ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΚΑΙ ΔΕΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ, ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΘΕΩΝΟΣ συνουσιῶν τὸ πρῶτον.

EVCLIDIS QVINDEcim Elementorum Geometriæ primum: ex Theonis Commentarijs Græcè, & Latinè.

Ex Bibliothecâ Minimorum Remensium sub litt. N.

Cui accesserunt

Scholia, in quibus quæ ad percipienda Geometriæ Elementa spectant, breuiter & dilucidè explicantur, authore Cunrado Dasypodio, Scholæ Argentinensis professore.

N.º 404.

Cloche

ARGENTORATI EXCVdebat Christianus Mylius,

M. D. LXIIII.

CVNRADVS DASYPODIVS LECTORI S. D.

ANNIS viginti ſex noſtri Gymnaſij cōſuetudo fuit: vt qui ex claſsibus ad publicas lectiones promouentur, primum audiant Euclidis librum: quò præcepta τῆς ἀποδείξεως exercere, & ad vſum aliquem accommodare poſsint: ſiquidem nemo facilius vim, & efficatiam eorum, quæ in libro de demonſtratione explicantur: aut etiam ab ipſo Ariſtotele in ſuo organo traduntur, intelliget: quàm qui in puluerem deſcenderit Geometricū. Idcirco in noſtra ſchola prudēter hoc eſt inſtitutum: vt poſt linguarum & artiū cognitionem, in diſciplinis Mathematicis adoleſcentes exerceantur: præſertim verò hoc probandum, & laudandum, quod in ipſo diſciplinarū veſtibulo, cognitionem rerum Geometricarum ſibi comparent, & in ijs quæ certiſsimis nituntur rationibus, ſua exacuant ingenia: vt aſſueſcant eò facilius naturæ & cæterarum artium, atq; diſciplinarum abſtruſiora comprehendere. Nam & Pythagoricorũ hoc quoq; fuit σχῆμα, καὶ βῆμα: quo dicto volebant ſignificare, pueros eſſe quàm primum deducendos ad Geometriæ cognitionem, & ita gradatim per mathematicas diſciplinas ad altiora aſcendendum. ſicuti & Plato neminem aptum & idoneum iudicauit ad percipienda Philoſophiæ præcepta: niſi inſtructus eſſet rebus Geometricis, cum diceret: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Itaq; cum hanc ſtudiorum rationem omnibus eruditis, etiam antiquiſſimis Philoſophis probari viderem, tanquam ſtudioſis adoleſcentibus vtilem, & valdè neceſſariam: fui & ego quoq; noſtro Typographo author, & ſuaſor, vt cum nulla amplius extarent exem-

exemplaria, hunc libellum imprimeret: ne bona, & fructuosa scholę nostrę constitutio intercideret. quoniam verò plerosque audiebam de difficultate demonstrationum Geometricarũ solere conqueri, meis quibuscunque illustrare volui scholijs. Idque eo feci consilio, nõ vt egregij & magni quid cogitarem edere. Sciebam enim rem esse paruam, neque vllius ingenij aut industriæ ex Proclo, aut alijs decerpere ea quæ propriè ad hanc tractationẽ pertinent: sed vt in assequendis hisce disciplinis, bonos adolescentes Geometrię imperitos aliquantulum mea iuuarem opera. Nam Geometrię elementa nuda, atque sterilia videntur, & prima fronte nullum peculiarẽ præ se ferunt fructum: sed si aditus ad ea percipienda præparetur, aut si quis diligentius con sideret, & intueatur ipsam οἰκονομίαν τῶν γεωμετρικῶν λόγων: atque perpendat exactius ipsam πορείαν, καὶ συνέχειαν τῶν προτάσεων,

τάσεων, cæteraq; omnia, quæ Geometria tractat, ad amussim examinet: tum abundè se ostendunt vtilitates in res humanas sese diffundentes: quas hoc loco enumerare prolixũ esset. Quantum igitur in me fuit, simplici & aperto sermonis genere, latinis verbis Græca interpretor: deinde breuibus scholijs, non nisi conor ea explicare, quæ difficiliora sunt: necq; omnia, sed præcipua tantum, & maximè necessaria, propediem certè plura, auxiliãte Deo Opt. Max. sum editurus, cùm in hunc, tum in alios Euclidis libros. Inter cætera verò etiam explicabo secundum Euclidis librum, qui de potentia lineę rectæ demonstrationes habet Geometricas. Quia verò τομὴ, καὶ διαίρεσις commune est σύμπτωμα linearum, corporum, & numerorum: idcirco statui demonstrationes illarum ipsarum secundi libri propositionum addere, petitas ex Arithmeticæ & Stereometrię princi-

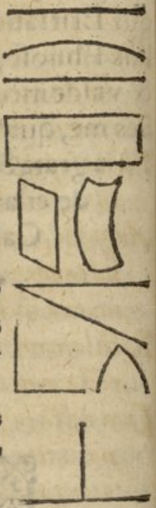
principiis. Imò si commodè fieri poterit, publicabo etiam ὀνομαστικὸν γεωμετρικόν: in quo explicabuntur vocabula huius scientiæ propria, quo studiosi possint terminos, vt vocant, artis intelligere, & sensum verborum assequi. Erit sanè dictionarium hoc, omnibus Philosophiæ studiosis vtilissimũ, & valdè iucundum. Sunt noñulla penes me, quæ cum confidam doctis viris grata & accepta fore, aliquando etiam in lucẽ emittam.

Calendis Aprilis,

Anno 1564.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ, ΕΚ ΤΩΝ τοῦ Θέωνος συνουσιῶν.

ΟΡΟΙ.



Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ, εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. Καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἀμβλεῖα

EVCLIDIS ELEMENTVM primum ex Theonis Commentarijs.

Definitiones.

PVnctum est, quod partem non habet.

Linea est, longitudo absq; latitudine.

Termini lineæ sunt puncta.

Linea recta est, quæ ex æquo posita est inter sua puncta.

Superficies est, quæ longitudinem & latitudinem tantum habet.

Termini superficiei sunt lineæ.

Plana superficies est, quæ ex æquo posita est inter suas lineas rectas.

Angulus planus est, duarũ linearũ sese in plano tangentiũ, & nõ ex aduerso positarum mutua inclinatio.

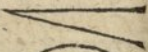
Rectilineum vocamus angulum, quem lineæ rectæ continent.

Cum recta super rectam stans, angulos vicinos inter se fecerit æquales: rectus est vterq; æqualium illorum angulorum.

Recta verò linea angulos illos æquales faciens: perpendicularis dicitur ad eam lineam, super qua consistit.

B

Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.



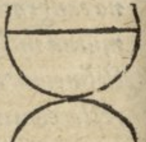
Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

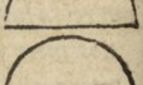
Σχῆμα ἐστὶ, τὸ ὑπό τινος, ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

Κύκλος ἐστὶ, σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

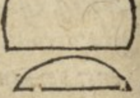
Κέντρον δὲ, τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

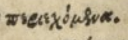


Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν, εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις, καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.



Ἡμικύκλιον δὲ ἐστι, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.





Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας, καὶ κύκλου περιφερείας.

Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τρίπλευ

Obtusus angulus est, qui recto est maior.

Acutus verò, qui recto est minor.

Terminus est, quod alicuius finis est.

Figura est, quæ termino aliquo, aut aliquibus terminis continetur.

Circulus est figura plana, vna linea contenta, quam vocamus circumferentiam: ad quam ab vno aliquo ex punctis, quæ intra ipsam sunt, omnes lineæ rectæ procidentes, inter se sunt æquales.

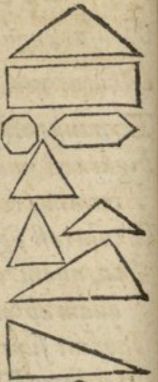
Centrum verò circuli, vocatur hoc in circulo medium.

Dimetiens circuli est, recta quædam linea, per Centrum circuli ducta, vtrinq; ad circumferentiam circuli desinens: ipsumq; circulum in duas partes æquales diuidens.

Semicirculus est figura, quam dimetiens circuli, & intercepta à dimetiente circumferentia continet.

Segmentum circuli est, figura, quam linea recta, & circuli circumferentia continet.

Rectilineæ figuræ sunt, quas rectæ lineæ ambiunt.



Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν.

Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων, ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, Ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον ἐστὶ, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσας ἔχον πλευράς.

Ἔτι τε τῶν τριπλεύρων σχημάτων, Ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνον ἐστὶ, τὸ ἔχον μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστι, καὶ ὀρθογώνιον.

Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

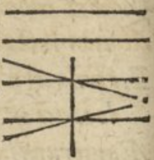
Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

Τὰ

Trilateræ quidem, quas ambiunt tres rectæ.
Quadrilateræ verò, quas plures, quàm quatuor rectæ ambiunt.
Ex trilateris autē figuris. Triangulus æquilaterus est, qui tria habet æqualia latera.
Æquicrurus, qui duo tantum habet æqualia latera.
Scalenus triangulus, qui tria habet inæqualia latera.
Item ex trilateris figuris, triangulus rectangulus est: qui angulum habet rectum.
Amblygonius, qui angulū habet obtusum.
Oxygonius qui angulos tres acutos habet.
Ex quadrilateris figuris, quadratū est, quod æquilaterum est, & rectangulum.
Quadrangulum oblōgum, quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum.
Rhombus, quod æquilaterum quidem est, sed non rectangulum.
Rhomboides, quod latera è regione posita habet æqualia, ac etiam angulos: non tamen est æquilaterum, neq; rectangulum.

Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα, Τραπέζια καλείσθω.

Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.



ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

Η ΤΗΣΘΩ, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν, κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

Καὶ παντὶ κέντρῳ, καὶ διαστήματι, κύκλον γράφεσθαι.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

ΤΑ ΤΩ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

Καὶ

Omnes reliquæ præter has quadrilateræ figuræ, Trapezia vocentur.

Æquediſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ in eodẽ plano ſitæ: & in infinitum ex vtraq; parte extenſæ: in neutra tamen concurrunt.

POSTVLATA.

Petatur. A quouis puncto, ad quoduis punctum rectam lineam deſcribere.

Item, lineam rectam finitam, in infinitum vſq; extendere.

Item, quouis centro, & interuallo deſcribere circulum.

COMMVNES NOTIONES,
ſeu ſententiæ.

Quæ eidem ſunt æqualia, illa inter ſe ſunt æqualia.

Si æqualibus æqualia fuerint adiecta, etiam tota ſunt æqualia.

Si ab æqualibus æqualia fuerint ablata, etiã quæ relinquuntur, ſunt æqualia.

Si inæqualibus æqualia fuerint adiecta: etiã tota ſunt inæqualia.

Si ab inæqualibus æqualia fuerint ſublata: quæ relinquuntur ſunt inæqualia.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον ἐστί.

Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, δύω ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

Καὶ δύο εὐθεῖαι, χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Qua

Quæ ſunt eiusdem dupla, inter ſe ſunt æqualia.

Quæ eiusdem ſunt dimidia, inter ſe ſunt æqualia.

Quæ applicata inter ſe conueniunt, ſunt æqualia.

Totum eſt maius ſua parte.

Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales.

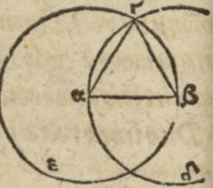
Cum in duas rectas, recta incidens linea, duos internos ex vna parte angulos, duobus rectis facit minores: productæ iſtæ duæ lineæ rectæ in infinitum, ex ea parte concurrent, vbi ſunt illi duo anguli duobus rectis minores.

Duæ lineæ rectæ figuram non faciunt.

Πρότασις α. πρόβλημα.

ΕΠΙ ΤΗΣ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς αβ εὐθείας, τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ, τῷ αβ, κύκλος γεγράφθω, ὁ βγε. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βα, κύκλος γεγράφθω, ὁ αγδ, καὶ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ α, β, σημεῖα, ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι, αἱ γα, γβ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ



γεβ κύκλου: ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αβ, πάλιν ἐπεὶ τὸ β σημεῖον, κέντρον ἐστὶ, τοῦ γαδ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βα. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ γα, τῇ αβ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν γα, γβ, τῇ αβ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα, καὶ ἡ γα ἄρα τῇ γβ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ

γα,

Propositio prima. problema.

SVper data linea recta finita, triangulum æquilaterum constituere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita $\alpha\beta$. *(Explicatio quæsiti.) Oportet super linea recta* $\alpha\beta$, *triangulum æquilaterum constituere. (Delineatio.) Centro* α, *interuallo* $\alpha\beta$, *describatur circulus* $\beta\gamma\varepsilon$. *Item centro* β, *interuallo* $\beta\alpha$, *describatur circulus* $\alpha\gamma\delta$. *Ducantur deniq; lineæ rectæ* $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, *(Demonstratio.) Quoniam punctum* α, *est centrum circuli* $\gamma\varepsilon\beta$: *idcirco recta* $\alpha\gamma$, *est æqualis rectæ* $\alpha\beta$. *rursusquoniam punctum* β, *est centrum circuli* $\gamma\alpha\delta$: *idcirco recta* $\beta\gamma$, *æqualis est rectæ* $\beta\alpha$. *Verum demonstratum est, quod recta* $\gamma\alpha$, *etiam æqualis sit rectæ* $\alpha\beta$. *Ergo vtraq; rectarum* $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$, *est æqualis rectæ* $\alpha\beta$. *Quæ verò eidem sunt æqualia, illa etiam inter se sunt æqualia. Ergo* $\gamma\alpha$ *recta, etiam æqualis est rectæ* $\gamma\beta$. *Tres igitur lineæ rectæ* $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, *sunt in-*

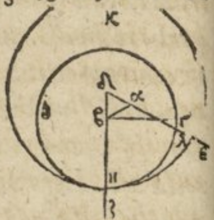
ter

γα, αβ, βγ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς αβ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β. πρόβλημα.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ βγ εὐθείᾳ, ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου, ἐπὶ τὸ β σημεῖον, εὐθεῖα ἡ αβ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δαβ. καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς δα, δβ, εὐθεῖαι, αἱ αε, βζ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ β, διαστήματι δὲ τῷ βγ, κύκλος γεγράφθω ὁ γηθ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ δ, διαστήματι δὲ τῷ δη, κύκλος γεγράφθω ὁ ηκλ. (Ἀπόδειξις.)



ter se æquales. (Conclusio.) Triangulus itaq; αβγ, est æquilaterus: & consistit super data linea recta finita αβ. Quod faciendum erat.

Propositio secunda. Problema.

AD punctum datum, lineæ rectæ datæ, æqualem lineam rectam ponere.

Explicatio dati.) Sit punctum datum α, & data recta linea βγ. (Explicatio quæsiti) Ad punctum datum α, datæ lineæ rectæ βγ, ponenda est recta linea æqualis. (Delineatio.) Ab α puncto, ad punctum β, ducatur linea recta αβ, & super linea αβ statuatur triangulus æquilaterus αδβ. Extendantur etiam lineæ rectæ δα, δβ versus puncta ε, ζ, & fiant rectæ αε, βζ. Centro quoq; β, interuallo βγ, describatur circulus γηθ. Item Centro δ, interuallo δη, describatur circulus ηκλ (secans lineã rectã δζ, in puncto η.) Demon-

ξις.) Ἐπεὶ οὖν τὸ β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ γηθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ βγ, τῇ βη. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ δ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ ηκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ δλ, τῇ δη, ὧν ἡ δα, τῇ δβ ἴση ἐστί. λοιπὴ ἄρα ἡ αλ, λοιπῇ τῇ βη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ βη ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αλ, βγ, τῇ βη ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ ἡ αλ ἄρα, τῇ βγ, ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ, ἴση εὐθεία κεῖται ἡ αλ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις γ. πρόβλημα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος, τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ αβ, γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. (Κατασκευή.) Κείσθω

Demonstratio.) Quoniam punctum β est centrum circuli $\gamma\eta\theta$: idcirco recta $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\beta\eta$. Item quoniam punctum δ, est centrum circuli $\eta\kappa\lambda$: igitur recta $\delta\lambda$ est æqualis rectæ $\delta\eta$, ex quibus $\delta\alpha$ fuit æqualis rectæ $\delta\beta$. reliqua igitur $\alpha\lambda$, reliquæ $\beta\eta$ est æqualis. Vtraq; idcirco rectarum $\alpha\lambda$, $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\beta\eta$. quæ verò eidem sunt æqualia, illa etiã inter se sunt æqualia. quare recta $\alpha\lambda$, etiam erit æqualis rectæ $\beta\gamma$. (Conclusio.) Ad datum igitur punctum α, datæ lineæ rectæ $\beta\gamma$: æqualis posita est recta linea $\alpha\lambda$, quod faciendum erat.

Propositio tertia. Problema.

DVabus rectis inæqualibus datis: ex maiore minori æqualem rectã lineam auferre.

Explicatio dati.) Sit data linea recta maior $\alpha\beta$, minor verò γ. (Explicatio quæsiti.) Ex maiore linea $\alpha\beta$, tollenda est recta æqualis lineæ γ. (Delineatio.) Ponatur κείσθω πρὸς τῷ α σημείῳ, τῇ γ εὐθείᾳ, ἴση ἡ αδ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ α, διαστήματι δὲ τῷ αδ κύκλος γεγράφθω ὁ δεζ. (Ἀπόδειξις) Καὶ ἐπεὶ τὸ α σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δεζ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ αε, τῇ αδ. ἀλλὰ καὶ ἡ γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν αε, γ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ ἡ αε τῇ γ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν αβ, γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ γ, ἴση ἀφῄρηται ἡ αε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ. θεώρημα.

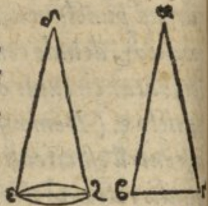
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκάτεραν ἑκατέρα, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκάτερα ἑκατέρα, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ *tur ad punctum α, lineæ γ, æqualis recta linea αδ. deinde centro α, interuallo αδ, describatur circulus δεζ (secans rectam αβ, in puncto ε. (Demonstratio.) Quoniã punctum α, centrũ est circuli δεζ. idcirco recta αε, est æqualis rectæ αδ. Verũ recta γ, etiã est æqualis rectæ αδ. Vtraq; igitur rectarũ αε, γ, est æqualis rectæ αδ. Quare αε etiã est æqualis rectæ γ Duabus igitur rectis datis inæqualibus αβ, γ: ex maiore αβ, ablata est αε, æqualis minori γ. Quod faciendum erat.*

Propositio quarta. Theorema.

SI duo trianguli duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterũ alteri: & angulum angulo æqualem, qui ęqualibus rectis lineis continetur: etiam basim basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erunt ęquales, alter alteri, quos latera subtẽdũt ęqualia.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ, habentes duo latera αβ, αγ æqualia, δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἴσην.



(Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται) ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ, τῇ ὑπὸ δζε. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν α σημείου, ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, τῆς δὲ αβ εὐθείας, ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσει καὶ τὸ β ἐπὶ τὸ ε. διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν αβ, τῇ δε. ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς αβ ἐπὶ τὴν δε, ἐφαρμόσει καὶ ἡ αγ εὐθεῖα, ἐπὶ τὴν δζ. διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ βαγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ εδζ. ὥστε καὶ τὸ γ σημεῖον, ἐπὶ τὸ ζ σημεῖον ἐφαρμόσει. διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν αγ, τῇ δζ.

τῇ δζ.

duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\delta\zeta$ alterum alteri: latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\delta\epsilon$: & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$: & angulum $\beta\alpha\gamma$, æqualem angulo $\epsilon\delta\zeta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd basis $\beta\gamma$, sit æqualis basi $\epsilon\zeta$: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, sit æqualis triangulo $\delta\epsilon\zeta$, & reliqui anguli, reliquis angulis sint æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus etiam $\alpha\beta\gamma$, sit æqualis angulo $\delta\epsilon\zeta$: angulus deniq; $\alpha\gamma\beta$, sit æqualis angulo $\delta\zeta\epsilon$. (Demonstratio.) Quando enim triangulus $\alpha\beta\gamma$, applicatur triangulo $\delta\epsilon\zeta$. Punctum α, ponitur super puncto δ: & recta $\alpha\beta$, applicatur rectæ $\delta\epsilon$. Cadet etiam punctum β, super puncto ϵ. quia $\alpha\beta$ est æqualis rectæ $\delta\epsilon$. Deinde si recta $\alpha\beta$, applicatur rectæ $\delta\epsilon$: etiam recta $\alpha\gamma$, applicabitur rectæ $\delta\zeta$. quoniam angulus $\beta\alpha\gamma$, proponitur æqualis angulo $\epsilon\delta\zeta$. quare & punctum γ, applicabitur puncto ζ. cum recta $\alpha\gamma$, æ-

τῇ δζ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ β, ἐπὶ τὸ ε ἐφηρμόκει. ὥστε βάσις ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ, μὲν β ἐπὶ τὸ ε ἐφαρμόσαντος, τοῦ δὲ γ ἐπὶ τὸ ζ, ἡ βγ βάσις ἐπὶ τὴν εζ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ βγ βάσις, ἐπὶ τὴν εζ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται, ὥστε καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ἐπὶ ὅλον τὸ δεζ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται. καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, ἡ δὲ ὑπὸ αγβ τῇ ὑπὸ δζε. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται: καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε. θεώρημα.

Τῶν

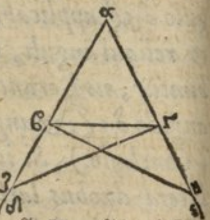
qualis sit rectæ $\delta\zeta$. Verum punctum β, applicabatur puncto ε. Basis igitur $\beta\gamma$, basi $\varepsilon\zeta$ applicabitur. Nam si punctum β, applicetur puncto ζ, & basis $\beta\gamma$, non applicetur basi $\varepsilon\zeta$: tum duæ rectæ figuram facient, quod est impossibile. Basis igitur $\beta\gamma$, basi $\varepsilon\zeta$ applicatur, & est ei æqualis. Unde & totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toto triangulo $\delta\varepsilon\zeta$ applicabitur, & ei erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis applicabuntur, eisq; erunt æquales: angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\delta\varepsilon\zeta$: & angulus $\alpha\gamma\beta$, angulo $\delta\zeta\varepsilon$. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: etiam basin basi habebunt æqualem: & triangulus triangulo erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis erunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. quod erat demonstrandum.

Propositio quinta. Theorema.

 Trian-

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν αβ πλευρὰν, τῇ αγ πλευρᾷ. καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς αβ, αγ, εὐθεῖαι αἱ βδ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ αγβ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ βγε. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς βδ, τυχὸν σημεῖον τὸ ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αε, τῇ ἐλάττονι τῇ αζ ἴση ἡ αη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ζγ, ηβ εὐθεῖαι.



(Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αζ, τῇ αη, ἡ δὲ αβ, τῇ αγ, δύο δὴ αἱ ζα, αγ, δυσὶ ταῖς ηα, αβ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ζαη. βάσις ἄρα ἡ ζγ, βάσει τῇ ηβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αζγ τρίγωνον, τῷ αηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται.

καὶ

TRiangulorum, qui duo æqualia habēt latera, anguli ad basim sunt æquales. Et productis æqualibus illis rectis, etiam qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales.

Explicatio dati.) Sit triangulus æquicrurus αϐγ, habens latus αϐ, æquale lateri αγ: & producantur lineæ αϐ, αγ, ἐπ' εὐθείας, (hoc est, vt continuè extendatur secundum lineam rectam) & fiant rectæ ϐδ, γε. (Explicatio quæsiti) Dico quod angulus αϐγ, sit æqualis angulo ᾱγϐ. Et quòd angulus γϐδ, sit æqualis angulo ϐγε. (Delineatio.) Sumatur in linea ϐδ, punctum quoduis ζ. deinde tollatur à maiore linea αε, minori αζ, æqualis linea recta αη. deniq; ducantur rectæ ζγ, ηϐ. (Demonstratio.) Quoniam recta αζ, est æqualis rectæ αη: & recta αϐ, æqualis rectæ αγ: duæ igitur rectæ ζα, αγ, duobus rectis ηα, αϐ sunt æquales, altera alteræ: & cōmunem ambiunt ζαη angulum. quare basis ζγ, basi ηϐ est æqualis, & triangulus αζγ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἡ μὲν ὑπὸ αγζ, τῇ ὑπὸ αβη, ἡ δὲ ὑπὸ αζγ, τῇ ὑπὸ αηβ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ αζ, ὅλῃ τῇ αη ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ αβ τῇ αγ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ βζ, λοιπῇ τῇ γη ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ζγ, τῇ ηβ ἴση. δύο δὴ αἱ βζ, ζγ, δυσὶ ταῖς γη, ηβ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βζγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ γηβ ἐστὶν ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ, ἡ βγ. καὶ τὸ βζγ ἄρα τρίγωνον, τῷ γηβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν, ἡ μὲν ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ, ἡ δὲ ὑπὸ βγζ, τῇ ὑπὸ γβη. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ αβη γωνία, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγζ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ γβη, τῇ ὑπὸ βγζ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει, τοῦ αβγ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ζβγ, τῇ ὑπὸ ηγβ ἴση, καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα ἰσοσκε-

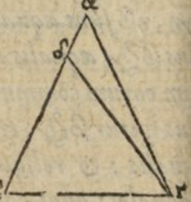
λῶν

triangulo $\alpha\eta\beta$ æqualis eſt: reliqui etiam anguli, reliquis angulis æquales ſunt, alter alteri, quos æqualia illa latera ſubtendunt: angulus $\alpha\gamma\zeta$, angulo $\alpha\beta\eta$: & angulus $\alpha\zeta\gamma$, angulo $\alpha\eta\beta$. Cũ verò tota recta $\alpha\zeta$, toti rectæ $\alpha\eta$ ſit æqualis, & recta $\alpha\beta$ ablata, ſit æqualis rectæ $\alpha\gamma$ ablatæ. idcirco reliqua linea recta $\beta\zeta$, reliquæ rectæ $\gamma\eta$ etiam erit æqualis. Verum recta $\zeta\gamma$ demonſtrata eſt æqualis eſſe rectæ $\eta\beta$. duæ igitur rectæ $\beta\zeta$, $\zeta\gamma$, duabus rectis $\gamma\eta$, $\eta\beta$ ſunt æquales altera alteræ: & angulus $\beta\zeta\gamma$, æqualis eſt angulo $\gamma\eta\beta$: baſis etiam eorum communis eſt recta $\beta\gamma$: triangulus igitur $\beta\zeta\gamma$, triangulo $\gamma\eta\beta$ etiam erit æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis æquales: quos æqualia illa latera ſubtendũt. angulus $\zeta\beta\gamma$, æqualis angulo $\eta\gamma\beta$: & angulus $\beta\gamma\zeta$, angulo $\gamma\beta\eta$. Quoniam nunc totus angulus $\alpha\beta\eta$, toto angulo $\alpha\gamma\zeta$ demonſtratus eſt æqualis: quorũ ablatus angulus $\gamma\eta\beta$, ablato angulo $\beta\gamma\zeta$ eſt æqualis: ergo reliquus $\alpha\beta\gamma$ angulus, reliquo $\alpha\gamma\beta$ angulo eſt æqualis, & ſunt anguli ad baſim trianguli $\alpha\beta\gamma$.

λῶν τριγώνων, αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς. θεώρημα.

ΕΑν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῇ ὑπὸ αγβ γωνίᾳ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αβ, πλευρᾷ τῇ αγ ἐστὶν ἴση. (Κατασκευή.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ αβ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς αβ, τῇ ἐλάσσονι τῇ αγ, ἴση ἡ δβ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δβ τῇ αγ, κοινὴ δὲ ἡ βγ· δύο δὴ αἱ δβ, βγ δυσὶ ταῖς αγ, γβ, ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑ-

πὸ

Angulus verò ζβγ, angulo ηγε demonstratus est æqualis esse: & sunt sub basi. (Conclusio.) Triangulorum igitur, qui duo habent æqualia latera, anguli ad basim sunt æquales, & productis æqualibus illis rectis, etiam qui sub basi sunt anguli, inter se erunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

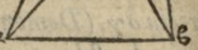
Propositio sexta. Theorema.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendunt, erũt inter se æqualia.

Explicatio dati.) Sit triangulus αβγ, habens angulum αβγ, æqualem angulo αγβ. Explicatio quæsiti.) Dico quòd latus αβ, est æquale lateri αγ. (Delineatio cum hypothesi.) Si enim recta αε, nõ est æqualis rectæ αγ: altera illarum erit maior, sit recta αβ maior. ex recta αβ maiore: lineæ rectæ αγ minori auferatur linea recta βδ æqualis: & ducatur recta δγ. (Demonstratio.) Quoniã latus δβ, æquale est lateri αγ, & cõmune latus εγ: duo igitur latera δε, βγ, duobus laterib⁹ αγ, γβ ὑπὸ δβγ, γωνία τῇ ὑπὸ αγβ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ δγ, βάσει τῇ αβ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δγβ τριγώνῳ ἴσον ἔσται. τὸ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον. ὅπερ ἄτοπον, οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ αγ: ἴση ἄρα. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ, ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ. θεώρημα.

ΕΠὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



Ἔκθεσις.) Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς αβ, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς αγ, γβ, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι, αἱ αδ, δβ, ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ *sunt æqualia alterũ alteri: & angulus $\delta\beta\gamma$, angulo $\alpha\gamma\beta$ est æqualis. Basis igitur $\delta\gamma$, basi $\alpha\beta$ est æqualis: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\delta\gamma\beta$ est æqualis: maior minori. quod est absurdum. Quare recta $\alpha\beta$, non est inæqualis rectæ $\alpha\gamma$, itaq; erit ei æqualis. (Conclusio.) Si ergo trianguli, duo anguli æquales inter se fuerint: etiam latera, quæ æquales illos angulos subtendũt, erunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio septima. Theorema.

SVper eadẽ linea recta, duabus eisdem rectis, aliæ duę rectæ æquales altera alteri, non statuentur ad aliud, atq; aliud punctum, in easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ.

Explicatio dati.) Si enim est poßibile, sit linea recta $\alpha\beta$, & super ea duabus rectis $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$, constitutis: aliæ duæ lineæ rectæ $\alpha\delta$, $\delta\beta$ constituantur æquales altera alteri: ad aliud

atq;

μείῳ, τῷ τε γ, καὶ δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ γδ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, τὰ α, β, ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις, ὥστε ἴσην εἶναι, τὴν μὲν γα, τῇ δα, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ, τὸ α, τὴν δὲ γβ τῇ δβ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ β. (Κατασκευή.) Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ γδ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ αγ τῇ αδ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, τῇ ὑπὸ αδγ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ αδγ τῆς ὑπὸ δγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ γδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ δγβ, πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ γβ τῇ δβ, ἴση ἐστὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ γδα, γωνία τῇ ὑπὸ δγβ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς, καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. (Συμπέρασμα.) Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκάτερα ἑκατέρα συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ, καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η. θεώρημα.

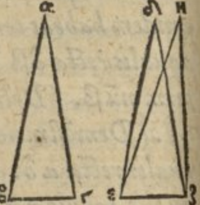
Ἐὰν δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκάτεραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν, τῇ βάσει ἴσην, καὶ *atq; aliud punctum γ & δ, in easdem partes γ, & δ: eosdē habentes terminos α, & β: quos lineæ rectæ primæ: ita ut $\gamma\alpha$ æqualis sit $\delta\alpha$: et eundem habeat terminū α: recta verò $\gamma\beta$, sit æqualis rectæ $\delta\beta$, & eundem cum ea habeat terminū β. (Delineatio.) Et ducatur recta $\gamma\delta$. (Demōstratio.) Quoniā $\alpha\gamma$ recta est æqualis rectæ $\alpha\delta$: etiam angulus $\alpha\gamma\delta$, erit æqualis angulo $\alpha\delta\gamma$. verum angulus $\alpha\delta\gamma$, maior est angulo $\delta\gamma\beta$: multò ergo angulus $\gamma\delta\beta$ maior est angulo $\delta\gamma\beta$. Item, quoniam latus $\gamma\beta$, est æquale lateri $\delta\beta$: erit etiam angulus $\gamma\delta\alpha$, angulo $\delta\gamma\beta$ æqualis. Verum ille ipse angulus $\gamma\delta\alpha$ demonstratus est esse multò maior angulo $\delta\gamma\beta$, quod est impossibile. (Cōclusio.) Super eadem igitur recta, duabus eisdem rectis, aliæ duæ rectæ æquales altera alteri: non statuentur ad aliud atq; aliud punctum, in easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio octaua. Theorema.

SI duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri, habuerint verò etiam basin, æqualem basi: etiā

anguτὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν βγ, βάσει τῇ εζ ἴσην. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ ἐστὶν ἴση. (Κατασκευή.) Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ αβγ τριγώνου, ἐπὶ τὸ δεζ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν β σημείου ἐπὶ τὸ ε σημεῖον, τῆς δὲ βγ εὐθείας ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόσει, καὶ τὸ γ σημεῖον ἐπὶ τὸ ζ: διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν βγ τῇ εζ. (Ἀπόδειξις.) Ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς βγ, ἐπὶ τὴν εζ, ἐφαρμόζουσι, καὶ αἱ βα, γα, ἐπὶ τὰς εδ, δζ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ βγ, ἐπὶ βάσιν τὴν εζ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ, οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ εη, ηζ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς



αὐτῆς

angulum angulo habebunt ęqualem, quem æquales illæ lineæ rectæ continent.

Explicatio dati.) Sint duo triãguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\zeta$: habentes duo latera $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$: duobus lateribus $\delta\varepsilon$, $\delta\zeta$, æqualia, alterum alteri, latus scilicet $\alpha\beta$, æquale lateri $\delta\varepsilon$: & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$: item basim $\beta\gamma$, æqualem basi $\varepsilon\zeta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd angulus $\beta\alpha\gamma$, sit æqualis angulo $\alpha\delta\zeta$. (Delineatio.) Quando enim triangulus $\alpha\beta\gamma$, applicatur triangulo $\delta\varepsilon\zeta$, & punctum β, ponitur super puncto ε: linea quoq; recta $\beta\gamma$, applicatur rectæ $\varepsilon\zeta$: tum punctum γ, etiam applicabitur puncto ζ: quia recta $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\varepsilon\zeta$. (Demonstratio.) Quando verò recta $\beta\gamma$, applicatur rectæ $\varepsilon\zeta$: applicabuntur etiã rectæ $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, rectis $\varepsilon\delta$, $\delta\zeta$. Si enim basis $\beta\gamma$, applicatur basi $\varepsilon\zeta$, & latera $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, non applicẽtur lateribus $\varepsilon\delta$, $\delta\zeta$. Verũ diuersum habuerint sitũ, vt rectæ $\varepsilon\eta$, $\eta\zeta$, Constituentur su-

αὐτῆς εὐθείας, δύσι ταῖς αὐταῖς εὐθείαις, ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ, οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς βγ, βάσεως ἐπὶ τὴν εζ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ βα, αγ πλευραὶ ἐπὶ τὰς εδ, δζ. ἐφαρμόσουσι ἄρα. ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ εδζ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς, ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχει, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ. Πρόβλημα.

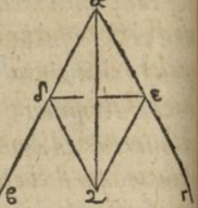
Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον, δίχα τεμεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αβ τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ ἀφῃρήσθω *per eadē linea recta, duabus eisdē rectis aliæ duæ rectæ æquales altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem habentes terminos, quos lineæ primæ. sed non statuentur ad diuersum punctum. Quare falsum est, quòd applicata basi βγ, basi εζ: non applicētur βα, αγ, latera, lateribus εδ, δζ. applicabuntur ergo. Vnde sequitur, quòd angulus βαγ, applicabitur angulo εδζ, & ei erit æqualis. (Conclusio.) Si igitur duo trianguli, duo latera duobus lateribus habuerint æqualia alterum alteri: habuerint verò etiam basim basi æqualem: etiam angulum angulo habebunt æqualem, quem æquales illæ rectæ lineæ cōtinent. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio nona. Problema.

DAtum angulū rectilineū per medium secare, vel in duas partes ęquales secare.

Explicatio dati.) Sit datus angulus rectilineus βαγ. (Explicatio quæsiti.) Angulus βαγ secādus est in duas partes æquales. (Delineatio.) Sumatur in linea αβ, punctū quod-



θω ἀπὸ τῆς αγ, τῇ αδ ἴση, ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον, τὸ δεζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αζ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ βαγ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. (Απόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αδ, τῇ αε, κοινὴ δὲ ἡ αζ, δύο δὴ αἱ δα, αζ, δυσὶ ταῖς εα, αζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρα. καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστι. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαζ, γωνία τῇ ὑπὸ εαζ, ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Η ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ βαγ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς αζ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι. Πρόβλημα.

ΤΗν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην, δίχα τεμεῖν.

Ἐκθεσις.) Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τὴν αβ, δίχα τεμεῖν. (Κατασκευή.) Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς

τῆς

uis δ, & tollatur ex linea αγ, lineæ αδ æqualis recta linea αε: postea ducatur linea δε: & statuatur super linea δε, triangulus æquilaterus δζε: deniq; ducatur linea αζ. (Explicatio iam factæ delineationis.) Dico quòd linea αζ, in duas partes æquales secet angulũ βαγ. (Demonstratio.) Quoniam recta αδ, æqualis est rectæ αε, et communis sit recta αζ: idcirco duo latera δα, αζ, duobus lateribus εα, αζ, sunt æqualia alterum alteri: & basis δζ, æqualis basi εζ. Angulus igitur δαζ, angulo εαζ est æqualis. (Conclusio.) Datus igitur angulus rectilineus βαγ, per lineam rectam αζ, est dissectus in duas partes æquales. Id quod faciendum erat.

Propositio decima. Problema.

DAtam lineam rectam finitam in duas partes æquales secare.

Explicatio dati.) Sit data linea recta finita αβ. (Explicatio quæsiti.) Linea recta finita αβ, dissecanda est in duas partes æquales. (Delineatio.) Statuatur super recta τῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ αβγ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ αβγ γωνία δίχα, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἡ αβ εὐθεία, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ σημεῖον.

(Απόδειξις.) Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ γβ, κοινὴ δὲ ἡ γδ, δύο δὴ αἱ αγ, γδ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ, ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἐστὶν ἴση. βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Η ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ αβ, δίχα τέτμηται κατὰ τὸ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια. πρόβλημα.

ΤΗ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας, εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εκθεσις.) Εστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ γ. (Διορισμὸς.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ γ σημείου, τῇ αβ εὐθείᾳ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγα-

αβ triangulus æquilaterus $\overline{\alpha}\beta\gamma$: & secetur angulus αβγ in duas partes æquales, per lineam rectam γδ. (Explicatio factæ delineationis) Dico quòd recta αϐ, secta sit in duas partes æquales in puncto δ. (Demonstratio.) Quoniam recta $\overline{\alpha}\gamma$, est æqualis rectæ $\bar{\gamma}\beta$, & communis recta γδ: duo igitur latera αγ, γδ duobus lateribus βγ, γδ sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\overline{\alpha}\gamma\delta$, est æqualis angulo βγδ. Ergo basis αδ, est æqualis basi βδ. (Conclusio.) Data igitur linea recta finita, αβ, secta est in duas partes æquales in puncto δ. Id quod faciendum erat.

Propositio vndecima. Problema.

DAtæ lineæ rectę, à dato in ea puncto: ducere lineam rectam ad angulos rectos, id est, rectos facientem angulos.

Explicatio dati.) Sit data linea recta αβ, & datum in ea pũctum γ. (Explicatio quæsiti.) Ducenda est à puncto γ, linea recta re-

ἀγαγεῖν. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς αγ, τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ κείσθω τῇ γδ ἴση, ἡ γε, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς δε τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ζδε, καὶ

ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἧκται ἡ ζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ δγ, τῇ γε, κοινὴ δὲ ἡ ζγ, δύο δὴ αἱ δγ, γζ, δυσὶ ταῖς εγ, γζ, ἴσαι εἰσὶν, ἑκάτερα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ δζ, βάσει τῇ εζ ἴση ἐστί. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγζ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εγζ, ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα, τῶν ὑπὸ δγζ, ζγε. (Συμπέρασμα.) Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἧκται, ἡ ζγ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

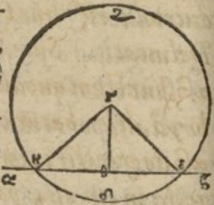
Πρότασ

ctos faciens angulos cum linea $\alpha\beta$. (Delineatio.) Sumatur in linea $\alpha\gamma$, quoduis punctum δ: & fiat lineæ $\gamma\delta$, æqualis linea $\gamma\varepsilon$. Et statuatur super linea $\delta\varepsilon$, triangulus æquilaterus $\delta\zeta\varepsilon$. deniq; ducatur recta $\zeta\gamma$. (Explicatio factæ delineationis.) Dico, quod datæ lineæ rectæ $\alpha\beta$, à dato in ea puncto γ, ad angulos rectos ducta sit recta linea $\gamma\zeta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\delta\gamma$, est æqualis rectæ $\gamma\varepsilon$, communis verò recta $\zeta\gamma$. Duo igitur latera $\delta\gamma$, $\delta\zeta$, duobus lateribus $\varepsilon\gamma$, $\gamma\zeta$, sunt æqualia alterum alteri, & basis $\delta\zeta$, æqualis est basi $\varepsilon\zeta$. ergo angulus $\delta\gamma\zeta$, æqualis est angulo $\varepsilon\gamma\zeta$, (& sunt ἐφεξῆς, id est, vicini) Quando verò recta super rectam stans, angulos vicinos æquales fecerit inter se: vterq; æqualium angulorum est rectus. Ergo vterq; angulorum $\delta\gamma\zeta$, $\zeta\gamma\varepsilon$, est rectus. (Conclusio.) Datæ igitur lineæ rectæ $\alpha\beta$, à dato, quod in ea est puncto γ: ad angulos rectos ducta est recta $\zeta\gamma$. Id quod faciendum erat.

Πρότασις ιβ. πρόβλημα.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ γ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή) Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς αβ εὐθείας, τυχὸν σημεῖον τὸ δ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ γ, διαστήματι δὲ τῷ γδ, κύκλος γεγράφθω ὁ εζη, καὶ τετμήσθω ἡ εη δίχα κατὰ τὸ θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ γη, γθ, γε. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ηθ τῇ θε, κοινὴ δὲ ἡ θγ,



Propositio duodecima. Problema.

AD lineam rectam datã infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta infinita $\alpha\beta$, & punctum quod in ea non est datum γ. (Explicatio quæsiti.) A puncto dato γ, ad datam lineam rectam infinitam $\alpha\beta$: ducenda est linea recta perpendicularis. Delineatio.) Sumatur ex altera parte lineæ $\alpha\beta$, punctum quoduis δ: & centro γ, interuallo $\gamma\delta$, describatur circulus $\varepsilon\zeta\eta$, secans lineam $\alpha\beta$, in punctis ε, & η. Postea dissecetur linea recta $\varepsilon\eta$, in duas partes æquales in puncto θ. & ducantur lineæ $\gamma\eta$, $\gamma\theta$, $\gamma\varepsilon$. (Explicatio iã factæ delineationis.) Dico quod ad lineam rectam datã infinitam $\alpha\beta$, à puncto γ dato, quod in ea non est, perpendicularis ducta sit recta linea $\gamma\theta$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\eta\theta$, æqualis est rectæ $\theta\varepsilon$: & communis

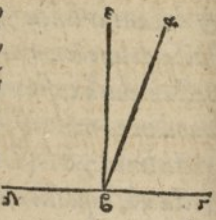
recta

ἡ θγ, δύο δὴ αἱ ηθ, θγ, δύσι ταῖς εθ, θγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ γη, βάσει τῇ γε, ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ γθη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εθγ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν. καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα, κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν. (Συμπέρασμα.) Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον, τὴν αβ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ γθ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ. θεώρημα.

ΩΣ ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα, γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Ἔκθεσις.) Εὐθεῖα γάρ τις ἡ αβ, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γδ σταθεῖσα, γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ γβα, αβδ. (Διορισμὸς) Λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ γβα, αβδ, γω-



νίαι

recta $\vartheta\gamma$. ergo duo latera $\eta\vartheta$, $\vartheta\gamma$, duobus lateribus $\varepsilon\vartheta$, $\vartheta\gamma$, sunt æqualia alterum alteri: & basis $\gamma\eta$, basi $\gamma\varepsilon$, est æqualis. quare angulus $\gamma\theta\eta$, angulo $\varepsilon\theta\gamma$ est æqualis: & sunt vicini. Quando verò recta super recta stans, angulos vicinos æquales inter se fecerit: vterq; æqualium illorũ angulorum est rectus, & recta super recta stans, perpendicularis ad eam dicitur. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam infinitam $\alpha\beta$, à puncto γ dato quod in ea non est: perpendicularis ducta est recta $\gamma\theta$. Id quod faciendum erat.

Propositio decima tertia: Theorema.

VT vt recta super recta stans, angulos fecerit: vel duos rectos, vel duobus rectis æquales eos faciet.

Explicatio dati.) Recta quædam $\alpha\beta$, stans super recta $\gamma\delta$, faciat angulos $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$. Explicatio q̃siti.) Dico q; anguli $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$, vel νίαι ἢ δύο ὀρθαὶ εἰσὶν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. (Κατασκευή.) Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ γβα, τῇ ὑπὸ αβδ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ β σημείου τῇ γδ πρὸς ὀρθὰς, ἡ βε. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ γβε δυσὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ εβδ. αἱ ἄρα ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς ὑπὸ γβα, αβε, εβδ, εἰσὶν ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ ἡ ὑπὸ δβα δυσὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα ἴση ἐστὶ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αβγ. αἱ ἄρα γωνίαι, αἱ ὑπὸ δβα, αβγ τρισὶ ταῖς ὑπὸ δβε, εβα, αβγ ἴσαι εἰσὶν. ἐδείχθησαν δὲ, καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. καὶ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ ἄρα, ταῖς ὑπὸ δβα, αβγ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ γβε, εβδ, δύο ὀρθαὶ εἰσὶ, καὶ αἱ ὑπὸ δβα, αβγ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (Συμπέρασμα.) Ως ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

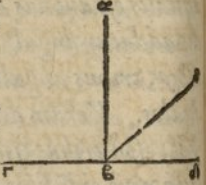
Πρό-

vel sint duo recti, vel duobus rectis æquales. Delineatio cũ hypothesi.) Si igitur angulus $\gamma\beta\alpha$, *æqualis est angulo* $\alpha\beta\delta$ *: tum sunt duo recti. quòd si verò non, tum ducatur à puncto* β, *rectæ lineæ* $\gamma\delta$, *ad angulos rectos linea recta* $\beta\alpha$. *(Demonstratio.) Anguli igitur* $\gamma\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$ *sunt duo recti. & cùm angulus* $\gamma\beta\varepsilon$, *sit æqualis duobus angulis* $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\varepsilon$. *Communis addatur angulus* $\varepsilon\beta\delta$. *quare duo anguli* $\gamma\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$, *tribus angulis* $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$, *sunt æquales. Rursus quoniam angulus* $\delta\beta\alpha$ *æqualis est duobus angulis* $\delta\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\alpha$, *communis addatur angul⁹* $\alpha\beta\gamma$. *anguli igitur* $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, *tribus angulis* $\delta\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$ *sunt æquales. Verum demonstratum est, angulos* $\gamma\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$ *tribus ijsdem angulis esse æquales. Quæ verò eidẽ sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia. ergo anguli* $\gamma\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$, *sunt duobus angulis* $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, *æquales. sed anguli* $\gamma\beta\varepsilon$, $\varepsilon\beta\delta$, *sunt duo recti: ergo* $\delta\beta\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, *anguli, sunt æquales duobus rectis. (Cõclusio.) Vt ut igitur recta super recta stans, fecerit angulos: vel duos rectos, vel duobus rectis æquales faciet. Id quod erat demonstrandum.*

Πρότασις ιδ. θεώρημα.

ΕΑν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ. δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται, ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Ἔκθεσις.) Πρὸς γὰρ τίνι εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ β, δύο εὐθεῖαι αἱ βγ, βδ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ γβ ἡ βδ. Κατασκευή.) Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ βγ ἐπ' εὐθείας ἡ βδ, ἔστω τῇ γβ ἐπ' εὐθείας ἡ βε. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ αβ, ἐπ' εὐθείαν τὴν γβε ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, αβε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αβγ, αβδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ γβα, αβε, ταῖς ὑπὸ γβα, αβδ ἴσαι εἰσὶ κοινὴ ἀφῃρήσθω, ἡ ὑπὸ αβγ, λοι-



πὴ

Propositio decimaquarta. Theorema.

SI ad lineam quandam rectã, & punctum in ea datum, duæ rectę non in easdem partes sitæ, angulos (ἐφεξῆς) vicinos, duobus rectis angulis æquales fecerint: duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας altera alteri erunt.

Explicatio dati.) Nam ad lineam quandã rectam $\alpha\beta$: & ad punctum in ea datum β: duæ rectæ lineæ $\beta\gamma$, $\beta\delta$, non in easdem partes sitæ faciant angulos ἐφεξῆς (vicinos) $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, æquales duobus angulis rectis. (Explicatio quæsiti.) Dico quòd rectæ $\gamma\beta$, sit ἐπ' εὐθείας recta $\beta\delta$. (Delineatio.) Si enim $\beta\gamma$ non est ἐπ' εὐθείας recta $\beta\delta$: sit recta $\beta\varepsilon$, rectæ $\gamma\beta$, ἐπ' εὐθείας. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\beta$, constituta est super recta $\gamma\beta\varepsilon$: anguli igitur $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\varepsilon$, sunt æquales duobus rectis. Verum anguli $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$ etiam sunt æquales duobus rectis. anguli igitur $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\varepsilon$, angulis $\gamma\beta\alpha$, $\alpha\beta\delta$ sunt æquales. Communis auferatur angulus $\alpha\beta\gamma$. reliquus igi-

E tur

πὴ ἄρα ἡ ὑπὸ αβε, λοιπῇ τῇ ὑπὸ αβδ ἐστὶν ἴση ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ βε, τῇ βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς βδ. (Συμπέρασμα.) Ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γβ, τῇ βδ. Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε. θεώρημα.

ΕΑν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας, ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσι.

Ἔκθεσις.) Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ αβ, γδ, τεμνέσθωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ ε σημεῖον. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αεγ γωνία, τῇ ὑπὸ δεβ, ἡ δὲ ὑπὸ γεβ, τῇ ὑπὸ αεδ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ αε, ἐπ' εὐθεῖαν τὴν γδ

ἐφέστηκε

tur angulus $\alpha\beta\varepsilon$, reliquo angulo $\alpha\beta\delta$ est æqualis, minor maiori, quod est impoßibile. Quare recta $\beta\varepsilon$, non est ἐπ' εὐθείας rectæ $\beta\gamma$. Similiter etiam demonstrabimus, quòd nulla alia præter rectam $\beta\delta$, sit ἐπ' εὐθείας rectæ $\gamma\beta$. (Conclusio.) Ergo recta $\gamma\beta$, est ἐπ' εὐθείας rectæ $\beta\delta$. Si igitur ad lineam quandã rectam, & punctum in ea datum, duæ rectæ non in easdem partes sitæ angulos ἐφεξῆς, duobus rectis angulis fecerint æquales: duæ istæ rectæ ἐπ' εὐθείας erunt altera alteri. Id quod erat demonstrandum.

Propositio decimaquinta. Theorema.

SI duæ lineæ rectę, sese mutuo secãt: faciẽt angulos ad verticem inter se æquales.

Explicatio dati.) Duæ lineæ rectæ enim $\alpha\beta$, $\gamma\delta$: sese mutuo secent in puncto ε. (Explicatio quæsiti) Dico quòd angulus $\alpha\varepsilon\gamma$, angulo $\delta\varepsilon\beta$ sit æqualis, & angulus $\gamma\varepsilon\beta$, angulo $\alpha\varepsilon\delta$ etiam æqualis. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\varepsilon$, super rectã $\gamma\delta$, constituta est, ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ γεα, αεδ, αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ δε, ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν αβ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ αεδ, δεβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αεδ, δεβ γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ γεα, αεδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ γεα, αεδ, ταῖς ὑπὸ αεδ, δεβ, ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ αεδ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ γεα, λοιπῇ τῇ ὑπὸ βεδ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ γεβ, δεα, ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι καὶ ὅσαι δήποτ᾽ οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

Πρότασις ις. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

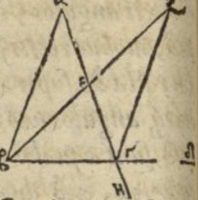
Ἐκθε-

& facit angulos γεα, αεδ. anguli igitur γεα, αεδ, duobus rectis sunt æquales. Item quoniam recta δε, super recta αβ est constituta, faciatq; angulos αεδ, δεβ, anguli igitur αεδ, δεβ, sunt æquales duobus rectis. Verum anguli γεα, αεδ duobus rectis sunt æquales. quare duo anguli γεα, αεδ, sunt æquales duobus angulis αεδ, δεβ. Communis auferatur angulus αεδ. reliquus igitur angulus γεα, reliquo angulo βεδ est æqualis. Simili demonstratione probabimus angulum γεβ, angulo δεα esse æqualem. (Conclusio.) Si igitur duæ rectæ sese mutuò secent: facient angulos ad verticem inter se æquales. Id quod erat demonstrandum.

Corolarium. Ex hoc est manifestum, quòd quæcunq; lineæ rectæ sese mutuò secant, faciunt angulos ad punctum sectionis quatuor rectis æquales.

Propositio decimasexta. Theorema.

OMnis trianguli, vno ex lateribus protracto: angulus extraneus, vtroq; eorũ, qui intra triangulum sunt, quibus ipse opponitur, est maior.



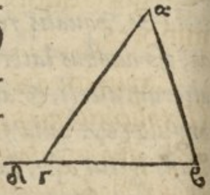
Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ γβα, βαγ γωνιῶν. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ αγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ βε, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ ζ, καὶ κείσθω τῇ βε ἴση ἡ εζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζγ. καὶ διήχθω ἡ αγ, ἐπὶ τὸ η. (Ἀπόδειξις) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αε, τῇ εγ. ἡ δὲ βε, τῇ εζ. δύο δὴ αἱ αε, εβ, δυσὶ ταῖς γε, εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αεβ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ ἴση ἐστίν. κατὰ κορυφὴν γάρ. βάσις ἄρα ἡ αβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστί. καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ ζεγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαε, τῇ ὑπὸ εγζ. μείζων δ᾽ ἐστὶν ἡ ὑπὸ εγδ, τῆς ὑπὸ εγζ. μείζων ἄρα

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, & protrahatur latus eius $\beta\gamma$, ad punctum δ. (Explicatio quæſiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\delta$, eſt maior angulo $\gamma\beta\alpha$, interno ſibi oppoſito: & maior angulo $\beta\alpha\gamma$, interno ſibi oppoſito. (Delineatio.) Diſſecetur latus $\alpha\gamma$, in duas partes æquales in puncto ε. deinde ducatur linea $\beta\varepsilon$, & producatur ad punctum ζ. Fiat etiam lineæ $\beta\varepsilon$, æqualis linea $\varepsilon\zeta$. deniq; ducatur linea $\zeta\gamma$, & extendatur recta $\alpha\gamma$, ad punctum vſq; η. (Demonſtratio.) Quoniam recta $\alpha\varepsilon$, æqualis eſt rectæ $\varepsilon\gamma$: & recta $\beta\varepsilon$, æqualis rectæ $\varepsilon\zeta$. duo igitur latera $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\beta$ duobus lateribus $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$ ſunt æqualia alterum alteri, & angulus $\alpha\varepsilon\beta$, æqualis eſt angulo $\zeta\varepsilon\gamma$. quia ſunt anguli ad verticem. Baſis igitur $\alpha\beta$, baſi $\zeta\gamma$ erit æqualis, & triangulus $\alpha\beta\varepsilon$, æqualis erit triangulo $\zeta\varepsilon\gamma$: & reliqui anguli, reliquis angulis ſunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera ſubtendunt. itaq; angulus $\beta\alpha\varepsilon$, æqualis eſt angulo $\varepsilon\gamma\zeta$. Verum angulus $\varepsilon\gamma\delta$, maior eſt angulo $\varepsilon\gamma\zeta$. quare angulus $\alpha\gamma\delta$, angulo $\beta\alpha\varepsilon$

ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ τῆς ὑπὸ βαε. ὁμοίως δὲ τῆς βγ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ βγη. τουτέστιν ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ αβγ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αβγ, τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ βγ, ἐπὶ τὸ δ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ αβγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αγδ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ αβγ. κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ,

τῶν

etiam eſt maior. Similiter demonſtrabitur quando recta $\beta\gamma$, diſſecta fuerit in duas partes æquales: quod angulus $\beta\gamma\eta$, hoc eſt ζ, angulus $\alpha\gamma\delta$ maior ſit angulo $\alpha\beta\gamma$. (Concluſio.) Omnis igitur trianguli vno ex lateribus protracto: extraneus angulus, vtroq; eorum, qui intra triangulum ſunt, quibus ipſe opponitur eſt maior. Id quod erat demonſtrandũ.

Propoſitio decimaſeptima. Theorema.

OMnis trianguli, quiuis duo anguli: duobus rectis angulis ſunt minores.

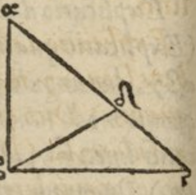
Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$. (Explicatio quæſiti) Dico quòd trianguli $\alpha\beta\gamma$, duo anguli ſint minores duobus rectis, quouis modo ſumpti. (Delineatio.) Producatur linea $\beta\gamma$, ad punctum δ. (Demonſtratio.) Quoniam trianguli $\alpha\beta\gamma$, angulus extraneus $\alpha\gamma\delta$: maior eſt angulo $\alpha\beta\gamma$, interno ſibi oppoſito. Communis addatur angulus $\alpha\gamma\beta$. anguli igitur $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$, ſunt maio-

τῶν ὑπὸ αβγ, βγα μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ αβγ, βγα, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὴ δείξομεν· ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ βαγ, αγβ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ αγβ, αβγ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν αγ πλευρὰν, τῆς αβ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βγα. (Κατασκευή.) Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ αγ τῆς αβ, κείσθω τῇ αβ ἴση ἡ αδ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ βδ.



(Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ βδγ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ αδβ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ δγβ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ

ὑπὸ

res angulis $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$. Verum anguli $\alpha\gamma\delta$, $\alpha\gamma\beta$, ſunt duo recti. ergo anguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\alpha$, ſunt minores duobus rectis. Simili ratione demonſtrabimus angulos $\beta\alpha\gamma$, $\alpha\gamma\beta$, duobus rectis eſſe minores. Item & angulos $\alpha\gamma\beta$, $\alpha\beta\gamma$ duobus rectis eſſe minores. (Concluſio.) Omnis igitur trianguli quiuis duo anguli, minores ſunt duobus angulis rectis. Id quod erat demonſtrandum.

Propoſitio decima octaua. Theorema.

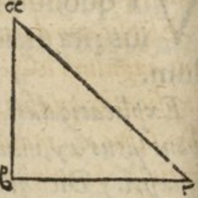
VT quoduis latus trianguli eſt maius: ita maiorem ſubtendit angulum.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, habens latus $\alpha\gamma$, maius latere $\alpha\beta$. (Explicatio quæſiti.) Dico quòd angulus $\alpha\beta\gamma$, maior ſit angulo $\alpha\gamma\beta$. (Delineatio.) Cum enim latus $\alpha\gamma$ ſit maius latere $\alpha\beta$: fiat lineæ $\alpha\beta$, æqualis recta $\alpha\delta$: & ducatur recta $\beta\delta$. (Demonſtratio.) Quoniam trianguli $\beta\delta\gamma$, angulus $\alpha\delta\beta$ externus, maior eſt angulo $\delta\gamma\beta$ interno ſibi oppo-

πὸ αδβ, τῇ ὑπὸ αβδ. ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αβδ, τῆς ὑπὸ αγβ. πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ αβγ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ αγβ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ, τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον τὸ αβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ αβγ γωνίαν, τῆς ὑπὸ βγα. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ αγ, πλευρᾶς τῆς αβ μείζων ἐστίν. (Ἀπόδειξις.) Εἰ γὰρ μὴ ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ αγ τῇ αβ. ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῇ ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δὲ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ αγ, τῇ αβ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ, *opposito: & angulus* $\alpha\delta\beta$, *sit æqualis angulo* $\alpha\beta\delta$ *: cum latus* $\alpha\beta$, *lateri* $\alpha\delta$ *sit æquale. idcirco angulus* $\alpha\beta\delta$, *maior est angulo* $\alpha\gamma\beta$. *Ergo angulus* $\alpha\beta\gamma$, *multo est maior angulo* $\alpha\gamma\beta$. *(Conclusio.) Vt quoduis igitur latus trianguli est maius: ita maiorem subtendit angulum. id quod erat demonstrandum.*

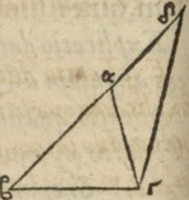
Propositio decima nona. Theorema.

VT Triangulus aliquis, angulum quemuis habuerit maiorem: ita etiam maiorem habebit eam lineam rectam, quæ illum subtendit angulum.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, *habens angulum* $\alpha\beta\gamma$, *maiorem angulo* $\alpha\gamma\beta$. *Explicatio quæsiti.) Dico quod trianguli* $\alpha\beta\gamma$, *latus* $\alpha\gamma$, *maius sit latere* $\alpha\beta$. *(Demonstratio.) Si enim non fuerit maius, tum vel erit ei æquale, vel erit eo minor. sed recta* $\alpha\gamma$, *nõ est æqualis rectæ* $\alpha\beta$. *nam & angulus* $\alpha\beta\gamma$, *angulo* $\alpha\gamma\beta$ *esset æqualis. id quod tamen nõ est. quare neq; latus* $\alpha\gamma$, *lateri* $\alpha\beta$, *erit æquale: neq; etiam latus* $\alpha\gamma$, *poterit esse minus latere* αβ, ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, τῆς ὑπὸ αγβ. οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ αγ, τῆς αβ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί, μεῖζον ἄρα ἐστὶ ἡ αγ, τῆς αβ. (Συμπέρασμα) Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν, ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ. θεώρημα.

ΠΑντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ αβγ. (Διορισμός.) λέγω ὅτι τοῦ αβγ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν βα, αγ, τῆς βγ, αἱ δὲ αβ, βγ, τῆς αγ, αἱ δέ, βγ, γα, τῆς αβ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βα ἐπὶ τὸ δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ γα, ἴση ἡ δα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ αγ. ἴση ἐστὶν καὶ γω-

νία

tere $\alpha\beta$. quia etiam angulus $\alpha\beta\gamma$, minor eſſet angulo $\alpha\gamma\beta$: Cum tamen non ſit. Quare neque latus $\alpha\gamma$, minus eſt latere $\alpha\beta$. antea autẽ demonſtratum eſt, quod ei non ſit æquale. Erit ergo $\alpha\gamma$ latus, maius latere $\alpha\beta$. (Concluſio.) Omnis igitur trianguli maiorem angulum maius latus ſubtendit quicunque ſumatur. Id quod erat demonſtrandum.

Propoſitio vigeſima, Theorema.

OMnis trianguli, quæuis duo latera ſunt maiora reliquo.

Explicatio dati.) Sit triangulus $\alpha\beta\gamma$, Explicatio quæſiti.) Dico quod triãguli $\alpha\beta\gamma$ quæuis duo latera, ſint maiora reliquo. latera $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, maiora latere $\beta\gamma$: Item latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ maiora latere $\alpha\gamma$: denique latera $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, maiora latere $\alpha\beta$. (Delineatio.) Producatur linea $\beta\alpha$, ad punctum δ: & fiat lineæ $\alpha\gamma$, æqualis linea $\alpha\delta$: denique ducatur linea $\gamma\delta$. (Demõſtratio.) Quoniã latus $\delta\alpha$, æquale eſt lateri $\alpha\gamma$.

etiam

νία ἡ ὑπὸ αδγ, τῇ ὑπὸ αγδ, ἀλλ' ἡ ὑπὸ βγδ γωνία, τῆς ὑπὸ αγδ μείζων ἐστί. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ βγδ, τῆς ὑπὸ αδγ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνον ἐστὶ τὸ δβγ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ βγδ γωνίαν, τῆς ὑπὸ αδγ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ἡ δβ ἄρα, τῆς βγ ἐστὶν μείζων. ἴση δὲ ἡ δβ, ταῖς αβ, αγ. μείζονες ἄρα αἱ βα, αγ, τῆς βγ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν αβ, βγ, τῆς γα μείζονές εἰσιν. αἱ δὲ βγ, γα, τῆς αβ. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ, τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα. θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

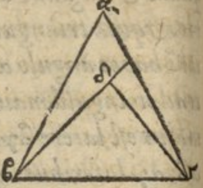
Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς βγ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν β, γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθωσαν αἱ βδ, δγ.

etiã angulus $\alpha\delta\gamma$, est æqualis angulo $\alpha\gamma\delta$. Verum angulus $\beta\gamma\delta$, maior est angulo $\alpha\gamma\delta$. quare & angulus $\beta\gamma\delta$, angulo $\alpha\delta\gamma$ maior erit. & quia triangulus $\delta\gamma\beta$, angulũ $\beta\gamma\delta$ maiorẽ habet angulo $\alpha\gamma\delta$: atq; maius latus subtendat angulũ maiorem: idcirco & latus $\delta\beta$, maius est latere $\beta\gamma$. Sed $\delta\beta$ latus, æquale est $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ lateribus. quare $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, duo latera, sunt maiora latere $\beta\gamma$. Similiter demonstrabimus, quòd latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sint maiora latere $\alpha\gamma$, & $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ latera sint maiora latere $\alpha\beta$. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli, quæuis duo latera sunt maiora reliquo, id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima prima. Theorema.

SI à finibus vnius lateris trianguli cuiusuis duæ rectę lineę intra triangulum ad punctum idem statuantur: erunt quidem istæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli eius lateribus minores: verùm maiorem angulum comprehendent.

Explicatio dati.) Sup latere enim $\beta\gamma$ triãguli $\alpha\beta\gamma$: à finib. β, et γ duæ lineæ rectæ $\beta\delta$, δγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι αἱ βδ, δγ, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν βα, αγ, ἐλάσσονες μὲν εἰσὶ, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ βδγ, τῆς ὑπὸ βαγ. (Κατασκευή.) Διήχθω γὰρ ἡ βδ, ἐπὶ τὸ ε. (Ἀπόδειξις.)



Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. τοῦ αβε ἄρα τριγώνου, αἱ δύο πλευραὶ αἱ αβ, αε, τῆς βε μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ εγ. αἱ ἄρα βα, αγ, τῶν βε, εγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ τοῦ γεδ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ γε, εδ, τῆς γδ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ δβ, αἱ γε, εβ ἄρα τῶν γδ, δβ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν βε, εγ, μείζονες ἐδείχθησαν αἱ βα, αγ, πολλῷ ἄρα αἱ βα αγ, τῶν βδ, δγ, μείζονές εἰσι. πάλιν ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία, τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί. τοῦ γδε ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ γεδ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ

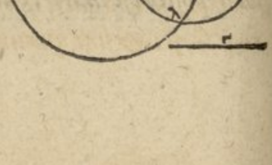
αβε

$\delta\gamma$ statuentur intra triangulũ.) Explicatio quæsiti.) Dico quod duæ rectæ $\beta\delta,\delta\gamma$, minores quidem sint reliquis duobus trianguli lateribus $\beta\bar{\alpha},\bar{\alpha}\gamma$: verum angulum $\beta\delta\gamma$, maiorem angulo $\beta\bar{\alpha}\gamma$, contineant. (Delineatio.) Producatur enim linea $\beta\delta$, ad punctum usq; ε. (Demonstratio.) Quoniam omnis trianguli duo latera maiora sunt reliquo: idcirco trianguli $\alpha\beta\varepsilon$, duo latera $\alpha\beta$, $\alpha\varepsilon$ sunt maiora latere $\beta\varepsilon$. Cõmune addatur latus $\varepsilon\gamma$. latera igitur $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, maiora sunt lateribus $\beta\varepsilon,\varepsilon\gamma$. Item quia trianguli $\gamma\varepsilon\delta$, duo latera $\gamma\varepsilon,\varepsilon\delta$ maiora sunt latere $\gamma\delta$. Commune addatur latus $\delta\beta$. quare latera $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\beta$ maiora sunt lateribus $\gamma\delta,\delta\beta$. Verum latera $\beta\alpha,\alpha\gamma$, demonstrata sunt maiora lateribus $\beta\varepsilon,\varepsilon\gamma$, ergo $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$ latera longe erunt maiora laterib⁹ $\beta\delta,\delta\gamma$. Rursus quoniam omnis trianguli angulus extraneus, angulo intra triangulum sibi opposito est maior: idcirco trianguli $\gamma\delta\varepsilon$, angulus $\beta\delta\gamma$ extraneus, angulo $\gamma\varepsilon\delta$ interno sibi opposito est maior. Per eadem demonstra-

ἀβε τριγώνου, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ γεβ μείζων ἐστὶ, τῆς ὑπὸ βαγ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ γεβ, μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ βδγ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ βδγ, μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ βαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι, τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, ἐλάττονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ. Πρόβλημα.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἳ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι. Δεῖ δὴ τὰς δύο, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας, διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς, τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.



Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ α, β, γ, ὧν αἱ δύο, τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μετα-

bitur quòd trianguli $\alpha\beta\varepsilon$, angulus $\gamma\varepsilon\beta$, maior ſit angulo $\beta\alpha\gamma$. verùm angulo $\gamma\varepsilon\beta$ maior eſt demonſtratus angulus $\beta\delta\gamma$. Ergo angulus $\beta\delta\gamma$, multò eſt maior angulo $\beta\alpha\gamma$. (Conclusio.) Si igitur à finibus vnius lateris trianguli cuiuſuis, duæ rectæ lineæ intra triangulũ, ad punctum idem ſtatuãtur: erunt quidem iſtæ duæ rectæ lineæ, reliquis duobus trianguli eius lateribus minores: verùm maiorem angulum comprehendent. Id quod erat demonſtrandum.

Propoſitio vigeſima ſecunda. Problema.

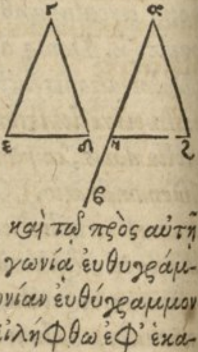
EX tribus lineis rectis, quæ ſunt æquales tribus rectis lineis datis: triangulũ cõſtituere. Oportet uerò quaſuis duas reliqua eſſe maiores: propterea quod in omni triãgulo quęuis duo latera maiora ſunt reliquo.

Explicatio dati.) Sint tres lineæ rectæ datæ α, β, γ: & ſint quæuis duæ maiores quàm λαμβανόμεναι, αἱ μὲν α, β, τῆς γ, αἱ δὲ α, γ, τῆς β, καὶ ἔτι αἱ β, γ, τῆς α. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Ἐκκείσθω τίς εὐθεῖα ἡ δε, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν α ἴση, ἡ δζ, τῇ δὲ β ἴση, ἡ ζη, τῇ δὲ γ ἴση ἡ ηθ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ ζ, διαστήματι δὲ τῷ ζδ, κύκλος γεγράφθω, ὁ δκλ. καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ η, διαστήματι δὲ τῷ ηθ, κύκλος γεγράφθω ὁ κλθ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κζ, κη. (Διορισμὸς τῆς κατασκευῆς.) Λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνέστηκε τὸ κζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ τὸ ζ σημεῖον, κέντρον ἐστὶ τοῦ δκλ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ζδ, τῇ ζκ, ἀλλὰ ἡ ζδ τῇ α ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ α ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ τὸ η σημεῖον, κέντρον ἐστὶν τοῦ λκθ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ηθ, τῇ ηκ. ἀλλὰ ἡ ηθ, τῇ γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ κη ἄρα, τῇ γ ἐστὶν reliqua: scilicet α & β maiores quàm γ, & α, atque γ maiores quàm β: denique β & γ, maiores quàm α. (Explicatio quæsiti.) Oportet igitur ex tribus lineis rectis, quæ datis tribus α, β, γ, sunt æquales triangulum componere. (Delineatio.) Sumatur recta aliqua linea $\delta\epsilon$: finita quidem ad punctum δ: infinita verò ad punctum ϵ. deinde fiat lineæ rectæ α, æqualis linea recta $\delta\zeta$. Itē rectæ β, æqualis recta $\zeta\eta$. præterea rectæ γ, æqualis recta $\eta\theta$. Ad hæc centro ζ, interuallo $\zeta\delta$, describatur circulus $\delta\kappa\lambda$. centro etiam η, interuallo $\eta\theta$, describatur circulus $\kappa\lambda\theta$: secans circulum $\delta\eta\lambda$, in puncto κ. Denique ducātur lineæ rectæ $\zeta\kappa, \kappa\eta$. (Delineationis factæ explicatio.) Dico quòd ex lineis rectis tribus, quæ sunt æquales trib⁹ rectis datis, compositus sit triangulus $\kappa\zeta\eta$. (Demonstratio.) Quoniam punctum ζ, centrum est circuli $\delta\kappa\lambda$. idcirco recta $\zeta\delta$, æqualis est rectæ $\zeta\eta$: verū recta $\zeta\delta$ est æqualis rectæ α: itaque & $\kappa\zeta$ recta, æqualis est rectæ α. Item quoniam punctum η, est centrum circuli $\kappa\lambda\theta$: idcirco recta $\eta\theta$, est æqualis rectæ $\eta\kappa$. verū $\eta\theta$

γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ζη, τῇ β ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι, αἱ κζ, ζη, ηκ τρισὶ ταῖς α, β, γ, ἴσαι εἰσίν. (Συμπέρασμα.) Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν κζ, ζη, ηκ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς α, β, γ, τρίγωνον συνίσταται, τὸ κζη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κγ. πρόβλημα.

ΠΡὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τὸ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



(Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ αβ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ δγε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ, τῇ ὑπὸ δγε, ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. (Κατασκευή.) Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν γδ, γε, τυχόντα σημεῖα τὰ δ, ε, καὶ ἐπεζεύ-

æqualis est γ rectæ. ergo & ηκ recta, æqualis est rectæ γ. Verum ζη, etiam est æqualis rectæ β. Tres igitur rectæ κζ, ζη, ηκ, tribus rectis α, β, γ, sunt æquales. (Conclusio.) Ex tribus igitur rectis κζ, ζη, ηκ, quæ sunt æquales tribus datis α, β, γ, rectis: triangulus est factus κζη. Quod faciendum erat.

Propositio vigesima tertia. Problema.

AD datam lineam rectam, & datũ in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum statuere.

Explicatio dati.) Sit data linea recta αβ: sit datum in ea punctum α. sit angulus rectilineus datus δγε. (Explicatio quæsiti.) Ad lineam rectam datam αβ, & punctum in ea datum α, statuendus est angulus rectilineus, æqualis angulo δγε rectilineo dato. (Delineatio.) Sumantur in lineis rectis γδ, γε, puncta quæuis δ, ε. Ducatur etiam linea ἐπεζεύχθω ἡ δε. καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς γδ, δε, γε τρίγωνον συνεστάτω τὸ αζη, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν γδ, τῇ αζ, τὴν δὲ γε, τῇ αη, καὶ ἔτι τὴν δε, τῇ ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν αἱ δύο αἱ δγ, γε, δύσι ταῖς ζα, αη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ δε, βάσει τῇ ζη ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δγε, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζαη ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα) Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ αβ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ δγε, ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται, ἡ ὑπὸ ζαη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κδ. θεώρημα.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα, τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ, ταῖς δυσὶ

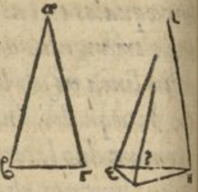
πλευ-

recta δε. Postea ex talibus lineis rectis, quæ sunt æquales tribus rectis γδ, δε, γε, componatur triangulus αζη: sic vt lineæ γδ, sit æqualis linea αζ: & lineæ γε linea αη, item lineæ δε æqualis linea ζη. (Demonstratio.) Quoniam duo latera δγ, γε, duobus laterib. ζα, αη, sunt æqualia alterum alteri, & basis δε, æqualis sit basi ζη. Erit igitur angulus δγε, æqualis angulo ζαη. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam αβ, & ad punctum in ea datum α, dato angulo rectilineo δγε, constitutus est angulus rectilineus ζαη. Id quod erat faciendum.

Propositio vigesimaquarta. Theorema.

SI fuerint trianguli vnius, duo latera æqualia duobus lateribus alterius trianguli, alterum alteri: sed angulus vnius maior angulo alterius, quē æquales rectæ lineę comprehendunt: etiam basis basi maior erit.

Explicatio dati.) Sint duo triāguli αβγ, δεζ, quorum duo latera αβ, αγ, duobus lateribus πλευραῖς, ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ, τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ μείζων ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, μείζων ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ δε εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ δ, τῇ ὑπὸ βαγ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ εδη, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν αγ, δζ, ἴση ἡ δη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ηε, ζη. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν αβ, τῇ δε, ἡ δὲ αγ, τῇ δη, δύο δὴ αἱ βα, αγ, δυσὶ ταῖς εδ, δη, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδη, ἴση ἐστί, βάσις ἄρα ἡ βγ, βάσει τῇ εη, ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δη, τῇ δζ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δζη, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δηζ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ δζη, τῆς ὑπὸ εηζ. πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ εζη, τῆς ὑπὸ εηζ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι, τὸ εζη, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ



εζη

ribus $\delta\varepsilon$, $\delta\zeta$ sint æqualia, alterum alteri latus $\alpha\beta$, lateri $\delta\varepsilon$, & latus $\alpha\gamma$, lateri $\delta\zeta$: sed angulus $\beta\alpha\gamma$ sit maior angulo $\varepsilon\delta\zeta$.

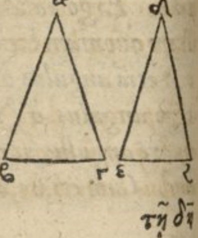
(Explicatio quæsiti.) Dico quod basis $\beta\gamma$, basi $\varepsilon\zeta$ sit maior. (Delineatio.) Quoniam angulus $\beta\alpha\gamma$ maior est angulo $\varepsilon\delta\zeta$. Statuatur ad lineam rectam $\varepsilon\delta$, & ad punctum in ea δ, angulus $\varepsilon\delta\eta$ æqualis angulo $\beta\alpha\gamma$: & fiat alterutri lineraum $\alpha\gamma$, $\delta\zeta$ æqualis linea recta $\delta\eta$. & ducantur lineæ rectæ $\eta\varepsilon$, $\zeta\eta$.

(Demonstratio.) Quoniam latus $\alpha\beta$, æquale est lateri $\delta\varepsilon$, & latus $\alpha\gamma$ æquale est lateri $\delta\eta$: duo igitur latera $\beta\alpha$, $\alpha\gamma$, duobus lateribus $\varepsilon\delta$, $\delta\eta$ sunt æqualia, alterum alteri, & angulus $\beta\alpha\gamma$, æqualis est angulo $\varepsilon\delta\eta$. Ergo basis $\beta\gamma$, basi $\varepsilon\eta$ est æqualis. Item quoniam latus $\delta\eta$, est æquale lateri $\delta\zeta$: erit etiã angulus $\delta\zeta\eta$, æqualis angulo $\delta\eta\zeta$, ergo angulus $\delta\zeta\eta$ maior est angulo $\varepsilon\eta\zeta$. quare angulus $\varepsilon\zeta\eta$, longè maior est angulo $\varepsilon\eta\zeta$. Cum etiam triangulus $\varepsilon\zeta\eta$, habeat angulum

εζη γωνίαν τῆς ὑπὸ εηζ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ εη, τῆς εζ. ἴση δὲ ἡ εη, τῇ βγ, μείζων ἄρα καὶ ἡ βγ, τῆς εζ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε̄. θεώρημα.

ΕΑν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ἔκθεσις.) Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς αβ, αγ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς δε, δζ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν αβ,

τῇ δε

gulum εζη, maiorem angulo εηζ: ac maiorem angulum maius latus subtendat. idcirco latus εη, maius est latere εζ. verum latus εη, æquale est lateri βγ. ergo & βγ latus maius est latere εζ. (Conclusio.) Si ergo duo fuerint trianguli, habentes duo latera, duobus lateribus æqualia, alterum alteri: angulum verò angulo maiorem, qui æqualibus illis lateribus continetur: etiam basin basi maiorem habebunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesimaquinta. Theorema.

SI trianguli vnius, duo latera fuerint æqualia duobus lateribus trianguli alterius, sed basis vnius fuerit maior basi alterius: erit etiam angulus vnius maior angulo alterius, quem æquales illæ rectæ lineæ comprehendunt.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli αβγ, δεζ: quorũ duo latera αβ, αγ, sint æqualia duobus laterib. δε, δζ, alterũ alteri, latus αβ,

æquale

τῇ δε, τὴν δὲ αγ, τῇ δζ, βάσις δὲ ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, μείζων ἔστω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ γωνίας τῆς ὑπὸ εδζ, μείζων ἐστίν. (Απόδειξις.) Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάττων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση γὰρ ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ βγ, βάσει τῇ εζ, οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ εδζ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων. ἐλάσσων γὰρ ἦν καὶ βάσις ἡ βγ, βάσεως τῆς εζ, οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῆς ὑπὸ εδζ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχει, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ. θεώρημα.

Ἐὰν

æquale lateri $\delta\varepsilon$, & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\delta\zeta$. sed basis $\beta\gamma$, sit maior basi $\varepsilon\zeta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus $\beta\alpha\gamma$, maior sit angulo $\varepsilon\delta\zeta$. (Demonstratio.) Quod si enim nõ fuerit maior, aut erit ei æqualis, aut eo minor. sed angulus $\beta\alpha\gamma$, non est æqualis angulo $\varepsilon\delta\zeta$. nam & basis $\beta\gamma$, etiam eßet æqualis basi $\varepsilon\zeta$: Verùm non est ei æqualis. quare nec angulus $\beta\alpha\gamma$, est æqualis angulo $\varepsilon\delta\zeta$: sic etiam non est eo minor: siquidem & basis $\beta\gamma$, basi $\varepsilon\zeta$ minor eßet: quod tamen nõ est. quare nec angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\varepsilon\delta\zeta$ minor est. demonstratum verò antea fuit, quòd ei non sit æqualis. Erit igitur angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\varepsilon\delta\zeta$ maior. (Conclusio.) Si ergo fuerint trianguli vnius duo latera æqualia duobus lateribus triãguli alterius, alterum alteri, sed basis vnius maior basi alterius: erit etiam angulus vnius, maior angulo alterius, quem æquales rectæ lineæ comprehendunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima sexta. Theorema.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας, ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔκθεσις πρώτη.) Ἔστωσαν δύο τρίγωνα, τὰ ᾱβγ δεζ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, βγᾱ, δυσὶ ταῖς ὑπὸ δεζ, εζδ, ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ὑπὸ ᾱβγ, τῇ ὑπὸ δεζ, τὴν δὲ ὑπὸ βγᾱ, τῇ ὑπὸ εζδ. ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν, μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν βγ, τῇ εζ. (Διορισμὸς πρῶτος.) Λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ᾱβ, τῇ δε, τὴν δὲ ᾱγ, τῇ δζ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοι-

πῇ

QVorum triangulorum duo anguli vnius fuerint æquales duobus angulis alterius: alter alteri: & latus vnum, æquale vni: siue illud appositũ sit æqualibus illis angulis: siue subtendat vnum ex æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus reliquo angulo erit æqualis.

Prima explicatio dati.) Sint duo trianguli αϐγ, δεζ, quorum duo anguli αϐγ, βγα sint æquales duobus angulis δεζ, εζδ, alter alteri: angulus αβγ, æqualis angulo δζε, & angulus βγα, angulo εζδ: habeant etiam vnum latus vni lateri æquale, & primo loco latus quod positum est ad æquales illos angulos, latus βγ, lateri εζ. (Prima explicatio quæsiti.) Dico quòd & reliqua latera reliquis lateribus habebunt æqualia, alterum alteri, latus αϐ, lateri δε, & latus αγ, æquale lateri δζ: & reliquum angulum reliquo an-

τῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ εδζ. (Κατασκευὴ πρώτη.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων, ἡ αβ, καὶ κείσθω τῇ δε ἴση ἡ ηβ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ηγ. (Ἀπόδειξις πρώτη.) Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βη, τῇ δε, ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, δύο δὴ αἱ βη, βγ, δυσὶ ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ηβγ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ, ἴση ἐστί. βάσις ἄρα ἡ ηγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστί. καὶ τὸ ηγβ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ηγβ γωνία, τῇ ὑπὸ δζε, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ δζε, τῇ ὑπὸ βγα ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βγη ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. (Συμπέρασμα πρῶτον.) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ αβ, τῇ δε, ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ βγ, τῇ εζ ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δύσι ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ δεζ ἐστὶν ἴση, βά-

σις

gulo æqualem, nempe angulum $\beta\alpha\gamma$, æqualem angulo $\varepsilon\delta\zeta$. (Prima delineatio.) Si enim $\alpha\beta$, latus, inæquale fuerit lateri $\delta\varepsilon$, vnum ex istis sit maius. sit igitur latus $\alpha\beta$, maius, & fiat rectæ $\delta\varepsilon$, æqualis recta $\beta\eta$, & ducatur recta $\eta\gamma$. (Prima demonstratio.) Cum itaq; latus $\beta\eta$, sit æquale lateri $\delta\varepsilon$, & latus $\beta\gamma$ æquale lateri $\varepsilon\zeta$: duo igitur latera $\beta\eta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\eta\beta\gamma$, angulo $\delta\varepsilon\zeta$ æqualis: ergo basis $\eta\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\gamma\beta$, triangulo $\delta\varepsilon\zeta$ est æqualis, & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales, alter alteri, quos æqualia illa latera subtendũt angulus $\eta\gamma\beta$, æqualis angulo $\delta\zeta\varepsilon$, sed angulus $\delta\zeta\varepsilon$, ꝑponitur æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, erit igitur angulus $\beta\gamma\eta$, etiam æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$, minor maiori, quod fieri nequit. (Conclusio prima.) Ergo latus $\alpha\beta$, nõ est inæquale lateri $\delta\varepsilon$. ergo erit ei æquale, verum latus $\beta\gamma$ etiam est æquale lateri $\varepsilon\zeta$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, sunt æqualia alterum alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\delta\varepsilon\zeta$

σις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ, ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ
γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ
ἴση ἐστίν. (Ἔκθεσις δευτέρα.) Ἀλλὰ δὴ πάλιν
ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑ-
ποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ αβ, τῇ δε. (Διορισμὸς
δεύτερος.) Λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ
πλευραὶ, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσον-
ται, ἡ μὲν αγ, τῇ δζ, ἡ δὲ βγ, τῇ εζ, καὶ ἔτι ἡ
λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ εδζ
ἴση ἐστίν. (Κατασκευὴ δευτέρα.) Εἰ γὰρ ἄνι-
σός ἐστιν ἡ βγ, τῇ εζ, μία αὐτῶν μείζων ἐστιν.
ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων, ἡ βγ, καὶ κείσθω τῇ
εζ, ἴση ἡ γθ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αθ. (Ἀπόδειξις
δευτέρα.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν βθ τῇ εζ, ἡ
δὲ αβ τῇ δε, δύο δὴ αἱ αβ, βθ, δυσὶ ταῖς δε,
εζ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴ-
σας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ αθ, βάσει τῇ δζ,
ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβθ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ
ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι, ταῖς λοιπαῖς
γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ'
ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν
ἡ ὑπὸ βθα γωνία, τῇ ὑπὸ εζδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ

εζδ,

æqualis. basis itaq; αγ, basi δζ erit æqualis, & reliquus angulus βαγ, reliquo angulo εδζ æqualis. (Secũda explicatio dati.) Verũ iterũ statuantur latera æquales angulos subtendẽtia æqualia, vt αβ latus, æquale lateri δε. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod etiã reliqua latera, reliquis laterib. sint æqualia, latus αγ, æquale lateri δζ, et latus βγ, æquale lateri εζ: deniq; reliquus angulus βαγ, reliquo angulo εδζ æqualis. (Secũda delineatio.) Si enim latus βγ, nõ fuerit æquale lateri εζ: sed alterum ex eis fuerit maius. sit latus βγ, si poterit fieri, maius latere εζ: & fiat lateri εζ, æquale latus βθ, & ducatur recta αθ. (Secunda Demonstratio.) Quoniam latus βθ, æquale est lateri εζ, & latus αβ, æquale lateri δε: duo itaq; latera αβ, βθ, duobus laterib. δε, εζ, sunt æqualia alterum alteri: & angulos comprehendunt æquales: basis igitur αθ, est æqualis basi δζ: & triangulus αβθ, triangulo δεζ est æqualis: & reliqui anguli, reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt: angulus βθα, æqualis εζδ, τῇ ὑπὸ βγα γωνίᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ βθα ἄρα, τῇ ὑπὸ βγα ἐστὶν ἴση. τριγώνου δὴ τοῦ αθγ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ βθα ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ βγα, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν. (Συμπέρασμα δεύτερον.) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ βγ. τῇ εζ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δε ἴση, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δύσι ταῖς δε, εζ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ δζ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εδζ, ἴση ἐστίν. (Συμπέρασμα καθόλου.) Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

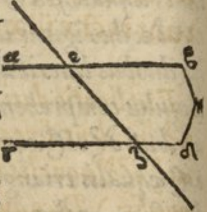
ΤΟ

angulo $\epsilon\zeta\delta$. Verum angulus $\epsilon\zeta\delta$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. ergo angulus $\beta\theta\alpha$, est æqualis angulo $\beta\gamma\alpha$. Trianguli igitur $\bar{\alpha}\theta\gamma$, angulus $\beta\theta\alpha$ externus, angulo $\beta\gamma\alpha$ interno sibi opposito est æqualis, quòd fieri nequit. Quare latus $\beta\gamma$, non est inæquale lateri $\epsilon\zeta$: erit igitur ei æquale. sed & $\alpha\beta$ latus, est æquale lateri $\delta\epsilon$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, sunt æqualia duobus lateribus $\delta\epsilon$, $\epsilon\zeta$ alterum alteri, & angulos comprehendunt æquales. basis igitur $\alpha\gamma$, basi $\delta\zeta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\delta\epsilon\zeta$: & reliquus angulus $\beta\alpha\gamma$, reliquo angulo $\epsilon\delta\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Quorum ergo triangulorum duo anguli vnius, fuerint æquales duobus angulis alterius, alter alteri: & latus vnum vni lateri æquale: siue illud appositum sit æqualibus illis angulis: siue subtendat vnum ex æqualibus illis angulis: illorum tum reliqua latera inter se erunt æqualia, alterum alteri: tum etiam reliquus angulus, reliquo angulo erit æqualis. Id quod erat demonstrandum.

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις κζ. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αεζ, εζδ, ἴσας ἀλλήλαις ποιήτω. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ εὐθείᾳ. (Ὑπόθεσις.) Εἰ γὰρ μὴ ἐκβαλλόμεναι αἱ αβ, γδ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ βδ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ αγ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ βδ μέρη κατὰ τὸ η. (Ἀπόδειξις.) Τριγώνου δὴ τοῦ ηεζ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αεζ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ εζη, ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ αβ, γδ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ βδ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται,

PARS ALTERA HVIVS PRIMI ELEMENTI.

Propositio vigesimaseptima. Theorema.

SI in duas lineas rectas, recta incidẽs linea, angulos alternos æquales inter se fecerit: æquedistantes inter se erunt rectæ illæ duæ lineæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas αϐ, γδ incidens linea recta εζ, angulos alternos αεζ, εζδ, æquales inter se faciat. (Explicatio quæsiti.) Dico quod recta αβ, rectæ γδ, æquedistet. (Hypothesis.) Si enim nõ æquedistant, tum protractæ lineæ rectæ αϐ, γδ concurrunt vel ex partibus β & δ: vel ex partibus α, & γ. protrahantur & concurrant ex partibus β, & δ: in puncto η. (Demõstratio.) Trianguli igitur ηεζ, angulus αεζ, externus, angulo εζη interno opposito est maior: verum etiam est ei æqualis. quod fieri non potest. quare rectæ αβ, γδ, si protrahantur, non concurrent ex partibus β, & δ. similiter demonstra-

σονται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ αγ. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κη'. θεώρημα.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς αβ, γδ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ εζ, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Διορισμός.)

monstrabitur, quod neq; ex partibus α, & γ, concurrant. rectæ verò, quæ ex neutra parte concurrunt, si protahantur, sunt inter se æquedistantes. quare recta αϐ, æquedistat rectæ γδ. (Conclusio.) Si igitur in duas lineas rectas, recta incidat linea, ac faciat angulos alternos inter se æquales: rectæ istæ lineæ inter se sunt æquedistantes. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima octaua. Theorema.

SI linea recta in duas rectas incidens lineas, extraneum angulum interno cui opponitur ex eadem parte fecerit æqualem: vel si duos internos ex eadem parte fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistantes inter se erunt duæ illæ lineæ rectæ.

Explicatio dati.) In lineas duas rectas αϐ, γδ, incidens linea recta εζ: angulum extraneum εηϐ, interno opposito ex eadem parte angulo ηθδ faciat æqualem: & faciat duos angulos internos ex eadem parte ϐηθ, ηθδ, æquales duobus angulis rectis. (Explicatio μός.) Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ. (Απόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ εηϐ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ εηβ, τῇ ὑπὸ αηθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηθ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αϐ, τῇ γδ. Πάλιν ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ϐηθ, ηθδ, δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, ϐηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ, ἴσαι εἰσί, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ βηθ, λοιπὴ ἄρα, ἡ ὑπὸ αηθ, λοιπῇ τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αϐ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ. θεώρημα.

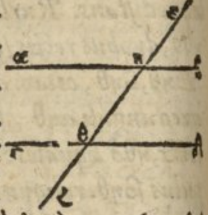
Η εἰς

quæsiti.) Dico quod recta $\alpha\beta$, æquedistet rectæ $\gamma\delta$. (Demonstratio.) Cum enim angulus $\epsilon\eta\beta$, sit æqualis angulo $\eta\theta\delta$: & angulus $\epsilon\eta\beta$, etiam sit æqualis angulo $\alpha\eta\theta$: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, etiam est æqualis angulo $\eta\theta\delta$, & sunt anguli alterni. quare recta $\alpha\beta$, rectæ $\gamma\delta$, est æquedistans. Rursus, quoniam anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$, duobus rectis sunt æquales: & duo anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$, etiam duobus rectis æquales: idcirco anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$ sunt duobus angulis $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ æquales: communis auferatur angulus $\beta\eta\theta$. reliquus igitur angulus $\alpha\eta\theta$, reliquo angulo $\eta\theta\delta$ est æqualis, & sunt anguli alterni. ergo recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$. (Conclusio.) Si igitur linea recta in duas rectas incidens lineas, extraneum angulum interno cui opponitur, ex eadem parte fecerit æqualē: vel si duos angulos internos ex eadem parte fecerit æquales duobus angulis rectis: æquedistātes inter se erunt duæ illæ lineæ rectæ. Id quod erat demonstrandum.

Propositio vigesima nona. Theorema.

Linea

Η εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Ἔκθεσις.) Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, γδ, εὐθεῖα ἐμπιπτέτω, ἡ εζ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αηθ, ηθδ, ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ εηβ, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ηθδ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ βηθ, ηθδ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. (Ἀπόδειξις μετὰ τῆς ὑποθέσεως.) Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ αηθ, καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ αηθ, τῆς ὑπὸ ηθδ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ αηθ, βηθ, τῶν ὑπὸ βηθ, ηθδ, Linea recta in duas rectas æquediſtantes lineas incidens, facit angulos alternos inter ſe æquales: & angulum externum interno oppoſito ex eadem parte facit æqualem: item duos angulos internos ex eadem parte facit æquales duobus rectis.

Explicatio dati.) Sint duæ lineæ rectæ æquediſtantes αβ, γδ: & in eas incidat linea recta εζ. (Explicatio quæſiti.) Dico quod faciat angulos αηϑ, ηθδ, qui ſunt alterni, inter ſe æquales: & angulum externum εηβ, angulo interno oppoſito ex eadem parte ηθδ æqualem: & angulos internos ex eadem parte poſitos βηθ, ηθδ, duobus rectis æquales. (Demonſtratio cum hypotheſi.) Si enim angulus αηϑ, nõ eſt æqualis angulo ηθδ: alter illorum erit maior, ſit angulus αηθ maior. Quoniam angulus αηθ, maior eſt angulo ηθδ: cõmunis addatur angulus βηϑ. ergo anguli αηθ, βηθ, ſunt maiores angulis βηϑ, ηθδ. Ve-

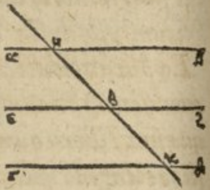
ηθδ, μείζονες εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ αηθ, βηθ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ βηθ, ηθδ, δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον, συμπίπτουσιν. αἱ ἄρα αβ, γδ, ἐκβαλλόμεναι, εἰς ἄπειρον, συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθδ, ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ αηθ τῇ ὑπὸ εηβ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ εηβ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηθδ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ βηθ. αἱ ἄρα ὑπὸ εηβ, βηθ, ταῖς ὑπὸ βηθ, ηθδ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ εηβ, βηθ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ αἱ ὑπὸ βηθ, ηθδ ἄρα, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. (Συμπέρασμα.) Η ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα, τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς, τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

rum anguli $\alpha\eta\theta$, $\beta\eta\theta$ duobus rectis sunt æqua les: ergo anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$, duobus rectis sunt minores: lineæ verò rectæ à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis, in infinitum vsque ductæ concurrunt: quare rectæ $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ in infinitum productæ concurrent: sed quia æquedistantes proponuntur esse, non cõcurrunt: idcirco angulus $\alpha\eta\theta$, non est inæqualis angulo $\eta\theta\delta$, erit igitur ei æqualis. Verum angulus $\alpha\eta\theta$, angulo $\epsilon\eta\beta$ est æqualis: ideo etiam angulus $\epsilon\eta\beta$, angulo $\eta\theta\delta$ est æqualis: communis addatur angulus $\beta\eta\theta$: ergo anguli $\epsilon\eta\beta$, $\beta\eta\theta$, angulis $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ sunt æquales: verum anguli $\epsilon\eta\beta$, $\beta\eta\theta$ duobus rectis sunt æquales, idcirco & anguli $\beta\eta\theta$, $\eta\theta\delta$ duobus rectis æquales erunt. (Conclusio.) Linea igitur recta, in duas æquedistantes lineas rectas incidens, facit angulos alternos inter se æqua les: & angulum externum interno opposito ex eadem parte facit æqualem: item duos angulos internos ex eadem parte facit æquales duobus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Πρότασις λ. θεώρημα.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἑκατέρα τῶν αβ, γδ, τῇ εζ παράλληλος. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἡ αβ, τῇ γδ ἐστὶ παράλληλος. (Κατασκευή.) Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ηκ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς αβ, εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν, ἡ ηκ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αηθ, τῇ ὑπὸ ηθζ. πάλιν ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς εζ, γδ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ηκ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ηθζ, τῇ ὑπὸ ηκδ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αηκ, τῇ ὑπὸ ηθζ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ αηκ ἄρα, τῇ ὑπὸ ηκδ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότα-

Propositio Trigesima. Theorema.

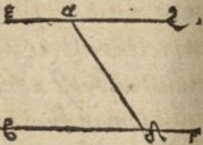
QVæ eidem lineę rectæ ęquedistāt: illæ etiam inter se æquedistant.

Explicatio dati.) Sit linea recta $\varepsilon\zeta$, *cui æquedistent rectæ lineæ* $\alpha\beta,\gamma\delta$. *(Explicatio quæsiti.) Dico quod recta* $\alpha\beta$, *etiam æquedistet rectæ* $\gamma\delta$. *(Delineatio.) Incidat in prædictas lineas recta quædam linea* $\eta\kappa$. *(Demonstratio.) Quoniam in duas æquedistantes rectas* $\alpha\beta,\ \varepsilon\zeta$: *incidit recta* $\eta\kappa$: *idcirco angulus* $\alpha\eta\theta$, *est æqualis angulo* $\eta\theta\zeta$. *Præterea quoniam in duas rectas æquedistantes* $\varepsilon\zeta,\ \gamma\delta$ *recta incidit* $\eta\kappa$: *angulus* $\eta\theta\zeta$, *erit æqualis angulo* $\eta\kappa\delta$. *demonstratum verò est, quòd angulus* $\alpha\eta\kappa$, *angulo* $\eta\theta\zeta$ *sit æqualis. quare & angulus* $\alpha\eta\kappa$, *angulo* $\eta\kappa\delta$ *est æqualis, & sunt anguli alterni. Quare recta* $\alpha\beta$, *æquedistat rectæ* $\gamma\delta$. *(Conclusio.) Quæ igitur rectæ eidem lineæ rectæ æquedistant: illæ etiam inter se æquedistant. Id quod erat demonstrandū.*

Πρότασις λα. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον, τὸ α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεία, ἡ βγ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ διὰ τοῦ α σημείου, τῇ γβ εὐθείᾳ, παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. (Κατασκευή) Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς βγ τυχὸν σημεῖον τὸ δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αδ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ δα εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, τῇ ὑπὸ αδγ γωνίᾳ, ἴση ἡ ὑπὸ δαε, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας



τῇ αε, εὐθεῖα ἡ αζ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς βγ, εζ, εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ αδ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ εαδ, αδγ, ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ εζ, τῇ βγ. (Συμπέρασμα.) Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ βγ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ εαζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

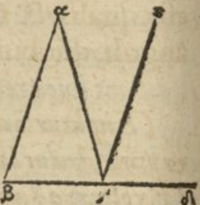
Propositio trigesima prima. Problema.

A Puncto dato, datæ lineę rectæ, rectam lineam æquedistantem ducere.

Explicatio dati.) Sit datum punctum α, et data linea recta $\beta\gamma$. *(Explicatio quæsiti.)* A dato puncto α, ducenda est linea recta æquedistans lineæ rectæ datæ, $\beta\gamma$. *(Delineatio.)* Sumatur in linea recta $\beta\gamma$, punctum quoduis δ, & ducatur linea recta $\alpha\delta$: Ad lineam rectam $\alpha\delta$, & punctum in ea α, angulo rectilineo $\alpha\delta\gamma$, æqualis statuatur angulus rectilineus $\delta\alpha\varepsilon$, & ducatur linea $\alpha\zeta$, ἐπ' εὐθείας lineæ $\varepsilon\alpha$. *(Demonstratio.)* Quoniam in duas lineas rectas $\beta\gamma$, $\varepsilon\zeta$, incidens linea recta $\alpha\delta$ angulos alternos $\varepsilon\alpha\delta$, $\alpha\delta\gamma$, æquales inter se fecit: idcirco recta $\varepsilon\zeta$, æquedistat rectæ $\beta\gamma$. *(Conclusio.)* A puncto igitur dato α, datæ lineæ rectæ $\beta\gamma$, ducta est linea recta $\varepsilon\alpha\zeta$ æquedistans. Id quod faciendum erat.

Πρότασις λβ. θεώρημα.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον, τὸ αβγ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ, ἡ βγ ἐπὶ τὸ δ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ γαβ, αβγ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ γ σημείου τῇ αβ εὐθεία, παράλληλος ἡ γε. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ αγ, αἱ ἄρα ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ βαγ, αγε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γε, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βδ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ εγδ, *Propositio trigesima secunda. Theorema.*

OMnis triãguli vno è lateribus ꝓtracto, exterior angulus, duobus angulis interioribus quibus opponitur, est ęqualis: & trianguli tres interiores anguli, duobus rectis sunt ęquales.

(Explicatio dati.) Sit triangulus $\overline{\alpha\beta\gamma}$, & protrahatur latus eius $\beta\bar{\gamma}$, ad punctum δ, (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus $\bar{\alpha}\gamma\delta$, est æqualis duobus angulis $\gamma\bar{\alpha}\beta$, $\bar{\alpha}\beta\gamma$ interioribus quibus opponitur: & quod anguli tres interiores $\bar{\alpha}\beta\gamma$, $\beta\bar{\gamma}\alpha$, $\bar{\gamma}\alpha\beta$ sint æquales duob⁹ angulis rectis. (Delineatio.) Ducatur à puncto $\bar{\gamma}$, lineæ rectæ $\bar{\alpha}\beta$, æquedistans linea recta $\bar{\gamma}\varepsilon$. (Demonstratio.) Quoniã recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\bar{\gamma}\varepsilon$, & in eas incidit recta $\bar{\alpha}\gamma$ Idcirco alterni anguli $\beta\bar{\alpha}\gamma$, $\bar{\alpha}\gamma\varepsilon$ sunt inter se æquales. Item cum recta $\bar{\alpha}\beta$, æquedistet rectæ $\bar{\bar{\gamma}}\varepsilon$, & in eas incidit recta $\bar{\beta}\delta$: angulus

εγδ, ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῇ ὑπὸ αβγ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ αεγ, τῇ ὑπὸ βαγ ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αγδ ἐκτὸς γωνία, ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς, καὶ ἀπεναντίον, ταῖς ὑπὸ βαγ, αβγ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αγβ. αἱ ἄρα ὑπὸ αγδ, αγβ τρισὶ ταῖς ὑπὸ αβγ, βγα, γαβ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ αγδ, αγβ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ αἱ ὑπὸ αγβ, γβα, γαβ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία, δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ. θεώρημα.

ΑΙ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι, αἱ αβ, γδ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ

αὐτὰ

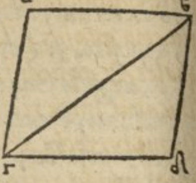
εγδ externus, est æqualis angulo αβγ interno opposito. sed demonstratum est angulum αεγ, angulo βαγ esse æqualem. totus igitur angulus αγδ externus, duob⁹ angulis internis oppositis βαγ, αβγ est æqualis. Communis addatur angulus αγϐ. anguli igitur αγδ αγϐ, tribus angulis αϐγ, ϐγα, γαβ sunt æquales. sed duo anguli αγδ, αγβ sunt duob⁹ rectis æquales. quare tres anguli αγβ, γβα, γαϐ, duobus rectis erũt æquales. (Conclusio.) Omnis igitur trianguli, vno è lateribus protracto: exterior angulus duobus angulis interioribus, quibus opponitur, est æqualis: et trianguli tres interiores anguli, duobus rectis sunt æquales. Id quod erat demõstrandũ.

Propositio trigesima tertia. Theorema.

LIneæ rectæ, quæ æquales, & æque distantes inter se lineas rectas ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & equedistãtes inter se sunt.

Explicatio dati.) Sint lineæ rectæ αβ, γδ, æquales, & æquedistantes: easq; ex eadem

parte



αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ αγ, βδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ αἱ αγ, δβ, ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ βγ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ, τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυσὶ ταῖς βγ, γδ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ αγ, βάσει τῇ βδ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ αγβ γωνία τῇ ὑπὸ γβδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ γδβ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς αγ, βδ: εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ βγ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ αγβ, γβδ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ αγ, τῇ βδ, ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση. (Συμπέρασμα.) Αἱ ἄρα

τὰς

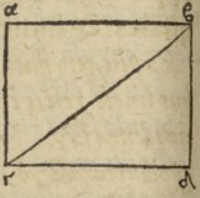
parte coniungant duæ rectæ, $\alpha\gamma$, $\beta\delta$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod rectæ $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, æquales, & æquedistantes sint. (Delineatio.) Ducatur linea recta $\beta\gamma$. (Demonstratio.) Quoniam recta $\alpha\beta$, æquedistat rectæ $\gamma\delta$: & in eas incidit recta $\beta\gamma$: idcirco anguli $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$ alterni: sunt inter se æquales. Et cum recta $\alpha\beta$, sit æqualis rectæ $\gamma\delta$, communis verò $\beta\gamma$: duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duobus lateribus $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ sunt æqualia: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis. basis igitur $\alpha\gamma$, basi $\beta\delta$ est æqualis, & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis, & reliqui anguli reliquis angulis sunt æquales alter alteri, quos æqualia illa latera subtendunt. angulus igitur $\alpha\gamma\beta$, angulo $\gamma\beta\delta$ est æqualis, & angulus $\beta\alpha\gamma$, angulo $\gamma\delta\beta$. & quoniam in duas rectas $\alpha\gamma$, $\beta\delta$, recta incidens $\beta\gamma$, angulos alternos $\alpha\gamma\beta$, $\gamma\beta\delta$, æquales inter se fecerit: idcirco recta $\alpha\gamma$, æquedistat rectæ $\beta\delta$. Verum demonstrata fuit ei esse æqualis. (Conclusio.)

Lineæ

τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ. θεώρημα.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.



(Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αγδβ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τοῦ αγδβ παραλληλογράμμου, αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ βγ, διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ αβ τῇ γδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αβγ, βγδ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ αγ, τῇ βδ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ βγ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ αγβ, γβδ, ἴσαι ἀλλήλαις

λαις

Lineæ igitur rectæ, quæ æquales, & æquedistantes inter se lineas rectas, ex eadem parte coniungunt: etiam ipsæ æquales, & æquedistantes inter se sunt. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima quarta. Theorema.

AReæ quæ æquedistantibus lineis rectis continentur, habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales: & dimetiens ipsas medias secat.

Explicatio dati.) Sit figura æquedistantibus lineis rectis contenta $\alpha\gamma\delta\beta$*: dimetiens eius linea* $\beta\gamma$*. (Explicatio quæsiti.) Dico quod areæ* $\alpha\beta\gamma\delta$*, latus* $\alpha\beta$*, sit æquale lateri* $\gamma\delta$*: item latus* $\alpha\gamma$*, æquale lateri* $\beta\delta$*. Præterea dimetiens* $\beta\gamma$ *ipsam figuram secet in duas partes æquales. (Demonstratio.) Quoniam recta* $\alpha\beta$*, æquedistat rectæ* $\gamma\delta$*, & in eas incidit recta* $\beta\gamma$*: anguli alterni* $\alpha\beta\gamma$*,* $\beta\gamma\delta$ *sunt inter se æquales. Item quoniam recta* $\alpha\gamma$*, æquedistat rectæ* $\beta\delta$*, & in eas incidit recta* $\beta\gamma$*: anguli igitur alterni inter se sunt æquales.*

Quare

λαις εἰσὶ, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ αβγ, γβδ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ αβγ, βγα δυσὶ ταῖς ὑπὸ βγδ, γβδ, ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑ-
κατέρα. καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐ-
τῶν, τὴν βγ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς, ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν, τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ἴση ἄ-
ρα ἡ μὲν αβ πλευρὰ, τῇ γδ, ἡ δὲ αγ τῇ βδ, καὶ ἡ ὑπὸ βαγ γωνία, τῇ ὑπὸ βδγ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ αβγ γωνία, τῇ ὑπὸ βγδ, ἡ δὲ ὑπὸ γβδ, τῇ ὑπὸ αγβ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ αβδ, ὅλῃ τῇ ὑπὸ αγδ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ βαγ, τῇ ὑπὸ βδγ ἴση. (Συμπέρασμα.) Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλ-
λήλαις εἰσίν. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. (Δευτέρα ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ αβ, τῇ γδ, κοινὴ δὲ ἡ βγ, δύο δὴ αἱ αβ, βγ, δυ-
σὶ ταῖς γδ, βγ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

καὶ

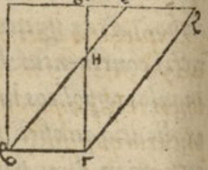
Quare cum duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\beta\delta$, duos angulos $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\alpha$, habeant duobus angulis $\beta\gamma\delta$, $\gamma\beta\delta$ æquales, alterum alteri: & vnum latus, vni lateri æquale, nempe latus $\beta\gamma$ commune quod ad angulos æquales est positum. idcirco & reliqua latera, reliquis lateribus habent æqualia, alterum alteri: & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. latus $\alpha\beta$, æquale lateri $\gamma\delta$, & latus $\alpha\gamma$, æquale lateri $\beta\delta$, & angulum $\beta\alpha\gamma$, angulo $\beta\delta\gamma$, æqualem. Quia verò angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo $\beta\gamma\delta$ est æqualis, & angulus $\gamma\beta\delta$, angulo $\alpha\gamma\beta$ etiam æqualis. Totus igitur angulus $\alpha\beta\delta$, toto angulo $\alpha\gamma\delta$ est æqualis. Verũ & angulus $\beta\alpha\gamma$, demonstratus est æqualis angulo $\beta\delta\gamma$. (Conclusio.) Areæ igitur, quæ æquedistãtib⁹ lineis rectis continentur: habent latera opposita, & angulos oppositos inter se æquales. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod diameter secet eam in duas partes æquales. (Demõstratio secunda.) Quoniã latus $\alpha\beta$, est æquale lateri $\gamma\delta$, & latus $\beta\gamma$ cõmune, duo igitur latera $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, duob⁹ lateribus $\gamma\delta$, $\beta\gamma$ sunt æqua-

καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αβγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ βγδ ἴση ἐστὶ, καὶ βάσις ἄρα ἡ αγ βάσει τῇ δβ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ βγδ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. (Συμπέρασμα.) Ἡ ἄρα βγ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ ΜΕΡΟΣ ΤΟΥΤΟΥ ΤΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ.

Πρότασις λε. θεώρημα.

ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εβζγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αζ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ, τῷ εβζγ. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, τῇ βγ ἴση ἐστὶν ἡ αδ. διὰ τὰ αὐ-

τὰ δὴ

lia alterum alteri: & angulus $\alpha\beta\gamma$, angulo, $\beta\gamma\delta$ æqualis. ergo basis $\alpha\gamma$, basi $\delta\beta$ est æqualis: & triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\beta\gamma\delta$ etiam æqualis. (Conclusio.) Ergo diameter $\beta\gamma$, figuram $\alpha\beta\gamma\delta$ secat in duas partes æquales. Id quod demonstrandum erat.

TERTIA HVIVS ELEMENTI PARS.

Propositio trigesima quinta. Theorema.

QVę parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis: illa sunt æqualia inter se.

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\beta\gamma\zeta$: in eadem basi $\beta\gamma$: & eisdem lineis rectis æquedistantibus $\alpha\zeta$, $\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammũ $\alpha\beta\gamma\delta$, sit æquale parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\zeta$. (Demonstratio.) Quoniã $\alpha\beta\gamma\delta$, figura est parallelogrãmon, idcirco latus $\beta\gamma$, est æquale lateri $\alpha\delta$. Per eadem demõstrabitur quoq; latus τὰ δὴ καὶ ἡ εζ, τῇ βγ ἴση ἐστὶν, ὥστε καὶ ἡ αδ, τῇ εζ ἴση ἐστὶ. καὶ κοινὴ ἡ δε, ὅλη ἄρα ἡ αε, ὅλῃ τῇ δζ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ αβ, τῇ δγ ἴση, δύο δὴ αἱ εα, αβ, δυσὶ ταῖς ζδ, δγ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ζδγ, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εαβ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς. βάσις ἄρα ἡ εβ, βάσει τῇ ζγ ἴση ἐστὶ. καὶ τὸ εαβ τρίγωνον τῷ ζδγ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δηε, λοιπὸν ἄρα τὸ αβηδ τραπέζιον, λοιπῷ τῷ εηγζ τραπεζίῳ, ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ηβγ τρίγωνον, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, ὅλῳ τῷ εβζγ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστὶ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛ. θεώρημα.

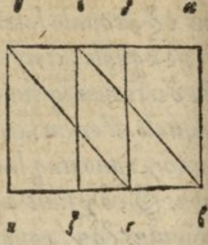
ΤΑ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐκθε-

latus $\varepsilon\zeta$, æquale lateri $\beta\gamma$. quare & latus $\alpha\delta$, est æquale lateri $\varepsilon\zeta$. communis verò est recta $\delta\varepsilon$. totum igitur latus $\alpha\varepsilon$, toti lateri $\delta\zeta$ est æquale. Verum latus $\alpha\beta$, est etiam æquale lateri $\delta\gamma$: duo itaq; latera $\varepsilon\alpha$, $\alpha\beta$, duobus lateribus $\zeta\delta$, $\delta\gamma$ sunt æqualia alterum alteri, & angulus $\zeta\delta\gamma$, æqualis angulo $\varepsilon\alpha\beta$, externus interno. basis igitur $\varepsilon\beta$, basi $\zeta\gamma$ est æqualis, & triangulus $\varepsilon\alpha\beta$, triangulo $\zeta\delta\gamma$ æqualis, communis auferatur triãgulus $\delta\eta\varepsilon$. quare reliquum trapezion $\alpha\beta\eta\delta$, reliquo trapezio $\varepsilon\eta\gamma\zeta$ est æquale. Communis addatur triangulus $\eta\beta\gamma$: totum igitur parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, est æquale toto parallelogrammo $\varepsilon\beta\gamma\zeta$. (Conclusio.) Quæ igitur parallelogramma eandem habent basin: & in eisdem æquedistantibus sunt lineis rectis: illa sunt inter se æqualia. Id quod erat demonstrandũ.

Propositio trigesima sexta. Theorema.

QVæ parallelogramma æquales habent bases: & sunt in eisdem æquedistantibus lineis rectis: illa sunt ęqualia inter se.

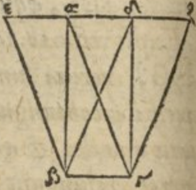


Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ αβγδ, εζηθ, ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν βγ, ζη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς αθ, βη. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον τῷ εζηθ. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ βε, γθ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπὶ ἴση ἐστὶν ἡ βγ τῇ ζη, ἀλλὰ καὶ ἡ ζη, τῇ εθ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ βγ ἄρα, τῇ εθ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ βε, γθ. αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι, ἴσαι τὲ καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ αἱ εβ, γθ ἄρα ἴσαι τὲ εἰσὶ, καὶ παράλληλοι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ εβγθ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ αβγδ, βάσιν τὲ γὰρ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶ αὐτῷ, ταῖς βγ, αθ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ζηθε, τῷ αὐτῷ, τῷ εβγθ, ἐστὶν ἴσον, ὥστε καὶ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, τῷ εζηθ ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα παραλληλό-

Explicatio dati.) Sint parallelogramma $\alpha\beta\gamma\delta$, $\epsilon\zeta\eta\theta$: habentia bases $\beta\gamma$, $\zeta\eta$ æquales: & sint inter easdem æquedistantes rectas lineas $\alpha\theta$, $\beta\eta$. *(Explicatio quæsiti.)* Dico quod parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, sit æquale parallelogrammo $\epsilon\zeta\eta\theta$. *(Delineatio.)* Ducantur lineæ rectæ $\beta\epsilon$, $\gamma\theta$. *(Demonstratio.)* Quoniam recta $\beta\gamma$, æqualis est rectæ $\zeta\eta$: & $\zeta\eta$ est æqualis rectæ $\epsilon\theta$. idcirco & $\beta\gamma$, est æqualis rectæ $\epsilon\theta$. verum sunt lineæ rectæ æquedistantes, easq; coniungunt rectæ $\beta\epsilon$, $\gamma\theta$: rectæ verò quæ æquales, & æquedistantes rectas ex eadē parte coniungunt: & ipsæ æquales, & æquedistantes sunt: quare rectæ $\epsilon\beta$, $\gamma\theta$ æquales & æquedistantes sunt: atq; figura $\epsilon\beta\gamma\delta$ est parallelogrammon, et est æquale parallelogrammo $\alpha\beta\gamma\delta$. quia cum eo eandem habet basim $\beta\gamma$: & in eisdem est æquedistantib⁹ rectis $\beta\gamma$, $\alpha\theta$. Similiter demonstrabimus quod $\zeta\eta\theta\epsilon$ eidem parallelogrammo $\epsilon\beta\gamma\theta$ sit æquale. quare parallelogrāmon $\alpha\beta\gamma\delta$, parallelogrāmo $\epsilon\zeta\eta\theta$ est æquale. *(Conclusio.)* Quæ igitur parallelogramma æquales habent bases: & sunt in γράμμα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δγβ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς αδ, βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ ε, ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω ἡ βε, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ βδ παράλληλος ἤχθω ἡ γζ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν εβαγ, δβγζ. καὶ ἴσον τὸ εβγα, τῷ δβγζ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, εζ. καί ἐστι τοῦ μὲν εβγα παραλληλογράμμου ἥμισυ

τὸ αβγ

eisdem æquedistantibus lineis rectis, illa sunt æqualia inter se. id quod erat demonstrandũ.

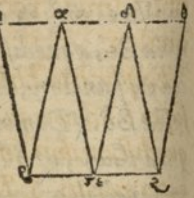
Propositio trigesima septima. Theorema.

QVi trianguli eandẽ habent basin, & sunt in eisdem ęquedistantibus lineis rectis; illi sunt inter se æquales.

Explicatio dati.) Sint duo trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\delta\gamma\beta$, *super eadem basi* $\beta\gamma$: *& in eisdem æquedistantibus lineis rectis* $\alpha\delta$, $\beta\gamma$. *(Explicatio quæsiti.) Dico quod triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *sit æqualis triangulo* $\delta\gamma\beta$. *(Delineatio.) Producatur linea recta* $\alpha\delta$, *in vtramq; partẽ ad puncta* ε, *&* ζ: *& ex puncto* β, *ducatur linea recta* $\beta\varepsilon$, *æquedistans lineæ rectæ* $\alpha\gamma$. *præterea ex puncto* γ, *ducatur recta* $\gamma\zeta$, *æquedistãs rectæ* $\beta\delta$. *(Demonstratio.) Vtraq; igitur figura* $\varepsilon\beta\alpha\gamma$, *&* $\delta\beta\gamma\zeta$ *est parallelogrammon. & parallelogrammũ* $\varepsilon\beta\alpha\gamma$, *est æquale parallelogrammo* $\delta\beta\gamma\zeta$. *quia super eadẽ basi* $\beta\gamma$ *est, & inter easdem æquedistantes lineas rectas* $\beta\gamma$, $\varepsilon\zeta$, *& parallelogrãmi* $\varepsilon\beta\gamma\alpha$ *dimidiũ* αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει, τοῦ δὲ δβγζ παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ δβγ τρίγωνον, ἡ γὰρ δγ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δβγ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη. θεώρημα.

ΤΑ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα τὰ αβγ, δεζ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα, τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ταῖς βζ, δα. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ δεζ τριγώνῳ. (Κατασκευή.) Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ αδ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ η, θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ β, τῇ *est, triangulus* $\alpha\beta\gamma$. *nam diameter* $\alpha\beta$ *ipsum per medium secat. parallelogrammi verò* $\delta\beta\gamma\zeta$ *dimidium est triangulus* $\delta\beta\gamma$. *nam diameter* $\delta\gamma$ *ipsum per medium secat. Quæ verò æqualium sunt dimidia, illa inter se sunt æqualia. triangulus igitur* $\alpha\beta\gamma$, *triãgulo* $\delta\beta\gamma$ *est æqualis.* (*Conclusio.*) *Qui igitur trianguli sunt super eadem basi, & inter easdem lineas rectas æquedistantes, illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.*

Propositio trigesima octaua. Theorema.

QVi trianguli æquales habent bases; & sunt in eisdem ęquedistantibus lineis rectis, illi inter se sunt æquales.

Explicatio dati.) *Sint trianguli* $\alpha\beta\gamma$, $\delta\epsilon\zeta$, *super basibus æqualibus* $\beta\gamma$, $\epsilon\zeta$, *in eisdem æquedistantibus lineis rectis* $\alpha\delta$, $\beta\zeta$. (*Explicatio quæsiti.*) *Dico quod triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *sit æqualis triangulo* $\delta\epsilon\zeta$. (*Delineatio.*) *Producatur linea recta* $\alpha\delta$, *in vtramq; partem ad puncta* η, & θ. *Ex puncto* β, *ducatur*

linea

β, τῇ γα παράλληλος ἤχθω, ἡ βη, διὰ δὲ τοῦ ζ, τῇ δὲ παράλληλος ἤχθω ἡ ζθ. (Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ηβγα, δεζθ, καὶ ἴσον τὸ ηβγα, τῷ δεζθ. ἐπεί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ, εζ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βζ, ηθ. καὶ ἐστι τοῦ μὲν ηβγα παραλληλογράμμου, ἥμισυ, τὸ αβγ τρίγωνον. ἡ γὰρ αβ διάμετρος, δίχα αὐτὸ τέμνει. τοῦ δὲ δεζθ, παραλληλογράμμου, ἥμισυ τὸ ζεδ τρίγωνον, ἡ γὰρ ζδ, διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον τῷ δεζ τριγώνῳ. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ. θεώρημα.

ΤΑ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Εκ-

linea recta $\beta\eta$, æquedistans lineæ rectæ $\alpha\gamma$. Item ex puncto ζ ducatur linea recta $\zeta\theta$, æquedistans lineæ rectæ $\delta\varepsilon$. (Demonstratio.) Vtraq; igitur figura $\eta\beta\gamma\alpha$, $\delta\varepsilon\zeta\theta$ est parallelogrammon. & parallelogrammon $\eta\beta\gamma\alpha$, est æquale parallelogrammo $\delta\varepsilon\zeta\theta$. quia super basibus $\beta\gamma$, $\varepsilon\zeta$, æqualibus, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\zeta$, $\eta\theta$ sunt. præterea parallelogrammi $\alpha\beta\gamma\alpha$ dimidium, est triangulus $\alpha\beta\gamma$, quoniam diameter $\alpha\beta$ ipsum secat per medium. & parallelogrammi $\delta\varepsilon\zeta\theta$ dimidium, est $\zeta\varepsilon\delta$ triangulus. quia diameter $\zeta\delta$, ipsum secat medium. Quæ verò æqualium sunt dimidia, illa inter se sunt æqualia. quare triangulus $\alpha\beta\gamma$, triangulo $\delta\varepsilon\zeta$ est æqualis. (Conclusio.) Qui igitur trianguli super basibus fuerint æqualibus, & in eisdem lineis æquedistantib⁹, illi inter se sunt æquales. Id quod erat demonstrandum.

Propositio trigesima nona. Theorema.

TRianguli æquales, eandem habentes basim: & ex eadem parte, & in eisdem æquedistantibus rectis sunt.

Expli-

Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ αβγ, δβγ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, τῆς βγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ, λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ γβ. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α σημείου τῇ βγ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ αε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ εγ. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγ, τῷ δβγ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ δβγ ἄρα τρίγωνον, τῷ εβγ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αε, τῇ βγ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα, τῇ βγ ἐστὶν παράλληλος. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

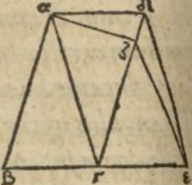
Πρότα-

Explicatio dati.) Sint trianguli $\alpha\beta\gamma.\delta\beta\gamma$ super eadē basi $\beta\gamma$. (*Explicatio quæsiti.*) Dico quod etiam in eisdē sint lineis rectis æquedistantibus. (*Delineatio.*) Ducatur linea recta $\alpha\delta$: dico quod recta $\alpha\delta$, æquedistet rectæ $\beta\gamma$. si enim ei non æquedistat, ducatur per punctum α, rectæ lineæ $\beta\gamma$ æquedistans recta $\alpha\varepsilon$: & ducatur linea recta $\varepsilon\gamma$. (*Demōstratio.*) Triangulus igitur $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\varepsilon\beta\gamma$, quia super eadem basi $\beta\gamma$ est, & in eisdem lineis rectis æquedistantibus $\beta\gamma$, $\alpha\varepsilon$. verum triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\delta\beta\gamma$: idcirco & triangulus $\delta\beta\gamma$, triangulo $\varepsilon\beta\gamma$ est æqualis: maior minori. quod fieri nequit. Quare recta $\alpha\varepsilon$, nō æquedistat rectæ $\beta\gamma$. Simili ratione demonstrabimus, quod nulla alia præterquam $\alpha\delta$ recta, æquedistet rectæ $\beta\gamma$. recta igitur $\alpha\delta$, rectæ $\beta\gamma$ æquedistat. (*Conclusio.*) Trianguli igitur æquales, eandem habentes basin, in eisdem sunt æquedistantibus rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propo-

Πρότασις μ. θεώρημα.

ΤΑ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνα ἴσα, τὰ αβγ, γδε, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν βγ, γε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσίν. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αδ. Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ αδ, τῇ βε. Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ α, τῇ βε παράλληλος ἡ ζα. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ζε. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ ζγε τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν βγ, γε, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βε, αζ. ἀλλὰ τὸ αβγ τρίγωνον, ἴσον ἐστὶ, τῷ δγε τριγώνῳ, καὶ τὸ δγε τρίγωνον ἄρα, ἴσον ἐστὶ τὸ ζγε τριγώνῳ, τὸ μεῖζον, τῷ ἐλάσσονι: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ αζ, τῇ βε. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς αδ. ἡ αδ ἄρα

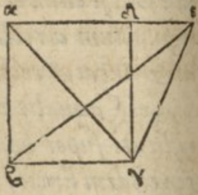
Propositio quadragesima. Theorema.

TRianguli æquales, ſuper æqualibus conſtituti baſibus: ſunt in eisdem lineis rectis æquediſtantibus.

Explicatio dati.) Sint trianguli $\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\varepsilon$ *ſuper baſibus* $\beta\gamma$, $\gamma\varepsilon$ *æqualibus. (Explicatio quæſiti.) Dico quod in eisdem ſint æquediſtantibus lineis rectis. (Delineatio.) Ducatur recta* $\alpha\delta$, *dico quod* $\alpha\delta$, *æquediſtet rectæ* $\beta\varepsilon$: *ſi enim ei non æquediſtat, ducatur per punctum* α *rectæ* $\beta\varepsilon$, *æquediſtans recta* $\zeta\alpha$: *& ducatur recta* $\zeta\varepsilon$. *Triangulus igitur* $\alpha\beta\gamma$, *eſt æqualis triangulo* $\zeta\gamma\varepsilon$, *quia ſunt conſtituti ſuper baſibus* $\beta\gamma$, $\gamma\zeta$ *æqualibus, & in eisdem lineis rectis æquediſtantibus* $\beta\varepsilon$, $\alpha\zeta$. *ſed triangulus* $\alpha\beta\gamma$, *eſt æqualis triangulo* $\delta\gamma\varepsilon$. *quare triangulus* $\delta\gamma\varepsilon$, *etiam erit æqualis triangulo* $\zeta\gamma\varepsilon$, *maior minori ; quod fieri nequit. non igitur recta* $\alpha\zeta$, *æquediſtat rectæ* $\beta\varepsilon$. *Simili ratione demonſtrabimus,* αδ ἄρα τῇ βε παράλληλός ἐστι. (Συμπέρασμα.) Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μα. θεώρημα.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



Ἔκθεσις.) Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ αβγδ, τριγώνῳ τῷ εβγ, βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς βγ, αε. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι διπλάσιον ἐστὶ τὸ αβγδ, παραλληλόγραμμον, τοῦ εβγ τριγώνου. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ αγ. (Ἀπόδειξις.) Ἴσον δή ἐστι τὸ αβγ, τῷ εβγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ, τῆς βγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς

βγ

quod nulla alia præterquam $\alpha\delta$ recta, æquedistet rectæ $\beta\varepsilon$. (Conclusio.) Trianguli igitur æquales, super æqualibus constituti basibus: sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus. id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima prima. Theorema.

PArallelogrammon trianguli est duplum, si super eadem consistat basi: & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis.

Explicatio dati.) Parallelogrāmon $\alpha\beta\gamma\delta$, & triangulus $\varepsilon\beta\gamma$: sint super eadem basi $\beta\gamma$, in eisdem æquedistantibus lineis rectis $\alpha\varepsilon$, $\beta\gamma$. (Explicatio quæsiti.) dico quod parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, sit duplum trianguli $\beta\varepsilon\gamma$. (Delineatio.) Ducatur recta $\alpha\gamma$. (Demonstratio.) Triangulus $\alpha\beta\gamma$, est æqualis triangulo $\varepsilon\beta\gamma$, quia super eadem basi sunt $\beta\gamma$: & in eisdem æquedistantibus lineis rectis

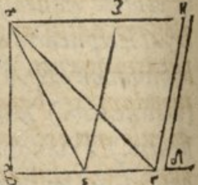
 $\beta\gamma$,

βγ, αε. ἀλλὰ τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, διπλάσιόν ἐστι τοῦ αβγ τριγώνου. ἡ γὰρ αγ διάμετρος, αὐτὸ δίχα τέμνει. ὥστε τὸ αβγδ παραλληλόγραμμον, καὶ τοῦ εβγ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον, τριγώνῳ βάσιν τε ἔχει τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μβ. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον, τὸ αβγ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ αβγ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. (Κατασκευή.) Τετμήσθω ἡ βγ δίχα



$\beta\gamma$, $\alpha\epsilon$. sed parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, est duplum trianguli $\alpha\beta\gamma$: quia $\alpha\gamma$ diameter ipsum medium secat. quare & parallelogrammon $\alpha\beta\gamma\delta$, trianguli $\epsilon\beta\gamma$ duplum erit. (Conclusio.) Parallelogrammon igitur trianguli est duplum: si super eadem consistat basi, & in eisdem fuerit æquedistantibus lineis rectis. Id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima secunda. Problema.

DAto triangulo, æquale statuere parallelogrammon in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit triangulus datus $\alpha\beta\gamma$: & datus angulus rectilineus δ. (Explicatio quæsiti.) Dato triangulo $\alpha\beta\gamma$, statuendum est parallelogrammon æquale: in angulo qui est æqualis dato angulo rectilineo δ. (Delineatio.) Dissecetur linea recta βγ δίχα κατὰ τὸ ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ αε, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ εγ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ ε, τῇ δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ γεζ. καὶ διὰ μὲν τοῦ α, τῇ εγ παράλληλος ἤχθω, ἡ αη, διὰ δὲ τοῦ γ, τῇ ζε παράλληλος ἤχθω ἡ γη, παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ, τὸ ζεγη. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ βε, τῇ εγ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ αβε τρίγωνον, τῷ αεγ τριγώνῳ. ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσὶ τῶν βε, εγ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς βγ, αη. διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ αβγ, τοῦ αεγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, διπλάσιον τοῦ αεγ τριγώνου. βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ζεγη παραλληλόγραμμον, τῷ αβγ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ γεζ γωνίαν, ἴσην τῇ δ. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ αβγ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνεστάθη τὸ ζεγη, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζεγ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

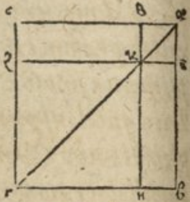
Πρό-

βγ media in puncto ε: & ducatur linea recta αε: atque ita statuatur ad lineam rectam εγ, & punctū eius ε, dato angulo rectilineo δ: æqualis angulus rectilineus γεζ: postea ducatur per punctum α, lineæ rectæ γε, æquedistans linea recta αη: & per punctum γ, lineæ rectæ εζ, æquedistans linea recta γη. Erit itaque figura ζεγη parallelogrammon. (Demōstratio.) Quoniam βε est æqualis εγ: idcirco & triangulus αβε, triangulo αεγ est æqualis: sunt enim super basibus æqualibus βε, εγ, & in eisdem lineis rectis βγ, αη æquedistantibus. Quare αβγ triangulus, duplus est trianguli αεγ: verum parallelogrammon εζγη, etiam est duplum trianguli αεγ: quia eandem habent basin εγ: & in eisdem sunt æquedistantib⁹ lineis rectis εγ, ζη. Quare parallelogrammon εζγη, est æquale triangulo αβγ, & habet angulum γεζ, æqualem angulo δ. (Conclusio.) Dato igitur triangulo αβγ, statutum est æquale parallelogrāmon εζγη in angulo ζεγ, qui est æqualis dato angulo rectilineo δ. Quod faciendum erat.

Πρότασις μγ. θεώρημα.

ΠΑντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔκθεσις.) Ἔστω παραλληλόγραμμον, τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ, ἡ αγ, περὶ δὲ τὴν αγ, παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ εθ, ζη, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα, τὰ βκ, κδ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ βκ παραπλήρωμα, τῷ κδ παραπληρώματι. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ αβγδ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ αβγ τρίγωνον, τῷ αδγ τριγώνῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ εκθα παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ακ, ἴσον ἐστὶ τὸ εακ τρίγωνον τῷ αθκ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ κζγ τρίγωνον, τῷ κηγ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν αεκ τρίγωνον, τῷ αθκ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ κζγ, τῷ κηγ, τὸ αεκ τρίγωνον μετὰ τοῦ κηγ, ἐστὶν



ἴσον

Propositio quadragesima tertia. Theorema.

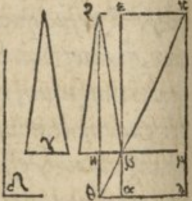
OMnis parallelogrammi eorum quę circa eandem sunt dimetientem parallelogrammôn supplementa: æqualia sunt inter se.

Explicatio dati.) Sit parallelogrammon αβγδ, *dimetiens eius* αγ, *& circa* αγ, *sint parallelogramma* εθ, ζη *: & quæ vocantur supplementa sint* βκ, κδ. *(Explicatio quæsiti.) Dico quod supplementum* βκ, *sit æquale supplemēto* κδ. *(Demonstratio.) Quoniā* αβγδ *parallelogrammon, diametrum habet* αγ *: idcirco triangulus* αβγ, *est æqualis triangulo* αδγ. *Rursus quoniam* εκθα *parallelogrammon, diametrum habet* ακ *lineā rectam : ideo* εακ *triangulus, est æqualis triangulo* αθκ. *per eadem demonstrabitur triangulum* κζγ, *triangulo* κηγ *esse æqualem. Cum igitur triangulus* αεκ, *triangulo* αθκ *sit æqualis : & triangulus* κζγ, *æqualis triangulo* κηγ *: erit itaq; triangulus* αεκ *cum triāgulo* κηγ *æqualis tri-*

ἴσον τῷ αθκ τριγώνῳ μετὰ τοῦ κζγ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ αβγ τρίγωνον, ὅλῳ τῷ αδγ ἴσον. λοιπῷ ἄρα τῷ κδ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ, τὸ βκ παραπλήρωμα. (Συμπέρασμα.) Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων, τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ. Πρόβλημα.

ΠΑρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον, τὸ γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ δ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν αβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ δ γωνίᾳ. (Κατασκευή.) Συνε-

στάτω

lis triangulo $\alpha\theta\kappa$, cum triangulo $\kappa\zeta\gamma$. verũ totus triangulus $\alpha\beta\gamma$, toto triangulo $\alpha\delta\gamma$ est æqualis : quare reliquum supplementum $\beta\kappa$, reliquo supplemento $\kappa\delta$ est æquale. (Conclusio.) Omnis igitur parallelogrammi eorum quæ circa eandem sunt dimetientem parallelogrammωn supplementa æqualia sunt inter se, Id quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima quarta. Problema.

AD datam lineam rectam, dato triangulo, æquale statuere parallelogrãmon, in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$: datus vero triangulus γ: datus angulus rectilineus δ. (Explicatio quæsiti.) Ad datam lineam rectam $\alpha\beta$, statuendum est parallelogrammon æquale triangulo dato γ: in angulo, qui est æqualis angulo δ dato. (Delinea-

ςάτω τῷ γ̄ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ βεζη, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ εβη, ἥ ἐςὶν ἴση τῇ δ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν βε, τῇ αβ, καὶ διήχθω ἡ ζη, ἐπὶ τὸ θ, καὶ διὰ τοῦ α ὁποτέρᾳ τῶν βη, εζ παράλληλος ἤχθω ἡ αθ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ θβ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς αθ, εζ, εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ θζ, αἱ ἄρα ὑπὸ αθζ, θζε γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ βθη, ηζε δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι, συμπίπτουσιν, αἱ θβ, ζε ἄρα ἐκβαλλόμεναι, συμπεσοῦνται. (Κατασκευῆς τὸ ἕτερον μέρος.) Εκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ κ, καὶ διὰ τοῦ κ σημείου, ὁπότερα τῶν εα, ζθ, παράλληλος ἤχθω ἡ κλ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ θα, ηβ, ἐπὶ τὰ λ, μ, σημεῖα. (Ἀποδείξεως τὸ ἕτερον μέρος.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐςὶ τὸ θλκζ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ θκ. περὶ δὲ θκ, παραλληλόγραμμα μὲν, τὰ αη, με, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα λβ, βζ. ἴσον ἄρα ἐςὶ τὸ λβ, τῷ βζ. ἀλλὰ καὶ

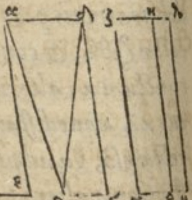
τὸ βζ

neatio.) Fiat triangulo γ æquale parallelogrammon $\beta\varepsilon\zeta\eta$: in angulo $\varepsilon\beta\eta$, æquali angulo δ dato, & sit linea recta $\beta\varepsilon$ ἐπ' εὐθείας rectæ $\alpha\beta$: atque producatur linea recta $\zeta\eta$, ad punctum θ. per punctum etiam α ducatur alterutri linearum $\beta\eta$, $\varepsilon\zeta$ æquedistans linea recta $\alpha\theta$: denique ducatur linea recta $\theta\beta$. (Demonstratio.) Quoniam in duas rectas æquedistantes $\alpha\theta$, $\varepsilon\zeta$ recta linea $\theta\zeta$ incidit: idcirco anguli $\alpha\theta\zeta$, $\theta\zeta\varepsilon$ duobus rectis sunt æquales, atque ideo anguli $\beta\theta\eta$, $\eta\zeta\varepsilon$ duobus rectis sunt minores. verum lineæ rectæ à duobus angulis, qui sunt minores duobus angulis rectis, in infinitum vsque ductæ concurrunt. quare $\theta\beta$, $\zeta\varepsilon$ productæ concurrent. (Altera delineationis pars.) Producantur duæ lineæ rectæ $\zeta\varepsilon$ $\theta\beta$, & concurrant in puncto $\varkappa$, & per punctum $\varkappa$, alterutri linearum $\varepsilon\alpha$, $\zeta\theta$ ducatur $\varkappa\lambda$ æquedistans: atque producantur lineæ rectæ $\eta\beta$, $\theta\alpha$ ad puncta vsque λ, μ. (Demonstrationis altera pars.) Est igitur figura $\theta\lambda\varkappa\zeta$ parallelogrammon: eiusque diameter $\theta\varkappa$: circa dimetientem verò parallelogramma sunt $\alpha\eta$, $\mu\varepsilon$: dicta verò supplementa $\lambda\beta$, $\beta\zeta$. quare $\lambda\beta$

τὸ βζ, τῷ γ̄ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ λβ ἄρα τῷ γ̄ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ η̄βε γωνία, τῇ ὑπὸ αβμ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ η̄βε τῇ δ̄ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ᾱβμ, τῇ δ̄ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. (Συμπέρασμα.) Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ᾱβ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ γ̄, ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ λβ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ᾱβμ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις με. Πρόβλημα.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστύσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον, τὸ ᾱβγδ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ε. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ τῷ ᾱβγδ εὐθυγράμμῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ ε̄. (Κατασκευή.) Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ δβ, καὶ συνεστά-

supplementum est æquale βζ supplemento. verum βζ supplementum, est æquale triangulo γ: ergo & λβ supplementum triangulo γ est æquale. præterea quoniam angulus ηβε est æqualis angulo αβμ: & angulus ηβε etiã est æqualis angulo δ: idcirco & angulus αβμ etiam est æqualis angulo δ. (Conclusio.) Ad datam igitur lineam rectam αβ: dato triangulo γ: æquale cõstitutum est parallelogrammon λβ, in angulo αβμ, qui est æqualis angulo δ. Id quod erat faciendum.

Propositio quadragesima quinta. Problema.

DAto rectilineo, æquale statuere parallelogrammon in angulo rectilineo dato.

Explicatio dati.) Sit datum rectilineum αβγδ: & datus angulus rectilineus ε. (Explicatio quæsiti.) Dato rectilineo αβγδ, statuendum est æquale parallelogrammon in angulo rectilineo, qui est æqualis angulo ε dato. (Delineatio.) Ducatur linea recta βδ, & consti-

νεςάτω τῷ αβδ τριγώνῳ, ἴσον παραλληλόγραμμον, τὸ ζθ, ἐν τῇ ὑπὸ θκζ γωνίᾳ, ἥ ἐςὶν ἴση τῇ ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ηθ εὐθεῖαν τῷ δβγ τριγώνῳ, ἴσον παράλληλόγραμμον, τὸ ημ, ἐν τῇ ὑπὸ ηθμ γωνίᾳ, ἥ ἐςὶν ἴση τῇ ε. (Απόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἡ ε γωνία, ἑκατέρα τῶν ὑπὸ θκζ, ηθμ ἔςιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ηθμ ἄρα τῇ ὑπὸ θκζ ἔςιν ἴση, κοινὴ προσκείσθω, ἡ ὑπὸ κθη. αἱ ἄρα ὑπὸ ζκθ, κθη ταῖς ὑπὸ κθη, ηθμ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ζηθ, κθη, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, καὶ αἱ ὑπὸ κθη, ηθμ ἄρα δύσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. πρὸς δή τινι εὐθεία, τῇ ηθ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ θ, δύο εὐθεῖαι αἱ κθ, θμ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐςὶν ἡ κθ, τῇ θμ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς κμ, ζη, εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ θη, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι, αἱ ὑπὸ μθη, θκζ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ θηλ. αἱ ἄρα ὑπὸ μθη, θηλ, ταῖς ὑπὸ θηζ, θηλ, ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ μθη, θηλ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, καὶ αἱ ὑπὸ

θηζ,

constituatur triangulo $\alpha\beta\delta$ æquale parallelogrammon $\zeta\theta$: habens angulum $\theta\kappa\zeta$, æqualem angulo ϵ. statuatur etiam ad lineam rectam $\eta\theta$, parallelogrammon $\eta\mu$, æquale triangulo $\delta\beta\gamma$, habens angulum $\kappa\theta\mu$ æqualem angulo ϵ. (Demonstratio.) Quoniam angulus ϵ alterutri angulo $\theta\eta\zeta$, $\eta\theta\mu$ est æqualis: idcirco & angulus $\eta\theta\mu$, angulo $\theta\kappa\zeta$ est æqualis. communis addatur angulus $\kappa\theta\eta$: ergo duo anguli $\zeta\kappa\theta$, $\kappa\theta\eta$, duob. angulis $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ sunt æquales. verum duo anguli $\zeta\eta\theta$, $\kappa\theta\eta$ duobus rectis sunt æquales: quare & anguli $\kappa\theta\eta$, $\eta\theta\mu$ duobus rectis sunt æquales. ad lineam rectam $\eta\theta$, & punctum in ea datum θ in diuersas partes ductæ sunt lineæ rectæ $\kappa\theta$, $\theta\mu$: atque faciunt angulos ἐφεξῆς æquales duobus rectis: quare recta $\kappa\theta$ est ἐπ' εὐθείας rectæ $\theta\mu$. Et quia in lineas rectas æquedistantes $\kappa\mu$, $\zeta\eta$ recta quædam $\theta\eta$ incidit: anguli idcirco alterni sunt inter se æquales, angulus $\mu\theta\eta$, æqualis angulo $\theta\kappa\zeta$. Communis addatur angulus $\theta\eta\lambda$. anguli igitur $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$, angulis $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ sunt æquales, verum $\mu\theta\eta$, $\theta\eta\lambda$ anguli sunt æquales duo-

θηζ, θηλ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ζη, τῇ ηλ. καὶ ἐπεὶ ἡ κζ τῇ θη, ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ θη τῇ μλ, καὶ ἡ κζ ἄρα τῇ μλ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι, αἱ κμ, ζλ. καὶ αἱ κλ, ζμ, ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσί. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ κζλμ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν αβδ τρίγωνον, τῷ θζ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ δβγ, τῷ ημ, ὅλον ἄρα τὸ αβγδ εὐθύγραμμον, ὅλῳ τῷ κζλμ παραλληλογράμμῳ, ἴσον ἐστί. (Συμπέρασμα.) Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ αβγδ, ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τῷ κζλμ, ἐν γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ζκμ ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μϛ. Πρόβλημα.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔκθεσις.) Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἡ αβ. (Διορισμός.) Δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας, τετράγω-

bus rectis. quare & anguli $\theta\kappa\zeta$, $\theta\eta\lambda$ *duobus rectis sunt æquales. quare recta* $\zeta\eta$ *est* ἐπ' εὐθείας *rectæ* $\eta\lambda$. *Cum vero* $\kappa\zeta$ *recta, rectæ* $\theta\eta$ *sit æqualis, & æquedistans: item* $\theta\eta$ *recta, rectæ* $\mu\lambda$ *æqualis & æquedistans: idcirco &* $\kappa\zeta$ *recta, rectæ* $\mu\lambda$ *æqualis & æquedistans est: easq́ cõiungunt rectæ* $\kappa\mu$, $\zeta\lambda$, *quare &* $\kappa\lambda$, $\zeta\mu$ *æquales & æquedistantes sunt, vnde fit, quod figura* $\kappa\zeta\lambda\mu$ *sit parallelogrammon. Cum autẽ triangulus* $\alpha\beta\delta$, *sit æqualis parallelogrammo* $\theta\zeta$: *& triangulus* $\delta\beta\gamma$ *parallelogrammo* $\eta\mu$. *totum igitur rectilineum* $\alpha\beta\gamma\delta$: *toto parallelogrammo* $\kappa\zeta\lambda\mu$ *est æquale. (Cõclusio.) Dato igitur rectilineo* $\alpha\beta\gamma\delta$, *constitutum est parallelogrammon* $\kappa\zeta\lambda\mu$ *æquale, in angulo* $\zeta\eta\mu$, *qui est æqualis dato angulo* ϵ. *Id quod faciendum erat.*

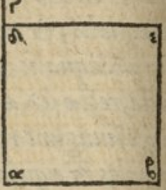
Propositio quadragesima sexta. Problema.

A Data linea recta describere quadratum.

Explicatio dati.) Sit data linea recta $\alpha\beta$. *Explicatio quæsiti.) A data linea recta* $\alpha\beta$,

 descri-

νον ἀναγράψαι. (Κατασκευή.) Ἤχθω τῇ αβ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ α, πρὸς ὀρθὰς ἡ αγ, καὶ κείσθω τῇ αβ ἴση, ἡ αδ, καὶ διὰ μὲν τοῦ δ σημείου, τῇ αβ παράλληλος ἤχθω, ἡ δε, διὰ δὲ τοῦ β σημείου τῇ αδ παράλληλος ἤχθω, ἡ βε.



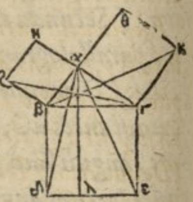
(Ἀπόδειξις.) Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν αβ τῇ δε, ἡ δὲ αδ, τῇ βε. ἀλλὰ καὶ ἡ αβ, τῇ αδ ἐστὶν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ βα, αδ, δε, βε, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ παραλληλόγραμμον. (Διορισμὸς δεύτερος.) Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. (Ἀπόδειξις.) Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς αβ, δε εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ αδ, αἱ ἄρα ὑπὸ βαδ, αδε γωνίαι, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ βαδ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ αδε. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπ' ἐναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίων τῶν ὑ-

πὸ

describendum est quadratum. (Delineatio.) Ducatur ex puncto α lineæ rectæ αϐ, ad angulos rectos recta linea αγ: & fiat rectæ αβ æqualis recta αδ: per punctum etiam δ, lineæ rectæ αϐ ducatur æquedistans linea recta δε: deniq; per punctum β lineæ rectæ δε, ducatur æquedistans linea recta ϐε. (Demonstratio.) Figura igitur αϐδε, est parallelogrammon: & αϐ est æqualis δε, atq; αδ rectæ βε: sed & αβ etiam est æqualis rectæ αδ. quatuor igitur rectæ αϐ, αδ, δε, ϐε sunt inter se æquales, atq; idcirco parallelogrammon αδεϐ est æquilaterum. (Secunda explicatio quæsiti.) Dico quod parallelogrammon αδεϐ etiã sit rectangulum. (Demonstratio.) Cum in duas rectas æquedistantes αϐ, δε recta quædam αδ inciderit, anguli ϐαδ, αδε duobus rectis sunt æquales. verum angulus ϐαδ, est rectus, idcirco & angulus αδε etiam est rectus, parallelogramma vero angulos oppositos, & latera opposita habẽt æqualia: quare vterq; angulorũ πὸ αβε, βεδ γωνιῶν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ αδεβ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. (Συμπέρασμα.) Τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς αβ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μζ. θεώρημα.

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.



Ἔκθεσις.) Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον, τὸ αβγ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ βαγ. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς βγ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. (Κατασκευή.) Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς βγ, τετράγωνον, τὸ βδγε, ἀπὸ δὲ τῶν βα, αγ, τὰ ηβ, θγ, καὶ διὰ τοῦ α, ὁπότερα τῶν βδ, γε, παράλληλος ἤχθω ἡ αλ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ αδ, ζγ. (Ἀπόδει-

oppositorum $\alpha\beta\epsilon$, $\epsilon\beta\delta$ *est rectus: ideoq́ue* $\alpha\delta\epsilon\beta$ *parallelogrammon, est rectangulum, sed & æquilaterum esse fuit demonstratum. (Conclusio.) Quare* $\alpha\beta\epsilon\delta$ *figura, est quadratũ: & est descriptum à linea recta data* $\alpha\beta$*. id quod erat faciendum.*

Propositio quadragesima septima.
Theorema.

IN triangulis rectãgulis, quadratum lateris angulum rectum subtendentis, est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

Explicatio dati.) Sit triangulus rectangulus $\alpha\beta\gamma$*, habens angulum* $\beta\alpha\gamma$ *rectum. (Explicatio quæsiti.) dico quod quadratum lateris* $\beta\gamma$*, sit æquale quadratis laterum* $\beta\alpha$*,* $\alpha\gamma$*. (Delineatio.) Describatur à linea* $\beta\gamma$*, quadratum* $\beta\delta\epsilon\gamma$*: & à linea* $\beta\bar{\alpha}$ *quadratum* $\beta\bar{\eta}$*. Præterea à linea* $\alpha\gamma$ *quadratum* $\gamma\theta$*. Ducatur etiam per punctum* α*, alterutri linearum* $\beta\delta$*,* $\gamma\epsilon$ *æquedistans recta linea* $\alpha\lambda$*. deniq́ue ducantur duæ lineæ rectæ* $\alpha\delta$*,* $\zeta\gamma$*. (Demon-*

πόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ βαγ, βαη γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθεία, τῇ βα, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ α, δύο εὐθεῖαι, αἱ αγ, αη, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ γα, τῇ αη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ αβ, τῇ αθ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ δβγ γωνία τῇ ὑπὸ ζβα ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ αβγ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ δβα, ὅλῃ τῇ ὑπὸ ζβγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ δβ, βα. δυσὶ ταῖς βζ, βγ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ δβα, γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ζβγ, ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ αδ, βάσει τῇ ζγ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ αβδ τρίγωνον, τῷ ζβγ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι τοῦ μὲν αβδ τριγώνου, διπλάσιον τὸ βλ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν βδ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις, ταῖς βδ, αλ. τοῦ δὲ ζβγ τριγώνου, διπλάσιον τὸ ηβ τετράγωνον. βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι, τὴν ζβ. καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ, ταῖς ζβ, ηγ.

τὰ δὲ

monstratio.) Quoniam vterq; angulorū βαγ, βαη est rectus: idcirco ad rectam quandam βα, & ad punctum quod in ea est α, duæ rectæ αγ, αη in diuersas partes ductæ, faciunt angulos vicinos inter se æquales: quare recta γα est ἐπ' εὐθείας rectæ αη. per eadem ista demonstrabitur, quod recta αβ, est ἐπ' εὐθείας rectæ αθ. quoniam verò angulus δβγ, æqualis est angulo ζβα, quia vterq; est rectus. communis addatur angulus αβγ: totus igitur angulus δβα, toto angulo ζβγ est æqualis. cum verò duo latera δβ, βα, duobus lateribus βζ, βγ sint æqualia, alterum alteri: & angulus δβα, angulo ζβγ æqualis. basis igitur αδ, basi ζγ est æqualis, & triangulus αβδ triangulo ζβγ æqualis: verum trianguli αβδ parallelogrammon βλ est duplum, quia habent eandem basin βδ, & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus βδ, αλ. Item trianguli ζβγ, duplum, est quadratum ηβ, quia habent eandem basin ζβ, & sunt in eisdem lineis rectis æquedistantibus ζβ, ηγ. Quæ verò æτὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ βλ παραλληλόγραμμον, τῷ ηβ τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν αε, βη, δειχθήσεται καὶ τὸ γλ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ θγ τετραγώνῳ, ὅλον ἄρα τὸ δβεγ τετράγωνον, δυσὶ τοῖς ηβ, θγ τετραγώνοις, ἴσον ἐστὶ, καί ἐστι τὸ μὲν βδεγ τετράγωνον, ἀπὸ τῆς βγ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ηβ, θγ, ἀπὸ τῶν βα, αγ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Συμπέρασμα.) Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μη. θεώρημα.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Ἐκθε-

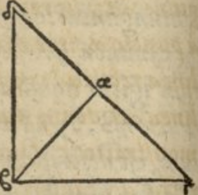
qualiũ sunt dupla, illa inter se sunt æqualia. ideoq; parallelogrammon ϐλ, æquale est quadrato ηϐ. Simili ratione quando αε, βη rectæ coniunguntur: demonstrabitur quod parallelogrammon γλ sit æquale quadrato θγ. totum igitur quadratum δβεγ, duobus quadratis ηβ, θγ est æquale. sed βδεγ quadratum, est descriptum à latere ϐγ, & quadrata ηϐ, θγ sunt descripta à lateribus βα, αγ. Quadratum igitur lateris ϐγ, est æquale quadratis laterum ϐα, αγ. (Conclusio.) In triangulis igitur rectangulis quadratum lateris rectum angulum subtendentis, est æquale quadratis laterum rectum angulum continentium. quod erat demonstrandum.

Propositio quadragesima octaua.
Theorema.

SI quadratum vnius lateris trianguli fuerit equale quadratis reliquorum duorum laterum: erit angulus quem reliqua illa duo trianguli latera continent, rectus.

Expli-

Ἔκθεσις.) Τριγώνου γὰρ τοῦ αβγ, τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς βγ πλευρᾶς τετράγωνον, ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ πλευρῶν τετραγώνοις. (Διορισμός.) Λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ βαγ γωνία. (Κατασκευή.) Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ α σημείου τῇ αβ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα, ἡ αδ, καὶ κείσθω τῇ γα, ἴση ἡ αδ,



καὶ ἐπεζεύχθω ἡ δβ. (Ἀπόδειξις.) Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ δα, τῇ, αγ, ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς δα τετράγωνον, τῷ ἀπὸ τῆς αγ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω, τὸ ἀπὸ τῆς αβ τετράγωνον, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν δα, αβ τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ, τοῖς ἀπὸ τῶν βα, αγ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν δα, αβ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς δβ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ δαβ γωνία, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν αβ, αγ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς βγ ὑπόκειται γάρ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς δβ τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς βγ τετραγώνῳ. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ δβ, τῇ βγ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ αδ τῇ αβ, κοινὴ δὲ ἡ αγ, δύο δὴ αἱ δα, αβ, δυσὶ ταῖς βα, αγ ἴσαι

εἰσὶ

Explicatio dati.) Sit quadratum lateris βγ, trianguli αβγ æquale quadratis laterũ ϐα, αγ. (Explicatio quæsiti.) Dico quod angulus ϐαγ sit rectus. (Delineatio.) Ducatur à puncto α, lineæ rectæ αϐ, ad angulos rectos linea recta αδ: & fiat lineæ αγ æqualis recta linea αδ: deniq; ducatur linea recta δβ. (Demonstratio.) Quoniam recta δα, est æqualis rectæ αγ: idcirco & quadratum à recta δα descriptum, erit æquale, quadrato à recta αγ descripto. Commune addatur quadratum rectæ αϐ. quare quadrata rectarũ δα, αβ sunt æqualia quadratis rectæ ϐα, αγ. verum quadratis rectarum δα, αβ, æquale est quadratum rectæ δβ, quia angulus δαϐ est rectus. quadratis verò rectarum αϐ, αγ æquale proponitur esse quadratũ rectæ δϐ. Quare quadratum rectæ δβ, æquale est quadrato rectæ βγ. vnde etiam latus δϐ lateri ϐγ est æquale. Quoniam vero latus αδ, est æquale lateri αϐ, commune verò latus αγ: duo latera δα, αϐ, duobus lateribus βα, αγ sunt æqualia, &

basis

εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ δβ, βάσει τῇ βγ ἐστὶν ἴση. γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ δαβ, γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ βαγ, ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ δαβ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ βαγ. (Συμπέρασμα.) Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΤΕΛΟΣ.

basis $\delta\beta$, est æqualis basi $\beta\gamma$: idcirco & angulus $\delta\alpha\beta$, angulo $\beta\alpha\gamma$ est æqualis. Verum angulus $\delta\alpha\beta$ est rectus, quare & angulus $\beta\alpha\gamma$ etiam erit rectus. (Conclusio.) Si igitur quadratum vnius lateris trianguli fuerit æquale quadratis reliquorum duorum laterũ: erit angulus quem reliqua duo trianguli latera continent rectus. Id quod erat demonstrandum.

FINIS.

Scholia in hoc primum Euclidis elementum, autore Cunrado Dasypodio.

De scientijs Mathematicis.

Mathematicas scientias sic dictas volunt, quòd cum alias artes etiam absque præceptore intelligere, & addiscere possimus: has tamen non nisi instituti, & edocti, imò in illis exercitati percipere queamus: vt à discendo disciplinæ, à μαθήσεως ἐπιστήμαι μαθηματικαὶ dicantur. Pythagorici autem mathematicæ nomen, duabus tantum scientijs Arithmeticæ, & Geometriæ imposuerunt: quoniam in his potissimum τὸ ἐπιστημονικὸν, & ipsa μάθησις cerni potest. postea tamen nonnulli latius sumpto vocabulo, alias scientias hisce cognatas appellarunt mathematicas, Astronomiam, Musicam, & quæ huius sunt generis. Hinc fit, vt mathematica definiatur scientia contemplationem habens rerum, non tantum abstractarum, vt sunt numeri, & figu-

& figuræ: sed & sensibus ipsis subiectarum, vtpote cæli, terræ, stellarum, sonorum, tonorum, & quæcunq; his sunt similia.

Hanc verò vniuersalem mathesin in duas potissimum partes diuidunt: altera enim versatur circa res mẽte & ratione perceptas, quæ Græcis nominantur τὰ νοητὰ, & διανοητά. altera verò τῶν αἰσθητῶν, rerum sensu subiectarum habet perceptionem: illa Geometriam, & Arithmeticam cõplectitur: hæc verò in sex est diuisa scientias, Geodæsiam, & Opticam, quæ ex Geometria nascuntur: Logisticam & Canonicam prognatas ex Arithmetica: deniq; Mechanicam, & Astronomiam, quas ad vtramq; referri tradunt. Est & alia mathematicæ diuisio, in quatuor partes tantum facta. quoniam μάθησις habet perceptionem quantitatis cõtinuæ, vel quantitatis discretæ. Geometria enim, & Astronomia sibi habent subiectas ipsas magnitudines: Geometria quidem eam, quæ est sine motu: Astronomia eam, quæ mouetur. sic etiam multitudinis & numerorũ fit cõtemplatio in Arithmetica, & Musica: illa enim numeros per se considerat, eorumq́; proprietates inuestigat: hæc verò numeros tractat relatos, quos etiam harmonicos appellant. Itaq; vniuersalis quædam mathematica cognitio & doctrina est statuenda, sub se complectens reliquas disciplinas omnes, suaq́; principia, & vniuersales propositiones omnibus communicans, non quatenus numeris, aut figuris, vel deniq; motibus illa insunt: sed quatenus eorũ vniuersalis est natura, & talis, quæ singularibus illis disciplinis attribui potest. Sunt autem eiusmodi principia τὸ πέρας, καὶ τὸ ἄπειρον, finitum, & infinitum: quia numerus incipit ab vnitate, & in infinitũ vsq; crescit: is verò qui sumitur, finitus semper est: sic etiam magnitudines in infinitum vsque diuidi possunt: cum tamen ea, quæ diuiduntur, sint finita, & terminata. Propositiones verò mathematicæ communes sunt istæ, in quibus cõtemplamur λόγους, ἀναλογίας, συνθέσεις,

διαιρέ-

διαιρέσεις, ἀναστροφὰς, ἐναλλαγὰς, τὸ ἴσον, τὸ ἄνισον, id eſt, rationes, proportiones, compoſitiones, diuiſiones, conuerſiones, alternas permutationes, æquale, & inæquale. deinde τὸ κάλλος, καὶ τάξις, ipſaq; μέθοδος. præterea ὁμοιότης, καὶ ἀνομοιότης, ſimilitudo, & diſsimilitudo rerum in figuris, numeris, & motibus vniuerſaliter conſiderantur. hæc inquam omnia, & his ſimilia vnaquæq; diſciplina ad ſuam accomodat rem ſubiectam, eaq; ei ineſſe proprijs confirmat rationibus. Præterea Mathematicarum diſciplinarum faſtigium & vertex quaſi eſt ipſa ἀποδεικτικὴ, quia per ipſam hæ ſcientiæ perficiuntur, dum definitionibus, diuiſionibus, demonſtrationibus, & quicquid harũ rerũ eſt, vtuntur.

De Geometria, & eius elementis.

Proclus Geometriam ſic definit: γεωμετρία ἐστὶ γνωστικὴ μεγεθῶν, καὶ σχημάτων, καὶ τῶν ἐν τούτοις περάτων· ἔτι δὲ καὶ τῶν λόγων τῶν ἐν αὐτοῖς, καὶ παθῶν τῶν περὶ αὐτὰ, καὶ τῶν παντοίων θέσεων, καὶ κινήσεων. Geometria est scientia, vel cognitio magnitudinum, & figurarum, atque etiam terminorum quibus illæ clauduntur: quæque proportiones, & rationes, atque etiam passiones his accidentes demonstrat: positionum denique, & motuũ varietates explicat. Hæc scientia duplex est: altera nominatur θεωρία τῶν ἐπιπέδων: altera στερεωμετρία. Planorum contemplatio tanquam simplicior præcedit, siquidem ex superficierum contemplatione nascitur corporum & solidorum cognitio. in vtraque verò tria (sicuti in omnibus scientijs) considerantur. Primum τὸ ὑποκείμενον γένος, res ipsa, de qua doctrina est instituta: alterum τὸ καθ' αὑτὸ ὑπάρχον, id quod rei per se inest, & τὰ πάθη, rerum affectiones: tertium ἀξιώματα, καὶ αἰτήματα, propositiones, per quas rebus subiectis inesse aliquid demonstratur. illa itaque in Geometria consideranda veniunt: nam vt ex definitione Geometriæ licet videre: subiecta sunt trianguli, quadrata, circuli, sphæra, Cylindri, & vt summatim

matim dicam, figuræ planæ, corpora solida, denique omnes magnitudines immobiles, & harum termini. quæ verò his per se insunt, διαιρέσεις, συστάσεις, ἁφαὶ, παραβολαὶ, ὑπεροχὴ, ἔλλειψις, ἰσότης, καὶ ἀνισότης, id est, diuisiones, constitutiones, contactus, applicationes, excessus, defectus, æqualitas, & inæqualitas: cum alijs quibusdam huius generis. Axiomata, & petitiones, quibus singula rebus subiectis demonstrantur inesse: sunt huiusmodi, quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia: item à puncto ad punctum ducere lineam rectam. Hæc verò cum latè pateant, & ipsarum rerum subiectarum, atque propositionum geometricarum magna, variaque sit copia: necesse est, vt delectus habeatur, & in tradendo, atque docendo incipiamus à simplicioribus, ac principalioribus: ex quibus tanquam notißimis extruamus demonstrationes rerum in geometria abstrusarum. quas quidem simpliciores propositiones στοιχεῖα, earumque doctrinam στοιχείωσιν Græci *nominant. ſunt enim στοιχεῖα, ſeu elementa Geometriæ, propoſitiones ſimpliciſsimæ, in quas compoſitæ reſoluuntur, & à quibus tanquam principijs omnes Geometricæ demonſtrationes egreſſæ ſunt: tales ſunt hæ propoſitiones Euclidis, quibus Archimedes, Apollonius, & cæteri geometræ tanquam principijs, & notiſsimis elementis vtuntur: ita tamen hæc prima, & ſimpliciſsima Geometriæ principia ab Euclide conſcripta ſunt, vt nemo ſatis poſsit hominis & ingenium, & induſtriam mirari. quæ enim ab antiquis fuerunt inuenta, in optimum redegit ordinem: delectum etiam in tanta copia, & varietate propoſitionum habuit talem, vt non omnia quæ dici poterant, aſſumeret: ſed ea tantum, quæ elementari inſtitutioni conueniebant. deinde omnes modos, omniaq́ genera ſyllogiſmorum adhibuit, quæcunq́ ab ipſis apodicticis recipiuntur. Præterea vtitur diuiſionibus in inueniendis rerum ſpeciebus, item definitionibus in ſubſtantiali rerum ſubiectarum explicatio-*

catione. adhæc demonſtratione in ijs, quæ à principijs fiunt ad quæſita. deniq; reſolutione cum à quæſitis ad ipſa principia ſit reditus. Taceo de varijs, quibus vtitur conuertendi modis, continuatione, & diſpoſitione ſingulari ipſorum elementorum: vt vnum abſq; altero videatur eſſe non poſſe. Quæ cum ita ſint, meritò omnes ſtudioſi philoſophiæ, & bonarũ artium, ſibi hæc Euclidis elemẽta familiaria reddere debebant, vt ad altiores capeſcendas ſcientias fierent paratiores.

De Propoſitionibus Geometriæ.

Solent Geometræ duo præcipua propoſitionum genera habere: vnum eſt τῶν ἀρχῶν *principiorum: alterum* τῶν μετὰ τὰς ἀρχὰς προτάσεων: *id eſt, propoſitionum, quæ principia ſequuntur, principia ipſa quia per ſe manifeſta, & ſimplicia ſunt nulla adhibita demonſtratione primo explicantur loco: ſubſequuntur propoſitiones demonſtratione indigentes, & ex ipſis demanantes principijs: & niſi hic ordo teneatur, verum permiſceantur* omnia, tum & ipsa cognitio perturbatur: & quæ natura sunt distincta, coniunguntur. Illud ipsum facit Euclides, & principiorũ facta enumeratione, absq; vlla demonstratione: transit ad propositiones demonstrabiles. diuidit verò ipsa in ὑποθέσεις αἰτήματα, καὶ ἀξιώματα ἢ κοινὰς ἐννοίας. Est autem ὑπόθεσις, cum aliquis rei propositæ cognitionem nondum habet, quæ per se fidem rei faciat, verum concedit assumenti illud verum esse. eiusmodi sunt ipsæ definitiones Euclidis. Postulatum verò in genere est, cum neq; cognitũ quid est, neq; ab audiente concessum, tamen petitur ab alieno, vt assumi concedatur. sicuti cum peto mihi concedi omnes angulos rectos æquales inter se esse. Axioma, vel pronunciatum est quando quid cognitum est, & tam manifestum, vt per sese fidem habeat. vt quæ eidem sunt æqualia, illa inter se sunt æqualia: totum maius est sua parte. Geometræ tamen hypotheseis vocant etiam ὅρους definitiones rerum subiectarum: vt si definiam line-

lineam, angulos, figuras, & similia: quo sciatur, quibus de rebus sermo sit institutus. deinde αἴτημα, seu postulatum non sic sumunt vt Philosophi: sed postulatum vocant propositionem immediatam, in qua petitur aliquid quod factu est facile, & nulla indiget varia aut prolixa delineatione, vt si dicam, à puncto ad punctum ducatur linea recta. Communis deniq; sententia Geometris dicitur propositio immediata, quæ per se manifesta, & cognitu perfacilis est, sine vlla demonstratione recepta: & communi omnium consensu concessa. Itaq; tria ista propositionum genera in eo conueniunt, quòd principiorum naturam habeant, ac per se sint manifesta. differunt verò, quòd hypothesis sit rerum subiectarum explicatio: postulatũ proponit aliquid, quod factu sit facile: axioma rei per se manifestæ sit cognitio. Quidam verò petitiones dicunt tantum ad Geometriam spectare: axioma vero ad omnes disciplinas. Alij diuidunt hoc modo ipsas communes sententias, vt quasdã

Geometriæ, nonnullas Arithmeticæ proprias esse dicant: alias deniq; communes. atq; hæc sint paucis dicta de principijs. Propositiones verò, quæ principia sequuntur, & demonstrari possunt ac debent: aliæ sunt προβλήματα, aliæ θεωρήματα. Problemata dicuntur propositiones, in quibus aliquid nobis ad agendũ proponitur: vt quando figurarum ortus & constitutiones, sectiones, subtractiones, additiones, & similia proponuntur. Theoremata autem sunt, in quibus ad contemplandum quiddam proponitur, vt si ea, quæ rebus per se insunt, aut accidunt, consideramus. cuiusmodi dicuntur esse τὰ καθ' αὑτὰ ὑπάρχοντα ἢ συμβεβηκότα, vel etiam συμπτώματα, aut deniq; τὰ πάθη. Differunt itaq; inter se, sed non aliter quàm petitio, & axioma. Euclides vtroq; genere vtitur. nam interdum tantum habet problemata, vt in quarto libro, interdũ verò solum theoremata, sicuti in quinto: nonnunquam deniq; theoremata problematibus commiscet, vt in reliquis facit libris.

De

De primo Libro.

Proposuit sibi Euclides in hoc primo elemento principia figurarum rectilinearũ tradere: nam triangulus & parallelogrammon sunt in figuris rectilineis omnium primæ, & simplicissimæ. Diuisit verò librum in partes tres: in prima, post explicationem principiorum, docet quomodo triangulus sit constituendus, quæ sint eius proprietates, cùm quoad angulos, tum etiam latera: præterea eosdem comparat inter se, & vnumquodq; accidens per se considerat: in altera de lineis æquedistantibus, & parallelogrammis doctrinam instituit, demonstrans quæ eis per se insint, & quomodo ipsa fiant parallelogramma. in postrema, parallelogramma & triangulos inter se confert, primum seorsim, deinde coniunctim. Atq; hæc breuiter sint dicta, & explicata de vniuersali illa rerum mathematicarum & Geometriæ cognitione: nunc subiungemus perbreues locorum difficiliorum expositiones, & si quid forsan occurret, quod latius sit explicandum, & ad vniuersam Geo-

metri-

metriam ſpectare videbitur, id fuſius exponemus. cuiusmodi eſt ille locus περὶ τοῦ πορίσματος, ἐνστάσεως ἀπαγωγῆς, & de ijs, quæ his ſimilia.

Σημεῖον.) Alij ſic definiunt: σημεῖον ἐστὶ μονὰς θέσιν ἔχουσα, punctum eſt vnitas quæ poſitionem habet. ſolum punctum in Geometria diuidi non poteſt: ſicut in Arithmetica vnitas non admittit diuiſionem. ſunt enim vnius, eiusdemq́ue naturæ: quum duarum ſcientiarum omniū prima, & ſimpliciſsima ſint principia: differunt tamen in eo, quòd punctum dari & poni poſsit: vnitas verò puncto ſimplicior exiſtens non ponatur: cum ab omni interuallo, omniq́ue materia, ac loco ſit abſtracta. Vtitur autem definitione negatiua, quoniam negationes maximè conueniunt principijs.

Γραμμὴ.) Principium omnium magnitudinum ſola negatione definiuit: lineam verò nunc deſcribit affirmando, & negando. quia affirmatione excedit naturam puncti, & minus eſt ſimplex puncto, cum ſit longitudo diuiſionem admittens: negatione verò eſt

princi-

principium respectu superficiei, & corporis. sunt enim tres dimensiones: longitudinis quæ attribuitur lineæ, longitudinis & latitudinis simul, quæ ad superficiem refertur: deniq; longitudinis & latitudinis, atq; profunditatis coniunctim in corpore. cum itaq; in definitione ponit ἀπλατὲς latitudine carens: vnà cum latitudine adimit quoq; profunditatem, atq; eam ob causam non addidit καὶ ἀβαθὲς, cum superfluum esset. Alij sic definiunt lineam: γραμμὴ ἐστὶ ῥύσις τοῦ σημείου, id est, linea fit ex fluxu puncti: nonnulli γραμμὴν μέγεθος ὑφ' ἓν διαστατὸν nominant, magnitudinem vno contentam interuallo. Euclidis tamen definitio perfectior est, essentiam & substantiam lineæ explicans. Possumus autem lineam hoc modo cognoscere, si longitudines parietum, aut itinerum spatia dimetiamur, quia tum neq; latitudinem, neque craßitiem subiungimus, sed vnicam consideramus distantiam, sicuti cum metimur prata, & campos, videmus ipsam tantum superfiperficiem, id est, longitudinem & latitudinem tantum eius loci, vel agri. Cùm verò puteos, tũ est solidum, quia omnes distantiæ, omniaq́ interualla ibi coniunguntur: dicimus enim longitudinis, latitudinis, profunditatis ipsius putei, tantum vel tantum esse spatium, melius tamen cognoscemus lineam, quando obseruamus quomodo lucidum ab obscuro, illuminatum ab obumbrato distinguatur.

Εὐθεῖα.) Duæ simplicissimæ, ac præcipuæ linearum species sunt, recta & circularis: reliquæ omnes sunt mixtæ: & vel in superficiebus planis, vel in corporibus solidis considerantur. Plato lineam rectam definit sic: εὐθεῖα γραμμὴ ἔστι, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ: cuius media obumbrant extrema: quod licet videre in Eclipsi Solis, quando in vna linea recta sunt Sol, Luna, & oculus noster, Luna media inter nos & Solem existente. Archimedes definit lineam rectam sic: εὐθεῖα γραμμὴ ἔστιν ἐλαχίστη τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν, est breuissima earum

rum linearum, quæ eosdem habent terminos. atq; hæc definitio explicat Euclideam, & vicissim illa declarat hanc.

Επιφανεία.) Post punctum & lineam sequitur superficies, quæ duplici interuallo distat longitudine, & latitudine: caret verò crassitudine: atq; eam ob causam addidit particulam μόνον.

Επιφανίας δὲ.) sicut corpus solidum clauditur, & terminatur superficie, sic & superficies linea finitur, & linea puncto, quod quidē est omnium magnitudinū communis, & simplicissimus, atq; externus terminus.

Επίπεδος ἐπιφάνειά.) Omnis superficies vel est plana, vel circularis, & sphærica. vnam igitur geometra delegit, eamq; definit, nempe planam. possunt ei etiam congruere definitiones lineæ rectæ supra positæ: in hac autem plana superficie nos tanquam in aliquo subiecto contemplamur figuras, & figurarum affectiones. nam in plana superficie nos ducimus lineas rectas, circulares, & figu-

ras

vas omnis generis: item linearum, circulorũ, & figurarum sectiones, contactus, applicationes angulorum, constitutiones, & quicquid harum est rerum: sed planam superficiem idcirco elegit, quoniã in alijs superficiebus ista omnia non possunt ita intelligi aut describi, quemadmodum in plana. Vocat itaq; hic planum id, quod nobis ante oculos est positum, & in quo mente atq; cogitatione omnia describimus, & delineamus, atq; firmis rationibus confirmamus.

Επίπεδος γωνία.) *Genus definitionis est* κλίσις, *inclinatio: locus autem in quo describitur angulus, est* τὸ ἐπίπεδον, *planum ipsum: ortus verò eius est, quòd ad minimum duæ debẽt esse lineæ rectæ: sicuti in solido angulo lineæ tres: deinde illæ duæ lineæ rectæ debent sese mutuo tangere, neq; sitæ esse in directo, illud enim est* ἐπ' εὐθείας, *quando duæ lineæ rectæ ita collocatæ sunt, vt protractis istis lineis rectis, & concurrentibus vna ex duabus fiat linea recta.*

Οταν

Ὅταν δὲ.) *Enumerat ſpecies ſubſtantiales anguli rectilinei. definitionibus acuti & obtuſi anguli eſt addendum genus, quod ſcilicet vterq; ſit rectilineus, alter maior recto, alter vero recto minor. Verum non abſolute illud eſt ſumendum, quod omnis angulus recto minor ſit acutus, quia ſunt anguli nonnulli etiã non rectilinei, & tamen non acuti: ſicut neq; illud ſimpliciter ſumitur, quod obtuſus ſit recto maior, & idcirco omnes recto angulo maiores ſunt obtuſi, quoniam ſunt anguli recto maiores, qui non ſunt obtuſi.*

Σταθεῖσα.) *Rectam ſuper recta conſtituit in definitione anguli recti, non autem in anguli obtuſi aut acuti deſcriptione: quia angulus rectus eſt angulorum non rectorum menſura: ſicuti æqualitas eſt regula & norma inæqualitatis.*

ἀλλήλαις.) *Poſſunt enim æquales eſſe, ſed ſi inter ſe æquales ſint, neceſſe eſt vt ſint recti.*

Ἐφεξῆς.) *Indicat cauſam rectitudinis, quia ſi anguli contigui inter ſe ſunt æquales,* *rectus erit vterq́ue illorum æqualium angulorum: nam ſtans illa recta in neutrum inclinat partem, & idcirco cauſa eſt non æqualitatis tãtum, ſed & rectitudinis. Traditur verò hic de angulis, qui ſunt in vno eodemq́ue plano, ſicuti & perpendicularis non quælibet hic definitur, ſed illa tantum, quæ in vno, eodemq́ue eſt plano.*

Κύκλος.) *Prima ſimpliciſſima, atq́ue perfectiſſima figura plana eſt circulus, vt in corporibus ſolidis ſphæra.*

Σχῆμα.) *quia vno comprehenditur termino.* ἀφ᾽ ἑνός.) *ſunt enim infinita in circulo puncta, quorum omnium vnum tantum centri nomen & naturam retinet.* Ἐντός.) *ad differentiam eius puncti, quod extra circulum ſumitur, & polus dicitur: omnia enim in vno ſunt plano. idcirco etiam ſtatim definitionem illius puncti ſubiungit, vt ſciamus nõ polum, ſed centrum intelligi.*

Διάμετρος.) *Circulo propriè conuenit: nam* ἄξων *vel axis eſt ipſius ſphæræ,* διαγώνιος νιῶ verò figurarum quadrilaterarum.

ἡμικύκλιον.) Semicirculum inquit circuli diametro & circumferentia comprehendi propter τμήματα segmenta circulorum, quorum alterum μείζων maius, alterum ἔλαττον minus dicitur.

Ευθύγραμμα.) à figura quæ vno termino ad eam quæ duobus comprehenditur, est progressus: nunc ad alias pergit explicandas: idq; iuxta ordinem numerorū, binarium, & ternarium, & ita deinceps, quamuis vltra quadrilateras figuras, quæ in elementis locum habent, non progreditur specialiter: verum sub vno vocabulo comprehendit: & eas nominat τὰ πολύπλευρα, multi lateras figuras. Omnis igitur figura rectilinea, vel est trilatera: vel quadrilatera, vel gradatim multilatera: : sed non è contra omnis trilatera, quadrilatera, aut multilatera est rectilinea.

Τριπλεύρων. Triangulorum duplex est diuisio: vna per se manifesta, & cognita sumpta ab ipsis lateribus: altera quæ eam subsequitur est propria ab ipsis angulis facta.

Τετραπλεύρων.) Præcipua diuisio quadrilaterarum figurarum hæc est: aliæ dicuntur parallelogramma, aliæ nõ parallelogramma: quæ verò parallelogramma dicuntur: aliæ rectangula, & æquilatera sunt, vt τετράγωνον quadratum: aliæ verò horum neutrũ habent, vt τὸ ῥομβοειδὲς, Rhombi speciem habens. nonnulla verò sunt quidem rectangula, sed non æquilatera, vt τὸ ἑτερομηκὲς, parallelogrammon altera parte longius: deniq; sunt parallelogramma, quæ æquilatera quidem, sed non rectangula sunt, vt est ῥόμβος, Rhombus. Figuræ verò quadrilateræ, quæ non sunt parallelogramma, aut duo tantum habent parallela latera, & sunt τραπέζια, trapezia: aut nulla prorsus parallela latera, & nominantur τραπεζοειδῆ, speciem trapezij habentia. Verum Euclides hanc diuisionem facere non potuit, cum de parallelis lineis aut figuris hisce lineis contentis nulla sit facta mentio: idcirco simpliciorem illam facit

facit diuisionem τετραπλεύρων.

Καὶ πᾶσαι ὀρθαί.) *Quidam iuxta Peripateticos volunt hanc propositionem esse* αἴτημα, *petitionem: alij verò & melius* ἀξίωμα *pronunciatum. Cum nunc paucis absoluerimus principia: restant propositiones demonstrabiles. omnis enim scientia vel versatur in principiorum explicatione, quas sine vlla demonstratione adhibita recipit: vel in doctrina propositionum earum, quæ ex ipsis demanant principijs: & per ea demonstrantur: quare & nos illas aggrediamur.*

De partibus problematis, atque Theorematis.

Propositiones quæ demonstrationem admittunt, suprà duplices constituimus esse: vel enim sunt προβλήματα, *problemata: in quibus ea, quæ quodammodo nondum existunt comparare, & constituere proponitur: vel* θεωρήματα, *theoremata, in quibus id quod iam constitutum est, & in rerum natura existit, cognoscere, & perspicere statuimus. Geo-*

metria enim, vt & aliæ ſcientiæ, habet omnes quatuor quæſtiones: an ſit, quid ſit, quale ſit, & quare ſit: de quibus quidem omnibus ſermonem inſtituit ipſa Geometria, vt apud Euclidem videbimus. Omne verò problema, omneq́ theorema, quod ſuis perfectum, & abſolutum eſt partibus, hæc in ſe habet: πρότασιν, ἔκθεσιν, διορισμὸν, κατασκευὴν, ἀπόδειξιν, καὶ συμπέρασμα, id eſt, propoſitionem, in qua eſt δεδομένον, datum, & ζητούμενον, quæſitum: deinde explicationem dati: tertio explicationem quæſiti: quarto delineationē: quinto demonſtrationem: ſexto & poſtremo concluſionem totius. Nam in propoſitione quid de re ſubiecta, vel ipſo dato quæratur, proponitur. perfecta enim propoſitio, & datum, & quæſitum habet, quamuis nonnullæ ſint, quæ altero careant: poſtea ἔκθεσις ipſum datum per ſeſe cōſiderat, & ipſo quæſito quaſi præparat & ſtruit viam. διορισμὸς ſeorſim proponit quid de ſubiecto quæratur. Delineatio verò ſolet ea addere, quæ ad inueſtigatio-

nem

nem quæſiti pertinent: ipſa autem demonſtratio adhibitis certis atq; firmis, priusq; conceſsis & affirmatis rationibus id de ſubiecto dici, quod proponitur, confirmat. tandem facta ipſa demonſtratione, concluſio redit ad ipſam propoſitionem, eamq; confirmatam, & demonſtratam iam eſſe colligit: ſolet verò interdum duplex eſſe, vna ſpecialis in ipſa delineatione, & demonſtratione facta: altera generalis, quæ totam confirmationem propoſitionis datæ colligit vniuerſaliter.

Ex his vniuſcuiuſq; problematis, aut theorematis partib. maximè neceſſariæ ſunt iſtæ tres: Propoſitio, demonſtratio, & concluſio: reliquæ interdum adhibentur, & id vt plurimum, interdũ non adhibentur, vt in Arithmeticis fit, & in decimo Euclidis libro.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ.) Sunt quædam in Geometria, quæ nobis ſolent in medio demonſtrationis curſu occurrere: qualis etiam in hac propoſitione eſt πτῶσις, caſus. dicitur autem caſus nihil aliud eſſe, quàm delineationis transpositio, quæ fit propter diuersas positiones. ab hoc casu quædam propositiones dicuntur Græcis ἄπτωτα προβλήματα, problemata quæ carēt casu, quando vna tantum est positio, & delineatio, siquidem casus respiciunt ipsam delineationem: quædam verò nominantur πολύπτωτα, problemata multos casus habentia, in quibus aliter atque aliter fieri possunt delineationes. Hoc itaque secundum problema multos habet casus, varias etiam delineationes. nam cum punctum detur positione, illa fieri potest varijs modis: vel enim ponitur extra datam lineam rectam, vel in ipsa linea recta, & si in ipsa, aut erit alterū extremorum, aut inter ipsa extrema: & si extra ipsam, aut à latere, ita vt recta protracta à puncto ad datam lineam rectam, angulum faciat, aut è directo. Euclides sumpsit casum difficiliorem, & punctum extra lineam rectam datam à latere eius ponit.

Δοθείσῃ εὐθείᾳ.) Omne datum vel datur θέσει, positione, uel λόγῳ, ratione, vel μεγέθει, magni-

magnitudine, vel εἴδει, ſpecie. poſitione tantum datur ipſum punctum, linea verò, & reliqua Geometriæ ſubiecta omnib⁹ modis. hoc tamen in loco linea recta datur εἴδει ſpecie, eſt enim linea recta & θέσει poſitione.

Δύο δοθεισῶν.) *In hac propoſitione lineæ dantur magnitudine: ipſa delineatio multos habet caſus, nam aut diſtãt inter ſe, vt apud Euclidem, aut in vno puncto coniunguntur, aut ſeſe mutuo ſecant: aut altera alteram in extremo alterius puncto tantum ſecat: & vel maior minorem, vel minor maiorem, & quicunq; eiuſmodi fieri poſſunt caſus. veruntamen ad omnes huiuſmodi caſus Euclidis demonſtratio ſe accommodat.*

Ἐὰν δύο τρίγωνα.) *Prius docuit trianguli conſtitutionem, quàm ea explicaret, quæ per ſe triangulis accidunt: præterea duabus propoſitionibus oſtẽdit viam & methodum, qua lineæ rectæ facienda ſit alia recta æqualis. altera quidem non exiſtentem facit per σύστασιν, conſtitutionem, & θέσιν poſitionem æ-*

qualem. altera verò per ἀφαίρεσιν, ablatione, idque fecit vt latera laterib⁹ possent æqualia proponere. dantur in hac propositione duo, æqualitas laterum duorum, & angulus angulo æqualis: idque datum ratione dari dicitur: quæruntur tria, basis basi, triangulus triangulo æqualis: reliqui denique anguli reliquis angulis æquales.

Ἑκάτεραν ἑκατέρα.) quia aliâs Theorema verum non esset, idcirco nō simpliciter inquit latus lateri æquale, sed alterum alteri. possent enim duo latera simul iuncta duobus simul iunctis esse æqualia: sed non idcirco triangulus esset triangulo æqualis.

Ὑπὸ τῶν ἴσων.) hoc addidit ne sumeremus basin, nam in triangulis duo latera dicuntur angulum aliquem comprehendere περιέχειν, tertium verò ὑποτείνειν subtendere: nam latera quæ angulis opponuntur è regione, sunt ὑποτείνουσαι πλευραὶ, latera subtendentia, & interdum βάσεις bases dicuntur, quòd tanquam fundamento figura ipsa hoc nitatur latere.

Τρίγωνον.) *Intelligit aream ipſam triangularem, ſeu ſpatium ipſum, quod à trianguli lateribus intercipitur.*

Demonſtratio tota facta ex his duabus propoſitionibus, quæ inter ſe applicata conueniunt: æqualia erunt: & viciſsim. Quæ inter ſe ſunt æqualia: ſi applicentur, conueniēt etiam inter ſe.

Τῶν ἰσοσκελῶν.) *Theoremata apud Geometras magnam habent varietatem. alia enim ſunt ἁπλᾶ, ſimplicia, in quibus vnum eſt datum, & vnum quæſitum: quorum & data, & quæſita diuidi & ſeiungi non poſſunt. Vt ſi dicat Euclides, omnis triangulus æquicrurus, habet angulos ad baſin æquales. alia compoſita σύνθετα, quæ ex pluribus vel datis, vel quæſitis conſtant: vt data ſint plura, & vnum quæſitum: vel plura quæſita, & vnum datum, vel deniq; plura data, & plura quæſita. compoſita ſunt duplicia: quædam dicuntur συμπεπλεγμένα, quæ poſſunt in*

alia

alia ſimplicia theoremata diuidi: vt cum dico trianguli, & parallelogramma ſub eadem altitudine exiſtentia: eam habent rationem, quam baſis ad baſin. de vtroq; enim, & triangulo, & parallelogrammo ſeorſim eadem dici poſſũt. Quædam verò ἀσύμπλεκτα, quæ cùm ſint compoſita, in ſimplicia tamen theoremata diuidi non poſſunt: quale eſt præcedens theorema quartum. Eſt & alia diuiſio theorematum, de qua alibi. Hoc theorema ex vtraq; parte, dati nempe, & quæſiti compoſitum eſt, idcirco etiam diſtinxit quæ data ſint & quæ quæſita.

Ἐὰν τριγώνου.) *In hac propoſitione duo nobis occurrunt explicanda: primum eſt* ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων: *alterum* ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. *Eſt autem* ἀναστροφὴ τῶν προτάσεων, *quando ex dato alicuius propoſitionis, fit quæſitum: & è quæſito datum. vt triangulus æquicrurus, id eſt, habens duo æqualia latera: etiam angulos ad baſim habet æqua-*

æquales, per ἀναστροφὴν conuerſionem ſic. Triangulus qui angulos ad baſim habet æquales, etiam eſt æquicrurus, id eſt, duo habet æqualia latera: nam propoſitio quinta hic cõuertitur iam dicto modo. Eſt etiam alia conuerſionis ratio in propoſitionibus compoſitis obſeruata, quæ fit permutatione partium, etſi non omnium, tamẽ aliquarum: vt ſit in octaua propoſitione: quæ cõuertitur cum quarta. Quare notemus hic eſſe duo genera propoſitionum: vnum eſt τῶν προηγουμένων, quãdo id quod natura ſubiectum eſt, datur: quodúe illi per ſe ineſt, quæritur de eodem: alterum τῶν ἀντιστροφῶν, cum è cõtrario σύμπτωμα ſeu accidens quoddam datur: et id, cui hoc accidit, in quæſtionem adhibetur, vt in his duobus licet videre propoſitionibus, quinta, & ſexta. Proximum eſt, vt dicamus de ἀπαγωγῇ εἰς τὸ ἀδύνατον, de reductione ad impoſsibile. ſciendum itaq; eſt, quòd omnis demõſtratio mathematica, vel ſit ἀπὸ τῶν ἀρχῶν, quæ ab ipſis principijs ad ea, quæ ex his dema-

demanant, progreditur: vel ἐπὶ τὰς ἀρχὰς, *dum à re proposita regressus fit ad principia. vtraq; verò est duplex: illa enim vel ex principijs rem propositam confirmat, vel ex rebus antea affirmatis, & concessis: hæc autem vel est* θετικὴ, *& nominatur* ἀνάλυσις, *cui opponitur* σύνθεσις: *vel* ἀναιρετικὴ, *& dicitur* ἀπαγωγὴ εἰς τὸ ἀδύνατον. *est autem reductio ad impossibile, quando in aliquod manifestum absurdum, & impossibile desinimus: & cuius contrarium omnes fatentur esse verum: eam quoq; faciunt bifariam: vel enim nos deducit ad ea, quæ principijs, ipsisq; axiomatibus manifestè repugnant, vt si quis sua argumentatione eò deueniat, totum esse æquale parti: vel ad id, quod demonstratis, & affirmatis è directo opponitur: sicuti facit in demonstratione propositionis octauæ. fit igitur reductio ad impossibile, cum id quod quæsito repugnat, accipimus pro vero, & ita progrediendo tandem in manifestum absurdum incidimus: quo deniq; sublato, id confirmamus,*

mus, quod ab initio erat propositum, verum esse. Hæc demonstrandi forma syllogismis vtitur hypotheticis, quemadmodum in directis demonstrationibus vtimur categoricis. Hoc in loco Euclides conuersione est vsus in propositionis partibus: deductione verò in ipsa delineatione, ac demonstratione.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς.) in Geometria, & Arithmetica, vt plurimum sunt propositiones vniuersales affirmatiuæ: verum Euclides hic posuit negatiuam, sed omnibus additamentis ita eam muniuit, & tam certam, atque indubitatam reddidit, vt minimè conuinci possit. quamuis non magnum in Geometria vsum habeat: tamen præcipuè posita est ad confirmandam octauam propositionem.

Τὴν δοθεῖσαν.) Angulus hic datur specie tantum: potest enim omnibus quatuor modis dari, nempe positione, cum ad certum quoddam punctum constituitur: forma deinde, vt si ponatur esse rectilineus: ratione verò, quando duplum triplumúe statuo: denique magnitudine,

dine, ſi dicam eam eſſe tertiam recti partem.

Πεπερασμένην.) *Omnis enim linea recta aut est finita ex vtraq; parte, aut ex altera tantum finita, et ex altera infinita: aut deniq; ex vtraq; parte infinita.*

Κάθετον εὐθεῖαν.) κάθετος *perpendicularis etiam dicitur* γνώμων, *& eandem habet naturam cum ea, quæ nominatur* ἡ πρὸς ὀρθὰς γωνίας. *est autem duplex: vna plana, altera ſolida. plana perpēdicularis eſt, quando à puncto aliquo ad lineam rectam in eodē plano exiſtentem alia linea recta ducitur, vt anguli contigui ſint æquales, quam in hoc loco antea ducere præcipit. ſolida, quæ in Stereometria conſideratur, dicitur quando punctum in alio fuerit plano, & non ad rectam, ſed ad aliud planum ducitur linea quædam ad angulos rectos. differunt igitur inter ſe, quia perpendicularis eſt in eodē plano, & ducitur ad lineam rectam: ſolida verò nō in vno eodemq; plano, nec etiam ad rectam, verum ad planum ducitur: deniq; in ſolida id conſideran-*

derandum, quòd ad omnes quæ in eo ſunt plano rectas, non ad vnam tantum, vt plana, debet eſſe perpendicularis.

Απλερον.) quæ pro noſtro ſumitur arbitrio ſatis longa vel breuis, longior vel breuior, vt viſum fuerit neceſſarium eſſe ad rei demonſtrationem.

Κατὰ κορυφὴν.) Differunt anguli ἐφεξῆς, & anguli κατὰ κορυφὴν, quòd anguli ἐφεξῆς contigui fiunt per lineam, quæ alteram non ſecat: ſed anguli κατὰ κορυφὴν per lineas duas ſeſe ſecantes, ſic dicti ſunt, quod vertices in vno coniungant puncto.

Εκ δὴ τούτου.) Locus hic expoſtulat vt aliquid dicamus de corollario. in elementis igitur πορίσματα, ſeu corollaria ſunt propoſitiones, quæ dum aliæ demonſtrantur, ſimul apparent, & manifeſtæ fiunt, nobis etiam quærentibus, aut inueſtigantibus eas. quale eſt hoc præſens πόρισμα. dum enim proponitur, quod duabus lineis rectis ſeſe ſecantibus, anguli ad verticem ſint inter ſe æquales, &

firmis demõstratur rationib⁹, in ipsa occurrit nobis demõstratione quatuor illos angulos esse æquales quatuor rectis. Itaq; lucrifecimus per ipsam hanc propositionẽ, hoc πόρισμα. *tripliciter verò diuidũtur: primũ enim omne corollarium vel est Geometricum, vel Arithmeticum, vel alterius scientiæ, vt iam dictũ, proprium est Geometriæ. In septimo verò Euclidis libro, propositione secunda, est Arithmeticum. deinde quædam corollaria sequuntur ipsa problemata: quædam verò theoremata: nam in hoc loco theorematis corollarium habemus: verum in libro secundo problematis. tertio alia corollaria sunt demonstrationis directæ, alia vero indirectæ, sicuti hoc præsens porisma natum est ex demonstratione directa: sed in propositione prima libri tertij facta demonstratione per reductionem ad impossibile, nascitur corollarium. possunt & alia porismatum discrimina tradi, nobis tamen hæc monstrasse satis est.*

Ἐκτὸς γωνία.) *In definitionibus mentionem*

nem fecit diuisionis angulorum substãtialis: nunc alia est facienda eorum diuisio per accidens. omnis angulus vel est ἐντὸς, *vel* ἐκτός. *id est, omnis angulus vel est intra ipsam figuram, vel extra eam. deinde anguli quidam sunt* ἐφεξῆς, *quidam* ἀπ' ἐναντίον, *id est, contigui, aut oppositi. in triangulis igitur sic se res habet, quando aliquod trianguli latus extenditur: nascitur angulus qui ad ipsam trianguli substantiam non pertinet, & cum extra figuram existat: nominatur externus. Verum ex illis tribus, qui ad triãgulum pertinent: vnus qui ei est proximus, nominatur contiguus, reliqui verò duo oppositi, respectu eius, qui extra triangulum est.*

Πάντη μεταλαμβανόμενα.) *Est Geometrica phrasis, qua vtimur, dũ volumus ostendere, quouis modo sumi vel latera, vel aliquod aliud Geometriæ subiectũ, aut accidẽs per se.*

Explicauit Euclides quæcunq; in primis illis elementis poterant dici, de triangulorum constitutione, æqualitate, aut inæqualitate eorundem, aut etiam laterum, & angulorũ: nunc pergit de quadrilateris figuris enarrare ea, quæ ad eorum contemplationem elementarem pertinẽt. Cum verò ex lineis æque distantibus fiant eiusmodi figuræ: prius earũ proprietates docet, & parallelogramma constituit: postea persequitur doctrinam de figuris quadrilateris, seu parallelogrammis. est autem παραλληλόγραμμον figura quæ circumscribitur lineis rectis æquedistantibus, atq; oppsitis inter se.

Tria itaq; in lineis parallelis sunt consideranda, quæ eis per se insunt, & ita attribuuntur, vt inde cognoscere possimus lineas rectas esse æquedistantes. Primum est, vt anguli ἐναλλὰξ alterni (qui fiunt per lineam rectam in alias duas rectas incidentem) sint inter se æquales. Alterum, recta linea incidente in duas alias rectas, si anguli interni fuerint duobus rectis æquales, tũ propositæ duæ rectæ sunt æquedistantes. Postremum, Recta linea secante alias duas rectas, si externus angu-

angulus, angulo interno ſibi oppoſito ex eadem parte, fuerit æqualis, iterum erunt illæ rectæ æquediſtantes.

ἢ εἰς τὰς.) *Hoc Theorema conuertitur cum ambobus præcedentibus. in demonſtratione vtitur propoſitione, quæ inter principia eſt relata, ſed principium non eſt.*

Παντὸς τριγώνου.) *Ea quæ decima ſexta, & decima ſeptima propoſitione erant omiſſa, in hac præſenti addit, & quanto minores ſint, explicat, nempe tertio, & huius propoſitionis maxima eſt vtilitas.*

Αἱ τὰς ἴσας.) *Hæc propoſitio finit doctrinam linearum æquediſtantium, & incipit parallelogrammorum traditionem.*

Τῶν παραλληλογράμμων.) *Poſtquam conſtituit parallelogrammon, inueſtigat tria quæ parallelogrammis per ſe inſunt. Primum latera oppoſita eſſe æqualia. Secundum, angulos oppoſitos eſſe æquales. Tertium, diametrum per medium ipſam ſecare figuram. Ita fit, vt à lateribus ab angulis, & ab ipſis* *areis proprietates inquirat parallelogrammorum.*

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν.) *Tria sunt apud Geometras vocabula:* παραβολὴ, ὑπερβολὴ, *&* ἔλλειψις. *cum enim figura applicatur ad lineam rectam, vt neque excedat, neque deficiat, est tum* παραβολὴ *applicatio. quando verò excedit* ὑπερβολὴ, *cum deficit* ἔλλειψις, *atque in Conicis figuris maximè considerantur ista.*

Ἀπὸ τῆς.) *Videtur Euclides voluisse præstantiores figuras rectilineas describere, in triangulis, eum quem æquilaterum nominamus: in quadrilateris figuris ipsum quadratū.*

Ἀναγράψαι.) *Vtitur hoc verbo, quoniā ab vno latere describitur:* συστήσασθαι *verò est, cum ex multis constituitur.*

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις.) *In hoc, & sequenti theoremate vtitur* λήμμασι, *id est, assumptiuis propositionibus, vtpote: Quæ ab æqualibus rectis lineis descripta sunt quadrata, illa sunt æqualia inter se. item æqualium quadratorum æqualia sunt latera.*

In qui-

In quibusdam etiam propositionibus vtitur aliis λήμμασι, assumptionibus, quas hic subiungam.

I. Si prima magnitudo fuerit æqualis magnitudini secundæ, & secunda maior sit tertia: erit etiam prima maior quàm tertia.

II. Si prima magnitudo fuerit maior secunda, & secunda sit æqualis tertiæ: erit etiam prima maior quàm tertia.

III. Si prima magnitudo fuerit maior quàm secunda: et secunda maior sit quàm tertia: erit etiam prima longè maior quàm tertia. Sunt & alia huius generis, de quibus aliâs.

FINIS.

Errata.

Pag. 1. linea 19. rectam, lege recta. pag. 2. 9. τὸν ἐντὸς, lege τῶν. pag. 4. 12. τῶν πλευρων, lege τῶν τριπλεύρων. pag. 5. 2. quadrilateræ verò, lege quadrilateræ verò quas quatuor, multilateræ deniq; quas. Reliqua si quæ sunt, quiuis facile emendare poterit.