABCD, inter lineas AB, BC, CD, DA, comprehensa, consideratq. secundum longitudinem AB, vel DC, & secundum latitudinem AD, vel BC, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum deserens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea AB, fluat versus DC, efficietur superficies



ABCD.

ABCD. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem interuallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

VI.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

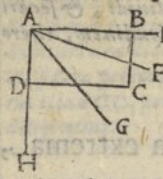
NON dissimilis est hæc definitio superiori, qua termini lineæ fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitere puncta. Vt superioris superficiei ABCD, extrema sunt lineæ AB, BC, CD, DA. Eodemq; modo in quacunque altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HÆC quoque definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsumue subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorue, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habent extrema: Vel cuius

omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & denique secundum omnes partes. Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur superficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæve rotundæ, vel etiã coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime potest. Idemque dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum





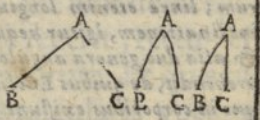
contem-

contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

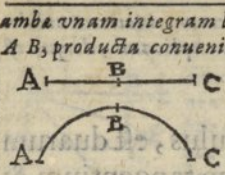
PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunque duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu seu inclinatione unius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentē superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur.



Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earū versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eam secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositione 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed

amba vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex linets curuis A B, B C, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaque vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum producta se mutuo secent: Curua autem linea, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactū altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides disserit in Stereometria, quique in corporibus existunt; Posterius vero spharales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorum maximorū circunferentijs, & de quibus copiose agitur in spharicis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.



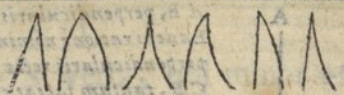
IX.

CVM autem, quę angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis pos

sunt

sunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum conuexum, & concauum, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinisve linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis cõmune est, non autẽ ita varietur, vt aliud constituat genus.

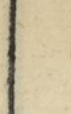


X.

CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quisnam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, recta C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidẽ ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadẽ linea C D, protracta, prope idem punctum B efficiat) inter se æquales. quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quã in D, inclinabit, sed æquabiliter recta C D, insistet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta

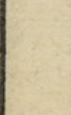
A B, per-



A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perperpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantum faciat cum A B, vnum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri. Itaque vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magnè labore hæc qua diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



QVANDO recta A B, rectæ C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.

SCD LYON 1

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cum ab illa inflexibilitate linea perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum vero, per angulum A B D, quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

I AM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusue, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro ad interuallum D A, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat, [a] *erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si vero idem semicirculus rectam B C, secet in E, F, erit angulus B A C, obtusus; propterea quod, ductis rectis E A, F A,* [b] *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est,*



[a] 31. tertij.

[b] 31. tertij.

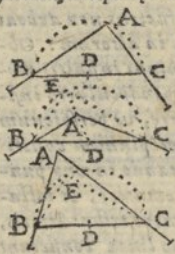
qui

qui quidem pars est anguli B A C. Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea quod ductis rectis E A, F A, [a] angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.

a 31. tertij.

ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secet bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A, [b] datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si vero idem semicirculus transeat supra punctũ A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C; [c] eritq. angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus [d] maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur rectæ E B, E C; [e] eritq. angulus B E C, rectus in semicirculo: [f] qui cum maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim proprijs in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariæ sint propositiones posterius demonstratæ.

b 31. tertij.



c 31. tertij.

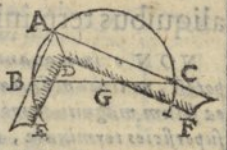
d 21. primi.

c 31. tertij.

f 21. primi.

FA-

FACILIVS idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert instrumentum ABC, constans duabus regulis AE, AF, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus AB, huius normæ, rectè AB, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & normæ latus AC, rectè AC, congruat, erit angulus A, rectus: si verò citra rectam AC, cadat normæ latus AC, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ AC, vltra rectam AC, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.



ITA autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo BAC, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq. diametro BC, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latusq. vnum normæ, vt AB, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterum tunc latus AC, per alterum punctum extremum C, transeat, rite fabricata erit norma ABC; [a] quod tunc angulus BAC, in semicirculo BAC, rectus sit: si verò latus AC. non per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera DE, DF, punctis extremis B, C, &c. [a] 31. tertij.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

FI-

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ, & quæ profunditatem adepta quoque sunt, vt solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, spheroides, & aliæ huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circunscripta, figuræ solidæ siue corporeæ. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quamplurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingeada esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica li-

SCD LYON 1

nea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea A B C, habueritq. hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana, circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem redeat locum, à quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A E C: Erit quoque punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum

ctum D. Vnde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes ſunt æquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæræ, non autem in ſuperficie circuli; quæ tamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam ſint æquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emiſſæ inter ſe ſint æquales.

XVII.

DIAMETER autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.

SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, iia vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodo, quæ per centrum vſque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures aſſignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam ſecari à diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinque æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt

diameter AB, communis sit vtrique portioni: Si igitur circunferentia ADB, congruat penitus circunferentiæ AEB, manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales; quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia ADB, non omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam AEB, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C, secante circunferentiam ADB, in D, & circunferentiam AEB, in E, erunt duæ rectæ CD, CE, ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoq. æquales erunt, quod demonstrandum proponebatur.

EX hac demonstratione constat, diametrum non solum circunferentiam, verumetiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircunferentiæ sibi mutuo congruant, vt ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & vtramque circunferentiam comprehensæ, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.

XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura ADB, contenta sub diametro AB, & peripheria ADB, dicitur semicirculus, quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura AEB, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

QVOD si recta linea BD, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inæquales BAD, BCD, quarum ea, in qua cen-



trum circuli existit, cuiusmodi est portio B A D, maior est, quam alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Esse autem portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A G. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt super portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter se æquales sunt ex defin. 10. cum sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem est, quæ F A, maior erit, quam E A, pars ipsius F A. Cum ergo ipsi E A, sit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoque F C, maior quam E C, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio B G D, vt recta F G, eadem tunc existens, quæ F C, minor possit esse quam E A, vel E C. Si namque diceretur cadere extra, vt si circulus esset B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis est portio B A D, esset rursus F A, eadem tunc existens, quæ F C, maior quam E G, hoc est, quam E C, atque ita pars F C, maior rursum foret toto E C. quod absurdum est. Ex quo patet, portionem B A D, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione B C D, cum hæc æqualis sit portioni B G D, quæ pars est portionis B A D. Cum enim ostensum sit, portionem B C D, circa rectam B D, circumductam non posse congruere portioni B A D, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis est B G D.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides

descri-

descriptiones variarum figurarū, explicat prius, quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curulineas: Eas vero, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

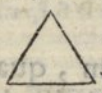
QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt

innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinite: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras: contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cætera omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiã dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.

XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoque esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.

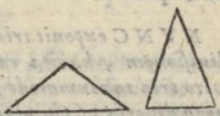


SCD LYON 1

XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.

EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri.

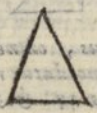


Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius, & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.

XXV.

SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales: vel duorum tantum angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Aequilatero, secundum vero Isosceli, tertium denique Scaleno respondet triangulo. Caterum quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

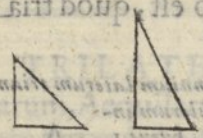


SCD LYON 1

XXVI.

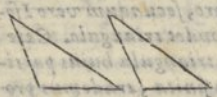
AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus,) fit vt tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusque obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & alijs Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtusum angulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, siue obtusangulum esse quoq. potest vel Isosceles, vel scalenum. vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes

tres

tres anguli per ea, quæ propos. 5. ostendemus. æquales, ideoque cum vnus ponatur obtusus, omnes tres obtusi. quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunque æquilaterum, esse necessario Oxygonium: At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atque Isosceles Oxygonium rursum duplex, Isosceles nimirum Oxygonium habens tertiũ latus vtrouis æqualiũ maius, atq. Isosceles Oxygoniũ habens tertium latus vtrouis æqualiũ minus: Vt vnica sit species trianguli æquilateri, quatuor vero Isosceli, & tres Scaleni: atque in vniuersum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Iscosceles Oxygoniũ habens tertiũ latus vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygoniũ, & Scalenum Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulũ Isosceles, Rectangulum Scalenum, Amblygonium Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterum, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, siue affinitatem habeant inter se triangula vtriusque partitionis. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorum laterum æqualium vtrumuis tertio sit minus, vt rectè animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro

triangulo, cuius duo quæcunque latera expresse nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in basę trianguli, intelligeresq. quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

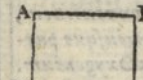
POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinque tãtummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia



quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq. anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.



SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C,

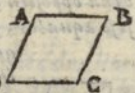
inter

SCD LYON 1

inter se quoque aqualia sunt, cum A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

XXXI.

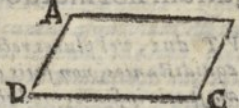
RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.



HAEC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figuræ alterapartelongioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propos. 34 huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES vero, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.



EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque eius latera omnia æqualia sunt, neque vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cætera vero omnes, quæcunque sint, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquę quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

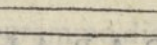
RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ a prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, recte irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eadęq. fieri potest quasi diuisio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas asseremus post definitionem linearũ parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctũ coeant; sed necesse quoque est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ

lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis AB, CD, si superficies aliqua plana rectæ AB, applicetur, omnia eius tangens puncta, ita vt circa illã circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterum planius, perfectiusque intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiã plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramque conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & productæ in vtrãuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensa non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq. superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, qua easdem lineas in eodem requirit existere plano.



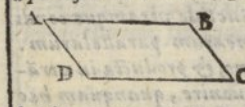
SCD LYON 1

HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, necnon earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

VT figura quadrilatera ABCD, si quidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Caterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaque possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior: & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, dicitur q. Trapezium Isosceles: vel inæqualia, Trapeziumq. Scalenum appellatur. Itaque ex

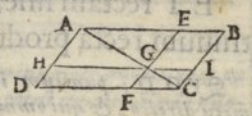


SCD LYON 1

his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq. lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



SIT parallelogrammũ ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus AD, BC. Item linea HI, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus AB, DC, existens. Quæ cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per quæ diameter AC, non transit, vocantur à Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.

PETI-

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, sit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta li-

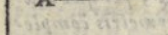


nea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq. aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.

II.

ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus metu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distan-



tiam. Sic linea recta AB, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.

III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunque quantitatis mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quoduis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq.. quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ singulæ citra centrum A, circumuolutæ singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IIII.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

SCD LYON 1

COMMVNES NOTIONES

siue Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum. Et si maior æqualis fuerit propotæ quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse. Reliqua quoque partes Axiomatis à nobis adiecta, quod frequentē vsum habeant, clarissimæ sunt.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubio maiori plus esset adiectum, quam minori, rum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

SCD LYON 1

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM si reliqua quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæqualibus inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN &, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adiiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmo-

dum residuum maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterum Euclides non docet, quidnam simpliciter, & absolute gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam not ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim compositæ quantitates, vel residuæ, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adiiciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adiiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum effet duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, desineret vtique minus à duplici, vel triplici, &c. Quod si contra, minus esset duplex,

vel

vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsum; vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & utrique tertiæ illa addatur, erunt compositæ duplices illius tertiæ, a2. pron *a sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cum igitur* b2 pron *b & æquales inter se, propter idem additamentum existant; eademq. sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porro partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non rarò eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt. Et contra, Quæ æqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronunciatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt. Partem quoque secundam huiusce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris vsurpatur.

VIII.

ET quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superpositæ, ea quæ superponi-

tur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed linea illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis linea interdum inter se inæquales existant.

E CONTRARIO, Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum sua parte maius est.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

IN sequentibus porro pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inserenda esse censuimus valde necessaria, cùm ex ijs Axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes,

o.

X.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

NON est difficile istud Axioma, si perfecte intelligatur natura recta linea. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ

SCD LYON 1

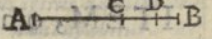
AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA, a describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; b Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC, interse æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualiũ, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.



a 3. petit

b 17. def.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ AD, BC, commune habent segmentum CD, quia ambæ vnam rectam constituunt lineam AB.



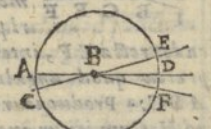
At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere AB, AC, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte à Proclo fuit demonstratum.

XI.

o.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem segmentum commune BD, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, produ-



SCD LYON 1

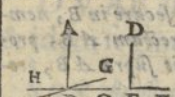
cta cadat in F, sitq. vna recta linea CBF. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus ACFD, secans rectas AB, CB, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta AB D, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quam CF, semicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF. vt ad defin. 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.

DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.

x. XII.

ITEM, omnes anguli recti sunt inter se inæquales.

HOC axioma apertissimum esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur, propterea quod inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri, minuiue nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cum semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione. Sint duo anguli recti ABC, DEF. quos dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitq. ABC, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectæ AB,



cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis est BG, propterea quod angulus DEF, minor ponitur angulo ABC. a *Producatur CB, in rectum & continuum vsque ad H. Cum igitur angulus ABC, sit rectus,* b *erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare ma-*

a 12. petit.
b 10. def.

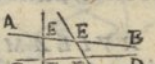
ior

ior etiam angulo ABC. [a] Producta autem GB, in rectum & continuum vsque ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, vt in precedenti Axiomate est demonstratum. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, [b] fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoque erit angulo ABI, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademque est ratio in cæteris. [a] 2. pet. [b] 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XIII. xj.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq. partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.



VT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem concurrentes esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali

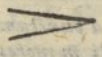
semper spatio protenduntur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoque eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, immo à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quiuis ei assensum præbeat; præsertim cum reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeũt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Id circo pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometrice demonstrabimus, vt firme, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quam Proclus, & quidem magis Geometrice demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

xij.

XIIII.

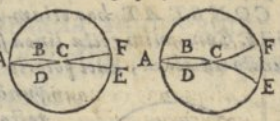
DVAE rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima.



Proclus

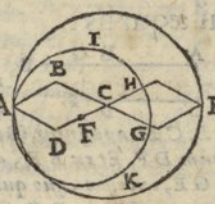
Proclus tamen demonstrat hoc principium, hoc modo. Si fieri potest, vt duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ ABC, ADC, superficiem ABCD, ita vt duæ illæ rectæ coeant in duobus punctis, A, & C.



Facto deinde centro C, [a] describatur circulus interuallo CA, [b] & producantur rectæ ABC, ADC, in rectum, & continuum vsque ad circunferentiam, nempe ad puncta, E, & F. Itaque quia rectæ ACE, ACF, transeunt per centrum C, [c] erunt semicirculi AE, AEF, inter se æquales, & idcirco circunferentia quoque AE, circunferentiæ AEF, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.

a 3. pet.
b 2. pet.
c 17. def fin.

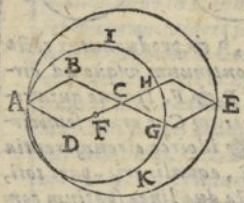
SED quia fortassis aduersarius dicet, rectas ABC, ADC, productas coire iterum in aliquo puncto circumferentiæ, vt in E, vel F, atque adeo non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in rectæ ADC, quocunque, erit AF, minor, quam FE, cum minor sit, quam AFC, hoc est, quam CHE, quæ ipsi AFC, æqualis est, atque adeo multo minor, quàm FE. Circulus igitur ex F, ad interuallum FA, descriptus secabit rectam FE, in H, atque adeo CGE, in G. Quoniam igitur AFH, diameter circuli est, erit AIH, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, quã aufert recta ABG, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia AIG, minor quam AIH, totum quam pars, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio AIG, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, in-



tra

tra circumferentiam AKG, ne pars maior sit quam totum, vt supra demonstrauimus.

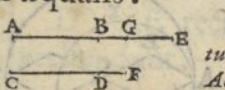
CONSTAT hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cum enim recta linea sit breuissima extensio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantum linea ab vno puncto ad aliud. Quare si ABC, recta est, non erit ADC, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si ABC, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ ADC, non obumbrant extremæ, cum visus per rectam ABC feratur. Non ergo recta est ADC.



HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atque Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.



HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus AB, CD, æadantur inæquales BE, DF, sitq. BE, maior quàm DF. Et ex BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, vt sit GE, excessus, quo quantitas addita BE, superat quantitatem additam DF. Quoniam igitur æqualibus AB, CD, addita sunt æqualia BG, DF, [a] erunt tota AG, CF, æqualia. Quare constat, totam quantitatem AE, superare totam CF, eodem excessu GE, quo magnitudo DF, adiuncta à magnitudine adiuncta BE, superatur. Quod est propositum.

[a] 2. pron

SCD LYON 1

XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF, addantur æquales AB, CD. Et ex maiore BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, vt GE, sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF, superat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF, addita sunt æqualia AB, CD, a *erunt tota AG, CF, æqualia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit totam CF, eodem excessu GE, quo maior quantitas proposita BE, minorem DF, superat. Quod est propositum.*

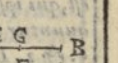
o.

a 2. pron

XVII.

SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

AB æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq. EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF; ita vt BG, æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab æqualibus AB, CD, ablata sunt æqualia EG, DF, b *remanebunt AG, CF, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari à residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.*



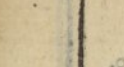
o.

b 3. pron

XVIII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.

o.



AB inæqualibus AB, CD, auferantur æqualia AE, CF. Sitq. BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita vt AG, æqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab æqualibus AG, CD, ablata sunt æqualia AE, CF, & remanebunt EG, FD, æqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.

IN his quoque quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.

SCD LYON 1

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & Axiomata, quod cum vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri expoſcant; hæc vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem postulatum à problemate, quod constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquod nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis Axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematisq.

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, qua Euclides nobis proposuit; quædam vero communia & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt numquã huius incrementi finis

reperia-

reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, undecimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum soli Geometriæ conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HAEC dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq. principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorũ eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorũ vsus appareat in demõstrationibus; id quod satis te experiẽtia docebit.

ANTEQVAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id vero eo consilio à nobis est factum: quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq. interdum duo hi interpretes inter se discripent, in serie, atque ordine propositionum, id quod maxime in 6. 7. & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusque interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis signo, cui similis literula, seu signum respon-

det

det in demonstratione, vt facilius cognoscatur, ad quem locum qualibet citatio sit referenda. Porro citationes intelligenda sunt hoc modo.

1. def.	*Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.*
1. pet.	*Prima petitio, vel primum Postulatum.*
1. pron.	*Primum pronunciatum, seu axiema, & ita de reliquis numeris, vt prius.*
1. primi.	*Prima propositio primi libri.*
23. Vndec.	*Vigesimatertia propositio vndecimi libri.*
6. tertijd.	*Sexta tertijdecimi libri.*
9. sextid.	*Nona sextidecimi libri.*
13. duod.	*Decimatertia libri duodecimi.*
7. quind.	*Septima libri quindecimi.*
5. quartid.	*Quinta libri quartidecimi, &c.*

Ex his alia citationes à quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

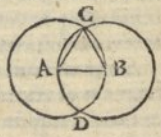
PROBLEMA I.

PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulũ æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in



[a] 3. pet.

pun-

punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [a] ducantur duæ rectæ lineæ CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque super rectam AB, constitutum triangulum ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam rectæ AB, AC, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli CBD, [b] erit recta AC, rectæ AB, æqualis: Rursus quia rectæ BC, BA, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli CAD, erit recta BC, rectæ BA æqualis. Tam igitur AC, quàm BC, æqualis est rectæ AB. [c] Quare & AC, BC, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum ABC, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

[a] 1. pet.
[b] 15. def
[c] 1. pron

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum ABC, constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera æqualia, [d] est æquilaterum.

Triangulum ABC, tria habet æqualia latera.

Triangulum igitur ABC, est æquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Quæ eidem æqualia sunt, [e] inter se quoque sunt æqualia.

Duo latera AC, BC, æqualia sunt eidem lateri AB.

Igitur & duo latera AC, BC, inter se æqualia sunt.

Ac propterea omnia tria latera AB, BC, AC, æqualia existunt.

Minorem vero huius syllogismi hac ratione colliget.

Lineæ rectæ à centro ductæ ad circumferentiam circuli, [f] inter se sunt æquales.

Lineæ AB, AC, sunt ductæ à centro A, ad circumferentiam CBD.

[d] 23. def
[e] 1. pron
[f] 15. def

SCD LYON 1

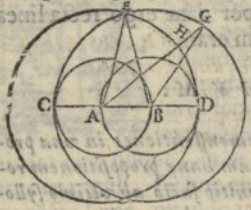
Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.

Eademq. ratione erunt lineæ A B, B C. æquales, cum ducantur à centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones non solum Euclidis, verum etiam cæterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod breuius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse possit ex superiori demonstratione.

SI quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. a Deinde producatur A B, in vtramq partem ad circunferentias vsque ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D, b describatur circulus E D F.



Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex E, c ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq. erit super recta A B, d triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim rectæ A E, A D, ducantur è centro A, ad circumferentiam E D F, e erit A E, æqualis rectæ A D. Item cum rectæ B E, B C, f ducantur è centro B, ad circumferentiam E C F, erit B E, æqualis rectæ B C. Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter se, (vtraque enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediantur.) g Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur communi rectæ A B, h erit tota A D, toti B C, æqualis.) i Igitur A E, B E æquales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque A B, B E,

a 2. petit.
b 3. pet.
c 1 pet.
d 20. def
e 15. def
f 15. def
g 1. pron
h 2. pron
i 1. pron.

maior

maior sit quam AB, perspicuum est, cum AD, æqualis ostensa ipsi AE, [a] maior sit, quam AE; Item BC, æqualis demonstrata ipsi BE, [b] maior quoque sit, quam AB. Constitutum igitur est super recta AB, Isosceles ABE, habens duo latera AE, BE, æqualia inter se, & maiora latere AB, quod faciendum erat. Atque hæc est demonstratio Procli, aliorumq. interpretum Euclidis.

a 9. pron
b 9. pron

BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum ABE, esse Isosceles, hac ratione. [c] Quoniam AE, æqualis est rectæ AD, & rectæ AD, est dupla recta AB, propterea quod BA, BD, æquales inter se sunt; erit & AE, dupla rectæ AB. Rursus [d] quia BE, æqualis est rectæ BC, & BC, dupla est ipsius AB; propterea quod [e] AB, AC, æquales sunt inter se, erit & BE, dupla ipsius AB. Cum igitur vtraque AE, BE, dupla sit eiusdem AB, erunt [f] AE, BE, inter se æquales, maioresq. propterea rectæ AB. Isosceles ergo est triangulum ABE.

c 15. def
d 15. def
e 15. def
f 6. pron

IAM vero, si ex puncto A, [g] ducatur linea recta AG, ad circumferentiam EGF, quæ non sit eadem quæ AE, vel AD, secans circumferentiam EHD, in puncto H, & ex G, ad B [h] ducatur alia recta GB, [i] constitutum erit triangulum ABG, super recta AB, quod dico esse scalenum. [k] Quoniam AG, maior est quam AH. [l] Sunt autem AH, AE, ex centro A, ductæ, inter se æquales; erit & AG, maior quam AE, hoc est, quam BE, quæ ostensa est æqualis ipsi AE; igitur & maior erit AG, quam BG, [m] cum BG, sit æqualis ipsi BE. Est autem & BG, maior quam AB, propterea quod tota BC, æqualis ipsi BG, [n] maior est quam AB, pars. Omnia ergo tria latera trianguli ABG, inæqualia sunt, ideoq. scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.

g 1. pet.
h 1. pet.
i 20. def.
k 9. prō.
l 15. def
m 15. def.
n 9. pron

BREVIVS quoque ostendemus, triangulum AGB, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [o] AH, AD, ex centro A, ductæ sunt æquales, quam BG, BC, ex centro B, ductæ: Sunt autem AD, BC, ipsius AB, dupla, quod AB, vtrique BD, AC, æqualis sit; erunt quoque AH, BG, ipsius AB, duplæ; ac propterea maiores, quam AB. Cum ergo [p] AG, maior sit, quam AH, siue quam BG, scale-

o 15. def
p 9. pron

num erit triangulum AGB, habens latus AG, maximum; BG, medium, & AB, minimum.

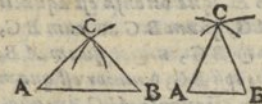
PRAXIS.

CONABIMVR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere; Idq. in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.



ITAQVE triangulum æquilaterum ita facile construetur super data recta AB. Ex centris A, & B, interuallo vero datæ rectæ AB, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contingat, siue supra. Post hæc ducantur duæ rectæ AC, BC, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumq. erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.

ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam AB, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describãtur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ AC, & BC, constructumq. erit Isosceles: quoniam AC, BC, æquales



erunt, propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta AB.

SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta AB. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam BA, describatur arcus aliquis. Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ AC, BC; constitutumq. erit Scalenum,



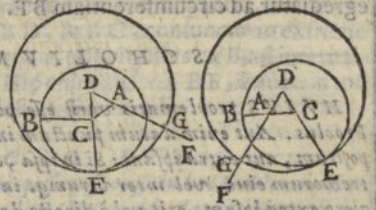
SCD LYON 1

vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.



SIT punctũ datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectã æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro, [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta vero A C, [c] constituatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A C, [d] extendantur; D C, quidem oppositũ puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; D A, vero oppositũ centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam E G, [f] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, [g] remanebit

[a] 3. petit
[b] 1. pet.
[c] 1. primi.
[d] 2. pet.
[e] 3. pet.
[f] 15. def.
[g] 3. pron.

a 15. def. A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, a æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtraque æqualis est ostensæ rectæ C E, inter se b æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

b 1. pron

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim c centro C, & interuallo C B, c describatur circulus, ad cuius circumferentiam recta a ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

c 3. per
1. pet.
c 15. def

SCHOLIVM.

HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorum eius, vel inter vtrumq. iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel è directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

iij. PROBL. 3. PROPOS. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq. ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, [a] ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus [b] describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, [c] æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, per constructionem; [d] erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



[a] 2. primi.
[b] 3. petit
[c] 15. def
[d] 1. pron

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describendus erit circulus ex B, ad internallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

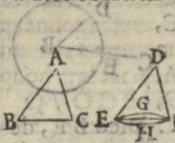
SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuo secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua relege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4. iiij.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebuunt; eritq. triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt,

vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.



SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumq. angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta AB, rectę DE, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [a] ipsæ sibi mutuo congruant, punctumq. B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectę haberent idem segmentum commune, [b] quod est impossibile. Quòd si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineę superficiem. [c] quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumq. C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta EGF, vel EHF, claderent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quàm EHF, rectam esse, cum vtraq. ponatur esse eadem, quę recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem [e] claudere non possunt. Quocirca [f] basis BC, basi EF, æqualis

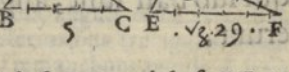
erit

a 8. pronun.
b 10. pronun.
c 14. pronun.
d 8. pronun.
e 14. pronun.
f 8. pron.

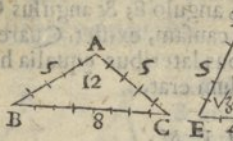
erit, cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedente huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius triãguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonstratur: Triangula vero ipsa licet possint esse æqualia, posteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex scholio propos. 37. huius lib. constabit, tamen rarò admodũ illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. vt ambo simul efficiant 7. At vero D E, sit 2. & D F, 5. vt ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis B C, 5, & basis E F, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est quã 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area vero trianguli D E F. 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non vtrumque latus vtriq. lateri æquale existit in dictis triangulis A B C, D E F.



RVR-

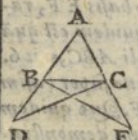


RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia sint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, sitq. vnumquodq. 5. anguli vero A, & D, contenti dictis lateribus inæquales. sitque A, maior quam D. Quibus concessis, erit basis B C, maior basi E F, vt propos. 24. huius libri ostendetur. Quod si basim B C. ponamus esse 8. basim autem E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area vero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. qua maior quidem est quam 9. minor vero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa æqualia inter se sint, necesse est, vt vtrumque latus vnius æquale sit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales existant, vt optime dixit Euclides.

V

THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.



SIT triangulum Isosceles A B C, in quo latera A B, A C, inter se sint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, supra basim B C, æquales inter se esse: Item si latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse æquales. Ex linea enim A E, producta infinite [a] abscindatur A F, æqualis ipsi A D, [b] & ducantur rectæ B F, C D. Considerentur

[a] 3. primi.
[b] 1. peti.

deinde

deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi A C, ex hypothesi, & A F, ipsi A D, ex constructione; angulusq. A, contentus lateribus A B, A F, æqualis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A communis est vtrique triangulo: erit basis B F, æqualis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rursus considerentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam vero rectæ A D, A F, æquales sunt, per constructionem, si vt, si auferantur ex ipsis æquales A B, A C, & reliquæ B D, & C F, sint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia sunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, vt probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt ostensum etiam fuit, Igitur erit angulus D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntq. supra communem basim B C, vtriusque trianguli B D C, C F B. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales) remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandē basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandē inter se sunt æquales; Ac propterea Isosceliū triangulorū, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

c 4. prim

d 3. pron

e 4. primi.

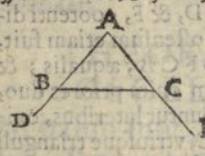
f 3. pron

SCHOLIVM.

HAEC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se æqua-

lia,

lia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus AB, AC, trianguli ABC, æqualibus, siue reliquum latus BC, ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Verumtamen, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, à quolibet percipietur, si modo memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem, quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.

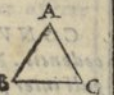


VERITAS porro huius theorematis, quoad vtramque partem, facile quoque demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, quæ producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, supra basim BC, inter se æquales esse, quam angulos DBC, ECB, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo ACB, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta AB, recta AC, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo posito, cadet recta AC, super rectam AB, ob æqualitatem, siue identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, [a] congruet, ac proinde tam illi, quam hi, inter se æquales erunt.

[a] 8. pron

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, a erunt duo anguli B, & C æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.

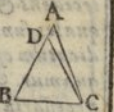


a 5. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo A B C, sint duo anguli ABC, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, b abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, quæ minor dicitur esse quam A B,) ducaturq. recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit vnum & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: c Erunt triangula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.



b 3. primi.

c 4. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic vero, si anguli ad basim sint æquales, latera quoque angulis illis opposita esse æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc vero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus. Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessarijs, quales sunt propositiones Geometricæ, potest interdum prædicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hæc propositio: (Omnis homo est animal.) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessarijs: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exempium tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figuræ cuiusuis rectilineæ vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodem quoque modo multæ aliæ propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, vt prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens, & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones,

quæ

quæ conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quinta propositionis, vt liquet. Sint enim triangulí A B C, tres anguli æquales Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, a erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.



a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.

Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta b abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim; c erunt & bases C D, B F, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothe-



b 3. primi.

c 4. primi.

sin,

[a] 3. pron *sin æqualibus;*[a] *remanebunt anguli F C D, DBF, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, BF, æqualia sunt lateribus F C, CD, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi FC, per constructionem, & B F, ipsi C D, vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus DBF, FCD, æquales, vt etiam*
[b] 4. primi. *fuit nuper demonstratum:*[b] *Erit angulus BDF, super basim DF, trianguli DBF, æqualis angulo CFD, super eandem basim FD, trianguli FCD. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli ADF,*
[c] 6. primi. *AFD, sint æquales, vt nunc ostendimus,*[c] *erunt latera AD, AF, æqualia. A quibus si rectæ BD, CF, per constructionem,*
[d] 3. pron *æquales demantur,*[d] *remanebunt AB, AC, latera trianguli ABC, æqualia. Quod erat ostendendum.*

THEOR. 4. PROPOS. 7.

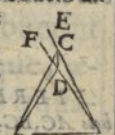
SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq. terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta AB, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis AC, BC, vtraque vtrique, nempe AC, ipsi A D, quæ eundem habent terminum A; & B C, ipsi BD, quæ eundem etiam terminũ possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ AC, AD, inter se, & rectæ BC, BD, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alteru tra rectarum AC, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam AC, vel BD, in ipsam BC, cadat; aut intra triangulum ABC; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum

A C,

AC, BC, nempe in AC, vt AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC, & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, vsque ad E, & F. Quoniã igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia [a] erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; [b] Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idem ergo angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem esse angulo CDE, & eidem æqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, vt altera lineatum posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum, vt ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia, [d] erunt anguli ACD, ADC, supra basim CD, æquales: Ac proinde [e] cum angulus ADC, minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor









[a] 5. primi.
[b] 9 pron
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.
[e] 9. pron



nor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rursus, cum in triangulo BDC, latera BC, BD, ponatur æqualia, [a] erunt anguli BCD, BDC, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum BCD, multo esse minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se AC, AD, & inter se quoque BC, BD. Quare super eadē recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 25. prim

SCHOLIVM.

FIERI potest, vt duæ lineæ AD. BD, æquales sint duabus AC, BC, vtraque vtrique, vt AD. ipsi BC, & B D, ipsi AC. vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ sunt æquales inter se, vt constat. Solæ enim AC, AD, eundem limitem possident A; Item BC. BD, eundem B; optimeq. demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, vt AC, AD, inter se sint æquales, ita vt BC, BD, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione apposita sunt hæc verba: eosdemq. terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse duæ lineæ simul sumptæ AD, BD, æquales duabus lineis AC, BC simul sumptis, vt in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse vtramque vtrique esse æqualem, &c.



Eadem ratione possunt ex A, & B, infra AB, basim trianguli ABC, hoc est, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, BD, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt AD, exiens è puncto A, æqualis sit ipsi AC; & BD, egrediēs ex B, æqualis ipsi BC, vt perspicuum est in apposita figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Denique esse poterunt duæ lineæ AC, AD, æquales inter se eundem terminum A, possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, vt re-

liquæ

liquæ duæ BC, BD, terminum habentes eundem B, inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratum. Appositè igitur dictum est in propositione: duabus eisdem rectis lineis alia duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt planè scopus Euclidi in hac propositione A proposítus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.



THEOR. 5. PROPOS. 8. viij.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, a neutra excedet altera, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cogitetur cadere super trian-

a 8. pron



gulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur

SCD LYON 1

æqualia; Ac propterea [a] angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocumque id contingat, hoc est, siue in latus ED, siue intra triangulum EDF, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuò EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA) æqualis ipsi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum [b] demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, termiuum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 8. pron

[b] 7. primi.

SCHOLIVM.

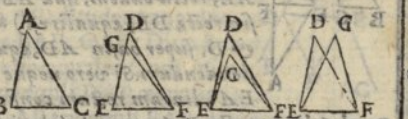
VT vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hãc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosq. reliquos hisce lateribus incluſos æquales.

SCD LYON 1

SIT enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusq. C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumq. A, angulo D.

Nam si basis basi superponatur, a congruent sibi mutuo extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea que omnia inter sese æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.



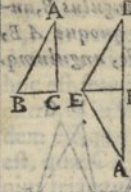
a 8. pro.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. imino totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

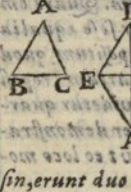
EX PROCLO.

PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis BC, basi EF, ita vt triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, constituunt vnam lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F. recti extiterint; aut non. Si constituant vnam lineam



a 5. pri.

D rectam, veluti DA, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia (est enim nunc AE, recta eadem, quæ AB, quæ per hypothesin recta DE, æqualis est) a erunt anguli A, & D, super basin AD, æquales, quod erat ostendendum. Si vero neque DF, FA, neq. DE, EA, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta DA, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidē accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo AED,

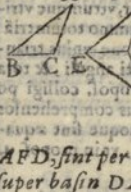


b 5. pri.

duo latera AE, DE, æqualia ponuntur, b erunt duo anguli EAD, EDA, æquales ad basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli FAD, FDA, super basin DA, æquales.

c 2. pron

Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, c fient toti anguli EAF, EDF, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta DA, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia, d erunt anguli EAD, EDA, æquales super basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, in triangulo AFD, sint per hypothesin æqualia, erit anguli FAD, FDA, super basin DA, æquales. His ergo à prioribus ablatis, e remanebunt anguli EAF, EDF, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.



d 5. pri.

e 3. pron

ix

PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT dividendus rectilineus angulus BAC, bifariam hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur

quod-

quodcunque punctum D, & rectæ AD, [a] secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducatur. recta DE. Deinde super DE, [b] constituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia, sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumque vtrique, quod DA, ipsi EA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est equilaterum: [c] Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuisus bifariam, quod erat faciendum.



[a] 3. pri.

[b] 1. pri.

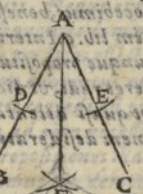
[c] 8. pri.

SCHOLIVM.

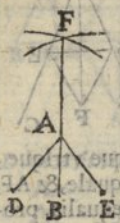
QVOD si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam secabitur, hoc modo. Ex cẽtro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (possis tamen ipsum variare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta AF, secabit angulũ BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum DAF, æqualem esse angulo EAF. Non describimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoq. praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus;



ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariatque confusionem.



QVOD si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, usque ad B, ducta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.

SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4 angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum vterque iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos æquales. Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuis autem Euclides vsquã, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales possit diuidi, quia id à nemine vsque ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdã linex curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quëcunque propositum in quotuis partes æquales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, oti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo proxim ipsum ad finem desideratum perueniat, hac animirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales. Ex A, centro describatur arcus circuli B C, ad quodcunq. interuallum, secans rectas AB, AC, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur



SCD LYON 1

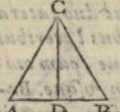
in tot partes æquales, in quot angulus propositus est diuidendus, vt in exemplo proposito in quinq. partes in punctis D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus BAC, in quinque æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint æqualia interualla BD, DE, &c. si ducantur rectæ BD, DE, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia duobus lateribus a *15. de fin.*
EA, AD, trianguli EAD, vtrumq. vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem BD, basi quoque DE, vt dictum fuit, æqualis b *8. pri.*
est: b Angulus igitur BAD, angulo EAD, æqualis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum EAD, angulo EAF, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ BD, DE, &c. acceptæ sunt omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod præxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales. Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad præxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur rectè esse per ipsas effectū, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda præxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad præxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum præxium; quemadmodum & in proxima præxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

X

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. [a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, [b] diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: [c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.



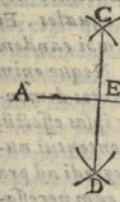
a 1. pri.

b 9. pri.

c 4. pri.

PRAXIS.

EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, describantur duo arcus, vnus superne, alter inferne; Et ex centro B, eadem interuallum omnino aliy duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta enim ducta C D, secabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera A C, C D, æqualia sunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & basis A D, basi B D, d erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C,

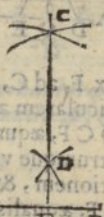


d 8. pri.

C E,

CE, utrumque utrique, & angulus ACE, angulo BCE, vt ostensum fuit; erit basis AE, basi BE, æqualis. 2 4. primi.

IAM verò si linea bifariam diuidenda posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in D, siue hoc fiat infra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, educta secabit rectam AB, bifariam in E.



SCHOLIVM.

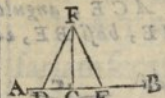
PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua verò ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vbertim trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longe facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varijs, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demõstrentur. Neque verò vnquam diuisione linea in plures, quã in duas partes æquales, ad eum locum vsque indigebimus.

PROBL. 6. PROPOS. 11. xj.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit AB; & in ea punctum C,

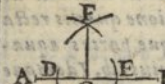
a quo



a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, [a] cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, [b] constituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumque vtrique, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea a puncto in ea data, &c. Quod faciendum erat.

a 3. pri.
b 1. pri.
c 8. pri.
d 10. def. fin.

PRAXIS.



EX puncto C, abscindantur vtrinque lineæ æquales C D, C E, & ex D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namque ducta F C, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur rectæ D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam lineæ perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctum datum C, extremum; protrahenhenda erit A C, in B, & sumenda æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque lineæ propositæ describantur tam superne, quam inferne duo arcus sese intersecantes in C, & D. Nam

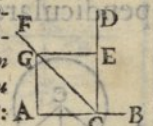
recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu æquales. Quod non aliter probabis, quam supra præxim, qua lineam in duas æquales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, æquales, quippe qui super æquales bases AE, BE, consistant, opponanturque æqualibus lateribus AC, BC, quæ ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.



EX PROCLO.

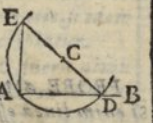
SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta AB, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis CD, vt docuit Euclides; & [a] abscindatur CE, æqualis ipsi AC: Deinde [b] diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta CF: Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur EG, perpendicularis ad CD, secans rectam CF, in G. Ducta enim recta GA, perpendicularis erit ad AB. Quoniam cum latera AC, CG, trianguli ACG, æqualia sint lateribus EC, CG, trianguli ECG, vtrũque vtriq., & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionẽ: [c] Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri CG, æquales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, [d] ideoq. AC, ad AB, perpendicularis.

[a] 3. primi.
[b] 9. primi.
[c] 4. primi.
[d] 10. def



SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem eri gemus ex puncto dato, siue extremũ illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea AB, punctumq. in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodo



recta AB, producta cum ipso non conueniat) interuallo vero accepto vsque ad A, describatur arcus circuli secans AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta EA, erit perpendicularis ad AB. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo DAE, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo linea, inuenies in scholio propos. 31. huius lib.

xij. ## PROBL. 7. PROPOS. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.



SIT recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans AB, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret) [a] Diuisa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem esse ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis CD, basi CE, æqualis, cum hæ sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare [b] erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.

[a] 10. primi.

[b] 8. primi.

SCHOLIVM.

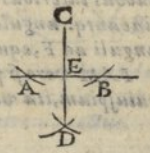
PROBE apposuit Euclides hanc particulam: infinitam. *Si enim linea esset finita, non posset semper à puncto dato ex-*

tra

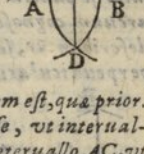
tra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset BE, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans BE, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad BE. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, non habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perdendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si BE, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam BA, productam in D, & E, &c.

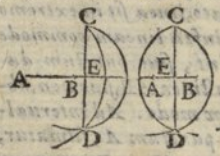
PRAXIS.

CENTRO facto C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq. interuallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta CD secans AB, in E, erit perpendicularis ad AB. Demonstratio huius operationis non differt à demonstratione tradita in praxi propositionis 10. Nam anguli ad E, erunt recti, cnempe inter se æquales. 24. primi.



IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vsque ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloq. vsque ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D; Eritq. ducta recta CD, secans AB, in E, perpendicularis ad AB. Demonstratio eadem est, qua prior.



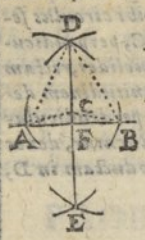


Non est autem necesse, vt interuallum BC, æquale sit interuallo AC, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.

QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ AB, ita agendū erit. Centro C, ad quoduis interuallum secetur recta AB, in

duobus

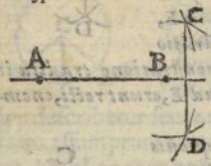
duobus punctis A, B. ex quibus ad maius interuallum quod cunque, quam AC, vel BC, bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta necessario per punctum F, transibit, perpendicularis erit ad rectam AB, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC. Quoniam duo latera DA, DC, trianguli ACD, duobus lateribus DB, DC, trianguli BCD, æqualia sunt, nec non & bases AC, BC, æquales sunt, [a] erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera DA, DF, triãguli ADF, duobus lateribus DB, DF, trianguli DBF, æqualia sint, contineantq. angulos ad D, æquales, vt ostendimus; [b] eruunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.



a 8. prim

b 4. primi.

IAM vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, fere in extremitate lineæ datæ AB, describantur duo arcus supra, & infra lineam AB, ad interuallum BC. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B. (Quo autem magis distabunt inter se puncta A & B, eo commodius puncta intersectionũ arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum AC, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam AB.



SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ AB, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum AC, vbicumque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam AB, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, se inter-

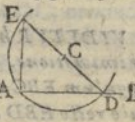


secantes

secantes in E. Recta namque ex E, per C, ducta secans AB, in F, perpendicularis erit ad AB, vt supra demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam AB.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam AB, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

VERVM hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura scholij propos. 11. sit ad rectam AB, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo linee. Ducta vtcunque recta ED, [a] secetur bifariam in C; & centro C, per E, arcus circuli describatur secans rectam datam in A. Quòd si non secet, producenda erit, donec ab arcu secetur. Recta enim EA, erit ad AB, perpendicularis; [b] cum angulus A, sit in semicirculo rectus.



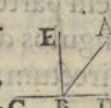
[a] 11. pri.

[b] 31. ter tij.

THEOR. 6. PROPOS. 13. xiij.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

RECTA linea AB, consistens super rectam CD, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, [c] erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [d] Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, vt sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, [e] æqualis est duobus angulis DBA, ABE; [f] erunt, appositio communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Rursus quia [g] angulus



[c] 10. def.

[d] 11. pri

[e] 19. prō 12. pron

[f] 19. prō

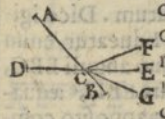
a 2. pronun. ABC, duobus angulis ABE, EBC, æqualis est; a erunt, apposito cõmuni angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos EBD, EBC; b1. pron. quæ autem eidem æqualia, b inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea super rectã consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

SCHOLIVM.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus ABC, superat rectum angulum EBC, eo reliquus angulus ABD, superatur ab angulo recto EBD. Nam sicut ibi excessus est angulus ABE, ita hic defectus est idem angulus ABE. Quocirca anguli ABC, ABD, duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

xiiij. ## THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



A D punctum C, lineæ rectæ AB, in diuersas partes ductæ sint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD, CE, inter se esse constitutas in directum, ita vt DCE, sit vna linea recta. Si enim non est recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra CE, vt sit re-

cta

cta DCF, aut infra CE, vt sit recta DCG. Si cadit supra, cum AC, consistat super rectam DCF, [a] fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; [b] & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales, Ablato igitur communi angulo ACD, [c] remanebunt anguli ACF, ACE, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta DC, producta cadet supra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea que, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

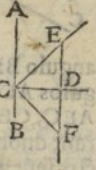
a 13. primi.
b 12. pronun.
c 3. pron

SCHOLIVM.

EST hæc propositio præcedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si DCE, sit recta, angulos ACD, ACE, duobus esse rectis æquales; In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac (& non ad easdem partes.) Quoniam vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod linea data ad easdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB datum. Ducatur CD, [d] perpendicularis ad AB, [e] diuidaturque rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD, [f] ducatur DE, perpendicularis ad CD, secans rectam CE, in E. Producta autem ED, ad partes D, [g] sumatur DF, æqualis rectæ DE. & ducatur recta FC. Quo-



d 11. primi.
e 9. primi.
f 11. primi.
g 3. primi.

SCD LYON 1

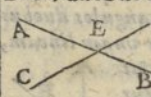
niam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia sunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumque vtrique, & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe recti; [a] erit basis EC, basi CF, æqualis, & angulus ECD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium est recti. (Est enim rectus ACD, diuisus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, facit angulum ACF, constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad easdem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB; æquales sunt duobus rectis: Et tamen CF, CE, non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad easdem.

[a] 4. primi.

XV. THEOR. 8. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, consistit super rectam AB, [b] erunt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE, super rectam CD, consistit, erunt eadē ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, [d] remanebit angulus AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC, CEB, [e] qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, [f] remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter se. Si igi-



[b] 13. primi.
[c] 12. pronun.
[d] 3. pron
[e] 13. primi.
[f] 3. pron

tur

tur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM. I.

EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium nō habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

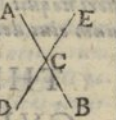
COROLLARIVM II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, a quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quotquot omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis. a 19. prō

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusq. signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

EX puncto C, rectæ AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo BCD; addito communi angulo BCE, b erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed c anguli ACE, ECB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duo-

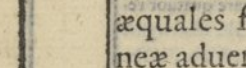


b 2. pron
c 13. pri

a 14. pri. bus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE, a erunt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæquintæ.

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ ductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales. Item duos BAC, DAE, inter se æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD. si æquales illis addantur anguli BAC, DAE, b erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli BAE, BAC, c aquales sunt duobus rectis; c atque adeo CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.

b 2. propun.

c 14. pri

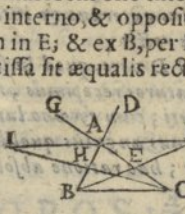
xvj. THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIAN-

SCD LYON 1

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno, & opposito ACB, itemq. maiorē interno, & opposito ABC. Diuidatur[a] enim AC, bifariam in E; & ex B, per E, extēdatur recta BEF, ita vt EF,[b] abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturq. recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, vtrumq. vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, [c] inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit[d] basis CB, æqualis basi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Est autem angulus DAC, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & opposito angulo ACB. Quod si latus CA, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H, extendaturq. recta CHI, vt HI, æqualis sit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum GAB, maiorem esse interno angulo, & opposito ABC; Est autem [e] angulus DAC, angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuo secent in A. Igitur & angulus DAC, maior erit interno & opposito angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, maior quoque ostēsus angulo interno & opposito ACB. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.



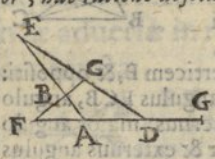
[a] 10. primi.
[b] 3. primi.
[c] 15. primi.
[d] 4 prim
[e] 15. pri

SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum DAC, maiorem esse angulo BAC, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet ACB, ABC, internorum, sibiq. oppositorum: quonium externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus. Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit in-

ternum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. per quam angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cum & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quilibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluemus.



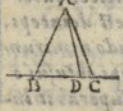
SIT figura quadrilatera ABCD, cuius angulus BAD, obtusus, & ABC, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ AB, DC, productæ ad partes B, & C, in puncto E, necnon & rectæ DA, CB, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum ADE, obtusangulum, & producta DA, versus A, ducatur ex quouis puncto E, ad AE, perpendicularis FB, secans latus DE, in C. Dico, si AD, producatur ad G, angulum externum CDG, maiorem esse quolibet triũ internorum BAD, ABC, BCD, sibi oppositorum. Cum enim ADE, triangulum sit, a erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursus cum DAB, obtusus maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipso ABC. Postremo, quia & in triangulo CDF, b angulus externus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, externum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis BAD, ABC. BCD. Quam obrem propositio hæc 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.

a 16. pri

b 16. pri

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam, eandemque lineã rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur latera AB, AC,



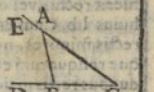
sunt

sunt æqualia, [a] *erunt anguli ACB, & ABC, æquales super basim BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt æqualia,* [b] *erũt anguli ADB, & ABD, super basim BD, æquales. Quare cũ uterque angulus ACD, & ADB, æqualis sit angulo ABC,* [c] *erit angulus ADB, æqualis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.*

a 5. pri.
b 5. pri.
c 1. pron

PROBL. 10. PROPOS. 17. xvij.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



Sit triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quæuis latera, nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur [d] angulus ABD, externus maior est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis angulus ABC, [e] erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB; [f] Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadé ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, [g] maior sit angulo CAB, interno, & opposito; [h] erunt, appositio communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo [i] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus BAE, [m] maior sit interno & opposito angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, [n] erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo [o] sint duobus rectis æquales, e-

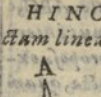
d 16. primi.
e 4. pron
f 13. primi.
g 16. primi.
h 4. pron
i 13. pri.
m 16. primi.
n 4. pron
o 13. pri.

runt

runt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum. a *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad BC, deduci possunt. Quod est propositum.*



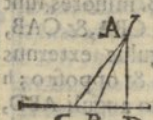
a 17. primi.

COROLLARIVM I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 16. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineã perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturq. ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat si fieri potest, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, ob usus & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis; a sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



b 17. primi.

COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isosceli supra basin, esse acutos. Nam c cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; d sintque simul tam illi duo, quã hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acu-

c 5. pri. d 17. pri.

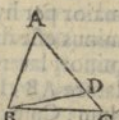
tus.

tus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

THEOREMA 11. PROPOS. 18. xix.

OMNIS trianguli maius latus, maiorem angulum subtendit.

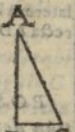
IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum a maiori latere AC, maiorem esse angulo ACB, qui a minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, [a] auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, [b] erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem [c] angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum [d] angulus totus ABC, maior adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, maius ponatur latere BC, ostendes angulum ABC, maiorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.



[a] 3. pri.
[b] 5. pri.
[c] 16. pri.
[d] 9. pron

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.



THEOR. 12. PROPOS. 19. xviij.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

IN

runt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum a 17. primi. *sint duo recti, quod est absurdum.* a *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad BC, deduci possunt. Quod est propositum.*

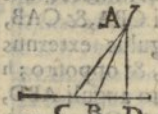


COROLLARIVM I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 16. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos æquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineã perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturq. ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat si fieri potest, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ABD, ob usus & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis; b sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



b 17. primi.

COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam c cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; d inde sequitur tam illi duo, quã hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acu-

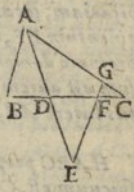
c 5. pri. d 17. pri.

tus.

dat; Latera illum angulum continentia, inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori.

TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusque segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse latere AB. Producatur enim AD, ad E, [a] vt sit DE, æqualis ipsi AD. Deinde ex maiori segmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori segmento DB, & per F, ex E, extendatur recta EFG. Quoniam igitur latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia sunt lateribus ED, DF, trianguli EDF, vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem & [b] anguli ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales: [c] Erunt bases AB, & EF, æquales, & angulus BAD, angulus FED, æqualis: Est vero & angulus CAD, angulo BAD, æqualis, per hypothesin: Igitur [d] anguli CAD, GEA, trianguli AGE, æquales erunt, [e] ideoque latera AG, EG, æqualia erunt. Est autem recta AC, maior quam AG: quare & AC, maior erit, quam EG. Et quia EG, maior est, quam EF, erit & AC, multo maior, quam EF. Cum igitur demonstratum sit rectam EF, æqualem esse rectæ AB, erit AC, latus maius latere AB, quod erat ostendendum.

[a] 3. pri.



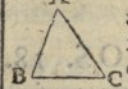
[b] 15. pri.
[c] 4. pri.
[d] 1. pron
[e] 6 pri.

HOC ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, maior sit angulo C. Dico latus AC, maius esse latere AB. Diuisa enim recta BC, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales) bifariam in D: ex A, per D, extenda tur recta ADE, [f] vt sit DE, æqualis ipsi AD: ducaturque recta BE. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus ED, DB, trianguli EDB, vtrumq. vtrique, per constructionem, & [g] sunt



[f] 3. pri.
[g] 15. pri.

autem



IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, maius non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si vero AC, minus esse dicatur latere AB, erit angulus B, subtensus a minori latere AC, minor angulo C, subtenso a maiore latere AB; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

[a] 5. pri.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, [b] sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare [c] maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.



[b] 17. pri.
[c] 19. pri.

EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq. angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diui-

SCD LYON 1

angulum BAC, bifariam, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC, maius esse segmento DB. Si enim non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale; producatur AD, ad E, a vt DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturque recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, vtrumque vtrique; AD, videlicet ipsi ED, per constructionem, & DB, ipsi DC, per hypothesin aduersarij. Sunt autē & b anguli ad D, dictis lateribus contēti æquales: c erit basis AB, basi EC, æqualis & angulo BAD, angulus CED. Positus autem est & angulo BAD angulus CAD, æqualis. Igitur & anguli CED, CAD, æquales erunt. d Ideoq. latus AC, lateri EC, æquale. Cum igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoque latus AB, e erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdum, quia AC, maius ponebatur, quam AB. Non erit igitur segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB, maius; erit per theorema Procli, latus AB, maius latere AC. Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur maius erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.

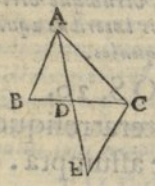
a 3. primi.

b 15. primi.

c 4. primi.

d 6. primi.

e 1. pro.



EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

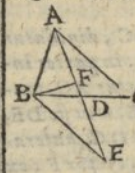
SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM recta AD, secans angulum BAC, bifariam diuidat quoque basin BC, in D, bifariam. Dico latera AB, AC, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus AC, æquale esse lateri AB, si DC, segmentum segmento

DB,

autem & anguli ADC, EDB, dictis comprehensi lateribus æquales: [a] Erunt bases AC, & BE, æquales, angulusq. ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur esse minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam BF, cadet BF, supra ED, eo quod angulus ABD, maior sit angulo EBD. Quia vero EF, [b] maior est, quam ED, & ED, posita est æqualis ipsi AD, erit EF, maior, quam AD [c]. Sed adhuc AD, maior est, quam AF. Multo igitur maior erit EF, quam AF. Itaque quia recta BF, diuidens angulum ABE, bifariam, secat basin AE, inæqualiter in F, estq. maius segmentum EF, minus autem AF; erit per theorema à Proclo proxime demonstratum, latus BE, maius latere AB. Ostensum est autem BE, æquale esse lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, maius erit. Quod erat demonstrandum.

a 4. primi.



b 9. pron

c 9. pron

SCHOLIVM.

HAEC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquidò constat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq. segmentum erit prope maius latus.

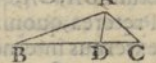
DVO latera AB, AC, trianguli ABC, sint inæqualia; AC, maius, & AB, minus. Recta autem AD, diuidens

angu-

iora, &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij demoastratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera AB, AC, trianguli ABC, maiora esse latere BC. Diuidatur angulus BAC, illis lateribus contentus [a] *bifariam per rectam AD. Quoniã igitur trianguli CDA, latus CD, protractum est ad B,* [b] *erit angulus exiernus BDA, maior interno & opposito CAD. Igitur & maior angulo BAD. Quare in triangulo ABD, latus AB, maiori angulo ADB, oppositum* [c] *maius erit latere BD, quod minori angulo BAD, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus AC, maius esse, quam CD, quia angulus CDA,* [d] *maior est angulo BAD, hoc est, angulo CAD, &c. Quamobrem duo latera AB, AC, maiora erunt latere BC. Eademq. est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*



[a] 9. pri.

[b] 16. pri

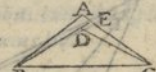
[c] 19. pri

[d] 16. pri.

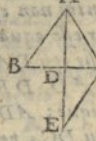
THEOR. 14. PROPOS. 21. xxj.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus lateribus BA, CA, simul; At vero angulum BDC, maiorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, [e] maiora sunt latere BE, si addatur com-



[e] 20. primi.



15. primi. DB, æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera AD, DB, æqualia sint lateribus ED, DC, [a] & anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales; [b] erunt bases AB, EC, æquales, & angulus CED, angulo BAD, hoc est, angulo CAD, æqualis. Quare [c] AC, æquale erit ipsi EC, hoc

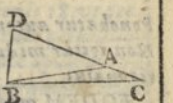
b 4. pri. c 6 pri. est, ipsi AB.

DEINDE sint latera AB, AC, æqualia, & recta AD, secans basin BC, in D, diuidat angulum BAC, bifariam Dico segmentum DC, æquale esse segmento DB. Cum enim latera AD, AB, æqualia sint lateribus, AD, AC, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin, [d] erunt bases ED, DC, æquales.

d 4. pri.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.



SIT triangulum ABC. Dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnum ex illis, vt CA, vsque ad D, [e] sitq. recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia inter se sunt, per constructionem, [f] erunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem angulo ABD, [g] maior angulus CBD. Igitur & angulus CBD, maior erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum maiori angulo CDB, [h] maius erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC, [i] fient tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo Quare omnis trianguli duo latera reliquo suut ma-

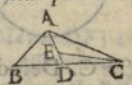
c 3. primi. f 5. primi. g 9. pron h 19. primi. i 2. pron.

iora,

Quare latus AD, [a] maius erit latere AB. Ex DA, [b] abscindatur recta DE, æqualis rectæ AB. Et reliqua linea AE, [c] bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur CF, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ CF, DF, intra triangulum maiores duobus lateribus BA, AC. Quoniam enim in triangulo AFC, duo latera AF, FC, [d] maiora sunt latere AC. Est autem recta AF, ipsi FE, æqualis, per constructionem; erunt CF, FE, maiores quoque latere CA. Si igitur æqualia addantur ED, & AB, fient rectæ CF, FD, [e] maiores lateribus CA, AB Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo rectæ duceretur, essent duæ rectæ constitutæ CF, BF, minores duobus lateribus CA, AB, vt Euclides demonstrauit.

[a] 19. primi.
[b] 3. primi.
[c] 10. primi.
[d] 20. primi.
[e] 4. prox.

RVRSVS sit triangulum scalenum ABC, cuius latus maximum BC, minimum AB. Ex BC, [f] auferatur BD, æqualis rectæ AB, & ducatur AD, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur CE. Constitutæ igitur erũt intra triangulum duæ lineæ CE, DE, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera AB, AC. Cum enim duo latera BA, BD, æqualia sint, [g] erunt duo anguli BAD, BDA, æquales: Sed BDA angulus [h] maior est angulo CED. Maior igitur erit & angulus BAD, angulo CED. Quare multo maior erit totus angulus BAC, angulo CED. Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.



[f] 3. primi.
[g] 5. pri.
[h] 16. pri.

VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

EX tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum con-

a 4. pron
b 20. pri
c 4. pron

mune EC,[a] erunt BA, AC, maiora, quam BE, EC. Rursus quia in triangulo CED, duo latera CE, ED, [b] maiora sunt latere CD; si commune apponatur DB,[c] erunt CE, EB, maiora, quam CD, DB. Ostensum vero iam fuit, AB, CA, maiora esse, quam BE, EC. Multo igitur maiora erunt BA, CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur.

d 16. pri

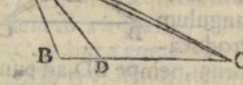
Præterea, quoniã angulus BDC,[d] maior est angulo DEC, externus interno; & angulus DEC, angulo BAC, maior quoque est, eandem ob causam. erit angulus BDC, multo maior angulo BAC; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Procla demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum ABC, obtusum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris BC, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus BA, AC. Ducatur enim recta DA: Et quoniam in triangulo ABD, duo anguli ABD, ADB, c *minores sunt duobus rectis. Ponitur autem ABD, maior recto, nempe obtusus; erit ADB, minor recto, ideoque minor angulo ABD.*



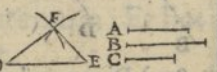
c 16. pri

Quare

rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem FD, æqualis; [a] erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat. a 1. pro.

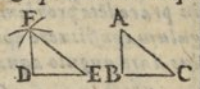
PRAXIS.

SVMATVR recta DE, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin. Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum interuallum C: DE, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.



SCHOLIVM.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq. & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas AB, BC, CA, quarum quælibet duæ b *maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam DE, æqualem vni lateri, nempe BC; & ex D, interuallo lateris AB, arcum describo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris CA, qui priorem secet in F, &c.*



b 20. primi.

PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

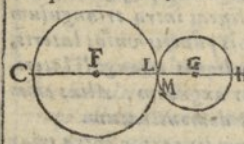
AD datam rectam lineam, datumq. in ea punctum, dato angulo rectilineo æqua-

ſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

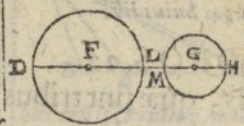
TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex propoſ. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora) oporteatq. conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta



a 3. primi. quauis DE, infinitæ magnitudinis a abſcindatur recta DF, æqualis rectæ A. Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus deſcribatur DIK. Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus deſcribatur HIK, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; ſi ex FE, ſumatur recta FL, æqualis ipſi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipſi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in



L, punctum, eſſent GL, FL, hoc eſt, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ FL, GM, hoc eſt, DF, GH, minores recta FG, quorum vtrumque eſt contra hypotheſin. Id quod ex appoſitis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta, F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C.



b 15. def. Cum enim recta FK, b æqualis ſit

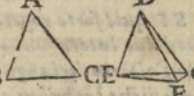
IC, CK, æqualia sint duobus GE, EH, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; a erunt anguli ICK, GEH, æquales. a 8.pri.

CAETERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.

THEOR: 15. PROPOS. 24. xxiiij.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera AB, AC, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Angulus vero A, maior sit angulo EDF. Dico basin BC, maiorem esse basi EF. Ad lineã enim D E, ad eiusque punctum D, b constituatur angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A) ponaturq. DG, æqualis ipsi DF, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta EG, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo EDG, per constructionem: d Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, D G, inter se sunt æqualia, e erunt anguli DFG, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, f maior angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur EFG

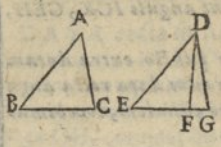


b 23.primi.

c 3.pri.

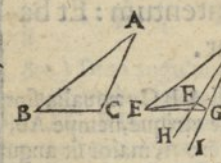
d 4.pri
e 5.pri.
f 9.prõ.

[a] 19.primi. a maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, quam EF. Quod est propositum.



CADAT deinde EG, in ipsam EF. Et quia rursus, vt prius, basis EG, [b] æqualis est basi BC: & [b] 4.pri. [c] 9.pron EG, [c] maior quam EF, erit & BC, maior, quam EF, quod est propositum.

CADAT tertio EG, infra EF, producanturque rectæ DF, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, [d] basis EG, basi BC, æqualis. Deinde quia duo latera DF, DG, æqualia sunt inter se, per cõstructionem, [e] erunt anguli [d] 4.pri. [e] 5.pri. [f] 9.pron



GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autẽ rursus angulus FGI, [f] maior angulo FGE. Igitur & angulus GFH, eodem angulo FGE, maior erit. Quare multò maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In triangulo ergo EFG, [g] maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque BC, basis basi EF. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum. [g] 19.primi.

SCHOLIVM.

SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorũ angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrũque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper

SCD LYON 1

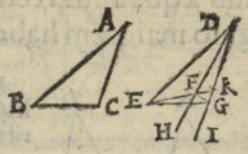
consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triangulum maiorē habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquādo maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo æquale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor est semper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui æqualis est per 4. propos. angulo ABC,) [a] minor sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidē angulus ABC, angulo DEF, æqualis, per 4. propos. At vero angulus ACB, minor est angulo DFE, cum angulus DFE, [b] maior sit angulo DGF. externus interno, & opposito; & angulus DGF, æqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem est angulo DEF, propterea quod angulus DEG. (æqualis existens per 4. propos. angulo ABC,) [c] maior est eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, minor est angulo DFE. Nam si recta EF, producatur secans rectam DG, in K, fiet angulus DFE, [d] maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. prop. æqualis est angulo ACB. Quod etiam constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ DF, EF, continēt angulum maiorē angulo DGE, quē exteriores lineæ DG, EG, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo æqualis.

[a] 29. pron

[b] 16. pri.

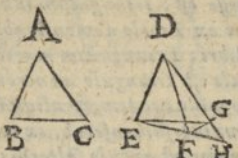
[c] 9. pron

[d] 16. primi.



[a] 17. primi.

QVONIAM verò in triangulo DEF, duo anguli E, F, [a] semper minores sunt duobus rectis, erit necessario saltē alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli D F E, in 2. vero & 3. ad partes anguli DEF.) fiat angulus EDG, aqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propos. dictum est, cadet semper ducta recta E G, supra punctum F. Nam cum angulus DFE, acutus sit, [b] erit ei deinceps, producto latere E F, obtusus. Producta ergo recta DG, secante latus EF, productum in H, [c] maior erit recta DH, latere DF, cum opponatur angulo obtuso in triangulo DFH; ac proinde recta E G, auferens D G, aqualem ipsi DF, cadet necessario supra F. Si namque vel per F, transiret, vel infra caderet, abscinderet ex DG, maiorem lineam latere DF; nimirum vel D H, vel maiorem, quam D H. Hoc si obseruetur, satis erit primus casus propositionis. qua fortassis causa fuit, vt Euclides apud Theonem primo casu contentus fuerit.



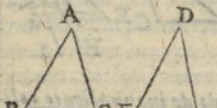
[b] 13. primi.

[c] 19. primi.

xxv.

THEOREMA 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrúque vtrique, hoc est, A B, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem B C, maior sit basē E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A,

maior

maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypothesin; [a] erit & basis BC, æqualis basi EF; quod est absurdum; Ponitur enim basis BC, basi EF, maior: Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatē laterum circa istos angulos, basis EF, [b] maior basi BC; quod magis est absurdum, cum EF, ponatur esse minor quam BC. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

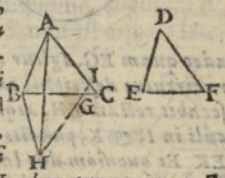
[a] 4. pri.

[b] 24. primi.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est precedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensū fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25 ab illis, quæ explicata sunt propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq. triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq. discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demōstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex basi maiore BC, [c] abscindatur recta BG, æqualis basi minori EF. Fiat quoque angulus GBH, [d] æqualis angulo DEF, [e] & sit BH, æqualis ipsi BA, atque adeo ipsi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoque recta per G, ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, æqualia sunt, [f] erunt anguli BAH, BHA, æquales. Rursus quia latera BG, BH, æqualia sunt lateribus EF, ED, vtrumque vtrique, & angulus GBH, æqualis an-

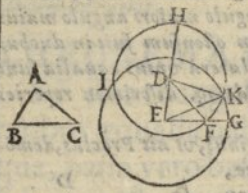


[c] 3. pri.
[d] 23. primi.
[e] 3. pri.
[f] 5. pri.

gulo

a 4. pri.. gulo DEF, per constructionem: a erit basis HG, basi DF, atque adeo ipsi AC, æqualis, angulusque GHB, angulo
b 9. pron EDF. Et quoniam recta HI, b maior est quam HG, quæ est
c 9. pron ostensa æqualis ipsi AC, erit quoque maior HI, quam AC:
d 18. pri. Sed AC, c maior est adhuc, quam AI. Multo ergo maior erit HI, quam AI. Quare angulus IAH, d maior erit an-
e 4. pron gulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui ostensi sunt æquales, fiet e totus angulus BAC, toto angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod est propositum. Quòd si quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli æquales BAH, BHA, &c. vt reliquus fiat angulus BAC, maior reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perspicuum est.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor EF, ad G, vt sit EG, f æqualis basi maiori BC. Deinde
f 3. pri. centro D, interuallo autem DF, describatur circulus, producaturq. ED, ad H, in circunferentiam. Quoniã igitur DH,
g 15. def fin. est æqualis ipsi DF, erit quoque DH, æqualis ipsi AC. Additis igitur æqualibus DE, AB,
h 2. pron h fient AC, AB, simul æquales toti HE: Sed AC, AB, i simul
i 20. pri. maiores sunt, quam BC, atque adeo quam EG. Igitur & HE, maior erit, quam EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo EG, intersecabit rectam EH, atque adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur rectæ DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, æqualia sunt duobus lateribus DE, DK, vtrumque vtrique, (est enim DK, æquale ipsi DF, per definitionem circuli: DF, autem positũ est æquale lateri AC.) & basis BC, basi EK, æqualis: (cum EK æqualis sit ipsi EG, per definitionem circuli: EG, vero recta per constructionem facta sit æqualis basi BC.)



Erit

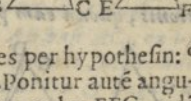
[a] *Erit angulus BAC, angulo EDK, æqualis: Sed angulus EDK, maior est* [b] *angulo EDF. Quare et angulus A, angulo EDF, maior existet. Quod est propositū. Atq. hac demonstratio generalior est priore, cum omnibus casibus conueniat.*

[a] 8. pri.
[b] 9. pron

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvj.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint. vtrumque vtrique, vnumq. latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterq. vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoq. latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, vtrumq. vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumq. angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, maius, a quo [c] abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturq. recta GF. Quoniã igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, vtriq. vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: [d] Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autē angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidē angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed



[c] 3. pri.
[d] 4. pri.

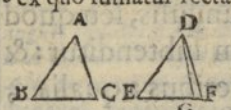
æquale

æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; a erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

a 4. primi.

SINT deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus EF, FD, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumq. angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit EF, maius; b ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturq. recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; c Erit angulus C, angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. d Est enim maior. Non ergo est latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

b 3. primi.



c 4. prim

d 16 primi.

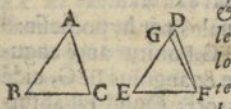
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, vt ostensum fuit, continebunt q. ex hypothesi angulos æquales B, E, e erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

e 4. pri.

SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium BC, EF, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trian-

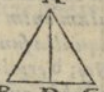


guli

guli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumq. angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quem modum eo loco monuimus.

HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessariũ, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensq. vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si vero basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, diuidatq. primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam AD, esse ad BC, perpendicularem, secareq. basin BC, bifariam. Cum enim duo latera AB, AD, duobus lateribus AC, AD, sint æqualia, angulosq. æquales contineant, ex hypothesi, [a] erunt & bases BD, CD, æquales, & anguli ad D, atque adeo recti. [a 4. primi.]

DIVIDAT deinde recta AD, basin EC, bifariam. Dico rectam AD, ad EC, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sint, & basis AB, basi AC, ex hypothesi, [b] erunt quoque anguli ad D, æquales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt. [b 8. primi.]

SED iam recta AD, sit ad BC, perpendicularis. Dico & basim BC, & angulum A, secari bifariam. [c] Erunt enim [c 5. primi.]

anguli

anguli B,C, supra basin BC, æquales. Itaque quoniam duo anguli D,B, trianguli ABD, duobus angulis D,C, trianguli ACD, æquales sunt, vterque vtrique, latusq. AD, æqualibus oppositum angulis B,C, commune; [a] erunt & reliqua latera BD,CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrandum.

a 26. primi.

SED & hoc theorema verum est.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuiditvel basim,vel angulum bifariam,habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur:si vero angulus bifariam secetur,basis quoque diuidetur bifariam.

IN eodem triangulo ABC, sit AD, ad BC, perpendicularis, diuidatq. primum basin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, esse æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera BD,DA, duobus lateribus CD,DA, æqualia sunt, angulosq. comprehendunt æquales, nempe rectos; [b] erunt quoque & bases AB, AC, & anguli ad A, æquales. quod est primum.

b 4. pri.

SECET deinde perpendicularis AD, angulum A, bifariam. Dico & latera AB,AC, æqualia esse, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D,A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales sunt, latusque AD, illis adiacens, commune; [c] erunt quoque & latera AB,AC, & latera BD,CD, æqualia. Quod est secundum.

26. pri

xxvij. THEOR. 18. PROPOS. 27.

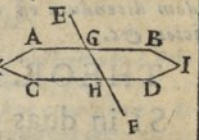
SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se

fecerit:

SCD LYON 1

fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

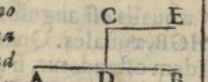
IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta CD, vsque ad punctũ I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; [a] quoniam externus interno maior est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno, & opposito AGH, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonstrabitur, lineas AB, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 16. pri

SCHOLIVM.

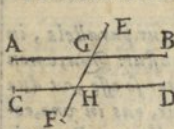
NECESSE est, vt lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano. vt ex definitione constat: Quare non satis est, duos angulos alternos æquales inter se esse, vt duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in vno, eodemq. existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in subiecto plano existit; & ex C, in alio plano, ad CD, ducatur alia perpendicularis C E, ita vt punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuum est, rectam CD, incidentem in rectas CE, AB, facere duos angulos ECD, ADC, al-



ternos æquales, cum sint recti; & tamen CE, AB, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem, in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, vt supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro, & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis, quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

xxviij. **THEOR. 19. PROPOS. 28.**

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur angulus GHC; & eidem angulo EGA, [a] æqualis est angulus HGB; [b] erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD, [c] parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

a 15. primi.
b 1. pron
c 27. pri

DEINDE faciat recta EF, angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales

ponun-

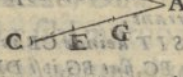
ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, [a] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & opposito ad easdem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. primi.

SCHOLIVM.

IAMDVDVM pronunciatum tertium decimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

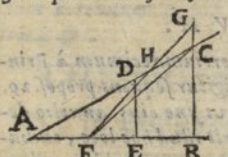
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectas lineas AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spa-

tio distarent, augeri posset eorum distantia; igitur & lineæ ipsæ vltra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinitè iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ AB, AC, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, quam F, & G, Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in rectam AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à recta AB, metientur, cum sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum, vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico CB, maiorem esse, quam DE; ac proinde plus distare rectam AC, à recta AB, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est maior, quam DE, erit vel æqualis, vel minor: Sit primum æqualis, & rectæ AE, abscindatur æqualis BF, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq. recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, vtpote rectos: [a] erunt & bases AD, FC, & anguli DAE, CFB, inter se æquales. Igitur externus angulus CFB, interno DAE, æqualis erit; [b] quod est absurdum. Vel cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit, [c] parallelæ erunt AC, FC, quod etiam absurdum est, cum in C, concurrant.



SIT deinde CB, minor quam DE, si fieri potest, & producta BC, fiat BG, ipsi DE, æqualis, iungaturq. recta FG. Quia igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, puta rectos; [d] erunt & bases AD, FG, &

[a] 4. primi.
[b] 16. primi.
[c] 27. primi.
[d] 4 pri.

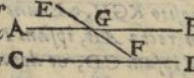
anguli

SCD LYON 1

anguli EAD, BFG, inter se æquales. Igitur externus angulus BFG. interno EAD, æqualis erit, quod est absurdum. Vel cum externus angulus BFG, interno EAD, æqualis sit, 2 27. primi.
erunt AC, FG, inter se parallelæ, quod absurdum est, cum se mutuo secent in H. Quocirca BC, ipsa ED, maior erit, cum neque æqualis, neque minor esse possit, vt demonstratum est.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiusmodi est.

SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

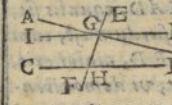


SINT duæ parallelæ AB, CD, & recta EF, secet ipsam AB, in G. Dico & rectam EF, si producatur, secturam esse quoque ipsam CD. Quoniam duæ rectæ GB, GF, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinite, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela AB, à parallela CD, distat, cum hac distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia GB, à GF, maior iam fuerit ea, qua inter parallelas est, necesse est rectam GF, productam secuisse rectam CD. Nam quamdiu GF, continebitur inter duas parallelas, minori distantia à GB, remouebitur, quam CD, ab eadem GB, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq. partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

IN rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos

angulos ad partes E, & D, vt BGH, DHG, duobus rectis minores. Dico rectas AB, CD, coire ad eandem partes B, & D. Quoniã enim duo anguli BGH, DHG, minores ponuntur esse duobus rectis: Sunt autẽ duo anguli DHG, DHF, a duobus rectis æquales: Erũt duo ãguli DHG, DHF, maiores duobus angulis DHG, BGH. Ablato ergo communi angulo DHG, remanebit angulus DHF, b maior angulo BGH. Si igitur ad rectam FG, & ad punctum G, c constituatur angulus KGH, æqualis angulo DHF, cadet GK, supra GB, d secabitq. productã rectam AB. Quoniam igitur in duas rectas IK, CD, recta incidens EF, facit angulum externum DHF, æqualem interno, & oppositò KGH, e Erunt recta IK, CD, parallelæ. Secat autem recta AB, ipsam IK, in G. Producta igitur secabit quoque ipsam CD, vt demonstratum est. Quare AB, cum CD, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum.



a 13. primi.

b 5. prop. c 23. primi.

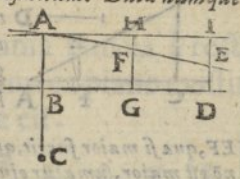
d 11. prõ.

e 28. primi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertium-decimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æque dubium, & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuo fiunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quòd dari possint in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum ambæ producantur.

quorum

quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc vero à Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos supra demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia datam quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namque sit recta AB. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum nunquam æqualem esse rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim

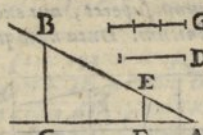


recta AB, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, describatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum linea, quæ rectæ BD, siat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, [a] quæ ipsi BD, parallela erit. Postremo ex duobus punctis HI, vtcunque in recta AI, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID, [b] quæ parallelæ, [c] atque adeo æquales inter se erunt, angulosque [d] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propos. 29. huius lib. vbi primum vsus illius apparere incipit, vti vere à nobis mox ante propos. 29. demonstrabitur. Itaque quoniam FG, maior est, quam ED, vt Nicomedes demonstrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter se distant lineæ AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H,

[a] 28. primi.
[b] 28. primi.
[c] 34. primi.
[d] 29 primi.

F ; atque ita semper ea probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quam recta AB, hoc est, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea AE. ad rectam BD, numquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

SCIO principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant dua rectæ AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si verò nõ est maior, sumatur eius multiplex proxime maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D.



a 4. sexti. b 28. primi.

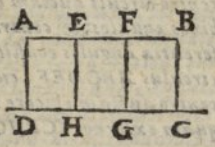
Quoniam enim a est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF. (quod ex coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, similia sunt, ob rectas BC, EF, quæ b parallelæ sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cum ergo BC, & G, æque multiplices sint ipsius EF, ipsæ erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. quod est propositum.

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus

ex ijs solum, quæ ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Axe enim propos. 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixe illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoque sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessario, multo tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione excluſa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

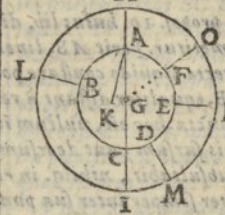
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ AB, à recta DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquido constare potest, Nam si omnia puncta lineæ AB, æqualiter distant à recta DC, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea puncti intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilq. in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta DC, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque vero cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa pla-

no existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, vna cum ijs, quæ vsque ad propos. 29. huius lib. estę sa sunt, Axioma 13. demonstrabimus, adeo clarũ, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sanæ mentis illud negare possit. Aut certe citrà omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 13. Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, propterea quæ recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binos æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus ABCDEF, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex centro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se æquales. Producta enim



IG, vsque ad A, si semicirculus ABC, circa diametrum AC, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Quod si quis dicat, vnũ semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G, secans vtramq. circunferentiam, colligendumque partem toti esse æqualem, nimirum semidiametrum vsque ad interiorem circunferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circunferentiam ductæ. quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruent,

ac

ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quæ ex proximè demonstratis angulos GAB, GAF, constituet æquales. Non ergo æquales sunt KAB, KAF. Quod est contra hypothesin.

HOC ostenso, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF, omniaq. eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq. angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt HA, LB, IC, MD, NE, OF. Hæ enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant[a] erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratū est ab Eucl. propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 29. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeo eorum distantias à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, esse circularem. Cum.n. omnes illæ, vt proxime ostendimus, per centrum G, transeant: si æqualibus HA, OF, addantur æquales AG, FG, erunt totæ HG, OG, æquales: eademq. ratione omnes aliæ ex linea inflexa HLIMNO, ad G, ductæ æquales erunt & rectis HG, OG, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum: videlicet.

II.

SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremū lineam quoque rectam.

VT si in priore figura recta AD, ad DC, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam DC, constituens

cum

cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoque lineam, nempe AB. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus; propterea quod omnia puncta lineæ AB, descriptæ æqualiter à rectæ DC, distant, nimirum per rectam AD. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa iaceant, quippe cum nullum eorum magis aut minus a recta CD, abscedat sursum, aut deorsum vergendo, quam aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quæ ad definitionem lineæ rectæ scripsimus. Cum enim duo puncta D, A similibus prorsus motibus ferantur, (quod recta AD, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, æque velociter incedant, æqualiterq. semper inter se distent.) describent vtique lineæ similes, vt in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D, rectam DC, describat, erit quoque linea AB, quam punctum A, describit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atque illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, æquabilemque motū vtriusque puncti extremi. Est principium hoc æque clarum, & euidens, atque antecedens.

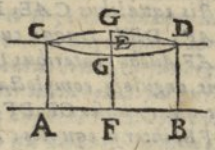
CONTINGIT autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circularē in transuersum fluens æquabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari æquales semper angulos non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineā altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineæ subiectæ, à qua æqualiter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodū linea recta AD, super rectā DC, in transuersum fluens æquabiliter, cōstituens nimirū cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos, ita vt nusquā declinet, huc atq. illuc deflectendo, aut titubando, lineā rectā AB, altero extremo A, delineat. adeo vt linea descripta AB, naturam induat rectæ lineæ subiectæ DC, a qua æqualiter sem

per

per recedit. Rectam autem, quæ super lineam circularem in transuersum fluit æquabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta H A, in transuersum super peripheriam ABCDEF, æquabiliter, faciens semper in extremo A, cũ ea angulos æquales. Dico lineã HLI MNO, ab altero extremo H, descriptam esse quoque circularem. Cum enim recta H A, in omni situ motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria ABCDEF, fit vt ea producta in centrum G, cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis æqualibus HA, OF, ad rectas æquales AG, FG, fient totæ rectæ H G, OG, & omnes aliæ, inter se æquales: ac propterea ex defin. circuli HLI MNO, circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineę erigantur inter se ęquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



SINT ad rectam A B, erecta duæ perpendiculares AC, BD, inter se æquales: Et ducta recta CD, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad AB, perpendicularis EF. Dico EF, vtrique A C, B D, esse æqualem. Si namque æqualis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo æquali FG, si intelligatur recta AC, moueri in transuersum per rectam AB,

faciens

faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C, lineam rectam per G, transeuntem, vt supra ostensum est, qualis est CGD. Duæ ergo rectæ CED, CGD, superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est EF, vtrique AC, BD. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

IIII.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraq. perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq. recta CD. Dico vtrumque angulum C, D, rectum esse. Secta namque recta AB, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iungaturq. recta AF, BF. Quoniam igitur duo latera AE, EF, trianguli AEF, duobus lateribus BE, EF, trianguli BEF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, puta rectos, a erunt quoq. & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quam AFE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF. Itaque cum duo latera CA, AF, trianguli CAF, duobus lateribus DB, BF, trianguli DBF, æqualia sint, angulosq. complectantur æquales, vt ostendimus, b erūt quoque & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quam CFA, DFB, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis CFA, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti. Quia vero perpendicularis EF, vtrique AC, BD, æqualis est, vt proxi



a 4. pri.

b 4. pri.

mo

SCD LYON 1

ma theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter se æquales. Quare, vt de angulis C, D, proxime probatum est, anguli C, & EFC, æquales inter se erunt. Est autem EFC, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, æqualis.

CAETERVM angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmisso.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus semper inter se distabunt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.



RECTA linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulũ ABD, rectum. & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minus semper inter se distare versus C, D, productas, magis vero, si versus E, F, producantur. [a] *Ducatur enim ex B, ad AC, perpendicularis BG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli BAC, cadet. ac propterea angulus GBD, pars recti anguli ABD, acutus erit. Demissa ergo ex G, ad BD, perpendicularis GH, cadet quoque ad partes anguli acuti GBD, ex eodem coroll. angulusq. propterea HGC, pars recti anguli BGC, acutus erit. Rursus ergo ducta perpendicularis HI, ad AC, per idem coroll. ad partes acuti anguli HGC, cadet, ideoq. angulus IHD, pars recti anguli GHD, acutus erit. Atque ita deinceps in infinitum, si ex I, ad BD, perpendicularis IK, ducatur, & ex K, perpendicularis KC, ad AC, & ex C, ad BD, perpendicularis CD, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum*

[a] 12. primi.

vna

vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo ABG, angulus BAG, acutus est, & AGB, rectus [a] erit recta AB, maior quam BG: & in triangulo BGH, recta BG, angulo recto GHB, oppositа, maior quam GH; & in triangulo GHI, recta GH, maior quam HI: Atque ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ipsi AB, propiores sunt, maiores ijs, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium. Quapropter recta AC, in G, minus distabit à recta BD, quam in A, & in I, minus quam in G, & in C, minus quam in I, &c. quandoquidem perpendiculares AB, GH, IK, CD, &c. quæ ordinatim decrescunt, vt ostendimus minimæ sunt omnium a punctis A, G, I, C, in rectam BD, cadentium, vt ex coroll. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum distantias ab eadem recta BD, metiuntur. Constat ergo, rectas AC, BD, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter se distantes. quod est primum.

[a] 19. pri.

DVCATVR rursus [b] ex A, ad AC, perpendicularis AL, quæ angulū obtusum BAE, partietur in rectum EAL, & acutum LAE, hoc est, cadet inter AB, & AE; eritq. angulus ALB, acutus, cum ambo ABL, ALB, [c] sint duobus rectis minores, atq. ABL, rectus sit: ac proinde angulus ALF, obtusus erit. Eadem ratione perpendicularis LM, ex L, ad BF, ducta cadet inter LA, LF, facietque angulum LMA, acutum, & LME, obtusum: Item perpendicularis MN, ex M, ad AE, erecta cadet inter ML, ME, angulumque MNB, acutum, & MNF, obtusum constituet. Atque ita deinceps in infinitum, si ex N, ad BF, perpendicularis erigatur NO, & ex O, ad AE, perpendicularis OP, & ex P, ad BF, perpendicularis PE, & ex E, ad AE, perpendicularis EF, &c. diuident omnes sigillatim angulos obtusos, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo ABL, angulus ABL, rectus est, & ALB, acutus [d] erit AL, recta maior, quam AB, & in triangulo ALM, recta LM, angulo recto LAM, oppositа, maior quam AL; atque in triangulo LMN, recta MN, recto angulo MLN, oppositа, maior quam ML: atque ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ab AB, longius absunt, maiores ijs, quæ propinquiores sunt, in infinitum. Quamobrem recta

[b] 11. pri.

[c] 17. pri.

[d] 19. pri.

AE,

AE, in M, magis à recta BF, distabit, quam in A, & in O, magis, quam in M, & in E, magis, quam in O, &c. quandoquidem perpendiculares AB, ML, ON, EP, &c. quas ordinatim augeri ostensum fuit, minimæ sunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam BF, cadentium, &c. Liquido ergo constat, rectas AC, BD, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter se distantes, quod est secundum. Quod si proteruus quispiam vellet contendere, rectam AL, quæ ad AC, perpendicularis est, non concurrere cum DB, productæ; constabit multo magis id, quod demonstrandum proponitur. Nam linea DB, vltra punctum B, multo magis à recta CA distabit, quam in puncto B, quandoquidem AL, ad AC, perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum DB, cum tamen GB, ad eandem AC, perpendicularis cum DB, concurrat in B, &c.

HAEC cum ita sint, nullo negotio demonstrabimus, in superiori figura angulos C, D, esse rectos. Nam si angulus C, verbi gratia, non dicatur esse rectus, erit vel acutus, vel obtusus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta CA, in rectas AB, CD, incidens efficit angulum CAB, rectum, & C, acutum, minus semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc est, perpendiculares ex CD, in AB, demissæ ordinatim minores fient, quam CA, vt proxime demonstratum est. Minor ergo est perpendicularis DB, quam CA, quod est absurdum, cum ponatur æqualis. Non igitur acutus est angulus C. Eademq. ratione neque angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtusus. Quia igitur recta CA, in rectas CD, AB, incidens facit angulum CAB, rectum, & B, obtusum, magis semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc est, perpendiculares ex CD, in AB, demissæ continenter augebuntur, vt proximè ostendimus. Maior ergo est perpendicularis DB, quàm CA, quod est absurdum, cum æqualis ponatur. Non igitur obtusus est angulus C. Eademq. ratione neque angulus D, obtusus erit. Sed neque acutus est ostensus. Rectus igitur vterque est, quod erat ostendendum.

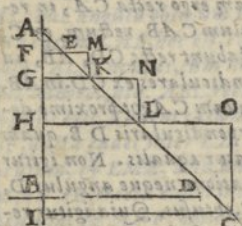
EX his demonstratis, facile iam Axioma 13. demonstrabimus hoc modo.

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq. partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

HOC est Axioma 13. apud Euclidem in nostris commentarijs; apud alios est vndecimum, quod demonstrandum suscepimus. Incidens ergo recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, ad easdemq. partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta AC, punctoquolibet E, [a] *ducatur ex eo ad rectam AB, perpendicularis EF, & rectæ AF, æqualis accipiatur FG, & GH, æqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita vt AG, ipsius AF, & AH, ipsius AG, & AI, ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si recta AF, abscindatur continue æquales rectæ ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finitæ rectæ AB, per continuam ablationem vnius eiusdemq. quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari potest, (quod sit sumendo ipsi in AB, continenter partes æquales) vt tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inæqualibus proportionem inter se habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit vt multo magis, si ipsi AF, æqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, æqualis auferatur GH: Item toti AH, non autem soli AF, vel*

a 12. primi.



AG,

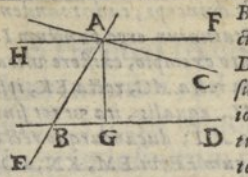
AG, æqualis demetur HI, & sic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, æqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot in recta AI; ducanturque rectæ KG, LH, CI, producanturq. vna cum FF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur MK, NL, OC. Itaque quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem æqualia sunt, vtrumque vtrique, [a] angulosq. ad verticem E, continent æquales, [b] erit & basis MK, basi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, [c] æquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad FM, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione, [d] angulosq. comprehendunt æquales ad K, verticem, [e] erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ IC, BD, [g] parallelæ sunt: ac propterea BD, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum.

[a] 15. primi.
[b] 4. primi.
[c] 1. pron
[d] 15. primi.
[e] 4. pri.
[f] 1. pron
[g] 28. primi.

SIT deinde neuter angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis ponuntur minores; [h] sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo

[h] 13. pri.

SCD LYON 1



[a] 23. pri

BAC. [a] Constituatur in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Cadetq. recta AF, supra rectam AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, constituat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno

[b] 28. pri

BAF, ex eadem parte opposito æqualis est, [b] erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad BD,

[c] 12. pri

[c] perpendicularis AG, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritq. angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum: ac proinde, vt proxime demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensæ enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proxime demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, B, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, vt proxime demonstrauimus. Si igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum. Quòd si quando accidat, rectam AC, existere inter AB, & perpendicularē AG, liquido constat, rectas AC, BD, coire, quòd tunc AC, basem BG, trianguli ABG, secaret. Quod vt facilius capias, ducere poteris rectam AC, inter AB, AG.

QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optime à nobis demonstratum sit tertium decimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus

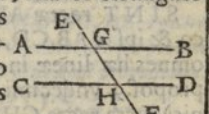
propo-

propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

IN parallelas rectas lineas recta incidēs linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas A B, C D, recta incidat EF. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo DHG, si addatur communis angulus BGH,[a] erunt duo AGH, BGH, maiores duobus D H G, B G H: At duo AGH, B G H, [b] æquales sunt duobus rectis. Igitur duo DHG, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes, B, & D, [c] coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus AG H, maior angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.



[a] 4. pron
[b] 13 pri.
[c] 13. pron nun.

DICO secundò, angulum externum AGE, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis est alternus CHG, vt ostensum est; & eidem B G H, [d] æqualis est angulus AGE. Erunt anguli AGE, CHG, [e] inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse angulo DHG.

[d] 15. pri.
[e] 1. pron.

DICO tertiò, angulos internos ad easdē partes, AGH,

CHG, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo
[a] 2.pron CHE, interno; si addatur communis AGH, [a] erunt duo
[b] 13.pri. AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, [b] æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

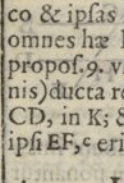
SCHOLIVM.

XXX. *CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo præcedenti a theoremata, vt perspicuum est.*

THEOR. 21. PROPOS. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniã enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela
[c] 29.pri mi. ipsi EF, [c] erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, [d] erit angulus DKI, eidem angulo FLI, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, [e] æquales inter se quoque erunt. Cum igitur sint alterni, [f] erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineę parallelæ, & inter se sunt parallelæ.
[d] 29.pri mi.
[e] 1.pron.
[f] 27.pri.



Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

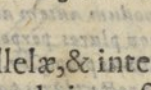
QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantũ

vnius

vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quas libet parallelas infinite esse productas; Constat autem AI. productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.

QVAE eidē rectę lineę parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemq. lineā constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, secās DE, in F, vtcūque. Quoniam igitur AB, DE, sunt parallelæ, [a] erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo cōmuni angulo CAF, [b] erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo [c] æquales sunt duobus rectis, cū sint interni inter duas parallelas AC, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erūt rectis æquales; ac propterea [d] in rectū erūt constitutæ ipsæ AB, AC. Quod est propositum.

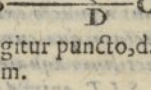


[a] 29 primi.
[b] 2. pron
[c] 29. primi.
[d] 14. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, [c] æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionē, [f] Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.



[c] 23. primi.
[f] 27. pri.

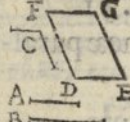
SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco situ extra lineam datam, vt hæc producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione

problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea faciẽs angulum aliquem cũ linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq. puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallelæ, quam vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod
a 30. primi. est absurdum, a cum sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.

EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23 continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq. angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim datæ rectæ A, B, oporteatque constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraque circa illum angulum rectis
b 23. primi. A, B, æqualia. Sumpta recta DE, quæ rectæ A, sit æqualis, b
c 3. pri. fiat angulus EDF, angulo C, c & rectæ DF,
d 31. primi. rectæ B, æqualis. Deinde per E, d agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta FG, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione; c parallelogrammum erit DEGF. Quod cum
c 35. de fin. ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia, factum erit, quod proponitur.

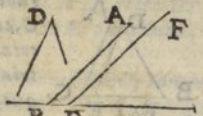


PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus a puncto extra datam rectam lineam proposito lineæ rectæ, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. polliciti sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteatq. ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, quæ cũ ea angulum dato angulo D, æqualẽ comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea

BC,

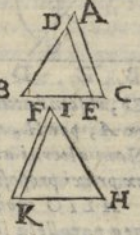
BC, [a] constituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur rectæ EF, per datum punctum A, transeat, factũ erit, quod iubetur. Si vero non transeat per A, [b] ducatur per A, recta AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualẽ esse. Cum enim parallelæ sint, AB, EF, [c] erit angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte oppositio æqualis. Cũ ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis, [d] æquales inter se erunt anguli ABC, & D. quod est propositum.



a 23. primi.
b 31. primi.
c 29. primi.
d 1 prõ.

NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, recte Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterũ in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certe subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum ABC, sintque latera AB, AC, latere BC, maiora. Abscindatur BD, æqualis ipsi BC, [c] ducaturq. DE, ipsi AC, parallela, [f] eritque angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales sunt, vterque vtrique, latus q. BC, lateri DB, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim BE, minus, quam BC, atque adeo neque lateri AC, neque lateri AB, æquale esse potest; quod hæc latera maiora ponantur latere BC. Causa huius rei est, quod latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis est.

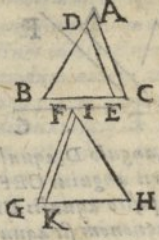


c 31. pri. f 29. pri.

SIT rursus triangulum FGH, sintque iterum latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius quam FG. Abscindatur HI, ipsi FG, æqualis, [g] ducaturque IK, ipsi FG, parallelæ-

g 31. pri

a 29. primi.

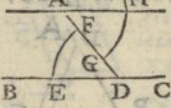


rallela: a eritq. angulus H K I, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli F G H, duobus angulis H, K, trianguli I K H, æquales, vterque vtrique, latusq. FG, lateri IH, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim HK, minus, quam HG, atque adeo neque lateri HG, neque lateri FH, æquale esse potest; quod latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei est, quod latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K; in triangulo IKH, qui non ponitur æqualis angulo H, sed angulo G, est æqualis, b qui maior est angulo H, propterea quod latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

b 18. primi.

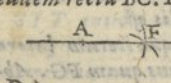
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad BC, & ex D, & A. ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, c erit hæc parallela ipsi BC. Nam alterni anguli EDF, HAG, sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.



c 27 primi.

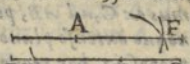
ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela lineæ datæ BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta BC. Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Nam ducta recta AF, erit parallela rectæ BC. Quoniam enim propter idem interuallum assumptum



recta

recta AF, æqualis est rectæ DE; & rectæ AD, rectæ EF, si ducerentur hæ lineæ; erit AF, oppositæ DE, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.

QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectæ BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quod tamen aliquantulum distet à puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta namque ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, æqualis est rectæ DE, ob idem interuallum; & recta AD, rectæ EF, si hæ rectæ ductæ essent, &c.



SED longe facillimam rationem ducendi parallelam alicui lineæ per datum punctum tradidimus in nostro Astrolabio lib. 1. lemmate 4.

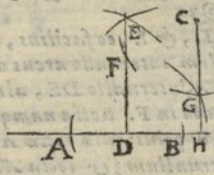
EX his facile ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur rectæ CB, æqualis CA, & ex A., & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturq. recta DC, quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi CD, parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propositionis proxime explicatam. Ex CD, abscissa recta quantacunque CE, describatur ex B, ad interuallum CE, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum CB, descriptus, ducaturq. recta BF. Hæc namque ipsi CD, parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet. Igitur



cum

a 29. primi. cum angulus A C D, a æqualis sit interno C B F; sit autem A C D, rectus, erit & C B F, rectus, ac proinde B F, ad A B, perpendicularis erit.

SIMILITER si data sit recta A B, & punctum extra ipsam C, in extremo fere plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad A B, perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto D, vtcunque in linea A B, abscindantur vtrinque inter se æquales D A, D B, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturq. recta E D, quæ ex praxi propos. 11. ad A B, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi D E, parallela, hoc modo, secundum praxim huius propos. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam D E, in F: eodemq. interuallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, intersecet alius arcus ex C, ad interuallum D F, delineatus. Recta namque ducta ex C, per G, secans A B, in H, parallela erit rectæ D E, ex praxi huius propos. 31. Quare, vt proxime scripsimus, C H, ad A B, perpendicularis erit, sicuti & E D, ad eandem perpendicularis est.



xxxij. ## THEOR. 22. PROPOS. 32.

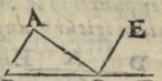
CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primò, angulum externum A C D, æqualem esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. b Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam

b 31. primi.

igitur

igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, [a] erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, [b] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, [c] fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; ACE, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.



[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 2. pron

DICO secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus inrernis A, & B; si addatur communis ACB, [d] erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB: Sed duo ACD, ACB, [e] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 2. pron
[e] 13. pri.

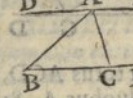
SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, *internus superatur ab angulo externo ACD, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodem externo angulo ACD, angulo A, interno, quandoquidem angulus ACD, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo ACB, &c.*

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, &

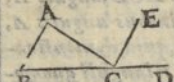
per

per punctum A, [a] ducatur recta BC, parallela DE. Quoniam igitur [b] anguli alterni DAB, & ABC, æquales sunt; si addantur æquales EAC, & ACB, (sunt enim & hi alterni) [c] erunt duo anguli DAB, EAC, duobus ABC, ACB, æquales.



Addito ergo cõmuni angulo BAC, [d] erunt tres anguli DAB, BAC, CAE, æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed anguli DAB, BAC, CAE, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo ABC, anguli ABC, BAC, ACB, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum ACF, si latus BC, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniã enim anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit. [e] Sunt autem & anguli ACF. [e] Sunt autem & anguli ACF, ACB, duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB, [f] remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, sitq. angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico rectas BC, CD, in directum iacere. Cum enim angulus ACD, æqualis sit angulis ABC, BAC, si addatur communis angulus ACB, [g] erunt anguli ACD, ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB, [h] æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD, ACB, duobus erunt rectis æquales. [i] Quare BC, CD, vnam lineam rectam constituunt.



a 31. primi.
b 29. primi.
c 2. pron
d 2. pri.
e 13. pri
f 3. pron
g 2. pron
h 32 pri
i 14. pri.

QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuſcunq. figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propoſ. 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic eſt.

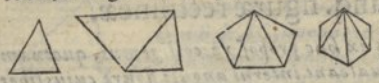
OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

HOC eſt, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales ſint bis vni recto, id eſt, duobus rectis; Anguli vero ſecundæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis tribus rectis, ſex videlicet rectis, Et ſic reliquis. Eum autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, ſeu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ ſuperficiem non concludunt, vnde nec figuram conſtituunt, ſed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ conſtitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, eſſe primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera ſeu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius ſubtractus ex 20 relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris eſt habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cum ſit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquialentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum eſt. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquialebunt 16. angulis rectis, cum talis figura ſit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonſtrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipſa eſt inter figuras, ſeu quot ipſa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipſius ad omnes angulos oppoſitos duci poſſunt lineæ rectæ, ſolum ad duos propinquos an-

gulos

SCD LYON 1

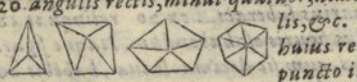
gulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulū in tria; sexangulū in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibee trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est, omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspicitur in propositis figuris.



SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

HOC est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minut quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonstratio autem huius rei talis est. Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosve figura ipsa continet. Cum igitur anguli cuiuscunque trianguli æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorū æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundē triangulorum circa punctum intra figuram assumptū consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferātur, erunt reliqui triangulorū anguli constituētes angulos figuræ propositæ, bis quoq. tot rectis



a 32. primi.

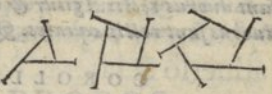
SCD LYON 1

ctis æquales, demptis illis circa punctum assumptum cõstitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes æquales 4. rectis tantummodo, vt collegimus ex propos. 15 Quamobrem anguli cuiusque figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

EX hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur ordinatim versus eandẽ partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, æquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi vna cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosve figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis æquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum.

[a] 13. pri

In triangulo quouis, anguli interni & externi simul æquales sunt sex rectis. Cum igitur interni [b] duobus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni simul æquales sunt octo rectis. Cum igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam vero interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq. est ratio in alijs omnibus figuris.



[b] 32. primi.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtrãque, ita vt quælibet duo

extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.



IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim BHK, cum [a] *latus HB, sit protractum ad F, a erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F,* [b] *erunt tres anguli A, B, F, trianguli ABF, æquales quinque angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli ABF,* [c] *æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.*

[a] 32. primi.

[b] 2. prop.

[c] 32. primi.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusq. alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, [d] æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq. erunt ipsa triangula.

[d] 32 primi.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam rel. qui duo simul conficiunt vnum rectum, [e] cum omnes tres sint æquales duobus rectis, & tertius ille ponatur rectus. Quare [f] cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumq. reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.

[e] 32. primi.

[f] 5. pri.

COROLLARIVM III.

PERSPICVVM quoque est, cuiuslibet anguli trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum.

SCD LYON 1

trium. Duo enim anguli recti, a quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti. a 32. primi.

COROLLARIVM IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq; habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est E, & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

SCHOLIVM.



PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus ABC. Super rectam AB, b constituatur triangulum æquilaterum ABD. Et quia per corollarium 3. angulus ABD, facit duas tertias partes anguli recti ABC; erit angulus CBD, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo ABD, c bifariam, per rectam BE, erit vterq. angulus ABE, EBD, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum. b 1. pri. c 9. pri.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ AC, BD. Dico AC, BD, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur AD, incidit in parallelas AB, CD, d erunt anguli alterni BAD, CDA, æquales. Quare cum duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia sint duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrum- d 29. primi.

que vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [a] erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C. B D, [b] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. pri.

[b] 27. primi.

SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt ipsæ coniungentes sint & æquales & parallelæ. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ essent parallelæ vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent æquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.

xxxiiij.

TEOR. 24. PROPOS. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita AB, DC, inter se esse æqualia, nec non latera opposita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos D A B, & D C B: Denique ducta diametro AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB, D C, sint parallelæ, [c] erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rursus quia AD, BC, sunt parallelæ, [d] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli ADC, vterque vtrique; & latus AC, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [e] erit recta AB, æqualis oppositæ rectæ DC, & recta BC, oppositæ rectæ A D,



[c] 29. primi.

[d] 29. pri

[e] 26. pri

quod

SCD LYON 1

quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales anguli DAC, BCA, toti quoque anguli BAD, BCD, [a] fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumq. vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam ostendimus; [b] erunt triangula ABC, CDA, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, diuisum erit bifariã a diametro AC, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorũ igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. prõ.

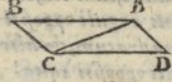
b 4. pri.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiã bifariam diuiduntur a diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Item opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemque lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & basis AC, communis. Igitur [c] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera AB, BC, æqualia sunt lateribus CD, DA, vtrumque vtrique, & an-



c 8. pri.

a 4. pri. guli B, D, ostensi æquales; a erit angulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA, alterno angulo

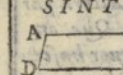
b 27. primi. DAC. Quare b erunt AB, & DC, parallelæ; Item AD, & BC, quod est propositum.

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale est.

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppositi A, & C, æquales: Item oppositi anguli B, & D. Dico



ABCD, esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemq. lineas AD, BC. Nam si æqualibus angulis A, & C; addantur æquales anguli B, & D: c erunt duo anguli A, & B, duobus

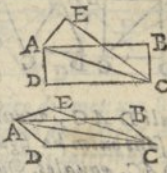
c 2. pron angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidiū facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare AD, BC, d parallelæ sunt. Eadem ratione erunt AB, DC,

d 28. primi. parallelæ. Erunt enim duo quoq. anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiā manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorū definitionibus.

HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera

parte

parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum esse ostensum est: in quo, ducta diametro AC, constituatur super AC, triangulo ABC, æquale triangulum AEC, inuerso ordine, ita vt latus CE, sit æquale lateri AB, & AE, ipsi CB, vt in scholio propos. 22. docuimus: fiatque trapezium AECD.



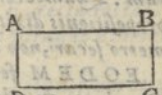
Quoniam vero triangulum ABC, triangulo ADC, æquale est, a quod diameter AC, bifariam secet parallelogrammũ DB: Erit & triangulum AEC, triangulo ADC, æquale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam diuidetur a diametro AC. a 34. primi.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraq. diametro, illud parallelogrammũ erit, vt ostendemus ad prop. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cum sint duo recti: b erunt AD, BC, parallelæ. Eodem modo erunt AB, DC, parallelæ: atque adeo ABCD, parallelogrammum, quod est propositum.



b 28. primi.

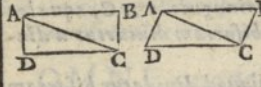
HINC rursum constat, Quadratum, & altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro: Angulos vero figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt pau



lo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus ABCD, in quo diameter AC. Quoniam igitur duo latera BA, AC, trianguli BAC, æqualia sunt duobus lateribus DA, AC, trianguli DAC, vtrumque vtrique, & basis BC, basi DC, (sunt enim hæ figuræ æquilateræ) a erunt anguli BAC: DAC, æquales. Quare angulus BAD, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.

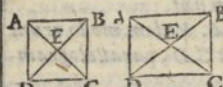
a 8.pri.



SIT rursus Altera parte longius, vel Rhomboides ABCD in quo diameter AC, sitque maius latus AB. Quoniam igitur in triangulo ABC latus AB, maius est latere BC, b erit angulus BCA, maior angulo BAC. Est autem angulus BCA, c æqualis angulo DAC, alterno: quod BC, AD, parallelæ sint. (Est enim ABCD, ostensum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter diuiditur a diametro AC. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem apposite Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

b 18.primi.
c 29 primi.

EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse; At vero in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem vero eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico esse æquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD: vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus: d erit basis AC, basi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.



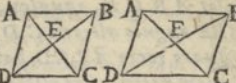
d 4.pri.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo

dia-

SCD LYON 1

diametri AC, BD; sitq. angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim æquales sunt, quia alias vterque esset rectus, cum amba[a] æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem esse diametro AC. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, vtrumque vtrique, & angulus BAD, angulo ABC, maior existit; [b] erit basis BD, maior basi AC. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC: quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.



[a] 29. primi.

[b] 24. primi.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, [c] æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique; & [d] latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; [e] Erit & AE, recta rectæ CE, & recta DE, rectæ BE, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.

[c] 29. primi.

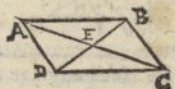
[d] 34. primi.

[e] 26. primi.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

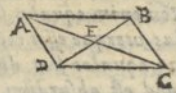
IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad ver-



ticem

15. primi.
b 4. pri.
c 27. pri

ticem E,[a] æquales quoque; [b] erunt & bases A B, C D, æquales, & angulus ABE angulo alterno C D E, æqualis. [c] Quare rectæ AB, CD, parallelæ sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.



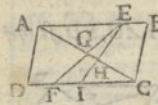
ITAQVE, si quis expedite parallelogrammum describere velit, ducat duas lineas AC, BD, vtcunque se in E, intersecantes. Si namque tam EA, EC, inter se, quam EB, ED, inter se æquales abscinder, constituent ductæ AB, BC, CD, DA, parallelogrammum, vt hic demonstratum est. Quod si anguli ad E, sint recti, & omnes quatuor rectæ EA, EC, EB, ED, inter se æquales, constitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, sunt semirecti, vt facile demonstrabitur per 5. & 32. huius.

HVC quoque referri potest hoc theorema.

RECTa linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

d 29. pri
c 15. pri.
f 26. pri mi.
g 4. pri.
h 2. pron

IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariam secet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus E A G, [d] æqualis est angulo alterno FCG, & [c] angulus EGA, angulo FGC. Est autem & latus AG, lateri CG, æquale, per hypothesin, quæ ambo æqualibus angulis adiacent; [f] erunt & latera EG, FG, æqualia. Quare cum latera AG, GE, æqualia sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti æquales; [g] erunt triangula ACE, CGF, æqualia. Addita igitur communi quantitate BCGE, [h] erit triangulum ABC, trapezio ECFE, æquale: Sed triangulū ABC,



dimidium

a dimidium est parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq. recta EF, parallelogrammum bifariam secat. a 34. pri

SECET iam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim diameter AC, non bifariam diuiditur in G, b diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo æquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum. b 10. pri

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, qua parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & a puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non iniucundum, videlicet.

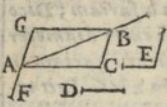
INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

DVAE rectæ infinitæ AB, AC, contineant angulum BAC, sitq. data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & BAC, minores sint duo-

bus

bus rectis. Oportet igitur inter rectas AB, AC, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cum alterutra vero illarum, nimirum cum AC, facientem angulum æqualem angulo dato E. a Fiat angulus CAF, æqualis angulo E, & producta FA, ad G, b sit AG æqualis rectæ D; & per G, c ducatur GB, parallela ipsi AC, secans AB, in B: Deinde per B, ducatur BC, parallela ipsi AG, secans AC, in C. Dico rectam BC, collocatam inter rectas AB, AC, æqualem esse rectæ D, angulumq. BCA, angulo E. Cum enim parallelogrammū sit per constructionē, ACBG, d erit recta BC, rectæ GA, æqualis: At GA, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & BC, rectæ D, æqualis erit. Rursus quia angulus BCA, angulo alterno CAF, æqualis est; & eidem angulo CAF, æqualis est, per constructionem, angulus E; erunt anguli E, & BCA, æquales. Quod est propositum. Cæterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum ABC, si anguli BAC, & BCA, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.

a 23. pri
b 3. pri.
c 31. pri



d 34. pri

e 29. pri

SCHOLIVM. II.

NON alienum erit à nostro instituto, adijcere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad prop. 21. Primū igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterū, vel Isosceles habens basim vtrouis latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam æquales.

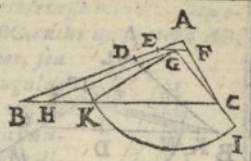
SIT enim primum triangulum ABC, habens latus AB, latere AC, maius, sitq. BD, dimidium vtriusque lateris AB, AC simul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunque, agatur EF, ipsi BC, parallela; & ex quouis puncto G,

lateri

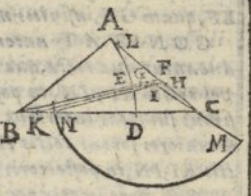
lateri AB, parallela ducatur GH, rectaque iungatur GC, Et quoniam EA, AF, [a] maiores sunt, quam EF: Item CF, FG, maiores, quam GC: erunt EA, AC, FG, simul maiores, quam EF, GC, simul: ablataque communi FG, erunt EA, AC, simul maiores, quam EG, GC, simul: ac proinde multo maiores, quam GC, sola. Producatur ergo GC, fiatque GI, ipsis EA, AC, simul æqualis. Quia vero BE, maior est, quam vtraque EA, AC, simul, quod BE, superet BD, dimidium vtriusque BA, AC, simul, at EA, AC, simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque DA, AC, simul: erit quoque BE, maior, quam GI, quæ ipsis EA, AC, simul est æqualis. Cum igitur [b] ipsi BE, æqualis sit GH, in parallelogrammo BEGH: erit quoque GH, maior, quam GI. Si igitur centro G, & interuallo GI, circulus describatur, secabit is rectam GH, ac propterea & ipsam CH, prius secabit in K. Connectatur GK. Dico vtramque GH, GK, simul æqualem esse vtrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam GH, ipsi BE, æqualis est, & GI, hoc est, GK, ipsis EA, AC, simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotius a D, sumptum fuerit, & punctum G, à puncto E: hoc est, prout tam AD, quam EF, infinitis in punctis secari potest.

[a] 20. primi.

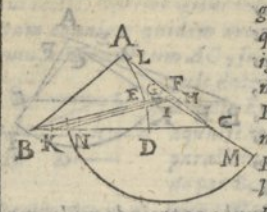
[b] 34. primi.



SIT deinde Isosceles ABC, habens basim BC, vtrouis latere maiorem. Descripto ex centro B, per A, arcu AD, secante rectam BC, in D, ducatur vtcunque recta BF, secans arcum in E, & latus AC, in F: & in EF, per quoduis punctum G, ipsi BC, parallela agatur GH, & per quodcunque eius punctum I, ipsi BF, parallela ducatur IK, rectaque iun-



gatur



gatur IC: atque ipsi EG: æqualis abscindatur AL. Erit igitur BG, ipsis AB, AL, simul æqualis, at LC, minor quã BE, siue AB, & ob id multo minor, quam BG. Et quia ipsi BG, a æqualis est IK, in parallelogrammo BGIK: erit quoque IK, ipsis AB, AL, simul æqualis, maior autem, quam LC.

a 34. pri

b 20. pri

Itaque b quia GF, FH, maiores sunt, quam GH: & HC, HI, maiores, quam IC: erunt GF, FC, HI, simul maiores, quam GH, IC: & ablata communi HI, erunt reliquæ GE, FC, simul maiores, quam GI, IC, simul: ac proinde appositæ communi BG, fient BF, FC, simul maiores, quam BG, GI, IC, simul. Sed ipsis BF, FC, c maiores sunt BA, AC, simul. Ergo multo maiores erunt BA, AC, simul, quam BG, GI, IC, simul. Cum ergo BG, ipsis BA, AL simul æqualis sit, erit reliqua LC, maior, quam reliquæ GI, IC, simul, ac proinde multo maior, quam IC, solæ. Ponatur IM, (producta IC) ipsi LC, æqualis. Et quia IK, ostensa est maior, quam LC, hoc est, quam IM: si ex centro I, per M, arcus circuli describatur, secabit is rectam IK, ac proinde prius ipsam CK, secabit in N. Connectatur IN. Dico vtramque IK, IN, simul æqualem esse vtrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione patet. Est namque IK, ipsis AB, AL, simul æqualis, & IN, hoc est, IM, ipsi LC, æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri potest: cum BF, infinitis modis duci possit: & tam EF, quam GH, infinitis modis secari.

c 20. pri

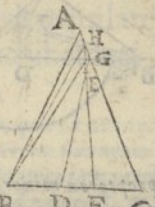
CONSTAT autem, si intra idem triangulum ABC, ducantur duæ rectæ, quæ rectas HG, GK, in priori triangulo, vel rectas KI, IN, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus AB, AC, simul sumptis: quippe quæ d maiores forent rectis HG, GK, in priori triangulo, vel rectis KI, IN, in posteriori.

d 21. pri

AT vero in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorẽ, nõ posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus si

mul

mul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim ABC, cuius duo latera AB, AC, æqualia, & basis BC, non maior, sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, [a] sed vel æqualis, vel minor: constituantur duæ rectæ DE, EF, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC, simul sumptis. Producatur enim DE, secans latus AC in G, iungaturq. recta GB. Quoniam igitur [b] duo anguli ABC, & C, æquales sunt, estque ABC, maior angulo GBC, erit quoque C, maior angulo GBC. Est [c] autem & angulus GDB, angulo C, maior, externus interno. Igitur multo maior erit angulus GDB, angulo GBC; [d] ac proinde latus GB, latere GD, maius erit. Quia vero [e] angulus BGA, maior est angulo C, externus interno; angulusq. C, vel æqualis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoque angulus BGA, angulo A, maior. Quare [f] latus AB, latere GB, maius erit: Sed recta GB, ostensa est maior, quam GD, ac proinde multo maior, quam DE. Igitur latus AB, multo etiam maius erit, quam DE. Eadem ratione si FE, producatur secans AC, in H, iungaturq. recta HB, ostendemus latus AB, ac proinde & AC, maius esse, quam FE. Quocirca latera AB, AC, simul maiora sunt duabus rectis DE, EF, simul sumptis. Quòd si FE, producta secaret latus AB, demonstraremus eodem modo, latus AC, maius esse recta EF.



[a] 5. vel 18. pri.

[b] 5. primi.

[c] 16. primi.

[d] 19. primi.

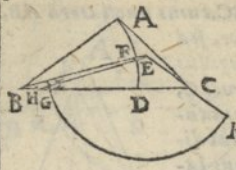
[e] 16. pri.

[f] 19. pri.

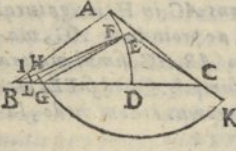
IAM vero, si admirabile videatur ijs, qui Geometriæ ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius sane erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primum constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo ABC, cuius latus AB, minus non sit latere AC, at latus BC, vtrouis latere AB, AC, maius. Descripto ex centro B, arcu circuli AD, sumatur quoduis

punctum E, inter arcum AD, & latus AC, ducaturq. recta BE, secans arcum in F; ita vt BE, maior sit, quam BF, hoc est, quam BA, iungaturq. EC. Quia vero a BE, EC, simul minores sunt, quam AB, AC, simul, estque BE, maior, quam AB, erit EC, multo minor, quam AC. Producta igitur EC, fiat EK, ipsi AC, aequalis, ac propterea minor, quam EB; describaturq. ex E, per K, arcus circuli, qui rectam EB, secabit, ac proinde & ipsam CB, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta EH, secans arcum in I: factumq. erit, quod proponitur. Nam BE, maior est, quam BA, & EH, maior, quam EI, hoc est, quam EK, vel AC.

a 21. primi.



DEINDE sint singulae lineae singulis lateribus aequales constituendae intra idem triangulum: fiatq. eadem constructio, demptae linea EH, sed arcus KG, secet rectam EB, in H. Et latus BA, latere AC, ponatur maius, eritq. BE, recta maior, quam AB, cum maior sit, quam BF, quae aequalis est ipsi AB. Sumpta igitur EI, aequali ipsi AB, cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem EB, maior est, quam AB, & EH, minor, quam AB. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans BC, in L, iunganturq. rectae EL, EG: factumq. erit, quod proponitur. Nam EL, ipsi EI, hoc, est, ipsi AB, aequalis est, & EG, ipsi EK, hoc est, ipsi AC.



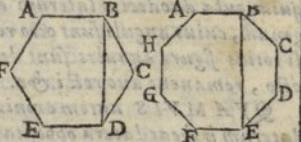
PRAETER haec demonstrat Pappus, intra eadem, quae diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quae habeant ad eadem latera proportionem datam, quae tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quae res hoc loco demonstrari non potest, cum ex proportionibus pendeat.

SCD LYON 1

EX PROCLO.

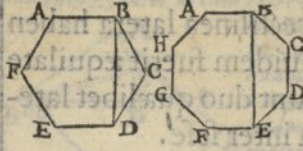
IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, si quidem fuerit æquilatera,& æquiangula: erunt duo quælibet latera oppositа,parallela inter sese.

LATERA oppositа dicuntur illa duo, quæ ex vtraq. parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono ABCDEF, latera oppositа erunt AB, ED: quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono vero ABCDEFGH, latera oppositа erunt AB, FE, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quam ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris æquilateris parium laterũ, ex vtraque parte oppositorum laterum erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria,in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur quælibet latera oppositа esse parallela; AB, nimirum ipsi ED, in hexagono; & AB, ipsi FE, in octogono, & sic de cæteris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam,vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B,C,D,eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales; Sunt autem anguli BCD, CBD, CDB, trianguli BCD,[a] duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli ABD,EDB, duobus rectis æquales erunt. Quare [b] parallelæ erunt AB,& ED. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B,C,D, E, sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri BCDE, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli ABE, FEB, duobus erunt rectis



[a] 32.pri

[b] 28.pri



a 28. primi.

æquales, a atque adeo AB, FE, parallelæ erunt. Eodem modo demonstrabitur, in omnibus alijs figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorum laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni æquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis æquales: At sex anguli totius figuræ æquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppositа parallela, vt ostendimus; tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.

xxxv.

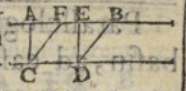
THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

INTER duas parallelas AB, CD. super basi CD, existant duo parallelogramma CDEA, CDBF. (Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum, vt in exemplo proposito cernitur.) Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in pa-

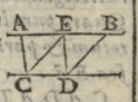
ralle-

rallelogrammo CDEA, recta AE, [a] æqualis est rectæ CD, oppositæ; & eidem CD æqualis est FB, in parallelogrammo CDBF, oppositæ; Erunt AE, [b] FB, inter se æquales. Dempta igitur communi FE, [c] remanebit AF, ipsi EB, æqualis; [d] Est autem & AC, ipsi ED, oppositæ æqualis in parallelogrammo CDEA; [e] & angulus BED, angulo FAC, externus interno. [f] Quare triangulum FAC, triangulo BED, æquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, [g] fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod est propositum.



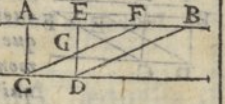
a 34. primi.
b 1. pron
c 3. pron
d 34. primi.
e 29. primi.
f 4. pri.
g 2. pron

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC; atque adeo [h] triangula EAC, BED, æqualia. Addito igitur communi triangulo CDE, [i] fient parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia.



h 4. pri.
i 2. pron

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta CF secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ AE, FB, sunt æquales; si communis addatur EF; [l] erit tota AF, toti EB, æqualis, necnon & anguli BED, FAC, æquales erunt; atque adeo [m] triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo EGF, [n] remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

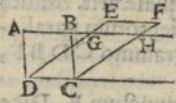


l 2. pron
m 4. pri.
n 3. pron

SCHOLIVM.

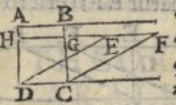
CONVERTEMVS *facile hanc propositionem, hoc modo.*

Parallelogramma æqualia super eandē basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, CDEF, super eandem basin CD, & ad easdem partes. Dico rectam AB, productam in directum iacere ipsi EF, & propterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim AB, producta vel cadet infra EF, vel supra. Cadat primo infra, qualis est AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, [a] *æquale parallelogrammo ABCD; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammum CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDGH,* [b] *æqualia erunt, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet AB, infra EF.*

[a] 35. primi.



CADAT secundo AB, producta supra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB, Quare, vt prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia. totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si CF, DE, producerentur vsque ad AB, protractam. Eademque demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt, hoc est, siue punctum E, sit vltra B, siue non, vt perspicuum est. Non ergo cadet AB, supra EF; sed nec infra, vt demonstratum est; ergo producta in directum iacet ipsi EF; ac proinde parallelogramma ABCD, CDEF, in eisdem sunt parallelis.

xxxvj.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, super

æquales

æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, [a] æqualis eſt GB, in parallelogrâmo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, [b] æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, [c] parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, [d] erit parallelogrammũ ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, [e] erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, [f] inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 34. primi.
[b] 1. pron
[c] 33. primi.
[d] 35. primi.
[e] 35. primi.
[f] 1. pron

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

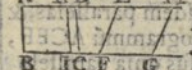
PARALLELOGRAMMA æqualia, ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, ſuper baſes æquales BC, FG, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, AD, protractam cotre in directum cum EH. Nam alias



cadet aut infra E H, aut supra. Quo posito sequitur, totum & partem esse æqualia, quemadmodum in conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facile commonstrat. Intelligenda sunt autem bases æquales data in eadem linea recta BG.

SINT secundo eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse æquales. si enim altera, nempe BC, dicatur maior, a abscindatur



BI, æqualis rectæ FG, & b ducatur IK, parallela ipsi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, c æquale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod est absurdum. Non ergo BC, maior est, quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases BC, FG, æquales sunt.

a 3. pri.
b 31. primi.
c 36. pri

SEQVENS quoque theorema facile hinc demonstrabitur.

SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, sitque basis BC, maior base FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius esse. d Auferatur enim recta BI, ipsi FG, æqualis, e ducaturque IK, ipsi AB, parallela. Erunt ergo f parallelogramma BK, FH, supra æquales bases BI, FG, æqualia. Cum igitur BD, g maius sit, quam BK, erit idem BD, maius, quam FH.

d 3. pri.
e 31. pri.
f 36. primi.
g 9. pron

SINT rursum parallelogramma BD, FH, inæqualia, & BD, maius. Dico basim BC, maiorem esse base FG. Nam

si fo-

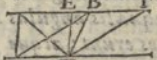
si foret æqualis, [a] *essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem esset minor, foret perallelogrammum FH, maius, quam BD, vt proxime ostendimus. quod multo magis est absurdum, cum BD, maius ponatur, quam F H. Basis ergo BC, cum neque æqualis sit ipsi FG, neque minor, erit maior, quàm FG, quod est propositum.*

[a] 36. pri

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvij.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, sint constituta duo triangula A C D, BCD. (Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [b] ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectæ B C. [c] Erunt igitur parallelogramma, ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula ACD, BCD; [d] quod AD, BD, diametri bifariam secent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, [e] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 31. pri

[c] 35. pri

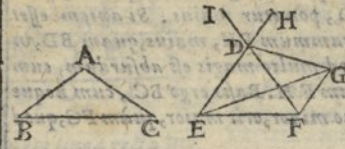
[d] 34. pri

[e] 7. pron

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquãdo esse æqualia, & aliquãdo inæqualia: Id quod ad prop. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triã-

SCD LYON 1



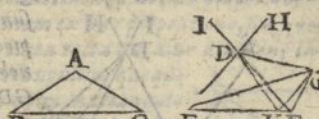
gula ABC, DEF, & latera AB, AC, æqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, sintque primũ hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; fiatque angulus EDG, æqualis angulo A, versus angulum acutum DFE. Nam semper alter angulorum DEF, DFE, acutus erit [b], cum ambo minores sint duobus rectis. [c] & recta DG, rectæ DF, seu AC, ducanturque rectæ EG, GF. cadetque semper EG, supra F, ob angulum acutum DFE, vt ad finem scholij propos. 24. ostendimus. Quoniam igitur duo anguli A, & EDF, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus EDG, æqualis factus est angulo A; erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH, [d] duobus rectis æquales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, æquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG, [e] remanebit angulo EDF, æqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF, [f] æqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, æquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI, Rursus quia latera DF, DG, sunt æqualia in triangulo DFG; [g] erunt anguli DFG, DGF, æquales; qui cum [h] æquales sint externo angulo GDI, erit vterlibet eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI. [i] Quare anguli GDH, DGF, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG, [l] erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem [m] triangula DEG, DEF, æqualia erunt, cum habeant eandem basin DE, sintq. inter easdem parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG, [n] æquale est triãgulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, æqualis angulus EDG; erit & triangulũ ABC, triangulo DEF, æquale, q est propositum.

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum,

a 23. primi.
b 17. primi.
c 3. pri.
d 13. primi.
e 3. pron
f 13. primi.
g 5. pri.
h 32. pri
i 7. pron
l 27. pri
m 37. pr.
n 4. pri.

minus

minus esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; a fiat q. angulus EDG, æqualis angulo A, b & recta DG, recta DF, seu AC, æqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sunt autem anguli EDG, GDH, c æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero d angulus EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, maior quam GDH; atque adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, æqualia sunt: e erunt anguli DFG, DGF, æquales: qui cum sint f æquales externo GDI, erit vterque eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK, g æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK, h parallela ipsi DE, secabitq. GK, rectam EF. Ducatur ex D, ad K, vbi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG, i æquale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG, k æquale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK, l minus sit triangulo DEF; erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est propositum.



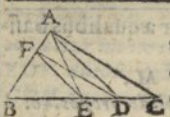
a 23.pri.
b 3. pri.
c 15.pri
d 15.pri
e 5.pri.
f 32. pri mi.
g 23.pri
h 27.pri
i 37. pri.
k 4.pri.
l 9.pron

SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; m fiat q. angulus EDG, æqualis angulo A, n & recta DG, recta DF, seu AC; ducan



m 23.pri
n 3. pri.

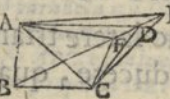
turq.



QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium vero ad partes C, vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

xxxix. ## THEOR. 29. PROPOS. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia, ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatq. cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo A B C. Igitur [c] erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta FC, erunt eadē ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur A D, parallela ipsi B C. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 31. pri

[b] 37. pri

[c] 1. pron

SCHOLIVM.

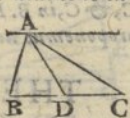
EX his infert Campanus sequens hoc theorema.

inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas, & super æquales bases. a38.pri

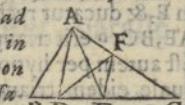


a *Quare æqualia erunt.*

EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum: Quod si punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hoc scholio est ostensum: Si vero D, non diuidit BC, bifariam, b *secetur BC, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta DA, & per E,* c *parallela EF, ipsi DA, secans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuisum bifariam à linea DF. Nam ducta recta EA,* d *erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cum sint super eandem basin EF, & inter easdem parallelas EF, AD. Addito igitur communi CFE,* e *erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: Est autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & CDF, dimidium est eiusdem trianguli ABC. quod erat probandum.*



b 10.primi.

c 31.pri

d 38.pri

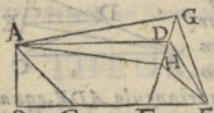
e 2.pron

QVOD

xl.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia ABC, DEF, super bases æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ BF. Si enim non est, cadet parallela ipsi BF, per A, ducta vel supra AD, vel infra. Cadat primum supra, coeatq. cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ
a 38. pri sunt AG, BF, a erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem trian-
b 1. prop gulo ABC, æquale. Igitur b triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD, parallela ipsi BF. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC propositio conuertit uno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propos. 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

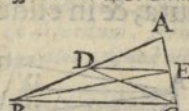
TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt cõstituta.

SINT triangula æqualia ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & super bases BC, EF, quas dico esse æquales.

Si

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea DE, latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam in D, & E. Dico DE, parallelam esse lateri BC. Cum enim triangula ADE, BDE, sint super æquales bases AD, DB, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi AB) a erit triangulum BDE, triangulo ADE, æquale: Eadem ratione erit triangulum CED, eidem triangulo ADE, æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propos. Recta enim ED, secabit triangulum AEB, bifariam, & recta eadem DE, triangulum ADC, bifariam etiam, quod bases AB, AC, secta sint bifariam à recta DE, ex hypothesi. Igitur triangula DBE, ECD, b æqualia erunt: Habent autem eandem basin DE, & sunt ad easdem partes constituta. Quare c inter easdem erunt parallelas, & idcirco DE, BC, parallela erunt. Quod est propositum.



a 38. pri

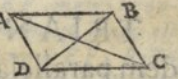
b 1. pron

c 39. pri

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum AECD, diuidatur bifariam ab vtraque diametro AC, BD. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula ADC, EDC, dimidia sint eiusdem quadrilateri ABCD, d ipsa inter se æqualia erunt. Quare cum eandem habeant basin DC, ad easdemq. partes sint, e ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco rectæ AB, DC, parallelæ sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse AD, BC. Parallelogrammum igitur est ABCD. Quod est propositum.



d 7. prō.

e 39. pri

SCD LYON 1

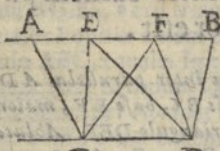
facile quoque demonstrari possunt de trapezijs inter easdem parallelas descriptis, eodem ferme ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases inter se æquales sint, sunt inter se æqualia: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas æquales.

DICVNTVR trapezia in eisdem esse parallelis, quando latera duo opposita parallela sunt, partesq. sunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur AB, CD, super eadem basi CD, constituta sint duo trapezia, ACDE, FCDB, quorum bases oppositæ AE, FB, æquales sint. Dico ipsa inter se esse æqualia. Ductis enim rectis EC, FD, [a] *erunt tam triangula ECD, FCD, super eadem basi CD, & in eisdem parallelis, inter se æqualia,* [b] *quam triangula ACE, FDB, super æqualibus basibus AE, FB, & in eisdem parallelis. Si igitur æqualibus ECD, FCD, addantur æqualia ACE, FDB,* [c] *erunt tota trapezia ACDE, FCDB, inter se æqualia.*



[a] 37. primi.

[b] 38. primi.

[c] 2. pron

SINT iam trapezia ACDE, FCDB, æqualia. Dico bases oppositas AE, FB, æquales quoque esse. Erunt enim rursus [d] *triangula ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [e] *æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc scholio ostendimus, bases AE, FB, æquales erunt.*

[d] 37. pri

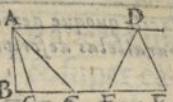
[e] 3. pron

II.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusq. est

illud

Si enim non sunt æquales, sit BC, maior. [a] *Abscissa ergo recta CG, æquali ipsi EF, & ducta recta GA;* [b] *erit triangulum AGC, triangulo DEF, æquale: Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula AGC, ABC,* [c] *æqualia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Quod est propositum.*



a 3. primi.
b 38. primi.
c 1. pron.

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

SI duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula ABC, DEF, sitq. basis BC, basi EF, maior. Dico triangulum ABC, maius esse triangulo DEF. Ablata enim recta CG, [d] *æquali ipsi EF, ductaq. recta AG;* [e] *erunt triangula AGC, DEF, supra æquales bases GC, EF, æqualia. Cum ergo* [f] *triangulum ABC, triangulo AGC, maius sit; erit idem triangulum ABC, maius quam DEF.*

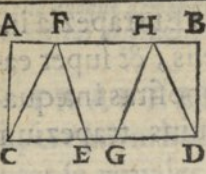
d 3. primi.
e 38. primi.
f 9. pron

SINT rursus triangula ABC, DEF, inæqualia, & ABC, maius. Dico basin BC, basi EF, maiorem esse. Si enim dicatur æqualis, [g] *erit triangulum ABC, triangulo DEF, æquale. quod est absurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur esse minor, erit triangulum DEF, maius triangulo ABC, vt proxime ostendimus, quòd multo magis est absurdum, cum ABC, ponatur maius, quam DEF. Recta igitur BC, maior erit, quam EF, cum neque æqualis sit ostensa, neque minor. Quod est propositum.*

g 38. pri

QVAE porro hactenus de parallelogrammis, triangulisq. inter easdem parallelas constitutis demonstrata sunt,

facile



la FCE, HGD, super æquales baſes CE, GD, quam ACF, BDH, super baſes æquales AF, BH, inter ſe æqualia. [a] Tota ergo trapezia æqualia erunt.

a 2.pron

SINT iam trapezia ACEF, HGDB, æqualia ſuper baſes æquales CE, GD. Dico baſes oppoſitas AF, BH, æquales quoque eſſe. [b] Erunt namque rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CF, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula ACF, BDH, [c] æqualia erunt; ac proinde, vt paulo ante in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AF, BH, æquales erunt.

b 3 s.primi.

c 3.pron

IIII.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq. eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdē parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habēt oppoſitas baſes inæquales, maiorq. eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis AF, dicatur eſſe maior baſe HB, erit trapezium ACEF, trapezio HGDB, maius. [d] Erūt enim rurſum triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia. At triangulum ACF, maius triangulo BDH, vt ſupra oſtenſum eſt, quod baſis AF, maior ponatur baſe BH. [e] Totum ergo trapezium ACEF, toto trapezio HGDB, maius erit.

d 38.primi.

e 4.pron

RVRSVS ſi trapezium ACEF, maius ponatur trapezio HGDB, erit baſis AF, baſe BH, maior. [f] Erunt enim rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum ACF, reliquo triangulo BDH, [g] maius

f 38. primi.

g 5.pron

erit;

illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

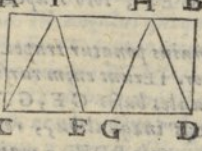
VT in eadem figura, si basis AE, dicatur esse maior base FB; Dico trapezium ACDE, maius esse trapezio FCDB. [a] *Erunt enim rursus triangula ECD, FCD, æqualia: At triangulum ACE, triangulo FDB, maius, vt in hoc scholio demonstrauimus.* [b] *Totum ergo trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.*

RVRSVS si trapezium ACDE, dicatur esse maius trapezio FCDB; Dico basin AE, base FB, maiorem esse. [c] *Erunt enim rursus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum ACE, reliquo triangulo FDB,* [d] *maius erit: ac proinde, vt in hoc scholio ostensum est, basis AE, maior erit base FB. Quod ostendendum erat.*

[a] 37. primi.
[b] 4. pron
[c] 37. primi.
[d] 5. pron

III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.



INTER parallelas AB, CD, super æquales bases CE, GD, constituta sint duo trapezia ACEF, HGDB, quorum bases oppositæ AF, HB, æquales quoque sint. Dico ipsa trapezia æqualia esse. Ductis n. rectis FC, HD, [c] *erunt tam triangu-* [c] 38. pri

tur BC, diuiditur bifariam, [a] constituatur acuto angulo AGD, æqualis angulus AGH, [b] & recta GH, rectæ GD, æqualis, ducanturq. rectæ AH, HF, FD, FE. Quia igitur tam triangula tota ABF, ACF, ex scholio propos. 38. huius libri æqualia sunt, [c] quam triangula ablata DBF, ECF, ob æquales bases BF, CF; [d] erunt quoque reliqua triangula ADF, AEF, æqualia. Rursus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD, duobus lateribus AG, GH, æqualia sunt, angulosq. comprehendunt æquales AGD, AGH, ex constructione, [e] erunt quoque triangula AGD, AGH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, æqualia sunt, ex constructione, angulosq. continent æquales DGF, HGF, (cum enim per constructionem anguli AGD, AGH, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum DGF, HGF, æquales.) [f] sunt enim tam AGD, DGF, quam AGH, HGF, duobus rectis æquales) [g] erunt quoque triangula DGF, HGF, æqualia: [h] ac proinde & tota triangula ADF, AHF, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo ADF, æquale ostensum triangulum AEF. Igitur & inter se [i] æqualia erunt triangula AHF, AEF: [K] ac propterea inter duas easdem erunt parallelæ, hoc est, ducta recta EH, erit basi AF, communi parallela. Igitur [l] & triangula HGF, EGF, inter easdem parallelas, & super eadem basi FG, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum HGF, triangulo DGF, ostensum æquale. Igitur triangula quoque DGF, EGF, æqualia inter se erunt; propterea q. bases quoque DG, basi GE, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.



SI vero DE, ponatur bifariam diuidi, [m] constituatur angulo acuto AFB, æqualis angulus AFH, [n] & recta FH, rectæ FB, ducanturq. rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tam triangula AGD, AGE, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt, [o] quam triangula DGB, EGC, ob æquales bases DG, EG; [p] erunt tota etiam triangula AGB, AGC, æqualia. Rursus quia duo latera AF, FB, duobus lateribus

AF,

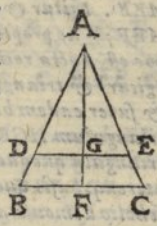
a 23. primi.
b 3. pri.
c 38. primi.
d 3. pron
e 4. pri.
f 13. primi.
g 4. pri.
h 2. pron
i 1. pron
K 39. primi.
l 37. pri.
m 23. primi.
n 3. pri.
o 38. pri
p 2. pron

erit; ac proinde, vt in hoc scholio ostensum fuit, basis AF, basi BH, maior erit. Quod erat ostendendum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectã quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in scholio propos. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. ostendemus, iucundum tamen est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidens q. alterutram parallelarũ bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

IN triangulo ABC, æquidistet DE, ipsi BC, & recta AF secet alterutram BC, DE, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo posito, [a] & anguli ad G, recti erunt. Si igitur BC, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in scholio propos. 26. huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta AG, ad basim DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidens q. angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque basim DE, vt ibidem ostendimus, quod est propositum. [a] 29. pri



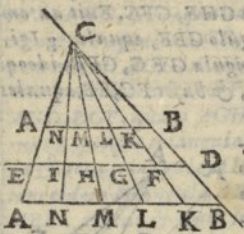
SI vero DE, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariã; ac proinde recta AF, ad basim BC, perpendicularis, diuidens q. angulũ A, bifariã, basim quoque BC, bifariam secabit, quod est propositum.

SINT deinde anguli ad F, non recti, sed AFC, obtusus, & AFB, acutus. Quo posito, erit & AGE, obtusus, & AGD, acutus, [b] cum hi illis sint æquales, externi internis. Si igi- [b] 29. pri

AH, secat BC, bifariam in H, secabit eadem ipsam DE, quoque bifariam in I, vt proxime ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si DI, aqualis est ipsi IE, tum IE, maior sit, quam GE, erit quoque DI, maior, quam GE, hoc est, quam DG, quæ ipsi GE, æqualis ponitur. Diuiditur ergo BC, bifariam in F. Quod erat demonstrandum.

HOC ostenso theoremate, ad diuisionem lineæ rectæ in quotuis æquales partes iam veniamus.

DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



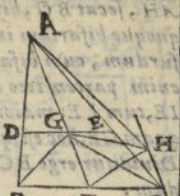
231. pri

SIT data recta AB, secanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta BC, vtcunque, & assumpto in BC, puncto quocunque D, siue infra B, siue supra, a ducatur per D, ipsi AB, parallela DE, in qua b *abscindantur quinque partes inter se æquales DF, FG, GH, HI, IE, hac tamen lege, vt existente puncto D, infra B, recta DE, ex quinque partibus æqualibus composita maior sit, quam data AB, minor vero, existente puncto D, supra B, vt nimirum recta AC, per alterum extremum A, & per E, ducta cum BD, concurrere possit in puncto aliquo, vt in C. A quo si per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur, secta erit data recta AB, in quinque partes æquales BK, KL, LM, MN, NA. Quoniam enim in triangulo CBL, recta DG, ipsi BL, est parallela, vel in triangulo CDG, recta BL, ipsi DG: secta autem est DG, bifariam in F, secta quoque erit bifariam BL, in K, vt in proximo theoremate demonstrauimus. Eademq. ratione recta KM, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & FH, in G, bifariam secta est. Sunt ergo tres partes BK, KL, LM, inter se æquales, sicuti tres DF, FG, GH, atque ita de cæteris.*

b 3. pri,

ALI-

AF, FH, æqualia sunt, continentq. angulosq. æquales AFB, AFH, ex constructione; [a] erunt triangula quoque AFB, AFH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, æqualia sunt, æqualesq. continent angulos GFB, GFH, ex constructione; [b] erunt quoque æqualia triangula GFB, GFH: quibus demptis ex æqualibus AFB, AFH, [c] æqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est autem eidem triangulo AGB, ostensum æquale triangulum AGC. [d] Igitur & triangula AGC, AGH, inter se erunt æqualia. [e] Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est, ducta recta CH, ipsi AF, parallela erit; ac proinde [f] æqualia inter se erunt triangula GHF, GFC. Fuit autem ostensum triangulum GHF, triangulo GBF, æquale. [g] Igitur & æqualia inter se erunt triangula GFC, GFB; ideoq. vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB, æquales erunt. Quod est propositum.



[a] 4. primi.
[b] 4. pri.
[c] 3. pron
[d] 1. pron
[e] 39. primi.
[f] 37. primi.
[g] 1. pron

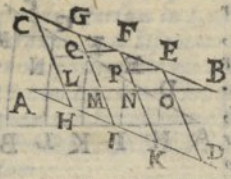
ALITER. Diuisa sit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse diuisam in G. Si enim DG, GE, non sunt æquales, sit maior DG, ducanturq. rectæ FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quàm triangulum FDG, triangulo FEG, maius. [h] Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF, [i] quæ propter bases æquales BF, CF, æqualia sunt, [k] fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, vt in hoc scholio manstrauimus, basis BF, basi FC, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est DE, in G. Quod est propositum.



[h] 4. pron
[i] 38. pri
[k] 4. prō.

SIT iam DE, secta bifariam in G. Dico & BC, diuidi bifariam in E. Sin minus, [l] diuidatur BC, in H, bifariam, ducaturq. recta AH, secans DE, in I. Quoniam igitur

[l] 10. pri.



a 29.pri

les in parallelogrammis EN, FM: a erunt tam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli GFQ FEP, externus, & internus in parallelis QF, PE, inter se æquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales sunt, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia FG, EF, æqualia

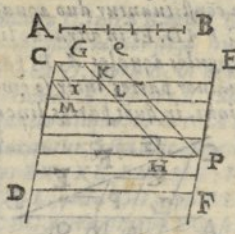
b 26.pri

per constructionem, b erunt quoque latera FQ, EP, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eademq. ratione æquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea q; recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod erat propositum.

c 33.pri

PRAXIS hac breuius ita demonstrabitur. c Quoniam rectæ ED, FK, GI, GH, parallelæ sunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes æquales, necnon & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt.

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis



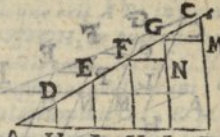
d 3. pri.

duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF. d sumantur in vtraque partes omnino inter se æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctaq; respondentia lineis rectis iungantur, e quæ parallelæ inter se erunt, cum coniungant extrema parallelarũ æ-

e 33.pri

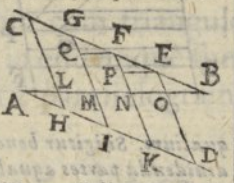
qualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque diuidenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G. vsq; ad punctũ H, ita vt quinq. spatia parallelarũ inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta GH, ab illis parallelis

ALITER. Ad extremum A, lineæ AB, secandæ in quinque partes æquales, constituatur angulus rectilineus quicunque A, & ex recta AC, [a] abscindantur quinque partes quantæcunque inter se æquales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB, [b] agantur ei parallelæ GL, FK, EI, DH. Dico rectam AB, sectam esse in quinque partes æquales. [c] Ductis enim per G, F, ipsi AB, parallelis GM, FN, [d] quæ inter se etiam parallelæ erunt, [e] & ipsis BL, LK, æquales in parallelogrammis GB, FL; [f] erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GL, CB, quam anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli GFN, æquales sunt, vterque vtrique, lateraq; illis adiacentia CG, GF, æqualia per constructionem, [g] erunt quoque latera GM, FN, æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis BL, LK, erunt quoque BL, LK, inter se æquales. Eademq; ratione ostendemus KL, KI, æquales esse, necnon IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit, Quod est propositum.



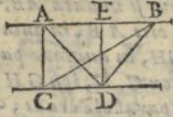
a 3. pri.
b 31. pri.
c 31. pri
d 30. pri
e 34. pri
f 9. pri
g 26. pri

ALITER. Ad extrema puncta A, B, lineæ AB, in quinque partes æquales diuidendæ constituantur duo æquales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in vtraque lineæ BC, AD, [h] quæ ob alternos angulos æquales A, B, parallelæ inter se sunt, [i] sumantur quatuor partes inter se omnino æquales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt BE, EF, FG, GC; AH, HI, IK, KD; iunganturq; rectæ GH, GI, FK, ED, [l] quæ inter se erunt parallelæ, cum coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico rectam AB, in quinque partes æquales sectam esse. [m] Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, FQ, [n] quæ inter se quoque parallelæ erunt, [o] & ipsis NO, MN,



h 27. pri
i 3. pri.
l 31. pri
m 31. pri
n 30. pri
o 34. pri

SCD LYON 1

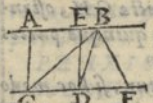


BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt [a] triangula ACD, BCD, æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplũ est trianguli ACD; [b] quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

a 37. pri
b 34. pri
c 6. pron

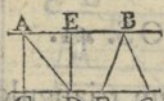
SCHOLIVM.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, vt sit DF, æqualis ipsi CD, ducaturque recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [d] quod triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE, [e] duplum eiusdem trianguli BCD. [f] Igitur æqualia erunt triangulũ BCF, & parallelogrammum ACDE.



d 38. pri
e 41. pri
f 6. pron

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrãmo, [g] erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallegrammũ ACDE, duplum sit trianguli ACD: [h] quod diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam: [i] erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulũ hoc esset duplum etiam trianguli BFG, &c.



g 38. pri
h 34. pri
i 6. pron

CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.

SCD LYON 1

in quinque partes æquales, quibus partibus si in data AB, [a] sumantur partes æquales, diuisa quoque erit AB, in quinque æquales partes. Sectam autem esse GH, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi GH, parallelis CI, NM, [b] quæ inter se quoque parallelæ erunt; [c] & ipsis GK, KL, æquales in parallelogrammis GI, KM; erunt & tam anguli CNI, NOM, externus & internus in parallelis NK, OL, quam anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter se. Igitur cum duo anguli N, C, trianguli CNI, duobus angulis O, N, trianguli NOM, æquales sint, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia CN, NO, æqualia, ex constructione, [c] erunt quoque latera CI, NM, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis GK, KL, erunt quoque GK, KL, inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ GH, ostendentur æquales: ac proinde recta GH, in quinque partes æquales erit diuisa.

[a] 3. pri.
[b] 30. pri
[c] 34. pri
[d] 29. pri
[c] 26. pri

PRAXIS etiã hac breuius demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumptis quinque interuallis rectæ EF, ab E, vsq. ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, diuisa a parallelis in quinque partes æquales, vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ PQ, quæ datæ rectæ AB, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB, diuisa quoque erit AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

xlj.

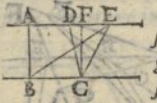
SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum

BCD.

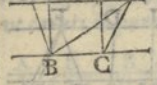
EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.



INTER lineas parallelas AE, BC, sint constituta trapezium ABCD, & triangulum EBC, super basim BC, eandem, quæ sit tamen maior, quam altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, minus esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, sumatur AF, æqualis ipsi BC, & ducatur recta CF, [a] *quæ erit parallela ipsi AB; atque adeo parallelogrammum erit ABCF,* [b] *quod duplum est trianguli EBC. Quare trapezium ABCD, cum sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.*

a 33. pri
b 41. pri



SINT rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis BC, sit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam BC, abscindatur DF, æqualis ipsi BC, & ducatur recta BF, [c] *quæ erit parallela ipsi CD; atque adeo parallelogrammum erit BCDF:* [d] *quod duplum est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.*

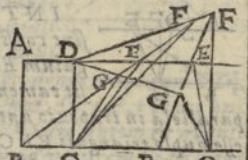
c 33. pri
d 41. pri

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc vero minor.

TRA-

SCD LYON 1

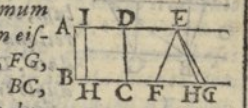
SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis: erunt bases æquales, si non sit eadem.



SIT parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, sive eandem habeant basin, sive æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam alias cadet aut supra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. a *Nã erit quoque parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel EGC, duplum.* b *Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum.*

a 41. pri

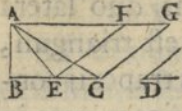
b 6. pron



SIT deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eisdemque parallelis. Dico bases BC, FG, esse æquales. Nam si altera, nempe BC, sit maior, abscissa æquali CH, & c ducta HI, parallela ipsi AB, demonstrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, esse æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli EFG; illud quidem per hypothesin, hoc vero per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis FG, maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi BC, æqualis FH, ducaturque recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium est parallelogrammi ABCD; Illud quidem per propos. 41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.

c 31. pri.

EX



DATVM triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus CEF, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus CEF, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta AF, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi EF, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo CEF, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, cõstitutum parallelogrammum CEFG, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta E A; quoniam parallelogrammum CEFG, [d] duplum est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli AEC, [e] quod triangula AEC, ABE, super æquales bases EC, BE, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum CEFG, & triangulum ABC, [f] æqualia inter se. Cum igitur angulus CEF, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.
[b] 23. primi.
[c] 31. primi.
[d] 41. primi.
[e] 38. primi.
[f] 6. pron

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis facilima est ex ipsa constructione.

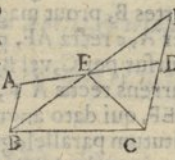
SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus CBE, angulo G, æqualis, secetq. recta BE, rectam AD, productam in E: Extendatur quoque B C,

ad

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quòd basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



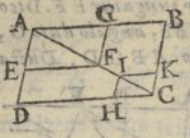
SIT trapezium ABCD, cuius duo latera opposita AB, DC, sint parallela, & super basin BC, constituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD. Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli EBC. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracto in F. Et quia parallelæ sunt AB, CF, [a] *erunt anguli alterni BAE, FDE, æquales:* [b] *Sunt autem & anguli AEB, DEF, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, æquale, per hypothesin,* [c] *Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus, DF, FE, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli ABE, DFE, æquales: atque idcirco triangula ABE, DFE, ex coroll. propos. 26. huius lib. æqualia erunt. Quare addito communi triangulo CDE,* [d] *erunt triangulo CEF, æqualia triangula simul ABE, CDE.* [e] *Est autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, æquale, quod bases BE, EF, ostensæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C, duceretur parallela ipsi BF.* [f] *Igitur triangulum CBE, æquale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod est propositum.*

[a] 29. pri
[b] 15. pri
[c] 26. pri
[d] 1. pron
[e] 38. pri.
[f] 1. pron

PROBL. II. PROPOS. 42. xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

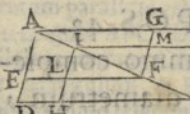
DA-



etiãsi duo parallelogramma circa diametrum non coniungantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit semotum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, consistant parallelogramma AEFG, CHIK. Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse æqualia. Cum enim [a] triangula ABC, CDA, æqualia inter se sint: Item triangula AEF, GHI, æqualia triangulis AGF, CKI: [b] erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, æqualia. Quod est propositum.

[a] 34. primi.
[b] 3. pron

SECENT se iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum consistentia, ita vt communẽ partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, esse æqualia. Cum enim [c] æqualia sint triangula ABC, CDA: Item triangula AFG, AFE: [d] erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, æqualia: Sunt [e] autem rursus æqualia triangula IFM, IFL. Igitur si hæc addantur dictis quadrilateris, [f] erũt figuræ BCIMG, DCILE, æquales. Cum igitur & [g] æqualia sint triangula CIK, CIH: erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam æqualia. Quod est propositum.



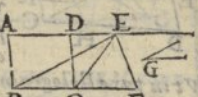
[c] 34. primi.
[d] 3. pron
[e] 34. primi.
[f] 2. pron
[g] 34. primi.
[h] 3. pron

CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia: consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seque secent in I, diuisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo BEIH, DFIG, sint æqualia. Dico reliqua duo AEIG,

ad F, sitque C F, æqualis rectæ B C, & iungatur E F. Dico triangulum B E F. habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, [a] *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E, Item triangulum B E F, eiusdem trianguli B C E, duplum;* [b] *quod æqualia sint triangula E B C, E C F. Quare* [c] *æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod est propositum.*



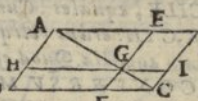
[a] 41. pri
[b] 38. primi.
[c] 6. pron

PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

THEOR. 32. PROPOS. 43. xliij.

IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

IN parallelogrammo A B C D, sint circa diametrum AC, parallelogramma A E G H, C F G I, & complementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum [d] enim triangula A B C, C D A, æqualia sint; Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, [e] remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [f] Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, [g] remanebunt æqualia complementa D F G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.



[d] 34. pri
[e] 1. pron
[f] 34. pri
[g] 3. pron

SCHOLIVM.

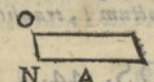
EODEM modo hoc theorema demonstratur a Proclo,

etiam

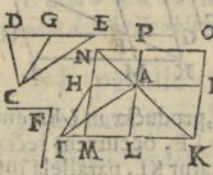
tus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum
[a] 43. pri. L M F H, æquale est triangulo B, [a] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnũ latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturque parallelogrammũ, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam constituamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatque super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triãgulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaque recta C G, secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eam partem, vbi parallelogrammum constituendũ debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatque A H, æqualis ipsi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, [b] constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit constituendum, sursum vero, si versus inferiorem. Posita autem recta A I, æquali ipsi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales; [c] erunt triangula A H I, E G C,

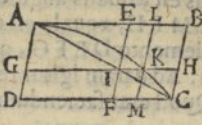


[b] 23. pri.

[c] 4. pri.

aqua-

CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctũ I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K. si fieri potest, & per K. [a] ducatur L M, parallela ipsi BC. [b] Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, aequalia: Est [c] autẽ DGKM, maius quam DGIF. Quare & maius erit BHKL, quã DGIF. Cum ergo DGIF, aequale ponatur ipsi BEIH; [d] erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quam totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum,

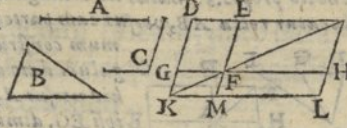


[a] 31. primi.
[b] 43. pri
[c] 9. pron
[d] 1. pron

PROBL. 12. PROPOS. 44. xliiij.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, [e] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, vt FH, sit æqualis rectæ A, & per H, [f] ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & [g] per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, [h] cum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui fac



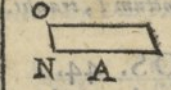
[e] 42. pri
[f] 31. pri
[g] 31. pri
[h] 15. pri

SCD LYON 1

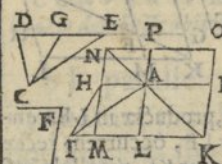
tus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum
[a] 43.pri L M F H, æquale est triangulo B, [a] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnũ latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturque parallelogrammũ, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam constituamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatque super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triãgulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaque recta C G, secante ex scholio propos. 38. huius lib triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eam partem, vbi parallelogrammum constituendũ debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatque A H, æqualis ipsi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, [b] constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit constituendum, sursum vero, si versus inferiorem. Posita autem recta A I, æquali ipsi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales; [c] erunt triangula A H I, E G C,



[b] 23.pri

[c] 4. pri.

aqua-

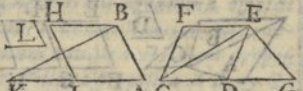
æqualia, Post hæc, [a] ducta per I, ipsi HB, parallela IK, [b] constituatur in A, versus hanc parallelam angulus HAL, angulo dato F, æqualis, secetque AL, rectam IK, in L. [c] Ducta quoque per H, ipsi AL, parallela HM, secante IK, in M, [d] erit parallelogrammum AHML, trianguli AHI, duplum: Est autem & triangulum CDE, trianguli EGC, duplum, quòd æqualia ostensa sint triangula EGC, DGC. Igitur cum æqualia sint demonstrata triangula AHI, EGC, [e] erũt æqualia parallelogrammum AHML, & triangulum CDE. Iam vero sumpta recta LK, data rectæ AB, æquali ducatur recta KA, producaturq. donec cum MH, producta coeat in N, & per N, agatur ipsi HB, parallela NO, donec in O, coeat cum KB, protracta, ac tandem LA, producatur vsque ad P, in rectã NO. Dico parallelogrammum ABOP, esse id, quod quæritur. Est enim constitutum super datam rectam AB, habetque angulum BAP, dato angulo F, æqualem, [f] cum æqualis sit angulo HAL, qui angulo F, factus est æqualis. Deinde æquale est dato trangulo CDE, [g] cum æquale sit parallelogrammo AHML, quod triangulo CDE, ostensum fuit æquale.

[a] 31. pri
[b] 23. pri
[c] 31. pri
[d] 41. pri
[e] 7. pron
[f] 15. pri
[g] 43. pri

PRAXIS vero huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quod recta HI, duci non debet, neque recta CG. Hæ enim propter demonstrationem tantum ductæ sunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo cõstituere æquale triangulum in dato angulo rectilineo.



SIT data recta AB; datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, vt DG, æqualis sit ipsi CD, & iungatur GE, recta: Eritque triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41. [h] Fiat iam super data recta AB, parallelogram-

[h] 44. pri

mum ABHI, æquale triangulo CEG, hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur AI, ad K, vt sit IK, æqualis ipsi AI, iungaturque recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habensque angulum A, æqualem dato angulo L; æquale esse dato parallelogrammo CDEF. Cum enim triangulum ABK, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum.

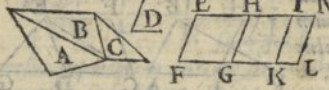
PRAXIS huiusce problematis à constructione nō differt; difficilisque non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo ECG, parallelogrammum ABHI, super data recta AB, in dato angulo A, construatur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

A D datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolute, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter vsurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data EF; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur construere ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineū in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, [b] æquale

b 44. pri.



parallelogrammum constituatur EFGH, super rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Itē super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Itē super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale

trian-

triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli EFG, HGK, [a] inter se sunt æquales cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, [b] qui duobus rectis æquiualent, [c] æquales duobus angulis HGK, FGH, ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [d] Quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, (& cũ sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) [f] & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur EI, FK, sint parallelæ, [g] Itemque EF, IK, quod vtraque parallela sit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum IKLM, adiunctum parallelogrammo EFKI, constituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

a 1. pron
b 29 pri.
c 2. pron
d 14. pri mi.
e 34. pri.
f 29. pri mi.
g 30. pri

SCHOLIVM.

PARI ratione, propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeãtur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hęc parallelogramma efficiãt vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita AB, & C; Atque AB, resoluatur in triangula A, & B, singuliſq. triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL, super rectas EF, HG, IK, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogram

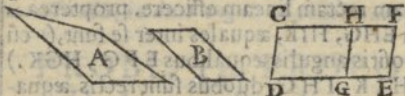
SCD LYON 1

mum totum EFLM, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

H V C referri poterit problema vtilissimum ex Poletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



SINT data rectilinea A, & B, sitque A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B.

a 45. pri *Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam CD, parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrämo EFHG, superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogramo EFHG. Quod est propositum.*

xlv. PROBL. 14. PROPOS. 46.

A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta AB, super quam oporteat quadratum

b 11. primi. describere. Ex A, & B, b educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim anguli A, & B, sint recti, c erunt A D, B C, parallelæ: Sunt autem

c 28. primi. d 33. pri & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur d & AB, DC, parallelæ sunt & æquales: & ideo parallelogrammum est ABCD, in quo, cum AD, DC, CB, æquales sint

SCD LYON 1

ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, [a] æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

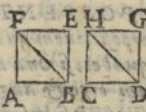


a 34. pri

EX PROCLO.

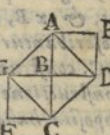
LINEARVM æqualium æqualia, sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

SINT primum rectæ AB, CD, æquales. Dico eorum quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris BF, DH, erunt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus lateribus DC, CH, trianguli DCH, æqualia, vtrumque vtrique, cum ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales sint rectis AB, CD. Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti. [b] Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ [c] cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.



b 4. pri.
c 34. pri

SINT deinde quadrata ABDE, BCFG, æqualia. Dico lineas quoque ipsorum AB, BC, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ AB, BC, in directum constituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti, [d] erunt & rectæ GB, BD, in directū constitutæ. Ducantur diametri AD, CG, iunganturque rectæ AG, CD. Quoniam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo BCD, fiet totum triangulum ACD, toti triangulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandem habeant basin CD, ad easdemq. sint partes, [e] in eisdem sunt parallelis:



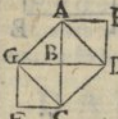
d 14. pri

e 39. pri

ideoque

ideoque parallelæ sunt AG, CD. Et quoniam, vt in scholio propos. 34 ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoque æquales. Quamobrem, a & parallelæ sunt AD, CG. Igitur parallelogrammum est ADCG: ac propterea b rectæ AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, vt in scholio propos. 34 ostensum fuit: erunt reliqua latera æqualia, nempe AB, ipsi BC, &c. Quod est propositum.

a 27. primi
b 34. primi



c 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo breuius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, congruent quoque ipsi inter se, ideoque totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius esset.

PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem AB, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iungantur q. rectæ BC, DC, constructum erit quadratum. Nam ABCD, cum ex constructione sit figura æquiliū. laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto, d erunt & B, D, recti, necnon e & oppositus angulus C, &c.

d 29. pri.
e 34. pri

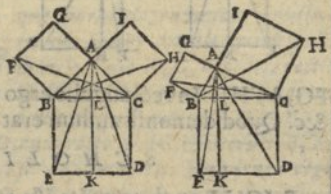
THEOR. 33. PROPOS. 47.

xlvj.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subten-

dente

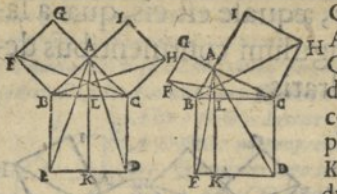
dente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, a describanturq. super AB, AC, BC, quadrata, ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratũ BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, b parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, c erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemq. modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, d fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterq. totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BF, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; e Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, f duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL. duplum trianguli ABE, quòd sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare g æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. h Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq. eorum dupla, parallelogrammum videlicet

a 46. primi.
b 31. primi.
c 14. primi.
d 2. pron
e 4. primi.
f 41. pri
g 6. pron
h 4. pri.

CDKL,



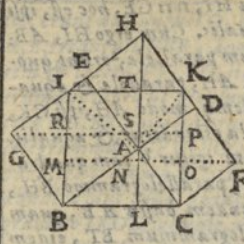
CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totũ quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BE-KL, CDKL; æquale est duobus quadratis AB-FG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate isto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppositum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppositi æquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum; perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

QVONIAM vero theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæpretium iudicaui tentare, num illud alijs vijs demonstrari possit, variata aliquantulum constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rursus triangulum ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productisq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipsis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelæ agantur coeuntes in F, G.

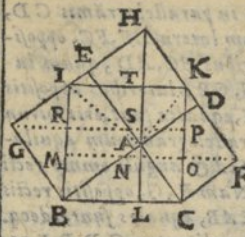
Et



Et quia in parallelogrãmis CD, BE, [a] *tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quam latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, æqualia sunt, erit vtrunque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt.* [b] *Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, æquales sunt, ideoq. recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB,* [c] *æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturq. recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG, auferatur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales sunt; sunt autem & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A. B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE.* [d] *Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erũt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quam AB, FK, & anguli E, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, triãguli FKC, æquales sunt: (cum A, F, recti sint, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi ACK) & latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare recta BI, CK, inter* [e] *se etiam æquales erunt.* [f] *Cum ergo quoque sint parallelæ,* [g] *erunt etiam BC, IK, æquales, & parallelæ. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti, quod anguli I, K, oppositis rectis C, B, æquale sint. Dico ergo, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia GE,* [h] *ipsi BA, æqualis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, quæ ipsi AC, siue AD, ostensa fuit æqualis, erit &, addita communi*

a 34. primi.
b 34. primi.
c 29. pri
d 26. pri
e 1. pron
f 28. pri
g 33. pri,
b 34. pri.

EI,



a 33.pri. b 35.pri

EI, tota HI, toti GE, hoc est, ipsi AB, æqualis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallelæ, erunt quoque BI, AH, parallelæ & æquales. Eodemq. modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur b tam quadratum BE, parallelogrammo BH, super eandem basin AE, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, æquale est,

c 1.pron c 35.pri c 1.pron

c erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Sic etiam quia tam d quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quam parallelogrammū CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, æquale est, e erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, æquale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, æquale est. Quod erat demonstrandum.

f 41.pri g 6.pron h 41.pri.

ALITER. Loco rectæ HTAL, iungantur duæ rectæ AI, AK, & per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo f tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est. g erit quadratum BE, parallelogrammo BT, æquale. Pari ratione, quia h tam quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, super eandem basin CK, duplum est, i erit quoque quadratum CD, parallelogrāmo CT, æquale. Quam ob rem, vt prius, totū quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatū, duobus quadratis BE CD, æquale est. Quod erat ostendendum.

i 6.pron

ALITER. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelæ FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, æqualis. Quoniam enim k anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG,

k 29.pri.

æquales, quod vterque angulo ABC supra ostensus sit æqua-

lis;

lis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quod vtrumque supra sit ostensum ipsi BC, æquale. a Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaque quoniam b tam parallelogramma BCFN, BCOM super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, æqualia sunt, est. parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, ostensas æquales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumque æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, compositio æqualia. c Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, æquale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonstrandum erat.

a 26. pri
b 33. pri
c 35. pri

ATQVE in hunc modum aliæ demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, varijs demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENTIO porro admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisset q. quadratum numerum maioris æqualē esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulū sub his duobus lateribus contentum, inuenitq. eum esse rectum. Idq. in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c.

obser-

obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaq. ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. Vbi demonstrauit, non solum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, sive ea sit triangulum, sive quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterq. descriptæ, vt ibidem ostendemus.

CÆTERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. si ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reyce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quod si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicumque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq. adde vnum, habebisq. reliquos duos numeros

SCD LYON 1

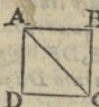
ros 8 & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucũda tam theoremata, quam problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura credantur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratũ diametri AC, duplũ esse quadrati ABCD. Cum n. in triangulo ABC, angulus B, rectus sit, [a] *erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia sint, quòd lineæ AB, BC, sint æquales; erit quadratum diametri AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ AB, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum.*

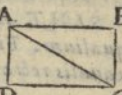


[a] 47. pri

II.

QVADRATVM diametri figuræ alterę parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC; & quia in triangulo ABC, angulus B, est rectus, [b] *erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB, BC. Quod est propositum.*



[b] 47. pri

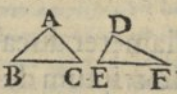
III.

SI fuerint duo triangula rectangula,

quorum

quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia, duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli A, & D, sint recti, lateraq. opposita BC, EF, æqualia. Dico duo quadrata laterum AB, AC, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum DE, DF, simul sumptis.



Nam quadrata linearum BC, EF, æqualia inter se sunt, cũ & ipsæ lineæ inter se ponantur æquales Quadrato aũt lineæ BC, [a] *æqualia sunt quadrata linearum AB, AC. Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum DE, DF.* [b] *Quadrata ergo rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF, æqualia sunt Quod esti propositum.*

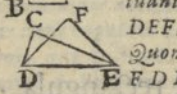
a 47. pri

b 1. pron

IIII.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

SINT A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, sitque DC, recta æqualis rectæ B, & rectæ CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, coniungente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti DEF, EDF, [c] *coeantq. rectæ DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, æquales sunt;* [d] *erunt & latera DF, EF, æqualia, ideoque & quadrata*



c 13. prō

d 6. pri.

eorun-

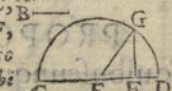
eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF, EF, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum CE, & CD. Nam cum in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant vnum rectum; [a] erit reliquus angulus F, rectus. [b] Quamobrem erunt quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE: [c] Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia sunt quoque quadrata linearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, [d] æqualia sunt quadratis linearũ DC, EC. Quod est propositum.

[a] 32. pri
[b] 47. pri
[c] 47 pri
[d] 1. pron

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.

POTENTIA lineæ rectæ dicitur eius quadratum. Tantum enim quæuis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq; cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ A, quam minoris B. Ex quauis linea recta CD, sumatur CE, æqualis rectæ A, & EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo EC, semicirculus describatur CGD; & ex F, ducatur FG, perpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ CE, sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ B, hoc est, rectæ EF, sibi æqualis, quadrato rectæ FG. Ducta enim recta EG, [e] erit eius quadratum æquale quadratis rectarum EF, FG, hoc est, quadratum rectæ EC, illi æquale, superabit quadratum rectæ EF, quadrato rectæ FG. Quod est propositum.



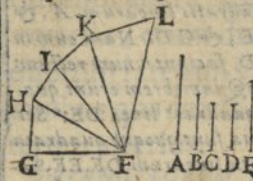
[e] 47. pri

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, E. Oporteatq.

eatq. inuenire quadratam æquale omnibus illis quinque.

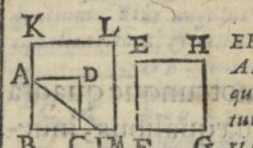


Fiat angulus rectus FGH, sitq. recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq. HI, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitque IK, æqualis rectæ D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitq. KL, æqualis rectæ E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH, [a] æquale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ FI, [b] æquale est quadratis rectarum FH, HI, & ideirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK, [c] æquale est quadratis rectarum FI, IK, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ FL, [d] æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.

[a] 47. pri
[b] 47. pri
[c] 47. pri
[d] 47. pri

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.



SINT duo quadrata ABCD, EFGH, propositumque sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq;

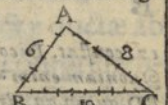
quadra-

quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctum, æqualem esse quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectæ AI, hoc est, quadratũ BKLM, a æquale est quadratis rectarum AB, BI, hoc est, quadratis ABCD, EFGH: si auferatur commune quadratum ABCD, b remanebit figura ADCMLK, æqualis quadrato EFGH. Quod est propositum. a 47. pri b 3. pron

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, incognitionem reliqui lateris peruenire.

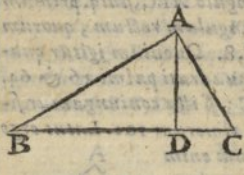
SIT angulus A, rectus in triangulo ABC, sintq. primum cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64. c æqualia sunt quadrato rectæ BC; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergo BC, continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, sitq. AB, 6. palmorum, & BC, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, d æqualia sunt quadrato rectæ BC; si quadratum rectæ AB, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ BC, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectæ AC, 64. palmorum. Latus ergo AC, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu radix 64. palmorum. Quod est propositum. Caterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemve quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpenumero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant: Sed de his alias. c 47. pri



d 47. pri

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, ſecabitur baſis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.



CADAT primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius ſit latere AC, perpendicularis AD, ad BC, demiſſa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterque angulus B, C, acutus eſt, vt ex coroll. 2. propos. 17. conſtat. Dico ſegmentum BD, eſſe maius ſegmento CD.

a 47. pri *Quoniam enim* a *tam quadratũ ex AB, quadratis ex AD, BD, quam quadratũ ex AC, quadratis ex AD, CD, æquale eſt: Eſt autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato rectæ AD, reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quam recta CD. quod eſt primum.*

FACIAT deinde perpendicularis AD, ſegmentum BD, maius ſegmento CD. Dico latus AB, maius eſſe latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Additoq. quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex CD, AD, maiora erunt. Cum ergo

b 47. pri *b tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quam*

quadra-

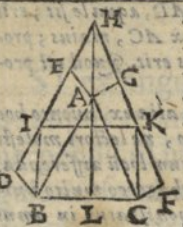
quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD, æquale sit; erit quoque quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; propterea q. & latus AB, latere AC, maius erit. Quod est propositum.

ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locũ differenda.

THEOREMATE porro hoc Pythagoreo multo uniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quam Pappus.

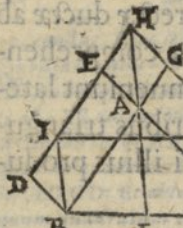
IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq. super latera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponũtur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus AB, AC, cõprehensi, conueniant in H, ducaturq. recta AH. Dico parallelogrãma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum



latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L. & per B,C, agantur BI,CK, parallelæ ipsi AH, iungaturq. recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BIHA, CKHA; a erit vtraque BI,CK, ipsi AH, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt BI, CK; b quæ cum sint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ sint; c erunt quoque BC,IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BC, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogrãma AD, AF. d Quia ergo æqualia sunt parallelogramma AD, ABIH, quòd eandem habeant basin AB, in eisdemq. sint parallelis AB, HD; e Est autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat basin BI, in eisdemq. sit parallelis BI,LH: Erit quoque AD, eidem IL. æquale. Non aliter ostendemus, AF, ipsi KL, esse æquale. Quare parallelogramma AD,AF, parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.

a 34. pri
b 30. pri
c 33. pri
d 35. pri
e 35. pri



PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas AC, AE; & AB, AG, in directum positas, ita vt parallelogramma AD, AF, sint æquiangula, habentia angulos AED, AGF angulo BAC, f internos externo æquales, cuius hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.

f 29. pri.

xlvij.

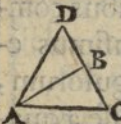
THEOR. 34. PROPOS. 48.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ

SCD LYON 1

à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis : Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, fitq. quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, esse rectum : Ducatur namque BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturq. recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus est ; [a] erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob lineārum æqualitatem. Quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur, [b] erunt quadrata rectarum AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; [c] erunt anguli ABD, ABC, æquales : Est autem angulus ABD, ex constructione rectus. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 47. primi.

[b] 1. pron

[c] 8. pri.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum

quando duo latera duobus lateribus æqua-
tia sunt, vtrumq. vtrique, cõtinentq. angu-
a 4. pri. lum angulo æqualem, a collegit æqualita-
tem basium, reliquorum angulorum, atque
adeo totorum triangulorum.

DEINDE, quando duo latera duo-
bus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtri-
b 8. pri. que, basisque basi æqualis, b intulit æ-
qualitatem angulorum illis lateribus com-
prehensorum. Vbi nos concluſimus e-
tiam æqualitatem reliquorum angulorum,
totaque triangula probauimus esse æqua-
lia.

TERTIO, cum duo latera duobus
lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique,
comprehendunt autem angulos inæqua-
c 24. pri mi. les, c ostendit basim maiori angulo oppo-
situm esse maiorem basi minori angulo op-
posita.

QVARTO, cum duo latera duobus
lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique,
d 25. pri at bases inæquales, d demonstrauit angu-
lum maiori basi oppositum esse maiorem
angulo minori basi opposito.

QVINTO, quando duo anguli duobus
angulis æquales sunt, vterque vtrique, &

SCD LYON 1

vnum latum vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, [a] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiã, tota triangula esse æqualia. [a] 26. pri

SEXTO [b] demonstrauit, duo triãgula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia. [b] 37. pri

SEPTIMO [c] ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse. [c] 38. pri

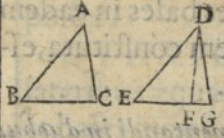
OCTAVO [d] docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas. [d] 39. pri

NONO denique [e] probauit, duo triãgula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas. [e] 40. pri

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis vniuersa fere Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem a propos. 26. in scholio propos. 31. excluſimus duas cõparationes, quando nimirum duo anguli duobus

angulis æquales sunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: sed quod in vno quidē angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas basce comparationes excluſimus, quod ex ijs non ſequatur reliquorum laterū æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque a propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.



SIT enim Iſoſceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta baſe GF, vſque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG, æquale triangulum conſtruatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DF, DG, æqualia ſint, & baſis BC, baſi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, angulique B, E, æqualibus lateri-

bus

bus AC, DF, oppositi æquales; & tamẽ basis BC, maior est base EF; quod BC, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quod angulus C, acutus est, at DFE, obtusus. Nam cum [a] anguli DFG, & G, æquales sint; [b] & simul sumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, recto maior; quandoquidem [c] duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demũ sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quam EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quod DF, idem sit, quod AC, ipsi DG, æquale; [d] erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque minor recto; quod [e] ambo minores sint duobus rectis. Cum igitur, [f] duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, qui a DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterq. angulus C, & G, minor est, aut non minor recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior base EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vtroque angulo C, & F, vel minore recto, vel nõ minore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, &

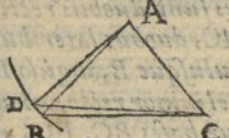
[a] 5. pri.
[b] 17. pri
[c] 13. pri
[d] 5. pri.
[e] 17. pri
[f] 13. pri.

DFE,

DFE, obtusus. quod est contra hypothesin.

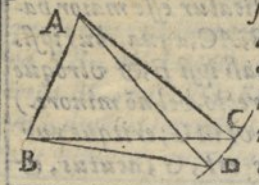
DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi post. Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit a ergo angulus ACB, maior angulo ABC. Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis: cadetque CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secãs CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD: opposito: Et tamẽ bases BC, DC, æquales nõ sunt. Si.n. æquales essent, essent tã duæ rectæ AB, AD, quã duæ CB, CD, æquales. b quod est absurdum. vel etiam, anguli BAC, DAC, c æquales essent, pars & totum. quod est absurdum.

a 18. pri



b 7. pri.
c 8. pri.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehẽsus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namq. triangulum ABC, cuius vtrumq. latus AC,



CB,

CB, maius sit latere AB; & BC, maius, quam AC, Erit c ergo angulus BAC, maior angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC, æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD, erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia; vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur: Et tamen bases BC, BD, æquales non sunt. Alias tam rectæ AC, AD, quam BC, BD; æquales essent a quod est absurdum. Vel etiam, anguli BAC, BAD, æquales essent, totum & pars. quod est absurdum. c 18. pri.

a 7. pri.

b 8. pri.

RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

SCD LYON 1

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

I.

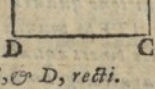
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quanta sint & quadrata partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, recte intelligenda maxime necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis

conti-

contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primũ est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint AD, BC, [a] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniã vero [b] quilibet suo oppositus est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.



a 29. pri

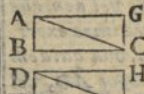
b 34. pri

DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB, AD; vel sub AD, DC; vel sub DC, CB, vel denique sub AB, BC: quoniam qualibet huiusmodi duæ linea exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt AB, vel DC, eius longitudinem, altera vero, vt AD, vel BC, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius lineæ in alterã huiusmodi parallelogrãmum conficitur. Si namq; animo concipiatur recta AB, deorsum secundum rectam AD, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum AD, constituat, donec punctũ A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum ABCD. Idẽ fiet, si AD, ponatur moueri in transuersum secundum rectam AB, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

ITAQVE parallelogrammum rectangulum; quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F.

PERSPICVVM autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim qualibet illarum linearum æqualium æqualis sit linea oppositæ, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifestum est, si duæ rectæ lineæ alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest.



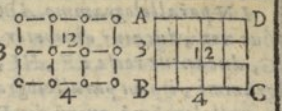
Sint rectæ AB, BC, æquales rectis D E, E F, vtraque vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum A B C G, contentum sub AB, BC, æquale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [a] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.

[a] 4. pri.

HABET autem comprehensio hæc parallelogrãmi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnã affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4 producitur numerus 12. qui in formã parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoq. parallelogrammũ

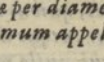
ABCD,

SCD LYON 1



ABCD, cõprehẽsum sub duabus rectis AB, BC, quarũ illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu lineæ AB, 3. palmorum in lineam BC, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq. est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq. à Ioanne Regiomont. lib 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ AB, in lineam BC, vel (quod idem est) ex ductu lineæ BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

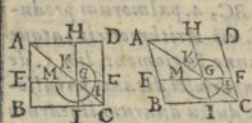
OBITER quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem litera repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diamerum opponuntur. Vt appositum parallelogrammum appellant AC, vel BD.



II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorũ, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo ABCD, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter AC, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ EF, HI, parallelæ lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogrãma, quorũ duo EH, IF, dicũtur esse circa diametrum, alia vero duo BG, GD, complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex IF, vna cum duobus complementis BG, GD, qualis est figura EBCDHGE, quam complectitur circunferentia KLM, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura FDABIGF, composita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.



SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sane operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisite intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex aliis deinde propositionibus huius lib. eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorũ, quæ neque per Diuinã potentiã in numeris possunt exhiberi, & hæc res contradictionẽ implicet, vt Philosophi, atq. Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis. n. credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratã num. 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quòd

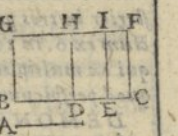
illa

illa paulo minor sit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4? Et tamen summa, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior est, quam 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area, & quantitas cuiusuis trianguli exquisitissime cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atque dimanat. Postremo vltima propos. huius lib. omnẽ figuram rectilineã licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt vere aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, vtilitates vero contineat prope infinitas.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.



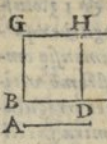
Rectangulum enim BF, comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perdendiculares BG, CF, æquales rectę A, ducaturq. recta FG. Nam rectæ BG, CF, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A. æqualis ponatur. [c] Igitur erunt quoque GF, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac

[a] 28. primi.
[b] 1. pron
[c] 33. pri

proinde rectangulum erit BF, contentum sub A, siue GB, & BC, ex defin. 1 huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, [a] inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cum ex constructione parallelogramma sint BH, BI, [b] æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub insecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secetur. ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 30. primi.

[b] 34. primi.



SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, vt lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectan-

gulum

gulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. Dico rectangulum sub rectis AB, AC, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC, continentur. Compleatur rectangulum AI, ducãturq. DK, EL, FM; parallelæ ipsi AC, vel BI: Item HN, GO, parallelæ ipsi AB, vel CI; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum AS, continetur sub AD, AG; & GP, sub AD, GH; & HK, sub AD, HC; (a quod rectæ GS, HP, ipsi AD, sint æquales:) 34. pri. Item rectangula DT, SQ, PL, continentur sub DE, AG; DE, GH; DE, HC; (b quod DS, SP, PK, ipsis AG, GH, HC, æquales sint, & ST, PQ, ipsi DE.) Et eadem ratione rectangula EV, TR, QM, continentur sub EF, AG; EF, GH; EF, HC: Necnon rectangula FO, VN, RI, sub FB, AG; FB, GH, FB, HC; perspicuum est, rectangulum sub AB, AC, æquale esse rectangulis sub singulis partibus AD, DE, EF, FB, & quolibet segmentorum AG, GH, HC, comprehensis. Quod est propositum.* 34. pri



SI sint duæ rectæ lineæ, secenturq. ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quę sub totis lineis, & dictis partibus mutuo

continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub AB, AC, vna cum rectangulo comprehenso sub partibus AD, EC, æquale esse rectangulis contentis sub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur enim rectangulum AF, agaturq. per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; necnon per E, recta EH, secans DG, in I, parallela ipsi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF; æquale est rectangulis EF, DH, AI; si addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe sub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehensis æqualia. Quod est propositum.



IN numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq. simul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.

RVRSVS, si idem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7 posterior autem in 2. 6. manifestum quoque est 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet se-

gmento-

gmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. Describatur enim AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ[a] æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB. Quare cum rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 34. primi.

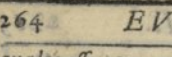
ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta AB, hoc est quadratum rectæ AB, æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. quod est propositum.

[b] 1. sec.

SCHOLIVM.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris vero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70 & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æ-

quales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.



SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea recta secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmẽtis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta AB, diuisa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DE, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumptæ enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisaq; in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales. Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.



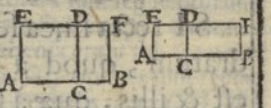
IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

THEO-

SCD LYON 1

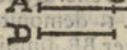
THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.



LINEA recta AB, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC, [a] æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.



a 1. sec.

SCHO-

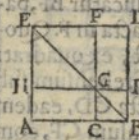
SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, una cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.



RECTA linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB. æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturq. diameter BE. Deinde ex C. agatur CF, parallela rectæ BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectæ AB. Eritq. quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, æqualia sunt; [a] erunt duo anguli ABE, AEB, æquales: Atqui [b] tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt æquales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quæ ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, [c] æquales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est,

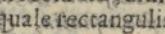
a 5. pri.
b 32. pri
c 32. pri

cum

a cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoq. æqualis angulo FEG. Quare b æqualia erunt latera EF, FG; quæ cũ sint c æqualia oppositis lateribꝰ GH, HE, erit parallelogrammũ FH, quadratũ, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes ãguli recti; propterea quod existente vno angulo recto, nempe FEH, vel F, in parallelogrãmo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, d æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG; comprehensa erunt sub segmentis AC, CB, propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ GB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est e rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 29. pri
b 6. pri.
c 34. pri
d 34. pri
e 34. pri

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, f erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, AC, comprehensum, g æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.



f 2. sec.
g 3. sec.

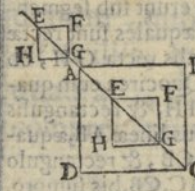
COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, quæ sunt

circa

circa diametrum BE, esse quadrata. In emnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, qua communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI, FH. Illud enim angulum habet ABD, communem cum quadrato, hoc vero angulum AED. Idem nihilominus verum est de quibuscunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem commnem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, consistat parallelogrammum FH, sive intra quadratum, sive extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, esse quadratū. Cum enim parallela sint AB, EF, a erunt anguli BAC, FEG, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli BCA, FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC, BCA, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli FEG, FGE, semirecti erunt: b propterea que latera EF, FG, illis opposita, æqualia, c & angulus F, rectus. Quare cum EF, FG, latera d æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum est, ex ijs, quæ ad defin. 1. huius lib. ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.



a 29.pri

b 6.pri.
c 32.pri
d 34.pri

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos AEB, DEB, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1 demonstrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis

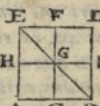
partium

partium 7. & 3. vna cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptũ, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.

SIT enim primum linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bifariam in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atque inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, omnesq. anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. Quare cum quadratum AD, æquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratum lineæ AB, quadruplum quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi AC. Est enim vtraque dimidium lineæ AB.



BREVIVS. Quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium AC, CB, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus AC, CB, quadratum quoque sit, atque æquale quadrato rectæ AC; Constat quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ AC, æquale est. 2 4. sec.

SIT deinde quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplum esse lateris K. Nam diuisa rectæ AB, bifariam in C, vt AB, dupla sit ipsius AC; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ AB, quadruplũ quadrati rectæ AC. Ponitur aũt & quadruplũ quadrati rectæ K. Igitur æqualia sunt quadrata rectarũ K, &

AC,

AC, & ipsæ propterea rectæ K, & AC, æquales: Est autè AB, ex constructione ipsius AC, dupla. Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

CAETERVM ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quæritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendusq. numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus vna vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc

a 4. sec. *est. Quoniam quadratum AD, rectæ AB, [a] æquale est duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub AC, CB; si gnomonem H B F, qui cum quadrato FH, constituit totum quadratum AD, ponamus 15. quantus nimirum est datus numerus: quadratum autem CI, statuamus 1. atque adeo latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde segmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, quæ est 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8, nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hæc ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium statuamus latus quadrati FH, quæsiti.*

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit.

IDEM efficiemus, si ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & residui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quæsiti. Vt si detur numerus 45. pro gnomone H B F,

aufera-

auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus est 3. Residui 36. dimidium est 18. pro AG, quod diuisum per 3. hoc est per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, residuus numerus habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quinis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam si ex numero dato demat 1. & reliqui numeri dimidio adijciatur 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7. quod perpetuo est vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius regulæ facilis est ex eadem figura huius propos. 4 Nam si gnomonem HBF, qui ex quadrato AD, subtractus reliquum facit quadratum FH, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus. Quadratū vero CI, statuamus 1. atque adeo & latus eius CB, 1. erit vtrumlibet rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde & segmentum AC, 7. vt supra dictum est, & tota linea AB, 8. &c.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta AB, bifariam in C, & per

inæqua-

inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratum super dimidia C B: & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoque D H, recta

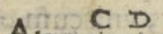


[a] 34. pri rectæ D B, æqualis: [a] Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æ-

[b] 43. pri quale esse quadrato C F. Quoniam ergo [b] complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammum D F, parallelogrammo C I, æquale:

[c] 36. pri [c] Est autem & A K, eidem C I, æquale, quod & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cum gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vna cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.



ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 11. exclusiue faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propo-

situm

situm exequemur. Quia quadratum ex CB, [a] *æquale est quadratis ex CD, DB, una cum rectangulo bis sub DB, CD; Rectangulo autem sub DB, CD, una cum quadrato ex DB,* [b] *æquale est rectangulum sub DB, CB; Erit quadratum ex CB, æquale reliquo quadrato ex CD, una cum reliquo rectangulo sub DB, CD, & rectangulo sub DB, CB, vel sub DB, AC. Atqui rectangulis sub DB, AC, & sub DB, CD,* [c] *æquale est rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CB, æquale erit quadrato ex CD, una cum rectangulo sub DB, AD; hoc est, rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex CD, æquale erit quadrato ex CB. Quod erat demonstrandum.*

[a] 4. sec.

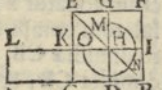
[b] 3. sec,

[c] 1. sec.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, una cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maior latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum AH, cum quadrato KG, [d] *æquale sit quadrato CF; si rectangulum AH, ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum DI, statuatur 1. ac proinde latus DB, quoque 1. erit recta AD, 15. vt nimirum ex AD, in DB, gignatur 15. rectangulum videlicet AH. Addita ergo 1. erit tota linea AB. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur CD, 7. latus nimirum quadrati KG.*

[d] 5. sec.



HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.

E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum AH, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum KG, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum DI, ponatur 1. atque adeo & DB, eius latus 1. erit tota AB. 16. & eius dimidium CB, 8. &c.

vj.

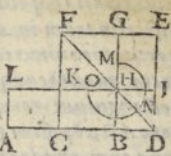
THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehẽsum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, componitur. Describatur namque CE, quadratum super CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, secans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, paral-

lela

lela rectæ CD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoq. recta DI, rectæ DB, æqualis: [a] Est autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur sub rectis AD, DB, & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque est, rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale esse quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, [b] æquale est parallelogrammo CH, quod bases AC, CB, æquales sint: [c] Est autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter se. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonstrandum.



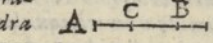
[a] 34. pri

[b] 36. pri

[c] 43. pri

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex CD, [d] *æquale est quadratis ex CB, BD, vna cum rectangulo bis sub DB, CB, hoc est, quadratis ex CB, BD, vna cum rectangulis sub DB, CB, & sub DB, AC: (sumpta AC, semel pro CB, qua illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub DB, AC; DB, CB; & sub DB, DB, (quod est quadratum ex DB,)* [e] *æquale rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CD, æquale est reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo sub DB, AD: Hoc est, rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex CB, æquale est quadrato ex CD. Quod demonstrandum erat.*



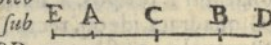
[d] 4. sec.

[e] 1. sec.

CAETERVM si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per precedentem 5. facillime posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Bre-

SCD LYON 1

scius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit enim recta AB, secta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque BD. Dico rectangulum comprehensum sub totaAD, cõposita, & adiecta BD, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato rectæ CD, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque rectæ AD, ex altera parte rectæ AE, quæ adiecta BD, æqualis sit, erit tota ED, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod EA, AC, ipsis DB, BC, æquales sint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtrique communis.



2 5. sec. a Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus EB, BD, vna cum quadrato intermediæ sectionis CB, hoc est, rectangulum sub AD, BD, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale erit quadrato dimidiæ CD, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia CB, datæ rectæ AB, & ex adiecta BD, compositæ. Quod est propositum.

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hoc theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq. ei numerus 2. Vides igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. vna cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hoc porro theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, superet CD, magnitudine AC, hoc est, CB; & CD, superet BD, eadem magnitudine BC: habebunt tres lineæ AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima AD, superat secundam CD, eodem excessu AC, siue CB, quo secunda CD, tertiam BD, superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis AD, BD, vna cum quadrato excessus CB, æquale esse quadrato lineæ mediæ CD; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, vna cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Sem-

per

per enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiã, & ex tertia. Vt patet, si tres rectæ sint datæ AD, CD, BD. Si namque ex prima AD, abscindatur DC, æqualis mediæ, & ex media hac DC, auferatur tertia DB, erit AB, (excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia BD. Cum enim CB, excessus sit inter mediam CD, & tertiam BD, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi AC, nempe excessui inter primam AD, & mediam CD; erit necessario AB, secta in G, bifariam. Eademq. ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3, habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero demat̃r 1. & reliquus numerus bifariam secetur, erit quadratus numer⁹ huius dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1, relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerũ quadratum 49. quæsitum. Nam 15. cum 49. facit quadratũ numerũ 64. cuius latus 8. vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta ex hac 6. propos. Cum enim rectangulum AI, cum quadrato GK, æquale sit quadrato CE; si rectangulum AI, statuatur 15, at quadratũ BI, 1. ideoq. & latus BD. 1. erit tota linea AD, 15. vt nimirum multiplicata in BD, 1. producat rectangulũ AI, 15. Ablata igitur 1. BD. remanet AB, 14. cuius dimidiũ 7, dabit CB, latus quadrati KG, quæsiti. a 6. sec.

NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

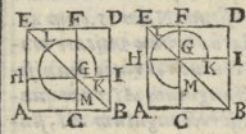
VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerũ relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui nume-

ri dimidio adijciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit qnadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum AI, quod ex quadrato CE, subtractum relinquit quadratum KG, statuatur 15. at quadratum BI, ideoque & BD, eius latus 1. erit tota linea AD, 15. vt dictum est. Dempta ergo 1. B D, erit AB, 14. cuius dimidio CB, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus CD, 8. quod quæritur, &c.

vij.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.



SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cum quadrato reliqui segmenti CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4 huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, [a] æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC.

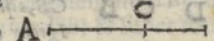
[a] 34. primi.

Eadem

Eadem ratione rectangulum H D, comprehensum erit sub eisdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, E H, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc est, gnomoni K L M, vna cum quadrato CI, æquale est quadratum AD; si apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti C B. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB; [a] *4. sec.*
si addatur commune quadratū



ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, [b] *æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB. vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat.* [b] *3. sec.*

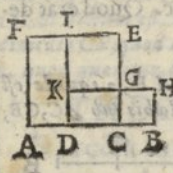
IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16 quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus conti-

netur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituatur enim quadrata AE, CH, & agatur DI, ipsi CE, parallela, producaturque HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc est, CE, toti DB, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH. Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, a cum & IE, ipsi DC, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoq; IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est enim AC, vtrique lineæ AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.



SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota

& vno segmentorum, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.



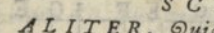
SIT recta AB, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub AB, & segmento siue maiore, siue minore CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento CB, componitur. Producatur enim AB, versus dictum segmentum CB, ad D, sitque BD, recta æqualis segmento CB; & super tota AD, quadratum describatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipsi DE, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipsi AD, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per collorarium 1. propos 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP, circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, [a] æqualis est rectæ AC, erit OI, quadratum segmenti AC. Rursus [b] quia NH, æqualis est rectæ CB, erit NQ, quadratum segmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales sint. Quare rectæ BH, HQ, æquales sunt segmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehensa erunt sub AB, & segmento CB, [c] cum LH, sit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehensa sub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ [d] æquales sint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectę FL, hoc est, rectæ LH, hoc est, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia sunt; si addatur commune KG, erunt BM, KG, simul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta AB, & segmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum

[a] 34. pri
[b] 34. primi.
[c] 34. pri
[d] 34. pri

dratum OI, æqualia sint quadrato AE; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

a 4. sec. *ALITER. Quia quadratum ex AD, æquale est quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC: At quadrata ex AB, BC,*



b 7. sec. *b æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numeras 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hæc 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

NAM

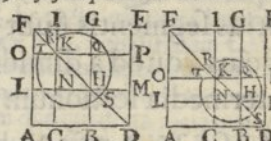
NAM recta AB, secta est in C, vtcunque, eique addita BD, segmento CB, aqualis, demonstratumque est, quadratum totius AD, aquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, vna cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

SI linea recta secetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, secta est bifariam in B, eique addita CA, probatumque fuit, quadratum totius AD, aquale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & sub dimidia CB, vna cum quadrato adiecta AC.

IAM vero ex hac quoque propos. 8. inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater sumptum, cum quadrato OI, a aquale est quadrato AE; si rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum CH, adeoque & CB, eius latus, 1. erit linea AB, 8. vt ducta in CB, 1. faciat



a 8. sec.

8. Abla-

8. *Ablata ergo* 1. *reliquum erit AC, latus quadrati OI,* 7. *quod quæritur.*

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. *numeretur.*

CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namque ad quartam partem numeri dati addatur 1. *constabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus* 32. *si ad quartam eius partem* 8. *adijciatur* 1. *fiet latus* 9. *à cuius quadrato* 81. *si detrahatur datus numerus* 32. *remanebit quadratus numerus* 49. *cuius latus* 7. *semper est vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, sublatus relinquit quadratum OI, hoc est, si rectangulum AH, quod gnominis RST, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur* 8. *quarta pars dati numeri* 32. *at quadratum BM, ideoque & latus eius ED,* 1. *erit linea AB,* 8. *vt dictum est, ac proinde totum latus AD,* 9. *ex cuius quadrato AE, quod est,* 81. *si auferatur gnomon RST, quem posuimus esse* 32. *reliquum fiet quadratum OI,* 49. *cuius latus AC, est* 7. *quandoquidem AB, erat* 8. *& CB, hoc est, BD, illi æqualis,* 1. *quod quidē latus AC, perpetuo vna vnitate minus est quarta parte numeri dati* 32. *vt dictum est.*

viiij. ## THEOR. 9. PROPOS. 9.

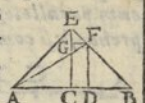
SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionnm C D. Edu-

catur

SCD LYON 1

catur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectę EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturque tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt, [a] erunt anguli CAE, CEA, æquales: Est autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur [b] anguli alium rectum conficient, ideoque AEC, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, [c] æqualis est recto ECB, externus interno; [d] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, propterea anguli EFG, FEG, æquales erunt, [e] ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, [f] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, [g] erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, [h] recta rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE, EF [i] æqualia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum



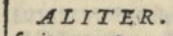
[a] 5. pri.
[b] 32. pri
[c] 29. pri
[d] 32. pri
[e] 6. pri,
[f] 47. pri
[g] 47. pri
[h] 34. pri
[i] 47. pri

rectæ

rectæ DF, æquale est quadrato rectę DB. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta AD, de-
[a] 4. sec. *scriptum,* [a] *æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, una cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis AC, CD, cõprehensoꝫ si commune apponatur quadratum ex DB, erunt*



duo quadrata ex AD, DB, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, DB, una cum rectangulo bis sub
[b] 7. sec. *AC, CD, vel sub BC, CD; Atqui quadrato ex DB, una cum rectangulo bis sub BC, CD,* [b] *æqualia sunt quadrata ex BC, seu AC, & ex CD. Quadrata igitur ex AD, DB, æqualia sunt bis quadratis ex AC, CD; Ac propterea quadrata ex AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. Quod ostendendum erat.*

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, æqualis est, & superat CB, ipsam CD, recta DB; superabit quoque AC, ipsam CD, eadem recta DB. Quare, vt ad 7. propos. huius libri demonstrauimus, quadrata rectarum AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis una cum quadrato rectæ DB; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectæ DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub
[c] 4. sec. *AC, CD, bis* [c] *est æquale quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.*

IAM vero rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt qua-

drato-

dratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt præcedentes, hoc modo. Descripto quadrato AE, totius lineæ AB, ductaque diametro BF, ducantur per C, D, lateribus AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum BF, in punctis I, K, per quæ lateribus AB, FE, parallelæ agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, a estque LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, æqualis; erunt NH, DO, quadrata partium inæqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ lineæ AC, & intermediæ sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, æqualia quadratis LG, QP, vt mox demõstrabitur; liquido constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quod autem tria hæc rectangula DO, NI, IH, æqualia sint quadratis LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, b æquale est rectangulo QM, quod recta NQ, QO, c æquales sint æqualibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratũ QP; & insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, æqualia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, æqualia duobus quadratis LG, QP. Esse autem KM, DO, IH, æqualia quadrato LG, sic demonstrabimus. d Rectangula KM, DO, simul æqualia sunt ipsi PE, quod recta BM, ME, æquales sint, cũ BM, æqualis sit ipsi CB, ob quadratum CM, c & ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est e ipsi AC. Addito ergo communi IH, erunt KM, DO, IH, æqualia ipsi IE, hoc est, quadrato LG: g quod IE, LG, æqualia sint, ob rectas LI, IM, h quæ æqualibus AC, CB, æquales sunt. Quod est propositum.



a 34. pri
b 36. pri
c 34. pri
d 36. pri
e 34. pri
f 34. pri
g 36. pri
h 34. pri

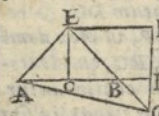
SCD LYON 1

X.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & iungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipsi CE, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, secans DF, in F, iungaturque recta AG. Ostenderur iam, angulum AEB, esse rectum, vt in præcedenti propos. & CEB, semirectum; [a] ideoque eius alternum, EGF, semirectum quoque: [b] Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus FEG, semirectus erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare [d] rectæ EF, FG, angulis angulis FEG, EGF, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum rectæ EG, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale est; erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est, rectæ CD, [g] cum CD, recta æqualis sit rectæ EF. Duo igitur quadrata rectarum



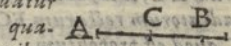
a 29. pri
b 34. pri
c 32. pri
d 6. pri.
e 47. pri
f 47. pri
g 34. pri

AE,

AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale est [a] quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, describuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Cum igitur quadratum rectæ DG, æquale sit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat. [a] 47. pri

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, [b] *æquale est quadratis ex AC, CD, una cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; si commune addatur quadratum ex BD, erunt duo quadrata ex AD, BD, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, BD, una cum rectangulo bis sub BC, CD,* [c] *Sed quadrato ex BD, una cum rectangulo bis sub BC, CD, æqualia sunt quadrata ex CD, BC, hoc est, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum.*



[b] 4. sec.

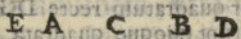
[c] 7. sec.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, est æqualis, & superat CD, ipsam CB, recta BD; superabit quoque CD, ipsam AC, eadem recta BD. Quare, vt ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectæ BD; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectæ BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Atqui quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis, [d] *æquale est quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.* [d] 4. sec.

NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quinis 3. vt totus numerus compositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. &

3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

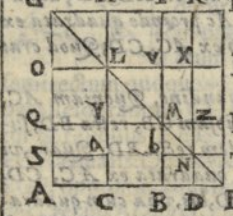
SED & hæc propos. 10. facile ex præcedente 9. demonstrabitur. quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta AB, secta bifariam in C, eique addita recta quæcunque BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum AC, CD, simul. Ad



dictam namque rectæ AD ex parte A, recta AE, quæ adiectæ BD, æqualis sit; erit tota ED, secta in C bifariam, & in B non bifariam, quod EA, AC, ipsis DB, BC, æquales sint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtrique communis. a Quadrata igitur rectarum EB, BD, hoc est, rectarum AD, BD, dupla erunt quadratorum rectarum EC, CB, hoc est, rectarum CD, AC. quod est propositum.

a 29. sec.

QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta AD, ad E, vt DE, sit adiecta lineæ BD, æqualis, describatoq. quadrato AF, totius lineæ AE, ducantur per C, B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH, BI, DK, secantes ductam diametrum EG, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus AE, GF, parallelæ agantur OP, QR, ST, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. omnia rectangula circa diametrum EG, quadrata sunt,



b 34. pri

b est que SN, ipsi AD, æqualis, & OL, ipsi AC, & aN, ipsi CD: erit SK, quadratum rectæ AD, & DT, quadratum rectæ DE, siue BD, & OH, aX, quadrata rectarum AC, CD. Dico quadrata SK, DT, simul dupla esse quadratorum OH, aX, simul. Quoniam enim quadrata SK, DT, superant quadrata OH, aX, quadrato DT, & rectangulis SL, LK: Sunt autem quadratum DT, & rectangula SL,

LK,

LK, æqualia quadratis QH, a X, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata SK, DT, quadratorum QH, a X, dupla esse; cum hæc in illis contineantur bis. Quod autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis QH, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum QL, æquale est quadrato QH, ob lineas QO, OG, quæ æquales sunt; b propterea, quod QO, ipsi YL, æqualis est, & YL, ipsi OG, ob æqualia quadrata XV, QH, æqualium laterum QL, LV. Item, SL, ipsi a M, & LI, ipsi IV, & VK, ipsi VZ, & DT, ipsi bZ. Igitur quinque rectangula QL, SL, LI, VK, DT, hoc est, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia sunt quinque rectangulis QH, a M, YV, VZ, bZ; hoc est, duobus quadratis QH, a X. Quod est propositum.

a 36. pri.
b 34. pri
c 34. pri

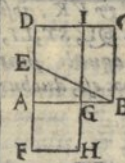
PROBL. I. PROPOS. II. xi.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diuiso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, maior quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione; d sint autem latera AE, AB, maiora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, maiores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit quadrato rectæ AG; adeo vt AG, sit maius segmentum, & BG, mi-

d 20. pri

nus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela, FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia eius quatuor
a 34.pri mi. latera sint æqualia, quippe cum a FH, GH, æqualia sint oppositis AG, AF, æqualibus; omnesq. anguli eiusdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri ostendimus. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit sub AB, & segmento BG; quod AB, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum AF;
b 6. sec. ix. b erit rectangulum sub DF, FA, hoc est, rectangulum DH, (cum FH, sit æqualis ipsi FA;) vna cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis est: Est autem quadratum rectæ EB, c æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vna cum quadrato rectæ AE, æquale quoque est quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadrato AC. Ablato igitur rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.



c 47.pri

SCHOLIVM.

HOC problema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clariusque ad propos. 29 eiusdem lib. 9, ostendemus, problema hoc 11. nulla ratione posse numeris accommodari.

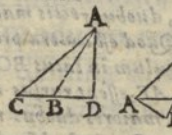
PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmen-

tum linea data AB, excitata perpendiculari AD, ipsi datæ linea AB, æquali, eaq; secta in E bifariam; si ad interuallum EB, resecetur EA, producta in F, erit AF, maiori segmento AG, æqualis, vt demonstratum est.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xii.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta CD, diuisa sit in B, vtcunque [a] erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: [b] Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ



[a] 4. sec.

[b] 47. pri

A C, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Cum igitur a 47. primi. quadratis rectarum BD, DA, æquale sit quadrarum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum C B, B A, & rectangulo comprehenso bis sub C B, B D. Quod est propositum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonstrauit Euclides, quanto maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostender, quanto quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM vero assumpsit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideo paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, cuiusmodi est recta AD. Si enim caderet intra triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est contra propos. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABE, AFB, maiores duobus rectis, cum ille sit obtusus, hic vero rectus. Quod est absurdum.



SED & hoc theorema verum est.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.

IN

IN triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, linea BC, aqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, a aquale est quadratis ex AB, BD, hoc est, ex AB, BC: Penitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor quam recta AC. Itaque quia latera AB, BC, trianguli ABC, aqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumque vtrique, & basis AC, maior est base AD: b Erit angulus ABC, maior angulo ABD: Sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.



a 47. pri

b 25. pri

QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo ABC, ad latus CB, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta AD, sitque quadratum lateris AC, maius, quam quadrata laterum AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse

perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam dico cadere necessario in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt
a 47.pri AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [a] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa, in punctum B.

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex
b 47.pri A, demissa, in latus BC, qualis est AF. Erit igitur [b] quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto an-
c 19.pri gulo AFB, opposita [c] maior sit quam AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis.
d 47.pri Erit igitur quadratum ex AB, [d] æquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.

CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex
e 17.pri A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli AGC, ACG, [e] minores sunt duobus
f 19.pri rectis, est q; AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, [f] maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, ac proinde multo minus quadratis, ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neque inter C, B, neque in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est AD,
g 17.pri vt demonstrabitur: Quare angulus ABE [g] acutus erit, & ABC, obtusus. quod secundo loco proponitur, demonstrandum.

CAE-

CAETERVM angulum ABC, esse obtusum, si quadratum rectæ AC, maius sit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij. Ex quo fit, (vt ad initium huius scholij ostendimus) perpendicularē ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ABC, ad partes anguli obtusi.

QVOD autē AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, erit quadratum rectæ AC, maius quàm quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: Sed & quadratum eiusdem rectæ AC, maius ponitur, quàm quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & recta BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia, quod est propositum.



IAM vero, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quod posito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita diuisa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum est; præscribemus regulas quasdam, quibus Geometrice triangula amblygonia, atque oxygonia

(quor-

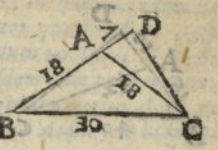
(quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesq. eorum à lineis perpendicularibus facta sint lineæ commensurabiles: atque adeo veritas vtriusque theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium trian-
[2] 19.pri gulum est vel Isosceles, in quo tertium latus semper a maius est, quod obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (aquilaterum enim esse non potest, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygoniũ scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulũ eisdem lateribus commensurabile existat.

REGVLA I.

AD constituendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo ABC, ducta sit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD, constituatur partium 7. & vtrumuis laterum AB, AC, partium 18. qui numeras habetur, si duplica-

ueris

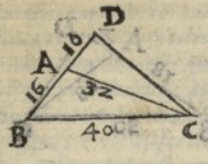
teris 7. addideris que $\frac{4}{7}$ ipsius. Latus vero BC, partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxerisq. $\frac{1}{7}$ ipsius; erit triangulum ABC, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratū lateris BC, est 900. cui æqualia sunt quadrata laterum AB, AC, nempe 324. 324. una cum rectangulo bis comprehenso sub AB, AD, hoc est, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ductu CD, ad BD, perpendicularis, & angulus BAC, obtusus. Quod si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies AD, 14. & tam AB, quam AC, 336. at BC, 60. Propositum quoque triangulum reperies, si statuendo segmentum exterius AD, quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, si statuendo latus quodcunque, à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti AD, quadruplum superbipartiens septimas; vtrumuis autem æqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadripartiens septimas.



REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiã lateribus: statuatur exterius segmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{3}{5}$ habebis minimum latus. Si vero eadem partes dicti segmenti triplices, addasq; $\frac{1}{5}$. vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes eadem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in apposito triangulo segmentum AD, constituatur 10. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Vbi etiam vides, quadrato la-

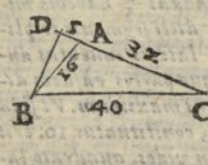
teris



teris BC, quod est 1600. aqualia esse quadrata laterum AB, AC, nimirum 256. 1024. una cum rectangulo bis sub AB, AD, comprehenso, ideſt, cum 160. 160. Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtusum, vt supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem praestabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD statuas partium 20. quæ duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & sic deinceps.

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus producta cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in præcedenti regula. Quas si triplices, addasq; $\frac{1}{5}$ produces minimum latus: Si vere easdem multiplices per 6. adiungasq; $\frac{1}{5}$ habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. aqualia existent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024. una cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusque BAC, obtusus, vt in hoc scholio supra demonstrauimus. Quod si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios



nume-

numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propos. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.

CAVE autem, existimes, posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo seruare necessario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cum illa variari possint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præscriptis regulis solum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vna cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. possit examinari.

xiij.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli ABC, acuti, & ex A, perpendicularis AD, demissa cadat in latus BC.

Dico

Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum lateris AB, vna cum rectangulo bis comprehẽso sub BC, CD, æquale esse duobus quadratis laterum AC, CB. Cum enim recta BC, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarũ BC, CD, [a] æqualia rectangulo comprehenso bis sub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Addito ergo communi quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA: Duobus autem quadratis rectarum CD, DA, [b] æquale est quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, [c] æquale sit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ AC, hoc est, quadratum lateris AC, minus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonstrandum erat.



a 7. sec.

b 47. pri

c 47. pri

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius, minusve, & quanto maius sit, aut minus, prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus, aut acutus.

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat

de

de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue cattigi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum observandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs vero à quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo ABC, duo anguli ABC,

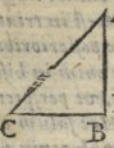


ACB, acuti, angulus vero BAC, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in CB, protractam ad partes B, cuiusmodi est recta AE, esset in triangulo ABE, angulus exterior ABC, acutus. [a] maior interno & opposito recto AEB; quod est absurdum. Si vero caderet extra BC, productam ad partes C, qualis est recta AF, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est. a 16. pri.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis AD, non cadat in latus BC, sed vel eadem sit, quæ latus AB, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. præcedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad BC, perpendicularis ducatur AD, quæ eadem erit, quæ latus AB, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub latere CB, in quod perpendicularis cadit, & sub linea CD, quæ interijcitur inter perpendicularem AD, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex AE, CB, [b] æqualia sint quadrato ex AC; b 47. pri.

addito



addito communi quadrato ex CB, erunt tria quadrata, nempe quod ex AB, & duplum eius, quod ex CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CB, idem est, quod rectangulum sub CB, CD. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD, æquale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam enim quadrata ex AD, CD, [a] æqualia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, æqualia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CD, [b] æquale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, una cum quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, æqualia [c] quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CB. At qui quadrato ex CB, una cum rectangulo sub CB, BD, [d] æquale est rectangulum sub CD, CB. Ac propterea duplo quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD; æquale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD; æquale est quadratis ex AC, CB. Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

a 47. pri



b 4. sec.

c 47. pri

d 3. sec.

ALITER, & breuius. Quoniam quadratum ex AC,

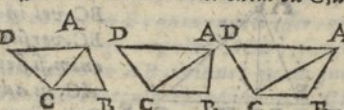
maius

a maius est, quam quadrata ex AB, BC, rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso, hoc est, quadratum ex AC, aequale est quadratis ex AB, BC una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso; erit quadratum ex AB, minus, quam quadratum ex AC, quadrato ex BC, & rectangulo sub CB, BD, bis: Ac proinde si quadrato ex AC, addatur quadratum ex BC, erit quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, BC, quadrato ex BC, bis sumpto, & rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso. Cum ergo quadrato ex BC, una cum rectangulo sub CB, BD, contento, b aequale sit rectangulum sub CB, CD, contentum; erit quoque quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, CD. Quod est propositum. a 12. sec. b 3. sec.

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio praecedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorū: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulum C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, lineae CB, aequalis, iungaturq. recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD,

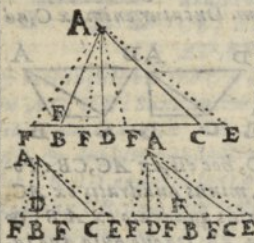


c aequale est quadratis ex AC, CD, hoc est, ex AC, CB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB; Erit quadratum ex AD, maius quadrato ex AB; & ideo recta AD, maior quam recta AB. Itaque quia duo latera AC, CD, trianguli ACD, aequalia sunt duobus lateribus AC, CB, trianguli ACB, vtrumque vtrique, & basis AD, maior basi AB; d Erit angulus ACD, maior angulo ACB: Sed ACD, rectus est, ex constructione. Ergo ACB, recto minor, & acutus erit. c 47. pri d 25. pri

SED & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirū.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppositio demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

IN triangulo ABC, ad latus BC, demittatur ex angulo opposito A, recta AD; sitq. quadratum lateris AB, minus quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo sub BC, CD, bis comprehenso. Dico AD, esse perpendicularem ad BC, & angulum ACB, acutum. Si namque AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad BC, perpendicularis, quam dico necessario cadere citra punctum C, versus B, hoc est, vel in latus BC, vel in punctũ B, vel in latus BC, versus B, productum. Cadat enim, si fieri potest, in C, ita vt AC, sit ad BC, perpendicularis.



a 47.pri *Erit igitur* a *quadratũ ex AB, æquale quadratis ex AC, CB. quod est absurdũ, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpẽdicularis ex A, deducta ad BC, in punctũ C.*

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa vltra C, in E, qualis est AE. Erit igitur b *quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora erunt quadratis ex AC, CB.* b 47.pri

c 47.pri *Cum ergo quadratum ex AC, æquale sit quadratis ex AE,*

EC,

EC; erunt quoque quadrata ex AE, EB, minora quadratis ex AE, EC, CB: Et ablato communi quadrato rectæ AE, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoque quadratis ex EC, CB. quod est absurdum. Cum enim quadratum ex EB, [a] æquale sit quadratis ex EC, CB, una cum rectangulo bis comprehenso sub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est AD, vt demonstrabitur, ac propterea [b] angulus ACB, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum. [a] 4. sec. [b] 17. pri

CAETERVM angulum ACB, esse acutum, si quadratum rectæ AB, minus sit quadratis rectarum AC, CB, facilius demonstrauimus in proxime antecedente theoremate huius scholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propos. 17. lib. 1. ostensum est) perpendicularem ex A. ad BC, demissam cadere citra angulum ACB, acutum versus B.

QVOD autem AD, sit ad BC, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit AF, ad BC, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B. siue extra triangulum. (In secundo tantum triangulo non dicet aduersarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem esset, quæ AD. quod ille negat) Quia ergo angulus ACB, ostensus fuit acutus, [c] erit quadratum ex AB, minus, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, hoc est, quadratum ex AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CF, æquale est quadratis ex AC, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoque, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum idem ex AB, una cum rectangulo bis contento sub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex AC, CB. Igitur quadratum ex AB, una cum rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, una cum rectangulo comprehenso bis sub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ AB, rectangulum sub BC, CD, bis comprehensum æquale erit rectangulo bis sub BC, CF, com- [c] 13. sec.

prehenso; ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, æquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, CF, ideoq. & rectæ CD, CF, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur AD, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

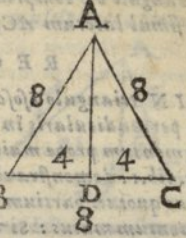
QVEMADMODVM autem in scholio superioris propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, sive maius illud sit, sive minus vtrouis æqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisq; in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, sive oppositus angulus acutus etiam sit, sive non. De his enim propositio etiam intelligenda est, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in trian-

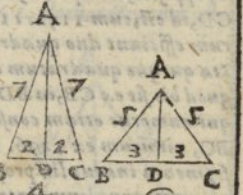
gulo

gulo æquilatero ABC, diuidet perpendicularis AD, oppositum latus BC, bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1 demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta BD, CD, 4. 4. Vbi vides quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triãgulo æquilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64 vna cum rectangulo bis contento sub BC, CD, id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB, nempe 64. 64.



REGVLA II.

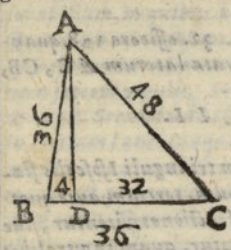
SI vtrumque laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autẽ quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet æqualium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroq. simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt in priori horum Isoscelium vtrumuis latus AB, AC, statuatur 7. & BC, 4. In posteriori autem vtrumlibet AB, AC, 5. & BC, 6. Cum ergo perpendicularis AD, diuidat basim BC, bifariam, ex scholio propos. 26 lib. 1. erunt segmenta BD, CD, in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori vero 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (vterq. enim angulus B, C, acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) vna



rectangulo bis comprehenso sub BC,CD,æquale esse quadratis simul laterum AC,CB. &c.

REGVLA III.

IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterũ cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, easq. per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique segmenta simul addita conflabunt vtrũque laterum æqualium; quod etiã produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus BD, ponatur 4. erit maius CD, 32. latus vero AC, 48. & vtrumque latus AB, BC, 36. 36. Quadratum igitur lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in BD, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrum uis vero æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

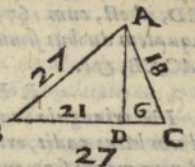


REGVLA IIII.

IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmentum si statuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur,

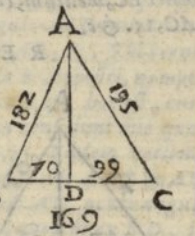
easq.

easq. per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si vero easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique æqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiã ex multiplicatione medietatis minoris segmẽti per 9. producetur. Vt si in Isoscele ABC, minus segmentum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18. atq; tam AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angulo acuto C, oppositi, nimirum 729. vna cum eo, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB, nempe ex 324. 729. &c.



REGVLA V.

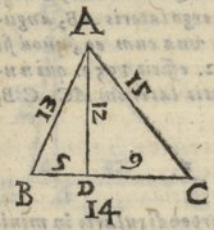
IN Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit segmentum basis iuxta medium latus, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstratum est. Quod segmentum si constituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eisq. addantur earum $\frac{2}{7}$ $\frac{9}{0}$ confectũ erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimum latus. Si vero partes minoris segmenti duplicentur, & producto adijciantur $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{0}$ hoc est, $\frac{4}{5}$ earundem partiũ, procreabitur medium latus. Si denique partes eiusdem minoris segmenti duplicentur, producto q. $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{0}$ id est, $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{4}$ earundẽ addantur, cõponetur latus maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum



AC, 195. *Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est*, 33124. *una cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id est, cum* 16731. 16731. *conficit numerum* 66586. *æqualem duobus simul quadratis* 38025. 28561. *laterum AC, CB, &c.*

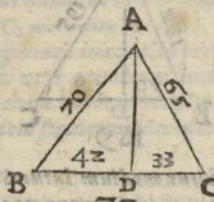
REGVLA VI.

IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex ijs, quæ ad propos. 47. *lib.* 1. *ostendimus, minus segmentum minimo lateri adiacens. Quod segmentum si statuatur tot æqualium partium, vt à* 5. *numerentur, vt* 5. *vel* 10. *vel* 15. *&c. eisq; addantur* $\frac{4}{5}$ *confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collectæ component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adijciantur earundem* $\frac{3}{5}$. *producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat* 5. *erit segmentum maius CD,* 9. *& totum latus BC, medium,* 14. *Minimum vero AB,* 13. *& maximũ AC,* 15. *&c.*



REGVLA VII.

IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimũ, ex ijs, quæ ad propos. 47. *lib.* 1. *scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur* 33. *vel quiuis alius numerus à* 33. *numeratus, vt* 66. *vel* 90. *&c. eiq. addantur* $\frac{9}{33}$ *hoc est,* $\frac{3}{11}$. *fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adijciantur* $\frac{4}{33}$, *producetur medium latus. Si denique eidem*



minori

minori segmento apponantur $\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$. exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum CD, sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumq. latus maximum BC, 75. & medium AB. 70. & minimum AC, 65. &c.

QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium; si modo proportiones seruentur, quas supradictis regulis expressimus.

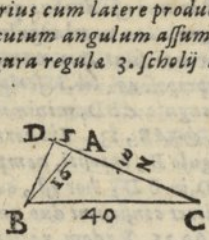
HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones prascriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque vero hoc regula illa docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

IAM vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quarendi sunt tres numeri pro lateribus, ex ijs, qua in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regula 6. si in triangulo ABD, minimum latus BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernis quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. vna cum eo, quod fit bis ex BD, in BD, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex AB, BD, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimũ latus BD, statuatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. vna cum eo, quod fit ex BD, in BD, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirũ 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. vna cum eo, quod fit ex AD, in AD, bis, id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum

AB,

AB, AD, nimirum 100. *&* 64. *Denique si in alio triangulo ACD, minimum latus CD, ponas* 6. *reperies ex ijs, quæ ad propos.* 47. *lib.* 1. *scripsimus, AD,* 40. *& AC.* 41. *Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto oppositi, nimirum* 1600. *vna cum numero, qui fit ex CD, in CD, bis, id est, cum* 81. 81. *facere* 1762. *qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc est, duobus numeris* 1681. 81. *Hi enim conficiunt quoque summam* 1762. *Quod si minimum latus CD, facias* 7. *comperies AD,* 24. *& AC,* 25. *in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris CD, angulo acuto A, subtensi, id est,* 49. *vna cum numero, qui bis producitur ex AD, in AD, hoc est, cum* 576. 576. *facit* 1201. *quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD, hoc est,* 625. 576.

AT si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vna cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. *scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD, inter angulum acutum C, & perpendicularem BD, cadentem extra triangulum,* 37. *Vbi perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo C, acuto oppositi, hoc est,* 256, *vna cum rectangulo sub AC, CD, comprehenso bis, id est, cum* 1184. 1184. *componere numerum* 2624. *qui æqualis est duobus quadratis simul laterum BC, AC, nimirum aggregato quadratorum numerorum* 1600. 1024. *&c.*

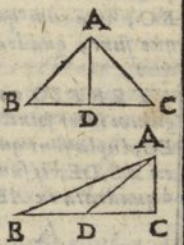


NEQVE vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum

bifariam

bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.



IN triangulo ABC, recta AD, secet latus BC, bifariam in D. Dico quadrata ex AB, AC; dupla esse quadratorum ex AD, BD. Demittatur enim ex A, ad BC, perpendicularis, quæ primum rectæ AD, congruat, ac proinde triangulum ABC, æquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. a Quoniam igitur tam quadratum ex AB, æquale est quadratis ex AD, DB, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, DC; erunt duo quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AD, bis sumpto, vna cum quadratis ex DB, DC. Cum ergo quadrata ex DB, DC, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex AD, DC, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex AD, bis sumpti, & quadratorum ex DB, DC. Quare duo quadrata ex AB, AC, dupla sunt duorum quadratorum ex AD, DB. quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur. b Quoniam quadratum ex AB, duobus quadratis ex AD, DB, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex AB, AC, quadrati ex AB, dupla, ob æqualitatem linearum AB, AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod demonstrandum erat.

a 47. pri

b 47. pri

CONGRVAT deinde perpendicularis AC, lateri AC. Et quia quadratum ex BC, quadruplum est tam quadrati ex BD, quam quadrati ex DC, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex BC, duplum duorum quadratorum ex DB, DC. Sunt autem duo quadrata ex AC, CD, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex AD; quod c quadrata ex AC, CD, semel sumpta æqualia sint quadrati ex AD. Igitur quadratum ex BC, vna cum qua-

c 47. pri

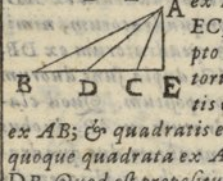
dratis

dratis ex AC, CD, bis sumptis, duplũ erit quadratorũ ex DE, DC, AD. Cum ergo & quadratum ex CD, bis sumptum, a 20. prõ. duplum sit quadrati ex CD; a erit reliquum quadratum ex BC, vna cum quadrato ex AC, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Sunt autem b 47. pri b quadrata ex BC, AC, æqualia quadrato ex AB. Igitur quadrata ex AB, AC, (quæ æqualia sunt quadrato ex BC, vna cum quadrato ex AC, bis sumpto) dupla quoque sunt, quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

TERTIO cadat perpendicularis AE, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur c 9. sec. c quadrata ex BE, EC, dupla sunt quadratorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quod d 47. pri d quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, vna cum quadratis AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex



c 20. prõ DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; c erunt reliqua quadrata ex BE, EC, vna cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, f æquale sit quadratum ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.



f 47. pri

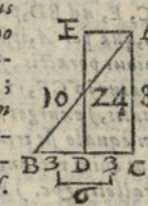
POSTREMO cadat perpendicularis AE, in latus BC, productum: Quoniam igitur g quadrata ex BE, CE, g 10. sec. dupla sunt quadratorum ex BD, DE. Item quadrata ex h 47. pri AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; h quod quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, vna cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati ex DE; i erunt reliqua quadrata ex BE, i 20. prõ CE, vna cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque

reliquo-

reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, [a] æquale sit quadratum ex AB, & quadratis ex CE, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat ostendendum. [a] 47. pri

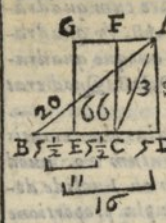
NON te moueat autem, quod ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi potest sine demonstratione, vt in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum post librum 5. demonstrari; ita vt circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur libro 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

EX his autem, qua proximis duobus theorematibus, & propos. 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota sint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiso latere BC, bifariam in D, vt sint CD, BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum ACDE, quod æquale est triangulo ABC, vt in scholio propos. 41. lib. ostendimus. Quia vero ex ductu CD, trium palmorum in CA, 8. palmorum producitur area rectanguli CE, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC, rectangulo CE, æquale. Quod est propositum.



SIT deinde triangulum obtusangulum ABC, cuius latera sint cognita; AB, 20. palmorum; AC, 13. BC, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis linea AD, ex A, in latus BC, protractum demissæ, hoc modo. Quoniam quadratum lateris AB, [b] maius est, quam qua- [b] 12. sec.

drata

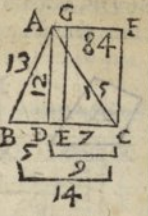


drata laterum AC, BC, rectangulo bis cõprehenso sub BC, CD: si quadrata laterũ AC, BC, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris AB, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub BC. CD. Si igitur 55. rectangulum sub BC, CD, diuidatur per 11. latus notum BC, exibit reliquum latus CD, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum. Quia vero quadrata laterum AD,
[a] 47. pri CD, [a] æqualia sunt quadrato lateris AC; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare latus AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam vero diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BD, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AG, quæ per A, ipsi BD, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si EC, palmorum quinque cum dimidio,
[b] 34. pri ducatur in CF, 12. palmorum, (Est [b] enim CF, ipsi AD, æqualis,) exurget area rectanguli CG, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo ABC, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoque area trianguli ABC, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

SIT postremo triangulum acutangulum ABC, latera habens nota; AB, 13. palmorum; AC, 15. BC, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis AD, ex A, ad BC, demisse, hac ratione. Quoniam quadra-
[c] 13. sec. tum lateris AB, [c] minus est, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo comprehenso bis sub BC, CD; si quadratum lateris AB, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum AC, BC, hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub BC, CD, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC,

SCD LYON 1

CD. Si igitur 126. rectangulum sub BC, CD, diuidatur per BC, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus CD, palmorum 9. vt constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratum est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex AD, CD, [a] aqualia sunt quadrato ex AC; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris CD, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. erit latus AD, 12. palmorum. Iam vero diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipsi BC, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si CE, 7 palmorum ducatur in EG, 12. palmorum; (est enim EG, recta ipsi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84. Quod cum triangulo ABC, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod est propositum.



[a] 47. pri

ITA QVE in vniuersum, area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ à vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

[b] 34. pri

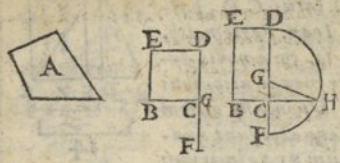
PROBL. 2. PROPOS. 14. xiiij.

DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [c] Constituatur parallelogrammum

[c] 45. pr.

BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, fitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta BC, (cum æqualis ponatur rectæ C F) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cum latera DE, EB, [a] æqualia sint oppositis lateribus BC, CD; atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo GD, vel GF, semicirculus FHD, producaturq. BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub DC, C F, hoc est, rectangulum B D, vna cum quadrato rectæ GC, [b] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectę GF, GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH, [c] æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineũ A, quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum cõstituimus: Quod facere oportebat.



a 34. primi.

b 5. sec.

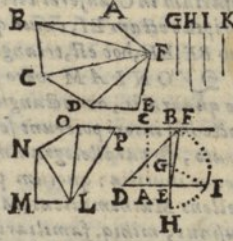
c 47. pri

S. CHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiuis triãgulo æquale sit, inuestigemus: quod fa-

ctu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterũ quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum ABCDEF, resoluemus illud in triangula ABF, FBC, CFD, DEF, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas LM, MN, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta NL, erigemus ad eam perpendicularem NO, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta OL, excitabimus illi perpendicularem OP, lateri K, æqualem, iungemusq; rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis OP, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc est, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.



PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe DE, bifariam in A, producaturq; quantum libet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri DE, parallela FB, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, secans FB, in B, sitq; EH, ipsi AE dimidio lateris DE, æqualis. Postremo, diuisa tota linea BH, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus secans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale esse triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & semicirculus BH, ducaturq. recta GI, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale esse. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1.

quod basis DE, sit dupla basis AE, constat propositum.

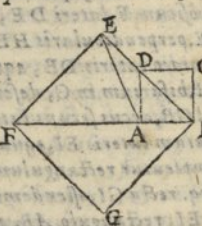
NON est tamen necessarium, vt rectangulum construatur AB. Nam si fiat angulus rectus IEB, atque in BH, capiatur EH, semissi lateris DE, æqualis, & recta EB, æqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demissæ, secetur q. BH, bifariam in G, auferet circunferentia ex G, circa BH, descripta rectam EI, cuius quadratum æquale est rectangulo sub BE, EH, hoc est, triangulo DEF.

QVONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis disputauit, recte hic inseri poterunt sequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque iniucunda, neque inutilia: quorum posterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racusinus, mihiq. familiarissimus, ingeniosissimè sane soluit, & longe aliter, breuiusque, quam à quodam alio solutum quondam fuit. quam solutionem hic subiungere superuacaneum est, cum illam Marini Racusini hic apposuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta AB, inueniendumq. sit latus illius quadrati. Ex recta AB. describatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt sit DE, recta rectæ AD, æqualis. Dico rectam EB, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus BE, excessu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quæ rectam BA, productam secet in



F.

F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus est, & EBF, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4. huius lib. a erit & BFE, semirectus. b Quare recta BE, FE, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipsi BE; & ex B, recta BG, parallela ipsi EF, occurrens priori in G, constitutum erit quadratum recta BE. Quod si ducatur recta AE, erunt anguli AED, EAD, æqualibus lineis DE, DA, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, æquales; d ideoq. recta EF, AE, æquales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AE, superat data recta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB. quod est propositum.

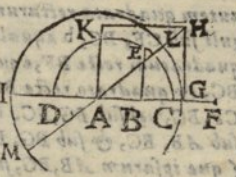
a 32. pri
b 6. pri.
c 5. pri,
d 6. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta composita ex diametro quadrati supra excessum datum descripti, & ex latere eiusdem quadrati exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo excessus, diametrum quæsiti quadrati constituit.

II.

DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra vtrumque latus; Inuenire latera ipsius rectanguli.



SVPERET diameter minus latus recta AB, & maius recta BC. Producta AC, in vtramque partem, sumatur AD, ipsi AB, æqualis: descriptoq; circa CD, semicirculo, erigatur ad AC, perpendicularis BE, secans circumferentiam in E, sumaturq. ipsi BE, æqualis CF. Et quia, vt ex demonstratione propos. 14. huius lib. constat, quadratum recta BE, æquale est rectangulo sub DB, BC, erit BE, maior quam BC, minus latus dicti rectanguli. Igitur & CF, maior erit quam BC. Sumpta ergo FG, ipsi BC, æquali,

SCD LYON 1



cadet punctum G, inter C, & F. Erecta autem ad AF, perpendiculari GH, ipsi BF, æquali; Dico AG, esse maius latus, & GH, minus, itavt rectangulum quæsitum sit GK. Esse enim rectam AG, maiorem quam GH, ita probabitur: Quoniam BC. FG. æquales sunt, addita communi CG, erunt quoque BG, CF, æquales. Additis igitur inæqualibus AB, ipsi BG & BC, ipsi CF, erit AG, maior quam BF, hoc est, quam GH: quandoquidem addita AB, maior est, quam addita BC. Esse autem AG, GH, latera quæsita, ita demonstrabitur. Descripto ex A, ad interuallum AG, circulo, ducatur per A, H, recta secans circumferentiam in L, M, & recta AD, producatur circumferentiam secans in I. Quoniam
a 1. sec. igitur rectangulum sub BC. BD, a æquale est rectangulis sub CB, BA, & sub CB, AD, hoc est, duplum rectanguli sub excessibus AB, BC: Est autem rectangulo sub BC, DB, æquale quadratum rectæ BE, vt ostendimus; erit quoque quadratum rectæ BE, duplum rectanguli sub AB, BG, hoc est, quadratum rectæ BE, æquale erit duplo rectanguli sub AB, BC. Addito ergo communi quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli sub BG, BC, hoc est sub CF, BC; erunt quadrata rectarum BE, siue CF, & BC, vna cum duplo rectanguli sub CF, BC, æqualia duplo rectanguli sub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli sub CF, BC. Sunt autem quadrata rectarum CF, BC, vna cum duplo rectan-
b 4 sec. guli sub CF, BC, b æqualia quadrato rectæ BF. Igitur & quadratum rectæ BF, æquale erit duplo rectanguli sub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli sub CF, BC, vel sub BG, BC. Cum ergo duplum rectangulorum sub AB, BC, & sub BG, BC, æquale sit rectangulo sub IG, (quæ ipsarum AB, BG, simul dupla est) & BC, vel FG; erit quoque quadratum rectæ BF, æquale rectangulo sub IG, FG, vna cum quadrato rectæ BC, vel FG. At rectan-
c 3. sec. gulo sub IG, GF, vna cum quadrato rectæ FG, c æquale est rectangulum sub IF, FG. Igitur quadratum rectæ BF, siue GH, æquale etiam est rectangulo sub IF, FG. Addito ergo

commu-

communi quadrato rectæ AG; erunt quadrata rectarum GH, AG, æqualia rectangulo sub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG. Est autem quadratis rectarum GH, AG, a *æquale quadratum rectæ AH; & rectangulo sub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG,* b *æquale est quadratum rectæ AF. Igitur & quadratum rectæ AH, quadrato rectæ AF, æquale est, rectaq. AH, rectæ AF, æqualis: demptisq; æqualibus AL, AG, reliqua LH, GF, æquales erunt. Diameter ergo AH, rectanguli GK, hoc est, rectæ AF, excedit maius latus AG, rectæ GF, siue excessu dato BC: Ipsum vero minus latus GH, siue rectam BF, ipsi GH, æqualem, excessu dato AB. Quod est propositum.*

a 47. pri
b 6. sec.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta BE, vel CF, cuius quadratum rectanguli sub datis excessibus AB, BC, duplum est, addita minori excessui BC, efficit minus latus quæsitum BF, hoc est, GH. Eadem autem recta BE, hoc est, BG, addita maiori excessui AB, conficit maius latus quæsitum AG: Eadem denique BE, vel CF, cum vtroque excessu AB, BC, diametrum AF, vel AH, constituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

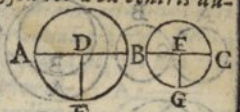
I.

AEQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

QVONIAM *Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est vsus. Primum itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos*

esse

esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum tota diametri æquales sunt. Vt si diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosve inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.



II.

RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

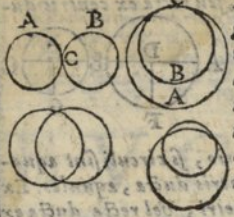
VT recta AB, si ita circulum BFD, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatq. intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.



III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

EODEM modo duo circuli AC, BC, se mutuo dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex.



Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

IIII.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.



QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quauis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus est breuior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum AE, AF, maiores sunt, quam AD, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim AF, [a] maior, quam AE, cum angulus AEF, sit obtusus, & AFE, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, [b] minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum ADF, rectus sit, angulum AFD, recto esse minorem. Eadem ratione angulus AED, ostendetur acutus, propterea quod in triangulo ADE, [c] duo anguli ADE AED minores sunt duobus rectis, & ADE, rectus est) ac proinde, cum ambo AED, AEF,

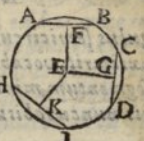
[a] 19. pri

[b] 17. pri

[c] 17. pri

æqua

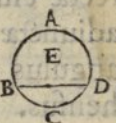
æquales sint duobus rectis, erit AEF, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicetur à centro E, quam linea HI, si perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EK. 213.pri



V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

VT si ducatur in circulo AECD, recta BD, vtcunque, dicetur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum BCD. Id quod ad defin. 8. lib. 1. demõstrauimus. Vocatur à plerisq. Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.

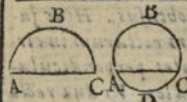


VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmen-

ti,



ti, dicens angulum mixtum BAC, vel BCA, contentum sub recta linea AC, & circumferentia ABC, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

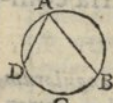
IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.



SIT segmentum circuli quodcunque ABC, cuius basis recta AC. Ex susceptо quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC.

VIII.

CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.



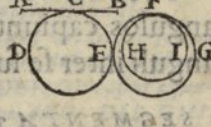
EX puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circunferentiæ BCD, cuiusque. quam quidem duæ rectæ AB, AD, assumunt. Angulus itaque re-

SCD LYON 1

ctilineus BAD, insistere dicitur circumferentiæ BCD. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento BAD, si recta BD, basis duceretur; ex hac vero insistere circumferentiæ BCD. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit, quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit BCD; at eius circumferentiæ BCD, insistens, erit angulus BAD, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Oxontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. quæ solum conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verba græco ἐβεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus DAB, supra circumferentiam BCD.



PRAETER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HEI, circulum EFG, inte-



rius

rius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentiæ. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentiæ, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo curuilinei.

IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli cẽtrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.



SI in circulo ABCD, cuius centrum E, rectæ AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam prædictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, quæ ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, quæ basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, assumptæ; Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione vsus est eodem verbo græco ἀπολαμβάνω.

X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE, eiusdem

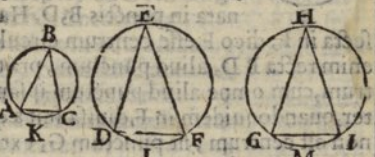
circuli

SCD LYON 1

circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABF, DCF, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similia dicuntur, & ipsæ circunferentiæ quoque ABDF, DCAE, similes.



EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, à Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentiæ ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc segmentorum, circumferentiarumve similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentiæ: ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentiæ ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentiæ DEFD; Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentiæ GHIG. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasve, appellari similes.



EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve AKC, DLF, GMI,

quibus

quibus insistunt similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

j. **PROBL. I. PROPOS. I.**

DATI circuli centrum reperire.



a 10 pri

SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, a quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hae igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum; sit punctum G, extra rectam BD, centrum; à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (à centro enim duci dicuntur) b erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoq. recti: Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione. Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq. est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

b 8. pri.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEO-

SCD LYON 1

THEOR. 1. PROPOS. 2. ij.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.



IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetq. ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) [b] erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, [c] angulo ECD, maior, externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta EA, maiori angulo ADE, oppositæ, hoc est, recta EB, sibi æqualis, [d] maior erit, quàm recta ED, minori angulo DAE, oppositæ, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur rectæ ex A, in C; ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 1. tertij

[b] 5. pri.
[c] 16. pri

[d] 19. pri

SCHOLIVM. xiiij.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in cir-

cunferentia

cunferentia circuli AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulū existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur recta CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, aqualia sunt, a erunt anguli CAB, CBA, aquales: Est autem angulus CDA, b angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, c latere CD, maius erit. Quare cum CA, sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod est propositum.



a 5. pri.
b 16. pri
c 19. pri

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, d caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

d 2. ter.

iij.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.



PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. e Igitur anguli AFB,

e 8. pri.

AFD,

SCD LYON 1

AFD, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.

SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, [a] erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli AFB, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [b] erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 5. pri.

[b] 26. pri

FACILE quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, [c] æquale quadratis rectarum AF, FB, quam quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt.

[c] 47. pri

COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim. Et contra, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD, æqualia sunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus describi potest: ex eo, quod recta AF, secat basim BD, bifariam, ostensum est angulos ad F, esse rectos. Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basim BD, à recta AF, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26 lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans; erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se æqualia.



DVO circuli ABC, DEFG, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta AC, secans circunferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales esse. Nam si ex HA, HC, quæ a *æquales sunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales sunt,* b *erunt rectæ AD, CG, æquales.*

a 15. def
b 3. prō.

DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum, secans interiorem circunferentiam in E, F. Dico rursus, rectas AE, BF, esse æquales. c *Ducta enim ex centro H, ad AB, perpendiculari HI,* d *secabit hanc tam rectam AB, in circulo ABC, quam rectam EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus IE, IF, ex æqualibus IA, IB,* e *remanebunt AE, BF, æquales. quod est propositum.*

c 12 pri
d 3 ter.
e 3. pron

THEOR. 3. PROPOS. 4.

iiij.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVÆ rectæ AB, CD, se mutuo in E, secent in circulo ACBD, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transi-

re,

re, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & AB, & CD, si fieri potest, bifariam in E. [a] Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam ergo FE, ponitur secare rectam AB, bifariam in E, [b] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. ter.

[b] 3. ter.



THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

SI duo circuli se se mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

DVO circuli ABD, EBD, se mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere idē centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad sectionem B; CA, vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ BC, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, [c] æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.



[c] 21. pron.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vj.

SI duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.



DVO circuli AB,BC, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B. At D C, secans vtramque circunferentiam in A,& C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli AB, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, a inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. pron

SCHOLIVM.

EVCLIDES proposuit theorema hoc de circulis se se interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius se se tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

vij.

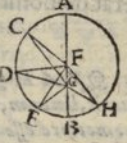
THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulũ cadunt, ad vtrasq; partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ G C, G D, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam du-

cuntur,

cuntur, maximam esse GA, in qua est centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus distat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, [a] maiora sunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, maior quam GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.



a 20. pri

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, [b] minus est duobus lateribus FG, GE. Est autem EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam cadunt.

b 20. pri

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior est angulo GFD; [c] erit basis GC, maior basi GD. Eadem ratione maior erit GC, quam GE: Item maior erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior.

c 24. pri

FIAT iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera EF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; [d] erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus pos-

d 4. pri.

sit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMQVAM autem Euclides solum demonstrauerit, lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si ambæ lineæ ex eadem parte diametri AB, existant: idem tamen verum etiã est, si ad diuersas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam GD, propinquiorem esse rectæ GA, quam rectam GH; dico GD, maiorem esse, quam GH. Si namque ipsi GH, ex altera parte æqualis ducatur GE, vt dictum est, nempe si fiat angulo GFH, æqualis angulus GFE, &c. cadet punctum E, inter D, & B; quod GH, GE, æqualiter à GA, distent, ob æqualitatem angulorum GFH, GFE; & GD, ponatur minus distare, quam GH, ac proinde minus, quam GE. Cum 27. ter. *ergo GD, maior sit, quam GE, maior quoque erit eadem GD, quam GH.*



HANC porro propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores

qui-

SCD LYON 1

quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



IN circulo ABC, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque DA, DC, DE, DF, DB, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit DA, minima vero DC; ipsarum vero DE, DF, maior sit DE; denique DE, DB, sint æquales. Dico DA, per centrum transire, & DC, reliquam partem esse diametri, hoc est, DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, quæ maior ponitur quam DF, propinquiorem esse maximæ DA, quam DF. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, [a] *erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transit ergo DA, per centrum.* [a] 7. ter.

DEINDE si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directum, [b] *erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.* [b] 7. ter.

RVRSVS si DE, non est vicinior maximæ DA, quam DF; aut æqualiter distabunt ab ea, aut DE, longius ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à DA, dicantur distare, [c] *ipsæ erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim DE, maior. Si vero æqualiter ex eadem parte à DA, distare dicantur, erunt DE, DF, vna eademque linea; atque adeo DE, maior non erit, quàm DF, quod est contra hypothesin. Quod si DF, dicatur esse propinquior maximæ DA,* [d] *ipsa erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum.* [c] 7. ter. [d] 7. ter.

POSTREMO si DE, DB, non æqualiter distant à DA, vel DC, [e] *erit ea, quæ magis à DA, distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB.* [e] 7. ter.

viij.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ aũt tantũ rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum tranſeat, aliæ vero AH, AG, AF, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem rectam AG, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione AG, maiorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ AB, minorem eſſe recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipſam AD, minorem, quam AE. Denique ex A,

ad

ad vtrasque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, [a] maiora sunt recta AH; Sunt autē rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI; erit & AI, maior, quam AH. Eadem ratione erit AI, maior, quam AG, & quam AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



a 20. pri

DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, maior est angulo AKG; [b] erit basis AH, basi AG, maior. Eadem ratione maior erit AH, quam AF: Item AG, maior, quam AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore.

b 24. pri

RVRSVS, quia in triangulo ACK, recta AK, [c] minor est duabus AC, CK; si auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

c 20. pri

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; [d] erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE: Item AD, minor, quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quam remotior ab eadem.

d 21. pri

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus

ribus contenti æquales ; [a] erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam AL. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimę propinquior, minor quam AL, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. pri.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam dua tantum linea æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ AI.

FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungaturque recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales; [b] erunt bases AH, AM, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quacunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam AH, prout citra vel vltra rectam AH, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.



b 4. pri.

HAEC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus vero AKF, angulo AKM, maior. Igitur [c] basis AF, basi AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quacunque alia in eauam peripheriam cadens, quam recta AM.

c 24. pri

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior [e]rit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus.

Nam

Nam cum duo latera AE, EK, [a] *minora sint duobus lateribus AM, MK: si auferantur æquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quam reliqua AM. Eademque ratio est de cæteris.* a 21. pri

QVAM QVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minima minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR. 8. PROPOS. 9. ix.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis BC, CD; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus AE, EC, trianguli AEC; & bases AB, AC, ponuntur etiam æquales; [b] erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per



b 8. pri.

cen-

centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli, a sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; b erit recta AD, quæ propinquior est rectæ AG, per centrum E, ductæ maior, quam recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.



a 1. ter.

b 7. ter.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; c erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & A C. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

c 7. ter.

X.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus d bifariam diuisis in I, & K, e educantur ex I. & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, f quod est absurdum. Circulus ergo cir-



d 10. pri

e 11. pri

f 5. ter.

culum

culum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A,B,& D. [a] Inuentuma utem sit I, centrum circuli AGBDHE, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, [b] erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. [c] Quod est absurdum.



[a] 1. ter.
[b] 9. ter.
[c] 5. ter.

THEOR. 10. PROPOS. 11. xj.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, [d] non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G,& F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D,B,C,B,& ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, [e] maiora sunt latere GA; Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB; (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum.



[d] 6. ter.
[e] 20. pri

QVOD

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, [a] maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis. (cum F, ponatur cẽtrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC: (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli ABC,) erit quoque GC maior, quam GE, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



a 20. pri

THEOR. 11. PROPOS. 12.

xj.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, [b] maiora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE.) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.



b 20. pri

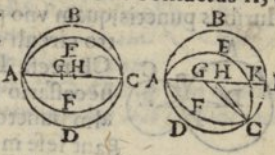
THEOR.

SCD LYON 1

THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TANGANT sese circuli A B C D, A E C F, intus. si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [a] quæ diuersa erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est [b] cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A G H C, diameter, diuidetur A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bisariam. Si namque G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.



[a] 6. tert.

[b] 11. ter

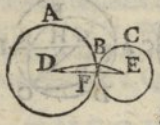
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propos. ostensum esse, rectam per duo centra circulorum se se intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo recte affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrum circuli A B C D: & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, [c] maiora sunt latere G C: Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quod H C, H K, ex centro H, sint æquales, & G H, communis) & recta G C,

[c] 20. pri

rectæ

rectæ GI; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta GK, maior quam GI, pars quàm totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ HG, GC,
a 20.pri a maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ HA: (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, maiores recta GA. Quare dempta communi HG, erit GC, maior, quam GA. quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam vno.

TANGANT se iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli
b 12.ter CB, recta DE, b quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est
c 20 pri ipsi DE: c Sunt autem & maiores. quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.



ALITER. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra vnum circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

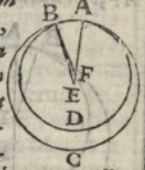
SCHOLIVM.

SI recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo à se dissideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non posse

esse

esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus ABC, circulum ABD, prope A; & per eorum centra E, & F, aquæ diuersa sunt, recta ducatur EF, b quæ ad contactum perueniet necessario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis BE, BF, c erunt rectæ EF, FB, maiores recta EB. Est autem recta EB, æqualis rectæ EA, cum vtraque sit ex centro E. Igitur & recta EF, FB, maiores erunt recta EA. Quare dempta communi EF, remanebit FB, maior, quam FA. quod est absurdum, cum FB, FA, cadant è centro F, ad circumferentiam, ideoq. ex circuli defin. æquales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.

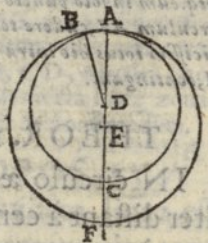
a 6. ter.
b 11. ter
c 20. pri



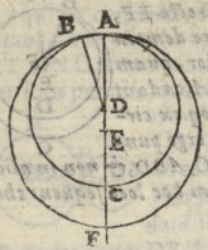
NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

SI in semidiametro circuli producta punctū vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq. extra eundem cadet.

SIT circulus ABC, cuius centrum D, & in semidiametro AD, producta sumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum EA, circulus describatur AF, quem dico circulum ABC, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior est, quam AD, hoc est, quam DC, hoc est, à fortiori, quam EC; erit



quoque EF, quæ ipsi AE, æqualis est, maior quam EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, existet, circulusque AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, existet. Multo magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, si E, extra eundem circulum ABC, existet: Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat; secet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, si fieri potest, ducaturq. recta DB. Quoniam igitur in diametro circuli AF, sumptum est punctum D, præter centrum E, 2 erit DA, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo DA, quam DB. quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ DA, DB, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiusdem circuli ABC. Non ergo circulus AE, circulum ABC, secat aut tangit in alio puncto, quam in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.



2 7. ter.

QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoque priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq. intra eundem cadet. Vt si in semidiametro AE, circuli AF, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur ABC, cadet hic totus intra illum, tangetq. eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proxime sit, circulum AF, cadere totum extra circulum ABC, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuo in solo puncto A, contingant.

xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

SINT

SCD LYON 1

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, C D. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ EA, ED. [a] Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ E A, [b] æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia; ideoq. & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.



[a] 3. ter.

[b] 47. ter

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad A B, C D, perpendiculares E F, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [c] diuidentq. rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, [d] æquale quadratis rectarum AF, F E; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum D G, GE. Igitur & quadrata rectarum AF, FE, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq. ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ A F, DG, ac propterea earum duplæ AB, C D, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 3. ter.

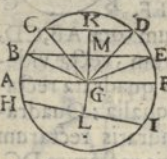
[d] 47. pri

THEOR. 14. PROPOS. 15. xiij.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior cen-

tro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinbuior HI, remotior autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. a & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, b maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; c erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quę æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quam CD. In crrculo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.



a 14. ter.
b 20. pri
c 24. pri

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab vno, eodemq. circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant. CADANT enim à puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, d *maiora sint latere AC; sintq. rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc est, rectæ AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior*



d 20. pri

erit;

erit, quam AB; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia sunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, totus maior est angulo AEB; a erit basis AC, maior basi AE. Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ à centro remotior est. a 24. pri

CÆTERVM & hic duæ tantum æquales lineæ duci possunt à puncto A, ad vtrasque partes maximæ AD. Si namque angulo AEC; æqualis fiat angulus AEF, iungatur q. recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint lateribus AE, EF, & anguli contenti quoque AEC, AEF, æquales; b erunt bases AC, AF, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra AC, ea maior erit, vt iam demonstratum est. b 4. pri.

QVOD si AB, AF, ad diuersas partes diametri AD, ductæ sint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonstrabitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. AF, maiorem esse, quam AB. Si namque, vt proxime ostensum fuit, ducatur ipsi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe si fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC, c æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB, vt & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam AB, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quàm AB, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF, quam AB. c 14. ter

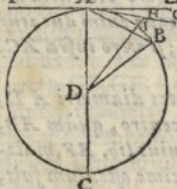
THEOR. 15. PROPOS. 16. XV.

QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam com-

SCD LYON 1

prehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est
a 5. pri. AB; ducta DB, a erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, sed DAB, rectus est, per constructionem: igitur & DBA,



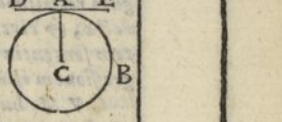
b 17. pri rectus erit, quod est absurdum. Duo b enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iam ex A, inter AE, rectam, & circunferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos.
c 17. pri 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo DAH, c duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH, recto minor, ideoq. recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI,
d 19. pri d maior erit, quam DH, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quæcunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra

circu

circulum, faciet necessario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars sit. Eademq. ratio est de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cum omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

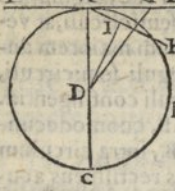


QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam excitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta GD. Quoniam igitur in triangulo ADG, duo anguli DAG, DGA, a minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus; erit DGA, recto mi- 217. pri

a 19. pri



nor. Quare a maior erit recta DG, quã DA; ideoq. punctum G, extra circulum Herit. Eademq. est ratio de omnibus alijs punctis recta AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur communi angulo DAH, erunt duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE,

b 13. prõ

ideoq. minores duobus rectis: Quare b coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI,

c 32. pri

c æquales sunt duobus rectis, & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta

d 19. pri

DA, d maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea q. punctum I, intra circulum exister; atque adeo recta AH, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.

SCHOLIVM.

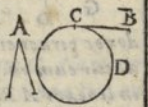
EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illã, quã ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, &

inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionē decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

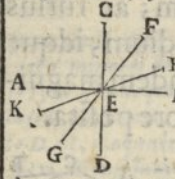
SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.



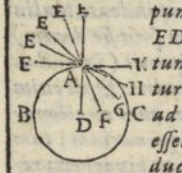
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus; BCD vero angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium; sicq. continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam BCD. Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum à ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, aliisq. propositionibus nonnullis solidorum, à curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus,

camus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet BCD, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis AB, & CD, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos,



intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex CD, fiat FG; hinc sane ex recto angulo AEC fiet obtusus A E F: Inde ex recto BEC, fiet acutus BEF. Cumq. facta fuerit HK, hinc quidem angulus obtusior fiet HE A, inde vero acutior BEH; sicq. continuo, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea CD, in lineam A B, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo ABC A, cuius centrum D, linea DE, prætereins peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa DE, per puncta F, G, H. Tum fient



anguli continuo vary cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatione, linea ED, facta sit EK, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam BAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quã si BAH, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur lineæ, faciantq. spatium C A K. Nam id sola AC, linea efficit, quæ rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vno; fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumq. A, peripheriæ in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se veluti lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contra-

ria

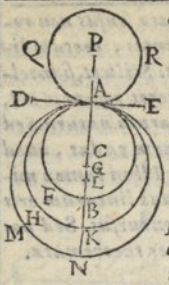
ria contrapoſita fiant manifeſtiora; Id vero ſenſus non recipit. Duo enim circuli ſeſe exterius tangentes, rectam lineam intermediam illibatam relinquerent: Scilicet, ſi intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipſum ABC, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri poſſe, vt nihil in cogitationem cadat, quod ſemel vſpiam Geometria non repræſentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus. Habit enim vtrinque ipſarum concurſus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non eſt.

SIT enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A. ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et conſtat, ex conſectario huius decimæſextæ lineam DE, contingere ipſum AFBA, circulum: ac propterea DAF, eſſe minorem omni angulo acuto, ex ipſa Euclidis ſententia: ſcilicet per vltimam partem huiuſce decimæſextæ. Iam vero inter puncta C, & B, ſuſcipiatur in diametro AB, centrum G, & ſpatio GA, deſcribatur alter maior circulus AHKA. Dico FAH, non eſſe quantitatem. Conſtat quippe circulum AHKA, tranſire inter rectam DA. & curuam AF, cum ſit ſemidiameter GA, maior ſemidiametro CA. Manifeſtum quoque eſt, lineam DE, tangere ipſum AHKA, circulum, ex eodem huiuſce decimæſextæ conſectario: ac propterea DAH, eſſe omni acuto minorem. Deſcribatur tertio, ſecundum maius ſpatium LA, circulus AMNA. Et erit ex eodem conſectario, DAM, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo: ac ſic omnes æquales, ſi modo æqualitas inter non



SCD LYON 1



quanta dici possit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietque vt MAF, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtriq. angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autè PA, descri-

batur

batur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ non esse quantitatem. Id vero manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neque per rectam, cum neque DAF, sit quantitas, per secundam earundem; neque DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactũ DAF, qui quantitas non est: & ob id QAP, rectus quoque est, & æqualis ipsi DAP. cum DAQ, nihil addat: quod erat probandum.

HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



SINT enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG; & sit EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neque enim contra, CBD, maior vllo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit HKLH: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus

KHL,



KHL, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifestè maiores, & minores fiunt.

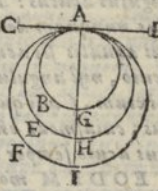
HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M. in eadem linea HL, posito, describatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto est circulus EFGE; posita scilicet MB, semidiametro æquali ipsi AE; qui circulus tangat ECDE, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum FBD, æqualem esse angulo FED, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse FBD, erit angulo CBD, æqualis. Igitur CBF, contactus nihil addit ad ipsum CBD, angulum. Quare CBF, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in tertio libro adduximus, theorematum.

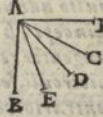
HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus;

atque

atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectã, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, si per A, describatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A; fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit; cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus CAF, maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atque ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG, describantur, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus

contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG, maior est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus semicirculi FAI: Atque ita deinceps, si maieres semper circuli describantur, quã AFI, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI. E contrario vero, angulo semicirculi FAI, minor est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quili-

bet

bet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, necnon in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; non erunt omnes anguli huiusce modi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, paritero, illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur à peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur à peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes: & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

SCD LYON 1

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersi, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se aquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis aquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel aqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulũ tantũmodo effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicẽ inclinari, ita tamen, vt non in directum taceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur, cuiusmodi sunt peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

POR-

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angules rectilineos capiunt æquales; non autem quorum anguli æquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propos. 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim

rectus angulus superabit quamuis angulum semicirculi; angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, homineq; Geometra prorsus indignas.

HAEC porro mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læsam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem, hoc est, anno 1579. vt se defenderet, Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quam veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias, atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusque Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interseram, vt benignus lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoque mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me

à con-

à conuitijs non abſtinere, aperte teſtatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quam quod me Peletarius non ſyncere, ſed animoſe, atque adeo inuidioſe feciſſe inſimulae, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ ſane vitia puſilli ſemper animi eſſe duxi, & ab homine liberaliter, Chriſtianeque educato alieniſſima. Verum ea quam longe abſint tum à noſtra Societatis diſciplina, tum à mea conſuetudine, nemo omnino, qui nos ac noſtra norit, ignorat. His vero, qui noſtra minime norunt, hic ipſe liber fidem faciet, ſyncere omnia dici, nihil inuidioſe, nihil animoſe: planè vt veritatem quæſitam, non cuiuſque auctoritatem contemptam eſſe appareat. Neque enim mihi tantum derogo, (etſi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, ſi quid in alienis ſcriptis falſum videatur, occaſione oblata, cur id mihi minus probetur, oſtendam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum conſuetudo poſtulat) id ſine conuitio, atque irriſione faciam: Hoc autem liber ipſe, qui in medio eſt, ita à me factum eſſe clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel ſpeciem maledicti habeat, atque conuitij. Nam in ſcholio hoc de angulo contactus iurare liquido poſſem, nihil me minus cogitaſſe, quam vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; ſed illud habuiſſe propoſitum, (ſi modo conſequi poſſem) vt ſuus eſſet veritati locus. Quod quidem eò liberius feci, quod Peletario ipſo non modo inuito, ſed etiam libenti exiſtimaui me eſſe facturum, quod vel ipſo auctore facerem: qui non à Cardano ſolum, atq; Campano, ſed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratoſthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipſo denique omnium magiſtro Euclide diſſentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum eſt, in omni doctrina, præſertim vero in Geometria, non auctoritas eſt ſpectanda, ſed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis ſit is, apud quem veritas odium parit; niſi forte aut decipi ſe non poſſe arbitratur, qui columina illa Geometriæ erraſſe interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quam in ſuis. Equidem ſi quis me

in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit. ne ego maximam illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferre non potest: quæ tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes plane fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neque vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quod cum à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum. Quod si sophisma contumeliosius verbum est, quam paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atque vt plane intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vna consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in sinum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atq; in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solum in ductus ratione, quod superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quod omnes fere propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atque in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. qua

pro-

problemata sunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falso criminatur; maxime in eo, quod eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometra superpositionem illam vsurpent. Neque .n. volunt, re ipsa faciendam esse superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero non. Namque in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatemve, quæ, vt nota, ponitur, facile intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendit, vnã vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factũ est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinẽ propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirũ sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per superpositionẽ, siue translationẽ linearum, figurarũve posse demonstrari. si hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certe hac in re non solũ Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusque commentatorem grauissimum, eumq. doctissimum Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifestam videre non poterat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurima, eaque præcipua propositiones in Geometria demonstrentur ex propositione 4 & 8 lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demon-

strari nequeunt, quam per illam figurarum superpositionem, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quo igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sane rem magis à Geometria alienam, quam est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propositionem 4. lib. 1. esse definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atque adeo concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem vero 8. eiusdem lib. principium esse per se quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in propositionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori specie æqualitas figurarum dignoscitur, quam ex laterum æqualitate.) *Idemq. quasi confirmat, & repetit in propositionem 8. eiusdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas superficies esse æquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dicta propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentus est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnopere mirandum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsiderate proferre. Scilicet verum est, quod philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propos. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falsum est, atque absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiã illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris pluriũ laterum æqualium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeãt & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositie 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse*

est,

est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim noua propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipsum quidem ineptissime, cum ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quod plerunque secundam propos. lib. 1. inscite pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solum calumnias, quas frequentes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Qua cum ita sint, quod ille falsò de me, vere ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigisse, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) à calumnijs ipsius defendam, omnesq. insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisq. percipe-

re.

re. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi à me moderatio adhibebitur, vt modestiæ, quæ hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMVM itaque mihi obijcit Peletarius, quod in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile iudicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cum vbique eum honorifice appellem, eiq. plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quam ipse, & multo breuius demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, quæ tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id a me parum syncere, atque adeo inuidiose factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiose factum quispiam iudicaret. Quod vero propos. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obijcit, animose, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam ante dixi, non cuiusquam laudendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco odijs potius, quam ingenijs inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, vt supra dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque vt liberius id facerent, enixe rogaui non paucos, & nunc iterum eosdem, atque etiam alios amice oratos volo. Scio enim, quam facile possit in suis quisque inuentis hallucinari; video (quod ipse quoque Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quod in additionibus ad propos. 47. lib. 1. eius mentionē non fecerim, non est, quod ægre ferat, cum illæ propositiones non sint ab

ipso

ipso inuenta. Quædam enim multo tempore ante ipsum demonstrata sunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quasdam vero demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem; quod adeo manifesta sint, & faciles, vt nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorũ propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maxime eas ab ipso inuentas esse (quod tamen verum non est) prædicassem; cum eas quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cum sint omnium iudicio leuissimæ; adeo vt in plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod ijs dijudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirifice (vt alia peccata taceam) abutitur proportione 9. lib. 3. cum ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sane dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, qua ibi ostensa sunt æquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propositum ex ipsa constructione possit concludi, & ex demonstratis, vt proxime dixi, etiamsi propositio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandē circulus describendus est. Quod si ideo sum reprehendendus, quod propositionem vnã, multo aliter à me, & breuius demonstratam, ei non ascripserim, non video, quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cum problema hoc (Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.) multis seculis ante ipsum

à Theo-

à Theone demonstratum sibi arroget, hac solum de causa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum constituere.) quod in Apologia suum proprium appellat, idemq. hactenus desideratum esse gloriatur; cum tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum seculis floruit, in defin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonstrauerim. Nam, vt eo in loco ostendi, si rectæ lineæ datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui æquales erunt) versus eadem partes describantur, illico constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neque opus est tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet; quamuis robur demonstrationis ipsius idem sit, quod meæ. Et quod magis mirandum est, fatetur Peletarius, se meam demonstrationem vidisse, & eam nihilominus sibi audet, tanquam propriam, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonstrationes parum honeste, vt mihi vendicem, sibi subducere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipse sibi glorioſum putat? Itaq. multo verius, ac iustius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare possum; cum nunquam propositionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipse, sed solum eius nomen, ob rationes à me expositas, reticuerim.

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineum eiusdem generis esse, contra me pluribus verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo aberrat, quod dicitur, à scopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, vtrumque angulum planum esse; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare possit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neque ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negaui hac solum de causa, quod angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 10. euidenter ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodam-

modo

modo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis; nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, vt collimasse videatur: quamquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longe abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Numquã enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustra se fatigat, vt doceat, id fieri non posse, sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, quæ cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemq. linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquido affirmarit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum vsquequaque non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quanam linea recta æqualis possit esse circumferentiæ cuiusuis circuli dati, idemq. nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin: 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersiq. propterea esse quodam modo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponãtur: quales sunt angulus cõtactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita:

Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilineu; necnon linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiusq. in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5, recipere; immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulū vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, siue secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certe ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt à me est exposita: quinetiam ibidem asserit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quē testem produxerat pro se Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atque ex hisce

duobus

duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam sine ratione, & quãto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atque iterum odiose percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atque adeo omnes philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, praterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me suscitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum prop. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua à me ipso, confutatur? Qua si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometrica scientissimus, idemque Peletarij approbator, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi fallor) illa [illegible] verba (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus complecti velit.) declarant. Nam si demonstrationes eas [illegible], profecto Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometrica enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloque modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum si nolit, assentiatur. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorum rationes condemnat, en praclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quo aquiore animo [illegible] me nihilo magis, quam ab illo suo approbatore [illegible] putari.

TERTIO, quod [illegible] Peletarium, angulum contingentia nihil esse [illegible] clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil [illegible] quantitatem non esse. Ita ne vero? at in praclaris [illegible], quod neque est

punc-

punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neque quantitas, quo alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus alijs angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vmquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Præterea, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditum apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantum haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res non potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille nescio quibus præstigys ita deprauat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neque enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlcisceretur, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quam palæstricè pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum [illegible] Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eidem ponit minorem nihilo.

Est

Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se effictum iugulasset, exclamat.* (En Clauij argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potius figmenta, cum ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verum vt hominem fæneum, atque adumbratum nequicquam petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego, vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, vere esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum male à nobis acceptum, idq; ita vlciscatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulũ contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, eundemque Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidũ, atque acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venustate confixit, paulisper considerabimus; vt quàm suo iure Dialectica*

ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipse syllogismus videtur, incudique reddendus. Etenim cum versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) qua est, Nihil, de minori extremitate, qua est, angulo contactus maior, in recto pradicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Qua quidem conclusio recte sequitur ex premissis, quarum prior Peletarij est, non mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Conclusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex premissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraque premissa subijcitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in premissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neque contendat Peletarius, mentionem factam esse anguli in minore extremitate, vbi dictum est, angulum contactus angulo contactus maiorem esse. Nam angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod, vt planum fiat, vtemur ea palastra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum premissæ vera sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, qua recte ex premissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profitetur, cuius ego me Dialectica, si ab Aristotelica abhorret,

plane

plane fateor ignarum, Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitq. scire, quid aliud sit, angulum contactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauate, etsi è scholio huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere. Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, qua dicimus: angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus, sicut nec angulus contactus rectilineus est, aut acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad defin. anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quam ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum spissum viderer feciisse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo à me consilio factum est, vt omnes plane viderent, syncere me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq. omnino verbum immutasse. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipse facere in animum induxisset, Multo enim minus spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec varas, nec inanes in libros omnes Euclidis commentationes contineret, cum Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum sit arbitratus? Sed eo sum æquior Peletario, quod ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil pe-

nitus ad eam pertinentes inserſit: quarum priorem immerito ſuam propriam facit, vt ſupra dixi: poſteriorem vero, quam mirum in modum gloriatur ſe clariorem feciſſe, ego & longe breuius, & dilucidius (niſi meorum me amor fallat) iam pridem demonſtraui, vt mox, Deo adiuuante, ex Geometrica mea Practica clariſſime apparebit. Sed licuerit Peletario ſuæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pediſſequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus ſemper licuit, aliorum ſententias totas meis ſcriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque in primis Petrum Nonium laudatorem ſuum, qui idem fecit in refellendis paralogiſmis Orontij, aut ſine cauſa id ſe mihi vitio dediſſe fateatur. Quòd ſi, poſtquam tam fideliter eius verba propoſui, Peletarius criminatur, me eius ſententiam perperam eſſe interpretatum, quid facturus fuiſſet, ſi alienis verbis eius opinionem in medium adduxiſſem? Equidem facile ſibi perſuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuiſſe, quod non reprehendiſſet.

QVARTO vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quod me laborare oſtendit, vt probem, angulos contactus alios alijs eſſe inæquales: propterea quòd ſcripſi æqualitatem angulorum eiuſdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, ſi alter alteri ſuperponatur, iuxta octauum pronunciatum. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiuſdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cum tamen angulus rectilineus eſtenſus ſit à me æqualis curuilineo, atque adeo eiuſdem generis cum illo, licet non ſit in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde, quod putem angulos contactus ideo inter ſe inæquales eſſe, quod ſibi mutuo non congruant. Equidem ſi quid in eo à me peccatum eſſe intelligerem, & peccatum (quod eſt ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoſcerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cum, tota re etiam atque etiam conſiderata, nihil omnino vitij ineſſe videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui

occaſio-

occasionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis vero circulari non item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæteris q. omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atque in vtrinque conuexis, &c.) Et infra. (Quæ æqualia data sunt, sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in ijs, quæ specie similia sunt. Specie autem similia, hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horũ autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorum rectæ lineæ, & curuæ sibi mutuò congruunt? Temere igitur Peletarius mihi obiecit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint eiusdem speciei, atque adeo æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.

POSTREMO, vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometriæ ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non recte à quibusdã diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque

inaqualitatis; quod multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, plane rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cæteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletario quidem ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minus fortasse ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspiciat, neque me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque vero hoc vnquam negaui, cum alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loci contendi, rectius meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori vero in proportionem æqualitatis, atque inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cum tam priora duo membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum, vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis, cum hæc membra diuidentia latius pateant, quàm Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eo magis duplex illa diuisio mihi probatur, quod non desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandam esse Proportionem, quarum vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum,

ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quod si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatum, qua per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, ne scriptorum nullus aliquo vitio carebit, neque ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, qua dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia non deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscumque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quanquam ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquido constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemq. hanc; Anguli semicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, eo sunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanum scribit, nullum esse paralogismum. Ego sane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superq. in scholio huius propos. 16. à me sunt confutatæ, adductis contra ipsas euidentissimis instantijs. Deinde quod me perstringit, quasi parum intellexerim, qua sit proportio rationalis, & qua irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse, cum has proportiones vbique ex sententia grauissimorum scriptorum definierim, neque vero ipse vllum peccatum à me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denique quod crimina-

tur, me in definitionibus lib.5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defin.4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

EX his, quæ diximus, satis (vt opinor) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarij inanem, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amice putaui. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeo angulam semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certe contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces sunt, nihilque continent in se probabilitatis, vt in scholio huius propos. 16. ostendi, vbi omnes dissolui, neque meis ipse solutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ supra ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Vt non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse, sed ne veritati cessisse videretur. Nec vero quisquam putet, me vnum existimare, angulnm contactus vere esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosq. grauissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atque Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, eiusq. commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præstantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero in primis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flussatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propos. hanc 16. apertissime

docet,

docet, angulos contingentiæ vere esse angulos, ex definitione anguli plani, alioſq. alijs esse maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter sentiunt, (Peletarium proculdubio intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurde multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studioſus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquido constabit, eius sententiam esse Peletarij commenmento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ se inuicem secando, vel sese contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) *Quid clarius, quam Proclum hic asserere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propoſ. 4. lib. 1. Euclidis ita scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquã æqualis; Et semicircularis similiter, transitusq. à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulũ semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumq. propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumq. Peletarius negat, audetq. posterius appellare paralogiſmum. Deniq. eodem lib. 3. ad propoſ. 23. hæc verba habentur.* Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peleta-*

rius

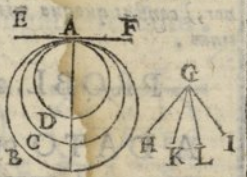
rius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?

OBITER quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit, atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sane maior absurditas apparet, quo ad sensum, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis, & Hyperbolæ constituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circumferentia Ellipsis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

SCD LYON 1

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera verò infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.



PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continue angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, alia recta cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

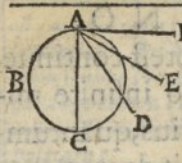
EX CAMPANO.

CAETERVM ex hac propos. 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.



DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta AC, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi

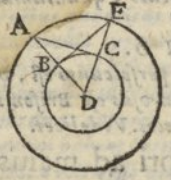


micirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor,) constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.

xvj.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, cuius centrũ D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusq. D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt [a] & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

a 4. pri.

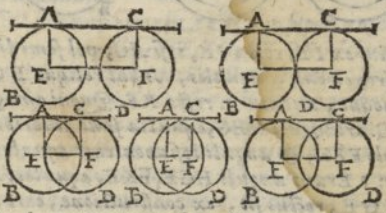
SCHO-

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Facilioremtamen praxim, ad propos. 31. huius lib. inuenies.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

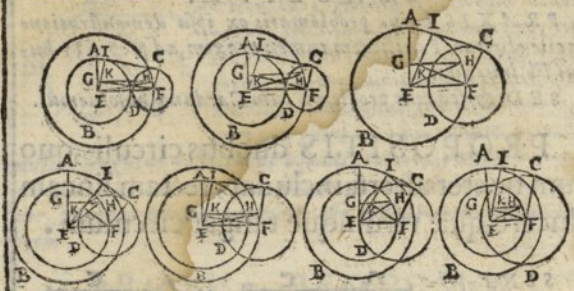


SINT primum duo propositi circuli æquales AB, CD, quorum centra E, & F, recta iungantur EF, ad quam ducãtur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, eductam vtrumque circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, a *& parallelæ, quòd anguli E, & F, recti sint;* b *Erunt quoque EF, AC, æquales & parallelæ; Ideoq.* c *& anguli A, & C, recti. Quare, per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrumq. circulũ tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorũ.*

a 28. pri
b 33. pri
c 29. pri

SINT deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum rursus centra E, & F, iungantur recta EF, ad cuius interuallum ex F, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proxime descripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atq; per F, agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectam per puncta I, & C, ductã vtrumq. circulũ AB, CD, contingere. Abscindatur

enim



enim ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli, æqualis, vt sint reliquæ EG, EK, æquales quoque, ducaturq. recta KF. Quoniam igitur latera HE, EG. trianguli HEG, æqualia sunt lateribus FE, EK, trianguli FEK, & anguli ipsis contenti æquales, ex constructione: a Erunt anguli HGE, FKE, æquales: Ac proinde, cum HGE, rectus sit, ex constructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK, æquales sunt, & parallelæ, ex constructione, b erunt quoque IC, KF, æquales & parallelæ; Atque propterea angulus EIC, c cum æqualis sit externo FKE, rectus erit; d Ideoq. & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrumque circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

a 4. pri.
b 33. pri
c 29. pri
d 29. pri

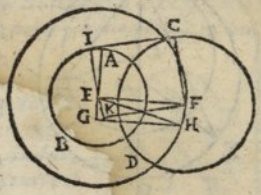
SATIS autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se inuicem per centra secant, aut non, ita tamen, vt vel centra consistant in communi eorum segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circum-

ferentia

ferentia minoris per maioris centrũ incedat, vel deniq. ita intra, vt circumferentia minoris includat centrũ maioris.

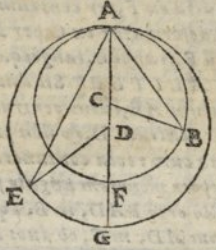
QVONIAM vero circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstrationeq. nisi quod rectæ AE, IE, protrahẽdæ sunt ad G, & K, vt AG, IK, æquales



sint semidiametro FC, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco æquales esse, q HEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, æquales sint ex cõstructione. Deniq. angulũ EIC, esse rectũ, ex 29. propos. lib. 1. q & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex ijs, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctũ quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum vero extra circulũ ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodo alter eorũ in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctũ circulus alium datum circulũ tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.

SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A,



tanget;

SCD LYON 1



tanget; Et si quidem punctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum AB; intra vero, si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tangetq. circulum AB, in A, per ea, quæ in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritq. angulus EAC, acutus, cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, æqualis constituatur AED: coibitq. recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales sunt,
a 6. pri. a erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetq. circulum AB, in A, ex ijs, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

TERTIO datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA; eaq. secta bifariã in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctũ F, transibit, tangetq. ex dicto scholio circulum AE, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B; transeunte, quæ cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutũ BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, æqualis fiat AEC: coibitq. recta EC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis

minores.

minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, 2 erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetque circulum AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt. 2 6. pri.

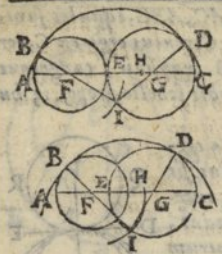
QVOD si per punctum N, extra circulum QAR, datum describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat,



ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangetque circulum QAR, in A, propterea quod vterque circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16 huius lib.

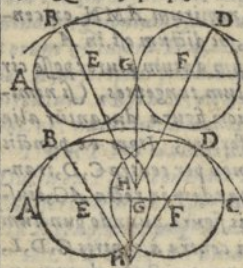
EODEM modo, si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum AMN, ex centro L, tanget hic circulum QAR, vt dictum est, in A.

EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta AG, eiusdem figuræ, vel in PAC, posterioris figuræ, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad eadem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cum Ioan. Bapt. Benedicto demonstrabimus.



a 12. ter

SINT primum duo circuli se mutuo tangentes, aut secantes inæquales, AB, minor, & CDE, maior, quorum centra F, G, per quæ recta ducatur FG, occurrens circumferentijs in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, a per contactum E, transibit. Abscissa recta EH, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ HC, quæ maior est, quam semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur IF, IG, occurrentes circumferentijs in B, D. Et quia CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, æqualis est, per constructionem; erunt totæ CE, IB, æquales. Cum ergo & diameter ID, diametro CE, æqualis sit; erit quoque IB, ipsi ID, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra vtrumque circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.

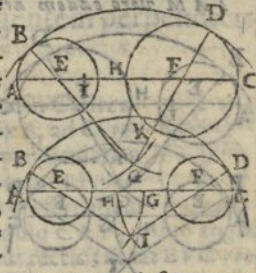


SINT deinde duo circuli se mutuo tangentes, vel secantes æquales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuo tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circumferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, æqualia sunt, angulosque b 4. pri. *comprehendunt æquales, nimirum rectos; b erunt & bases*

HE,

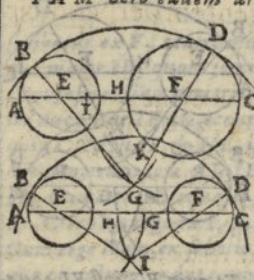
HE, HF, æquales. Et additis semidiametris æqualibus EB, FD, tota linea HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex scholio propos. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et si circuli sunt inæquales, describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris CH, arcus, quē in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ FI, compositæ ex semidiametro maioris FH, & HI, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se interfecare; quando autem se non secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circumferentias in B, D. Et quia FG, ipsi FI, æqualis est, ablatis æqualibus FK, FH; reliquæ æquales erunt KG, HI. Est autem HI, sumpta æqualis semidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipsi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, sit æqualis, erunt totæ rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex scholio propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.



VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ductæ rectæ AC, per circulorum centra, sumantur rectæ æquales AG, CH; ita vt qualibet semissem ipsius AC, superet: & ex centro E, per G, arcus GI, describatur, quem secet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, descriptus

ac denique ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam EG, EI, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, positæ sint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex scholio propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumque tanget in B, D. Quod erat propositum.



IAM vero eadem arte describemus circulum datæ magnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindamus AG, CH, reliquæ perficiemus, vt proximè dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex scholio propos. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim ABC, cuius centrum D, secet recta BC, cui ducenda est parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, rectæ DE, perpendicularis ad BC, extendaturq. ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur FG, perpendicu-

laris

laris ad AD. a Erit igitur FG, parallela ipsi BC, tangetq. circulum in A, per corollarium propos. 16. huius lib. quod erat faciendum. a 28.pri

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvij.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.



RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, b duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare c maior erit recta EC, hoc est, ED, quam EF, pars quam totum. quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat. b 17.pri c 19.pri

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi d maior est omni acuto. d 16.ter

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ inte-

riorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamq. in punctis contactuum secabuntur.



SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant rectæ AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamq. secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ GE, GF, a *quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. rectæ AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales sint. Igitur* b *rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur* c *autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.*

a 18. ter

b 14. ter

c 3. ter.

xviij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.



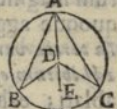
TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta FC, quæ d perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

d 18. ter

THEOR. 18. PROPOS. 20. xix.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico anulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, a erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, b æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.



a 5. pri.
b 32. pri

DEINDE non includant rectæ AB, AC, recta DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo d inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.



c 32. pri
d 5. pri.

TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi angu-



li eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. [a] Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. pro

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propos. demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia vero partis demonstratione hoc aliud principium edi ibitum est.* (Si totum totius est duplum, & ablaum ablati; erit & reliquum reliqui duplum) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propos. 1. & 5. Non tamen propterea demonstratio huius propos. censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facile à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari possit ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquã demonstrata. Neque vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propos. 20. huius lib. demonstratur, hac eadem propositione non nitantur, aut alijs propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (*secunda enim pars neutro eorum indiget*) *hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam* [b] *tam anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis aqua-*



b 5. pri.

lis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C simul sumpti dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æquales est ijsdem tribus angulis BAC, B, & C; (*Nam* [c] *cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus inter-*

c 32. pri

nis

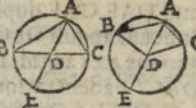
nis C, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis.) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC. quod est propositum.

ALITER. Quoniam [a] sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illis sex æquales: ablatisq. communibus ADB, ADC, [b] reliquus BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus. a 32. pri. b 3. pro.

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, [c] duo anguli DAC, DCA æquales sunt, estq. angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F, [d], anguluſq. EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero [e] anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum [f] ergo DAB, ipsi DBA, æqualis sit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem, [g] & anguli DEB, FEC, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EFC, æquales erunt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cum ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoque angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositum. c 5. pro. d 32. pr. e 5. pri. f 5. pri. g 15. pri.



QVOD si recta BD, CD, in centro angulum non constituat ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quæ spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE,



ad

ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrũ D, basin habens BEC, constansq. ex duobus angulis BDE, CDE, duplũ est totius anguli BAC. Quod est propositũ.

xx. THEOR. 19. PROPOS. 21.

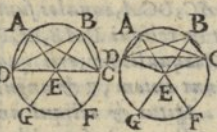
IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. [b] Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.



a 20. ter

b 7. pro.



SIT deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus est anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt aũt anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. [d] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

c 20. ter

d 7. pro.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: [e] Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

e 7. pro.

ALI-

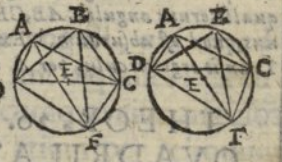
ALITER. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi a æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, b qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.



a 32. pri

b 15. pri

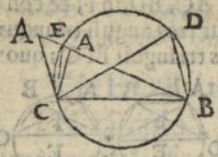
ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.



EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad eâsdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta CE, [a] *erunt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum,* [b] *Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A. quod erat propositum.*

a 21.ter

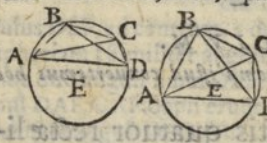
b 16.pri

xxj.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, CDA: Itē BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis



.n. diametris duabus quadri lateri AC, BD, [c] erunt duo anguli ABD, ACD, in eodē segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales. Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, CDA, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. [d] Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus [e] duo anguli ABD,

c 21.ter

d 32.pri

ACD,

SCD LYON 1

ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA; DAB: a Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat. a 32. pri

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscumque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipsum quadrilaterũ circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales; & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostendetur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ CE, AE, ad circumf. entiam, ita vt non secent rectas CD, AD. Quo facto, b erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC, c erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum



b 32. pri

c 21. pri

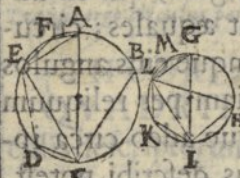
SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit.

quia

quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales: cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet tanquam principium, à Mathematicis, scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.



SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunque D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex definitione segmentorum similium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus angulis IKL, IHL, sint æquales; a *quod tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis:* b *erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, similes erunt.*

a 22. ter
b 3. pro.

DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt. erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; c *quod tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmentorum similium.*

c 22. ter

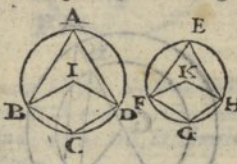
Igitur

Igitur in triangulis AEC, GLI, & reliqui anguli ACE, GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; a quod tam illi, quam hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum. a 22. ter

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis perneccessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico tam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin. segmentorum similium, æquales erunt. b *Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum* c *cum dupli sint anguli I, K,* d *erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.*



b 22. ter
c 20. ter
d 6. pro.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus ECD, FGH, inter se æquales. Dico arcus ECD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint c *autem*

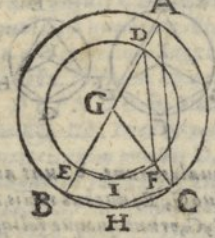
c 22. ter

tem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex defin. similium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A, E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero
a 7. pro. anguli I, K, ad centra sint æquales, a erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare vt prius, arcus BCD, FGH, similes sunt. Quod erat ostendendum.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascũq. duas lineas intercepti, similes.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Productæ enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus
b 20. ter G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens b duplus est tam
c 7. pro. anguli EDF, quam anguli BAC; c erunt anguli EDF, EIF, duobus angulis BAC, BHC, æquales; quod d tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis
d 22. ter
c 3. pro. EDF, BAC, c reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.



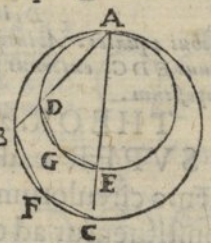
BREVIVS sic. f Quoniam
f 7. pro. anguli A, D, æquales sunt, quod vtriusque g duplus sit an-
g 20. ter gulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema arcus BC, EF, quibus ad circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.

VEL

VEL adhuc brevius. Quoniam arcubus EF, BC, æquales anguli in centro insistunt, immo vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema arcus EF, BC similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, vt manifestum est.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcumque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



TANGANT se mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniã igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt, quod a *tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC,* b *erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde arcus DE, BC, similes erunt ex defin. segmentorum similium.* a 22.ter b 3.pro.

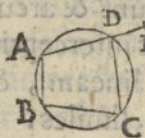
BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proxime antecedens theorema, arcus DB, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC c *hæc in contactum A, cadit, suntque eodem pacto arcus DE, BC, similes, fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq;* c 11.ter

sint: atque his ablatis ex totis circumferentijs similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum.

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.



IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, æquales sint duobus rectis: Item b duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC; reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.

a 13. pri.
b 22. ter

xxij. THEOR. 21. PROPOS. 23.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.



SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; c Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: d quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt simi-

c 10. ter
d 16. pri

lia:

lia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

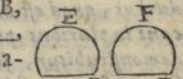
EADEM ratione, neq; ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inæqualitatem.



THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiij.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia, AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra, aliud cadit, quod est absurdum. [a] Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [b] Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atq; adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.





a 23. *tor*

b 10. *ter*

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse aqualia, super aquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propes & precedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum aqualia super aquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter aqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti aquales sint. Quod si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessario vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inaqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, aqualia super eandem rectam AB, secentque se mutuo in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant sese in punctis A, G. B, pluribus quam
210. ter. duobus, quod est absurdum. a Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si aqualia segmenta super aquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.

xxiiij. PROBL. 3. PROPOS. 25.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quę bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur DBA, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior,



(quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum
b 7. ter. b sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferen-

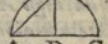
tiam,

tiam cadunt. Quare angulus D B A, [a] maior erit angulo DAB.) fiatq. angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim recta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE, trianguli CDE, & anguli contenti, recti. [b] Quare bases EA, EC, æquales erunt; [c] Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, [d] ac propterea E, centrum erit circuli ABC. quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

a 18. pri

b 4. pri.
c 6. pri.
d 9. ter.

SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare [e] & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) [f] Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quòd recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, [g] erit D, centrum.



e 5. pri.
f 6. pri.
g 9. ter.

SIT tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eueniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; [h] erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam DA, [i] ideoq. angulus DAB, maior angulo DBA.) fiatq. angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, punc̃to, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, maior erat angulo DAB, vt constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.



h 7. ter.
i 18. pri

SCHOLIVM.

SED fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta AC, bifariam in D, erectaq. perpendiculari DB, & ducta AB; aut DB, minor est, quàm DA, aut
a 18. pri æqualis, aut maior. Si minor, a erit angulus DBA, maior angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi ABD; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.

SI vero DB, æqualis est ipsi DA; erunt omnes tres DA,
b 9. ter. DB, DC, æquales; b ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.

SI denique DB, maior est, quàm DA; c erit angulus
c 18. pri DBA, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.

ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis ijsdem, quæ prius, fiat angulo DBA, æqualis angulus EAB. Et si quidem recta AE, cadit infra AC, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero AE, cadit supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum AB, in A, angulum æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semicirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

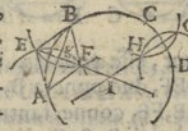
BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo maius sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quã EF, incedit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.



ALI-

SCD LYON 1

ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, è quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij duo arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ EF, GH, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum.



Quod autem lineæ EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF, BF, æquales: a Erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK; & anguli AEK, BEK, ostensi quoque æquales; b erunt & bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, æquales, ideoq. recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt rectæ EF, GH, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuo secent. Quòd si quando contingat, rectas EF, GH, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.

a 8. pri.

b 4. pri.

THEOR. 23. PROPOS. 26. xxv.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales AGC, DHF. Dico peripherias AC, DF, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturq. rectæ AC, DF. Quoniam igitur
a 20.ter a anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus DH, HF, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypothesi; b erunt
b 4.pri. bases AC, DF, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales AC, DF, c erunt ipsa
c 24.ter inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint,
d 20.ter d quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt
c 24.ter prius, rectæ AC, DF, æquales) c erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

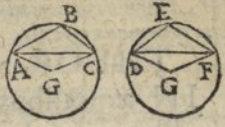
SCHOLIVM.

HAEC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheria AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

IAM vero, si quando contingat, rectas AG, CG; DH, FH, non constituere angulos in centris supra bases AC, DF,

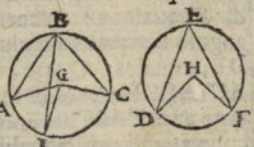
sed

sed supra bases ABC, DEF, vt subiecta hæ figuræ monstrant. ita secunda pars huius propos. demonstranda est. Quoniam spatia ad centra G, H, insistentia arcubus AC, DF, æqualia inter se sunt, cum ex scholio propos. 20. huius lib. dupla sint angulorum B, E, ad circumferentias; erunt etiam anguli AGC, DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam spatium circa G, quam spatium circa H, æquale est, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. inter se æquales. Quare, vt prius, ostendemus, bases AC, DF, triangulorum AGC, DHF. æquales esse, ideoq. segmenta similia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, super æquales bases AC, DF, esse æqualia, &c.



HINC etiam fit, spatia æqualia in centris, insistere arcubus æqualibus. Nam si spatia in centris G, H, insistentia arcubus maioribus AC, DF, æqualia sunt; erunt quoque, vt ostendimus, anguli AGC, DHF, æquales. Igitur, vt in prima parte propositionis demonstratum est, erunt & arcus AC, DF, maiores, & minores ABC, DEF, inter se æquales.

QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, sit angulus AGC, ad centrũ maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC, maiorem esse peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt vt ostensum est, peripheriæ CI, DF, æquales. Ac propterea AC, maior, quam DF.



PORRO propositio hæc, & tres proxime sequentes intelligenda etiam sunt in eodem circulo. Hoc est. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propos. & sequentium trium liquido constat. Eadem enim semper demonstratio, quæ duo-

bus,

bus, pluribusve circulis accommodatur, locum habet in uno eodemque circulo.

xxvj. THEOR. 24. PROPOS. 27.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H, insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatq. angulus AGI, æqualis angulo DHF. a Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

a 26. ter

INSISTANT deinde eisdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, b eruntq. peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, &c. Quod demonstrandum erat.

b 26. ter

SCHOLIVM.

HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur, quando rectæ AG, CG; DH, FH, in centris angulos constituunt supra bases AC, DF. Quoniam c anguli ABC, & E, dimidij sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.

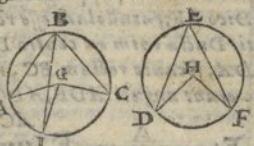
c 20. ter

EODEM modo spatia in centris G, H, insistentia ar-

cubus

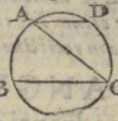
cubus ABC, DEF, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis æqualibus ABC, DEF, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus AIC, DF; ideoq. vt ostendimus, anguli AGC, DHF, æquales erunt: quibus ablatis ex spatijs circa centra G, H, quæ æqualia fuer, enim quodlibet sit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centris G, H, insistentia arcubus ABC, DEF, æqualia.

SI vero peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria AC, maior, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, maiorem esse angulo DHF, & angulum ABC, maiorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, æqualis peripheriæ DF, ducanturq. rectæ IG, IB, erunt, vt ostensum est, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, æquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior.



QVOD etiam de spatijs ad centra G, H, insistentibus arcubus ABC, DEF, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui DEF, insistens maius esse spatio ad G, quod arcui ABC, insistit, si arcus DEF, maior ponatur arcu ABC.

EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim ABCD, rectæ AD, BC, intercipiant arcus æquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ductæ namque rectæ AC, cum arcus AB, DC, ponantur æquales, [a] erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, æquales; qui cum sint alterni, [b] erunt AD, BC, parallelæ.



[a] 27. ter

[b] 27. pri

SINT iam AD, BC, parallelæ. Dico arcus interceptos AB, DC, esse æquales. Cum enim sint parallelæ AD, BC,

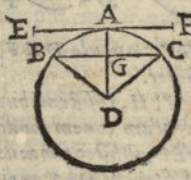
a 29. pri
b 26. ter
ducta recta AC; erunt anguli alterni ACB, CAD, æquales; b Ac proinde arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ducantur ex A, puncto medio peripheriæ BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcum BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, secante rectam BC, in G, connexisq. rectis DB, DC,

c 27. ter
c erunt anguli ADB, ADC, circumferentijs æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, vtrumque vtrique.



d 4. pri.
d Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti,

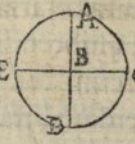
e 18. pri
f 28. pri
e quòd DA, perpendicularis sit ad EF. f Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.

EX demonstratis in hac propos. & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero

arcui

arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.



RECTVS angulus ABC, insistat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcũ AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. necnon & angulus DBE: rectus, [a] cum aqualis sit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, aquales sunt, vtpote recti: ac propterea [b] arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, aquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori. [a] 15. pri [b] 26. ter

SED insistat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, semicirculus est, estq. AC, quadrans; erit tã AE, quàm CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, aquales, [c] ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, aquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis aquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum. [c] 27. ter

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RE-

RECTA linea è centro circuli ducta, secansq. aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisq. BF, basi DF, æqualis ponitur; a erit angulus BAE, angulo DAF, æqualis. Igitur b arcus BE, arcui DE, æqualis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.

a 8. pri.
b 26. ter

SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoque BD, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum rectis AB, AD: quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; c erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, vt ostendimus; d. erunt quòque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.

c 27. ter
d 4. pri.

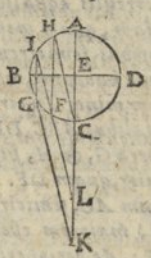
NEQVE vero omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioannes Baptista Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat: Videlicet.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eiq. ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrum-

que

que Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro pruducta : Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

IN circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, GB; & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectæ FH, GI, quæ ex scholio huius propos. 27. ipsi AC, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B. per G, denique extendatur recta BG, occurrens AC, productæ in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis AC, HF, IG, simul sumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum AK, conueniant; a quoniam anguli CHF, HFI, arcubus æqualibus CF, HI, insistentes, sunt æquales; b erunt rectæ HC, IL, parallelæ : Est autem & FH, ipsi CL, parallela. Parallelogrammum ergo est CHFL; c ac proinde recta CL, rectæ FH, æqualis. Eadem ratione erit KL, ipsi GI, æqualis : & sic deiuceps, si sint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.



a 27. ter

b 27. pri

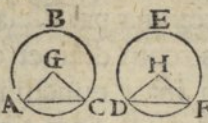
c 34. pri

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxvij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maio-

rem

rem quidem maiori, minorem autem minori.

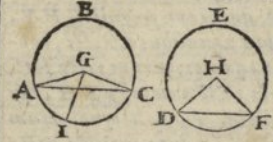


IN circulis æqualibus A B C, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, D F, æquales. Igitur [a] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, [b] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

a 8. pri
b 26. ter

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nã si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem basis AC, maior base DF. Igitur [c] angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHF, æqualis; eritque propterea [d] peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F: Ideoq. reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.



c 25. pri
d 26. ter

SCD LYON 1

THEOR. 26. PROPOS. 29. xxviij.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

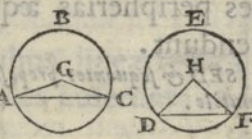


IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF: Sunt autem & anguli G, H, [a] æquales, quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur [b] bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum;

a 27. ter.
b 4. pri.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minorè. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF; sitq. AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor quam DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [c] erit basis AC, maior basi DF, &c.



c 4. pri.

SVNT autem proxime antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eædem enim locum habent in vno eodemq. circulo.

ITAQVE eadem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

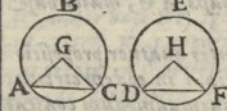
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SED & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas

æqua-

æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, les AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, a ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia. b Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum. 22.4.ter 24.4.ter

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proxime demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

III.

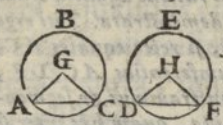
EX circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, at circumferentiæ ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IIII.

RECTAE lineæ, quæ ex quibuscun-

que circulis circumferentias similes inæles auferunt, inæquales sunt.



228.ter. *IN eadem figura ponantur circumferentiæ ABC, DEF, similes & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo rectæ AC, DE, dicantur æquales, a erunt circumferentiæ ABC, DEF, ablatæ æquales, quod est contra hypothesin. Non ergo æquales sunt rectæ AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas AC, DF, inæquales esse, si circumferentiæ AC, DF, ponantur similes, & inæquales.*

V.

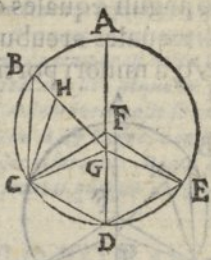
SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoq. in peripheriam duæ rectæ non in easdē partes cadētes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abscindentq. æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentq. ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, sumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, constituanturque primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas GC, GE, quam arcus CD, ED, æquales esse. Quoniam enim

b13.pri b *tum duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duo-*

bus

bus rectis æquales sunt, si demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, anguliq. FGC, FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq. modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis GC, basi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG; [a] ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum.



a 26. ter

DEINDE sint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Est autem & basis FC, basi FE, æqualis. [b] Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, baseq. æquales ponuntur GC, GE, [c] erunt & anguli CFD, EFD, æquales, [d] atque idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum.

b 8. pri.

c 8 pri.

d 26. ter

TERTIO sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt, [e] erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq. æquales contineant; [f] erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant.

e 27. ter

f 4. pri.

HOC tamen theoremate multo vniuersalius est Lemma 21. lib. 1. nostri Astrolabij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum suma-

tur punctum quodpiam, in quo ad eaſdē partes duo anguli æquales conſtituātur, inſiſtent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorq. erit ille, q̄ à minori portione diametri remotior eſt.



IN eadem figura proxima ſint anguli æquales CGD, duo CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem eſſe. Ductis enim rectis BC, CD, a *quoniam recta GB, maior eſt, quam recta GD, abſcindatur GH, ipſi GD, æqualis, iungaturq. recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus laterib. GD,* b *GC, æqualia ſunt, angulosq. continēt æquales; berunt & baſes CH, CD, æquales, & angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Eſt autem GDC, in Iſoſcele FCD, acutus,* c *ex 3. coroll. propoſ. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtuſus erit. Cum ergo;* d *duo anguli CHB, CBH, ſint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare* e *latus BC, latere CH, maius erit. Eſt autem CH, recta oſtenſa ipſi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoq. erit, quā CD; ac propterea ex ſcholio prop. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat oſtendendū.*

a 27. ter.
b 4. pri.
c 17. pri
d 19. pri

xxix. PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam bifariam ſecare.

SIT peripheria ABC, ſecanda bifariam. Ducatur recta ſubtendens AC, qua diuiſa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam ſecabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur e & baſes AB, CB, æquales erunt; Ac propterea f peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam ſecuimus. Quod erat faciendum.



e 4. pri.
f 28. ter.

PRA-

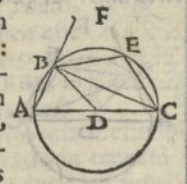
PRAXIS.

NON differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt ABC, intelligenda semper est recta linea eum subtendens AC, etiamsi ducta non sit; atque ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuo intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta AC, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam AC, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxx.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturq. in semicirculo angulus ABC, existetq. angulus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoq. in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum, recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria, BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectæ DA,



a 5.pri. DB, æquales sunt, a erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC,
b 32.pri BCA, æqualis erit. b Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

c 17.pri QVONIAM vero in triangulo ABC, c duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

d 22.ter RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, d duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

SATIS autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcumque angulum in segmento maiore BAC, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus BAC. Quare quicunque alius ostendetur esse etiam recto minor, quia c *æqualis est angulo BAC, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.*



c 21.ter

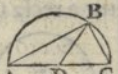
AMPLIVS cum angulus rectus ABC, pars sit an

guli

guli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior, quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quo que anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter AC, & centrum D, sit angulus ABC, quem dico esse rectum. Ducta enim recta BD, [a] erunt anguli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cum igitur angulus BDC, externus [b] æqualis sit duobus angulis internis DBA, DAB, in triangulo ABD; Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC, atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli ABC. Cum igitur [c] anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorum dimidium, rectus: quod est primum.



a 5. pri.

b 32. pri

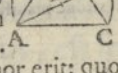
c 13 pri

VEL sic. Quoniam [d] angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DBC, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo ABC, æquales in triangulo ABC: ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium angulorum A, C, & ABC, eiusdem trianguli. Quocirca [e] cum tres anguli in triangulo ABC, sint æquales duobus rectis; erit ABC, dimidium duorum rectorum, atq; idcirco rectus.

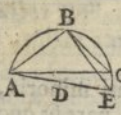
d 5. pri.

e 32. pri

SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum: Atque hęc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus

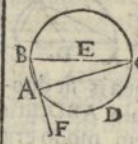


SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D,



angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro AE, occurrens peripheriæ productę in E, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.

IAM vero proponatur segmentum maius ABC, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum CAD, segmenti minoris, qui fit à recta eadem CA, & peripheria CADC, recto minorem. Ducta enim diametro CB, & recta BAF, cadet eius segmentum BA, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritq. angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoque. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus CAD, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta CA, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC; constat vtrumque.



a 2. ter.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit trium angulorum trianguli, [b] qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

TRAN-

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur recta AB, a *Erit angulus ABE segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur versus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE, peruenerit,* b *vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si vlterius moueatur ad AC,* c *faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est, non tamen per angulum recto æqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse prædictas consequentias.*



a 31. tert

b 16. tert

c 31. tert

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est

SCD LYON 1

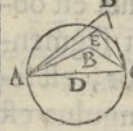
recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrariū est. Praterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentū non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentū non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypothesi aduersatur

QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectāgulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositū bifariā secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, vel DC, circulus describatur AEC, quē dico transire per B. Si. n. transeat



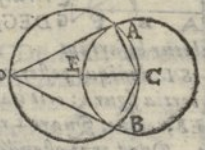
citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit a *angulus AEC,*

a 31 1.ter

rectus

rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, a vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum. a 21. pri

EX ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem recta ex eodem puncto per centrum circuli ducta, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.



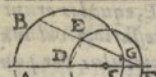
SIT enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaq. diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, iungantur-que rectæ DA, DB. Dico vtramque e circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis AC, BC, b erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A; & recta DB, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quam hæc ad extremitatem semidiametri CB. b 31. ter

SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco.

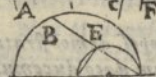
SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à pũcto vero, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunq;: fecabitur eius portio intra priorẽ circulũ à circumferentia posterioris bifariam.

SIT circulus AEC, per cuius centrum D, describatur alius circulus DEF, & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac denique ex puncto F, vbi circulus DEF,

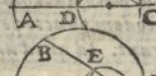
rectam



rectam AF, intersecat, ducatur recta FB, secans circumferentias in B, E, G. Dico BE, GE, esse æquales. Ducta enim recta
a 31.ter DE, a erit angulus DEF, in semicirculo
b 3.ter. DEF, rectus. Igitur b recta DE, rectam BG, secat bifariam.



QVOD si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit
c 31.ter c rursum angulus DEC, in semicirculo
d 3.ter. DEC, rectus; ac d propterea BC, in E, secabitur bifariam.



SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt
e 31.ter in tertia figura; erit iterum e angulus DEF, in semicirculo
f 3. ter. DEF, rectus. Quare f recta DE, rectam BG, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.

QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.



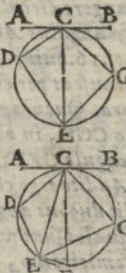
IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum ABCD, cuius duo opposita latera AD, BC, parallela sint, & æqualia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim rectæ AD, BC, pa-
g 33.pri rallelæ sint, & æquales, g erunt quoque AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo est ABCD. Quia ver-
h 28.ter q h & arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis est; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC,
i 31.ter semicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare i anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.

THEO-

THEOR. 28. PROPOS. 32. xxxj.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quędam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in prio re figura, recta CE, per centrum. [a] Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: [b] Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.



NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: [c] e ritq. CF, perpendicularis ad AB, [d] & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: [e] Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterq. sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG, duo [f] anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: [g] Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu aût, &c. Quod erat ostendendum.

a 18. ter
b 31. ter
c 18. ter
d 31. ter
e 21. ter
f 22. ter
g 13. pri

SCHO-

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa, angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primum recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB,
a 31. ter *tangere circulum. Quoniam* a *angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam vero CE, non transeat per centrum, construaturq. figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angu-*
b 21. ter *lo CGE, in alterno segmento maiore,* b *& hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus ACE, æqualis angulo CFE. Addito ergo cõmuni angulo ECF, erit angulus ACF, æqua-*
c 32. ter *lis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æ-*
d 32. pri *quales sunt vni recto; quod* c *angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF,* d *æquales sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoque erit; ideoq, per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.*

EODEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angulo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB,
e 13. pri *tangere circulum. Cum enim* e *anguli BCE, ACE, duobus*
f 22. ter *sint rectis æquales:* f *Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.*

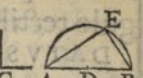
xxxij. PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

RE-

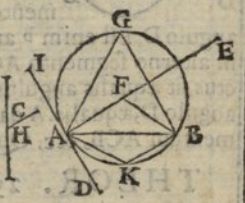
SCD LYON 1

RECTA data sit A B, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super A B, segmentum describere, in quo angulus existés sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, Bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, vel D B, semicirculus AEB; factumque erit, quod proponitur. Nam [a] angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.



[a] 31. tertij.

SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulus F B A, secetque B F, rectam A E, in F. [b] Erunt igitur rectæ F A, F B, æquales. Quare si centro F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æqualé angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulū in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G B.



[b] 6. primi.

[c] 32. tertij.

SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, describtumque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus I A B, hoc est, angulus datus H, [d] æqualis est angulo K, in alterno segmento A K B. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

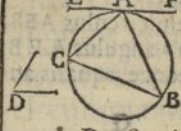
[d] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiij.

A DATO circulo segmentum abscin

dere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit ABC, à quo auferre oportet segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. [a]Ducatur recta EF, tangés circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim [b] angulus FAB, æqualis angulo C in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.



a 17. tertij.

b 32. tertij.

xxxiiij.

THEOR. 29. PROPOS. 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectãgulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantũ, aut neutra. Trãseat primũ vtraque per centrũ. Quoniam igitur omnia quatuor segmẽta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.



TRANSEAT deinde CD, sola per centrum F, diuidatque primum rectam AB, bifariam, [c] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniam

c 3. tertij.

igitur

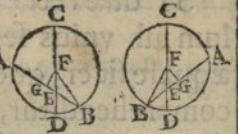
igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, [a] erit rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectę FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem quadratum rectæ FB, [b] æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cũ AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex ijs, quæ ad defin 1. lib. 2. scripsimus.



a 5. sec.

b 47. primi.

DIVIDAT iam CD, transiens per cẽtrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, [c] eritq. FG, perpẽdicularis ad AB. Quoniam vero rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ FE, [d] æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, [e] æquale quadratis rectarũ FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum F G, G E, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato rectę GE, [f] æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta A B, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato cõmuni quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.



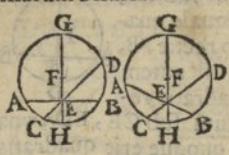
c 3. tertij.

d 5. secũdi.

e 47. primi.

f 5. secũdi.

TERTIO neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulũ sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, &c. Quod demonstrandum erat.

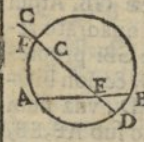


SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quęlibet tria pũcta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.

SECENT se mutuo rectæ AB, CD, in E. sitque rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferẽtiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeo vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostẽdemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, [a] *æquale est*



[a] 35. tertij.

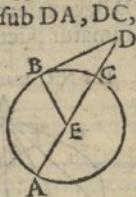
rectan-

rectangulo sub AE,EB;& rectangulum sub C E,E D,ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub AE,EB;Erunt rectangula sub CE,ED,& sub FE,ED, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.

THEOR. 30. PROPOS. 36. xxxv.

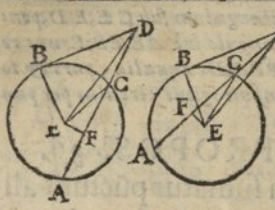
SI extra circulum sumatur pũctum aliquod,ab eoque in circulum cadant duę rectæ lineæ,quarum altera quidem circulum secet,altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei,quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum ABC,punctum sumatur D,a quo linea ducatur D A, secans circulum in C, [a] & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primum recta D A, per cẽtrum E,& iungatur recta E B, [b] quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, [c] erit rectangulum sub DA,DC,vna cum quadrato rectæ EC,hoc est,cum quadrato recte EB, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ D E, [d] æquale quadratis rectarum EB,BD. Quare rectangulum sub DA,DC, vna cũ quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum D B, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE,remanebit rectangulum sub DA,DC,quadrato rectæ DB,æquale. Quod est propositum.



NON transeat iam DA,secans per centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F,ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; [e] eritque EB,ad BD,perpendicularis; [f] & EF,ad AC.

[a] 17. tertij.
[b] 18. tertij.
[c] 6. secũdi.
[d] 47. primi.
[e] 18. tertij.
[f] 3. tertij.



Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, [a] erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur cõi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, [b] æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et [c] quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, [d] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulũ sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulũ sumatur pũctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandũ.

a 6. secũdi.

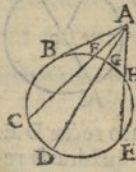
b 47. primi.

c 47. primi.

d 47. primi.

COROLLARIVM. I.

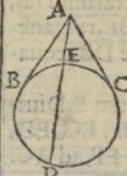
HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulũ secãtes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si tæ A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, e erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.



e 36. tertij.

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulũ tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quã quadratum rectæ AC, æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.



f 36. tertij.

CO-

COROLLARIVM. III.

PIRS PICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulũ tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangẽs; ductis rectis EB, ED, e centro E, a erunt anguli ABE, ADE, recti, ideoque æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, b erit angulus ADE, maior angulo ABE.



a 18. tertij.
b 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tãgat; erunt quæ tangentes AB, AD, æquales, vt ostentum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE. ad centrum E, quæ circulũ secet in F, c erit AD, cũ sit propinquior minimę AF, minor, quã AB, quæ a minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD. sunt æquales; aditis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales quod est absurdum. d Sunt enim maiores AB, BE. Solũ igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangant: Quod est propositum.

c 8. tertij.
d 21. primi.

COROLLARIVM IIII.

ILLVD denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD. tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntque ex 2. coroll. AC, AD. æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum. e Duæ enim tantum duci possunt.

c 8. tertij.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propos. duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. f Igitur anguli B, F, æquales erunt: g Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit. atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.

f 8. primi.
g 18. tertij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionẽ demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulũ BCD, ducatur tangẽs AB, et secãs AE, quæ primum per centrũ F, transeat, secetq; circumferentiã



in D. Dico rectangulum sub AE, AD, æquale esse quadrato ex AB. Descripto namque ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vsque ad H, I; & per D, ad AH, perpendicularis KL, quæ eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demõstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, æquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, KL, æquales erunt, secabunturque in B, D, bifariam: ac propterea rectãgula sub AB, BI, & sub KD DL, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æquitatẽ rectarum AB. BI; KD, DL. Itaque quoniã rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub AE, (quæ ipsi HD, ostensa est æqualis) AD, [a] *æquale est rectangulo sub KD, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB, constat propositum.*

a 35. tertij.

SED iam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetque circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsque ad G, I; & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Eruntque ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, æquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, æquales erunt, secabunturque in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, æqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob æqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Itaque quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, (quæ ipsi GC, ostensa est æqualis) AC, [b] *æquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, siue quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur.*

b 35. tertij.

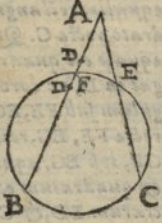
PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo ferme conuertemus.

SI a puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis

prope

prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorũ segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.

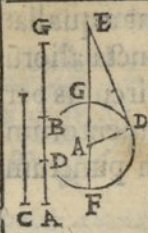
EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus BCE, qui si dicatur non transire per quartum punctum D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub AB, AF, æquale est, ex coroll. 1 huius propos. rectangulo comprehenso sub AC, AE; & rectangulum sub AB, AD, eidem rectangulo sub AC, AE, ponitur æquale: erunt rectangula sub AB, AF, & sub AB, AD, inter se æqualia, pars et totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.



LICEBIT quoque ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale.

SINT



SINT data duæ rectæ AB, & C, sitque ipsi AB, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, maioris. Diuisa recta AB, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallum AD, dimidiata, circulus DFG, & ad AD, in D, excitetur perpendicularis DE, ipsi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur EF, secans circumferentiam in G. Dico si rectæ AB, adiiciatur BG, ipsi EG, æqualis, rectangulum sub tota AG, & GB, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub FE, EG, a *æquale est quadrato rectæ ED; (quod ED, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 16. huius lib.) Est autem rectangulum sub FE, EG, æquale octangulo sub AG, GB, (quod rectæ FE, EG, rectis AG, GB, æquales sint. Sumpta enim est GB, ipsi EG, æqualis, & AB, ipsi FG, æqualis posita est,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex constructione.) æquale. Igitur & rectangulum sub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.*

a 36. tertij.

NON secus propositum demonstrabitur, si rectæ C, maiori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum quadrato rectæ AB, minoris æquale sit.

xxxvj.

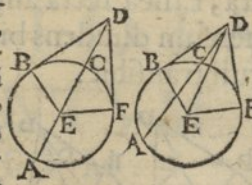
THEOR. 31. PROPOS. 37.

SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum,

æquale

æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctũ sumatur D, a quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectãgulum sub DA, DC, æquale quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B.[a] Ducatur enim DF, tangẽs circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniã igitur rectangulo sub DA, DC, [b] æquale est quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis [c] erunt anguli DFE, DBE, æquales. [d] Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. DB. circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.



a 17. tertij.

b 36. tertij.

c 8. primi.

d 18. tertij.

SCHOLIVM.

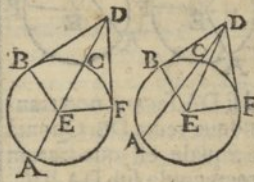
EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI a puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duę lineę vsque ad conuexã peripheriã

inter

inter se æquales; Linea recta ab eodem punc̃to per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.



IN priori figura huius propoſ. duæ rectæ DB. DF, circulum ABCF, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propoſ. æquales erunt: Vel ducantur quæcũque duæ æquales DB, DF. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum BDF, ſectum eſſe bifariam a recta DA. Cum enim iunctis rectis EB, EF, duo latera BD, DE, duobus lateribus FD, DE æqualia ſint, baſiſque EB, baſi EF, æqualis; a *erunt duo anguli ad D, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.*

a 8. primi.

DIVIDAT iam recta DA, angulum BDF, bifariam. Dico rectam DA, per centrum tranſire. Si enim in DA, non eſt centrum, ſit extra ipſam centrum E, iungaturque recta ED, vt in poſteriori figura huius propoſ. Ergo, vt demonſtratum eſt, recta E D, angulum BDF, bifariam diuidet; ac propterea anguli BDA, BDE, cum ſint dimidiatæ partes anguli BDF, æquales inter ſe erunt, pars, & totum; quod eſt abſurdum. Tranſit ergo recta D A, per centrum. Quod demonſtrandum erat.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

AGENS *Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdē: exponit paucis definitionibus, quid sit figurā in figura inscribi, aut circa figurā describi, incipiēs à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, triāguli externi ABC; dicetur triāgulum DEF, in triangulo ABC, esse*



inscri-

inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.

II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulũ ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CAETERVM proprie figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cũ singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriã.



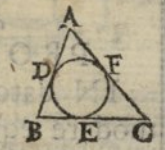
VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

FIGV-

IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula latera eius, quę circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

AT vero, si latera trianguli ABC, singula tăgant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.



V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

CIRCVLVS autem circum figurā describi dicitur, cum circuli peripheria, singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, in figura definitionis 3 descriptus esse circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundtm describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

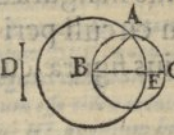
SCD LYON 1



VT recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accõmodare æqualem datæ rectæ lineę, quæ circuli diametro non sit maior.



IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datę D, quæ tamẽ maior non sit diametro circuli dati. Cũ enim diameter a sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, b abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autem BE, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A. Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. c Est enim BA, æqualis ipsi BE; & D, æqualis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 15. tertij.

b 3. primi.

c 15. defin. primi.

EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo ABC, cuius centrum D, accommodanda sit

da sit recta æqualis rectæ EF, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela.[a] Ducatur per centrum D, diameter AC, rectæ G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit æqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero EF, diametro minor fuerit, secta ea bifariã in H, abscindatur DI, ipsi HE, & DK, ipsi HF, æqualis, vt tota IK, toti EF, sit æqualis.[b] Et per I, K, ad angulos rectos ipsi AC, ducantur LM, NO; iungaturq; LN. Dico LN, accõmodatã esse æqualẽ ipsi EF, & ipsi G, parallelam. Cũ enim LM, NO, æqualiter a centro distẽt,[c] ipsæ æquales inter se erunt:[d] quæ cum diuidantur bifariã in I, & K, quod ad angulos rectos secentur a recta AC, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses LI, NK, æquales.[e] Quia vero LI, NK, parallelæ etiam sunt;[f] erunt quoque LN, IK, æquales, & parallelæ. Quare cum IK, æqualis sit ipsi EF, & parallela ipsi G. Erit etiam LN, æqualis ipsi EF,[g] & ipsi G, parallela. Eadem ratione, si rectæ ducantur MO, erit ea æqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.

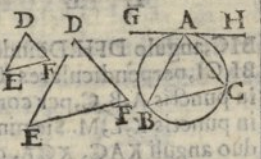


a 31. primi.
b 11. primi.
c 14. ter.
d 3. tertij.
e 28. primi.
f 33. primi.
g 30. primi. ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturq; recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quòd anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E,[h] minores sunt



h 17. primi.

duobus rectis. a Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, cadere. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, b æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, c æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per cōstructionem, angulus E; erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF. d erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

a 13. primi.

b 32. tertij.

c 32. tertij.

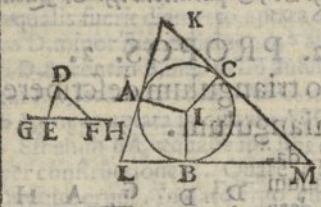
d 32. primi.

iij.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulū describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulū dato triāgulo DEF. Producto latere EF, vtrinq; ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus



BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circulū tanget in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntq; in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæ angulum constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor

angulis

angulis ad E, & F, sintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed a hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC, Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta AI, producta caderet supra IC. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI, atq; idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostendemus, AL, BL, coire in L, & C M, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cũ igitur b & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulũ M, æqualẽ esse angulo DFE, c Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendũ erat.

a 17. primi.

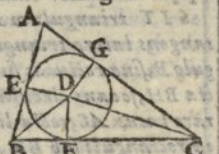
b 13. primi.

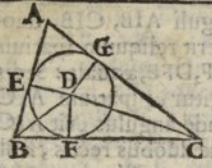
c 32. primi.

PROBL. 4. PROPOS. 4. iiii.

IN dato triangulo circulum inscribere.

SIT describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeãt in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt





duobus anguli s DBF, DFB, triãguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; a erunt quoque latera DE, DF. æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cũ igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallũ DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetq. latera triãguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triãgulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

a 26. primi.

b 20. primi.

SCHOLIVM.

VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; b *in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; nõ abs re fuerit demõstrare hoc loco, cũ Io. Baptista Benedicto, quãto maiora sint, hoc proposito theoremate.*

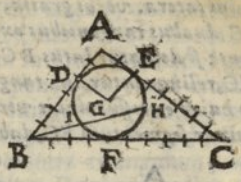
IN omni triãgulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquũ recta linea, cuius quadratum quadruplũ est rectanguli comprehẽsi sub recta ab angulo illis lateribus comprehẽso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus cõprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositũ diametro circuli triãgulo inscripti.

c 4. quarti.

SIT triangulum ABC, c *cui circulus inscribatur DEF, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, recta CE, & recta AD, re-*

SCD LYON 1

cta AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superāt segmētis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadē latera BA, BC, latus AC, recta, quæ dupla est segmēti BD.



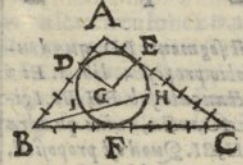
Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, rectæ, cuius quadratum quadruplū est rectāguli sub BH, BI. Quod est propositū. a 36. tertij.

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera AB, AC, superare latus BC, rectæ, cuius quadratū quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, vt ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli DEF, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE; b erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, c erunt tam rectæ AE, DG, quā AD, EG, parallelæ inter se: atque idcirco AG, parallelogrammum erit. d Quare tam recta AD, semidiametro EG, quàm recta AE, semidiametro DG, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ AD, AE, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superāt autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt ostensum est. Nam EC, ipsi FC, & DB, ipsi FB, æqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, superant latus BC, diametro circuli inscripti. Quod est propositum. b 18. ter. c. 28 primi. d 34. primi.

ITAQVE quæuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interiiciuntur. Ostensum enim est, latera AB, AC, superare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

IAM vero his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triāgulo inscribēdus latera tāgere debet. Quia

enim latera. verbi gratia, AB, AC, superare debent latus BC, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes AD, AE, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum EC, dabit segmentum CF, vsque ad punctum tertium F: Vel reliquum segmentum DB, dabit segmentũ BF, ad idem pũctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8. & latus



EC, 10. palmorum. Dempto latere BC, 10. palmorũ ex duobus lateribus AB, AC, hoc est, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD, quàm AE, duos palmos continebit. Segmentum ergo D.B, continebit 4. palmos, totidemque segmentum BF, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorum. Sic etiã dempto latere AB, 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id est, ex 18. palmis, reliqui sunt 12. palmi. Vtrumque ergo segmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE. AD. 2. palmorum, & vtrũque BD, BF, 4. palmorum. Postremo dempto latere AC, 8 palmorum ex lateribus AB, CB, hoc est, ex palmis 16, remanẽt 8 palmi. Vtrumque ergo segmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque AD, AE, 2. palmos.

V. PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum describere.

SIT circulus describendus circa datum triangulum



ABC. Diuidatur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectãgulo, vel obtusangulo sumẽda sunt facilita-

tis

tis gratia, circa rectũ, vel obtusum angulũ, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta essent tecta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; a erũt bases FA, FB, æquales. Eodẽ modo erũt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendũ.

a 4. primi.

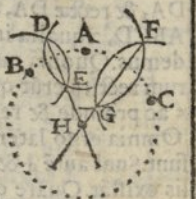
COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, b omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si vero sit in latere BC, c angulum BAC, ei lateri oppositum, esse rectum, quod sit in semicirculo: Si denique cadat extra triangulum, d angulum oppositum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

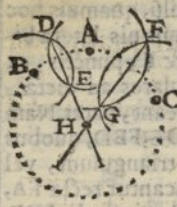
b 31. tertij.
c 31. tertij.
d 31. tertij.

CONTRA vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutãgulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in vnum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo cẽtrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes anguli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

SCHOLIVM.



COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt cõstituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, vt hac prope fit traditum est. Quod tamen



facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineëtur secãtes seſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, secans rectã DH, in H. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, triãguli ABC, bifariã a rectis DH, FH, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum ABC, descripti. Quod est propositum.

vj.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato circulo quadratũ describere.

SIT in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera EA, EB, trianguli AEB. æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; a erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniã quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum rectis; b erũt quatuor arcus, quibus insistũt, æquales: c ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autẽ d & anguli recti, cum omnes in semicirculis existãt. Quare quadratũ erit ABCD, propterea que in dato circulo quadratũ descripsimus. Quod eratfaciendũ.



a 4. primi.

b 26. ter. tij.

c 29. ter tij.

d 31. ter tij.

PRO-

PROBL. 7. PROPOS. 7. vij.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineę perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, a erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. b Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogramum est ACHF, c erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales; Sed ACH, est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.



a 28. pri.
b 28. primi.
c 3 8. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8. viij.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariã in E, F, C, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earũ AH, BF, æquales & parallelæ.



Quare

a 33. primi.

a Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadē ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erūt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogrāma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erūt rectis AH, EB, DH, AE: Sūt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æquælium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H. qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. b quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.



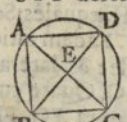
b 29. primi.

ix.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD, Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, triāguli ABD, æqualia sunt c erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. d Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; e erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, interuallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.



c 5. primi.

d 32. primi.

e 6. primi.

SCHOLIVM.



QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniã enim latus quadrati circumscripti æqua-

le

le est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ a diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde cētro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo b accōmodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturq. recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorū ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, c describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulū sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD, & recta AB, secat circulū DCA, d tāget recta BD, eundē circulū DCA, in D. Quare angulus BDC, e æqualis est angulo A, in alterno segmēto CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem f æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est, angulo ABD, g cum ABD, ADB, æquales sint; ac propterea h rectæ CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; i ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.



X.

a 11 secūdi.

b 1. quarti.

c 5. quarti.

d 37. tertij.

e 32. tertij.

f 32. primi.

g 5. primi.

h 6. primi.

i 5. primi.

COROL-

COROLLARIVM.

32.primi. QVONIAM vero tres anguli trianguli ABD, æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres b æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

b32.primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quod se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, BC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunque proportionem datam, non solum duplã, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib. 6. Qua res hactenus desiderata est.

PRO-

SCD LYON 1

PROBL. II. PROPOS. II. xi.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [a] Constituatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F, & in circulo [b] inscribatur triangulũ ACD, æquiangulũ triangulo FGH, & vterque angulorũ ACD, ADC, [c] bifariã diuidatur rectis CE, DB, atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonũ ABCDE, in circulo dato inscriptũ, esse æquilaterum, & æquiangulũ. Cũ enim vterque angulorũ ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erut quinque anguli ADB, BDC, CAD, DCE, ECA æquales. [d] Quare arcus AB, BC, CD DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco [e] & rectæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB, ED, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. [f] Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes æquales erũt. Eodẽ modo æquales erũt cuilibet horũ angulorũ reliquí anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli ex ternis arcubus æqualibus componuntur. Aequiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum inscriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.



[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. trimi.
[d] 26 tertij.
[e] 29. tertij.
[f] 27. tertij.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti. [g] Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales sint, vt pote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant, sit autem CAD, per coroll. præcedentis propos. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti; erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.

[g] 27. tertij.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si detur recta linea terminata C D, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. [a] Fiat triangulum Isosceles FGH, habēs vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli A CD, A DC, æquales angulis G, H, coeantque rectæ CA, DA, in A, [b] quæ efficiēt angulum CAD, æqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa triangulum ACD, circulus [c] describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triāgulum ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.

[a] 10. quarti.

[b] 32. primi.

[c] 5. quarti.



FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita A B, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partē, sintq; AD, BE, maiori segmento AC, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur; rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonū ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse æquilaterum, atque æquiangulum. Quòd enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint æquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quod autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ductæ rectæ DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est; vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quòd basis A D, æqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi AB, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, conti-



nebit

nebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorum rectorum; erit BAF, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademque ratione erit ABG, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessario in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vi constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, æqualia non forēt. quod est absurdum. Pentogonum ergo ABGHF, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.

[a] 21. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xii.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [b] Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducātur perpēdiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GEA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; [c] coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulū; quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI FK, FL, erunt quadrato rectæ FH, [d] æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quā rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH,



[b] 11. quarti.

[c] 13. pron.

[d] 47. primi.

æqualia erunt quadratis rectarum FB,BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualiũ FA,FB,remanebunt quadrata rectarum AH,BH,æqualia; ideoque & rectæ AH,BH,æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2.propos.36.lib.3.cum AH,BH, ex eodem puncto H, ducantur circulũ tangẽtes in A,& B. Quoniam ergo latera AF,FH, trianguli AFH,æqualia sunt lateribus BF, FH,trianguli BFH.Est autem & basis AH, basi BH, æqualis; vt ostensum est; a erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur b & anguli AHF,BHF. Duplus igitur est angulus AFB,anguli BFH,& angulus AHB,anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI,& angulum BIC,anguli BIF. Cũ igitur c anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentiis AB,BC, d quæ æquales sunt,cum a rectis æqualibus subtendantur AB, BC;erunt & dimidii eorum BFH, BFI,æquales. Quocirca cum duo anguli BFH,HBF, trianguli BFH,æquales sint duobus angulis BFI, IBF,trianguli IFB,& latus illis adiacens commune BF, e erunt & latera BH,BI,æqualia,& anguli BHF, BIF, æquales. Dupla est ergo rectæ HI,rectæ HB. Eademque ratione ostẽdemus GH, rectam duplam esse rectę HA. Sunt autem ostensę æquales HB, HA. Igitur & earum duplę HI,HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL,LG,æquales esse cuilibet rectarum HI,HG. Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL. Rursus quoniam ostẽsum est,angulos BHF,BIF,æquales esse, ac semisses angulorum BHA,BIC;erunt & eorum dupli BHA,BIC,æquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG,LGH, æquales erunt cuilibet angulorum BHA,BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.



a 8.primi
b 4.primi.
c 27.tertij.
d 28.tertij.
d 26.primi.

COROL-

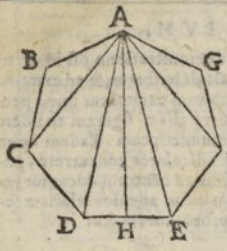
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunq. figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosq. conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

HVC referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulū bifariam secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumq. bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaq. imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, re-



ctis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF æqualia sunt, angulosq. continent æquales, ex hypothesi; a erũt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentq. angulos æquales, vt ostensum est; b erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quam CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum peruentum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosq. æquales contineant, c erunt etiã anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

a 4. pri.

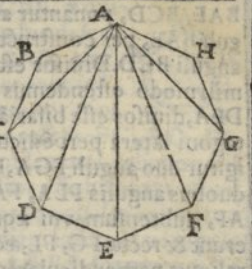
b 4. pri.

b 4. pri.

SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim ducatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cum vna medietas maior esset quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

SIT deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositũ E, ducatur recta AE. Dico rectã AE, secare tam angulum BAH, q̃ DEF, bifariam. Ductis.n. ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, vt in antecedente figu-

te figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis; ideoque totum angulū BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, necnon & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod propositum.



SED iam recta AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumq. diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt, quod est absurdum, Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatq. propterea, vt demonstratum est proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL. 13. PROPOS. 13. xiij.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli BAE, AED, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim ex scholio præcedentis propos. rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuo intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; [b] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli



[a] 9. pri.

[b] 4. pri.

BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus BCD, bifariam. Simili modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariã. Ducantur iã ex F, ad singula pẽtagoni latera perpẽdiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniã igitur duo anguli FGA, FAG, triãguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF, subtensum vni æqualium angulorum commune
a 26. primi. erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK. æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum semidiametris FG, FH, &c. erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessario intra figurã duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos secant bifariam: propterea quod in figura imparium laterũ diuidunt latera opposita bifariam; in figura vero parium laterum, angulos oppositos bifariam, vt in scholio antecedentis propos. ostensum est.

xiiij. ## THEOR. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIT

SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos ECD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.



2 6. pri.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus: Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. XV.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribẽdum hexagonum æquilaterum, & æquiangulũ. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo uero DG, qui secet circulum datum in pũctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in



dato



dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoq. triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare a tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum b æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt aute ∃ tres anguli CGD, DGE, EGF, c æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus E G F, tetria quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cum etiam d æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. e Quare circumferentiæ, quibus insistunt, f ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, g æquales erunt. Similiterq. ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 5.pri.
b 32.pri
c 13.pri
d 15.pri
e 26.ter
f 29.ter
g 27.ter

COROLLARIVM.

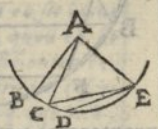
HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

CAETERVM per ea, quæ dicta sunt de pentagono

SCD LYON 1

propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum aquilaterum, & aquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonū describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. traditur.



PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad defin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. a Erit ergo subtensa D E, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE; erit hæc maior quàm DE, ex scholio propos. 29. lib. 3. hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris AC, AE, erit triangulum ACE, Isosceles, cuius tertium latus CE, vtrouis æqualium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim b anguli ACE, AEC, æquales sunt, c & simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta AB, erit angulus BAE, quadranti B E, in centro insistens rectus, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum ACE, habens tertium latus CE, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.

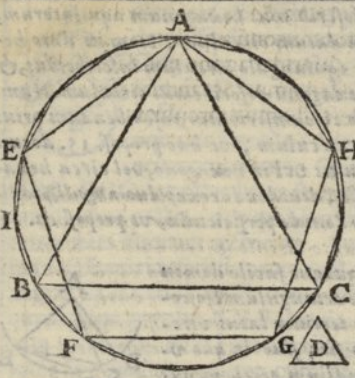
a 15. quarti.

b 5. pri.
c 17. pri

PROBL. 16. PROPOS. 16. xvj.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto trian-



gulo æquilatero D, quod ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. erit etiam æquiangulum; a inſcribatur ei æqui angulum triangulũ ABC, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex coroll. propoſ. 6. lib. 1. b eruntq. tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars eſt totius circumferentiæ. c Inſcribatur rurſus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AEFGH, applicans vnum angulorum ad punctum A, d eruntq. quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars exiſtens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, contineat tales partes quinquè, & arcus AE, tres; continebit reliquus arcus EB, duas. Diuiſo ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI, pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, ſubtendet decimaquintam partem totius circumferentiæ; cui ſi aliæ quatuordecim, f æquales in circulo accommodentur, inſcriptum erit in circulo quintidecagonum æquilaterum, quod g & æquiangulum eſt, cum eius anguli ſubtendant arcus æquales, compoſitos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

a 2. qua.

b 26. vel 28. ter.

c 11. quar.

d 28. ter

e 30. ter.

f 1. qua.

g 27. ter

SIMILITER autem per ea, quæ dicta ſunt de-

pen-

pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonũ æquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

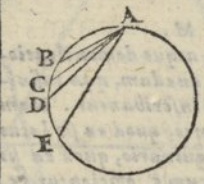
SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figura in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quod ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quod ea sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq. æqualiũ, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, a 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Itaque diuiso arcu BE, bifariam in I, erit subtensa recta BI, latus figuræ 15. laterum, angulorumq. æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribãtur duo latera duarum figurarum æquilaterarũ, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differũt denominatores eorundẽ laterum: Continebit autem figura inscribẽda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sũt in numero, qui ex multiplicatione denominatorũ producitur.

IN-

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera incluſus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq. æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita eſſe, ſic demonſtrabitur. Qualium partium æqualium 30. eſt tota circumferentia, talium 5. eſt arcus AB, ſexta pars circumferentiæ; & talium 6. eſt arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.



PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq. æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. ſuperat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumq. æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inueſtigabuntur fere infinitarũ figurarum latera.

NON eſt autem præterundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inſcriptam, eſſe quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumſcriptam neceſſario æquiangulam quoque eſſe, niſi quando nu-

merus

merus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum AB. CDE, circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, a erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca b anguli ABC, BCD, illis insistentes æquales erunt: Eodemq. modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura ABCDE, æquiangula est, siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.

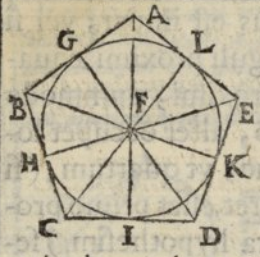


a 28. ter

b 27. ter

SIT rursus figura æquilatera ABCDE, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam.

Ductis



a 18.ter

Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, a erunt ha ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes A G, A L, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. aquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, aqualia. Cum ergo & bases FG, FL, ex centro sint a-

b 8.pri, quales; b erunt & anguli ad A, aquales: ac proinde angulus BAE, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duos lateribus C B, B F, aqualia

c 4.pri. sunt, angulique illis contenti, ostensi aquales; c erunt quoque bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, aquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum B A E, B C D, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoque aquales. Eadem ratione erit recta C F, rectæ E F, & angulus BCD, angulo DEA, aqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, aqualis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) aqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, aquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. aquales inter se erunt; tum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoque locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui aqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, aqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo aqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes

angu-

anguli figuræ propositæ inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.

HAEC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solum concludetur, primum angulum æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem probabitur, primum vltimo esse æqualem, eo quod vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam solum ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquam autem ostendetur, secundum angulum esse primo æqualem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur æquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demũ per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum secundum,) cum ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus, secundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter se æquales. Si autẽ primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorũ vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autẽ secundum, quia secundus primo proximus est.) cum primus ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & secundo angulo; erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quamobrem, vt proxime demonstrauimus, omnes anguli inter se erunt æquales.

VERVM

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram æquilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptam, esse quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo vt nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse æquiangulas. Sit enim



circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes æquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus PH. Arcui quoque OH, æquales sumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt sex arcus æquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum non proximarum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntq. ad vtrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK, RL, RM; TN, TI, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessario recta HB, AB; propterea quòd duo anguli BHA. BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, æqualia sunt, a angulosq. continent æquales æqualibus arcubus OH, OI, insistentes; b erunt quoque bases BH, BI, & anguli H, I, æquales. Cum ergo BHA,

a 27. ter
b 4. pri.

rectus,

rectus sit ex constructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I, conuenietq. cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, aequales sunt; (Nam I, H, recti sunt, a & GAI, CAH, aequales sunt insistentes aqualibus arcubus TI, PH) lateraq. AI, AH, quibus adiacent, aqualia; b erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, CA, aqualia. Cum ergo & BI, ipsi BH, ostensa sit aqualis; erit tota BG, toti BC, aqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq. cum semidiametro AF, producta in F, eritq. ipsi GB, aqualis. Item iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum semidiametro AR, producta conueniet in E, ipsiq FG, aqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & semidiametro AQ, protracta occurret in D, ipsiq. EF, fiet aqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro AP, producta concurret in C, fieiq. ipsi DE, aqualis. Quod autem DK, in eodem puncto C, occurrat semidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta CL, circulum tangeret in K, vt demonstratum est, tangerent duae rectae circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, c Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum BCDEFG, circulo circumscriptum, aquilaterum. At idem esse non aquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura BCDEFG, aquilatera est, erunt quidem per ea, quae paulo ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se aquales; omnesq secti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH, d tribus angulis trianguli ACH, aequales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus aequales: Est autem BAH, maior quam CAH, ex scholio propos 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior

a 27. ter
b 26. pri
c 16 tre
d 32. pri

sit

SCD LYON 1

sit arcu P H. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit; qui cum semisses sint totorum angulorum B,C, vt ostensum est; erit totus quoque CBG, toto BCD, minor. Eodemque modo toti anguli D, F, totis angulis E,G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum. Quod erat ostendendum.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterũ, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

QVOD si figura æquilatera quotcunq. angulorũ circulo circũscribatur per doctrinam prop. 12. descripta nimirũ prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulũ tangẽtibus in figura inscripta angulis, &c. vt facilũ est in pentagono prop. 12. tũ necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdẽ propos. liquido constat.

OBSERVATIONE quoque dignũ est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulum circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facile etiam quis hallucinari possit.

SIT

SIT enim figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessario æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuũ rectis FG, FH, FI, FK, FL, a quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. æquates sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, æqualia; Sunt autem & bases FG, FL, ex centro æquales. b Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehensi æquales sunt, ideoque angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse, ac proinde cum toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, æquales erunt: Est autẽ latus FG, vni æqualium angulorum oppositum, commune. c Igitur latera quoq. AG, BG, æqualia erunt; atque ideo latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidiæ æquales sũt, erũt quoque totæ lineæ AB, AE, æquales. Eademq. rõne AB, BC, & BC, CD, & CD, DE, & DE, EA, æquales erunt. Quã ob rem figura ABCDE, æquilatera est, siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.



a 18. ter

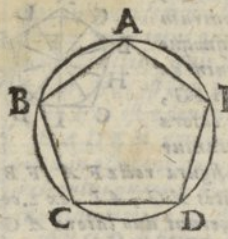
b 8. pri

c 26. pri

SIT rursus figura æquiangula ABCDE, quotuis laterum numero impariũ circulo inscripta. Dico eã necessario esse quoque æquilateram. Quoniam enim anguli BAE, ABC, ponuntur æquales; d erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoque erunt reliqui arcus



d 26. ter



BAE, ABC. Dempto ergo cõmuni arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, æqua-
29.ter. lis erit; ac proinde a & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atque ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quodque latus ei, à quo tertiũ est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constitui autem quoduis latus potest primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartũ, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertiũ item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figura proposita inter se æqualia erunt. quod ostendendum erat.

HAEC etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium laterũ circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto septimo, & alijs loca imparia occupãtibus; nunquã aũt per eã demõstrabitur, primũ vltimo esse æquale, propterea quod vltimũ occupat locũ parẽ, vt in quadriãgulo quartũ, in hexagono sextũ, &c. Pari ratione eadẽ demonstratio cõuincet tantũ, latus secundũ æquale esse quarto, sexto, octauo, et alijs loca paria possidentibus, at per eam nunquã colligetur, secũdum latus esse æquale primo, eo quod primũ in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorũ inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se cõuincẽtur esse æqualia.

QVOD

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, diti poterit vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum æquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo, proximum est.) cum primum ostensum sit æquale omnibus alijs positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque idcirco & secundo lateri; erit quoque primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proxime demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptã, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferre nõ licet.) demõstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero hexagonum æquilaterum





& æquiangulũ A B C D E F, in circulo descriptum; sumaturque in arcu B C, quoduis punctum G, & arcui B G, in tertio arcu ab eo arcus æqualis D H; Item in quinto ab eo arcus æqualis F I, iungunturque rectæ A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, æquiangulum esse, at non æquilaterum. Quod enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] æquales sunt in eodem segmento A B C. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Preterea quia arcus B G, D H, æquales sunt, per constructionem; addito communi G D, erunt toti arcus B C D, G C H, æquales. Igitur reliqui ex circulo arcus B F D, G F H, æquales erunt; [b] ac proinde anguli B C D, G C H, illis insistentes æquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angulos D E F, H E I, & F A B, I A G, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni A G C H E I, sex angulis hexagoni A B C D E F, æquales sunt, singuli singulis: ideoque cum hoc ponatur æquiangulum, erit quoque illud æquiangulum. Quod autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius est, & latus G C, latere B C, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, lateribus C D, E F, maiora sunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cum ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A, æqualia ponantur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inæqualia: quanquam A G, C H, E I, inter se, & G C, H E, I A, inter se, relicto sẽper uno in medio, æqualia sint, vt supra ostẽdimus.

221. ter

b 27. ter

IDEM proporsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura æquilatera, atque æquiangula.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & æquiangula, & æquila-

tera,

tera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

PORRO qualem cunque figuram æquilaterã & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sci emus describere circa circulum, & in ea circulum quoquo inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CAETERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isoscelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figuræ inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulum æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isosceles habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta

imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hæc angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine, quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes æquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accõmodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est vnum figuræ latus, vt in Pentagono patuit.

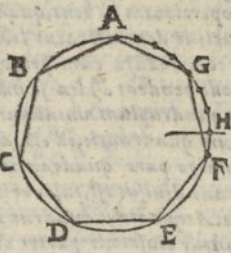
PARIVM vero laterum figuræ in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticẽ, insistit sextæ parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis habẽtis vtrũque angulorũ ad basin triplã sesquialterũ anguli ad verticem.

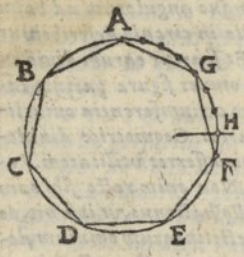
SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula cõstruantur habentia angulos ad basin multiplices eorũ, qui

ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribentur quoque omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atque adeo ciriumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometrice diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, de siderato de absoluta figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometrice describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo describantur: verum etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vsque idem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quauis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isocelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonii æquilateri, & æquiangulum. Secetur eius quadrãs AH in septẽ partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosue figuræ inscribendæ continet.



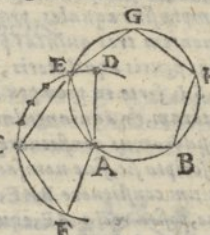


Secabis autem quadrantē AH, in propoſitas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demonſtraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum diſtantiā partiri quadrantē in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quòd ſæpius attentando, & quaſi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat pàrti vni beneficio circini acceptæ, ſi ea partem deſideratam non offerat. Secto quadrante in ſeptem partes æquales, vel in plures, ſi figura plurium laterum deſideretur, erit recta linea AG, quæ quatuor eiuſmodi partes ſubtendit, latus figuræ inſcribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuiſus eſt, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferētia, quoties vna pars in quadrante: quia quælibet pars cum alijs tribus, quarum ſingulæ in ſingulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perſpicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonſtratur lib. 5. propoſ. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propoſ. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita ſe habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc eſt, arcus AG, ad quadruplum quadrantis, id eſt, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis eſt vna illarum, in quas quadrans diuiſus eſt, talis erit arcus AG, totius circumferentiæ. Atque ita ſi quadrans diuiſus ſit in 7. partes, continebuntur eiuſmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque ſi quadrans ſectus ſit in 11. partes, continebuntur eiuſmodi

partes

partes 44. in tota circũferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{44}$ hoc est, $\frac{1}{11}$ totius circumferentiæ: & sic de cæteris. Itaque si arcui AG, quatuor partium abscindantur arcus continue æquales, eisdemque arcubus recta subtendantur, inscripta erit circulo figura proposita, vt ex demonstratis liquet.

IAM vero si supra datam rectam lineam quauis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam AB, constituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta BA, ad C, vt AC, ipsi AB, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli; ductaque AD, perpendiculari ad AC, vt quadrãs sit CD, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrans CD, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit; quarum 4. sint CE iungaturque recta AE, quæ ipsi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungantur rectæ CE, CF. Et quoniam CE, recta subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proxime demonstrauimus, in circulo ECF, describendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta AF, duo latera EC, CA, duobus lateribus FC, CA, æqualia sunt, & bases item æquales AE, AF; a erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, b & anguli ACE, AEC, sint æquales; erit & ACF, ipsi AEC, æqualis: additoque communi ACE, totus angulus ECF, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Est autem c externus BAE, eisdẽ internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter se æquales erunt. Cum ergo ECF, sit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis AB, AE, d re

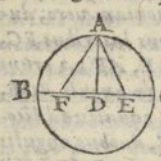


a 8. pri.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 1. quarti.

cta æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiãgulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singulæ autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt, ac proinde singulæ BH, HG, GE, singulas quoque quintas partes subtendent, cum ipsis AB, AE, sumptæ sint æquales, propterea que totum arcum BGE, continentem tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namque, posita recta AE, æquali ipsi AB, per tria pũcta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt ante diximus.

QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonũ, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Cæterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.



NON

SCD LYON 1

NON erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet.

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æqui lateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: vt idem sit centrum circuli, & figuræ.

SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ ABCDEF, æquilaterã esse quoque, atque æquiangulam, idemque centrum habere. Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subdant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium, æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF, quam tres FLM, MLK, KLE, b duobus sunt rectis æquales: Sunt autem AMG, LMF, FLM, KLE, c inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli GML, MLK, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliques angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura GHIKLM.



a 4. pri.

b 13. pri.

c 8. pri.

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ ABCDEF, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ NG, NH, &c. iunganturque

rectæ



recta NA, NB. Quoniam igitur AG, GN, latera trianguli AGN, æqualia sunt lateribus BG, GN, trianguli BGN; sunt que bases AN. BN, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: a Æquales erunt anguli AGN. BGN, ideoque recti. Quare NG, perpendicularis est ad latus AB; Eodemque modo reliqua NH, NI, &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD, &c. Quæ cum ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum AB, BC, &c. æqualium a centro N; b æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo NG, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrũ erit figuræ GHIKLM, hoc est, circuli circa eã figurã descripti. Quod est propositũ.

a 8. primi.

b 14. tertij.

NEQVE vero & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triãgulum, quadratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triãgula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, vt inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planã superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato; & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales sunt quatuor rectis, quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quod omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris, & æquiangulis nõ cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero, & æquiangulo æquales sunt $\frac{12}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor æquales sunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinque æquiualent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque

idcirco

id circo vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti. &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum æquales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales sunt $\frac{3}{7}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt æquales, hoc est, complectuntur $\frac{7}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{1}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo, quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterũ, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulum, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EV-

SCD LYON 1

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

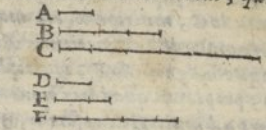
I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT *in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadē disputat nō absolute, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquā habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarū in genere, non descendēdo ad vllam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & alia figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.*

SCD LYON 1

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.



DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum uel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collocatus cũ 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior aũt aliquãta. Euclides igitur hoc loco definit partẽ aliquotã duntaxat, tũ quia hæc solum metitur suũ totũ; (Aliquanta. n. non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiã Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc vtramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partẽ, itavt minor quantitas mensurans maiorẽ, dicatur pars maioris; Maior vero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partẽ antea definitã esse eam, quæ perfectè metitur suũ totũ. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CAETERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æque metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundũ quantitatem, hoc est, secundũ quod vna maior est, quã altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si cõparetur linea aliqua cũ superficie quapiã, vel numerus cũ linea, nõ dicetur ea cõparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cũ alia linea secundum qualitatẽ, hoc est, secundũ quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida; &c. quãuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAN-

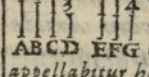
QVAMQVAM autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CAETERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione linea 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorũ, proportionis consequẽs. Quod si è contrario consideretur proportio linea 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autẽ habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cũ pluribus comparationẽ duarum quantitatũ, proportionem



tionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio; & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulo post dicemus. Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, cõtinua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas sit & antecedens, & cõsequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ a Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi pos-

sit

sit, instituemus paulo vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quam in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodũ, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdẽ quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates incommensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri,

commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communẽ partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quãuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam; quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quã irrationalis proportio cõtinetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis'. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates aquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorũ, & lineam 10. palmorũ, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, et lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam cõnexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est', minus recte à quibusdam diuidi propor-

tionem

tionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalẽ. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secãda est proportio in genere, priori quidẽ in proportionẽ rationalẽ, & irrationalẽ; Posteriori vero in proportionẽ æqualitatis, et inæqualitatis, vt a nobis factũ est. Ita.n. mẽbra diuidentia cũ Diuiso (vt cũ Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio recte posse subdiuidi tã proportionẽ rationalẽ in proportionẽ æqualitatis, & inæqualitatis; quã proportionẽ inæqualitatis in proportionẽ rationalẽ, et irrationalẽ; si in vtraq; diuisione subintelligatur Diuisũ. Sed cur duplicẽ nostrã diuisionẽ, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtriq; harũ subdiuisionũ prætulerim, supra exposui in responsione ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius subdiuidi nequit, cũ quæcũque quãtitates

tes æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio est, quando maior quantitas cũ minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedũ, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorẽ refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis, & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla secluſa: Nunc autem tã proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, super particularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, et multiplicẽ superpartientẽ. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis voca-

bulis

bulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartiętem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartiętem. Horũ autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinque hæc genera proportionis rationalis tã maioris, quã minoris inæqualitatis, post explicationẽ omniũ harũ quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorẽ aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autẽ sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla, si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nã proportio octupla nil erit aliud, quã habitudo maioris quãtitatis ad minorẽ, quãdo maior minorẽ octies cõplectitur. Eodẽque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quãtitas minorẽ cõtinet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10.

cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CAETERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerũ, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, qua inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi, ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicũtur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, qua proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionẽ multiplicem propositam: si vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitæ. Atque ita si ijdem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, qua eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes.

EXEMPLI gratia. Quarantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintuplæ inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si ijdem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertia proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintuplæ quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si vero mil-

lesima

lesima reperienda sit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per seriem naturalẽ numerorũ progrediatur; superior autẽ ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturque per continuam additionem eiusdem numeri, primum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80. &c.	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16 &c.	

Proportiones septuplæ.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. &c.	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11 12. 13. 14. 15. &c.	

Proportiones decuplæ.

10. 20. 30. 40. 50. 60 70. 80. 90. 100. 110. 120. 130. 140. &c.	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.	

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad maiorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidia ta pars est numeri 2. Ita quoque linea 12.

pedum

pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c.

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticulariū. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quæcunque reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotã in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proxime maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionẽ superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, si duplicẽtur, triplicẽtur, vel per quemcunque alium numerum multiplicẽtur, gignentur alij numeri eandem proportionem habẽtes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

VERBI causa. Si quærantur omnes proportiones sesquiseptimæ, quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnita

te il-

te illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesqui septima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicētur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadē quaratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq. omnes cuiusq. proportionis superparticularis comperiētur, si constituantur duo ordines numerorū, quorum inferior à numero partem aliquotam denominãte incipiat, superior vero à numero proxime maiore: vterque vero per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exemplæ hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialteræ.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36 39. 42. 45. &c.

2. 4. 6 8. 10. 12. 14. 16 18. 20. 22. 24. 26. 28 30. &c.

Proportiones sesquiseptimæ.

8. 16. 24 32. 40. 48. 56, 64. 72. 80. 88. 96. 104. 112. 120. &c.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. &c.

Proportiones sesquidecimæ.

11 22. 33. 44. 55. 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. &c.

10. 20. 30. 40. 50. 60. 70 80. 90. 100. 110. 120. 130. 140. &c.

DE PROPORTIONE Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficien-

tes

tes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quælibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamẽ sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quã quam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiẽs, sed superparticularis, nẽpe sesquiquarta. Itaq. vt duæ quãtitates dicantur habere proportionẽ superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorẽ contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non cõstituant vnam aliquotam. Quod quidã non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primũ proportio superpartiẽs, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiẽs; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decẽ, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partiũ

aliquo

aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiẽs tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari rõne superdecupartiẽs proportio inter duas quãtitates inæquales, quarũ maior excedit minorẽ decẽ partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiẽs vndecimas. Quod si decẽ illæ partes sint decimætertiæ, vocabitur proportio superdecupartiẽs decimastertias; et sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat, quotnã partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter vero, quotæ partes eæ sint, aut quãtæ, indicat. Vt in proportione supertripartiẽte octauas, denotãtur duo hi numeri 3. et 8. quorũ prior significat, maiorẽ quãtitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturq. syllaba illa (tri) quando dicitur, supertripartiens: posterior autẽ per vocẽ (octauas) expressus ostẽdit, illas tres partes aliquotas esse partes octauas minoris.

Deinde

Deinde in qualibet proportione ſuperpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipſa proportionis prolatione cognoſcuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiuſmodi eſſe debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem eſt omnium numerorum pars aliquota: hoc eſt, vt ſint inter ſe primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter ſe, vt ex lib. 7. conſtabit. Tales ſunt duo illi numeri 3, & 8. in ſuperiori proportione ſupertripartiente octauas expreſsi. Nam ſola vnitas, vt conſtat, eſt vtriuſque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionẽ inter 11. & 8. ſupertripartientem octauas: qualis etiam eſt inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio poſterior inter 22. & 16. ſuperſextupartiens ſextasdecimas, quamuis maior minorem contineat ſemel, & inſuper ſex vnitates, quarũ quælibet decimaſexta pars eſt minoris: Non, inquam, recte ſic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expreſſi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$ ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda eſt, ſupertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. ſupertripartiens ſextas, quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem menſuram, videlicet 3. Nam ternarius ſemel ſumptus, ſeipſum, & bis

repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$ reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quod $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{1}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliã partem communem aliquotam,, necne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVEN-

INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt supra dictum est. VERBI gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26 & 20. Tripli, 39. & 30. Cæteſima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat a partium aliquotarum denominatore: superior autem a numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, vt supra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. &c.

Proportiones superoctupartientes nonas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
9. 18. 27. 36 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99. &c.

Pro-

SCD LYON 1

Proportiones superseptupartientes decimas.

17.34.51.68.85.102.119.136.153.170.187.&c.

10.20.30.40.50. 60. 70. 80. 90.100.110.&c.

DE PROPORTIONE multiplici superparticulari.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorẽ, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularẽ, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horũ generũ in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nã proportio, v. g. tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter cõtinet, & præterea dimidiatã eius

partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoque numero adijciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ, ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoque numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressæ habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione. Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem a numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vterq; vero ordo per continuã additionẽ primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerũ, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Pro-

Proportiones duplæ sesquialteræ.	
5.10.15.20.25.30.35.40.45.50.55.60.65.70.&c.	
2. 4. 6. 8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.&c.	
Proportiones triplę sesquiseptimæ.	
22.44.66.88.110.132.154.176.198.220.242.&c.	
7.14.21.28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77.&c.	
Proportiones decuplæ sesquitertiæ.	
31.62.93.124.155.186.217.248.279.310.341.&c.	
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.&c.	

DE PROPORTIONE multiplici superpartiente.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nã si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex super particularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiēs sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partē. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.

DISTRIBVITVR autē hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis.

Vt multiplex in duplam superpartientem: triplam superpartientem, &c.

DEINDE quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, coutinetur tripla superbipariens; tripla supertripartiẽs, &c.

POSTREMO quæuis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum: in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartiẽtem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNES proportiones multiplices superpartientes postremæ diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundẽ partiũ aliquotarũ denominatorẽ habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcumque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primum proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quo-

SCD LYON 1

rum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoque diximus. Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportiones duplę superbipartientes tertias.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104 &c.	
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c.	

Proportiones duplæ superquintupartientes sextas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153 170. 187. &c.	
6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54 60. 66. &c.	

Proportiones quintuplæ supertripartientesquintas.

28. 56. 84. 112. 140. 168. 196. 224. 252. 280. 308. &c.	
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55 &c.	

DE PROPORTIONIBVS rationalibus minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus sunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoque de quinque generibus correspondẽtibus minoris inæqualitatis, præmissa tamẽ sẽper præpositione (sub

vt dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebũtur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodũ. n. proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100 est subcẽtupla. Sicut etiã proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiẽs tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiẽs tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda insignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. nostra Arithmeticæ cõstruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiusmodi est. Constructa tabula Pythagorica, (Est autem constructio facillima, cum numeri in sinistro latere constituant seriem numerorum naturalem, in infinitumque progredi possint; qualibet autem linea in transuersum procreetur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsam, & ad numerum cõstatum, & sic in infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum) primũ omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad vnitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autẽ sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub vnitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9 supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18 sub 9. ad 2. sub 1. tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9 descendentis, & 3. in sinistro latere. &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum est.

DEINDE omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proxime insequens numerus primam pro-

portionem

portionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9 ad 8. alia vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & alia ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressa habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesqui-

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

SCD LYON 1

quintæ. Primum quærantur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16, proxime insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primum proportionem triplam sesquiquintam. Alias proportiones eiusdem speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum est.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo. In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum fit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones eiusdem speciei reperies sub illa prima, vt de alijs diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui est 5. Inueniet autem eum numerum esse 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4, & denominatoris partium quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde post numerum hunc 20. inuentum numeret in supremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarū proportionum eiusdem speciei continentur sub ductibus illis numeris, vt in alijs traditum est.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, si minores cum maiori-

bus

bus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiusdem proportionis minoris inæqualitatis.

NEQVE vero silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ sic se habet. Inuentis minimis, siue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progredienſque per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progressionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot vnitates ſunt in primo termino constituta tuæ proportionalitatis Arithmetica; Inter ſecundos vero, qui primorum dupli ſunt, tot, quot in ſecundo termino eiuſdem progreſſionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiuſdem progreſſionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, ſi proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri ſunt 2. & 1. conſtituetur progreſſio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. ſit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progredienſq. per continuam additionem vnitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Poſtea ad numerum confectum 2. &c. hoc ſcilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10, 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros duplæ proportionis, hoc eſt, inter 2. & 1, nullus cadit medius numerus: Inter ſecundos, qui ſunt 4. & 2. cadet vnus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij exiſtunt 7. 6. 5. & ſic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, ſecundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum ſeriei naturalis inter eos cadentium reſpondent numeris ſuperioris proportionalitatis Arithmeticæ.

2	1
4	3	2
6	5	4	3
8	7	6	5	4
10	9	8	7	6	5
12	11	10	9	8	7	6
14	13	12	11	10	9	8	7
16	15	14	13	12	11	10	9	8
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

QVOD si superiori proportionalitati Arithmetica superponas seriem naturalem numerorũ, quæ ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constitutæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorũ inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportion. duplarũ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque

SCD LYON 1

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 12. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio docupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus vna vnitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8 numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

20. 19. 18 17. 16. 15. 14. 13. 12, 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2.

RVRSVS detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inseruient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

SCD LYON 1

9	8
18	17	16
27	26	25	24
36	35	34	33	32
45	44	43	42	41	40
54	53	52	51	50	49	48
63	62	61	60	59	58	57	56

OFFERATVR quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. *&* 7. *Differentia eorum est* 4. *Progressio ergo Arithmetica incipiet a* 3. *progredieturque per* 4. *vt hic patet, vna cum serie naturali*

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31	&c.

Igitur inter primos numeros proportionis superquadrupartientis septimas cõprehenduntur 3. *numeri medij. Et* 7. *inter secũdos: Et* 23. *inter sextos, atq; ita de cæteris, vt hic vides.*

11.10. 9. 8. 7.

22.21.20.19.18.17.16.15.14.

33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.

44.43.42.41.40.39.38.37.36.35.34.33.32.31.30.29.28.

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. *&* 6. *Differentia eorum est* 7. *Incipiet er-*

SCD LYON 1

so progressio a 9. habebitque differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vna cum serie naturali numerorũ.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis dupla sesquisexta cadent 6. medii numeri: inter secundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

26. 25. 24 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium a 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, vna cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarũ super bip tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadens ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

24. 23. 22. 21 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.

32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cum ijdem numeri

inter

inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM *ex ijs, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diximus, perspicue colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam exposita. Cum enim, vt Euelides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quãtitates quæcunque, inter quas, vt diximus, est proportio rõnalis, inter se proportionẽ eã habeãt, quã numerus ad numerũ; fit, vt omnis proportio rõnalis quarũcunq; quantitatũ continuarũ assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfecte; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tãtummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non faciẽtes vnã; et exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorẽ continere, aut minor quãtitas a maiore cõtineri potest. Eadem ratione cõstat, totidẽ esse genera proportionis minoris inæqualitatis. Recte ergo proportionẽ rationalẽ tum*

maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

DE PROPORTIONVM rationalium Denominatoribus

QVONIAM vero non exiguus est vsus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distincte, & aperte habitudinẽ vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quod Euelides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numeras integer tot continens

vnitates,

vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Cẽtuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ a denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$ subcẽtuplæ, $\frac{1}{100}$. submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarũ proportionũ submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denomtnatore reperiendo, si ea, quæ dicta sunt, recte intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestũ est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$: sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$. sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio

denominatorẽ exprimat per ſuã partẽ aliquotã vt ex datis exẽplis perſpicuũ eſt. Denominatores autẽ proportionum ſubſuperparticulariũ correſpondentium, ſunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores ſunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis ſubſeſquialterę, eſt $\frac{2}{3}$; ſubſequioctauę, $\frac{8}{9}$. ſubſeſquimilleſimę, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis ſubſuperparticularis, ſi pro numeratore fractionis ſumatur denominator partis aliquotæ in proportione expreſſæ, & pro eiuſdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis ſubſeſquidecimæ eſt $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator ſit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiuſdem fractionis numeratorem ſuperet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorẽ cuiuſuis proportionis ſubſuperparticularis hoc modo. Denominatorẽ correſpondẽtis proportionis ſuperparticularis reuocabimus ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidẽ numerator ſuperabit hic ſẽper vna vnitate denominatorẽ, qui etiã denominator eſt partis aliquotæ, cuius mẽtio fit in oblata proportione. Nã ſi huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, et ex denominatore numerator, habebimus denominatorẽ propoſitæ proportionis ſubſuperparticularis. Vt ſi offeratur proportio ſubſeſquiſeptima: quoniam denominator proportio-

nis

nis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quam denominator partis aliquotæ. Quare si eã fractionẽ inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis sesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habẽtes proportionẽ superparticularẽ respondentẽ, vt supra docuimus. Nã fractio, cuius numerator sit eorũ numerorũ minor, denominator vero, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniã primi, siue minimi numeri habẽtes proportionẽ sesquiseptimã, sunt 8. et 7. si ex minore fiat numerator, et ex maiore denominator, cõficiemus hãc fractionẽ $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis sesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superpartiẽtis est vnitas cũ illis partibus aliquotis nõ efficiẽtibus vnã, quas maior quãtitas debet vltra minorẽ cõtinere. Vt denominator proportionis supertripartiẽtis septimas, est $1\frac{3}{7}$. supertripartiẽtis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. etc. Neq; vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipsa proportionis denominatorẽ propriũ exhibet, vt ex superioribus exẽplis liquido constat. Denominatores autẽ proportionũ subsuperpartiẽtium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quã earundem fractionum denominatores, quot

partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{1}$; subsupertripartientis vigesimas: $\frac{20}{1}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundē partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est $\frac{15}{1}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdē fractionis denominator 15. Denominator autē proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientiū denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numera-

tor, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{1}{2}\frac{3}{3}$ quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{10}{3}$. qui ad hanc fractionem $\frac{1}{1}\frac{3}{3}$ reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{1}{1}\frac{3}{3}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartiẽtis denominator inuenietur fortassis, si reperiantur primi, vel minimi numeri habẽtes proportionem superpartientem correspondentem, vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartiẽtis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habẽtes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionẽ $\frac{9}{1}\frac{9}{3}$ pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominans, cum illa parte aliquota, quã maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatẽ. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorẽ cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distincte exprimat & denominatorem multiplicis

proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticulariũ, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{3}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{5}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq. vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdẽ fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{4}$; cũ hui⁹ fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq. ducti⁹ sit in 4. denominatorẽ proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdẽ fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidẽ denominatores proportionũ submultipliciũ superparticulariũ inuenietur, si denominator cuiusuis ꝓportionis multiplicis superparticularis respondẽtis reuocetur ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus, multiplicãdo nimirũ denominatorẽ multiplicis proportionis per denominatorẽ fractionis ei adhærẽtis, & producto numero vnitatẽ, ideſt, numeratorẽ eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutẽt ordinẽ inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniã de-

nomi-

nominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt $4\frac{1}{6}$. *ducemus* 4. *id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in* 6. *hoc eſt, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto* 24. *addemus* 1. *nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem* $4\frac{1}{6}$. *reuocemus ad hanc fractionem* $\frac{25}{6}$. *Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio* $\frac{6}{25}$. *pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimoſue numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſupra traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtriplaſeſquiſeptima: quoniam primi, ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt* 22. *&* 7. *fiet ex illis fractio hæc* $\frac{7}{22}$ *pro denominatore proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atque ita de cæteris.*

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cũ illis partib. aliquotis, non conſtituentibus vnã, quas maior quantitas vltra minorem debet cõprehẽdere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquincupartientis octauas, eſt $3\frac{5}{8}$;

quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quod aperte, & distincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quam partes aliquotæ, vt perspicue in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionũ submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarũ numeratores numeri sunt denominãtes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{3}$. subquadruplæ superbipartientis quintas, $\frac{2\frac{2}{5}}{4}$. &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$. quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertias decimas: qui si ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, producloque numero 26. adiyciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denomina-

torem

torem proportionis multiplicis superpartientis, quæ propositæ respondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorẽ fractionis ei adhærẽtis, & producto numero addẽdo numeratorẽ eiusdẽ fractionis. Nam huius fractionis termini, si inter se permutent ordinẽ, dabunt fractionẽ, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartiẽtis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiẽs decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintuplæ supertripartientis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoque numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forsitan facilius denominatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisque fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla supertripartiẽte decimas sunt 53. & 10. constituetur ex eis denominator propor-

tionis

tionis propositæ hæc fractio $\frac{1}{5}\frac{0}{3}$. *et sic de cæteris.*

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuo est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea. quod quidem vnitas significat.

EX *his, quæ de proportionũ denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantũ, non autẽ & verbo, siue nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquido constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est* $3\frac{4}{9}$. *hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distincte, apertèque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem cõtinere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correspondẽtis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum* $\frac{9}{3}\frac{1}{1}$. *id est, nouem trigesimæprimæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum verè significet, minorem quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessariũ est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplã perquadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cũ* $\frac{9}{3}\frac{1}{1}$. *hoc est, nouem partes trigesimæprimæ cum nomine proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.*

QVARE *si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionẽ, vt dictũ est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, offerre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorẽ fractionis per numeratorem. Nam*

Quo-

Quotiens denominabit proportionē, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inaqualitatis pronūciabis, præpositā tantū syllaba, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorē appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio suboctupla. Quando.n. numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdē fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{2}{3}\ \frac{0}{2}\ \frac{0}{7}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorē. fit Quotiēs 10 $\frac{7}{2}\ \frac{7}{0}$. Denominator igitur fractionis $\frac{2}{3}\ \frac{0}{2}\ \frac{0}{7}$. ad numeratorē habet proportionē sedecuplā superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{2}{3}\ \frac{2}{2}\ \frac{0}{7}$. dicēda est subsedecupla superseptupartiēs vigesimas, & sic de cæteris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones proprijs nominibus appellari possunt, (quis enim proportionem, v.g. 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis itē commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernouem decupartientem vigesimas nonas? &c.) solēt Geometræ plerūque in suis scriptis exprimere proportionem quamcūmque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionē 52. ad 40. vocant proportionē 13. ad 10. quæ alias diceretur supertripartiēs decimas. Proportionē vero 40. ad 52. appellāt eā, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de alijs.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: perneccessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionē numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen plane, quanā sit illa proportio, nisi eius denominatorē cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorē numerū

continere minorē quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quãdo minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facile possit intelligi, recurrendum erit ad praeceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quosuis duos numeros, siue minimi ij sint, siue non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos effernnt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominatore st $1\frac{5}{1\,9}$. qua dicenda esset superquintupartiens decimasnonas, sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quae habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{1}{3}\frac{2}{4}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clarissime demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quosuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentē. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 13. Quotientem videlicet numerum diuisionis 30. per 3. vel 390. per 30. Quod si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio haec $\frac{3}{3\,9}$. vel $\frac{3\,0}{3\,9\,0}$. Nã quando minor numerus per maiorē diuiditur, Quotiēs semper est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraq. fractio, si eius numeri ad minimos reuocētur, reducitur ad hanc $\frac{1}{1\,3}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390, esse $\frac{1}{1\,3}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{1}{4}\frac{2}{0}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{1\,0}$. Igi-

tur

tur denominator proportionis 52. ad 40. erit 1 $\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator siue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{10}{13}$. Praterea proportio 100. ad 20. denominarem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis vero 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quod diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{100}{500}$. id est, in minimis numeris $\frac{1}{5}$. Deinde denominator proportiones 48. ad 10, erit $4\frac{4}{5}$. quod diuisis 48. per 10. Quotiens sit $4\frac{8}{10}$. hoc est in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est, in minimis numeris $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis, $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas (quòd diuisis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$ appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim rite efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoque reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuētus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{9}{10}$. si reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est $\frac{8}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est $\frac{1}{7}$. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quarantur minimi nume-

ri eandem, quam illi, habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictū est, isque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quā habent 400 ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, sit Quotiens $4\frac{4}{9}$ in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$. dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

IAM vero si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem vero eam, cuius denominator est minor. Quod si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarū denominatores sunt $1\frac{8}{15}$ & $1\frac{10}{17}$. dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$. minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas, vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an vero æquales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{100}{101}$. dicemus priorē esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$. minor sit fractione $\frac{100}{101}$ numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$. maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facile, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior est: Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11 & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius

antece-

antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentē illius 11. producit tantūmodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, qua tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quam secundus in tertium, maiorem esse primum, quam vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartū: quandoquidem minor esse deberet, vt eundē numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, siue ij primi sint, siue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum assumptum, vel diuidemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui diuisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam. Verbi gratia, si sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoq; si inueniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{6}$. Item si numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuisus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. propor-

tionem

tionem datam duplam sesquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarũ in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mẹntio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit namerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$ fit numerus 145. qui ad assumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus à 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorẽ $\frac{1}{4}$. producet 3. numerum integrũ, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si vero per diuisionem agendum sit, & fractiones vitanda, sumendus erit in proportiene multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In alijs autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnã fractionem, numerusque sumendus à numeratore numeratus. Vt si quaratur proportio quintupla, sumendus erit, verbi gratia, numerus 30. à 5. numeratus. Hic enim diuisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem desiderctur proportio, cuius denominator sit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. sumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiso per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 62. habet proportionem à $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirũ quadruplam supertripartientem septimas. Caterum si duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire, satis erit, si vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datam habeat proportionem, assequeris primum, si propositum numerum per denominatorem proportionis mul

tiplices:

tiplices: at secundum obtinebis, si eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quòd si proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quispiam numerus; si quidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad secundũ: si quidem denominator proportionis duorum numerorũ datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quarimus. Vel certe, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum, hoc est, per consequentem terminum datæ proportionis, productusque numerus per primum, siue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator est $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quæsitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerũ 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quaris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturque quæsitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumq; productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$ eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem esse maiorem; cuius denominator maior est, fit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum: dupla, denominata à 2. non autẽ maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionũ multiplicium est minimus, maximus autẽ dari non potest, cum numeri augeãtur in infinitũ.

Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$. *non autem minimam: quia numerus* $1\frac{1}{2}$. *omnium denominatorum proportionum superparticularium maximus est, minimus autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex ijs, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio* $\frac{1}{2}$. *omnium, quæ numeratorem habet 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera; minima vero, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima vero, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, vt subsesquiattera, non autem maxima: In alijs denique proportionibus minoris inæqualitatis neque maxima, neque minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.*

COLLIGITVR *etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt quælibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportione æqualitatis, quælibet vero proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantùuis minimus, maior est vnitate, quæ denominator est proportionis æqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator propor-*

tionis

tionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm unitas, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur vt ex ijs, quæ supra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignum est, Proportionem maioris inæqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamē eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsque ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque, in qua cum minima non possit dari, omnisque proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inæqualitatis minor sit proportione æqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem æqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt vtrumque exemplo etiam discatur, sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorū, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorē diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositum, altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarū vtraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ subdupla est, diuisa erit in subsesquiter-

tiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eos dem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quam proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero tam proportio superbipartiens tertias 3. ad 5. quam subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum vtrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniã medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorẽ datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, vt manifestum est vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicauimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inæqualibus maioris ad tertiam aliquã esse maiorem proportionẽ, quam minoris: At è contrario, tertiam eandẽ quantitatem ad maiorem habere minorem proportionẽ, quam ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdẽ numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quã minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorẽ esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorẽ 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quã minoris 3. ad eundẽ 6. Eademq; in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quam proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proporti 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quã proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa

erit

erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10 ad 12. quæ eadem est, quæ 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic. 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis. Idemque experiri licebit in quibusuis alijs proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est, 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens undecimas 11. ad 18. diuisa hic. 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, et alios Arithmeticos: sed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, siue Medietas, est, quãdo tres, vel plures numeri per eãdẽ differentiã progrediũtur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorũ quilibet suũ antecedentẽ ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatẽ Arithmeticã. Est autẽ duplex, continua, & discreta. Cõtinua est, quãdo in progressione numerorũ nulla fit interruptio, sed quilibet cũ proxime antecedẽte cõfertur, vt in dato exẽplo fit. Discreta autẽ est, quãdo in numerorũ progressione interruptio fit, ita vt bini tantũ inter se cõferãtur,

non autem quilibet cum proxime præcedente. Vt in his numeris contingit, 4.7.8.11. 30.33. Nam eadem differentia est inter binos 4.7. & 8.11. & 30: 33. non autem inter 4.7. & 7.8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri eãdem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, siue Analogia: aliæ vero improprie, cum non sit eadem semper inter earũ terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2.6. 18. 54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proprotionem triplam, cõstituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Cõtinua cernitur in datis numeris, discreta autẽ in hisce sex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandẽ habent proportionem sesquialterã; non autem quilibet ad proxime præcedentem.

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores: duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimũ 3. quæ differẽtiæ

inter

Inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiã inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cum vtrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam siue Harmonicã: Ipsi vero neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapason consonantiã, siue octauã cõstituit. Atque eodẽ modo in plerisque alijs idẽ cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT trium proportionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quam medij ad minimum. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquial

tera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musica, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimũ. Vt hic vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometrica, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetque in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam, cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores; Contra vero in Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones vero eorundem inæquales.

GEOMETRICA e contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones vero eorundem æquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet: Patet hoc ex superioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7 superat minorẽ 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorem 15. quinque vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoque vnitatibus, quæ constituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometrica, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, quæ

parte,

parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4.6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturq. à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$ ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$ ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minorit, superaturq. à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3.7.11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quam Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4 6.9. & 3. 4.6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quam summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9. 25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4 quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. supe-

rat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui a quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic 3.7.11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur a 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij æqualis est, vt hic, 4. 6. 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiã maiorum. Vt hic 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertiũ, quam ex medio in se, in Harmonica vero plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplũ producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32, qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplũ producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorũ.

Vt

SCD LYON 1

Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4 in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3 genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium, Vt hic, 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continue proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9 vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmetice, cum eundem habeant excessum 3. vides 6. 8 12. Harmonice proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonice, vt diximus, vides 6 9. 12. Arithmetice esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometrice non continue proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmetice inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonice; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continue proportionalibus sive Arithmetice, sive Geometrice, sive Harmonice. (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonice proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis

tribus

tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo aequalis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijcian tur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Praterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3.		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31.			43.			55.	
3.				19.				35.				51.		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	
5		20		80		320		1280		5120		20480		
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5	1	40	1	320	1	2560	1	20480	1					
	10	1	80	1	640	1	5120	1	40960					
5	1	1	80	1	1	1280	1	1	20480	1				

Pro-

Proportionalitates Harmonicæ.

12	52	28	63	15	36	42	50	63	84	126	252
12	52	1	63	15	1	42	1	63	84	1	126	1
1	28	1	36	1	50	4	1	84	1	252	1
12	52	1	1	36	1	1	63	1	1	252	1
1	1	28	1	1	42	1	1	84	1	1	1
12	52	1	1	1	42	1	1	1	126	1	1

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proporttonalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionaliitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica prop.	*Geometrica prop.*	*Harmonica prop.*
20 | 28 | 36	20 | 40 | 80	60 | 84 | 140
Producti	*Producti*	*Producti*
80 | 112 | 144	80 | 160 | 320	240 | 336 | 560
Quotientes	*Quotientes*	*Quotientes*
5 | 7 | 9	5 | 10 | 20	15 | 21 | 35

CAETERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandē specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differētia. n. inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorū diuisorum habet proportionem submultiplicē à diuisore dēnominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28 est 8. at inter

5. & 7.

5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numeros. diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80, 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560, quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquaplas.

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroque dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7, constituetur haec proportionalitas Arithmetica, quae extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate: vtroque minorem. Et si differentiã eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadẽ proportionalitatis Atq. ita deinceps inuenies alio minores, si differentiam ab vltimo inuento semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur haec proportionalitas Arithmetica vsque ad 2. quae vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim nu-

SCD LYON 1

rus erit tertius terminus utroque dato maior. A quo duplicato si proximè præcedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoque demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet 4. 15. 26 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus utroque minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, ideſt, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

II.

QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4 & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.

QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.

ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium termi-

num

num ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissis summæ extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino æqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summæ extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summæ extremorum, siue ad medium terminum, proportionem habebit noxcuplam. Eademq. in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est, facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atque hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper

par)

par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium erminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantiũ, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorũ denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorũ ab extremis æqualiter distantium æqualis sit summæ extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorũ numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar; sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si ex-

tremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorũ, terminorũ numero, atque differentia, in cognitionem alterius extremi pernenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorũ alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterũ extremũ, hoc modo. Numerum proxime minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proxime minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si vero proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productũ ex 11. numero, qui numero terminorum proxime minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proxime minor est, in differentiã, maiorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, et numerus terminorũ ita se habeant, vt proponitur.

Vt

Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorũ 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum; propterea quod numerus 25. productus ex 5. qui proxime minor est terminorũ numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quod si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremũ proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica. 0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI extremi termini noti sint, vna cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dẽpto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioq. proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorũ numero proxime minor est. Si enim nõ numeretur, differentia inuẽta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorũ 9. Dẽptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi. Vna cum differentia, noti sint

SCD LYON 1

cliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adiiciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerũ natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, maiore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

VI.

SI duo extremi termini, vna cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totũ numerum indicabit. Inuento autem terminorũ numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiã, vt in 4. regula traditũ est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summã 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

SCD LYON 1

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data a summa extremorũ numeretur. Alioquin terminorum numerus erui nõ poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data a summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorũ summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. *vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorũ integrum.*

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionẽ duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionẽ. Si vero extremorum proportio maior sit quã dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quam tripla: Si deniq; minor sit extremorum proportio quã dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quam tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirũ maior quã dupla: & medij 14. ad differentiã 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quam tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionẽ habent supertripartientem quartas, qua minor est quã dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quam triplam.

VIII.

INTER quoslibet duos numeros constitues medium proportionalem Arithmetice, si eorum summa accipias semissẽ. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmetice inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituẽdus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorũ datorũ esse vel parem, vel impa-

rem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cum alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorum est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmetice, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proxime maiorē numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmetica, quam si minori numero proposito adijcias, constabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proxime maior est numero mediorum constituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponūtur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differētia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus a numero, qui proxime maior est numero mediorū constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quēcunq; nume-

rum,

rum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proxime maior numero mediorum inueniendorũ metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmetice, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proxime maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerũ 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differẽtia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum per datam differentiã multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdẽ Quotientibus ascende per continuam eorum additionẽ, addendo primo quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipiẽtes, & per eosdẽ progredien-

tes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim constati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmetice proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proxime maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmetice proportionalium per eorundem Quotientum continuã additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60 fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsque, in secundo vero ab infimo ad supremũ vsque ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor a maior subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito numero idem ille numerus reliquus addatur, &

ita

ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certe inueniendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamsi eos numerus numero mediorum proxime maior nõ numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperiẽtur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, vt dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotiẽtem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cũ numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurque reliquum numerum per numerum proximè minorẽ numero terminorũ. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hac differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, cõstituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partiũ Arithmetice proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuẽdus sit in 10. partes proportionales Arithmetice; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemque 166. secabimus in 20. & 146. terminos extre-

mos

mos proportionalitatis constituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerũ proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90, 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. diuidendus sit in 10. partes proportionales Arithmetice, diuidemus eum per 5. semissem terminorum: Quotientem vero 2. in duas partes inæquales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquum 1. per 9. numerum proxime minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continue addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmetice proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. vltima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$\frac{9}{18}, \frac{11}{18}, \frac{13}{18}, \frac{15}{18}, \frac{17}{18}, 1\frac{1}{18}, 1\frac{3}{18}, 1\frac{5}{18}, 1\frac{7}{18}, 1\frac{9}{18}$.

Certum autem est, hac ratione varijs modis datum numerum diuidi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summa semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerũ terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summam omniũ terminorum, nimirum datũ numerum, vt in secunda regula dictũ est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minore

detracto

detracto ex maiore, reliquum numerũ per numerum proxime minorem numero terminorum dato. diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, qua imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmetice proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proxime minorem numero terminorũ partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmetica conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifestum est, varijs medis datum numerũ distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atque alias partes binas sectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED fortasse facilius (quamquam operatio aliquanto longior sit) idem hoc absolues hac ratione. Cape tot numeros Arithmetice quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datũ numerum duc, procreatosque numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam, partire. Quotiẽtes. n. dabunt partes, quas quaris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmetice. Sume 10. numeros Arithmetice proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur ha 10. partes, quas quaris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Productí enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorũ numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c gignentur eadem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior. satis est, priores duos numeros proportionalitatis accepta multiplicare per datum numerum, productosque numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorũ numerorum diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Liquido autem hic quoque constare puto, datum numerum varijs modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atque alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic vides, inter primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem superbipartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITAQVE, si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionẽ duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebũt primæ partes duplam quoque proportionẽ, atque ideo prima

erit

erit quoque differentia, ex cuius additione aliæ partes coaeruentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicasses q. primum quemq. in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorē per 165. diuisisses, inuenisses primam partē $9\frac{6}{11}$ quæ eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$.

$66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibusuis duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent, conferendo maiorem cum minore, hoc est, si diuiso maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica vtroque dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemue per vltimum inuentum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quod diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitū potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748, &c.

Quod si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem

est,

est, per denominatorem proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quod diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quod diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuisis 8. per 2. idemque cum producto numero facias, constituetur hac proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$ &c.

EXTENDETVR quoque eadem proportionalitas in infinitum, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in se, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc si iterum in se ducas, productumque per proxime precedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus. atque ita in infinitum, vt hic vides. 3. 6. 12. 24. 48. &c.

BVRSVS datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productumque per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem si rursus in se duxeris, productumque per proxime precedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18, fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se fit 4. quo diuiso per 6 fit $\frac{4}{6}$. siue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris, pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM

IAM vero si quamcunque proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continue proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facile hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum. qui est 5. videlicet. 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione duplæ superbipartientis quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facile reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatū adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$.

secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. Facilius ijdem termini reperientur, si inuentis duobus minimis terminis in data proportione, per maiorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inuentus, & productus per minorem diuidatur. Ita enim secundus terminus reperietur. Qui si rursus ducatur in maiorem minimorum terminorum, & productus per minorem diuidatur, inuenietur tertius terminus; & sic deinceps. Vt in posteriori exemplo, minimi termini proportionis duplæ superbipartientis quintas sunt 5. & 12. Si igitur sextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet esse primus sex terminorum quæsitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. diuidatur, prodibit secundus terminus 7500. qui si rursus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5. diuidatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porro multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continue proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quoruslibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continue sint proportionales, dum modo bini continuam proportionem interrumpentes ha-

beant

beant vnam eandemque inter se proportionem, hoc est, dum modo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continue proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper æqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continuæ.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemque proportionem. videlicet triplam, quæ à sesquitertia diuersa est.

3. 4. 12, 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768 fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsũ producitur; numerusque ipsũ producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idẽ numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerũ vero ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubũ, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex

numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur.) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primum in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando sunt 4. numeri siue continue, siue non continue proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuo multiplicare continue, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratū cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum si in productum ex secundo in tertium (qui producto ex primo in quartum æqualis est) multiplicetur. Quando autem sunt 6 numeri siue continue, siue non continue proportionales; dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoque non continue proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix, latusue est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, productos: qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productū ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti sint inter se æquales.

III.

SI, propositis quotcunque terminis continue proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus

numerus

numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorũ ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur summa omnium ter minorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quã quilibet eorum numerorum ad proxime antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vna cum proportionit denomitore. Quo vero artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiose tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit, ea hoc loco repetere.

IIII.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuo æqualiter superantibus, id est, Arithmetice proportionalibus; si totidē alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi eodem ordine sumpti; superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmetice proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19.

Arithmetice proportionales proponantur, ſumanturque alij ſex cum ijſdem proportionibus, cuiuſmodi ſunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipſos quoque Arithmetice eſſe proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem poſſe conuerti: Neque enim ſi dentur quotuis numeri Arithmetice proportionales, & totidem alij Arithmetice quoque proportionales ſumantur, etiamſi vtrobique eadem ſit differentia, neceſſario hi illis proportionales erunt. Id quod perſpicuum eſt in hiſce duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at poſteriores duo primi 3. 5. ſuperbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in poſteriore ordine ad primũ numerum 2. in ordine priore habet ſeſquialteram proportionem, ſecundus autem 5. ad ſecundum 4. ſeſquiquartam. &c.

V.

DVOBVS quibuſuis numeris datis, ſi eorum alterutro in quotlibet partes diſtributo, ſingulæ partes in alterum ducantur, & ſinguli numeri producti per priorem numerum diuidantur, conſtituent omnes Quotientes ſimul ſumpti poſteriorem numerum, habebuntque ordine eaſdem omnino proportiones inter ſe, quas partes prioris numeri inter ſe eodem ordine habent: at ſinguli Quotientes, ſiue partes poſterioris numeri ad ſingulas partes prioris, vt prima ad primam, ſecunda ad ſecundam, &c. vnam eandemque prorſus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. ſi prior ſecetur in partes, quæ ſimul additæ ipſum conficiant, 2. 5. 10. 40. & earum qualibet in poſteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus ſigillatim per numerum priorem 57. diuiſis, fiunt Quotientes, 10 25. 50. 200. qui in vnam collecti ſummam conſtituunt poſteriorem numerum 285. habentque

eaſdem

eaſdem proportiones, quas habent partes 2.5. 10.40. nimirum duplam ſeſquialteram, duplam, & quadruplam: ſinguli vero ad ſingulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri poſterioris obtinebis, ſi eum per priorem, qui in partes diſtributus eſt, partiaris, Quotiens temque factum in ſingulas partes eiuſdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiſo numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2.5.10.40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri ſecandi ſint in partes componentes ipſis numeris æquales, ita vt partes vnius ſint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriuſq; numeri inter ſe, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio diſtribuendi numerum propoſitum in quotuis partes Arithmetice proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præſcripſimus. Nã ſumptis totidem numeris Arithmetice proportionalibus, erit eorum ſumma, numerus in illos, tanquam in partes ipſum componentes, diuiſus. Quare ſi ſingula hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per ſummam illam diuidantur; Vel ſi per aſſumptorum numerorum ſummam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in ſingulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propoſiti in eiſdem proportionibus. Quare Arithmetice quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifeſtum eſt.

VI.

QVOTLIBET numeris continue proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continue quoque in eadem proportione proportionales. Vt in appoſito exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem ſeſquialteram.

Differentiæ.	1	32	48	72	108	162	243
	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differentiæ, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proxime præcedentem minorem superat ipsomet numero proxime antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

Differentiæ.	7	14	28	56	112	224	448	896
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continue proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erũt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continue proportionales. Et si Quotientum summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorsus Quotientes ordine conuerso: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorũ quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel denique, si terminorum numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sane incredibile videri possit. Exempli causa. Si dentur hi 4. numeri continue proportionales in proportione dupla. 3. 6. 12. 24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes $15. 7\frac{1}{2}. 3\frac{3}{4}. 1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportione dupla continue proportionales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa vero summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex $15.$ in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis

his

his 5. terminis in cõtinua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes. $121.40\frac{1}{3}.13\frac{4}{9}.4\frac{1}{2}\frac{3}{7}.1\frac{4}{8}\frac{0}{1}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa $180\frac{6}{2}\frac{1}{1}\frac{1}{3}$. producitur vel ex 121. in $1\frac{4}{8}\frac{0}{1}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{1}{2}\frac{3}{7}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreetur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summæ quotcunque terminorum proportionis eiusdem continuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continue dupli, siue magni, siue parui, erunt perpetuo hi Quotientes, 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt, 15. 7 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{3}{4}$. 1 $\frac{7}{8}$. In quinque numeris continue triplis, erunt hi semper Quotientes, $121.40\frac{1}{3}.13\frac{4}{9}.4\frac{1}{2}\frac{3}{7}.1\frac{4}{8}\frac{0}{1}$. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes. $13\frac{5}{1}\frac{3}{6}.8\frac{1}{2}\frac{9}{4}.5\frac{1}{3}\frac{1}{6}$, $3\frac{4}{5}\frac{9}{4}.2\frac{4}{8}\frac{9}{1}$.

EX hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continue proportionales, quorum summa æqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continue proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumque summæ per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotiẽtes numeri, qui desiderantur. Quod si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continue proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus con-

tinuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotiētes sint producti ex diuisione sūmæ alicuius quotcūque terminorū continue proportionaliū, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorū summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotiētes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29.9. vel 87.27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29 & 9. vel posteriorum summa 114 per 87 & 27. diuisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{1}{2}\frac{3}{0}\frac{9}{1}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

VIII.

INTER duos quoscunq; numeros constituemus mediū Geometrice proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicē quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterū fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nā 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros cōstituēdus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterū productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, nō habebit radicē in numeris, sed eius radix erit numerus, quē Arithmetici surdū, vel irrationalē vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidē numeris exprimi ne-

mi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quam 8. cum huius quadratum sit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad fin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

| 7. | R. 9. 63. | 9. |

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadãt medij Geometrice proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmetice proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometrice inter primũ quadratũ, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum, secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicue in hoc exemplo apparet.

Tres nu. assump.	Primus. 8.	quintup. pri. 40.	Septup. pri. 56.
Quad. Arit. pro.	64	1600	3136.
Medij Geomet.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. et ex 40. in 56.

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se

aqua-

æqualibus differentijs mutuo superent, si proradicibus eorũ sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cũ illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erũt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus, secundus, 40. & tertius. 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmetice proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habet, dividas, erũt producti quoque numeri, aut Quotiẽtes Arithmetice proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur, qui nedũ reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuẽtos per eundẽ illum numerũ multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotã dividantur. Vt si superiores quadrati, vna cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet. proportio.	1	128	1		1	3200	1		16272
Medij Geometr.	1		1	640	1		1	4480	1

Si vero dividantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem qualibet partes aliquotæ quadratorum partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	1	8	1		1	200	1		1392
Medij Geometr.	1		1	40	1		1	280	1

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdẽ simpre proportiones, quas quadrati, eorũque medij inter se habent.

Quod

Quod si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios 2. 50. 98. Arithmetice proportionales, inter quos cadunt Geometrice medij, 10. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98 partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometrice sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmetice proportionales, siue quadrati sint, siue nõ, cadunt duo medij Geometrice proportionales, vnus inter primũ & secundum, & inter secundũ ac tertium alter, quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmetica proportionalitatis, & quadratũ posterioris medij eonstituere proportionalitatẽ Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horũ triũ numerorum, 40. 200. 280 sunt 1600. 40000. 78400. Arithmetice proportionales, habentes differentiam eandem communem 30400. & sic de cateris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunq; medios continue proportionales, iucunda sane, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignãtur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atque ita in se ipsam ducta producit tertiũ terminũ, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertio iterum in vltimum productũ, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq. quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitũ: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiã docebimus, qua arte ex dato numero eruẽdæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua

agimus

agimus, notanda sunt tres infrascripta proportionalitates continuæ, quarum duæ prima sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perspicue, apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.	1	1	1	2	3	4	5	6	7	*&c.*
Numeri significantes radices.	1	1	2	3	4	5	6	7	8	*&c.*
Numeri Geometr. propor.	1	2	4	8	16	32	64	128	256	*&c.*

Prima complectitur numeros medicrum constituendorũ, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2.2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2.2.2 atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de alijs. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2 tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2.2.2.2.2.2.2. & in se continue sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum, Nam ex 2. primi loci in 2.

secundi

secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus alijs ab vnitate incipientibus, quicunque numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continue multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris collocа, quamque sub suo, & ab eisdem ascende per continuam vtriusque multiplicationem, (ducendo primum quamque radicem in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices insti tuas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quæruntur. Posti hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos, & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsque, in altero vero ab infimo vsque ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationem vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt instituendæ proportio-

nalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeãt, sed ipsæ radices inter se multiplicãdæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144 Vt hic vides, 9. 36. 144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R.q.18. posteriorem autem sic. R. q.288. Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72. terminum medium propertionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstratio ex lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R.q.18. & R. q.288. docebimus in Algebra.

RVRSVS si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda est radix, quæ quater posita, & continue multiplicata vtrũque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines trium terminorum sub 16. & 625. Geometrice proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCI-

SCITV autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medij termini ijdē, etiamsi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales: propterea quod dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certe non habent eā proportionē, quam aliqui duo numeri, ex quibus ea radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratas, hoc est, quæ quater posita eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoq; inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet. 48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM si quis desideret duos numeros, inter quos cadāt, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionem. Eorum. n. vterq. si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continue multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos. n. medij termini constituentur

tuentur eo mode, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos ducs numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

NVMERVM quemcunque datum distribuemus in quotuis partes proportionales Geometrice in data proportione hoc modo. Cape tot numeros cõtinue proportionales in data proportione siue minimos, siue non minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namque per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri seruantes datam proportionem in-

ter

ter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continue proportionales in proportione dupla; si sumantur 6. termini continue dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4. per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continue dupli, conficientesque simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij 6. numeri continue dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summã priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerũ acceptũ $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{75}{63}\frac{0}{00}$. qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandẽ partẽ primã 12. & sic de cæteris.

QVOD si cupias numerum, qui secari possit in quotuis partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5. numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunque, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplũ 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessario sit numerus integer.

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua iubeamur in data proportione cõtinua reperire quotuis numeros

qui in vnam summam collecti constituant numerum quēcumque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales data proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ propertionis continuæ, quorum summa sit 100. secãdus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, vt in 2$\frac{1}{2}$. 7$\frac{1}{2}$. 22$\frac{1}{2}$. 67$\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd si conficere debeant summã 400. erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantẽ 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1	1.	2.	3.	1	3.	7.	11.	1	4.	6.	8.
Har.	1	2.	3.	6.	1	21.	33.	77.	1	24.	32.	48.

Arit.	1	10.	60.	110.								
Har.	1000.	1100.	6600.									

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertiũ, tertius.

ALIO modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in iisdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent:

quia

quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.

QVAPROPTER si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atque adeo et differentia, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituendus: ac denique ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quærantur tres, quorũ extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos, enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmetice. 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7 8. Arithmetice proportionalibus orientur hi tres Harmonice proportionales, 42. 48. 56 quorum extremi, atque adeo & differentia, proportionem sesquitertiam datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonicæ procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo vero extremi Harmonicæ inter se multiplicati producẽt mediũ Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus mõ, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicã oriri

diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertium 6. Item secundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. siue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. mediũ 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonice, & tertio adiunguntur duo cum eo constituentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo, siue septimo, alij duo; & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonice proportionalibus, si posteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atque ita erunt iam quinque termini. 2. 3. 6. 9. 18. Harmonice proportionales: Et si posteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis, erunt septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continue proportionales Harmonice: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas continuetur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quod si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum diuidendi per eundem denominatorẽ, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo, 9. 6. diuidantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3. 2. atque ita erunt iam quinque termini, 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3. 2. diuidantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$. atque ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis proprie, continuatur pro-

portio-

portionalitas Harmonica, siue ad maiores numeros progrediendo, siue ad minores, quãdo primi tres numeri sunt Harmonice proportionales; Item, relicto primo, alij sequentes tres; & relictis duobus, sequentes alij tres, atque ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquam erit eadem proportio inter extremos trium, quæ inter extremos aliorũ triũ. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6. 12. Harmonice proportionales sunt: sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorũ 4. 12. triplã. Item continuata esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis. 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramque partem hoc modo continuanda sit, quando continuari potest, (neque enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continue Harmonice proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex ijs, quæ sequuntur, constabit.

II.

INTER quosuis datos duos numeros constitues mediũ Harmonice proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotientemque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quæsitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorẽ 15. & numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet, 15. 24. 60. Eundem medium reperies, si eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relin-

quet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando summa datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum esse necessario integrum cum fractione. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem summam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, $7.8\frac{4}{17}.10$. Quia tã 10. ad 7 habent proportionem supertripartientem septimas, quàm differentia maiorum $1\frac{1}{1}\frac{3}{7}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim $1\frac{1}{1}\frac{3}{7}$. subtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medy termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuisione differentiæ datorum duorum numerorum per summam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adiici: Vel eundẽ Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato subtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt si inter 20. & 30. sit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. sunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum summam 5. fit Quotiens 2. quem si ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur semper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, vna vnitate superat. Quotiens enim minori termino additus dabit

medium

medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; si eorum differētia 30. diuidatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis vna vnitate superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo 10. 16. 40.

SED ad memoriam iuuandam inueniemus fortasse cō modius, (licet aliquanto longiore operatione) mediū terminū inter duos extremos datos, hoc modo. Si duo extremi nō sunt impares, vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem, qui semper erit semissis summæ eorū. Per eos deinde tres numeros Arithmetice proportionales quare ex regula 1. tres Harmonice proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandē inter se proportionē habent, quā dati duo extremi. Quod si fiat, vt primus inuentus ad secundum, ita primus datus ad aliud; hoc est, si per primum inuentum diuidatur numerus ex secundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. et 10. inueniēdus sit medius, duplica eos, vt fiant 14. et 20. Summa enim horū 34. par est, cuius semissis 17. est medius Arithmetice inter 14. et 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonice proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus 238. ad secundum 280. ita primus datus 9. ad aliud inuenietur numerus $8\frac{4}{7}$. qui medius est Harmonice inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertiū vtroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchre autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterū geniti partiemur per numerum, qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens. n. erit tertius terminus vtroque dato maior, quē quærimus. Quod si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborū differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertiū maiorē in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur

12.16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192.per.8. qui numerus relinquitur,si amborũ differẽtia 4. ex minore 12. detrabatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus,si ad duos terminos 16.24. tertium adiungamus, nimirum diuidendo 384. numerum ex 16.in 24. factum,per 8.qui numerus remanet,facta subtractione differentiæ amborum,quæ est 8.ex minore 16 Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4.termini Harmonice proportionales,12.16.24.48. Quod si tentemus his adiungere alium maiorem, frustra laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24.48.reperietur diuisor esse 0. Differentia.n. amborum,quæ est 24.subtracta ex minore 24.relinquit 0. Quod si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior,15. Ad hos vero duos 10.12.apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90.99 tertius 110. At vero ad 3. 6. nullus adiungi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3.dempta ex maiore 3.relinquit 0. Atque eodẽ modo quando dati numeri habent proportionem duplam,non potest illis adiungi tertius proportionalis,quia differẽtia amborum semper est minori termino æqualis. Multo magis cũ dati numeri habent proportionem dupla maiorem,non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonice, quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, atque idcirco subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3.7.quorum proportio est dupla sesquitertia,nimirũ maior,quam dupla,vides amborum differentiam 4.maiorẽ esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiã in maiorem,numerumque productum per numerum,qui relinquitur, subtracta eadẽ differentia ex minore numero,diuidunt; Quotientẽ deniq; maiori adiiciunt,vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris,12.16.si eorum differentia 4.ducatur in 16.et productus numerus 64.diuidatur per 8.(qui numerus relinquitus,subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.)fit Quotiens 8. qui additus ad minorem 16.facit tertium 24.vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum duplam minorem. Ex quo liquido constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, quæ propria est, vt in prima regula diximus. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessario proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertiũ procreari ex primo in secundũ: quia productus hic numerus diuisus per illã vnitatem facit tertiũ numerũ, vt diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6 in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris. 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorũ duorum sola vnitate.

EX posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertiũ procreari, si productus ex amborum differentia in maiorẽ, maiori adijciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonice proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secũdo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundũ. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. et tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quam differẽtiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuo impar est, denominata. Vt in his proximis

tribus,

tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quarantur tres minimi numeri integri Harmonice proportionales in quacunque proportione multiplici si quidem denominator est numerus impar, statuemus eũ denominatorem in medio: semissem autem numeri proxime maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderẽtur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proxime maioris quã 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proxime maiorem in primo loco: in tertio voro collocabimus numerum, qui sit ex illo proxime maiore in denominatorem. In medio denique ponemus denominatorem duplicatũ. Vt si inueniẽdi sint tres minimi integri iu proportione octupla, constituemus 9 qui numerus proxime maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8 genitum in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

QVOD sit res numeri Harmonice proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem data proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quarantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{3}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirũ semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{4}\frac{8}{6}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $5\frac{8}{4}\frac{8}{9}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{3}{4}\frac{4}{9}$. $\frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{9}{9}$. $\frac{2}{4}\frac{0}{9}\frac{4}{9}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonice proportionales, eritque extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, qua videlicet data est.

DVO

IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterũ productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit ille, qui quæritur, Vt si dentur duo numeri 6.12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summã ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroq; : illis proportionalem, vt hic cernis, 4. 6. 12. Hãc extendemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4. 6. minorem tertiũ adiungemus 3. hoc modo 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborũ differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{3}$. Atque in hũc modũ decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continue in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sane varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum, sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicã. Hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonice proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtrãque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt supra in regula 1. diximus.

IIII. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignũ, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate cõtinuos, qui varie inter se comparati præcipuas perfectas q; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi; 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. termi-

nos 6. 8. 12. 24. continuæ proportionales Harmonicæ. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vero 12 ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicũque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonice proportionales. Et viciſſim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmetice proportionales. Verbi gratia, Sint Arithmetice proportionales. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorum cõtinua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos dates diuiso, inueniẽtur hi in proportionalitate Harmonica cõtinua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diuiso, reperient ur hi

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti eaſdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primũ: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithme-

tica

tica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimũ numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmetice proportionales: & si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonice proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuenti, in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continue Harmonice proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmetice quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (et minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cum sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartũ; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, aqualis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentiæ.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10.

Differentiæ	2 | 4
Propor. Har.	6 | 8 | 12

SCD LYON 1

in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dasi quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuã proportionalitatẽ Harmonicã, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, eum suis differentijs, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producantq. vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonice, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existãt: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticã: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricã, & tres postremi proportionalitatem Harmonicã: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continue proportionales, ita vt inter primũ, ac secundũ cadat medius Arithmetice proportionalis, & inter secundũ ac tertium medius Harmonice proportionalis, medius denique triũ datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometrice, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

6.	6.	3.	1 $\frac{1}{2}$	11.
9.	6.	3.	$\frac{3}{2}$	11.
18.	12.	6.	3.	12.

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmetice, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens 1 $\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito appareat. Sed quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quod si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque

mini-

minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18.12.6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12.6.3. Geometricam: & 6.3.2. Harmonicam: ac denique 18.6.2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri daram proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

SI minores termini cũ maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis. 1.3.9. subtriplis hos quinque 2.4.6.9.18. Nam 2.4.6. seruãt proportionalitatem Arithmeticã: 4.6.9. Geometricam: 6.9.13. Harmonicam; & 2.6.18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	1	2.	1	3.	1 4 $\frac{1}{2}$. 1 9.
1.	1	2.	1	3.	1 $\frac{9}{2}$. 1 9.
2.	1	4.	1	6.	1 9. 1 18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9.6.4. Inter 9. & 6. medius est Arithmetice, 7 $\frac{1}{2}$. vt in primo ordine, Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{1}{2}\ \frac{5}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autẽ numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorẽ, 2. Vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. diuidatur per 15. ac Quotiens 9 $\frac{3}{5}$. in minimis terminis statuatur medius inter 12. & 8. eiusdẽ tertij ordinis. Hunc numerum 9 $\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{4}{5}\ \frac{8}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorẽ 5. inuentique erunt quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

9.	1 7 $\frac{1}{2}$	.	1 6.	1	4.
9.	1 $\frac{1}{2}\ \frac{5}{2}$	1	6.	1	4.
18.	1 15.	1	12.	1 9 $\frac{3}{5}$	. 1 8.
18.	1 15.	1	12.	1 $\frac{4}{5}\ \frac{8}{5}$	. 1 8.
90.	1 75.	1	60.	1 48.	1 40.

SI minores numeri cũ maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data, subsesquialtera quinq; termini

minimi,

minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.

4.		6.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9
4.	5.	6	$\frac{3}{5}\frac{6}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros cõstituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominatoionẽ minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicã fractionem; Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorẽ multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si sub quadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmetice inter eos. Et si dicatur quadratus numerus numeri 4 per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonice inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducẽtur ad eandem denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permistæ sunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16
1.	$2\frac{5}{10}$	4	$6\frac{4}{10}$	16
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16
10.	25.	40.	64.	16

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometrice proportionales non continue, vnus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam

maxi-

mus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides, 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continue proportionales Geometrice, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. et inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmetice proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continue proportionales Geometrice. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16. 24. 36, inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{1\ 3}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, $16.22\frac{2}{1\ 3}.24.36$. qui reducentur ad hos integros. 208. 286 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorū statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6, 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmetice proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

6.5.4. *Ex his per primam regulam inuenio Harmonice proportionales* 30. 24. 20. *Constituto autem medio Arithmetice* 25. *inter* 30. *&* 20. *erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti,* 30. 25. 24. 20. *cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.*

Geometrice proport.	30	25	24	20	*Vel*	30	24	25	20
Arithmet. proport.	1	30.	1	25.		1	20.		
Harmon. proport.	1	30.	1	24.		1	20.		

EOSDEM 4. *numeros maximæ harmoniæ reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmetice: fiat autem, vt inuentus ad primũ extremum, ita alter extremus ad aliud; erit hic inuentus Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in* 4. *numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt* 4. *inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorũ medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt diximus in* 7. *proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi* 4. *numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admistæ sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ* 7. *scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos,* 12. *&* 6. *Dimidium summæ eorum* 9. *erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo,* 12. 9. 6. *Si igitur fiat, vt* 9. *ad* 6. *ita* 12. *ad aliud: Vel vt* 9. *ad* 12. *ita* 6. *ad aliud, inuenietur semper numerus* 8. *inter* 12. *&* 6. *in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt* 4. *numeri maximæ Harmoniæ,* 12. 9. 8. 6. *Postremo si in eadem proportione duplæ extremorum sumamus pro extremis,* 20. *&* 10. *inueniemus medium Arithmetice,* 15. *& Harmonice* $13\frac{1}{3}$. *in minimis numeris, hoc modo,* 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. *Si ergo tertiũ numerum ad vnicam fractionem* $\frac{40}{3}$. *reuocemus, & eius numeratorem* 40. *denominatore relicto, tertium statua-*

mus,

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continue proportionales Geometrice, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erũt, quos quærimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque propositos numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90. Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	140	1	160	1	190			
Medij Harmo.	1	148	1	172	1			
Medij Arithm.	1	150	1	175				

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiãtur duo medij, alter secundũ proportionalitatem Arithmeticã, & secundũ Harmonicam alter. Sumptis. n. minimis terminis data proportionis, si eorũ summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datã habentes proportionẽ duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterque non est par, erunt eorum dupli, quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorũq; summa, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionẽ, produces vel 21. 28. vel 84. et 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli,

IX.

SI inueniendi sint quotcũque numeri Arithmetice proportionales continue, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonice proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmetice proportionales, quot quaeruntur; & bini in proportione binorũ proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmetice proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quaeruntur. Sint. n. verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmetice proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. erũtque tres summa binorum minimorum 3. 5. 7. atque ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12 procreabis 4. numeros Arithmetice proportionales, quos desideras, 315. 630 945. 1260. Nã inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arith. proport.	315	630	945	1260
Medij Harm.	420	756	1080	

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonice, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12 erunt minimi termini, 1. 3. quorũ summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quaesitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factique essent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonice medius 6.

SCD LYON 1

pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secũdus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometrice proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmetice, constat propositum. Exemplum superius oculos hic propositum esse vides.

Tres Har. prop. inuenti.	1	12	25	1	1	49	1	1	25
Medij Arithm.	1		1	637	1	1	1	37	1	1
Medij Geometr.	1	1	1	245	1	1	35	1		

XII.

RVRSVS *si quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quarum binos cadant bini proportionales, Geometrice vnus, & alter Harmonice, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterũ, per 9. regulã proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales. 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorũ duorũ: Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summæ 26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeãt, quas eorum submultiplices. 2. 50. 98. fit vt quemadmodum inter binos horum singuli cadunt medij Geometrice, ita quoque inter binos illorũ singuli intercipiãtur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49 in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmetice sunt proportionales) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Har-*

42.56.ij; quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quam inter hos cadunt duo medij, ques quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti.	1	42	1	1	56	11	1	84	1	1	112
Medij Harmo.	1	148	1	1	*Vel*	11	1	96	1	1	
Medij Arithm.	1	1	149	1	1	1	1	98	1		

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorũ binos bini cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inueniãtur, per 9 regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales 2.50. 98. inter quorum priores binos sit medius Geometrice, 10. & inter binos posteriores, 70. statuanturque ordine sic 2.10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdẽ quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares, vel impares, erũt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25. ij numeri, qui quæruntur. Sunt enim Harmonicæ proportionales, vt constat ex 5. regula, cũ sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quẽ numeri 2.50.98. Arithmetice proportionales numerant, per eosdem numerus 2.50. 98. Inter binos autẽ cadunt Geometrice proportionales, 245. secũdus Quotiens; et 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continue proportionales 2.10.50. habent, ut constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodẽque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continue proportionales 50. 70. 98. cum tam illi, quã hi, sint Quotientes producti per diuisionẽ eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225, 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmetice proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quod si non omnes sint

pares

medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quam medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continue proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicandi) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmetice) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geo. prop.	1416	1	1	1936	1	1	1	2106
Med. Ha.	1	1576	1	1	1	1296	1	1
Med. Geo.	1	1	1624	1	1	1	1404	1
Med. Ar.	1	1	1	1676	1	1	1	1521

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorũ binos cadant bini Medij, vnus Arithmetice. & alter Geometrice, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49. 25. quorũ summa 26. 74. numerẽt minimũ numerũ 962. Hunc si in tres inuẽtos duxeris, gignes tres quæsitos 1178450. 47138. 24050. Nã inter binos cadẽt, bini medij, vnus Arithmetrice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225. 49. 25. nimirum numeri, qui

fiunt

monice proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit.

Arit. prop. nu.	119241		1	1481001		1	194276	
Medij Har.	1	137001		1	1637001		1	
Medij Geo.	1	1	196201		1	1673401		

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales siue Arithmetice, siue Geometrice, siue Harmonice, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmetice proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si vero non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arith. prop.	119241		1	1	1481001		1	1	194276
Medij Har.	1	137001		1	1	1637001		1	1
Med. Geo.	1	1	196201		1	1	1673401		1
Med. Arith.	1	1	1	1250121	1	1	1711881		

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni

medij,

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunque propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonice proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonice proportionales: si sumãtur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, et per eorũ summã 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130 per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. suntque Harmonice proportionales, sicuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodẽ modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2\frac{4}{1\ 3}$. $3\frac{1}{1\ 3}$. $4\frac{8}{1\ 3}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio est de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE æqualitatis omnes inæqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis æqualibus, siue vnitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quam facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

AEQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVA-

SCD LYON 1

fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Itē inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonice, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har.pro.	1	117	84	50	1	1	1	47	13	81	1	1	1	24	05	0
Med.Ar.	1		61	27	94	1	1	1		35	59	41	1	1		
Me.Geo.	1	1			23	56	90	1	1		33	67	01	1		
Me.Ha.	1	1		1			90	65	01	1	1		31	85	01	

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionē habentes duplicatam data proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1. eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam data proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuenti.	1	120				1			1			1	30			
Medius Arithmet.	1			1	75	1			1			1				
Medius Geometr.	1			1			1	60	1			1				
Medius Harmon.	1			1			1			1	48	1				

PO-

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometticæ constituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur hoc appositio typo, vbi liquido constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometrica.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	Primus	Secúdus	Tertius
Primus cõstituitur, si dati term. ita sumãtur.	Semel	Bis.	Semel
Secudus cõstituitur, si term. dati ita sumatur.		Semel.	Semel
Tertius cõstituitur, si ita sumãtur dati term.			Semel

SEQVVN-

DRVPLI quintuplos & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares. hoc seruato ordine DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex termini superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie. SESQVIALTERI inuersi exhibẽt superbipartientes. SESQVITERTII inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijsdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dãt duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: TRIPLI sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis eliciuntur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes: DVPLI superbipartientes triplos superbipartiẽtes, TRIPLI superbipartiẽtes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoque pariunt duplos supertripartientes; DVPLI supertripartientes, triplos supertripartiẽtes: TRIPLI supertripartiẽtes, quadruplos supertripartientes: &c. SVPERQVADRVPARTIENTES itẽ gignun duplos superquadrupartientes: DVPLI superquadrupartientes, triplos superquadrupartientes: TRIPL superquadrupartientes, quadruplos superquadrupartientes: atque sic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est vnicus, isque facillimus, nimirum hic.

SVM-

SCD LYON 1

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometticæ constituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur hoc apposito typo, vbi liquido constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometricæ.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	Primus	Secũdus	Tertius
Primus cõstituitur, si dati term. ita sumãtur.	Semel	Bis.	Semel
Secudus cõstituitur, si term. dati ita sumatur.		Semel.	Semel
Tertius cõstituitur, si ita sumãtur dati term.			Semel

SEQVVN-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autẽ duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus, alteram vero in binarijt. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Aequalitatis proportio.	1	1	1	1	1	2	2	2
Dupli ex æqualibus creati.	1	4	2	1	1	8	4	2
Tripli ex duplis.	1	9	3	1	1	18	6	2
Quadrupli ex triplis.	1	16	4	1	1	32	8	2
Quintupli ex quadruplis.	1	25	5	1	1	50	10	2

GENERATIO SVPERPARTICularium.

Dupli inuerso ordine.	1	1	2	4	1	2	4	8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	1	9	6	4	1	18	12	8
Tripli ordine conuerso.	1	1	3	9	1	2	6	18
Sesquiter. ex triplis inuersis	1	16	12	9	1	32	24	18
Quadrupli ordine conuerso.	1	1	4	16	1	2	8	32
Sesquiquar. ex quad. conuersis.	1	25	20	16	1	50	40	32

GENERATIO SVPER PARTientium.

Sesquialteri inuersi.	1	4	6	9	1	8	12	18
Superb. ex sesquial. inuersis.	1	25	15	9	1	50	30	18
Sesquiter. ordine inuerso;	1	9	12	16	1	18	24	32
Supertr. ex sesquit. inuersis.	1	49	28	16	1	98	56	32
Sesquiquart. conuerso ordine.	1	16	20	25	1	32	40	50
Superquadrupar. ex sesquiquar. cõuersis	1	81	45	25	1	162	90	60

GENE-

SCD LYON 1

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Seſquialteri directo ordine.	1	6	1
Dupli ſeſquialteri ex ſeſquialt.	1	10	1
Tripli ſeſquial. ex dupl ſeſquial.	1	14	1
Quadrupl. ſeſquial. ex tripl. ſeſquial.	1	18	1
Seſquitertij ordine recto.	1	16	1
Dupli ſeſquiter. ex ſeſquit.	1	49	1
Tripli ſeſquit. ex dup. ſeſquit.	1	100	1
Quadr. ſeſquit. ex trip. ſeſquit.	1	169	1
Seſquiquarti ordine recto	1	25	1
Dupli ſeſquiquar. ex ſeſquiqua.	1	81	1
Tripl. ſeſquiq. ex dup. ſeſquiq.	1	169	1
Quad. ſeſquiq. ex trip. ſeſquiq.	1	289	1

	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	32
	2	1	32
	2	1	32
	2	1	32

	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8
	2	1	8

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart. ordine recto.	1	25	1
Dupli ſuperbip. ex ſuperbip.	1	64	1
Tripli ſuperbi. ex dup. ſuperbip.	1	121	1
Quadr. ſuperb. ex trip. ſuperbip.	1	196	1
Supertripart. directo ordine.	1	49	1
Dupli ſupertrip. ex ſupertrip.	1	121	1
Trip. ſupertri. ex dup ſupertri.	1	225	1
Quad. ſupertri. ex trip ſupertr.	1	361	1

	5	1	8
	4	1	8
	3	1	8
	2	1	8
	8	1	32
	4	1	32
	3	1	32
	2	1	32

SCD LYON 1

| | | |

medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouę proportionis fiat.

HAC ratione quauis proportio trium terminorum inaequalium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini aequales occurrant. Quod si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad aequalitatem. Id quod exempla, quae sequuntur, planum facient,

Quintupla proportio.	1 150 1 30 1 6
Quadrupla.	1 96 1 24 1 6
Tripla.	1 54 1 18 1 6
Dupla.	24 1 12 1 6
Aequalitatis proportio.	1 6 1 6 1 6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam. & denique duplam ad aequalitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad aequalitatem.

Proportio ſupertripartiens quartas.	49	28	16
Seſquitertia	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Proportio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis ſemper eſſe duplam, hanc vero ſtatim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduerſione dignum, ſi tres numeri dati fuerint in ſua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, conſiſtere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis conſiſtere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiuſdem generis proportionis. Ita vides in poſteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos eſſe in proportione ſupertripartiente quartas, atque reductionem factam eſſe ad hanc æqualitatem, 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. ſextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, propterea æqualitas inuenta eſt inter hos tres ſenarios, 6. 6. 6. Minimi enim ſiue primi numeri quintuplæ proportionis ſunt, 25. 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifeſtum eſt. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obſeruatione non indignũ videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta eſt ad quadruplam, ex qua orta eſt: quadruplæ ad triplam. Hæc enim illam genuit, & ſic de cæteris, vſque ad æqualitatem. In exemplo vero poſteriori, Supertripartiens reuocata eſt ad ſeſquitertiam ordine inuerſo. Conſtat autem, numeros

seſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſupra diximus. Item ſeſquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, reducta eſt ad duplam, & hæc ad æqualitatẽ, &c.

NEQVE vero ſilentio pratereundum cenſeo, ex tribus terminis cuiuſcunque proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit, ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſupra explicauimus, ſi ipſi termini varijs modis inter ſe coagmententur. Proportionẽ enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo autem ſecundus, & tertius ſemel; pro tertio denique ipſe tertius ſemel, perſpicue conſtat ex ijs, quæ paulo ante ſcripſimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, ſeruabis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & ſecundo termino bis, & tertio ſemel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, ſecundo, & tertio ſemel confectam, ſtatue ſecundo loco.

TERTIVM denique terminum conſtitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS Proportionis Arithmeticæ ex Geometrica.

Ordo terminorū duæ proportionalitatis.	Primus.	Secundus	Tertius
Primus fit ex datis term. ita coaceruatis.		Bis. 1	Bis. 1 Semel
Secundus vero fit.	1 Semel	1 Semel	1 Semel
Tertius denique hoc modo.	1	1	1 Semel

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICAE Proportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	1	9	1	6	1	4	1	1	4	1	6	1	9
Arith. propor.	1	5	1	3	1	1	1	2	1	0	1	1	2	1	4	1	3	4	1	9	1	4	1	1	2	9	1	1	9	1	9^2

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam cõstitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. In secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in alijs.

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis,

& se-

& secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, uel maximus. Typum porro huius generationis hic expressum vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Harmonica proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis:	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex ter. datis sic in vnũ collect.	1 Bis	1 Ter	1 Semel
Secundus vero sic	1	1 Bis	1 Semel
Tertius denique hoc modo.	1	1 Semel	1 Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonica ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	9	1	6	1	4	1	4	1	6	1	9
Harmo. propor.	16	3	12	11	24	1	12	18	11	40	1	16	1	10	11	35	1	12	1	1	1	5

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimũ terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

SCD LYON 1

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquã Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt supra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas proposita oritur ex illa Geometrica, si superius præceptũ adhibeatur, ad quã per hoc præceptũ reuocata est. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA

Harmon. propor.	3	4	6	60	40	30	24	16	12			
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8			
Æqualitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	5	5	2	2	2			

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extre-

morum

morum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numeris reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

VT detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3. 3. 3. ex qua oritur secundum superius præceptum.

3	9	15
3	3	3

SI vero reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituãt proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo data Arithmetica proportionalitatis, eoque subducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rursus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.

34	19	4
9	6	4

SCD LYON 1

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo constituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propos. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalesue adsciscãtur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad æqualitatem, ex qua, si termini æquales cum differentia proposita coaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20.27.34
20.20.20

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales. 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differẽtia data, vt fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si dif-

ferentia

SCD LYON 1

ferentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadē differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac æqualitate 15. 15. 15. si ex ea constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas secundum terminum 35. Quòd si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem est 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hæc prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumq; vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu periucunda in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinē duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarū vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet,

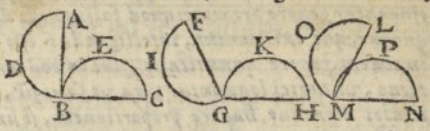
adeo

adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatũ per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, [a] erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionẽ habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Offendit enim lib. 3. in primum Euclidis; ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E,

[a] 20. primi.

fiet

fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, aqualis. Simi liter ostendes, angulum cur uilineū IGK, aqualem esse

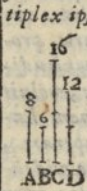


obtuso FGH; necnon curuilineum OMP, acuto LMN, dummodo hic ab angulis semicirculorum LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodem quantitatis genere videātur comprehendi, quales sunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alterā excedat. Quod etiā facit propos. 1 lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus. Taceāt igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continētur. Hac enim ratione nō esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter fi-

guras

guras rectilineas, curuilineasque, cum non sub eodem contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileat quoque, qui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt duæ quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Itē proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere linea existant: quorum vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quàm falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quænam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionē, quam earum æque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintū huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cū pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, B, magnitudines eandem habere proportionem, quam earum æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D. quam illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.



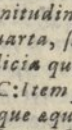
VI.

IN eadem ratione magnitudines di-

cuntur

cuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, et quartæ alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, et quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est, F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quã H: (quod est vtrumque ab vtroque vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multi-



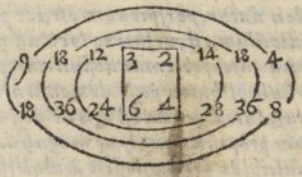
SCD LYON 1

plicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, aquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit aquale. Denique vt nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquã deprehẽsum fuerit, aque multiplicia quauis accepta, perpetuo se se ita habere, vt dictũ est; dicetur eadem esse proportio prima magnitudinis A, ad secundam magnitudinẽ B, qua est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartã magnitudinẽ D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, aquale esse ipsi G, at F, non aquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITA QVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quæcunque aque multiplicia prima, & tertiæ collata cum quibuscunque aque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, aqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet aque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuslibet aque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, aqualitatis, aut excessus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus: quædam aque multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, à quibusdam aque multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, vtrumque ab vtroque vna deficiant; alia vero vna aqualia sint; alia denique vna excedant, si ea sumantur, quæ inter se

respon-

respondent ; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumãturq; primi & tertij æque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij æque multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tũ 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multipli ce quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij æque multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij æque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æque multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum triũ horum verũ esse, dicetur eadẽ esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.

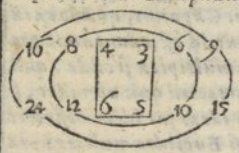


CAMPANVS vero atque Orontius, longe aliter definitionem hanc exponũt. Dicunt enim Euclidẽ velle, tum demum quatuor magnitudines eandẽ habere proportionẽ, cũ prima, & tertia æque multiplicia, a secũda & quarta æque multiplicibus, vtrumque abutroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vna æqualia sunt, vel vna excedũt proportionaliter. si ea sumantur, quæ inter se respondẽt. Clarius, vt ait Cãpanus, quãdo earũ æque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandẽ proportionẽ habet multiplex prima ad multiplex secũda, quã multiplex tertia ad multiplex quarta. Sed quis nõ videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas ma

gnitu-

gnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadē proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demōstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earū æque multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionē ostēdatur, perspicuum est, idē per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionē, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, vt propriis locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex primæ deficit à multiplici secūdæ, vel æquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicūq; sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicē vero tertiæ nō deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem esse multiplice secundæ, at multiplicem tertiæ multiplici quartæ non maiorē. Propositis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuo eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto posteà Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur offendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocūque intelligeretur, esset ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vt pote 4. & 6. sumantur



æque

æque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti nempe 3. & 5. æque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt æque multiplicia accepta vna excedant se se quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus æque multiplicium, proporttonalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod eorum æque multiplices non se se excedant proportionaliter, vt constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri æque multiplices ab eo prolati se se vna excedant, tamen quam plurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quintuplices sumantur, 15. & 25 excedet quidē 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secūdi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, æqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur nō deprehendātur quælibet æque multiplicia dictorū numerorū sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secūdi, multiplex tertij excedat quoq; ne

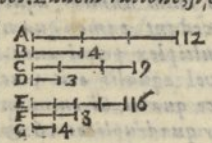
ceſſario multiplex quarti; quãuis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt ad huc clarius ex 8. definitione conſtabit.

CAETERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modo ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa: Eadem dicetur proportio 9 ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædã magnitudines proportionales continue, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G: Quædam vero proportionales ſunt non continue, ſed diſcrete, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio ſit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.



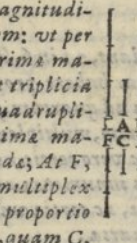
VIII.

CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc pri-

SCD LYON 1

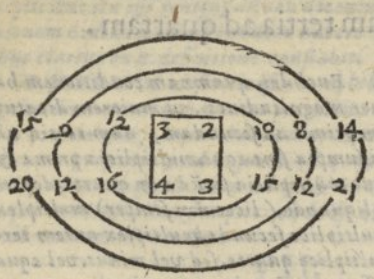
ma ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint æque multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æque multiplicia secundæ & quartæ; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex primæ maius esse multiplice secundæ, multiplex autem tertiæ nõ esse maius multiplice quartæ, sed vel minus, vel æquale, dicetur maior esse proportio primæ magnitudinis ad secundam, quam tertiæ ad quartem: vt perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, sumpta sunt triplicia E, & F; secundæ vero B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem est quam H, multiplex secundæ; At F, multiplex tertiæ maius nõ est quam H, multiplex quartæ, immo minus; dicetur maior esse proportio A, primæ magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertiæ, ad D, quartam.



NON est autem necesse, vt quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionẽ quã tertia ad quartã, æque multiplicia secundũ quamuis multiplicationem sic se habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; sed satis est, vt secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius sit multiplice secundæ, quã multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus sit multiplice secũdæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamẽ quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex primæ superat quidem multiplex secundæ, at multiplex tertiæ vel minus est, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorẽ dicetur habere proportionẽ prima magnitudo ad secundam, quã tertia ad

quartam, non autem eandem, vt perspicuum est in apposito exemplo.



ITAQVE vt quatuor magnitudines dicãtur proportionales, necesse est, vt æquemultiplicia earũ, iuxta quascunque multiplicationes accepta, vel una deficiãt, vel una æqualia sint, vel vnà excedant, vt in 6. defin. fuit expositum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, satis est, vt secundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex seciũdæ, multiplex vero tertiæ non superet multiplex quartæ, quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ vna excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.

QVOD si quando è contrario multiplex primæ deficiat a multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ a multiplici quartæ, dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ vna deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt

est

est tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcunque multiplicationem, & æquemultiplicia secundæ ac quartæ iuxta quamcumque etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescũque multiplex primæ maius est quàm multiplex secundæ, multiplex quoque tertiæ maius sit quàm multiplex quartæ; quotiescunq; vero multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex primæ minus est quàm multiplex secundæ, multiplex etiam tertiæ minus sit quàm multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertiæ ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ, at multiplex tertiæ maius nõ sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, et defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudoue: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æque multiplicia ita se habent, vt dictum est, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius, definitionem traditam eidem cõuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodũ

definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorũ segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tũc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiã defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æquemultiplicia eã conditionem habent, quam explicauit, ita vt nunquam ei concedendum sit, cũ quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales, etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulo accuratius, Euclidem recte eo modo definiuisse magnitudines proportionales, atque adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio. 8. conuenit, non eandẽ proportionẽ habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionem; Rationalem, quæ inter quantitates incõmensurabiles existit, atq; adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defi. 20 proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, æquemultiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe (vt nos ad eam defi. addidimus) cũ prima secundam, & tertia quartam, æqualiter cõtinet, eademq; insuper illius partẽ, vel easdẽ partes. Nõ proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines nõ proportionales sũt, hoc est, prima ad secundã habet maiorẽ proportionẽ, quã tertia ad quartã, cũ prima secũda magis multiplex est, vel maior pars, maioresue partes, quã ter

tia quar-

tia quarta: Vel certe cum prima secundam sepius continet, quam tertia quartam, siue eadem pars, aut partes vtrobique supersint, siue non; Vel cū prima secundā toties continet, quoties tertia quartam, sed prima maiorem insuper partē, maioresue partes secunda includit, quam tertia quarta. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersæ, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, parteſue: Vel certe secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquā insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus; tū ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM vero Euclides non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quod in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquam communem, quamuis minimam, possint habere. Quo circa coactus est se conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cū omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilū sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certū sit conuenire quibuslibet quatuor numeris siue magnitudinibus commensurabilibus, eandē habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, si idem illud conue-

nire demonſtretur quatuor magnitudinibus, etiam incommenſurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici poſſint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam qualibet quatuor magnitudines commenſurabiles eidem habentes proportionem, vel non eandem, neceſſario habere demonſtratur. Neque enim aliunde cognoſcere, vel explicare aliter poſſumus magnitudines incommenſurabiles proportionales eſſe, aut non proportionales, niſi per aliquid, quod certum ſit conuenire, vt diximus, numeris quibuſcunque, vel magnitudinibus commenſurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter ſimilitudo, diſſimilitudoue proportionū cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum ſegmentis anguli quales exiſtentes, ſunt commenſurabiles quatuor rectis, hoc eſt, quando ſunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorum, ſunt quoque ipſa ſegmenta eadem pars, vel eaedem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonſtrabimus; vt merito ſimilia appellentur, ac propterea & omnia ſegmenta alia, in quibus ſunt anguli æquales, etiamſi non ſint commenſurabiles quatuor rectis, dicãtur quoque ſimilia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commenſurabiles ſunt, vere illa ſegmenta ſimilia ſunt, hoc eſt, eadem partes circulorum, licet hoc in ſegmentis, quando anguli in ei exiſtentes quatuor rectis ſunt incommenſurabiles, non cernatur, quòd tunc ſegmenta neque eadem pars, neque eadem partes poſſint eſſe circulorum, ſed ipſis circulis omnino incommenſurabilia exiſtant. Neque enim aliud initium habere poſſumus, ſegmenta ſimilia eſſe aut diſſimilia, niſi angulorum in eis exiſtentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram ſimilitudinē, aut diſſimilitudinem ſegmentorum circulis commenſurabilium colligimus. Quam ob rem ſicut nemo ſimilitudinem hanc ſegmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc ſimilitudo in ſegmentis, quæ circulis incommenſurabilia ſunt, non ita euidenter appareat, vt in ſegmentis, quæ circulis ſunt commenſurabilia; ita non recte fecerit, qui ſimilitudinem proportio-

num in

num in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hac proportionum similitudo non tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoque esse necessario multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem: Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem. item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplex primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit, quam multiplex quarti: Et si illo existente æquali, hic quoque æqualis sit, & illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuo verum est, quatuor numeros esse proportionales: Rursus quia propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad quartum, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra quia quatuor propositis numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorē multiplice quarti, sine vlla dubitatione verū est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet in numeris, atq; adeo & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrariū

nunquam

nunquam inueniatur, non immerito dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis æquemultiplicibus prima ac tertia iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secunda ac quarta secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuo deprehenditur, multiplicem tertia maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunque multiplex prima maior est multiplice secundæ; multiplicem vero tertia æqualem est multiplici quartæ, quando multiplex prima æqualis est multiplici secundæ; multiplicem denique tertia minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quod multiplex prima minor est multiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tã commensurabiles, quàm incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam, cum, sumptis æquemultiplicibus, vt dictum est interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice secundæ, multiplicem vero tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuo reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumque aliud indicium habere possumus, quo magnitudines incommensurabiles cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales: præsertim cum magnitudines incommensurabiles alijs magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices ita se habent, vt in 6. defi. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur haud dubie ex illa proportionalitate aliquando absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur, verissima esse plerunque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt postea etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquida constare existimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& quidem

dem rectè) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometrice demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissime ante lib. 5. possint demonstrari; atque adeo hic assumi, vt iam demonstratæ. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiã multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti; si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturque primi A, et tertij C, æquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æque multiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quam G, multiplex secundi B, maiorem quoque esse F,

mul-

E,9.	A,3.	C,6.	F,18.
G,4.	B, 2.	D,4.	H, 8.

E,18.	A,3.	C,6.	F, 36.
G,18.	B,2.	D,4	H,36.

E,12.	A,3.	C,6	F, 24.
G,14.	B,2.	D,4	H;28.

multiplicē tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoque esse F, quã H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; a erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D: b Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H, c Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quam G, erit quoque F, maior quàm H, vt in primo exemplo. Si vero F, æqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoque F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

a 13. septimi.
b 17. septimi.
c 13. septimi.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit, quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HA-

SCD LYON 1

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus secundi E, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronũciato; metietur quoque D, eundem genitũ ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronun. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium, [a] *erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.*

K, 56.	H. 7		O, 21.	I, 28.			
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.			
	E, 6.		B, 2.	D, 3.			
M, 54	N, 6.		P, 20.	L, 30.			
K, 160.	H, 440.		O. 60	I, 20.			
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.			
	E, 80		B, 8.	D, 10.			
M, 160	N, 80.		P, 24.	L, 39.			

[a] 19. septimo.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per FG, fietque idcirco ex B, in FG, numerus, quem E, metitur per FG, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in FG, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, [b] *erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad FG, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita FG, ad E. Quoniã ergo est, vt FG,*

[b] 19. septimi.

ad

ad E, ita A, ad B: Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicue consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, æque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D, eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, æque multiplices L, M N, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proxime maior quàm I; hoc est, tales æque multiplices, vt subtractio numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel æqualis, vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniã ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex cõstructione, quòd I, K, sumpti sint ipsorum C, F, æquemultiplices; 2 erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

K, 56.	H. 7	O, 21.	I, 28.	
F, 8.	G, 1.	A, 3.	C, 4.	
	E, 6.	B, 2	D, 3.	
M, 54	N, 6.	P, 20.	L, 30.	
K, 160	H, 440.	O. 60	I, 20.	2 14. septimi.
F, 8.	G, 22.	A, 3.	C, 1.	
	E, 80.	B, 8.	D, 10.	
M, 160.	N, 80.	P, 24.	L, 39.	

PRAETEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad M N; quòd idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, sumpti sint ipsorũ D, E, æquemultiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, &

permu-

permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.

QVIA ergo est, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij prop. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex M N, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quàm I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proxime maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & & reliquus ex MN, maior non erit quàm K; atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, æqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt KH, multiplex est ipsius FG, vel I, ipsius C: Item P, ita multiplici ipsius B, vt MN, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniam ostensum est, ita esse FG, ad E, vt A, ad B, sumptique sunt ipsorum FG, & A, primi ac tertij, æquemultiplices KH, & O; item ipsorum E, & B, secundi ac quarti æquemultiplices M N, & P, sequitur ex antecedente propos. si KH, maior est quam M N, ipsum quoque O, maiorem esse quàm P. Cum ergo KH, ostensus sit maior quàm M N, erit quoque O, maior quàm P. Quocirca cum O, I, sint æquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, æquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumque sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisq; æquemultiplicibus, vt dictum est, multiplex primi, nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturque æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoque potest, vt nonnunquàm multiplex primi sit minor multiplice

secũdi, multiplex vero tertij nõ sit multeplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, demonstratumque est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quam L, multiplicem secundi D, at O, multiplicem tertij A, maiorem esse quam P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quam multiplex quarti: & illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuo minor sit: erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

E, 9	A, 3	C, 6	F, 18
G, 4	B, 2	D, 4	H, 8
E, 18	A, 3	C, 6	F, 36
G, 18	B, 2	D, 4	H, 36
E, 12	A, 3	C, 6	F, 24
G, 14	B, 2	D, 4	H, 28

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices quotescunque E, F. Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque etiam hæc sit multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quam G, H, multiplices secundi & quar-

ti s vel

SCD LYON 1

ti, vel æquales, vel minores, ita esse A, primum ad B, secundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D, fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, nō maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorē esse proportionē primi A, ad B, secundū, quàm C, tertij ad D, quartū. Quoniam n. maior est E, quàm G, at F, nō maior quàm H, erit maior proportio E, ad G, quam F, ad H, cum illa sit proportio maioris inæqualitatis. hæc uero uel æqualitatis, uel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quam G, ad H. 2 Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C, quod idem numerus ipsos A, C, multiplicās procreauerit E,

E, 21.	A, 3.	C, 4.	F, 28
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

2 17. septimi.

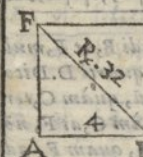
& F; quippe cum E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C; Eademque de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat.

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

E, 28.	A, 4. C, 3.	F, 21.	
G, 30.	B, 3. D, 2.	H, 20.	

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E, multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommensurabiles sunt, & quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt vere proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulo ante demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, recta CD, dupla, et super ipsas rectas describãtur quadrata ABEF, CDGH; cũ diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quã quadratũ diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris expri-



mi

mi nequit, cum ea maior sit quàm 5. minor autem quàm 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua unitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem CDGH, erit 4 & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior sit quàm 2. minor autem, quàm 3, &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quàm CD, ad DH, sit irrationalis, diameterque propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5 lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos aliu via sine proportionibus hoc loco ostenderimas.

RVRSVS quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoque inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erũt triangula ABF, CDH. Quare a erit, vt AB, ad BF, ita CD, ad DH; Et permutando, vt AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, recta CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eo deducti simus, vt credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt CD, ad DH, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autẽ propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, siue eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, vere duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quòd latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tã

a 4. sexti.

lateris AB, ad diametrum BF, quàm lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadrato AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF, quadrati AE, quàm quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propos. 47. lib 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atque idcirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad cõclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubium non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habẽt, quam definitio 6. prescribit. Porrò ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diamettum DH, id est, ad R. 8. Nam siue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; siue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rursum est, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conuenit, vere esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuo consentire comperitur, vt ijs, qui in Algebra præceptis versati sunt, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex

5. &

5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitũ secetur, gignere possit integrũ numerũ 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuoceturque, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{38}{7}$. Certum autem est, denominatorem 7. non metiri numeratorẽ 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret Quotiẽs numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iã fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusq; ad finẽ lib. 9. si tã numerator 38. in se, quã denominator 7. in se ducatur.) gignaturq; fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt ostendimus,[a] non metietur quoque quadratus 49. quadratũ 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratũ 49. Quotiẽs non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratũ 1444. cuius contrariũ demonstrauimus. Atq; eadẽ ratione demonstrabitur, quẽcunque numerũ integrum cũ fractione qualibet in seipsum ductũ gignere numerũ integrũ cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur sẽper fractio, cuius numerator ẽt minor ẽ denominatore. Nã cũ numerator fractionis productæ sit numerus quadratus uumeratoris datæ fractionis, denominator aũt quadratus numerus denomina

[a] 16. octaui.

toris, si aũt datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$. in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaque quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{2}{2}$ $\frac{0}{5}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis pauciſſimis conſiſtit.

QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autẽ proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes.



Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines; At vero si fuerit cõtinua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

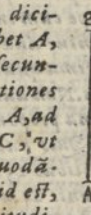
X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam

dupli-

duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundam: Et ſemper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI ſi ſint magnitudines A, B, C, D, E, continue proportionales, ita vt ea ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C; vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodãmodo proportionem A, ad B, duplicatam, id eſt, bis ordine poſitam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem ſecundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionẽ A, ad B, triplicatam, id eſt, ter ordine poſitam: Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales ſunt proportioni A, ad B, &c.



QVOD ſi e contrario ea ſit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; ſic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

SCD LYON 1

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continuæ proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundã, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam esse huius, ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25.5.1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit esse quincuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad sensum expositum, nemo inficiabitur, eo quod bis sit posita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor sit, hæc autem maior? Nam per propos. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25. propterea quod 25. maior est, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare etsi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cũ tamen quadruplæ duplicata sit sedecupla, vt hic patet 16.4.1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4.4.4. atque adeo continue proportionalibus, qui fieri potest, vt proportio primi ad tertiũ dupla sit propor-

tionis

tionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hæc ordine bis posita est continue inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamque debere esse maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum hæc expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportione mineris inæqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata rõne esse diametrorum, quæ in basibus. Nam si referatur maior conus, vel cylindrus ad maiorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdem lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonstrãtur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatã, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solum de proportione maioris inæqualitatis essent intelligenda. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusque possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. constat, proportionem quadrati ad quadratum

duplicatam

duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, quæ est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nonies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligēdum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt sphæræ ipsæ proportionem millecuplam, cum hæc sit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ esse triplam?

CAETERVM propositæ quacunque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se. producūtur 16. ideo proportio sedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subse-

decupla

decupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quod si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exẽplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atq; ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominanator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicẽdo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exoritur ex denominatore quater posito: Quintuplicata ex eodẽ quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, etc. proportionis cuiuslibet, de qua in hac defi. agitur, nihil aliud est, quã multiplicatio denominatorũ proportionũ intermediarũ inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, quæ propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continue proportionalibus in proportione quadrupla, primus 192. ad quartum 3. proportionẽ habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplica-

Denominatores.	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

ta pro-

ta proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continue proportionales in proportione subquadruplæ, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$ proportionis subquadruplæ ter positio, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. & ex $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. denominata dici potest triplo maior proportione subquadruplæ 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. sed $\frac{3}{4}$ atque ita proportio subsesquitertia dicetur triplæ proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecuplæ, est proportionis quadruplæ triplæ; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c. ita vt proportio decupla sit duplæ quintuplæ, & sextupla sit

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num proport.	3	12	48	192

triplæ

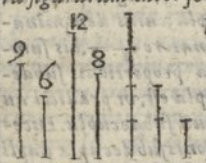
tripla dupla, &c. ostendemus ad finem lib. 9. tractatumq. est hoc argumentum copiose à Rodulpho Volumnio in Disputatione de proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat, si idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem manedt 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decuplæ, non autem proportio centupla, vt auctores contrariæ sententiæ volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplã proportionẽ habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100, 10. 1. Sic etiã si e contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdẽ Patientis 10. quàm Agens 1.? Cũ ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionẽ subquintuplã, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$. bis sumpto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla, non aũt illa, quæ subcẽtupla est, vt prædicti auctores volunt, cũ hæc longe minor sit, quã subdecupla. Dicetur tamẽ proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causã sæpius explicatã, vt hic patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscure colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quan-

titatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiã cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.



DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solũ in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verũ etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologas ve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse proportionum, & quanam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, qua C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, ne cesse est, vtramque magnitudinem antecedentem vel æqualem esse vtrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet vtraque antecedens ad vtramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G, vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6.

SCD LYON 1

& 8. iussit accipi aque multiplicia prima & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia aque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum consequentium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidē docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines; & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

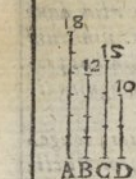
XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna, siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex aqualitate, seu aqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Graci scriptoris in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A,

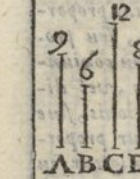
ad B,

ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autè esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Caterum in hoc modo argumentãdi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim rectè infertur. Vt linea A. ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numemerum D; cum nulla sit proportio linea ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis aegumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequẽtis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.



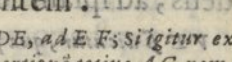
VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequenter ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Rectè numque licebit inferre: vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numrus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.

COM-

XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, qua DE, ad EF; si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionē totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequētem, quā habet tota DF, antecedens nimirū cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiusce modi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componetur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Graecos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propo. 18.

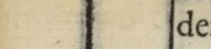


HVIC modo arguuenti per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, quæ cum antecedente consuratur. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusque; Ergo vt AC, ex antecedente, & consequente constata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequēte composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.

ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedēs ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusque per compositionem rationis contrariam; Igitur erit, vt AB, antecedens ad totam AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.



VT si dicatur, qua proportio est totius AB, ad CB, ea est totius DE, ad FE; Igitur erit & AC, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB, consequentem, vt DF, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hac porro illatio ostendetur propos. 17. huius lib.

POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, concludimusque per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt CB, consequens ad AC, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita FE, consequens ad DF, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.

ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita DF, antecedens ad FE, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad propos. 17. huius lib.

PORRO

PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentē superat.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic ferē loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

A 6 C 4 B
D 12 F 8 E

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

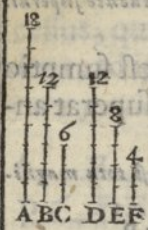
XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

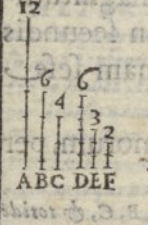
SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidē

D,E,F, sintque bina ac bina in eadem proportione, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, prima magnitudinis ad vltimam in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, sub ductis medijs, colliguntur habere vnam, eandemque inter se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, altero vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.



XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.



VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idē ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobique conseratur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22.

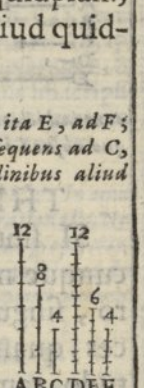
huius

huius lib. eam argumentationem esse bonam.

XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

SI autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiusce modi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.

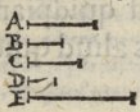


VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in

alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quęuis magnitudo proposita ad aliquam aliã; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D.



Item eandem habebit quæpiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictionē non implicet, vt Philosophi loquuntur, neque absurd i aliquid ex eo consequatur.

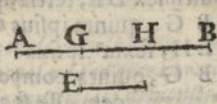
THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcũque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, diuidatur in magnitudines AG, GH, HB, ip-

si E,

si E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, IK, KD, ipsi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, C, D, sint ipsarum E, F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F, in C D, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus, constat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, [a] erunt AG, CI, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsis E, & F, simul; Necnō HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 2. pro.

SCHOLIVM.

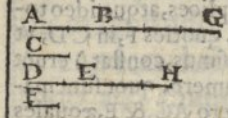
HOC idem demonstrabitur vniuersè proposito 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare, quia ex eo aliæ propositiones demonstrandæ sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

ij.

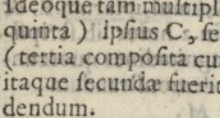
SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundę æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.

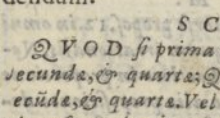
SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quintam compositam, tam multiplicem esse secundę C, quam multiplex est, D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ. Cum enim A B, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H, erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H: Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æquemultiplices eiũdæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota AG, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota DH, (tertia ac sexta) ipsius F. quartæ. Semper enim AG, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi DH, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tam prima & tertia, quam quinta, & sexta æquales ponãtur secundæ, & quartæ, luce clarius est, primã





& quin.

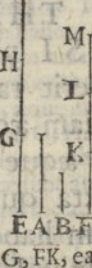
& quintam simul, atque tertiam & sextam simul, aque-multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuerse propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundę B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primę & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartę. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam vero EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autę A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundę B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est eiusdem



secun-

secundæ B, quam multiplex est KL, sexta eiusdem quar
a 2. quinti. tæ D, a Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est F L, tertia quartæ D, vt proxime demonstratum est; sit au-
b 2. quinti. tem & H I, quinta tam multiplex secundæ B, quam est L M, sexta multiplex quartę D; b Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartę, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumptæ eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem, sed necessarium fuit ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propos. 4. demonstrari possit.

iiij

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque mulriplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: siue E, F, ita

multi-

SCD LYON 1

multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit a G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H: Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vna deficere a multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vna æqualia esse, aut vna excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F. multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta; sumanturque ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel una deficere, uel una æqualia esse, uel una excedere, ut uult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta diximus, uel una deficere, uel una æqualia esse, uel una excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, k, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ B. D, [b] fit ut si I, multiplex

I E A B G L
K F C D H M

[a] 3. quinti.

[a] 3. quinti.

[b] 6. defi. quinti.

primæ

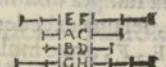
primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessario ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [a] æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque, esse, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [b] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. quinti.

[b] 6. defi. quinti.

COROLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [c] necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior; etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel maior, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel maiorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quam vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior quam vtraque E, F: & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quam



[c] 6. defi. quinti.

vtraque

vtraque G,H,erit vice versa, vtraque G,H,minor, quam vtraque E,F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D,sumpta sunt,æquemultiplicia G,H; Item secundæ A,& quartæ C, æquemultiplicia E, F, ostensumque est,G,H,vel vna excedere E, F, vel vna æqualia esse, vel vna deficere, secundum quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur; a erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C; quartam. Quod erat demonstrandum. a 6. defi. quint.

SCHOLIVM.

HAEC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A,B,sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C,D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

ORONTIVS quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quam in his. Reijcienda est ergo huiuscemodi demonstratio, vna cum expositione 6. definitionis, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I, minor est, quam L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alijs, si sumantur,

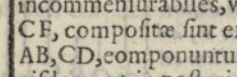


tur, pro vt inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.

ITA multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatæ CF, siue AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, vt in prima figura, siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Item siue AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figura, siue non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius GC, vt est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque



a 1. quinti. sunt multiplices ipsarum CF, GC; a erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quam est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quam multiplex est ipsius CD; b atque idcirco æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erunt GC, FD. Tam multiplex igitur erit EB, ipsius FD, quam multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt AE, ipsius CF, hoc est, vt tota AB, totius CD. Quare tam multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, quam est tota AB, totius CD: quod est propositum.

b 6. pron

ALI-

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, vt est AE, ipsius CF, vel vt tota AB, totius CD: quoniam AE, GA, æque multiplices sunt ipsarum CF, FD; [a] erit tota GE, sic multiplex totius CD, vt AE, ipsius CF: Sed ita quoque multiplex est AB, eiusdem CD, vt AE, ipsius CF, ex hypothesi. Aeque multiplices sunt igitur GE, AB, ipsius CD; [b] atque adeo inter se æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipsius FD; cum GA, sit multiplex posita ipsius FD: Atqui ita est multiplex posita GA, ipsius FD, vt AB, ipsius CD. Igitur & EB, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, vt AB, tota totius CD; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

G A E B
C FD

G A E B
C F D

a 1. quinti.

b 6. pro.

SCHOLIVM.

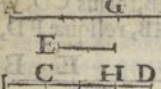
VNIVERSE idipsum demonstrabitur præpos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic est factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque

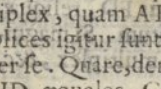
multi-



multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoque AG, eiusdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel eius multiplex; aliàs inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; [a] erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ B, vt HI, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F: Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E. Aeque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. [b] Ideoq. æquales inter se. Quare, dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.

a 2. anti

b 6. pro.



SIT deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; [c] erit, vt prius AB, ita multiplex ipsius E, vt HI, multiplex est ipsius F. [d] Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, vt GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

c 2. anti

d 6. pro.

SCHOLIVM.

HOC quoque ostendemus vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

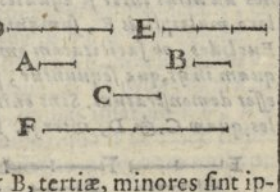
BRE-

BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD, sunt ipsarum E, F, æquemultiplices; erunt in AB, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in CD, æquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, æquemultiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines æquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, æquales. Quare toties continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, æqualis sit ipsi E, erit quoque HD, ipsi F, æqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in GB, continetur, quoties F, in HD, existit, vt ostensum est.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

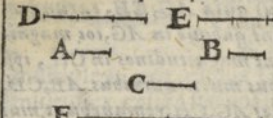
SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipsarum æqualium A, B; [a] eruntque D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, fit vt vtraque vel minor sit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; [b] erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



[a] 6. pron

[b] 6 defi. quinti.

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D,E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F,multiplex primæ & tertiæ C,vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A,& quartæ B; vel vna æqualis sit,vel maior;

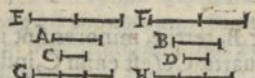


a 6. defi. quinti. a Erit quoque ea proportio primæ C,ad secundam A,quę tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A,ad C,vt B,ad C,erit conuertendo C,ad A,vt C,ad B. Aequales ergo ad eandem,eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est,nihil posse in hac propos. colligi ex defin.6. iuxta expositionẽ Campani ac Orontij. Neque enim per demonstrationem constat, vtramque multiplicem D,& E,eandem habere proportionem ad multiplicem F,sed solum,cum illæ sint æquales, vtramque esse vel minorẽ, vel æqualem,vel maiorem multiplici F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, quæ per 6. definitionem propositiũ colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omisit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs, quæ sequuntur, perinde ac si in hac propos. 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quam C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, vt B, ad D.



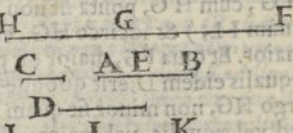
Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, primæ, & tertiæ. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C, & D, secundæ, & quartæ; b 6. pron *erunt tam E, & F, inter se æquales, quam G, & H, inter se. Quare si E, multi-*

plex

plex primæ deficit à G, multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. a *Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod est propositum.* a 6. defi. quinti.

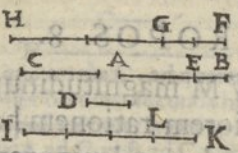
THEOR. 8. PROPOS. 8. viij

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, AB, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt sit reliqua EB. Vtraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem sit, quam D; At HG, multiplex ipsius AE, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE; quia dupla ipsius AE, esset minor, quam D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ maiores æquemultiplices. Quoniã igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarũ

prim. 5. BE, EA; [a] erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt HG, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C, & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proxime maior sit, quam HG, nempe dupla. vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quã HG,



sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quã tripla minor est, quam HG, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, maior, quam HG, (alias IK, non esset multiplex ipsius D, proxime maior quam HG; sed & IL, maior quoque esset quam HG. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est, quàm IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel maior. Et quia FG, maior est posita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, ut demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH, HG, sint æque multiplices primę AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipsius D. quæ instar est secundæ & quartę: sit autem FH, multiplex primę, maior quam IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ, non sit maior, quam IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quam HG,) [a] erit maior proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.

def. 8

QVONIAM uero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nũc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) maior est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quam FH, multiplex quartę AB, immo minor, cum FH, maior sit, quam IK, vt ostensum est; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertię ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur ma-

gni-

gnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportione agens, per hanc propos. 9. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemuis alium angulum, quam angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentia, quantumuis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam F G, multiplex excessus E B, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulū semicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui eiusdem natura non est eū vtroque angulo, quod ita multiplicari non possit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim: si ad lineā vnius palmi addi posset punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur proprie linea illa composita maior, quam linea vnius palmi, propterea quod excessus est indiuisibilis, & alterius natura; Item quē admodum si ad figuram planam quamcumque apponeretur linea vnius palmi, nō diceretur hac magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere proprie proportionē maioris inaqualitatis: quod excessus nō sit eiusdem natura cum plana illa figura: Ita quoque non habet angulus rectus proprie ad angulum semicirculi proportionem maioris inaqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersa natura, vt dictum est. Itaque non solum ea magnitudines proportionem proprie nō habent. quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad desin. 5. huius lib. diximus: sed neque ea proprie dicentur habere proportionē, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarū

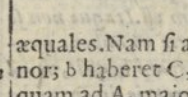
excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solũ proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix rectè intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planũ in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsque diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

ix.

THEOR. 9. PROPOS 9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor, [a] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; [b] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionẽ, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad



a 8. *quinti.*

b 8. *quinti.*

eandem

eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

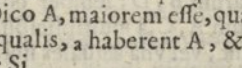
SCHOLIVM.

CONVERTIT hæc propositio 9. vtramque partem theorematis 7. vt manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B: Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [a] haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, [b] haberet B, maior ad C, proportionem maiorē, quàm A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quam B, sed maior. Habeat secūdo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; [c] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hyphothesin. Neque vero B, maior erit quam A, [d] alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quam A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 7. *quinti.*
[b] 8. *quinti.*
[c] 7 *quinti.*
[d] 8. *quinti.*

SCHOLIVM.

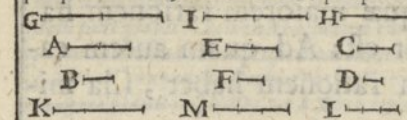
HAEC quoque propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.

SCD LYON 1

xj

THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.



SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D. easdem esse inter se, secũdum definitionem 6. hoc est sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C; Item æquemultiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A, C, a multiplicibus ipsarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcunque G, H, I, & ad omnes consequentes E, D. F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [a] sit vt si G, multiplex primæ deficit a K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: [b] Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quam M, uel æqualis, vel maior. est quoque H, minor quam, L, uel æqualis, uel maior: propterea quod ponitur esse E, prima ad F, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartę D. Et si G, æqualis est, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, uel maior quam L. Idemque ostendetur accidere in quibuscunque alijs æque muliplicibus. [c] Quapropter erit A, prima ad B, secundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

[a] 6. def. quinti.

[b] 6. def quinti.

[c] 6. def. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D, sit autem E, ad F, vt A, ad B, & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque A, 3. B, 2: C, 6. D, 4. E, ad F, vt G, ad H. Quia enim E, 9. F, 6: G, 12. H, 8. proportiones E, ad F, & C, ad D, eadē sunt proportioni A, ad B, a erit ut E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D, b erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.

a 11. q̄n.

b 11. q̄n.

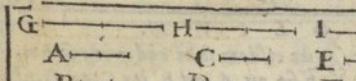
RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se: sit autem A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6. vt A, ad B, ita G, 12. H, 8. K, 12. L, 30. M, 20. G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H: I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam vt proxime in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad K, ita L, ad M; cum proportiones I, ad K, & L, ad M, eadem sint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit, vt G, ad H, ita L, ad M; cum hæ proportiones eadem sint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio est de pluribus.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad

D, & E,



D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, [a] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes, K, L M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [b] fit vt si G, multiplex primæ deficit a K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L. M, simul minores sint, vel æquales vel maiores. [c] Quocirca vt est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. quinti.

b 6. def. quinti.

c 6. def. quinti.

xiij.

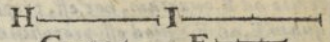
THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorē rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quar

tam

tam maior, quã E, quintę ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, F; Item æquemultiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B secundam, vt C, tertia ad D, quartam; [a] fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartę, &c. At quando H, excedit ipsam L, [b] non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor; quod maior ponatur proportio C, primę ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. [c] Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quã ob rem si prima ad secundã eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartã, &c. Quod ostendendũ erat.



a 6. *defi. quinti.*

b 8. *defi. quinti.*

c 8. *def. quinti.*

SCHOLIVM.

QVOD si proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, primæ ad F, secundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [d] sit vt si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. Sed si H, deficit ab L, vel æqualis est, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K, [f] atque idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam

d 8. *def. quinti.*

e 6. *def. quinti.*

f 8 *def. quinti.*

tertia

tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F. Quod est propositum.

EODEM modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

QVOD si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartã, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerrt quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primum A, maior quam C, a eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eãdem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam: b Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. c Minor est ergo D,



a 8. quinti.

b 13. 14. quinti.

quam

quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.

SIT deinde A, æqualis ipsi C, [a] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, [b] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [c] Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.



a 7. quinti.
b 11. qn.
c 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C; [d] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextã: [e] Minor quoque erit proportio C, primę ad D, secundã, quam C, quintæ ad B, sextam; [f] Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



d 8. quinti.
e 13. qn.
f 10. qn.

SCHOLIVM.

QVOD si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta. erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quam tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quam C. Cum enim B, maior sit quàm D; [g] erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est maior, quàm C, quintæ ad B, sextã; [h] erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam maior, quàm C, quintæ ad B, sextam: [i] ac proinde A, maior erit, quàm C. quod est propositum.

g 8. qnti
h 13. qn.
i 10. qn.

DEINDE sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis; [k] erit C, ad B, vt C, ad D: Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D. [l] Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B; [m] propterea que A, ipsi C, æqualis erit. quod est propositum.

k 11. qn.
l 11. qn.
m 9. qn.

TERTIO sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cum enim B, minor sit quàm

D, erit

D; a erit minor proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quintæ ad B, sextam, b erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam. c Igitur maior erit C, quam A, ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum.

a 8. ganti

b 13. gan.

c 10. gan.

BREVIVS. Si B, maior est, quam D, & A, dicatur non maior, quam C, sed vel minor, vel æqualis, d erit quoque B, minor, quàm D, vel æqualis, quod est contra hypothesin. Eademq. ratio est in alijs casibus.

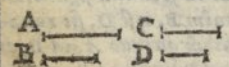
d 14. quinti.

VEL sic. Si est A, ad B, vt C, ad D; erit conuertendo B, ad A, vt D, ad C. Ergo si B, maior est, vel minor, vel æqualis ipsi D; e erit quoque A, maior, vel minor, vel æqualis ipsi C.

e 14. quint.

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis vel minor, quam secunda, tertiam quoque maiorem esse, vel æqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo pleriq. Geometrarũ tũ veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtraque est proportio maioris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam, maiorem esse vtraque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si vero vtraque proportio est æqualitatis, vtramq. magnitudinem antecedentem vtriq. consequenti æqualem esse. Si denique vtraque proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima maior est quã B, secunda, erit & C, tertia maior quã D, quarta; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamẽ Geometrice ostendemus cũ Federico Commandino, licet id nõ sit necessarium, ad propos. 16. huius lib.



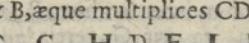
THEO-

SCD LYON 1

THEOR. 15. PROPOS. 15. xv

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, tories in CD, quoties B, in E F. Diuidatur ergo CD, in partes CH, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B, [a] eritq; CG, ad EI, vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, necnō EI, & B. Eadē ratione erit GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B, [b] ideoq; CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandē habebūt proportionē. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, ita erit CD, ad EF, nē pe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul. quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 7. quinti
[b] 8. quinti.
[c] 12. quinti.

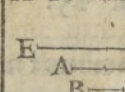
THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12 explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æque multiplices E, F, Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; [d] eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C,

[d] 15. quinti.

ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eędem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; erunt & ipsæ eædem inter se; hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare si E, prima maior est quam G, tertia, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, secunda maior quam H, quarta, uel æqualis, uel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H, Est igitur A, prima ad C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illę ab his una deficiant, uel una æquales sint, uel una excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.



a 11. qn.

b 11. qn.

c 14. qnti.

d 6. defi. quinti.

SCHOLIVM.

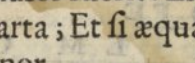
PORRO demonstratio huius propos. locum solum habet quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionem ostendimus, recepimusque nos demonstraturos hoc loco, videlicet,

SCD LYON 1

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secũda; & C, tertiam maiorem esse quarta D. & si est æqualis, æqualem; & si minor, minorem. [a] *Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* [b] *Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, secunda maior, quam D, quarta; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod est propositum.*



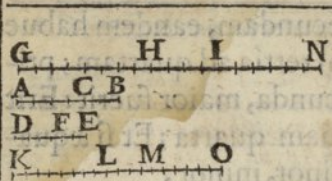
a 16. qn.
b 14. qn.

SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

THEOR. 17. PROPOS. 17. xvij.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE,



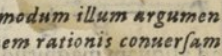
in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsa rũ enim A C, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine G H, H I, K L, LM; a eritque GI, ita, a 21. quinti. multiplex ipsius A B, vt est G H, ipsius AC, hoc est, vt b 1. qn. KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex K L, ipsius DF, b ita, quoque multiplex est KM, ipsius DE. Aeque multiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiatur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia, quartæ FE: Item tam est multiplex I N, quinta secundæ c 2. qn. CB, quam multiplex est M O, sexta quartæ F E; c erit & HN, sic multiplex secũdæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB, secũdam, vt DE, tertia ad FE, quartã; sumptæq; sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secũdæ & quartæ CB, d 6. defi. quinti. FE, æque multiplices HN, LO, d fit vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiã KM, multiplex tertiæ D E, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Qd si deficiat tã GI, ab HN, quã KM, ab LO, ablatis cõibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique G I, excesserit ipsam H N, & K M, ipsam L O, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque G H, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ D F: Item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE, ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ æquemultiplices fuerint acceptę) æque multipiices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel una deficere, vel æquales esse, vel vna excedere; e Erit AC, prima ad CB, secundam, vt D F, tertia, e 6. def. quinti. ad FE, quartam. quod est propositũ. Si compositæ igitur

ma-

magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EX *his facile demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione* 15. *Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniã est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;* [a] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*



a 17. 5. n.

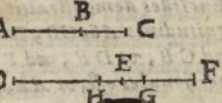
NVLLO *etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defi.* 15. *Diuisionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus. Sit enim vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF.* [b] *Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rursus, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.*

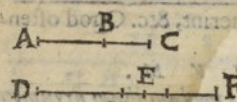
b 17. 5. n.

THEOR. 18. PROPOS. 18. xviij.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC,





vt DE, ad EF. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad BC, ita esse DF, ad EF. Si enim non est, vt A C, ad BC, ita DF, ad E F, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad BC. Habeat primum DF, ad GF, minorem ipsa EF, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur
a 17. qn. est, vt AC, ad BC, ita D F, ad G F; a Erit diuidendo quo-
b 11. qn. que, vt AB, ad BC, ita DG, ad GF: Sed vt AB, ad BC, ita, posita quoque est DE, ad EF, b Igitur erit etiam, vt DG,
c 14. qn. prima ad GF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DG, prima maior sit, quàm D E, tertia, c erit quoque GF, secunda maior quàm EF, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.

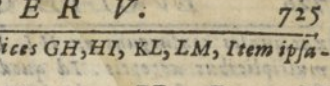
HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad HF, maiorem ipsa EF, eandem proportionem, quam A C, ad BC.
d 17. qn. Quoniam igitur est, vt AC, ad BC, ita DF, ad HF; d erit diuidendo quoque vt AB, ad BC, ita DH, ad HE. Sed vt AB,
e 11. qn. ad BC, ita posita etiam est D E, ad EF. e Igitur erit quoque, vt DH, prima ad HF, secundam, ita DE, tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH, prima minor sit quàm D E, tertia, f erit quoque HF, secunda minor quàm EF, quarta, totum quàm pars. quod est absurdum. Non igitur habebit DF, ad minorem ipsa EF, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam AC, habet ad BC. Ergo D F, ad ipsam EF, erit, vt AC, ad BC. quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionē demonstrant nonnulli cum Campano eadem ferme ratione, qua antecedentem propositionē Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, AC, ad CB, vt DF, ad FE. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt AB, quidem ad C, B, ita DE, ad FE. Sumantur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum AC,

CB,

CB, DF, FE, aque multiplices GH, HI, KL, LM, Item ipsarum CB, FE, alia aque multiplices IN, MO, [a] eruntq. rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, aque multiplices. [b] Itē HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in precedenti Theoremate ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, sumptaq. sunt GH, KL, aque multiplices prima ac tertia AC, DF. Item secunda & quarta CB, FE, aque multiplices IN, MO, [c] fit vt si GH, multiplex prima AC, deficit ab IN, multiplice secunda CB, etiam KL, multiplex tertia DF, deficiat ab MO, multiplice quarta FE, & si aqualis, aqualis; & si excedit, excedat. Quod si deficiat tam GH, ab IN, quàm KL, ab MO, additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, aqualis fuerit ipsi IN, & KL, ipsi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipsi HN, aqualis, & KM, ipsi LO. Et denique si GH, excesserit ipsam IN, & KL, ipsam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipsam HN, & KM, ipsam LO. Quoniam ergo si GI, multiplex prima AB, deficit ab HN, multiplice secunda CB, etiam KM, multiplex tertia DE, deficit ab LO, multiplice quarta FE, & si aqualis, aqualis, & si excedit, excedit; [d] erit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 1. ǧnti

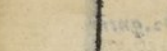
[b] 2. ǧnti

[c] 6. defi. quinti.

[d] 6. defi. quinti.

VERVM hac demonstratio non recte colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd HN, LO, non sunt ita multiplices ipsarum CB, FE, vt multiplices acceptæ sunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem aque multiplices seruent enim conditionem defectus, aqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum CB, FE, quascunque aquemultiplices, sed tales quanta-

xat, quales consurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obiici non potest: quippe cum IN, MO, sumpta sint ipsarum CB, FE, aquemultiplices qualescunque, ipsaque eadem remanent aquemultiplices earundem CB, FE, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eã studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, ut bonam: præsertim cum ostensiua sit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.



HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersã. Sit enim ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam, esse quoq; ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim est, ut AB, ad BC ita DE, ad EF, erit conuertendo, ut BC, ad BD, ita EF, ad DE, a Igitur & componendo erit, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE, quod est propositum.

a 18. quinti.

POSTERIOREM modum uocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, ut AB, ad BC, ita DE ad EF, erit conuertendo, ut BC, ad AB, ita EF, ad DE. b Igitur & componendo erit, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

b 18. quinti.

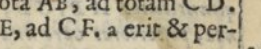
xix

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVOD

QVOD in propos. 5. demonstratum est de multipli ci proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam FD, ut est tota AB, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, vt A E, ad C F, a erit & permutando A B, ad A E, ut C D, ad C F. b Diuidendo ergo erit EB, ad AE, ut FD, ad CF. c Quare permutando rursus erit EB, ad FD, ut AE, ad CF, hoc est, ut tota AB, ad totam C D, cum posita sit A B, ad CD, ut AE, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod demonstrandum erat.

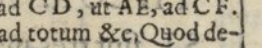


a 16. qn.
b 17. qn.
c 16. qn.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumẽtandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, d erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: e ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.



d 17. qn.
e 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclides interpretes conuersionem rationis demonstrãt hac ratione. Quoniam est, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; f erit permutando, ut tota AB, ad totam DE. ita CB, ablata ad ablatam FE. g Igitur ut tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF; Et proinde permutando rursus, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

f 16. quinti.
g 19. quinti.

SED quis non uidet, hanc demonstrationẽ conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea usurpetur alterna, siue permutata proportio, qua uim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, ut & in defin 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modũ hunc argumentandi à conuersione rationis adhi-

beant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates A B, C B, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel superfices, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

xx.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binę & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextę: sin illa minor, hæc quoque minor erit.



SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, [a] erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita ad D, ad E. [b] Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quã C, ad B. At vt C, ab B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E. quam F, ad E, [c] Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

a 8. quinti.
b 13. qn.
c 10. qn.

SIT

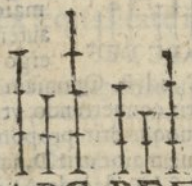
SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, [a] erit A, ad B, ut C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E, [b] Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, uti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E; [c] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.



a 7. qn.
b 1. qn.
c 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D. minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [d] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed ut A, ad B, ita est D, ad E. [e] Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quã F, ad E, [f] proptereaque D, minor erit quam F. Quod est propositũ. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

d 8. quinti.
e 13. qn.
f 10. qn.



SCHOLIVM.

PORRO propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidẽ demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

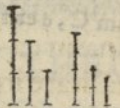
THEOR. 21. PROPOS. 21. xxj.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit:

SCD LYON 1

erit & quarta, quã sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoq; minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quę binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio pertubata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta.



a 8. quinti. F. Cum enim A, maior sit quam C, a erit maior proportio A, ad B, quã C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. b Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D, c Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

b 13. ẽn.

c 10. ẽn.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, d erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. e Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; f atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

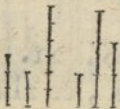


d 7. quinti

e 11. ẽn.

f 9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, g erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. h Minor est ergo proportio E, ad F, quam C. ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



g 8. quinti.

h 13. ẽn.

10. ẽn.

SCHO-

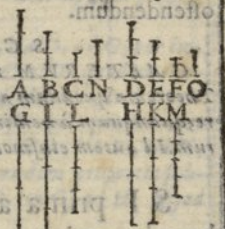
SCHOLIVM.

CAETERVM propos. 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel æquales, uel minores duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, ut ex propos. illa 23 patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, ut D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; [c] fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H,



[a] 4. quinti.

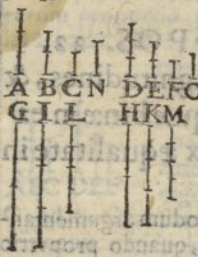
[b] 4. quinti.

[c] 10. ax.

æque-

æquemultiplices primę A, & tertiæ D, uel deficiant una ab L, M, æquemultiplicibus secundę C, & quartæ F, uel una æquales sint, uel una excedant: in quacunq; multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [a] erit A, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

a 6. def. quinti.



DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, ut F, ad O. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut D, ad F: ponatur autem C, ad N, ut F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æquali tate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo ivem nstendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

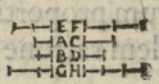
SCHOLIVM.

CAETERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam eãdem rationẽ: Item æque multiplices secundæ & quartæ ad primã & tertiã, eandẽ

rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertię: Item prima ac tertia ad æquemultiplices secundę & quartæ, rationem habebunt eandem.

SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq. E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G, H, æquemultiplices ipsarũ B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Itẽ ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum vtrobique sit eadem proportio multiplex; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; a erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quod vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estq. vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.) b erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.



a 22. quinti.

b 22. quinti.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quod ex constructione vtrobiq. sit eadem proportio submultiplex; c erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex; d erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.

c 22. quinti.

d 22. quinti.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometræ, maxime Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel

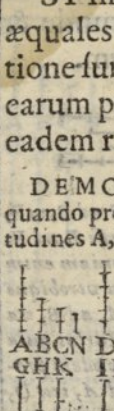
quadru-

quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

xxiij. **THEOR. 23. PROPOS. 23.**

SI sint tres magnitudines, aliæq. ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEMONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres D,E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A,B,D, æquemultiplicibus G,H, I; Item ipsarum C,E,F, æquemultiplicibus K, L, M;



a 15. *quinti.* a Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A,B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F; b Igitur vt G, ad H, ita quoque est E, ad F; c Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum B, F, æquemultiplices. d Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; e erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L. multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G,H,K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estq. earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; f fit vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus se-

b 11. *quinti.*

c 15. *quinti.*

d 11. *quinti.*

e 4. *quin*

f 21. *quinti.*

cundæ

cundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; a erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat. a6 defi. quinti.

SCHOLIVM.

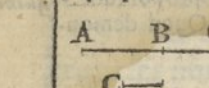
QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq. earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. qua causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & alia tres D, E, O, qua bina in eadem sumuntur propertione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemq. modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres. Et sic de pluribus. Quod est propositum.

THEOR. 24. PROPOS. 24. xxiiij.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD

QVOD propositione 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim AB, prima ad C, secundam, vt DE, tertia ad F, quartam; Item BG, quinta ad C, secundam, vt EH, sexta ad F, quartam. Dico ita esse AG, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est DH, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est AB, ad C, vt DE, ad F; & C, ad BG, vt F, ad EH; [a] erit ex æquali AB, ad BG, vt DE, ad EH. [b] Componendo igitur erit vt tota AG, ad BG, ita tota DH, ad EH. Itaque cum rursus sit AG, ad BG, vt DH, ad EH; & BG, ad C, vt EH, ad F: [c] erit ex æquali AG, ad C, vt DH, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



a 22. qn.
b 18. qn
c 22. quinti.

SCHOLIVM.

HAEC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item de-

tracta

SCD LYON 1

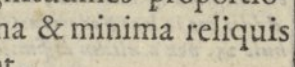
tracta AB, DE, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH; ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F, erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F, & C, ad AB, vt F, ad DE: [a] *erit ex aequalitate AG, ad AB, vt DH, ad DE.* [b] *Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaque cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE; & AB, ad C, vt DE, ad F:* [c] *erit ex aequali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.*

a 22. quinti.
b 17. quinti.
c 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitq. AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas AB, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: [d] erit quoque vt tota AB, ad totam CD, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient AG, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus GB, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



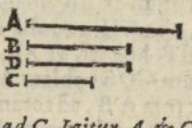
d 19. quinti.

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium màxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo cernere licet. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita E, ad F; & AB, prima maior quam tertia E; a erit quoque CD, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est AB, quam CD, erit quoque E, maior quam F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet,

a 14. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.



SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitq. A, maxima, & C. minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quam B, & D, simul, b vt proxime demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum.

b 25. quinti.

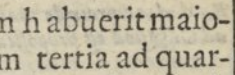
HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpenumero grauissimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum, ac seriem propositionum

tionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc est.

THEOR. 26. PROPOS 26. xxvj

SI prima ad secundam h abuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

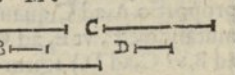
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritq. proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; [a] ac propterea A, maior erit quam E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.



a 10. *quinti.*
b 8. *quinti.*

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem secundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris, & contra.



SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quã D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq. proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] *ac propterea A, minor erit, quam E.* [d] *Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita*

c 10. *quinti.*
d 8. *quinti.*

est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

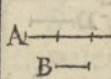
ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B.

a 26. quinti. [a] *Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod est propositum.*

xxvij.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritq. proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad B: [b] Ideoque A, maior erit quam E. [c] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [d] Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.

b 10. quinti. c 8. qui. d 16. quinti.

SCHOLIVM.

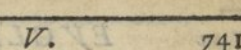
SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, vicissim prima ad tertiam minorem esse proportionem, quã secunda ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutãdo, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur .n. esse E, ad B, vt C, ad D;

Eritque

SCD LYON 1

Eritque proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; [a] *Ac propterea A, minor erit, quã E.* [b] *Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C,* [c] *Sed permutando. vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quã B, ad D. Quod est propositũ.*



a 10. quinti. b 8. quinti c 16. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] *Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B:* [e] *ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod est propositum.*

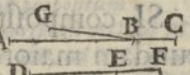
d 27. quinti. e 26. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

xxviij.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

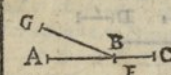
SIT maior proportio A B, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad E F.



Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam G B, ad BC; [f] Ideoque A B, maior quam G B. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam G C; [g] maiorque ptopterea, erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, [h] vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad B C, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

f 10. quinti. g 8. quinti. h 18. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si prop ortio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem prima et secunda simul, ad secundam, quam tertia & quarta simul, ad quartam.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC; a ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC; b minorquo propterea erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

a 10. qn.
b 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC. c Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod est propositum.

c 28. qn.

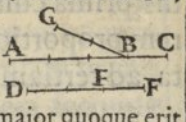
xxix. THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cũ quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, maior quo-

que

que proportione G C, ad B C: [a] ideoque maior erit A C, quam G C. Ablata ergo communi B C; maior erit A B, quam G B: [b] Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quam G B, ad B C. [c] Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam D E, ad E F. Quod est propositum.

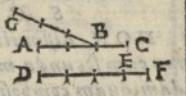


a 10. quinti. b 8. qn. c 17. qn.

SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio A C, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionē AB, ad BC, quàm DE, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad BC, vt DF, ad EF; eritq; proportio AC, ad BC, minor quoque, quã GC, ad B C: [d] ideoque minor erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi BC; minor erit A B, quàm G B: [e] Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quàm GB, ad BC: [f] Sed diuidendo est, vt GB, ad BC, ita, DE, ad EF. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur minor quoque proportio erit AB, ad BC, quàm D E, ad EF. Quod est propositum.



d 10. quinti. e 8. qnti f 17. qn.

ALITER. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad E F, quam AC, ad BC. [g] Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC: atque idcirco minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.

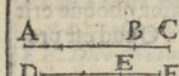
g 29. quinti.

xxx.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionē, quam composita tertia cum quarta, ad

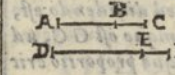
quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.



SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad
a 29. qn. EF; a erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quã
b 26. qn. DE, ad EF. b Quare conuertendo, minor erit proportio
c 28. qn. BC, ad AB, quam EF, ad DE; c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione offendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem prima et secunda ad primam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam.



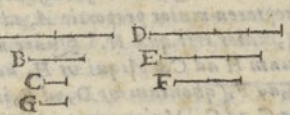
SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor sit proportio AC, ad BC, quã DF, ad EF;
d 29. qn. d erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE,
e 26. qn. ad EF. Quare e conuertendo, erit maior proportio BC, ad
f 30. quinti. AB, quàm EF, ad DE: f Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC, ad BC,
g 30. qn. quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. g Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.

SCD LYON 1

THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxj.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primę priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.



SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres DE, F, sitque maior proportio A, ad B, quam D, ad E. Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C; maior, q̃ G, ad C; a Ideoque B, maior erit quam G. Quare b maior erit proportio A, ad G, minorem, quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; c Ideoq. A, maior erit, quam H. d Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandē C: e Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

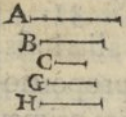
a 10. qn. b 8. qnti

c 10. qn. d 8. quinti. e 22. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A,

ad E,



ad B, quæ D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F, vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, quæ E, ad F, ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quam E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C: a Ideoque B, maior erit quam G. b Quare maior erit proportio A, ad G, quam A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G, c Ideoque A, maior erit, quã H. d Quare maior erit proportio A, ad C, quam H ad C. e Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F, (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 22. quinti.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quam D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, eritque propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: f Ideoque B, ipsi G, æqualis erit. g Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G, h Ideoque A, maior erit, quam H. i Quare maior proportio erit A, ad C, quam H, ad C: k Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

f 9 quin. g 7. quinti. h 10. quinti. i 8. quin. k 22. quinti.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quam E, ad F: Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quam D, ad

SCD LYON 1

E, at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, siue vna tantum maior, quã vna, vel dua. &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam prima posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vsurpando hoc scholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus aqualis est vnitãtũ proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM si maior est proportio A, ad B, quam E, ad F; & maior B, ad C, quam F, ad G, & maior C, ad D, quam G, ad H; a erit ex aquo maior proportio A, ad C, quam E, ad G, Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quam E, ad G; & maior C, ad D, quam G, ad H; b erit quoque ex aquo maior proportio A, ad D, quam E, ad H.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. qn.

b 31. qn.

QVOD si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quam G, ad H: c erit ex aquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quam E, ad H.

c 22. quinti.

SI vero maior proportio sit A, ad B, quam E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H, erit hoc scholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G; Et rursus maior A, ad D, quam E, ad H.

SI autem maior sit proportio A, ad B, quã E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quam G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F. sed maior proportio B, ad C, quam F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quã E, ad H &c.

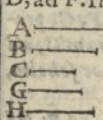
A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

IDEM concludes, si omnes proportiones unius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, uel una uel duæ. Item si sint plures magnitudines, ut propositione 22. diximus.

xxxij. THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F, Item maior B, ad C, quam D, ad E, Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C. a Ideoq. maior erit B, quam G. b Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quã eiusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proporto A, ad G, quam H, ad G; c ideoque maior erit A, quam H. d Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C. e At ut H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C: & ut E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.



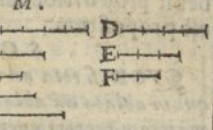
a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 23. quinti.

SCHO-

SCD LYON 1

SCHOLIVM.

EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F, At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, At B, ad C, eadem, quæ D, ad E, ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, ut in proposita figura perspicitur.



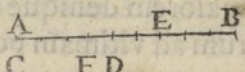
HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremorum proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque uel minorem esse proportionem primæ priorum ad ultimam, quam primæ posteriorum ad ultimam, ea arte, qua usi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propos. considerentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxiij.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatæ AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquæ EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; [a] erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; [b] ac propterea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD, [c] Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit



[a] 27. quinti. [b] 30. q^n. [c] 27. q^n

bebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionẽ, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam maiorem proportionem, quam tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce maioris; & vocem, maioris, pro voce, minoris.

xxxiiij. THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.

SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, Sit autem maior proportio A, ad D; quam B, ad E; Itẽ maior B, ad E, quam C. ad F. Dico proportionẽ ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportione A, ad D; maiorem denique etiam propor-

A——— D———
B——— E———
C——— F———

tione

tione C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quam B, ad E; a erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E, b Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E; c Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; d habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F: Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. e Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; f & componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. g Et rursus permutando, maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F. quod est primum.

a 27. qn. b 28. qn. c 27. qn. d 33. qn. e 27. qn. f 28. qn. g 27. qn.

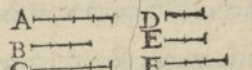
ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, h erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

h 33. qn

QVONIAM vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; i erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; k & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F; l & rursus permutando, maior B, C, ad E, F, quam C, ad Ad F. Est autè maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F, Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quã ultimæ C, ad ultimã F, quod est tertiũ.

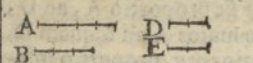
i 27. qn. k 28. qn. l 27. qn.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobiq; cũ ea dẽ hypothesi, hoc est, sit quoq. maior proportio tertiæ C, ad F, tertiã, quã G, quartæ ad H. quartam. Dico eadẽ consequi,



Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior

erit



a 27. qn. erit A, ad D, quam B, C, G, ad E, F, H, a Permutando ergo minor erit A, ad B, C, G, quã D, ad E, F, H, b & componendo maior A, B, C, G, ad B, C, G, quam D, E, F, H, ad E, F, H, c & permutando A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.

b 28. qn.

c 27. qn.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H, quam ablatæ B, C, G, ad ablatam E, F, H, d erit & reliquę A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D, E, F, H. quod est secundum.

d 33. quinti.

QVONIAM vero, vt in tribus est demonstratum, maior est proportio B, C, G, ad E, F, H, quam G, ad H; & maior A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam B, C, G, ad E, F, H, vt fuit ostensum; multo maior erit proportio A, B, C, G, ad D, E, F, H, quam vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor; & in sex per quinque, & in septem, per sex, &c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema, &c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

SCD LYON 1

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

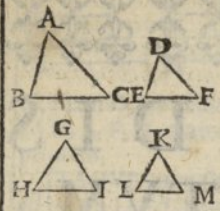
I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quę & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula *ABC*, *DEF*, *similia* dicentur, *si fuerint æquiangula*, *ita vt* angulus *A*, angulo *D*; & *B*, ipsi *E*; & *C*, ipsi *F*, *æqualis sit*: *Item latera circa æquales angulos proportionalia*, *hoc est*, *vt AB*, *ad AC*, *ita DE*, *ad DF*; *& vt AB*, *ad BC*, *ita DE*, *ad EF*, *& vt AC*, *ad CB*, *ita DF*, *ad FE*.

QVOD *si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius*, *singuli singulis*, *at latera circa æquales angulos non proportionalia*, *aut contra*; *non dicentur tales figuræ similes*: *cuiusmodi sunt quadratum*, *& figura altera parte longior*. *Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales*, *vt-*

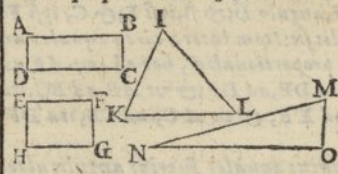
pote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia non sunt, quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem æqualitatis, latera vero figuræ alterа parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inæquales. Cuiusmodi sunt triangula æquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim æqualitatē, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM. Item GH, ad HI, vt KL, ad LM, & GI, ad IH, vt KM, ad ML, cum semper sit proportio æqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.



I I.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vtrobique sit et antecedens, & consequens diuersarum proportionum, hoc est, vt sit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, seu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroque enim modo AB, est antecedens vnius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, est consequens vnius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, conse-



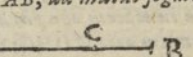
quens,

quens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, recipooca, si fuerit vt IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel vt IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

SI linea recta quauis AB, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt sit, quemadmodũ tota AB, ad maius segmentũ AC, ita AC, maius segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem.

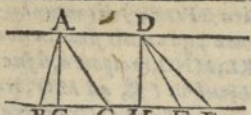


Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamque sub alijs verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumeræ dignitates, atque vtilitates linearum hoc modo diuisarum, vt ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. vt non immerito à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est Diuisa.

IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a vertice ad basin deducta.

SI a vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem



triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiã perpendicularis DH, ducta a D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaque si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac uertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; [a] erunt rectæ AG, DH, parallelæ; Sunt autem & AD, GH, parallelæ, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG; [b] ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad Basin DE, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, deductæ, cum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.

[a] 28. primi.

[b] 34. primi.

RECTE vero ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometra, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataque. Quæ de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Spheram Ioan. de sacro bosco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dici-

SCD LYON 1

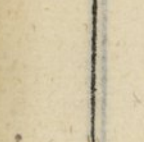
citur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio tricecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 10. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesquialteræ, & sesquitertiæ: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componetur ex sesquiseptimæ, & supertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ proportio componi dicetur ex subsesquiquartæ, & duplæ sesquialteræ; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ.

Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici poteſt, vt paulo poſt patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio prima ad vltimam componi dicitur ex proportione prima ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam, et tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs conſtet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter ſe multiplicatis producatur, vt quinto libro defin. 10. expoſuimus: ita vt ſi fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad ſecundam; ſi tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuſcunque ordine poſitis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam conſurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadã Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonſtrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Aſcalonita lib. 2. Archimedis de ſphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propoſ. 11. Altera autem a Vitellione lib. 1. propoſ. 13. ſuæ Perſpectiuæ, comprobabimus.

THEON igitur rem propoſitam ita conatur abſoluere.



Habeat AB, ad CD, rõnem datã, veluti duplam, aut triplã, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandẽ quoque datã. Dico quod ipſius AB, ad EF, ratio conſtat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quod ipſius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipſius CD, ad EF, rationis quantitatẽ efficit ipſius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quã CD, maior; & CD, quã EF: & ſit quidem AB, ipſius CD, dupla, & CD, ipſius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipſius EF, tripla eſt, ipſius autẽ CD, dupla eſt AB; erit AB, ipſius EF, ſextupla. Quoniam ſi

triplum alicuius duplicamus, fit sextuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, diuidatur AB, in ipsis CD, æqualia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; æqualis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad C D, & C D, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, vtraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla, At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniã CD, ipsius EF, dimidia est, ipsius autem C D, tripla est AB, erit A B, sesquialtera ipsius E F. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, et dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est, & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, æqualiũ ipsi CD, triũ, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est A B, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad C D, & C D, ad EF, ratione.

A C E
B D F

SED iam rursus sit C D, vtraque ipsarum AB, & EF, maior, & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, taliũ est C D, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, triũ. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium limitem, quæ duoriũ est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quauis vna compositarum auferatur, vno simplicium ieçto, reliqua compositarum assumetur.

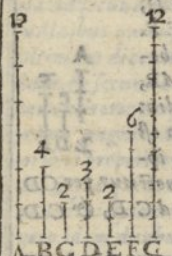
C E
A
B D F

Hæc ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem

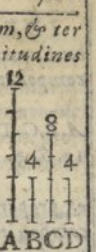
A, ad C, cõponi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demõstrabitur, assumpto prius hoc principio, Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinẽ proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, id circo 3. multiplicata in 4. producunt 12. Itẽ quia 4. ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. sit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis vero B, ad C, denominator sit E, et D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A, Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C, Dico G, ipsi A, aequalem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) a erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B. producit F, & A, b erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B: Itaque aequales. erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C. producetur quoq; A, ex F, in C: propterea que F, quãtitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositũ.



a 18 sep.
b 17. sep.

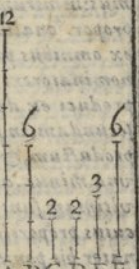
SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio primæ ad vltimã componetur ex proportioni-

tionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B, & B, ad C, & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.



VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eadem principio Euteeij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentē proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C, at F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartum producitur, aquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedēs A,) erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F, 20.

a 19. sep.

ITEM

IDEM ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E. ad F. Nam vt ostensum est, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & B, ad F. Hæc autem proportio B, ad F. componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hæc proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hæc tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.

A.B.C.D.E.F.
12.6. 3. 2. 1.4.

EX his liquido constat id, quod ad defin. 10. lib. 5. docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus cõtinue proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quã prima habet ad secundam, in se ipsum multiplicato, & ex eodem in numerũ productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant vna minus, quot proportiones inter primam quantitatẽ, & vltimam sunt interpositæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita in se multiplicatur; triplicata vero, quãdo idẽ denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primã quãtitatẽ, & tertiam positas) atq; ita multiplicatur, primum in se, deinde iterum in numerum productũ. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continue proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: solum in illis denominatores æquales erunt. Vt si A, B, C, ponantur continue proportionales, æquales erunt denominatores D. E; & F. erit denominator proportionis duplicata, &c.

ETSI

ETSI autem demõstratio tam Eutocij, quam Vitellionis proprie quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorũ proportionibus demonstrantur, conueniũt quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiãsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorẽ proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, nõ tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorum multiplicatio nõ vsurpetur. Nam quẽ admodum, propositis pluribus magnitudinibus continue proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quam prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs, æqualibus: primã vero ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundã habet, hoc est, compositã ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continue proportionales, dicetur prima ad vltimã habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se nõ sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quod illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio prima ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum interijciuntur proportiones omnes æqua-

les,

les, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quænam sit illa prrportio, qua alterius dicitur duplicata, triplicata &c. vel qua ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, qua proportio sit illa, qua dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnũ in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, qua decupla est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, qua eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10. 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de alijs quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionũ, cũ de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem data proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem data proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minor inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. qua centupla est, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentuplæ est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quænam sit proportio illa, qua verbi gratia componi dicitur ex triplæ, duplæ, sesquialteræ, & sesquitertiæ, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerum procreatum 9.

in $1\frac{1}{3}$.

in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus. n. productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus cõponi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autẽ intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus, Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secundus ad tertium, vt 1. ad 1. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur,

vt

vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitonem esse intelligendam de magnitudinibus continue proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compositione proportionum, extremorum proportionem, quæ ex proportionibus intermedijs componi dicitur, vere esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarũ proportionum inter se, ac proinde omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multo minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.

HAEC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorem, statuendi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tri-

bus

bus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque si alios numeros statuas medios hoc modo, 100 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem compositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quod si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hæ enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{6}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam, & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{6}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione $\frac{3}{6}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si datæ quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{6}$ ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua quispiam postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq. numerum. Si namq. sumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos statuantur tot numeri quicunque minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorē proportionis extremorum, vt demonstratū est, hoc est, numerū datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. statuemus inter duos

numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunque, hoc modo 500. 250. 50. 5. erunt q. tres quæsiti numeri, 2. 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10 fiunt 100. Quòd si quis postulet vnum numerum, qui vna cum quotlibet alijs datis, si inter se multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2. 3. 1 $\frac{1}{2}$. 3 $\frac{1}{3}$. quaraturq. quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum 1 $\frac{1}{2}$. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero 1 $\frac{1}{2}$. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor psoportiones à 2. 3. 1 $\frac{1}{2}$. 5 $\frac{1}{3}$. denominatas, hoc modo, 9. 4 $\frac{1}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$. 1 $\frac{3}{1\frac{6}{}}$. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{1\frac{6}{}}$. ad 6. nimirum $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$. Nam quinque hi numeri 2. 3. 1 $\frac{1}{2}$. 5 $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum 1 $\frac{1}{2}$. Idem quintus numerus $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$, inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6 12 36 54 288. 9. Denominater enim proportionis 9. ad 288. est $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$. vt prius. Sic etiam si quarendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. Statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1. & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2 $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. sunt quatuor numeri, qui quærumtur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum, diuida-

tur

tur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. dividatur 1. qui produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentijs intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

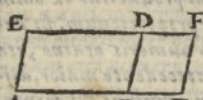
ATQVE hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam, qua multum conducet, vt facilius intelligantur 27. 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quam plurimæ aliæ decimi libr. Ea autem est eiusmodi:

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam appli-

catur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE.



Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.

RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, maius recta data AC; & ducatur CD, ipsi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum secundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, vocetur excessus.

HIC autem defectus DB, vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perspicuum est.

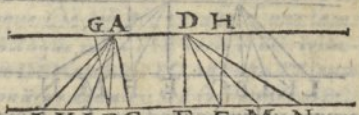
1. ## THEOR. 1. PROPOS 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eæ-

dem

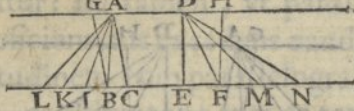
dem baſes BC, EF.



Dico ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt eſt baſis BC, ad baſin EF. Hoc eſt, ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis EF, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogrāma inter eaſdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares à verticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex BL, ſumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. [a] Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erũt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, [b] neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, maior fuerit quam EN, neceſſario ACL, maius eſt quam DEN, & ſi minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC,

[a] 38. pri

[b] 38. pri



ab EN, recta trianlo DEN, æquemultiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel vna æqualia erunt, vel vnà excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. a Quare quæ proportio est primæ BC, ad secundam EF, basis ad basim, ea est tertiæ ABC, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum.

a 6. defi. quinti.

QVONIAM autem b vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (c quod duplum est trianguli ABC.) ad parallelogrammũ EH; (d quod est duplum trianguli DEF) perspicuum est, e ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodẽ argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi BG; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH. &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadẽ fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandũ.

b 1. 5. quinti. c 34. pri d 34. pri e 11. quinti.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus, Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis BC, ad basin EF. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares AI, DK, esse æquales. Si enim non sunt æquales,

sit

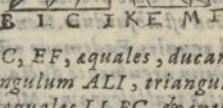
sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaque LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, coniunctaque recta BN; [a] erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK ponãtur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. [b] Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem: [c] Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.

a 1. sexti
b 11. qn.
c 9. quinti.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim



sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; [d] erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. [e] Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM. [f] Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.

d 38 primi.
e 7. quinti
f 1. sexti

QVONIAM vero est, [g] vt ABC, ad DEF, ita parallele-

g 15. qn.

a 34. pri
b 34. pri
c 11. Qn.

rallelogrammum AGBC, a quod trianguli ABC, duplum est, ad parallelogrammum DEFH, b quod trianguli DEF, est duplum. c Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur LG, MH. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.

HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum bases BC, EF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit BC, si fieri potest, maior, quam EF. Abscissa igitur BL, ipsi EF, æquali, ductaque recta LA; erit, vt proxime demõstrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed vt AI, ad DK, ita ponitur esse ABC, ad DEF. d Igitur ABL, ABC, ad DEF, eandem habent proportionem; e Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Eademque est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta LM, ipsi GB, parallela, ostendemus, parallelograma MGBL, AGBC, æqualia esse, si bases BC, EF, dicantur inæquales. & BL, EF, æquales.

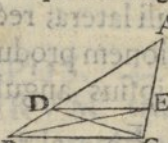
d 11. Qn.
e 9. quinti.

IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula, & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE, a erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. b Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: c Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cũ hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. d Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) quod est propositum.



a 37. primi.
b 7. qn.
c 1 sexti
d 11. quinti.

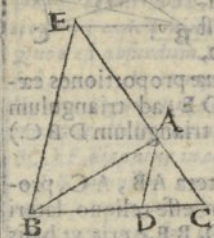
SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, e erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. f Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC:

e 1 sexti
f 11. quinti.

a 1. sexti Sed rursus a. vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem.
b 11. qn. b Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est
c 9. qnti triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. c Aequalia
d 39. pri. ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea, cũ eandem habeant basin DE, d inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



IN triangulo A B C, recta AD, secet primo angulum B A C, bifariam. Dico esse vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cũ CA. producta conueniat in E; (coibunt autem omnino B E, CA, propterea quod anguli C, & CBE, minores sunt duobus rectis. Cũ enim
e 17. pri. C, & CDA, e minores duobus re-
f 29. pri. ctis sint; f sit autem angulus CDA, angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & C B E, duobus
g 29. pri mi. rectis minores. g eritque angulus EBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo angu

li BAD,

li BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se æquales; [a] Ideoque & rectæ BA, EA, inter se æquales. [b] Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. [c] Atqui vt EA, ad AC, ita est BD, ad DC. cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. [d] Igitur vt BA, ad AC, ita est BD, ad DC. quod est propositum.

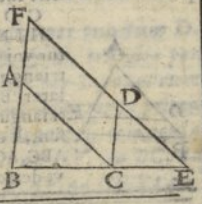
a 6. pri.
b 7. quinti.
c 2. sexti
d 11. qn.

SIT deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur vt BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC, [e] Vt autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD, sit lateri BE, parallela) [f] Erit vt BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. [g] Aequales igitur sunt BA, & EB, inter se, [h] ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt; Cum igitur angulus ABE, æqualis sit alterno BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

e 2. sexti
f 1. qn.
g 9. qn.
h 5. pri.
i 29. pri.

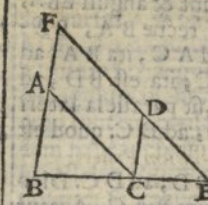
THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.



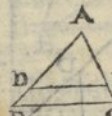
SINT æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABG, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & AB, deniq; ad AC, vt DC ad DE: Ita enim latera cir-

ca æqua-



ca æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE. secundum lineam rectam, ita ut angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno
a 17 pri. DEC, Et quia duo anguli ABC, ACB, a minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus
b 13. prō. DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. b Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibūt. Producantur ergo, & conueniāt in F. Quoniam uero angulus externus DCE, æqualis est interno oppositio ABC;
c 28. pri. c parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF: quod angulus externus ACB, it æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, d
d 34. pri. propterea que recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulo BEF, recta AC,
e 2. sexti parallela est lateri EF, e erit AB, ad AF, hoc est ad DC,
f 16. qn. (quæ æqualis est ipsi AF,) ut BC, ad CE. Permutando figitur erit AB, ad BC, ut DC, ad CE. Rursus quia in eodem
g 2. sexti triāgulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, g erit BC,
h 16. qn. ad CE, ut FD, hoc est, ut CA, (quæ æqualis est ipi FD,) ad ED. Permutādo h igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cū igitur sit AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE,
22. qn. ad ED. i erit & ex æquali AB, ad CA, ut DC, ad ED. Quod est propositū. Aequiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.



HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti
k 29. pri 14. sexti triangulo ABC, esse simile. Aequiangula namque sunt, k cum anguli ADE, AED, æquales sint anguli ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare vt demonstratum est, habent latera circa æquales,

angulos

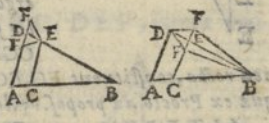
angulos proportionalia ; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

SCHOLIVM

NON alienum à nostro instituto esse puto, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Cõmandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duę parallelę inter se ad eas dem partes educantur, ita proportionem habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum includ: Recta coninngens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ transibit per extremum alterius lineæ.

SIT recta AB, & ex pũctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB. BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, Ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; a erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, b vt AB ad BC, ita AF, ad CE: Vt au-



a 4. sexti
b 16. qn.

tem AB,

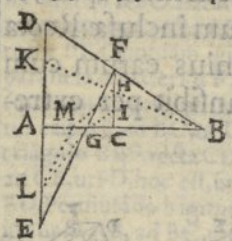
a 11. 9n. b 9. 9n.

tem AB, ad BC, ita erat quoque A D, ad C E. a Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: b Ac propterea æquales erũt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BE, per punctum D. Quod est primum.

RVRSVS si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propos. triangula BAD. BCF. similia sunt; c erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF: d & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad BC. ita quoque erat AD. ad CE. e Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE: f Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BD, per E. Quod est secundum.

c 4. sexti d 16. quinti. e 11. 9n. f 9. 9nti

HOC etiam verum est, quando duæ parallelæ in diuersas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam segmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem intra datam rectam. Vt in figura problematis 7. scholij propos. 17. si fuerint parallelæ AE, FC, in diuersas partes ductæ, fueritque vt A E, ad CF, ita A G, ad C G, transibit recta EF, per G, hoc est, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam constituent. Cũ enim sit, vt AE, ad C F, ita AG, ad CG; erit permutando quoque, vt AE, ad AG, ita CF, ad CG. Cũ ergo anguli alterni A, C, æquales sint; g erũt quoq; anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC. sit linea recta, constituent EG, FG, lineam quoq; rectam ex ijs, quæ ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus.



g 6. sexti.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur; & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.

IN



IN triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex pũcto F, quocunque ad angulum A, rectæ extenda tur FA, secans DE, in G. Dico esse, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; a erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG, b & permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG, Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE. c Igitur erit, vt BF, ad DG, ita FC, ad GE, & permutando, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quod est propositum.

a 4. sexti
b 16. qn.
c 11. qn.

ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, similia sunt, nec nõ triangula AFC, AGE, per coroll. huius propos. d erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE. e Ex æquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.

d 4. sexti
e 22. qn.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

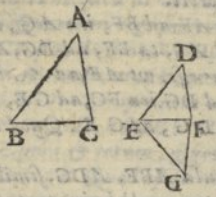


HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, ut DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG,

FG, in

a 32. pri mi. FG, in G: a eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula ABC, GEF. Quare b vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. c Igitur vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: d propterea que æquales erunt GE, DE. Rursus, e quoniã vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Vt autẽ BC, ad CA, ita ponitur EF, ad FD; f erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; g ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera EG, FG, æqualia sint lateribus DE, DF, vtrumque vtrique; & basis communis EF; h erunt anguli G, & D, æquales; i ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidem angulo A, æqualis; eodemq; modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod est propositum, Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

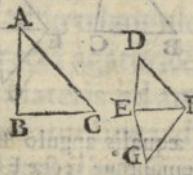
b 4. sexti
c 11. q̃n.
d 9. q̃nti
e 4. sexti
f 11 q̃n.
g 9. q̃n.
h 8. pri. mi.
i 4. pri.



vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiãgula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



SIT angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli DEF, sintque latera AB, BC, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D,

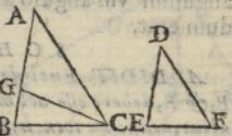
& an-

& angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo ABC, æquiangulum. Quare a vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. b Igitur vt DE, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; c atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus DEF, propterea que æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF.) d erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam anguli A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula ABC, DEF, quod est propositum. Si igitur duo triangula unum angulũ uni angulo æqualem, &c. Quod erat d emonstrãdũ.

a 4. sexti
b 11. qn.
c 9. quin
d 4. pri.

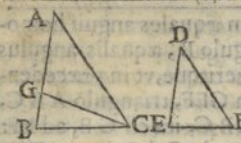
THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.



SIT angulus A, trianguli ABC, æqualis angulo D, trianguli DEF, & latera AC, CB, circa angulum ACB, proportionalia lateribus DF, FE, circa angulum F, hoc est sit vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse trian-

gula,



gula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli ACB, & F, non sunt æquales, sit ACB, maior, quam F: fiatque ipsi F, æqualis ACG, Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DEF, æquiangula erunt. Quare b vt AC, ad CG, ita erit DF, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. c Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad CB, d ac propterea æquales erunt CG, CB, e & anguli CBG, CGB, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; f cum AGC, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus AGC, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

a 32. pri.
b 4. sexti
c 11. qn.
d 9. qn.
e 5. pri.
f 13. pri.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo CGB, æqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, CGB, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. g Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB, & F, sed æquales, atque h idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

g 17. pri.
h 32. pri.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumque angulum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nã alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo ABC, sit CG, æqualis ipsi CB, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim enim i *erit latus CA, latere*

i 19. pri.

CB,

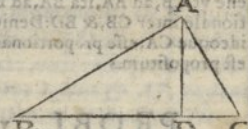
CB, maius. Si igitur ex C, ad interuallum CB, circulus describatur, secabit is rectam AB, priusquam rectam AC, quæ longior est, quam CB, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam AB, propterea quod ob acutum angulum B, recta AB, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum CB, vt patet ex propos. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula ABC, AGC, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos ACB, ACG, latera proportionalia, hoc est, a vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG, & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula ABC, AGC, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum ABC, AGC, minor est recto, vel non minor. Immo ABC, est quidem recto minor, AGC, verò recto maior. Cum enim CG, CB, latera æqualia sint, b & ideo anguli CBG, CGB, æquales; c erit vterque eorum recto minor, d ac propterea AGC, recto maior.

a 27. quinti.

b 5. pri.
c 17. vel 32. pri.
d 13. pri. viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB, sint recti, & angulus B, communis; e erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Aequiangulum est igitur triangulum DBA, triangulo ABC, f ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit, vt CB, ad

e 32. pri.

f 4. sexti.

BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC. ad CA, ita BA, ad A D. Ita enim latera homologa, æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt
a 32. pri recti, & angulus C, communis; a ac propterea reliqui
b 4. sexti anguli ABC & CAD, æquales. Quare b vt BC, ad CA, ita est CA, ad CD; & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA, & vt C B, ad B A, ita C A, ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, sint recti, & anguli A B D, C A D, ostensi æquales,
c 4. sexti nec non anguli BAD, ACD; Atque idcirco sit c vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; & vt DA, ad AB, ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

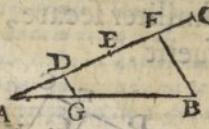
OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcirco BA, mediam esse proportionalē inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod est propositum.

xj. ## PROBL. 1. PROPOS. 9.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

IM-

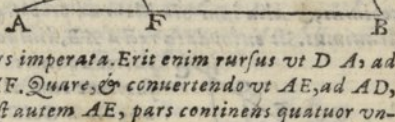
IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, vtcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ A B. Nam cum in triangulo A B F, lateri FB, parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA, ipsius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.



a 2. sexti
b 18. quinti.

SCHOLIVM.

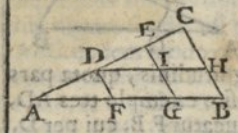
QVOD si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum quæ contineat quatuor vndecimas ipsius AB, sumendæ erunt ex AC, vndecim partes æquales vsque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium. Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus vt D A, ad AE, ita BA, ad AF. Quare, & conuertendo vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes vnam.



PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

DATAM rectam lineam insectam

similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.



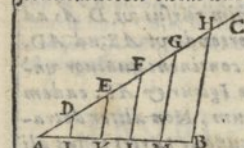
SIT recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungatur datæ duę lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & cõnectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta AC, in D, & E. Nam [a] vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; [b] erit rursus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quòd FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

a 2. sexti

b 2 sexti
c 34. primi.

SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus, & alia iam via idem ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta AB, diuidenda in quinque

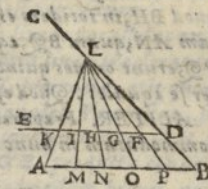


partes æquales. Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunque angulum CAB, sumantur ex ea quinque partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, similiter diuisa, vt AH, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur AH, sit diuisa in quinque partes æquales,

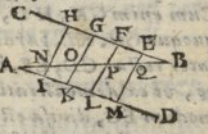
erit

erit & AB, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta AB.

HVIC rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt alia non iniucunda. vt propos. 10 lib. 1. Sunius polliciti, atque ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim rursus data linea recta AB, diuidenda in quinque partes æquales. Ducatur ex B, recta BC, vtcunque faciens angulum cum AB; Deinde ex assumpto puncto D, siue supra B, siue infra, agatur DE parallela ipsi AB, ex qua abscindantur quinque æquales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt si D, est supra B, recta DE, ex quinque partibus æqualibus constans, minor sit, quàm AB, maior verò, si D, existit infra B. Postremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrēs ipsi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur CK, CL, C M, C N, quas dico diuidere rectam AB, in quinque partes æquales. Cum enim D E, sit parallela ipsi AB, diuidentur EH, & AM, in triangulo C A M, proportionaliter, ex scholio propos. 4. huius lib. Cum ergo E H, secta sit bifariam in I, secta quoque erit A M, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta M K, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi ML; & ML, ipsi LK; & LK, ipsi KB, æqualis; ac proinde AB, secta erit in quinque partes æquales. Quod est propositum.



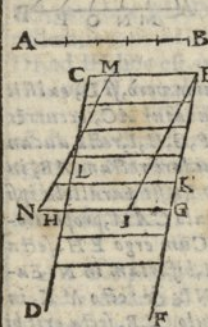
ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ BC, AD, inter se parallelæ; hoc est, constituentes angulos A, B æquales: Et ex BC, abscindātur quatuor partes æquales BF, EF, FG, G H, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex AD, totidem æquales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI, secātibus rectam AB,



in N,O,P,Q, dico ipſam AB, ſectam eſſe in quinque partes æquales. Cum enim æquales ſint, & parallelæ GH, IK, a *erũt & HI, GK, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt GK, FL, EM. Quare cum AM, ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit & AQ, ſimiliter in quatuor partes æquales diuiſa, vt conſtat ex demonſtratione huius 10. propoſ. Eadem ratione diuiſa erit & BN, in quatuor partes æquales, eo quod BH, in totidem eſt partes æquales diuiſa. Quare cum tam AN, quam BQ, æqualis ſit ſingulis partibus NO, OP, PQ; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.*

a 33. primi.

ALITER. Præparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter ſe parallelis vtcunque CD, EF; ex vtraque abſcindantur partes inter ſe æquales quotcunque, ſaltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correſpondentia lineis rectis iungãtur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ CE, vt ex E, transferatur in inſtrumentum ad punctũ I, illius lineæ tranſuerſæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exẽplo eſt recta GH; ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremo ex E, ad I, recta ducatur EI, quam dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cum enim GK, HL, æquales ſint, & parallelæ; b *erunt quoque GH, KL, parallelæ. Eodemque modo omnes lineæ inter rectas CD, EF, inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10. propoſ. liquet, quemadmodum EG, diuiſa eſt quinque partes æquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit EI. Nam ſi punctum E, ſumptum non fuerit idem quod E, vel C, producenda eſt IE, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim vt in hac 10. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ EI, EG, ſimiliter diuiſæ,*



b 33. primi.

Quòd

Quod si forte IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed utrique sit parallela, a erunt singulæ partes rectæ EI, singulis partibus rectæ EG, æquales. ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cum ergo omnes partes rectæ EG, sint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ pertes lineæ EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem, diuisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum. 34. pri.

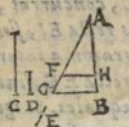
EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extrinstrumentum producere. Vt si eadem linea trasferatur ab M, usque ad N, punctum lineæ GH, protracta, erit quoque MN, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi EG, parallela, usque ad rectam GH: Vel si NM, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod si linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipienda erunt partes parallelarum CD, EF, minores, &c. Si vero linea sit longiuscula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura spatia, uel in triplo plura, uel quadruplo plura, &c. Nã duo, uel tria, uel quatuor spatia, &c. dabunt unam partem. Vt si diuidenda sit in res partes, transferaturq; in sex spatia, dabũt duo spatia unam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia unam partem, propterea quod quinque spatia conficiunt tertiam partem quindecim spatiorũ. Sic si linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spacia, dabunt nouem spatia unam partem; quippe cum nouem spatia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare. quod est eiusmodi.

DATAM rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcumque datam.

SIT secunda recta AB, in duas partes, quæ habeant proportionẽ inter se, quã recta C, & D. Ex A, ducatur linea

SCD LYON 1



AE, faciens angulum A, quemcumque, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, aequalis: Ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB, sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, a cum sit, vt AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB. a 2 sexti

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de ijs, qua vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secẽtur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.



SECENTVR rectæ AB, CD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; item AF, ad FB, vt CH, ad HD. Dico sectiones intermedias EF, GH, proportionales inque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cũ duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cum enim sit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. Item cum sit, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD, erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD, & conuertendo vt FB, ad AB, ita HD, ad CD. Itaque cum sit, vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB ad EB, ita CD, ad GD: b Erit ex aquo, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD, Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conuersionem rationis, vt EB, ad EF, ita CD, ad GH, & dividendo, vt FB, ad EF, ita HD, ad GH, Quod est primum. b 22. 5.

RVRSVS, quia est, vt AE, ad EF, ita CD, ad GD, Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt ostensum est; erit ex aquo, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH, Quod est secundum.

BRE-

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus B C D, vel B A D, iunganturque rectæ D B, H F, G E, Quia igitur ponitur, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D, a *Parallela erit G E, ipsi D B. Rursus, cum ponatur, vt A F, ad F B, ita C H, ad H D;* b *Parallela erit quoque H F, ipsi D B.* c *Quare & G E, H F, inter se parallelæ erunt: Ac propterea erit, vt A E, ad E F, ita C G, ad G H. Quod est secundum.*

a 2 sexti
b 2. sexti
c 30. pri.
d 2 sexti

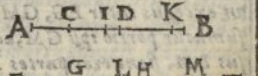
EODEM modo, si puncta extrema B, D conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt B F, ad E F, ita H D, ad G H, & conuertendo, vt E F, ad E B, ita G H, ad H D. Quod est primum.

IDEM verum est, si magnitudines A B, C D, sint diuersæ, vt v. g. A B, superficies, & C D, linea, vel corpus, vt ex priori demonstratione constat.

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmetice proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ eadē inter se, quæ illæ proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.

RECTA linea A B, secta sit in partes A C, C D, D B, Arithmetice proportionales, hoc est habentes eundem excessum: e *Secetur autem recta E F, in partes E G, G H, H F, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmetice esse proportionales. Sit enim C I, ipsi A C, & D K, ipsi C D, æqualis: vt I D, sit excessus inter C D, A C; & K B, excessus inter D B, C D, atque adeo ipsi I D, æqualis. Sit quoque G L, ipsi E G, & H M, ipsi G H, æqualis; vt L H, excessus sit inter G H, E G, & M F, excessus inter H F, &*

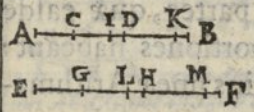


e 10. sex.

GH. pro-

GH. Probandum est, excessus LH, MF, æquales esse. Quoniã igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH, erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF, erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuæ proportionales. Itaque cũ sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL, a erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH. vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM, b erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH. c Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, æqualis. d Igitur & LH, ipsi MF, æqualis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmetice proportioaales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.

a 19. qn.
b 19. qn.
c 11. qn
d 14. qn.



HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ sectæ sint in partes Arithmetice proportionales, partes vnius habere easdẽ proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ EF, secunda pars statuatur GM, ita vt excessus inter EG, GM, sit LM. Deinde ipsi GM, post M, sumatur portio ipsi GM, æqualis, eique adijciatur idẽ excessus LM, fient tres partes Arithmetice proportionales in lineæ EF, & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: d quippe cum minor sit proportio EG, ad GM, quam EG, ad GH, hoc est, quam AB, ad CD.

c 8. qn.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eã dem habeãt proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque ex-

cessus

cessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, ut AC, ad EG, hoc est, ut CI, ad GL, ita CD, ad GH; ostensum est ita quoque esse excessum ID, ad excessum LH, ut CD, ad GH, Itaque si AC, CD, sint dupla, aut dimidiatæ partes ipsarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, uel pars dimidiata ipsius LH, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmetice proportionales secare.

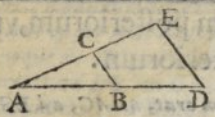
SIT enim recta EF, secanda in tres partes Arithmetice proportionales. Sumantur tres rectæ AC, CD, DB, quomodocunque Arithmetice proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, [a] secetur similiter in G, H, ut AB, in CD, secta est, erunt partes EG, GH, HF. Arithmetice proportionales, ut demonstratum est. [a] 10. sex.

HAEC omnia uera etiam sunt in numeris, & in quibus uis alijs magnitudinibus, cum semper eadē sit demōstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ postremam rationem distribuendi datū numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales. Nā per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habēt proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cum semper fiat ut summa assumptorum numerorū, ad datum numerū, ita singuli numeri assumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuētis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmetice proportionales.

PROBL. 3. PROPOS. 11. X.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, AC, ita dispositæ, vt efficiant angulum

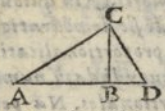


gulum A, quemcunque, fitque inuenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidē AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipſi AC, quæ conſequēs eſſe debet, ſiue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D, parallela DE, occurrens ipſi AC, productæ in E. Dico CE, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt, eſſe vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triāgulo ADE, lateri DE, parallela ſit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipſi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE: quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

a 2. ſexti
b 7. quinti.

SCHOLIVM.

ALITER idem demonſtrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, conſtituantur ad angulum rectum ABC, & coniūgatur recta AC. Producta autem AB, antecedēte, ducatur ex C, ad AC, perpēdicularis CD, occurrēs ipſi AB, productæ in D. Dico BD, eſſe tertiam proportionalē. Cum enim in



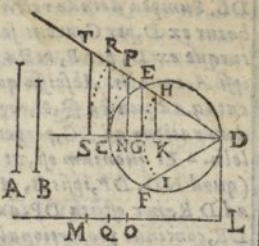
triangulo ACD, angulus ACD ſit rectus, & ab eo ad baſin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propoſ. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc eſt, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD, Quod eſt propoſitum.



INVENTA autem tertia lineæ cōtinue proportionali, ſi primam omiſeris, & alijs duabus tertiā inueneris, habebis quatuor lineas cōtinue proportionales. Vt ſi lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, ſexta, ſeptima, octaua; & ſic in infinitum.

EXPE-

EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio linea A, maioris ad minorem B. Circa rectam C D, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, æquales. Applicenta autem regula punctis E, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus D E, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFG, reliqui arcus C E, C F, æquales erunt.) secabit eadem & rectam ductam E F, bifariam, per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3 ostendimus. a Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si duceretur recta EC, b angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter CD, D G: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipsis CD, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DE, DF, in H, I; applicataq. regula ad puncta H, I; ducatur recta HK; erit D K, quarta proportionalis. Nam propter angulos HDG, IDG, (qui c ob æquales arcus EC, FC, æquales sunt) d arcus HG, IG, æquales erunt; ac propterea, ex scholio propos. 27 lib. 3. recta ducta HI, bifariam secabitur in K; e ideoque & ad angulos rectos. f Parallelæ ergo sunt EG, H K. g Vt igitur recta ED, ad DG, ita erit DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineæ CD, DE, DG, DK, continuè proportionales. Quòd si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, D F, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.



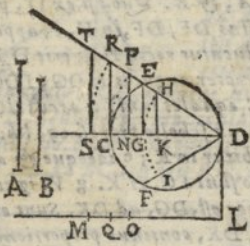
DEINDE sit data proportio linea B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus, abscindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales, applicataque regula ad puncta O, N, ducatur recta N P. h quæ ad DC, perpendicularis erit, i cum sit parallela ipsi

a 3. ter.
b 31. ter
c 27. ter
d 26. ter
e 3. tert.
f 28. pri
g 2. vel 4. sexti.
h 29. pri
i 33. pri

DL. Sumpta deinde recta DC, æquali ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectam NP, in P, extendaturque ex D, per P, recta DPT, eritq. DP, ipsi DC, hoc est, ipsi A, æqualis. Abscissa quoque LQ, ipsi DC, æquali, applicataq. ad puncta Q, C, regula. ducatur recta CR, quæ eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi NP, parallela. a Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipsis B, A, acceptæ sint æquales) ita CD, ad DR, hoc est, ita DP, ad DR; erunt tres rectæ ND, DP, DR, continue proportionales; ideoq. DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & rectæ DS, æqualis auferatur LM, applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit ST, ipsi CR, parallela, & ad DC, perpendicularis. b Quare erit, vt CD, ad DR, hoc est, vt A, ad DR, ita SD, id est, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor lineæ ND, DP, DR, DT, continue proportionales. Quòd si ex D, per T, alius arcus describatur secans rectam DC, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

a 2. vel 4. sexti.

b 2. vel 4. sexti



EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometrice omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsarum iterum atque iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Vt si inter CD, DK, inuenienda sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusq; DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentiæ occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, rectæ DH, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. pro-

pos.

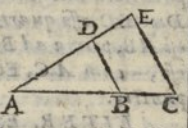
pos. 8. huius lib. [a] *Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continue proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quod si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si vero maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.*

a 2. vel 4. sexti.

PROBL. 4. PROPOS. 12. X.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

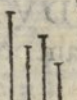
SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidē AB, ad BC, ita AD, ad quartam. Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia vero AD, cum prima AB, faciat angulum A, quēcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; [b] erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



b 2. sext.

SCHOLIVM.

HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim data sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia quælibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem,



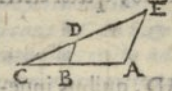
duo-

SCD Lyon 1
Mathématiques
SCD LYON 1

duodecim, &c. quarum bina semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.



SINT tres rectæ AB, EC, CD, oporteat q. inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, vt AB, prima ad BC, secundam. Disponantur prima duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum est, [a] cum AC, EC, proportionaliter secentur in B, & D, punctis.

[a] 2. sex.

ALITER. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima AB, fiat secunda, [b] atque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.

[b] 12. sex

ix.

PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.



SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus de-

scribatur,

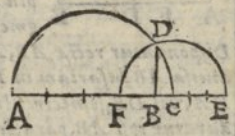
scribatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; [a] erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum. [a] 31. ter.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalem mediam inter AD, & DC: Id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; [b] fiet angulus ABC, rectus. Quare per coroll. propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG, & GC, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur. [b] 31. ter



QVANDO minor data linea est valde exigua, secabit perpendicularis BD, nimis oblique circumferentiam in D. Quare vt exquisitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam BC, quoties libuerit. v.g. sumemus BE, ipsius BC, quadruplam, maiorem vero lineam AB, in tot partes æquales secabimus, quotuplex est BE, ipsius BC: sitq. vna pars BF:



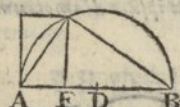


ita vt eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Ac tandem circa EF, circulus describatur secans BD, in D: eritq. BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc scholio demonstrauimus. Dico eandem esse mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim sit vt prima AB, ad secundam BF, ita tertia BE, ad quartam BC; a erit rectangulum sub AB, prima, & BC, quarta, æquale rectangulo sub BF, secunda, & BE, tertia. b Sed hoc æquale est quadrato BD. Igitur & illud. c Quapropter BD, media proportionalis est inter AB, BC. Non autem te moueat, quod citauerimus propos. 16. & 17. huius, quæ nondum sunt demonstratæ: quia hæc demonstratio cum sua constructione differri potest post propos. 17. huius, ita vt nullum periculum sit petitionis principij, vt Philosophi loquuntur.

a 16. sex.
b 17. sex
c 14. sex

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



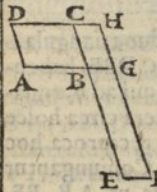
SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit, quam dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad an-

gulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos educta. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget.) à quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [a] *Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, eo quod parallelogrammum sit ACEF; (Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem,* [b] *& AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.*

a 37. primi.
b 28. primi.

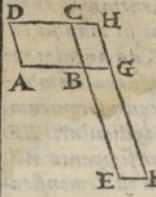
THEOR. 9. PROPOS. 14. xiij.

AEQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt lateca, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex

SCD LYON 1



Proclo demonſtrauimus. Producantur iam DC,& FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma DB,BF: a erit vt DB,ad BH,ita BF,ad idem BH: Sed vt DB,ad BH, b ita eſt AB, baſis ad baſin BG, quod parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter vt BF,ad BH, ita eſt baſis EB,ad baſin BC. Igitur vt AB,ad BG, ita eſt EB,ad BC. Quod eſt propoſitũ

a 7. quin
b 1. ſext.

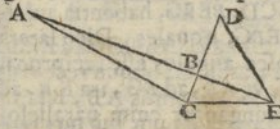
E CONTRARIO ſint iam latera circa æquales angulos ABC,EBG, reciproca, hoc eſt, vt AB,ad BG, ita EB,ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, vt AB, ad BG, ita EB,ad BC: c Vt autem AB,ad BG, ita DB,ad BH; & vt EB,ad BC, ita BF,ad idem BH; erit quoque vt DB, ad BH, ita BF, ad idẽ BH. d Atq. idcirco æqualia erunt parallelogrãma DB, BF. Aequalium igitur,& vnũ vni æqualem habentiũ angulum, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 1. ſex.
d 9. q̃n.

xiiij.

THEOR. 10. PROPOS 15.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnũ angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.



SINT duo triangula æqualia ABC, DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, DBE, ſint æquales; erunt & DB, BC, vna recta

linea,

linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triangula ABC, DBE,[a] erit vt ABC, ad BCE, ita DBE. ad idē BCE, Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, b ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, ad BCE, ita est basis D B, ad BC. Quare vt A B, ad B E, ita est D B, ad B C. Quod est propositum.

[a] 7. ḡn.
[b] 1. sexti

IAM vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autem AB, ad BE, c ita triangulum A B C, ad triangulum BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulū idem BCE; Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, d propter eaque æqualia erunt triangula ABC, DBE. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 1. sexti
[d] 9. ḡn.

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectāgulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

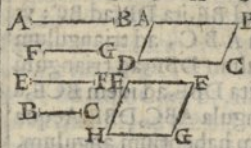
SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis A B, B C; rectangulum vero E F G H, comprehensum sub medijs E F, F G: Dico rectangula A C, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales an-

SCD LYON 1

a 14. sex. gulos B, & F, reciproca. a Quare parallelogramma AC, EG, æqualia erunt. Quod est propositum.

CONTRA vero, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB, FG, EF, BC, esse proportionales, hoc est, esse vt AB, ad FG, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, EG, habeantque angu-
b 14. sex. los æquales, nempe rectos B, & F, b erunt latera circa, hosce angulos reciproca; sicut quidem AB, ad FG, ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

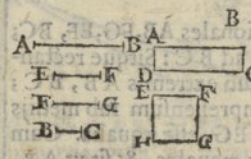
SCHOLIVM



IDEM verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, nõ sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehẽsi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadẽ enim prorsus est demonstratio.

xvj. THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales: vt quidem AB, ad EF, ita EF, ad BC: sitque rectangulum ABCD, contentum sub extremis AB, BC, & quadratũ mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia

esse

esse rectangulum AC, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum E G, comprehensum sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. [a] Quare rectangulum A C, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso: Quod est propositum. [a] 16. sexti.

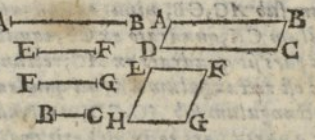
SED sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; [b] erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: [c] Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineę sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum, [b] 16. sex. [c] 7. anti

COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æqua'e. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare E F, media est proportionalis inter AB, & BC.

SCHOLIVM.

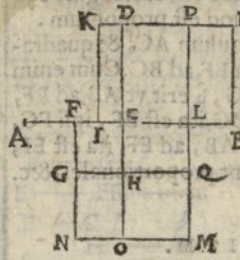
EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt EG, sit Rhombus, & AC, Rhomboides.



Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcũque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales.



SIT recta A B, diuisa in C, vtcunque, oporteatque partem C B, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continue proportionales sint. Secetur A C, bifariam in F, & F C, iterum bifariam in I, ut C I, quarta pars sit primæ partis AC; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, I K, primæ parti A C, æquales, ducaturque recta EK, ita ut rectangulum IE, cõprehensum sit sub AC, prima parte, & recta IE, composita ex altera parte BC. & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB, a erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato ex CF, æquale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectãgulo sub A B, BC, una cum quadrato ex CF (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum C E, contentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, æquale, cum vtrumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulũ quidem CK, b quia sic est rectangulum CK, ad quadratũm ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, ut CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; At uero quadratum ex CF, quarta pars est eiusdẽ quadrati ex AC, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quo que erit quadrato ex BF. Si igitur c fiat quadratũ rectãgulo IE, æquale, erit eius latus minus recta F B, maius autem quã FC, quippe cum quadratum ex FC, æquale sit ostensum rectangulo C k, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo

a 6. secũdi.

b 1. sexti

c 14. secundi.

latus

latus illud F L. Dico partem C B, ita sectam esse in L, ut tres partes AC, CL, LB, sint continue proportionales. Describatur enim ex FL, quadratum FM, rectaque DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P: sumptisque duabus FG, IQ, ipsi CF, æqualibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Erit ergo CG, quadratum rectæ CF, ob æqualitatem rectarũ CF, FG. Et quia ablatis æqualibus FC, FG, ex æqualibus FL, FN, reliquæ CL, GN, æquales sunt; a & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, æqualis; æquales quoque erunt H Q, HO; ideoque HM, quadratum erit rectæ CL. Rursus quia tam rectangulum CQ, comprehenditur sub CL, & CH, siue CF, semissi ipsius AC, quàm rectangulum GO, sub GN, siue CL, & GH, siue CF, semisse eiusdem AC, siue CD; b erunt duo rectangula CQ, GO, simul æqualia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL, & CD, quæ ipsis CH, GH, simul æqualis est. Itaque cum rectangulum IE, quadrato FM, æquale sit; & rectangulum CK, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, siue AC, & BL, reliquo quadrato HM, æquale. Quocirca, cum datis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis AC, BL, comprehẽsum æquale sit quadrato HM, mediæ CL; c erunt ipsa tres lineæ AC, CL, LB, continue proportionales. Quod est propositum.

a 34. primi.

b 1. secũdi.

c 17. sexti.

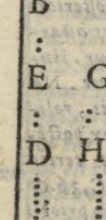
IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adiyciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nã si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adiyciemus C I, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet IB, in priorem partem 36. siue in lineã AC, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea F L, ex qua si detrahemus C F, semissem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars C L, 24. Hæc ablata ex

tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continue proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmeticæ proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienum erit a nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino differere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunque Medietatis, siue Arithmeticæ, siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT datæ duæ rectæ AB, & C, (quæ per vnitates in longum dispositas hic repræsentantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB. abscindatur alia æqualis AD. Diuiso autē segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmeticè proportionalem inter AB, & C, Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH, siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquido constat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis constatæ. Cum enim tam AD, quam C,

ipsi

ipsi FH, sit æqualis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH, dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. a Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum. a 1. 9nti

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, æqualis: & ipsi FH ponatur æqualis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit. n. AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, æquales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura datæ duæ rectæ C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, æqualis, eique addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, æqualis. Dico AB, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmetice. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cum ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint æquales, patet propositum.

ITA QVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmetice, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

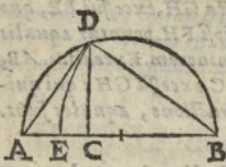
SCD LYON 1

SI vero ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adiiciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SINT datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometrice proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secãs AB, in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica: Ductis enim rectis AD, BD; [a] *erit angulus ABD, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. recta BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.*

[a] 31. *tertij.*

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ AB, BE, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometrice proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; [b] *erit*

[b] 21. *ter.*

angu-

angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.

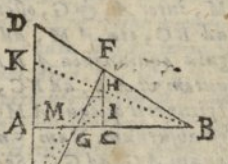
VI.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ CB, BE, eundem terminum B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometrice proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, secans BE, productam in A, Dico AB, tertiam proportionalem esse ipsis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BD, hoc est, BE, ipsi æqualis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.



SINT datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, possidētes, inter quas inuenienda sit media Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad AB, perpēdiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantacunque. Excitetur quoque ex C, ad AB, perpendicularis CF, secans ductam rectam BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse me-

diam

diam Harmonice proportionalem inter AB, BC, Hoc est, esse AB, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primam AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. a Quoniam enim CF, parallela est ipsi DE, ob rectos angulos A, C, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinem triangulorum AEG, CFG, b erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; & permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem vt AE, ad CF, ita AB, ad BC. Igitur erit quoque AB. ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.

a 28. 4n.

b 4 sexti



NON determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem media BG, inuenietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL. Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G, ostendemus eodem modo. esse vt AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triangula æquiangula ALM, MHC, si recta est HML. Est autem vt AB, ad BC, ita AG, ad GC, vt ostensum est. Igitur erit quoque AM, ad MC, vt AG, ad AC, quod est absurdum. Nam c minor est proportio AM, ad GC, quam AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, quam ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quam AG, ad GC, Non ergo ita est AM, ad MC, vt AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transit

c 8. quinti.

igitur

igitur per G: atque idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK, AL, æquales.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura data recta A B, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonice proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur æquales AD, AE, quantacunque: iuncta autem recta BD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico B C, ipsis AB, BG, esse Harmonice proportionalem, Hoc est, esse AB, primam ad BC, tertiam, vt est AG, excessus inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunque sumantur siue maiores. siue minores. eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LG, quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I, ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AK, ad CH, hoc est, ita AL, ad CH. Vt autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoque vt AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum ALG, CIG, a est vt AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, vt AL, ad CI, ita AG, ad GC. Cum ergo ostensum sit esse vt AG, ad GC, ita AL, ad CH, erit AL, ad CH, vt ad CI. b Æquales sunt igitur CH, CI, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis

a 4. sexti

b 9. 2. n.

HC,

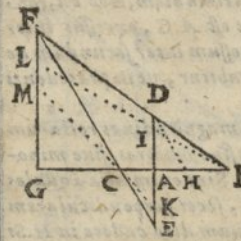
HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonice.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonice proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC; sit autem AB, prima maior quàm AG, excessus inter
a 14. 5. *primam AB, & mediam BG; a erit quoque BC, tertia maior quàm GC, excessus inter medium BG, & minimam BC.*

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

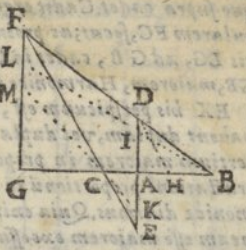
SINT data rectæ AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantacunque, ducaturque recta BD, quæ productam secet EC, producta in F, puncto, (quod autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonice proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, excessum inter primam GB, & mediam



BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA.
b 28. primi. *b Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit vt GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, vt GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC,*
c 4. sexti *c erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt GB, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessus inter primam GB, & mediam BC, ad CA,*

exces-

excessum inter mediam BC, & tertiam BA, Quod est, propositum.



QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, siue minima, maior erit BA. tertia quam CA, excessus, quo media BC, minimam BA, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quam AC, non posset reperiri tertia maior; cum ea inuenta, semper demonstraretur tertia AB, maior excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, æqualis, connectaturq; recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, vtpote rectos, siue ad verticem A; a erunt & anguli ACE, AHD, æquales: qui cum alterni sint; b erunt rectæ EC, HD, parallelæ; c ac proinde anguli interni DHC, HCF, duobus rectis æquales erunt. Cum ergo d angulus DHC, maior sit interno angulo B, erunt duo anguli BCF, CBF, duobus rectis minores. e Quocirca BD, EC, coibunt est propositum.

a 4. pri.
b 27. pr.
c 29. pr.
d 16. pri.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BG, reperietur. Sint enim aliæ æquales AI, AK: Ducta autem recta BI, quæ producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur KC, quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M, ostendemus eodem modo, esse vt GB, ad BA, ita GL, ad AI, id est, ad AK. Vt autem GB, ad BA, ita erat GC, ad CA. Erit igitur, vt GC ad CA, ita GL, ad AK. Et quia, si recta linea est KCM, ob similitudinem triangulorum GMC, AKC f est vt GM, ad GC, ita KA, ad AC, erit permutando, vt GM, ad KA, ita GC, ad CA. Cum ergo ostensum sit, esse vt GL, ad AK, ita GC, ad CA, erit quoque GM, ad AK, vt GL, ad AK. g Æquales sunt igitur GM, GL, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo cadet KC, infra L: eademque ratione ne-

e 13. pro.
f 4 sexti.
g 9. quinti.

que supra cadet. Cadit ergo in L, vbi BI, producta perpendicularem FC, secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis LG, ad GB, cadet in G, exhibebitque eandem tertiam GB, maiorem, Harmonice proportionalem.

EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionẽ habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionũ in 3. regula proportionalitatis Harmonica diximus. Quia enim ostendimus, BA, minimam lineam esse maiorem excessu AC, quo media BC, minimam AB, superat; erit AB, maior semisse ipsius BC; ac proinde BC. ad AB, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod si BC, ad AB, esset dupla, vel maior quam dupla, esset AB, vel æqualis ipsi AC, vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate: quia EC, cum BD, non coiret.

SED demonstremus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonica in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5. explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ea ex lib 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

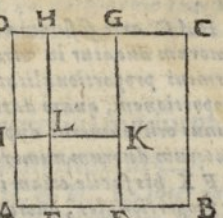
X.

EX datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi eãdem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.

EX qualibet recta AB, describatur quadratũ ABCD, Sumptisque duabus partibus æqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipsis AD, BC, parallelæ. Item sumpta recta AI, æquali ipsi BE, vel EF, agatur IK, ipsis AB, DC, parallela secans FH, in L. Erit rectangulum AG, con-

tentum

tentum sub AB, (id est, sub summa rectarum AE, EB; [a] cũ EG, sit ipsi BC, ideoq; ipsi AB, æqualis) & AE (maiore scilicet parte summæ AB.) Rectangulum vero EG, continebitur sub AB, (hoc est, sub eadẽ summa rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiusdem summæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quam GL, sub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quod AI, sumpta est ipsi EB, æqualis; & HL, LK, ipsis AE, EB, æquales. [b] Cum enim FH, ipsi AD, hoc est, ipsi AB; & FL, ipsi AI, hoc est, ipsi EB, sit æqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, æqualis: at [c] KL, ipsi EF, siue ipsi EB, æqualis est. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, simul continere duplũ eius, quod sub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & summam duorũ rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, constituere proportionalitatẽ Harmonicã: hoc est, vt est AG, primum, ad EC, tertium, ita esse IH, excessum inter primum AG, & secundum HLI AEG, ad AL, excessum inter secundum HLI AEG, & tertium EC, siue FG, [d] quod ipsi EC, æquale est. Nam cum HL, ipsi AE; & LF, ipsi EB, æqualis sit, vt ostendimus; [e] erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, [f] ita est AG, ad EC: Et vt HL, ad LF, ita est HI, ad AL. Igitur erit quoque AG, primum ad EC, tertium, vt HI, excessus inter primum ac medium, ad AL, excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.



ITA QVE si AE, ponatur 6. & EB, 4. erit summa AB, 10. quam si ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autẽ eius, quod fit ex AE, in EB, hoc est, HLI AEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonice proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrumque 6. 4. produxerit extremos 60. 40. [g] erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. [h] Est enim AG, id

[a] 34. pri
[b] 34. primi.
[c] 34. primi.
[d] 36. pri
[e] 7. qnti
[f] 1. sexti
[g] 17. septimi.
[h] 1. sexti

est, 60. ad EC, id est, ad 40. vt AE, id est, 6. ad EB, id est, ad 4.

HAC arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumque seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicæ eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

FX his facile etiam inueniemus tres numeros harmonice proportionales, quorum extremi proportionem habeant datã, & medius sit dato numero æqualis. Vt si extremi debeant habere proportionem quintuplam, mediusq; sit 30. sumendi sunt 5. & 1. in data proportione, & eorum summa 6. in vtrumque ducenda, vt fiant 30. & 6. inter quos statuatur medius 10. qui duplus est productí ex multiplicatione datorum numerorum 5. & 1. vnius in alterum: eruntq; 30. 10. 6. harmonice proportionales, vt dictum est. Deinde datus medius 30. diuidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3. per tres inuentos 30. 10. 6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæsiti 90. 30. 18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmetice proportionalis, 5. nimirum semissis eorũ summæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producũt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonice proportionales. Quoniã enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorũ numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, vt perspicuũ est: erit quoque tam excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quàm excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. et 20. vt ad propos. 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonice proportionales, vt in præcedenti problemate demõstrauimus; erunt quoque eorũ semisses, 30 24. 20.

60. 48. 40.
30. 24. 20.

eadem

a easdem habentes proportiones, Harmonice proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorum 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est. a 15. q̃n.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonice. Dematur ex maiore AB, 15 numerus BD, minori BC, 10. æqualis,

A ... E .. D ..... B C

& reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10. productusque numerus 50. diuisus per AC, 25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem DE, 2. qui additus minori BD, 10. faciat DE, 12. Dico BE, esse medium proportionalem Harmonice inter AB, BC, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit, diuiso per AC, Quotiens est DE; producetur idem numerus diuisus ex DE, Quotiente in diuisorem AC, vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum, qui ex BC, vel BD, secundo, in AD, tertium; b erit AC, primus ad BC, secundum, vt AD, tertius ad DE, quartum: Et diuidendo, AB, ad BC, primus datus ad tertium datum, vt AE, excessus inter primum AB, & medium inuentum, BE, ad DE, excessum inter medium BE, & BD, siue tertium BC. Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum. b 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si differentia datorum numerorum ducatur in minorẽ, numerusq; productus diuidatur per datorũ numerorũ summã, ac deniq; Quotiẽs minori adijciatur, cõflabitur medius terminus Harmonicæ proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris; minorem

extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12. quibus inueniẽdus est minor Harmonice proportionalis. Addatur BD,

A.,..... E .. C ... B ... D

æqualis i psi BC, excessui inter data numeros. Per hanc summam AD, 18. collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato AC, in BC, differentiam datorum numerorum; et Quotiens CE, ex minore dato AC, detrahatur. Dico reliquum AE, 10. esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BC, fit, diuiso per AD, Quotiens est CE. producetur idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex AD, primo, in CE, quartum, qui ex

A ..... E .. C ... B ... D

219. sept. vel 16. sexti. *BC, secundo in AC, tertium; a erit AD, primus ad BC, secundum, hoc est, ad BD, vt AC, tertius ad CE, quartum. Et diuidendo, AB, ad BD, hoc est ad BC, vt AE, ad CE: Et permutando, AB, primus datus ad AE, tertium inuentũ, vt BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter mediũ AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, id est 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectã diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorũ numerorũ procreatus, Quotiensq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AB, 15. & AC, 12.

quibus

SCD LYON 1

quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Maiori AB, addatur BD, æqualis differentiæ BC, 3. datorum

A ..... E .. C ... B ... D

numerorum. Et per summam AD, 18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitque Quotiens AE, 10. Dico AE, minorem extremũ esse in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diuiso per AD, Quotiens fit AE, producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus sit ex AD, primo in AE, quartum, qui AB, secundo in AC, tertium; a19. sept. vel 16. sexti.
erit AD, primus ad AB, secundum vt AC, tertius ad AE, quartum; ac proinde cum AD, maior sit, quam AB, erit quoque AC, maior quam AE. Quare erit & diuidendo BD, id est, BC, ad AB, vt CE, ad AE: Et cõuertendo AB, ad BC, vt AE, ad CE; Et permutando AB, primus ad AE, tertium inuentum, vt BC, excessus inter primũ AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc est, 15, 12. 10. Harmonice proportionales. Quod erat propositum.

ITA QVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorũ inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri AB, 10. & AC, 12. quibus inueniẽdus sit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore

A.....D .. B .. C ... E

AB, detrahatur BD, æqualis differentiæ BC, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero AC, 12. in differentiam datorum numerorum BC, 2. vel BD. Quotiens autem CE, 3. maiori numero AC, 12 adijciatur. Dico summum AE, 15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros AE. AC, AB, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonice proportionales. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BD, fit, diuiso per AD, Quotiens fit CE, producetur idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato. Quia igitur idē numerus gignitur ex AC, primo in BD, quartum, qui ex CE, secundo in AD, tertium, a erit AC, primus ad CE, secundum, vt AD, tertius ad BD, quartum: Et componendo AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC: Et permutādo AE, primus ad AB, tertiū, vt CE, excessus inter primū AE, & mediū AC, ad excessum BC, inter medium AC, et tertium AB. Sunt ergo tres numeri AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.

219. sep. vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensque maiori numero adijciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri AB, 10 & AC, 12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, demātur BD, æqualis excessui BC, datorum numerorum: Et per reliquū numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB, 10. & AC, 12. procreatus, Quotiensque sit AE, 15. Dico AE, esse terminum maiorem in proportionalitate Har-

A..... D .. B .. C ... E

monica. Quoniam enim numero, qui fit ex AB, in AC, di-

uiso

uiso per AD, Quotiens est AE, producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiẽte in diuisorem AD, ex defin. Diuisionis. Quia igitur idẽ numerus gignitur ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, secundo in AE, tertium; a erit AB, primus ad AD, secundum, vt AE, tertius ad AC, quartum; ac proinde cum AB, maior sit quam AD, erit & AE, maior quam AC. Et cum sit, vt AE, ad AC. ita AB, ad AD, erit per cõuersionem rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC. Et permutando AE, primus inuentus ad AB, tertiũ, vt CE, excessus inter primũ AE, & mediũ AC, ad BC, excessum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 15. AC, 12. AB, 10. Harmonice proportionales sunt. Quod est propositum.

a 19. sep. vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo præxes illas demonstrare, quibus ad finẽ tractationis proportionũ ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, et Arithmeticam, & Harmonicam oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac sũma conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometrice proportionales.

SINT

SINT tres termini continue proportionales Geometrice, A, B, C: sitque D, summa ex A. semel, & B. bis, & C. semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac denique

A, 1.	*B*, 1.	*C*, 1.	*A*, 12.	*B*, 6.	*C*, 3.
D, 4.	*E*, 2.	*F*, 1.	*D*, 27.	*E*, 6.	*F*, 3.

F, ipsi C, aqualis. Dico D, E, F, Geometrice quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoque
12. 2. *componendo A, B, simul ad B, vt B C, simul ad C.* 2 *Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, aqualis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometrice sunt proportionales. Quod est propositum.*

HINC manifestum est, si termini A, B, C, sint aquales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quòd E, ipsis B, C; & F, ipsi C, sit aqualis. Cum ergo D, E, F, sint continue proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini aquales A, B, C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quòd F, aqualis est ipsi C, hoc est, vnitati.

A.	*B.*	*C.*
4.	2.	1.
D.	*E.*	*F.*
9.	3.	1.

SI vero A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitum.

A.	*B.*	*C.*
1.	2.	4.
D.	*E.*	*F.*
9.	6.	4.

A.T si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesqui-

altera.

altera. Eodem modo, si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, et insuper eius partem tertiã: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus recte esse præscriptas in tractatione proportionum. Item recte quamcumque proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.

A. B. C.
1. 3. 9.

D. E. F.
16. 12. 9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus; Sũma ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac sũma ex primo, secũdo, & tertio semel cõflata: ac deniq; tertius semel, sũt Arithmetice proportionales.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At

A, 1. *B*, 1. *C*, 1. *A*, 12. *B*, 6. *C*, 3.

D, 5. *E*, 3. *F*, 1. *D*, 39. *E*, 21. *F*, 3.

E, summa conflata ex A, B, C, semel: At denique F, ipsi C, æqualis. Dico D, E, F, esse Arithmetice proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto. Item summa ex

A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatē constituent, Quod est propositū.

A. B. C.
3. 20. 1.
D. E. F.
47. 24. 1.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonice proportionales sunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5, vt A, bis ad B, ita B, bis, ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C. a *Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est*

A, 1. *B*, 1. *C*, 1. *A*, 12. *B*, 6. *C*, 3.
D, 6. *E*, 3. *F*, 2. *D*, 45. *E*, 15. *F*, 9.

a 12. gn.

autem

SCD LYON 1

autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoq. D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquido constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex mini-

A, 9. B, 6. C, 4. | A, 1. B, 4. C, 16. | A, 9. B, 12. C, 16.

D, 40. E, 16. F, 10. | D, 30. E, 24. F, 20. | D, 70. E, 40. F, 28.

mis terminis proportionis sesquialterę, & in secundo ex minimis terminis subquadruplę proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertię proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonicę procreabuntur, vt hæc exemplа demonstrant.

A, 4. B, 6. C, 9. | A, 16. B, 4. C, 1. | A, 16. B, 12. C, 9.

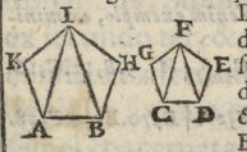
D, 35. E, 21. F, 15. | D, 45. E, 9. F, 5. | D, 77. E, 33. F, 21.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

SIT

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cũ æquales sint duobus angulis FCD, FDC, [a] qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritq. reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo DFE, angulus BIH: Et [c] quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; ac proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritq. eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Preterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: [d] Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterq. positum. Cum enim angulus IAB. constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt constat ex constructione; cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHLK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero [e] ita est AB, ad BI, vt CD, ad



a 17. pri
b 32. pri
c 17. pri
d 17. pri
4. sext.

DF,

DF: & ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: [a] erit ex æquo ita AB, ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH, CDE, proportionalia sunt, [b] quemadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI, DEF. [c] Rursus ita est HI, ad IB, vt EF, ad FD: & ita IB, ad IA, vt FD, ad ad FC: & ita IA, ad IK, vt FC, ad FG. [d] Igitur ex æquo erit ita HI, ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK, EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cum sint æquiangula, habeantq. latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq. descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterq. positum rectilineum describimus, Quod faciendum erat.

a 22. qn

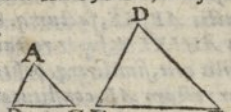
b 4. sext.

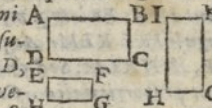
c 4. sex.

d 22. qn

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC, DEF, non solũ erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta, si anguli B, C, æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC, DE, non dicentur similiter esse descripta, (quamquam similia sint.) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At vero rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.

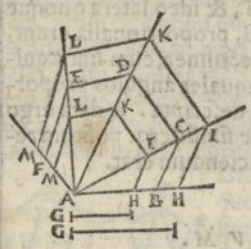




CAE-

CAETERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super qualibet earum latera.

FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterque positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, vlterius producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per H, agatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF, factumq. erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterq. posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AB, constitutæ. Cum enim angulus HAM, sit communis; & angulis ABC, AFE, [a] æquales sint anguli AHI, AML; Item angulis ACB, ACD, æquales sint anguli AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemq. modo angulis CDE, DEF, æquales sint anguli IKL, KLM: Æquiangula erunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, [b] vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, vt BC, ad CA, ita HI, ad IA. Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: ac proinde ex æquo, vt BC, ad



[a] 29. pri

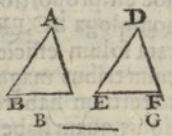
[b] 4. sex.

CD,

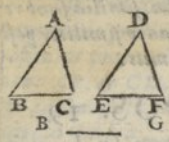
CD, ita HI, ad IK. &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea, quæ proxime hoc scholio scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

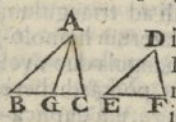
SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.



SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, vel AB, & DE, vel AC, & DF: Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG: ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defin. 10 lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF: proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterq. positas, habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, a quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, 26. pri



quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: Proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundã,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus EF. Quod est propositum.



a 11. *sex* SIT deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, [a] abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturq. recta AG. Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt A B, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem B C, ad E F, ita est per b 11. *qn* constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, [b] ita erit E F, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, c 15. *sex* [c] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum A B C, ad d 7. *qn.* triangulum DEF, [d] ita erit idem triangulũ ABC, ad triangulum A B G. Vt autem triangulum A B C, ad e 1. *sex.* triangulum ABG, eiusdem altitudinis, [e] ita est basis B C, ad basin BG. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum

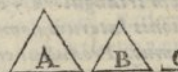
ABC,

ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam ddscriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. [a] *Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam rectæ A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.*



a 19. sex

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterq. posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, rectæ B, ad rectam A. [b] *Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.*

b 19 sex

SCHOLIVM.

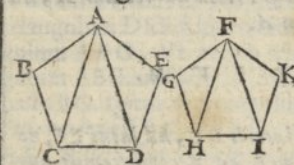
ITAQVE si propotio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulũ DEF. Si enim propor-

tio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum* $1\frac{1}{5}$. *in se multiplicemus. Productus enim numerus* $\frac{3}{2}\frac{6}{5}$. *id est,* $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *erit denominator proportionis, qua duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.*

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata est.

xviij. THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona

diuidi

diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis. n. BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Itē angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: [b] Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erunt: Eadem ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde [c] quia est vt AC, ad CB, ita FH, ad HG. ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: [d] erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. [e] Quare triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint.

a 6. sexti

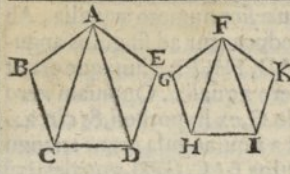
b 4. sexti

c 4. sexti

d 22. gn.

e 6. sexti

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, [f] erit eorū proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt

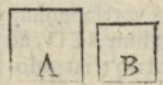


a 12. *qn.* igitur proportionalia triangula vnius polygoni cũ triãgulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedẽtia, & triãgula alterius consequentia proportionũ. Vt aũt vnũ antecedẽs ad vnũ cõsequẽs, ita sunt omnia antecedentia ad oĩa cõsequentia. Igitur vt quodlibet triangulũ vnius polygoni ad sibi respondẽs triangulum alterius, ita erit totum polygonũ ad totũ polygonũ; ideoq; triãgula homologa erũt totis polygonis.

DICO postremo, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cum proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG. dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG.

b 19. *sexti.* Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE. ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, b habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiã inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentã. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandũ erat.

COROLLARIVM.



HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundã simile similiterq; descriptũ: Vel ita esse polygonum super secundã descriptũ ad polygonũ super tertiam simile similiterq; descriptum.

HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quã ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo

theore-

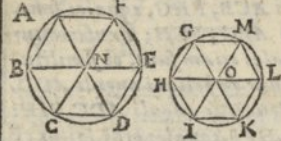
theoremate. Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triãgula media ACD, FHI. similia esse. Quoniã anguli ACB, FHG, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademq; rõne æquales ostendẽtur anguli ADC, FIH: ac propterea a & reliqui CAD, HFI, æquales erũt. Igitur cũ æquiangula sint triangula ACD, FHI, b habebũt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt. a 32. primi b 4. sexti.

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest æqualis angulo FIH; quod tunc alia adhuc triangula supersint vsque ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse AC, ad CB, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoque cum anguli ACD, FHI, sint æquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cum omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuũ est. Nam si triangula ADE, FIK, nõ essent vltima, demonstrarẽtur similia hoc modo. Quoniã est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinẽ triangulorũ ACD, FHI: Itẽ vt DC, ad DE, ita IH, ad b IK, ob similitudinẽ polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angulo HIK: Est autẽ & ablatus ADC, ostẽsus ablato FIH, æqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. c Quare triangula ADE, FIK, similia erunt, cũ habeant latera circa æquales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atque ita deinceps, si fuerint plura triangula. c 6. sexti.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis e centris circulorũ ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circũscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, et homologa totis polygonis. Quoniã enim anguli CND, IOK, æquales sunt; (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus, a ipsi inter se æquales erunt: eademque ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vtrobique sit proportio æqualitatis; b Similia erũt triangula NCD, OIK. Eademque est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, vt patet, c habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem.



a 27 ter tij.

b 6. sexti

c 15. qn.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum.

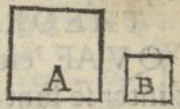
SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt conflat ex defin. 1. huius lib. erit, per hãc

propos.

SCD LYON 1

propos. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cum inter se proportionem habeant duplã; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt hic apparet. 1. 2. 4.



SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cum enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, vt dictum est; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in exemplo adducto superius apparet.

ITA QVE si proportio lateris AB, ad latus FG, in polygonis, quæ in propos. descripsimus, nota sit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoscemus quoque ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonstratumque est hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatã proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$ in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{2}{1}\frac{5}{6}$. id est, $1\frac{9}{1}\frac{}{6}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cum hæc sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

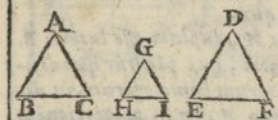
SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cũ hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam

quia

quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

xx. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.



SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis eiusdem rectilinei GHI; [a] erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circũ æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

a 1. pron.

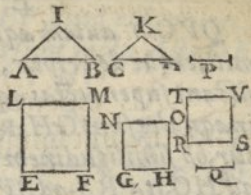
b 11. gn.

xxj. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT

SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunq; rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunque, rectilinea similia similiterque descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. a Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. b eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. c Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.



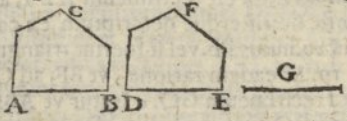
a 11. sex.
b 22. qn.
c 11. qn.

DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, vt quidē AB, ad CD, ita EF, ad GH. d Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quā describatur rectilineū RSVT, simile rectilineo EM, similiterque positum; e & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. f Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO; g Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, vt mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. h Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. i Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

d 12. sex.
e 21. sex.
f 11. qn
g 9. qnti
h 7. quinti.
i 11. qn.

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si.n. inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quam RS,[a] erit quoque HO, maior quã SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsũ possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sũt rectæ GH, RS, Quod est propositũ.



ALITER.

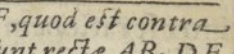
Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sũt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quã DE, inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G, Est autem AB, maior, quam DE, Erit quoque DE, maior, quam G, ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod est absurdũ, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus

ostẽ-

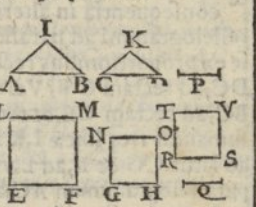
ostenderetur rectilineo DEF, quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immo idem; manifestum est, quod proponitur.



BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO, a Cum enim sit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD. Item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH, erunt proportiones ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB, ad CD, & EF, ad GH. Quod est primum.



a 19. vel 20. sexti

PONATVR deinde esse vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. b Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD: Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD, & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod est secundum.

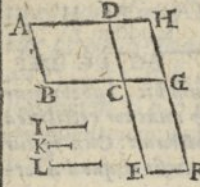
b 19. vel 20. sexti

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiiij.

AEQVIANGVLA parallelogramma

ribus

inter se rationem habent eam, quæ ex lateteribus componitur.



SINT parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem; ita vt antecedentia proportionum sint in vno Parallelogrāmo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrāmum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etia m ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectę DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallegrammum CF, dici compositam esse ex eisdē proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG, efficiant vnā lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG, sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea. vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunque, [a] inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, [b] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH, Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K, [c] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumento ostendes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [d] ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad

[a] 12. sex
[b] 1. sexti
[c] 11. qn
[d] 1. sexti

CE, erit

CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: [a] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus cõponetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant unam rectam lineã, &c. Aequiangula itaq; parallelogrãma inter se rationẽ habent, &c. Quod erat ostendendũ. a 22. 6n.

SCHOLIVM.

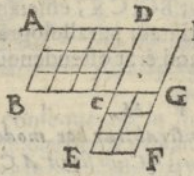
EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [b] Cum sit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG, & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE; Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad CH & CH, ad CF; componetur quoque eadẽ proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG. & DC, ad CE, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum. b 1. sexti

HANC porro propos. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propos. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ sint in numeris, veniemus quoque ex hac propos. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterũ, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, [c] quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdẽ proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorũ denominabitur à $1\frac{2}{5}\frac{2}{5}$. Continuabitur aũt dua data proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propos. 4. lib. 8. c 23. sex.

demon-

demonstrantur, vel certe hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturque numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo habebunt tres numeri habentes duas illas proportiones, 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quod si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{5}{7}\frac{5}{7}$. & alij duo numeri per denominatorē 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eisdem proportionibus.



SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 22. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem, habeat duplam, at DC. ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF; solum 6. atque adeo parallelogrmmum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione composita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. quæ maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominator sit $1\frac{2}{5}\frac{2}{5}$. In posteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod iidem interpretes negant. In exemplo namque

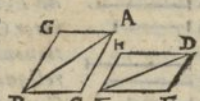
priori

priori proportio lateris DC, ad CE, est minoris inæqualitatis, in posteriori vero, æqualitatis. Sed hac de re plura scribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionũ pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.



SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; [a] atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis, [b] quorum sunt dimidia, [c] eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, cõposita ex proportionibus laterũ BC, AC, ad latera EF, DF.

[a] 23. sexti.
[b] 34. primi.
[c] 15. 4n.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitæ. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere. [d] Fiat vt A, ad B, ita G, ad

[d] 12. sex.



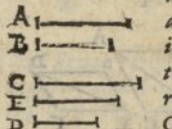
H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quòd his illa sumpta sint æquales.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT proportio A, ad B, minor auferẽda ex proportione maiore C, ad D. a *Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si propertio C, ad E, hoc est, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

a 12. sexti.



VERVM hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio proprie, quia alias totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

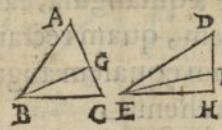
IIII.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad trian-

gulum

gulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulũ sub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpẽdicularibus BG, EH; erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, vt constat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, sint æquales. a Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autẽ GB, ad BA, b ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF. c Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, d ita est triangulum ABC, ad triangulũ DEF, e quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases AC, DF, altitudinesque easdem BG, EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.



a 4. sexti
b 1 sex.
c 11. qn.
d 15. qn.
e 41. primi.

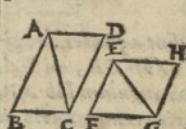
ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius scholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: f Sed & proportio rectanguli sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, quod est propositum.

f 23. sexti.

V.

PARALLELOGRAMMA inter

se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.



SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulũ sub AB, BC, ad rectangulũ sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendant; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectãgulum sub AB, a15.qn. *BC, ad rectangulum sub EF, FG.* a *Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG:* b *quòd hæc ipsorum sint dimidia;* c *Erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.*

b34.primi, c11.qn.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinẽ DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M; Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi d7.quinti, e1.sexti *N, æqualis, quòd & AI, ipsi DK, æqualis ponatur:* d *Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt BC, ad EF.* e *At*

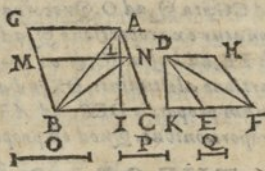
vero,

vero, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. [a] Igitur quoque erit, vt L, ad N, ita triangulũ ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, cõposita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.



[a] 11. qn.

SINT iam altitudines AI, DK, inaquales, & AI, maior; bases vero BC, FF, vel aequales, vel etiam inaquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, aequali ipsi DK; ducatur per L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturque recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, aequalem, hoc est, vt O, ad P, per ea, qua ad 1. propos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quòd triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, [b] ita est basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q: [b] erit ex aquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis EC, ad basin FF: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelo-



[b] 1. sexti
[c] 22. qn.

grammi CG, ad parallelogrammū EH. Quod est propositū.

EODEM pacto ostendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor est, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, composita esse ex proportione basis EF, ad basin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant,
21. sexti vt prius; a erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, ad BC, hoc est, vt Q, ad P. Item triangulum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, vt LI, seu DK, ad AI, hoc est, vt P, ad O; ex ijs, quæ ad propos. 1. huius lib. ex Commandino demonstrauimus. b Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH,
b 22. quinti. ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis EF, ad basin BC; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eisdem proportionibus. Quod est propositum.

xxij.

THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.



ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter se se. Quod enim æquiangula sint toti, facile ostendetur. Nam angulus GAE, idem est, qui
29. pri. angulus BAD; c & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum est EG, parallelo-

gram-

grammum parallelogrammo B D: Et eadem ratione, eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera, circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perspicuũ est ex 29. propos. lib. 1. vel etiã ex coroll. propos. 4. huius lib. a erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus b erit. vt B C, ad CA, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. c Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo B D; d atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

a 24. sexti

b 4. sexti

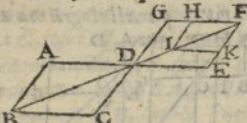
c 22. qn.

d 21. sex.

SCHOLIVM.

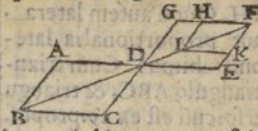
INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum altud, ita vt duo huius latera rectas duas componãt lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, ijsdem fere medijs ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammũ DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrãmi AC. Dico parallelogrammum GE. simile esse parallelogrãmo AC. Quod enim ambo inter se sint aquiangula. facile ostendetur. c *Nã quia angulus A,*



c 29. pri.

æqualis est angulo alterno ADG, huic autem æqualis quo-



a 34. pri. que est alternus angulus G; erũt æquales anguli A, & G. a Quare his oppositi C, & E, æquales quoq; erũt. b Rursus quia anguli

b 15. pri. ADC, GDE, ad verticẽ, sũt æqua-

c 34. pri. les. cerũt his quoq; oppositi ABC, GFE, æquales. Igitur æquiangula sunt GE, AC, parallelogramma. Quod aũt latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cum triangulum BAD, æquiangulum sit triangulo DGF, & triangulum BCD, triangulo DEF, vt cõstat ex propos. 29 lib. 1.

d 4. sexti d Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rursus vt AD, ad DB, ita GF, ad FD, et vt DB, ad DC,

e 22. qn. ita FD, ad FE, e ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sũt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis æquales sunt. Nõ secus ostẽdes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia ẽe. Quare similia sũt parallelogramma AC, GE.

QVOD si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonstrabitur. Nam productis AD,

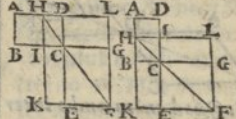
f 24. sex. CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & G; erit

g 21. sex. HK, simile ipsi GE, f vt Euclides demonstrauit: Atqui eidẽ GE, simile est quoque AC, vt nunc ostendimus. g Igitur & HK, AC, inter se similia sunt. Quod est propositum.

SED & absoluemus cum Peletario sequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.

DVO parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint

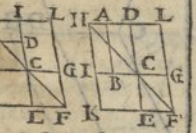


ABCD, CEFG; & ex ABCD, abscindendum sit parallelogrammum ipsi CEFG, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales BCD, ECG, ita vt sit vna linea recta BCG, & propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratũ

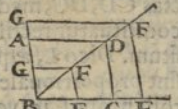
est,

est, ECD, quoque una recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H, secet vel latus AD, vel latus AB, (Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset simile ipsi CF, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur HI, parallela ipsi AB, vel ipsi AD. Dico parallelogrammū abscissum HC, simile esse ipsi CF. Si enim totum parallelogrammum KL, compleatur, erunt HC, CF, circa diametrum. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, vt fiat ipsi CE-FG, simile. Coniungantur vti prius, & diameter FC, extendatur, donec in H, secet vel latus BA, protractū, vel latus DA, protractum. Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF, simile, vt demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractum, vel CB, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC, simile esse parallelogrammo CF. Nā si compleatur totum parallelogrammum KL, consistent HC, CF, circa diametrum; a Quare similia inter se erunt. a 24. sex.



PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe BC; itque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans diametrum BD, productam in F, & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. b *Erit enim parallelogrammum GE, simile similiterque positum ipsi AC, & maius eodē. Quod si minus deat describi, sumendum erit punctum E, citrà C, & reliqua*

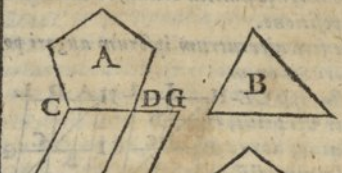


b 24. sex.

peragenda, vt prius, vt figura indicat.

xxv. PROBL. 7. PROPOS. 25.

DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.



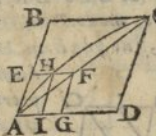
SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendũ aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnũ latus rectilinei, cui simile debet constitui, a constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritq; tam CDG, quam FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. b Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; c super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propos. 19. vel 20 huius lib. vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: d Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis. e Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. f Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. g Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; h propterea que æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum per

a 44. vel 45. pri.
b 13. sex.
c 18. sex.
d 1. sex. ti
e 11. q̃n.
f 7. q̃nti
g 11. q̃n.
h 9. q̃n.

constructionē. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

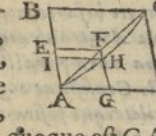
THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiij.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei, similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi EG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; [a] ipsa erunt similia, similiterque posita. [b] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. [c] Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG, [d] Ac propterea æquales erunt rectæ AI, AG, pars, & totum: quod est absurdum.

a 24 sex.
b 1. def. sexti
c 11. 9n
d 9. quinti.



QVOD si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG, Tunc ducta HI, parallela ipsi EF, [e] erunt rursus similia, parallelogramma BD, IG, similiterque posita. [f] Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA, ad AE,

e 24. sex.

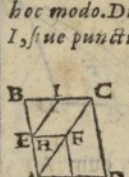
f 1. def. sexti.

SCD LYON 1

ad AE, ob similitudinem parallelogrammorum B D, EG.
a 11. qn. a Igitur erit vt GA, ad AI, ita GA, ad AE, b ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdũ.
b 9. quinti. Constituunt ergo rectæ A F, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter A C, transit per punctum F; & ducta diameter A F, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

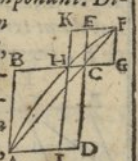
SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus AB, BC, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in pũctum E, siue supra siue infra, ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autem tota AB, ad totam BC, c 15. qn. *c ita est dimidia HB, ad dimidiam BI;* d 1. qn. *d Erit vt HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinem parallelogrammorum B D, EG: Vel quia vnus est internus, & alter externus in parallelis BC, EF,* e 30. pri. *e quæ parallelæ sunt, cum vtraque parallela sit ipsi AD,) latera proportionalia, f erunt æquiangula, habebuntque æquales angulos BHI, EAF, exter-* f 6. sexti *num, & internum inter rectas HI, AF.* g 28. pri *g Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam vero recta, quæ* h 2. sexti *ex puncto A, ad punctum C, duci cõcipitur,* h *parallela quoque est recta HI, propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc cõstituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta A C, eadem fiat quæ AF, transeatque per punctum F, cum ex puncto A, solũ vna linea parallela rectæ H I, possit duci, vt manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.*



QVOD

QVOD si duo parallelogramma similia similiterque posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterq. posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungantur, vt lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE, vnam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, vnam rectam lineam constituere. Si enim AC, FC, non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, producta consistunt, efficiuntq. duas rectas BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq. posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit vt HB, ad BA, ita FK, ad KH. [a] Habet autem CB, maior ad BA, proportionem maiorem, quam HB, minor ad eandem BA; & est vt CB, ad BA, ita FE, ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur similia similiterq. descripta. Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam HB, ad BA, hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem si FE, ad KH, maiorem habeat proportionem, quam FK, ad eandem KH; [b] erit EF, maior quam FK; pars quam totum. Quod est absurdum.



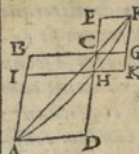
a 8. quin

b 10. qu

QVOD si quis dicat, rectam AHF, secare latus CD, Tunc per H, ducta recta BC, parallela HI, quæ occurrat rectæ FG, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit vt HD, ad DA, ita FK, ad KH. [c] Habet autem CD, ad DA, maiorem proportio-

c 8. quin

nem,



nem, quam HD, ad DA; Et est vt CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterq. posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit
a 1. 4n. proportionem, quam FK, ad KH; a ideoq. FG, maior erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli, B, E, sunt æquales, estq; vt AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos æquales B,
b 6. sex. & E, latera proportionalia; b atque idcirco æquiangula



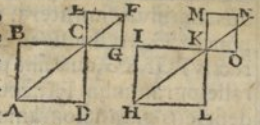
erunt, habebuntq. angulos BCA, EFC, æquales. Addito ergo communi angulo
c 29. pri BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, æquales: c Sed hi inter parallelas BC, EF, æquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis æquales;
d 14. pri d Ac propterea AC, FC, vnam component rectam lineam. Quod est propositum.

RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens,
c 24. sex c erit EG, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo I L, quod sit aquilaterum, & æquiangulum ipsi BD, sumatur HM, æqualis ipsi EF, & MN, æqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum M O, æquale & simile rectangulo EG, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo IL; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto IL, diametrum.

IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angu-

los

los eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula BD, EG; &

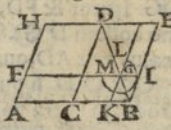


IL, MO; in quibus EG, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam est similiter positum: At vero MO, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit æquale ipsi EG. Nam KM, æqualis est ipsi EF, & MN, ipsi FC, &c.

THEOR. 20. PROPOS. 27. xxvj.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta AB, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammũ AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensque parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quæ secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq. parallelogram-



mis

mis similibus similiterq. positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, KG, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AE, applicatum, deficiens parallelogrammo KI, [a] quod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, diametrum. [b] Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: [c] Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare cum CE, maius sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, [d] æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodem que modo ostendetur AD, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse AC, habentq. minorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similes sint ipsi CE.

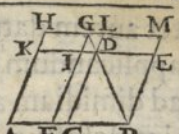


ALITER demonstrabitur AD, maius esse parallelogrammo AG, hoc modo. [e] Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cum bases HD, DE, sint æquales: Est autem DI, maius quam GE, hoc est, quam complementum CG, ([f] quod ipsi GE, æquale est,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, maius erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito communi CF; maius erit AD, quam AG, parallelogrammo eodem DG.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq. rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM, [g] quod

a 24. sex.
b 43. pri
c 36. pri
d 36. pri
e 36. pri
f 43. pri.
g 4. sex.

ipsi



ipsi CE, est simile similiterq. positum, cum sit circa eandē diametrum cum CB. Dico adhuc maius esse AD, ipso AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, [a] cum æquales sint æqualibus AC, CB; [b] ideoque æqualia parallelogramma HD, DM. [c] Cum igitur DM, sit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipsi DF. Est autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Ijsdem argumentis concludes AD, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundum rectam AB, vt punctum G, sit vltra D, in diametro BD, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse AC, habetque maiorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similis existat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum secundum eandem rectā lineam applicatorum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. pri
[b] 36. pri
[c] 43. pri

SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata AC; qualis est AK, in priori figura, vel minorem; cuiusmodi est AF, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

PROBL. 8. PROPOS. 28. xxvij.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrāmo dato. Opor-

tet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineã AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammũ æquale, deficiens parallelorallelogrãmo, quod sit simile dato alteri parallelogrãmo D. Secta AB, bifariam in E, super medietatẽ EB, [a] describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi C; cum sit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autẽ datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) [b] & constituatur parallelogrammum K L M N, simile quidem similiterque positum ipsi D, seu ipsi E G, æquale vero excessui inuento I; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob similitudinem sit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoque latera E F, FG, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam EG æquale ipsi N L, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis F O, F Q,



[a] 18. sex

[b] 25. sex

quæ

quæ sint æquales ipsis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO; erit hoc ipsi LN, æquale, & eidem simile similiterq. positum, & propterea ipsi EG: [a] atque adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, quæ sit BF. Productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, [b] quod simile est ipsi EG, similiterq. positum, & propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse ipsi C, rectilineo. [c] Nam cum PG, æquale sit complemento PE; si addatur commune PB, erit & BQ, æquale ipsi ER, hoc est, ipsi ES, [d] quod æquale est ipsi ER, propter bases æquales EA, EB. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum LN; si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

[a] 26. sex

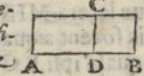
[b] 24. sex

[c] 43. pri

[d] 36. pri

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cum super EB, constituerimus EG, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipsi minime fecerunt. Qua de re, si placet, consule eorum commentarios.

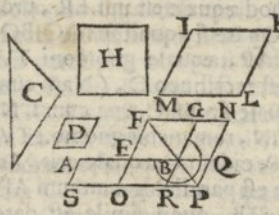


PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad AB, applicetur AC, deficiens quadrato CB, erit AC, applicatum, rectangulum contentum sub AD, & DC. Cum ergo DC, æqualis sit ipsi DB, propter quadratum CB; continebitur quoque AC, sub segmentis AD, DB, per applicationem factis. Quod est propositum.

xxviij.

PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; [a] super dimidiam EB, constructur parallelogrammum EFGB, simile ipsi [b] D, similiterq. positum. [b] Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale; [c] cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterq. positum; eritq. propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur FE, FG, vt rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo parallelogrammo ON; erit hoc simile similiterq. positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterq. positum. [d] Quare ON, EG, circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis iam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conueniat in S, erit parallelogrammum AP,

a 18. sex
b 14. sec
c 25. sex
d 26. sex

appli-

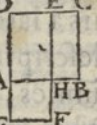
applicatū ad rectā AB, excedens parallelogrāmo QR,[a] quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C.[b] Nam cum AO, ER, sint æqualia,[c] & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cū MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur cōe EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datā ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

[a] 24. sex.
[b] 36. pri.
[c] 43. pri.

PROBL. 10. PROPOS. 30. xxix.

PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

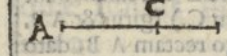
SIT recta AB, secanda extrema ac media ratione. Descripto super eam quadrato ABCD;[d] ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratū sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si dematur commune AE, remanebunt æqualia GH, HC, quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE. vtpote rectos, erunt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentū AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.



[d] 29. sex.
[e] 14. sex.

ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB, sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; [a] erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

a 17. sex.



ALITER totum problema conficiemus. [b] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. [c] Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

b 11. secundi.

c 17 sex.

SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates, proprietatesq;, vt in libris Stereometriæ manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinâ quodamodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionẽ: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

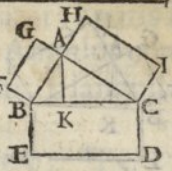
THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit A B C, habens angulum B A C, rectum; describaturque super B C,

quæcun-

quæcunque figura rectilinea B C-DE,[a] cui ſimiles ſimiliterque poſitę ſuper AB, AC, conſtituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem eſſe duabus figuris AF, AI. Demiſſa enim ex A, ad B C, perpendiculari AK. erit per corollarium propoſ. 8. huius lib. vt BC, ad CA, ita CA, ad CK. Quare vt B C, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, ſuper primam, ad figuram CH. ſuper ſecundam ſimilem ſimiliterque poſitam, per coroll. propoſ. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non ſecus oſtendetur. eſſe quoque vt B K, ad BC, ita figuram B G, ad figuram B D; cum tres lineæ B C, BA, BK, ſint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur eſt vt CK, prima quantitas ad BC, ſecundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, ſecundam, ita BG, ſexta ad BD, quartam; [b] erit vt prima C K, cum quinta BK, ad BC, ſecundam, ita tertia CH. cum ſexta BG, ad B D, quartam: Sunt autem prima C K, & quinta BK, ſimul æquales ſecundæ B C. Igitur tertia CH, & ſexta B G, ſimul æquales quoque erunt quartæ B D, Quod eſt propoſitum.



a 18. ſex.

a 24. qn.

ALITER. [c] Cum triangululo ABC, ſimile ſit triangulum KAC, ſintque homologa latera ipſorum B C, C A; (Nam eſt vt Bc, ad CA, in triangulo A B C, ita C A, ad CK, in triangulo KAC,) [d] habebit triangulum K A C, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet C A, ad BC. [e] Habet autem & figura C H, ad figuram B D, proportionem duplicatam proportionis C A, ad BC. [f] Quare erit vt triangulum K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram BD. Eadem ratione oſtendetur eſſe, vt triangulum KBA, ad triangulum ABC, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rurſus eſt, vt kAC, prima quantitas ad ABC, ſecundam, ita C H, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad A B C, ſecundam, ita B G, ſexta ad B D, quartam; [g] erit & prima KAC, compoſita cum quinta K B A, ad ſecundam A B C

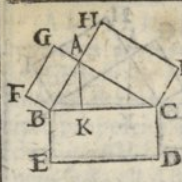
c 8. ſex.

d 19. ſex.

e 19. vel 20. ſexti

f 11. qn.

g 24. qn.



vt cóposita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam B D: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

a 19. vel 20. sexti

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem; [a] cum vtraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundã quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quãtitatem. [b] Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD. [c] Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ BD, æquales erũt. Quod est propositũ. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis; &c. quod erat ostendendũ.

b 24. qn.

c 47. primi.

SCHOLIVM.

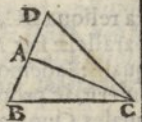
VIDES igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demõstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiã non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theoremu hoc ex Campano nõ aliter, quã 47. propositionẽ primi lib. in hũc modũ.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis

trian-

trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum ABC, sitque figura quauis super latus BC, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterque descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quæ sit ipsi AB, æqualis, & cõnectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, [a] *erit figura super CD, (quæ similis sit ei, quæ super BC, similiterque posita) descripta æqualis figuris super AD, AC, descriptis, quæ ei similes sint, similiterque positæ. Est autem figura super AD, æqualis figuræ super AB, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super CD, æqualis erit figuris super AB, AC. Cum igitur figura super BC, eisdem figuris super AB, AC, æqualis ponatur, erunt figuræ super CD, BC, inter se æquales, ac propterea rectæ CD, BC, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis DC, ostensa est quoque æqualis basi BC;* [b] *erunt anguli DAC, BAC, æquales. Quare cum DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC. Quod est propositum.*

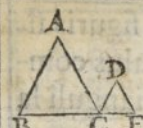
[a] 31. sexti.

[b] 8. pri.

THEOR. 22. PROPOS. 32. xxx.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

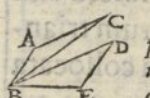
SCD LYON 1



HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturq; ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Itē AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cōponere lineam. Cum enim
a 29. pri. parallelæ sint AB, DC, a erit angulus A, alterno ACD, æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa
b 6. sex. ti b erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fiēt tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB,
c 32. pri c æquales: Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo
d 14. pri mi. & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: d Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundū vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.



QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula cōponūtur, licet reliquæ hypotheses theore-

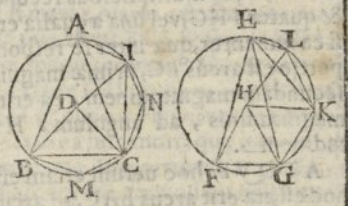
matis

matis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaq; sunt ad angulum CBD; ita vt tam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parat lela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, nõ constituũt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra cõsistunt.

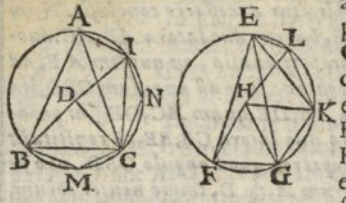
SINT duo circuli ęquales ABC, EFG, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque BC, FG, quibus ad centra quidem insistant anguli BDC, FHG; ad circumferentias vero anguli BAC, FEG. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum BC, ad arcum FG, ita angulum BDC, ad angulum FHG, & angulum BAC, ad angulum FEG; & sectorem insuper BDC, qui rectis BD, DC, & arcu BC, continetur, ad sectorem FHG, quem comprehendunt rectæ FH, HG, & arcus FG. a t. quar.



Ductis enim rectis BC, FG, a applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; CI, quidem ipsi BC, At vero GK, KL, ipsi FG: ducanturque rectæ ID, KH, LH. Quoniam igitur æquales sunt rectæ BC, CI, b erunt quoque æquales q 28. ter.

arcus

27. ter.



arcus BC,CI, [a] ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & ãguli FHG, GHK KHL, Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatũ angulorũ prope centrũ D, insistentiũ arcui BCI, anguli BDC: Et quã multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatũ angulorũ prope centrũ H, arcui FGKL, insistentiũ, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, [b] necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea, vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt, vel vna excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondẽt. [c] Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG: secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

27. ter.

b

c 6. def. Quinti.

ATQVE hoc uerum etiam est de spatijs circa cẽtra hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistens arcui FEG, ut ex demonstratione patet. Nam & hęc spatia, si æqualia sunt insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

d 15. 3n.
e 20. ter.
f 11. 3n.

QVONIAM vero vt angulus BDC, ad angulũ FHG, [d] ita est angulus BAC, ad angulum FEG, [e] cum illi horum sint dupli, perspicuum est, [f] ita esse quoque angulum

BAC,

BAC,ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum F G. Quod tamen eisdem argumētis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

QVOD si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC,FEG,vt rectæ ductæ BD,CD;FH,GH,nō constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG;sumenda erūt spatia BDC,FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias,ex scholio propos.20.lib.3.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC,CI,anguli BMC,CNI,[a] qui æquales erunt,cum insistant arcubus æqualibus BAC,CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, [b] atque adeo inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas B C, CI, ęquales. Additis igitur triangulis BDC,CDI, [c] quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC,CDI,ęquales.Quapropter tam multiplex erit sector BDI,sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus B C. Similiter ostendemus, sectorem FHL,tam multiplicem esse sectoris F H G, quam multiplex est arcus F G K L,ipsius arcus FG,Quoniam vero si arcus BCI,æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI,sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus B D C, CDI,ostensum fuit,) & si maior,maior; & si minor,minor:Deficient propterea una arcus BCI,& sector B D I, æque multiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ BDC,ab arcu FGKL,&sectore FHL,æque multiplicibus secundę magnitudinis FG,& quartæ FHG,;vel una ęqualia erunt:vel vna excedent;si ea sumantur, quę inter se respondent.[d] Quamobrem quę proportio est arcus BC, primæ magnitudinis,ad arcum FG, secundam magnitudinem,ea erit sectoris BDC,tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG,quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 27.ter.
[b] 24.tertij.
[c] 4. pri.
[d] 6.defi. quinti.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo A B C, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui BC,æquales, quibus insistant an-

guli

guli tam ad centra, quàm ad circumferentias. Erunt.n. omnes hi anguli æquales angulis BDC,BAC,ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessario oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistũt anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni
a 11. gn. arcus ad arcum. a Quare & inter se eædem erunt.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in cẽtro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum
b 33. sexti. *in centro*, b *ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primũ. Quoniam igitur est vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verum hoc etiam ita demonstrabi-*

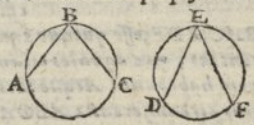
tur.

tur. [a] Cum sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum. [a] 33. sexti.

IDEM verum est de spatio in centro: hoc est, vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totã circumferentiam, &c. vt ex demonstratione patet.

SCHOLIVM.

CÆTERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum qui circumferentiæ alicui insistit, referendũ esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentiã constituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito,

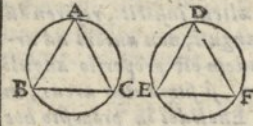


erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, tum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulũ esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cũ dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

NON obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinẽ segmentorũ in circulis similiũ, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ip-

sis

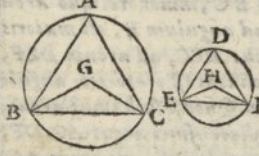
sis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est una circumferentia totius suæ circumferentiæ, talis quoque sit alia circumferentia similis totius suæ circumferentiæ; veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli æquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circũferentias constituantur æquales BAC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, segmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem prafatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere eandē pro-



a 26. ter.

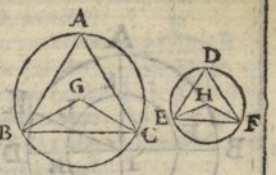
portionem ad integras circulorum circumferentias. Cũ enim ob circulorum æqualitatem, a arcus BC, EF, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoque æquales. Quare ad totas circumferentias, quæ æquales etiam ponuntur, b eandem proportionem habebunt; Atque idcirco, quæ pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentiæ DEFD:

b 7. quinti.



SINT *deinde duo circuli inæquales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur æquales BAC, EDF: Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ BG, CG, EH. FH. Quoniam igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli G, & H, æquales, c cum hi illorum dupli existant: Vel erunt spatia ad centra æqualia, cum hæc quoque sint angulorum ad circumferentias dupla, ex scholio propos. 20. lib. 3.* c *Quare qua-*

c 20. ter.



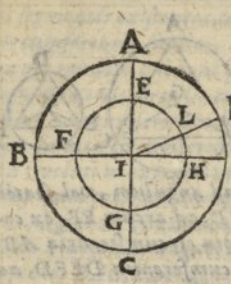
re quatuor recti ad angulũ, vel ſpatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel ſpatium, H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatium G, ita eſt tota circũferentia ABCA, ad arcum BC: Et vt quatuor recti ad angulum, vel ſpatiũ H, ita eſt tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propoſ. 33.ª Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuerſionem ergo rationis erit quoque, vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circũferentia DEFD, ad arcum EDF. Et conuertendo, vt arcus BAC, ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam DEFD. Quocirca quæ pars eſt arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circũferentiæ DEFD. Quod eſt propoſitũ. ª 11. dn.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocaſſe ea circulorũ ſegmenta ſimilia, in quibus anguli exiſtentes inter ſe ſunt æquales: quandoquidem huiuſmodi ſegmenta eandem habent proportionem ad circulos ſuos integros.

FACILE ex his demonſtrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in ſphæram, & ad propoſ. 22, lib. 2. ſine proportionibus oſtendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro deſcribantur, atque ex centro duæ aut plures rectę lineę ducantur; erunt arcus inter quaſcunque duas lineas intercepti ſimiles.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idẽ centrũ I, deſcripti. Si igitur egrediãtur è centro I, duæ rectæ IB, ID, efficiẽtes vnã lineã rectã BD, manifeſtũ eſt, arcus BAD, FEH, ſimiles eſſe, cum ſint ſemicirculi. Rurſus ſi ex I, egrediantur



duæ rectæ IA, ID, constituentes angulum rectum AID, perspicuum quoque est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrātes suorum circulorum.

EMITTANTVR iam ex I, duæ rectæ ID, IK, facientes quēcunque angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam AECD, vt est arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. huius propos. tam arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quā arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, a *erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum.*

a 11. ãn.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HI, insistunt in centro I, anguli æquales, immo idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

EADEM ratione ostendemus, arcus EAK, FEL, similes esse, id est, habere ad totas circumferētias eandē proportionē.

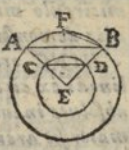
SED placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosij proposuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quam vt similis sit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, descripti. Ducantur autem ex E, duæ rectæ vtcunq; EA, EB,

secantes

secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus AB, CD, similes, vt proxime demonstrauimus. Et quoniam rectæ EA, EB, sectæ sunt in C, D, proportionaliter, quod tã EA, EB, quam EC, ED, inter se æquales sint; a erunt ducta recta AB, CD, parallelæ; atq; ideo triãgula EAB, ECD, ex Coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. b Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quam EC. c Igitur & AB, maior erit quàm CD. Accommodetur ergo ipsi CD, in circulo AB, æqualis BF; eritque ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quàm vt similis sit ipsi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorque est arcus CD, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.



a 2. sexti
b 4. sex.
c 14. qn.

HINC perspicuum est, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quam vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipsi BF, auferat arcum CD, maiorem, quam vt similis sit arcui FB; multo magis linea maior quam CD, auferet maiorem arcum, quam vt similis sit arcui FB, cum illa maiorem arcum abscindat, quam CD, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HAEC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quã vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multo maiorem esse arcum semicirculo maiorem circuli minoris, quam vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quod si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquido constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quam vt similis sit arcui se-

micirculo minori circuli maioris; neque opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, æquales rectas lineas ex circulis inæqualibus auferre arcus simpliciter, et absolute inæquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quàm vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, æquales, auferatque CD, arcum minoris circuli CED, et FB, arcũ circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, maiorem esse arcu FGB. Congruente enim rectâ CD, rectæ FB, cadet necessario arcus CED, extra arcũ FGB; atque idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille hunc totum intra se contineat, sintque ambo arcus in eandem partẽ caui, atque eadem extrema puncta habeãt, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neque vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atque adeo æquales erunt circuli. quod est absurdum, cum inæquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcum FGB, cuiusmodi est arcus CAD; quoniam vt paulo ante ostendimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm vt similis sit arcui FGB; sumatur arcus BFH, arcui CAD, similis, atque ideo maior arcu FGB: Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtcunque, ducantur rectæ AF, AB, productaque recta FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. (In figura per incuriam recta GB, ducta non est: Igitur studiosus lector eam ducat, oportet.) Itaque quoniam arcus CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes æquales. [a] *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multo maior angulus CAD, angulo HGB, quod est absurdum. Ostensus enim est æqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: sed neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo*

a 16. pri.

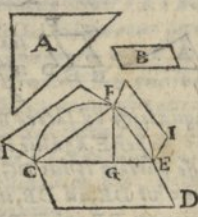
extra; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, vt dictum est. Quod est propositum.

EX quo liquido constat, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic sexto libro annectam: quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducantur. Hinc autem exordium capiemus.

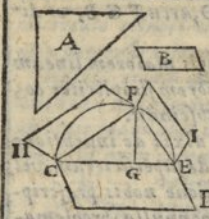
I.

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.



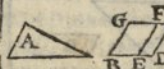
SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, qua similis sit, similiterque posita rectilineo B, relinquatq; rectilineum eidem B, simile, & similiter positum. a *Constituatur rectilineum CD, æquale quidem ipsi A, simile vero, & similiter positum ipsi B; superque vnum eius latus CE, semicirculus describatur CFE.* b *Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturque rectæ CF, EF,* c *super quas construantur rectilinea FH, FI, similia similiterque posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod iubetur.* d *Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat;* e *erit rectilineum CD, æquale rectili-*

a 25. *sexti.*
b 6 *sex.*
c 18. *sex.*
d 31. *ter.*
e 31. *sex.*



neis HF, FI, atque adeo, si auferatur rectilineum FI, simile similiterque positū ipsi B, ex rectilineo CD, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineum HF, simile quoque ipsi B, similiterq; positum. Quod aūt rectilineum ablatum FI, sit tertia pars rectilinei CD, ita ostēdetur. a Quoniam est, vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE; b quod triangula CGF, CFE, sint similia: Habet autem CG, ad GE proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales sunt tres rectæ CG, GF, GE, ex coroll. propos. 8. huius lib. c Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum CF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineū FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE, ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineum CD, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE, ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

a 4. sexti
b 8. sex.
c 19. vel 20. sexti



QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. d Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammū GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata: & per E, agatur ipsi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam esse partem ipsius DG, hoc est, rectilinei dati A. Cum enim sit e vt DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autem per constructionem DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.

d 45. pri
e 1. sexti

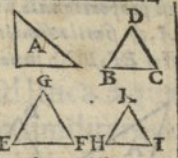
II.

DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inuenien-

dum

dū sit tertiū proportionale. a Cōstituatur ipsi A, rectilineū æquale EFG, simile vero similiterq; positū ipsi BCD. Deinde lateribus homologis EF, BC, binueniatur tertia linea proportionalis HI; c super quā constituatur rectilineum HIK, simile simili-terq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertiū proportionale. Cum.n. proportionales sint rectæ EF, BC, HI; d erūt et rectilineæ EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cū sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilineæ A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.

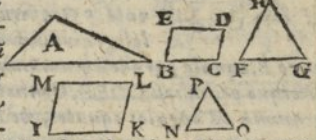


a 25. sex.
b 11. sex.
c 18 sex.
d 22. sexti.

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

TRIA rectilinea data sint A, BCD, FGH, quibus quartū sit inueniendū proportionale. e Cōstruatur rectilineū IKLN, æquale quidē ipsi A, simile vero similiterq; positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, f inuenta quarta proportionali NO; g cōstituatur super NO, rectilineū NOP, ipsi FGH, simile similiterq; positū. Dico NOP, rectilineū esse quartū proportionale. Cū n. quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales; h erunt & rectilineæ similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilineæ A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.



e 25. sexti.
f 12. sex.
g 18. sex.
h 22. sexti.

IIII.

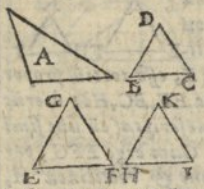
DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilinea A, BCD, quibus mediū inueniendū

SCD LYON 1

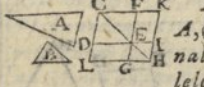
25.sex. *est proportionale.* a *Constituatur rectilineũ EFG, æquale ipsi A, & simile similiterq; positũ ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC,* b *inuenta media proportionali HI;* c *construatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, medium esse proportionale quæsitum. Cum enim proportionales sint tres rectæ EF, HI BC,* d *erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG. HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit æquale ipsi A; erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HI, medium proportionale erit inter A, & BCD. Quod est propositum.*

b13.sex. c22.sexti.



d22.sexti.

ALITER. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. c *Constituatur ipsi A, æquale parallelogrammum quodcunque C D E F,* f *ipsi vero B, æquale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positũ ipsi CDEF, Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, vna quoq; linea recta componatur ex FE, EG; perficiaturq; totum parallelogrammum KL. Dico vtrũlibet EK, vel EL, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad H I, hoc est, ita EI, ad EG,* g *quod rectæ EI, EG, rectis GH, HI, æquales sint. Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG,* h *Vt autem DE, ad EI, ita est DF, ad EK, & vt FE, ad EG, ita E K, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.*



e45.pri. f25.sex. g34.pri. 1.sexti

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DE, GI, similia sint, similiterque posita, i *consistent ea circa eandem diametrũ. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EL, ad GI,* k *quod vtra-*

i26.sex. K1.sexti

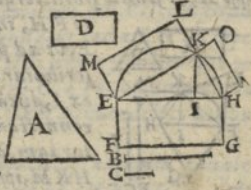
que

que proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI. Quod est propositum.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicũque rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcũq.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio recta B, ad C, oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantque proportionem, quam E. & C; ac similia similiterque posita sint rectilineo cuiuis D. a Constituatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positũ ipsi D. Diuiso deinde latere eius EH, in I, secũdam proportionẽ B, ad C, ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus: describatur circa EH, semicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturque rectæ EK, HK. b Describantur iam super EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipsi EG, vel ipsi D, similia, similiterque posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG. seu ipsi A, habereque proportionẽ datam B, ad C. c Cum enim angulus EKH, in semicirculo existens rectus sit; d erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum sint similia inter se, similiterque descripta. e Quoniã vero est, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, eũ triangula EIK, EKH, similia sint; Est aũt EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK, quod tres EI, IK, IH, sint, ex corollario propos. 8. huius lib. proportionales. f Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologũ KH; erit vt EI, ad IH, hoc est, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia EL, HO, quæ similia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentque proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.



a 25. sex

b 18. sex.

c 31. ter.

d 31. sex.

e 4. sex.

f 19. vel 20. sex.

DATO

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia, sint similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. a *Inuenta ipsis B, C, tertia proportionali E,* b *fiat rectilineũ FGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi D. Diuisoque latere FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos. 10. huius lib. ostendimus; describatur circa FH, semicirculus FKH; &* c *ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectanturque rectæ FK, HK,* c *Describãtur iam super FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumque latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad* d *rectam C.* d *Cum enim angulus FKH, in semicirculo rectus sit;* e *erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque et rectilineo A, æqualia.* f *Quonium vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH; Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK; (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C, quando quidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.*



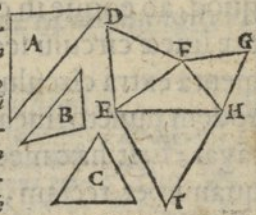
a 11. *sex.*
b 25. *sex.*
c 18. *sex.*
d 31. *ter.*
e 31. *sex.*
f 4. *sexti*

SCD LYON 1

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.

DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterque positum ipsi C. a *Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterque positũ ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur G F H, simile vero eidem C, similiterq; positum. Deinde rectilinea DEF, G F H, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituãt angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta E H,* b *super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C.* c *Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH, atque idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.*



a 25. sex.

b 18. sex.

c 31. sex.

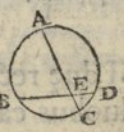
BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. d *Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum EHI, quod simile sit similiterque positum alteri dato rectilineo C; Constitutum erit rectilineum EHI, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterque positum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

d 25. sex

VII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.

IN circulo ABCD, se mutuo secent rectæ AC, BD, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt A E, ad ED, ita BE, ad E C. c *Cum enim rectangu-*



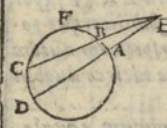
c 25. ter.

lum sub AE, EC, comprehensum æquale sit rectangulo sub BE, ED, contento: a erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

a 14. sex.

I X.

SI extra circulũ sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duę rectæ lineæ circulũ secãtes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quę circulum tãgat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.



EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB. esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB. Vel vt EC, ad EA, ita ED. ad EB. Ducta enim EF, tangente circulum in F; b erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula sub EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt. c Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. d Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tam rectangulum sub EC, EB, quam rectangulum sub ED, EA, e erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quam tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo EF, media proportionalis inter quamlibet lineã, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

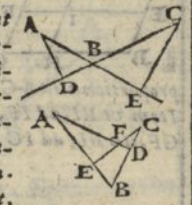
b 36. tertij.
c 14. sex.
d 36. tertij.
e 17. sex.

X.

SI duę rectæ lineę sese mutuo secuerint, & à duobus earũ terminis perpendiculares sibi

mutuo

mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & priori lineæ assumptæ perpendicularem interijs citur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



DVAE rectæ AB, CB, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidem ad CB, at vero CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsas vero introrsum, si idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior vero inter sectionem B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt AB, ad BC, ita BD, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cum enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti sunt; a *& ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula.* b *Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum.*

a 15. pri

b 4. sex.

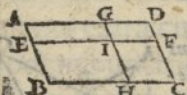
PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula; c *erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum.*

c 4. sex.

SCD LYON 1

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelę se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

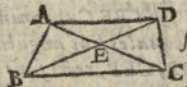


IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelæ se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. a *Cum enim sit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC;* b *Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum.*

a 1. sex.
b 11. qn

XII.

OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



DIVIDANT diametri AC, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, esse proportionalia. c *Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB.* d *Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eademque ratione ostendes esse, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC;* e *cum vtraque proportio eadem sit proportioni BE, ad ED. Constat ergo propositum.*

c 1. sex.
d 11. qn
e 1. sex

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat ba-

sim

sim extrema ac media ratione, tria latera sunt continue proportionalia. Et si tria latera triãguli rectanguli sunt continue proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.

IN rectangulo triangulo ABC, ex angulo recto A, demissa perpendicularis AD, secet basim BC, in D, extrema ac media ratione, sicque maius segmentum BD: ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus AB, latere AC, maius. Dico tria latera BC, BA, AC, esse continue proportionalia.



Quoniam enim per hypothesin est, vt BC, ad BD, ita BD, ad DC: [a] *erit quadratum ex BD, rectangulo sub BC, CD, æquale. Rursus quia ex coroll. propos. 8. huius lib. AC, media proportionalis est inter BC, CD:* [b] *erit quoque quadratum ex AC, eidem rectangulo, sub BC, CD, æquale. Quare quadrata ex BD, AC, æqualia inter se erunt, ac proinde & recta ipsa æquales erũt. Est autem, ex coroll. propos. 8. huius lib. AB, inter BC, BD, media proportionalis. Igitur eadem AB, media proportionalis erit inter BC, AC: hoc est, erit, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC. Quod est propositum.*

[a] 17. sexti.

[b] 17. sexti.

SINT deinde tria latera BC, AB, AC, in triangulo rectangulo ABC, continue proportionalia, hoc est, sit BC, ad AB, vt AB, ad AC, demittaturque perpendicularis AD, ad basim BC. Dico BC, sectam esse in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC: Est autem vt BC, ad AB, ita quoque AB, ad BD: quod AB, media proportionalis sit inter BC, BD, ex coroll. propos. 8. huius lib. [c] *erit vt AB, ad AC, ita AB, ad BD:* [d] *ac proinde æquales erunt AC, & BD.* [e] *Vt igitur AC, ad CD, ita erit BD, ad CD. Sed vt AC, ad CD, ita est BC, ad AC, quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AC, sit media*

[c] 11. quinti.

[d] 9. quinti

[e] 7. quinti.

pro-

a 11. 6n proportionalis inter BC, & CD. [a] Igitur erit quoque BC, ad AC, hoc est, ad BD, vt AC, hoc est, vt BD, ad CD: ac propterea BC, in D, secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.

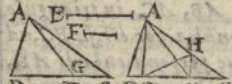
ITAQVE si super datam rectam BC, construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continue proportionalia sint, secunda erit data recta BC, extrema, ac media ratione in D. Descripto deinde semicirculo BAC, circa eandem datam BC, erigenda erit ad BC, perpendicularis DA. iungendaq. rectæ BA, CA. [b] Triangulum enim ABC, rectangulum erit, b cum angulus BAC, in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicularis AD, secet basim extrema ac media ratione; tria latera continue proportionalia erunt, vt proxime demonstratum est.

b 31. ter

XIIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum ABC, oporteatq. à dato puncto D, in eius latere BC, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur BC, in G, secundum proportionem E, ad F,



cadatq. primò punctum G, in datâ punctum D, vt in prima figura, ducaturq. recta DA. [c] Quoniam igitur est vt BD, ad DC, ita triangulum BDA, ad triangulum CDA, secabit recta DA, triangulum datum secundum proportionem datam BG, ad GC, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.

c 1. sex.

CADAT deinde punctum G, inter C, & D, vt in secunda figura. Ducatur ergo recta DA, cui per G, parallela agatur GH, coniungaturq. recta DH. Dico rectum DH, secare triangulum datum secundum proportionem datam,

hoc

hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt E, ad F, seu vt BG, ad GC. Ducta enim recta GA, [a] *erunt triangula HGA, GHD, aqualia, cum sint super eandem basin GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addito igitur cõmuni triangulo CGH, fient aqualia triangula CGA, CDH:* [b] *Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH,* [c] *Diuidendo igitur, erit vt triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH.* [d] *Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt BG, ad GE, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.*

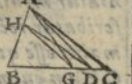
[a] 37. pri.

[b] 7. qn.

[c] 17. qn.

[d] 1. sexti

CADAT tertio punctum G, inter B, & D, ducaturque recta DA, cui rursus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rursus, rectam ductam DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, vt E, ad F. Ducta enim recta GA, [e] *erunt, vt prius, triangula HGA, GHD, aqualia; additoque communi BGH, aqualia fient BGA, BDH.* [f] *Quare erit ABC, ad BGA, vt ad BDH.* [g] *Diuidẽdo ergo erit ut CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulũ BDH, & conuertendo, vt BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA,* [h] *Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit vt BG, ad GC, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.*



[e] 37. pri

[f] 7. qn.

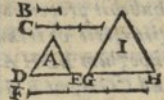
[g] 17. qn.

[h] 1. sexti

HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectã, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator unitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factam erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulũ ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ additur unitas, quæ ante deerat.

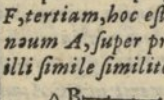
XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterque positum. Quod erat faciendum.

[a] 12. sex.
[b] 13. sex.
[c] 18. sex.

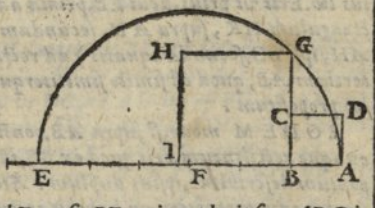


NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterque positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Itē vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterque descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON

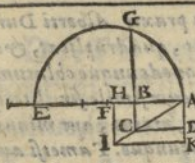
NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac n. cõstruemus quoque rectilineum simile, similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à precedenti differt, vt mox ostendemus.



SIT igitur quadratũ ABCD, quintuplicandũ. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumãtur quinque partes ipsi AB, æquales, a pũcto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circumferentiam vsque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplũ esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum secunda, ad AC, quadratum tertia, ex coroll. propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulũ ABCD, cui inueniendũ sit simile similiterq; positũ, quod duplũ sit ipsius. Ex latere AB, producta sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bi-



fariam in F; et ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrēs diametro AC, protractæ in I, perficiaturque parallelogrammum HK; erit HK, ipsi BD, simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secundæ æqualis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum. Quod est propositum.

a 24. sexti.

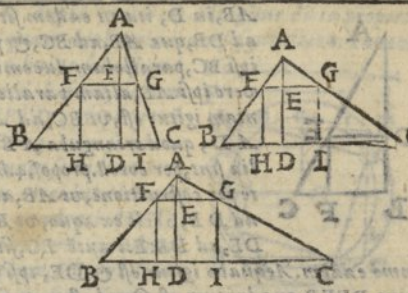
EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex EG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex EG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod hæc simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 2. Hæc autem in E, ita secetur, per ea, quæ in scholio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi

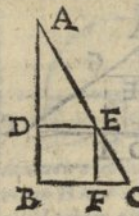


BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallelæ ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptũ esse quadratum. Cum.n. FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. a Sed vt DC, ad AD, ita est EG, ad AE, quod per coroll. propos. 4. huius lib, triangula ADC, AEG. sint similia. b Igitur erit ex æquo, vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia vero per constructionem est vt AD, ad BC, ita AE, ad ED, c erit rursus ex æquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED: Est autem BC, ipsi BC, æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & FG, ipsi ED. d Quare cum FG, ipsi HI; & ED, ipsis EH, GI, æqualis existat; Erunt quatuor latera FG, GI, IH, HF, æqualia inter se. e Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis æquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.

a 4. sex.
b 22. qn.
c 22. dn
d 34. pri
e 29. pri

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dũmodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem



a 4. sexti

b 22. qn

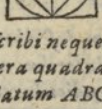
AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD ad DB, quæ AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelam ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. a *Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autẽ per cõstructionẽ, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB,* b *erit ex æquo, vt BC, ad EC, ita DE, ad DB: Est autẽ BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.*

VERVM hoc problemate Commandini multo ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

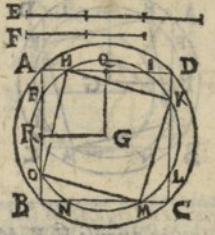
INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, ad quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quam recta E, ad rectã F, quacunque ea sit, dummodo maior non sit, quam dupla. Nam si latera quadrati secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem eum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circũscriptus, vt in hac figura perspicuum est, erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex schelio propos. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, describi nequeat, quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido constat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportio



SCD LYON 1

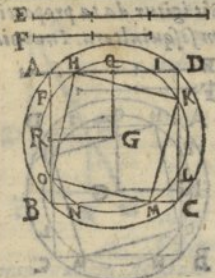
nem posse habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inuenia



tur ex propos. 15. huius scholij quadratum, ad quod habeat datum quadratum ABCD, proportionẽ datã E, ad F. Eritq; eius semidiameter maior, quam semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, subduplum est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus aqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH. relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO. esse quadratum in circulo HIKLMNOP, descriptum, atque adeo aquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionem, Ead F. Descripto enim circulo circa datum quadratum ABCD, ex centro G, ductisque ex G, ad latera AD, AB, perpendicularibus GQ, GR, a secta erunt tã rectæ AD, AB, quã rectæ HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, aquales sunt, b aqualiter distabunt à cẽtro G, propterea quæ & HI, OP, aqualiter ab eodem centro distabunt. c Quare aquales erunt HI, OP, ideoque & earum semisses QH, QI, RO, RP, inter se erunt aquales. Sunt autem & semisses QA, QD, RA, RB, aqualium laterum aquales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt aquales HA, ID, PA, OB. Eademque ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, ostendẽtur aquales NB, MC, LC, KD, & inter se, & illis quatuor HA, ID, PA, OB. Item quia aquales sunt HI, OP, si addantur aquales ID, PA, fient totæ aquales HD, AO, Atque eadem de causa aquales erunt BM, KC, & inter se, & iliis duabus HD, AO, Itaque quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, aqualia sunt, angulosque continent aquales, nimirum re-

a 3. ter.
b 14. ter.
c 14. ter.

a 4.pri.



b 28.ter tij.

c 31.ter.

ctos; a erũt & baſes HK, HO, æquales. Eodemq; modo demonſtrabuntur KM, MO, æquales & inter ſe, & duabus HK, HO. Æquilatera ergo eſt figura HKMO. Dico & rectangulã eſſe. Cum.n. latera HK, KM, MO, OH, æqualia ſint, b erũt & quatuor arcus, quos ſubtendũt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo ſunt OHK, HKM, KMO, MOH, c ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis ſemicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratũ eſt, atq; adeo inuento quadrato æquale, cum idem circulus vtrumq; circumſcribat. Circulus enim HKMO, deſcriptus eſt ad interuallum ſemidiametri circuli inuento quadrato circumſcripti. Quod eſt propoſitũ.

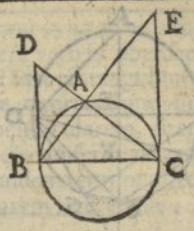
XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemq; punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrẽtes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehẽſum ſub vtralibet ſecantiũ, & eius ſegmẽto interiore, quadrato diametri æquale.

HAEC propoſitio eſt Cardani lib. 16. de Subtilitate cap. 1 ſicut et quæ ſequitur. Vtramque autem demonſtrauit Io. Baptiſta Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares BD, CE, ac per aſſumptum quoduis punctum A, in circumferentia ex eiſdem punctis B, C, ductæ rectæ BA, CA, ſecent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum ſub EB, BA, quàm ſub DC, CA, quadrato diametri BC, æquale eſſe. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angu-

lo re-

lo recto C, demissa est CA, ad basin BE, perpendicularis; a quod angulus BAC, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare b rectangulum sub extremis EB, BA, æquale erit quadrato mediæ BC. Eademque ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis est inter DC, CA, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Continent ergo id, quod proponitur.



a 31. ter.

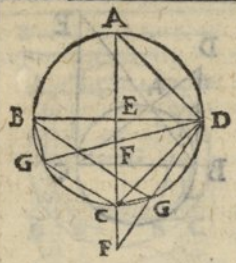
b 17. sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri se se ad rectos angulos secẽt, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secũdam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque DF, secans diametrum AC, in F, & circũferentiam in G. Dico rectangulum sub F D, D G, quadrato intra circulum descripto esse æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter se.

Nam



Nam angulus CDF, communis est, et angulus DCF, angulo DGC, æqualis; a ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, æqualis. Quod autem anguli DCF, DGC, æquales sint, ita ostendemus, Si punctum quidem F, est intra circulum; b erunt anguli DCF, DGC, insistentes quadrantibus æqualibus AD, DC, æquales: Si vero punctum F, est extra circulũ, ducta recta AD, c erũt anguli DAC, DCA, insistẽtes quadrantibus æquales: d Sed tam DAC, DGC, e quam DCA, DCF, æquales sunt duobus rectis, Igitur ablatis æqualibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF. æquales quoque erũt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, æquiangula sint; f erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc est, tres lineæ DF, DC, DG, continue proportionales erunt. g Igitur rectangulum sub extremis DF, DG, æquale est quadrato mediæ DC, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum DC, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.

a 32. pri
b 27. ter
c 27. ter
d 22. ter
e 13. pri
f 4. sexti
g 17. sex.

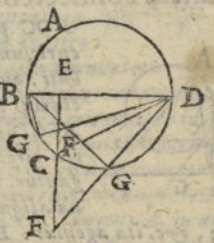
ALITER. Ducta recta BG, h erit angulus BGD, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, i æquiangula erunt. k Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG, l Rectangulum ergo sub DF, DG, æquale erit rectãgulo sub DB, DE. m Sed rectangulo sub DB, DE, æquale est quadratum rectæ AD, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AD, media proportionalis est inter DB, DE, vt patet, si ducatur recta AB. n Fiet enim triangulum rectangulum BAD, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit AE, Igitur & rectangulum sub DF, DG, eidem quadrato rectæ AD, æquale erit. Quod est propositum.

h 31. ter.
i 32. pri
K 4. sex,
l 16. sex.
m 17. sexti,
n 31. ter

VNIVERSALIVS hoc ita proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro termi-

norum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interfectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris lineæ, quorum vnum sit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferẽtiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem interceptæ.



In circulo enim A B C D, ad diametrum BD, sit perpendicularis EF, secans circumferentiã in C, iunganturque recta D C, DF, quarum posterior perpendicularem EF, secet in F, & circũferentiam in G. Dico rectangulum sub D F, D G, æquale esse quadrato D C. Iuncta enim recta B G, erunt triangula BGD, FDE, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum FDE. a *Igitur erit, vt FD, ad DE, ita BD, ad DG.* b *Quare rectangulum sub FD, DG, rectangulo sub DE, BD, æquale erit:* c *Sed hoc æquale est quadrato DC; quod ex coroll. propos. 8. huius, DC, sit media proportionalis inter BD, DE: quia ducta recta BC,* d *angulus BCD, foret rectus in semicirculo. Igitur & rectangulum sub FD, DG, quadrato DC, æquale erit. Quod est propositum.*

a 4 sex.
b 16 sex.
c 17 sex.
d 31. ter tij.

COROLLARIVM.

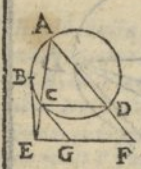
HINC fit, priorem lineam DC, esse mediam proportionalem inter posterioris segmenta FD, DG, quorum vnum est inter terminum D, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neu-

trum

trum sit in circumferentia ; per ea puncta, duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungēs duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.



HOC problema non minus acutum quam curiosum in tres propositiones Pappus distribuit : quod nos in vnam redigentes multo clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus ABCD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam E F, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducenda sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta E B, tangens circulum in B, & duabus E F, E B, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit E G, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando E F, maior est, quam E B. Ducta igitur G C, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturque recta A F, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam C D, ipsi E F, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ E F,

a 17. sex. *E B, E G, continue proportionales sunt,* a *erit rectangulum*

b 36. ter *sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale :* b *Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub E A, E C. igitur rectangulum sub E F, E G, rectangulo sub E A, E C, æquale erit : ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per*

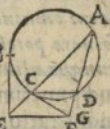
c 22. ter *quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit.* c *Duo ergo anguli C A F, C G F, oppositi in quadrilatero*

d 13. pri. *A C G F, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G,* d *qui duobus*

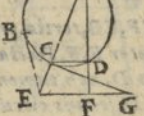
e 32. ter *etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit reliquus C G E, reliquo A. æqualis :* e *Est autē & angulus D C G, angulo A, in alterno segmento æqualis.*

Igitur

Igitur anguli D C G, C G E, inter se æquales erunt; atque ideo, cum sint alterni, [a] rectæ C D, E F, parallelæ erũt. Quod est propositum. [a] 27. pri.



CADAT deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando E F, ipsi E B, æqualis est. Ducta igitur rursus recta G C, circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturq. recta AF, secãs circumferentiam in D. Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt E B, E F; [b] estque rectangulum sub A E, E C, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub E F, æquale. Quare [c] si circa triangulum ACF, circulus describatur, cum eum secet recta E A, recta autem EF, eidem applicetur, [d] tanget recta EF, eum circulum. [c] Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit: [f] Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni, [g] erunt rectæ C D, EF, parallelæ. Quod est propositum. [b] 36. ter [c] 5. quar [d] 37. ter [e] 32. ter [f] 32. ter [g] 27. pri

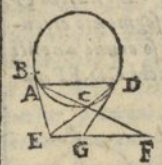


CADAT tertio punctum G, ultra F. quod contingit, quando EF, minor est quam E B. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ EF, E B, EG, cõtinue proportionales sunt, [h] erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: [i] Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub A E, E C. Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit. [k] Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C F, inter se æquales erunt: [l] Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, æqualis erit: ac proinde, cum duo [h] 17. sex [i] 36. ter. [k] 21. ter. [l] 32. ter

a 27.pri

hi anguli sint alterni, [a] *parallela erunt CD, EF. Quod est propositum.*

QVOD si a principio ex puncto F, ducta fuisset linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum A: quia nullum aliud punctum absoluere potest problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (si illud punctum H, atramento signaueris, facilior erit demonstratio, quod etiam de aliis punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura.) *Igitur recta FH, secabit circulum supra D, at vero recta EH, eundem infra C, secabit; ac propterea recta coniungens puncta sectionum rectam CD, secabit. Producta ergo secabit quoq. illius parallelam EF. Non igitur ipsi EF, parallela erit. Contrarium accidet, si punctum H, sumatur inter A, & C. Nam recta FH, cadet infra D, & EH, supra C, &c.*



SI vero ex eisdem punctis datis E, F, ducenda sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexa circumferentiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus pũctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta EB, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis EG, cadatq. primũ G, punctũ inter E, F. Ducta igitur ex G, recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, secãs circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam esse rectæ EF, parallelam: Quoniam. n. tres rectæ EF, EB, EG, continue sunt proportionales, [b] *erit rectangulũ sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale:* [c] *Est autem & rectangulum sub ED, EC, eidem quadrato ex EB, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub EF, EG, & sub ED, EC: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi põt.* [d] *Duo ergo anguli CDG, & F, in eodẽ segmẽto CDFG, illius circuli, cuius chorda es-*

b 17.sex
c 36.ter
d 21.ter

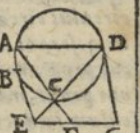
set

set ducta recta CG, inter se erunt æquales. [a] Est autem angulus C D G, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, [b] ideoque parallelæ erunt AD, EF. Quod est propositum. [a] 32. ter [b] 27. pri

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta G D, tangente circulũ in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta E D, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum. n. æquales sint EB, EF, (quòd sit EF, ad EB, vt EB, ad EF.) erunt earum quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub ED EC, quadrato ex E B, æquale. Igitur & quadrato ex E F. Quia ergo, [c] si circa triãgulum CDF, circulus describatur, recta ED, eum secat, & EF, applicata est, [d] tanget EF, eum circulum. [e] Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno segmento eius circuli æqualis erit: [f] Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit. [g] Quare parallelæ erunt AD, EF. Quod est, propositum. [c] 5. quæ [d] 37. ter [e] 32. ter [f] 32. ter [g] 27. pri

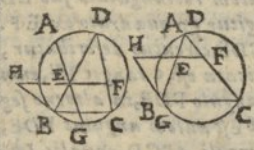


CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continue proportionales, [h] erit rectangulum sub EF, EG, siue sub EG, EF, æquale quadrato ex EB: [i] Est autem eidem quadrato æquale rectangulum sub ED, E C. Igitur rectangulum sub E G, E F, rectangulo sub E D, E C, æquale erit, propterea quod ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. [k] Duo ergo anguli E D G, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erunt duobus rectis, ac proinde æqualibus duobus angulis ad F, [l] qui etiã duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi C F G, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: [m] Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & [h] 17. sex [i] 36. ter [k] 22. ter [l] 13. pri [m] 32. ter



a 27. pri angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno aequalis erit a: atque idcirco parallela erunt AD, EF. Quod est propositum.

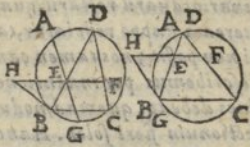
QVOD si a principio ex F. duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum C. eo quod nullum aliud possit problema conficere. Nam sit aliud punctum H, quodcunq. iuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta EH, supra D. Recta igitur connectens puncta sectionū secabit rectam AD; ac proinde, vt supra dictum est, ipsi EF, parallela esse non potest. Si punctum H, sumptum foret inter D, & C, caderet FH, recta supra A, & recta EH, infra D, &c.



SED sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta AG, per E, vtcunque, inueniatur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui aequalis sit EH, (cadetq; necessario punctū H, extra circulū b. Quoniam enim b 16. sex rectangulum sub AE, EG, secunda & tertia, aequale est rectangulo sub EF, EH, prima & quarta; describi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. secans circulum ABCD, in A, G. Cum ergo eius arcus per F, transiens sit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, transiens, extra: c 10. ter quandoquidem circulus circulum in duobus tantum punctis secat, ac proinde circulus per A, F, G, descriptus post punctā A, G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo existens extra circulum cadet.) ducaturque HB, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ductam rectam BC, parallelam esse rectae EF. Quia enim d 16. sex ita est EF, ad EA, vt EG, ad EH, d erit rectangulum sub EF, EH, aequale rectangulo sub EA, EG: e Est autem rectangulum sub EA, EG, aequale rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem rectangulo sub ED, EB,

aqua-

æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. a Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erũt.



a 21. tertij.

b Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. c Parallelæ ergo sunt rectæ BC, EF. Quod est propositum.

b 32. tertij.
c 28. pri.

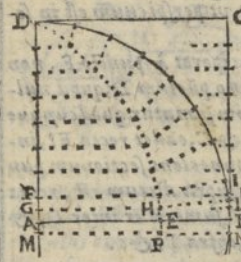
QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctũ G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

IAM si solutio problematis inciperet à punctõ F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici possit. Si enim sumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta EI, infra C, & EI, supra B. Recta ergo connectens sectionum puncta rectam BC, secabit. Igitur vt supra dictum est, recta EF, parallela non erit. Si punctum I, sumeretur inter D, & B, caderet recta FI, supra C, & EI, infra B, &c.

DE MIRABILI NATVRA LINEAE cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima, perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, a nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem pradicti auctores

res huiusmodi lineã cõtur describere per duos motus imaginarios duarũ rectarũ, qua in re principium petunt, vt propterea a Pappo reijciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometrice describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reijciendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in nostram Geometriam Practicam. Sic ergo describitur linea Quadratricis fiet.



IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tã semidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus supremum CD, deorsum versus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore pũctum D, circumferentiam DB, vniformi semper motu percurrit, eodem rectaDC, vniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continue semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, merito a Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestigãda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem de-

scribemus

scribemus hoc modo. Arcus BD, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, et singulæ rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eo accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum DB, quàm duo latera AD, BC, in 8. partes æquales.

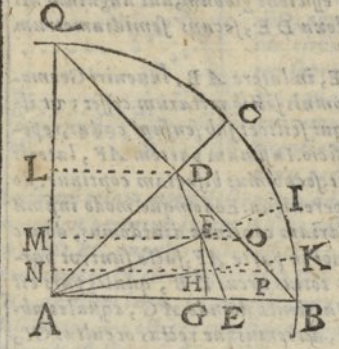
DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter distantia a latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primam, secunda secundã, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed æquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa DE, secans semidiametrum AB, in E.

SED quia punctum E, in latere AB, inueniri Geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem AF, lateris AD, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continue. donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimã partem BI, arcus DB, bifariam continue diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte AF, factæ sunt, vt particula BK, talis pars sit totius arcus DB, qualis pars est AG, totius lateris AD. Particulæ deinde AG, æquales abscindemus BL, BN, AM, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissime notetur, sumemus ipsi GH, æqualem MP. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter parvam rectarum GH, AE, MP, inter se distantiam, efficitur, vt ferme sint

æquales, licet Geometrice loquendo, recta AE, semper maior sit aliquanto, quantumuis parum ea recta inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiã in circumferentia circuli contingit. Recta namque GL, AB, MN, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum AB, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisite, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis, & rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

VERVM puncta Quadratricis prope hæsem certius inueniemus, sine intersectionibus linearum, hoc modo. Ducta chorda BQ, in quadrante secetur in D, bifariã. quod fiet, si ex A, ad C, punctum medium quadrãtis recta ducatur AC. Hæc.n. ex scholio propos. 27 lib. 3. rectam BQ, secabit bifariam. Deinde rectæ AD, sumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, secetur bifariam in F, quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. Hæc enim chordam BC, (si duceretur) secaret bifariam, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde & rectã DE, ex scholio propos. 4. huius, a cum chordæ BC, sit parallela; propterea quod latera AB, AC, proportionaliter secantur in D, E, quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales sint. Rursus recta



a 2. sexti

AF,

AF, sumatur æqualis AG; iunctaque FG, secetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atque hoc modo si recta AH, æqualis sumatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones. a Est enim AD. ad DB, perpendicularis; & AF, ad DE; & AH, ad FG, &c. Omnia vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. sunt in Quadratrice. quod ita ostendo. Ductis DL, FM, HN, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P; b erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ; ideoque & AQ, secta erit in L, bifariam. Sectus autem est & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DE, secta est bifariam in F; c erit quoque DB, secta bifariam in O; d ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD, ita est AM, ad ML: Et vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC; quod vtrobique proporio sit æqualitatis; erit igitur quoque vt AM, ad ML, ita BI, ad IC. Ergo, vt ostendimus, secabunt sese AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de alijs punctis hac arte inuentis.

a 23. ter.

b 2. sex.

c 2. sex.

d 2. sex.

ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometrice eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi; fit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, similem partem laterum DA, CB, percurrerit: Alias aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus DC, peruenirent. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus DB, emissa, & lineæ parallelæ per partes laterum DA, CB, ductæ, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, a nobis Geometrice inuen-

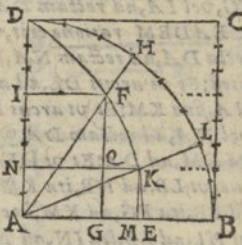
ta a punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur; non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari poeest, quemadmodum & conicarũ sectionũ descriptiones, quæ per puncta etiã fiũt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cũ tamen magis errori sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstãtissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclare de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiã Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdẽ pũctis ad basim demittãtur perpẽdiculares; & aliæ rectæ eidẽ basi

paral-

parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturque ad basim AE, perpendiculares FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, et Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus, cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, recta DI, cõtinet, propterea quod rectæ AH, IF, se interfecant in pũcto F, Quadratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quam recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadẽm vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensubilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB, si cogitetur talis pars minor quam DI, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est, ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdũ & contra hypotesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius ar-

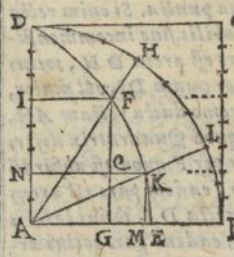
cus DB, quæ pars est reliqua recta IA, totius lateris DA, Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi
a 34. pri IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quam conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c.

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita
b 34. pri recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectã NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG, erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG.

RVRSVS quia est vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA; erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



SIT primum arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AE, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P,

ducta-

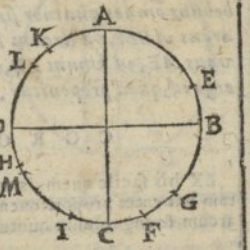
ducteque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HE, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim vt proposi. 1. ostendimus, vt HL, ad LB, ita est IN, ad NA: Est autem IN, ad NA, ex constructione vt O, ad P; a erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P. a 11. qn.

DEINDE totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, vt sit DI, ad IA, sicuti R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadratricem in F. Ducta igitur recta AFH, erit ex proposi. 1. DH, ad HB, vt DI, ad IA, hoc est, vt R, ad S.

O 3
P 2
R 3
S 5
T 8
V 2

TERTIO sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur AN. Ducta autem NK, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex proposi. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc est, vt T, ad V.

QVARTO semicirculus ABC, diuidendus sit in datam proportionem, videlicet in triplã. Secetur vterq; Quadrans AB, BC, secundum datam proportionem triplam in E, F, & arcui AE, vel BF, æqualis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, æqualia demãtur, nimirum duo arcus AE, BF, simul, & arcus AG; reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus EB, FC, simul, & arcus GC. Et quoniam est, vt AE, ad EB, ita BF, ad FC, b erunt AE, BF, simul ad EB, FC, simul, hoc est, arcus AG, ad arcum GC, vt AE, ad EB: Habet b 12. qn.



autem

autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.

QVINTO in eãdem proportionem secandus sit arcus ACD, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E, F, H, sumatur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI, ipsi CH, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur æqualia, nimirum tres arcus AE, BF, CH, simul, & arcus ABI, reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, simul. & arcus ID. Et quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandẽ habent proportionem; a habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnum arcum EB, videlicet datam. a 12. qn.

POSTREMO sit eodem modo diuidendus arcus ACK. Diuisis rursus tribus quadrãtibus, & arcu DK, vt proponitur, in E, F, H, L: sumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACK, æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, simul, & arcus ABM, reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus EB, FC, HD, LK, simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK, eandem proportionem habent: b habebunt omnes quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur. b 12. qn.

COROLARIVM.

EX his facile quemuis angulum rectilineum in duos angulos data tam habentes proportionem partiemur, atque ideo & quemiibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: c cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro. c 33 sex.

QVOD

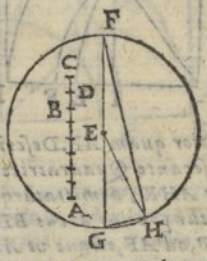
QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam a numero, qui vna vnitate minor sit numero partiũ propositarũ. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G, in proportionẽ quadruplam. Nã GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.



III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariã, & descripto ex centro E, circulo quantocunq; FGH, ductaque in eo diametro FG; secetur ita semicircũferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB, ad rectam BD, iungantúrque rectæ HE, HG. Dico isosceles triangulum EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datam AB, ad BC. Cum enim sit vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG; Et vt arcus FH, ad arcum HG, a ita angulus FGH, ad angulum GFH; b erit vt AB, ad BB, ita angulus FGH, ad angulum GFH: Vt autem BD, ad BC, ipsius BD, duplam, ita est angulus GFH, ad angulũ GEH, c qui duplus est anguli GEH. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod est propositum.



a 33. sex
b 11. qn.
c 10. ter

COROL-

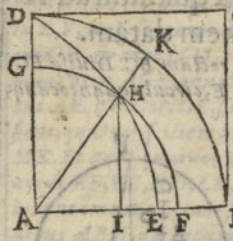
COROLLARIVM.

ITAQVE si constituantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices esquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ æquilaterę parium laterum, per posteriora vero figuræ æquilaterę laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferẽtiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proxime anteceden te docuimus, quot latera angulosue figura inscribenda hab ere debet, &c.

IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continue proportionales.



SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continue esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, vt DA, ad AE. Sin minus, sit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorẽ ipsa AE, minoremve, sitque primũ AF, maior quam AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc est, vt AB, ad AF, estque vt AB: semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG, (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostẽdemus, diameter ad diametrum, vt circumforentia circuli ad circumferentiam circuli; [a] *erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam;* [b] *ac proinde etiã vt quarta pars circumferentię ad quartam partem circumferentia, hoc est,*

a 15. qn.

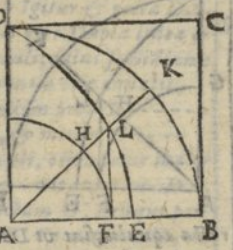
b 15. qn.

vt arcus

vt arcus BD, ad arcum FG.) a Erit quoq. arcus BD, ad rectã DA, vt idẽ arcus BD, ad arcũ FG. b ac propterea æquales erũt recta DA, & arcus FG. Quia vero ex theor. 1. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcũ FH, q arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint, vt supra in hoc scholio ostensum est: c Erit quoque recta DA, ad rectã HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, æqualis; d erit quoq. recta HI, arcui FH, æqualis. quod est absurdum. Est. n. recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF, c secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcũ, ex scholio propos. 27. lib. 3.) chorda autẽ semper suo arcu minor sit. Nõ ergo est arcus BD, ad semidiametrũ DA, vt DA, ad rectam maiorem basẽ AE, Quadratricis.

a 11. qn
b 9 qn.
c 11. quinti.
d 14. quinti.
e 3. ter.

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrãte FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Itẽ ita esse arcum BD, ad arcũ BK, hoc est, arcũ FG, ad arcum FH, vt est recta DA, ad rectam LF. Quare cũ arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est. n. recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex schol. propos. 36. lib. 3. arcusq. inter eas interceptus secaretur bifariã in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, f ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: g ideoque & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, dua illa



f 4. vel 8. prim.
g 26. ter

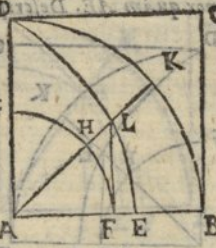
tangen-

tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam minorem basi AE, Quadratricis: Sed neque vt DA, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

COROLLARIVM I.

HINC facile repetiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, vt DA, ad AE: erit conuertendo quoq. AE, ad DA, vt DA, ad arcũ Quadrãtis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis, a erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq. proportio sit eadem, quæ AE, ad AD. b Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis. Quod si arcus BK, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta æqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ex L, ad AB, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaq. erit quarta hæc recta æqualis arcui BK. Nam cum sit ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK; c erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK. Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrãtis DB. d Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta æqualis, reperiẽda primum erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Qua-



a 11. quinti.
b 9. qn.
c 11. quinti.
d 14. qn.

drante

drante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

COROLLARIVM. II.

SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æquale, & lineam lateris duplam esse æqualē semicircumferentiæ eiusdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atq. adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad DA, ita Quadrans BD, ad Quadrantē semidiametri AE. Est autē tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, vt ostensum est: [a] *Igitur & recta DA, Quadranti semidiametri AE, æqualis erit. Dupla linea ergo ipsius DA, semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit æqualis.*

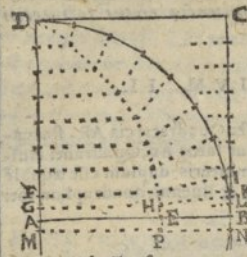
a 14. quinti.

EADEM ratione, si duæ rectæ eandem pro- B------ portionem habeant, quam DA, AE, & minor C---- ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt DA, ad AE, ita recta aliqua B, ad rectam C. Eritque permutando, vt DA, ad B, ita AE, ad C. Vt autem AE, ad C, ita est quadrans semidiametri AE, ad quadrantem semidiametri C; vt supra ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque vt DA, ad B, ita quadrans semidiametri B, ad quadrātem semidiametri C. Cum ergo DA, æqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri AE, [b] *Erit quoque B, æqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.*

b 14. quinti.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnā proportionem plus minus, habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferētia ad semidiametrum, [c] *cum sit vt circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantē*

c 15. quinti.



DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta ferme æqualis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam sextamdecimam, quæ $\frac{1}{16}$ multo maior est quàm $\frac{1}{5400}$ vix a basi AE, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro basi accipere possimus. Quia vero vltima illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturq. recta AH. Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, sinus anguli AHG, Min. 1. posito sinu toto AH, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, statuatur 10000000. (Ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quam si sinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc sinus grad. 89. Min. 59. a sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus DA, earundem partium erit 15708000. vt constat, si 5400. particulæ lateris DA, ducantur in vnam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniã ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris DA, æquale est semicircumferentiæ, cuius semidiameter AE; erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum AE, eadem fere, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{1414720\,3}{9999999}$ hoc est, in minimis terminis, a $3\frac{1}{7}$ qua proportio minor est, quam tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas maior autẽ, quam tripla superdecupartiens septuagesimas

pri-

primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferẽtiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

ITAQVE vt recta linea circumferentiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta. Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

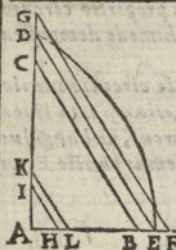
V.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli; alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro a constituatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale. a 14. sec.

INVENIETVR autem recta æqualis semicircũferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, b si fiat vt basis Quadratricis descripta ad eiusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præcedentis propos. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit. b 12. sex

VERVM vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construenda erunt duæ figuræ quadrãdis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus DAE. sitque AD, æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & AE, basi eiusdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur DE, cuius latus

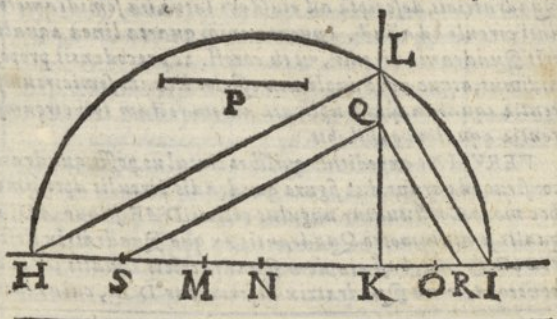


AD, & basis AE. Ducta autem recta DE, constructum erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter aqualis sit rectæ AE, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli aqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quam AE, abscindemus ei aqualē AB, parallolamque ipsi DE, agemus BC. Si denique semidiameter sit maior, quā AE, abscindemus ei aqualem AF, ex AE, producta, & per F, ipsi DE, parallelam agemus FG. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta AC, aqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis aqualis erit, cuius semidiameter AF: a propterea quod est, vt AE, ad AD, ita tam AB, ad AC, quam AF, ad AG.

a 2. uel 4 sexti.

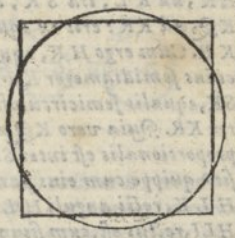
DEINDE ducta recta HI, cuiuscunque longitudinis, excitetur ad eam perpendicularis quantacunque KL; paratumque erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.

PER duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunque circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius semidiametro in priori instrumento aqualis sit recta AB, & per B, ipsi DE, parallela agatur BC. In posteriori



vero

vero instrumento sumantur duæ KM, MH, ipsi AC, æquales, & recta KI, semidiametro AB, æqualis. Diuisa autem tota recta HI, bifariam in N, describatur ex N, ad interuallum NH, vel NI, semicirculus secans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cuius semidiameter AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim KL, media proportionalis est inter KH, KI, ex scholio propos. 13. huius lib.[a] erit quadratum ex KL, rectangulo sub KH, KI, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initiũ huius propos. diximus, quod KH, sit æqualis semicircumferentiæ, & KI, semidiametro; erit quoque idem quadratum ex KL, dato circulo, cuius semidiameter AB, vel KI, æquale. Si igitur quadratum rectæ KL, describatur, et ex eius centro ad interuallum AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in apposita figura apparet. [a] 17. sep.



CAETERVM diuisio rectæ HI, in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet. Diuisa semidiametro KI, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quam HI, facile bifariam secabitur.) accipiatur rectæ KO, æqualis MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales sint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipsi MO, æqualis: Est autem MO, ipsi HN, æqualis. (quia enim æquales sunt HM, MK; additis æqualibus MN, KO, tota æquales fient HN, MO) Igitur & NI, ipsi HN, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur æqualis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, æqualem esse quadrato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem recta K H, quæ semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, sit æqualis, ductaque recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cum ergo H K, æqualis sit semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. S K, æqualis semicircumferentiæ circuli, cuius semidiameter K R. Quia vero K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R, quod angulus R Q S, rectus sit [a] *quippe cum eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales sint: (Nam* [b] *angulus H L I, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.) erit* [c] *quadratum ex K Q, æquale rectangulo sub S K, K R, hoc est, circulo, cuius semidiameter K R, hoc est, circulus semidiametri K R, æqualis est quadrato lateris K Q, vel P. Quod est propositum.*

a 29. pri.
b 31. ter
c 17. sex

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum euicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contra, cuicũque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ [d] describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

d 14. sec

RVRSVS si per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato [e] constituamus figuram rectilineã æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

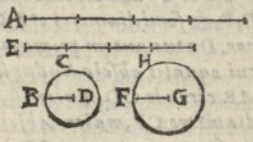
e 25. sex

DA-

VII.

DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentia dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nũc autem, vt viciſsim recta data linea circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda eſt. Deſcripto quouis circulo BC, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facile ita fiet. In priori inſtrumento propoſ. 5. ſumatur AH, æqualis ſemidiametro BD, deſcripti circuli, & per H, agatur ipſi DE, parallela HI. Nam AI, quadruplicata dabit rectam E, circumferentia circuli BC, æqualem, vt propoſ. 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, BD, inueniatur quarta proportionalis FG, atque ex G, ad interuallum GF, circulus deſcribatur FH. Dico eius circumferentiam data recta A, æqualem eſſe. Cum enim ſit, vt E, ad A, ita BD, ad FG; hoc eſt, [a] *ita tota diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli FH: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH, vt Pappus demonſtrauit:* [b] *erit quoque vt E, ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum ergo E, facta ſit æqualis circumferentiæ BC;* [c] *erit & recta A, circumferentiæ FH, æqualis, hoc eſt, circumferentia circuli FH, inuẽta eſt data recta A, æqualis. Quod eſt propoſitum.*



[a] 15. 5. qn

[b] 11. qn

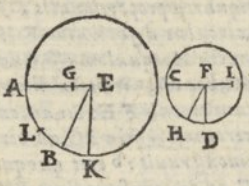
[c] 14. qn

ALITER, & facilius. Quarta parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis AK, in priori inſtrumento propoſ. 5. & per K, agatur KL, ipſi DE, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius ſemidiameter AL, æqualis erit datæ rectæ A; propterea qd eius circũferẽtia quadrans æqualis eſt rectæ AK, quartæ parti datæ rectæ A, vt propoſ. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inæquales AB, CD, quorum centra E, F, & semidiametri AE, CF, sitque AB, maior, & CD, minor, Datus autem primum sit in minori circulo arcus CD, cui æqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior est, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Abscindatur ergo AG, ipsi CF, æqualis, secenturque arcus CD, ita in H, ex propos. 2. vt eadem sit proportio arcus CH, ad arcum HD. quæ rectæ AG, ad rectã GE; arcuique CH, similis auferatur arcus AB. quod facile fiet, si ducta recta FH, angulo CFH, æqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE. ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, æqualem, vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, vt AE,



15. 5n *semidiameter ad semidiametrum CF, a hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit,*

b 11. 5n *hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. b Igitur erit quoque vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eun-*

c 9. 5n. *dem arcum CH; ac proinde arcus CD, AB, c æquales inter se erunt. Quod est propositum.*

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quam circumferentia circuli CD, minoris, ex quo ar-

cu i

cui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiameter A E, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit æqualis; secetur per propos. 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; arcuique B L, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui A K, similis auferatur CD. quod facile fiet, si ducta recta E K, angulo A E K, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualē esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcū BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum B K: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, a hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis a Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. b Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea que arcus AB, C D, c æquales erunt inter sese. Quod est propositum. 15. q̄n. 11. q̄n. c9. quin

BREVIVS. Arcui CD, reperiatur æqualis recta, per coroll. 1. propos. 4. Quadratricis; & huic rectæ æqualis arcus AB, vt in sequenti coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcui AB, reperiatur recta æqualis, & huic rectæ æqualis arcus C D: factumque erit, quod iubetur.

COROLLARIVM. I.

EX his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis datæ rectæ abscindi posse ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non sit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum supra ostensum est in coroll. 1. propos. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri posse rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectę lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita vt quadrans ad unam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nā

cum sit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum
a14.qn. arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis, a erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; sumatur illius dupla, quę nimirum circumferentiæ semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferētia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt semicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quā dupla illa recta linea ad datā rectam. quod quide facile fiet, si datæ rectæ ex dupla illa linea recta abscindatur æqualis, & semicircumferentia secetur, per propos. 2. vt secta est recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datam rectam, ita tota semicircumferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cū enim sit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita semicircumferentia ad eum arcum; sit au-
b14.qn tem recta illa dupla æqualis semicircumferentiæ; b erit quoque data recta illi arcui æqualis.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli est æqualis, vt tota recta composita æqualis sit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam si hęc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datę rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, secetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectā datam. quod facile etiam fiet, si datæ rectæ ex tripla illa linea recta abscindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. vt recta illa tripla secta est. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille datę rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim est, vt tripla illa recta ad rectam datā, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; estque tripla illa recta circumferentię trium quadrantum æqualis; c erit
c14.qn quoque data linea recta æqualis illi arcui abscisso.

DENIQVE si tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rursus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta composita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero si illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quam circumferentia dati circuli. quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnum eorum eandem

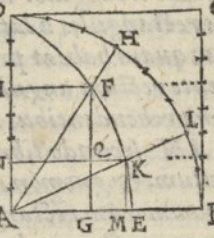
dem

dem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim illi datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; a 14. 9n
sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; a erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis.

ALITER, & brevius. Inventa ex coroll. 1. propos. 4. Quadratricis, vel ex propos. 5. eiusdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datę rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 12 secetur, vt secta est inventa illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, b erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est b 14. 9n
propositum.

COROLLARIVM II.

EX ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quã angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quę rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inventis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eãdem proportionẽ habeat, quam duæ rectæ inventæ; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum H8, in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter se esse incõmensurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HL, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, c vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.



c 33. sex

FINIS ELEMENTI SEXTI.

QVID

QVID IN SINGVLIS xv. Libris agat Euclides.

EX FEDERICO COMMANDINO

IN primo libro disputat de rectilineis figuris, videlicet de triãgulis, ac parallelogrãmis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipsa inter se comparans. Deinde parallelarum proprietates interijciens ad parallelogramma transit, eorumque ortum declarat: & symptomata, quæ in ipsis sunt, demonstrat. Postea triangulorum, parallelogrammorumque communicationem ostendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de ijs, quæ in trangulis rectangulis a lateribus describuntur, quadratis; quam habeat proportionem, quod a subtendente rectum angulum describitur, ad ea, quæ a comprehendentibus ipsum fiunt.

IN secundo libro parallelogrãmum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. Postea de quadratis, quæ a lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ a subtendentibus obtusum, & acutum angulum fiunt, ad ea, quæ a comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

SCD LYON 1

IN tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

IN quinto de analogijs.

IN sexto de proportionibus figurarum inter sese: de figuris similibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus: de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiãt parallelogrammis similibus, vel excedant: quo modo recta linea terminata, extrema ac media ratione secetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemque Sectorum, in circulis æqualibus.

IN septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus: de numeris planis: de quadratis: de cubis, & solidis: de similibus planis, & similibus solidis.

IN nono itẽ de similibus planis: de cubis, et solidis: & de numeris deinceps proportionalibus siue abvnitate, siue simpliciter: de numeris primis: de numeris paribus, de imparibus, de pariter pari

bus

bus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

IN undecimo primũ agitur de rectis lineis, quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in vno plano; quando rectæ, seu perpendiculares ad planum; quando parallelæ: quo modo a puncto in sublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis simul differit, tum de solidis angulis. Postremo de solidis parallelepipedis, et nonnulla de Prismatibus.

IN duodecimo de pyramidibus, & prismatibus: postea de conis, et cylindris: demũ de sphæris.

IN tertiodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi, octaedri, dodecaedri, et icosaedri; ad quorum euidẽtiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triãgulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri; & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione.

IN quintodecimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

SCD LYON 1

REGESTVM

† a b c d e f g

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii Kkk Lll Mmm Nnn

Omnia ſunt integra ſolia,



ROMAE,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

SCD LYON 1



SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1