NEWTONI

PRINCIP

T. III CONT.

ITARD
152

SCD LYON 1

SCD LYON 1

V. 3 — 3053

Richard Lovah

SCD LYON 1

ITARD 152

SCD LYON

SCD LYON 1

SCD LYON

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUTORE ISAACO NEWTONO Eq. Aurato.

TOMI TERTII CONTINUATIO,

CONTINENS

LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

SCD Lyon 1 Mathématiques

SCD LYON 1

SCD LYON 1

INTRODUCTIO AD LUNÆ THEORIAM NEWTONIANAM.

TRia ſunt in Lunæ Theoriâ ſpectanda, in quibus verſatur omnis quæſtio Aſtronomica quæ de ipſâ inſtitui poteſt; Primum ejus motus quâtenus è terrâ obſervatur; 2do. Figura Lunaris orbitæ à circulo plùs minuſve recedens & apſidum ejus poſitio; ac tertiò ejus orbitæ ad Eclipticam inclinatio.

Si extrà Solis actionem Luna motus ſuos ageret; Luna Ellipſim quamlibet circa Terram deſcribere poſſet in Plano quovis, & ea Ellipſis perpetuò eadem maneret conſtantemque angulum cum Ecliptica efficeret; Itaque tota Theoria Lunæ circa hæc verſaretur Elementa, Primò, ut ex tempore quod Luna conſumeret ut à quâdam ſtellâ diſcedens ad eamdem rediret, obtineatur duratio ejus menſis Periodici ſiderei ſicque motus ejus medius determinetur, unde facile obtinebitur via quam Luna dato tempore per eum motum medium emetiri poteſt, ita ut, datâ Epochâ, hoc eſt, dato loco Cœli in quo Luna aliquando obſervata fuiſſet, inde quem in locum migrare debuiſſet, dato tempore, per medii motus calculum inveniri poſſet.

Poſtea; locus Apogæi Lunæ, quod in Cœlis eidem puncto ſemper reſponderet, foret requirendus, tum excentricitas ejus orbitæ; ſic enim figura Ellipſeos quam Luna deſcribit obtineretur, & quia, citra Solis actionem, Luna moveretur ſecundùm Legem Keplerianam, hoc eſt, ita ut tempora quibus durantibus Luna moveretur, non quidem ſint proportionalia angulis è Terrâ ſpectatis, ſed areis deſcriptis, hinc fiet ut differentia loci Lunæ per motum medium computati ab ejus loco vero, obtineatur ex orbitæ Lunaris figurâ per Methodos notas, quæ differentia dicitur Æquatio Lunæ ſoluta, hoc eſt, æquatio à Sole non pendens, & intelligetur quibus in locis illa æquatio ſit adhibenda ex ſitu cognito Apogæi Lunæ, pendet enim omninò ea differentia ex ſitu Lunæ in Orbe ſuo reſpectu Apogæi ſui.

Tertiò. Quærendum foret obſervationibus, quibus in locis Luna

Eclipticam ſecet, cui nempe Cœli loco reſpondeant ejus Nodi, qui in hac hypotheſi fixi forent, & quonam angulo Orbita Lunæ foret inclinata ad Eclipticam, unde, quoniam ea inclinatio conſtans eſſet, diſtantiâ Lunæ à plano Eclipticæ per perpendiculum menſurata, foret ſemper proportionata diſtantiæ perpendiculari Lunæ à Linea nodorum, itaque ex cognito loco Lunæ & Nodorum cognoſci poterit quonam ſub Angulo Luna ab Ecliptica diſtare videatur ex ipſâ terrâ; & ad quodnam punctum Eclipticæ referri debeat.

Si itaque Lunæ motus citra actionem Solis conſiderentur tabulæ Aſtronomicæ Lunares hæc continere debebunt

1°. Epocham Loci Lunæ dato aliquo tempore; tum obſervationem loci Apogæi quod fixum maneret, & obſervationem loci Nodorum pariter fixorum.

Poſtea continere debebunt tabulam motus medii, tum tabulam Æquationis Lunæ ſecundum ejus diſtantiam mediam ab Apogæo; tabulam latitudinis Lunæ ſecundùm variam diſtantiam Lunæ à Nodo & denique tabulam reductionis Lunæ ad Eclipticam, ſecundùm eam diſtantiam Lunæ à Nodo.

Poſſunt his addi, tabula diſtantiarum Lunæ à Terra ſecundum ejus diſtantiam ab ejus Apogæo, tabula Diametrorum ejus apparentium ſecundùm eamdem diſtantiam ab Apogæo, & denique Tabula Parallaxeos quâ deprimitur Luna reſpectu ſpectatoris in ſuperficie telluris collocati, prout diverſa eſt ejus à Terra diſtantia, & prout altitudo ſupra horizontem eſt diverſa.

Talis foret tota de Lunâ Theoria, citra Solis actionem; ſed jam à longo tempore intellexerunt Aſtronomi Lunares motus à Lunæ ſitu reſpectu Solis plurimum turbari, unde varias correctiones, ſivè Æquationes variis titulis concinnare ſunt conati.

Quam luculenter ex Gravitatis Theoriâ, hæc non modò explicentur ſed etiam accurato calculo determinentur demonſtrare aggreſſus eſt Newtonus, & eas omnes Æquationes quæ ex Sole pendent, calculis ex Theoriâ ſuâ deductis ita feliciter ſtatuit ut motus Lunæ ejuſve Æquationes ex calculo repertæ in minuto ſecundo aut propè cum iis quæ ab accuratioribus obſervatoribus dererminari potuerunt conſentiant, quod autoritatem integram illi Theoriæ conciliat. Calculi autem illi, nec faciles ſunt, nec compendioſi, nec ſemper commodè ad ſyntheticam formam reducendi; Quos Newtonus hâc ultimâ ratione Lectori ſuo ſiſtere potuit eos enucleatè tradit, cæteros omittit & quod ex iis obtinetur ſtrictim in Scholio indicat, & primo quales ſint illæ æquationes juxta Aſtronomorum obſervationes dicit & quibuſnam Legibus ſecundum

ipſos

ipsos observatores sint adstrictæ, mox tradit quales æquationes ex suis calculis emergant & quænam sint earum Leges.

Ipsum tam observationibus ante ipsum institutis, quam observationibus Flamstedianis usum esse constat, imo & ipsum exinde Tabulas Lunares sibi construxisse liquet, ex quibus multa profert quarum pleraque in Rudolphinis, aut in Ludoviceis Tabulis facile non comperiuntur, sed quæ maximè consentiunt cum novis Ill. Cassini Tabulis, ita ut quo perfectiùs Cœli motus dignoscunt Astronomi eo propiùs ad Newtonianas Theorias accedere deprehendantur.

Ut itaque Solis actionis in Lunam & ejus orbitam habeatur ratio; Primum fiat abstractio excentricitatis Orbitæ tam Telluris quam Lunæ, deprehenditur quod ex Solis actione mensis Periodicus Lunæ longior evadat & ejus Orbita ex circulari in Ellipsim mutetur cujus axes per Prop. XXVIII. sunt determinati.

Secundò, tam ex eâ figurâ quam Orbita Lunæ induit quam ex acceleratione Lunæ per eam partem actionis Solis quæ secundum Tangentem orbitæ Lunaris dirigitur, nascitur Variatio quam Tycho primus observavit, & maximam in Octantibus $40'\frac{1}{2}$ statuit, illam Ill. Cassinus facit $33'. 40''.$ in Elementis Astronomiæ, eam verò ipse Newtonus in hypothesi orbitas Telluris & Lunæ esse circulares $35'. 10''.$ calculavit Prop. XXIX.

Tertiò ex eâ Solis actione nascitur motus Apogæi Lunaris in consequentia, cujus motus fundamentum indicat Newtonus Prop. XLV. Lib. I.

Quartò inde deducitur motus medius nodorum Prop. XXXII. observationibus proximè congruus; Quinto denique Inclinationis Orbitæ Lunaris mutatio explicatur Prop. XXXIV. & XXXV.

Nunc verò adjungatur consideratio Excentricitatis Orbitæ Telluris, eâ fit ut actio Solis major sit cum terra est in Perihelio suo quam in Aphelio; Inde orientur correctiones variæ his omnibus Lunæ erroribus adjungendæ; Primùm cùm mensis Periodicus Lunæ per Actionem Solis longior evadat & motus ejus medius augeatur, id incrementum quando terra est in Perihelio majus est quam cum est in Aphelio, hinc ea tardatio inæqualiter in motum Lunæ distributa, efficit ut hoc nomine locus ejus per medium motum inventus ab ejus vero loco dissentiat, hinc itaque notis nostris ad initium Scholii ad calcem Prop. XXXV. adjecti quod ad totam Lunæ Theoriam pertinet incrementum medium motus medii ex actione Solis ortum assignamus, tum postea aperimus rationem quâ obtineri potest æquatio ceu correctio motus medii adhibenda propter inæqualem Terræ à Sole distantiam, quæ quidem æquatio continetur in eâ quam Ill. Cassinus, titulo *Primæ Æquationis Solaris*, tradit.

Eâdem ratione, variationes motus Apogæi & motus nodorum ex ſitu diverſo Terræ ad aphelium aut Perihelium ſuum ex utriuſque motu medio dato in ſecundo Paragrapho derivare docetur.

His ex Excentricitate orbitæ Telluris deductis adjungatur conſideratio Excentricitatis Orbitæ Lunaris, aut ejus inclinationis ad Eclipticam inde novæ irregularitates prioribus adnaſcuntur.

Primò menſis Periodicus paulo major fit cum Linea Apſidum per Solem tranſit quam cum ipſi eſt perpendicularis, hinc correctio nova Æquationi motus medii quæ in primo Scholii Paragrapho exponitur eſt facienda, hanc novam Æquationem Ill. Caſſinus exhibet in Tabella cujus titulus eſt *ſecunda Æquatio Solaris* & tertio Paragrapho Scholii traditur.

Itidem ſi linea nodorum per Solem tranſeat paulo major erit Solis actio & correctio nova exinde naſcetur eidem motui medio, hanc quarto Paragrapho Scholii indicat Newtonus.

Præterea excentricitas ipſa orbitæ Lunaris ex diverſo ſitu Apogæi reſpectu Solis mutatur, nunc major nunc minor evadit idque etiam inæqualiter pro diſtantiâ telluris à Sole.

Rurſus ipſe motus Apogæi prout Apogæum diverſimodè ſitum eſt reſpectu Solis mutatur, hinc Æquatio Apogæi naſcitur eaque duplex; prima ſupponendo telluris à Sole diſtantiam conſtantem, altera verò pendet ex mutatione diſtantiæ telluris à Sole.

Hinc tandem cum orbitæ Lunaris forma, excentricitas & Apogæi poſitio mutetur, omninò mutantur correctiones illæ quæ deducebantur ex Lunæ excentricitate mediocri, quæ æquationem ſolutam conſtituebant; ultimo autem Scholii Paragrapho Newtonus docet quâ ratione novæ illæ correctiones ſint inſtituendæ: Omnia verò in hoc Scholio ſine demonſtratione tradit nec indicato ſuorum calculorum artificio, ideoque noſtri putavimus officii, eam indagare viam cui Newtonus in iis reperiendis inſiſtere debuit, labore quidem non parvo, ſucceſſu qualicumque, utinam Lectoribus non ingrato.

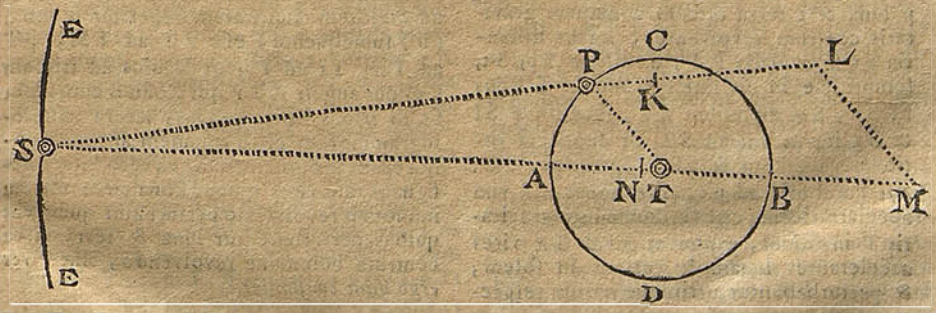
PHI-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

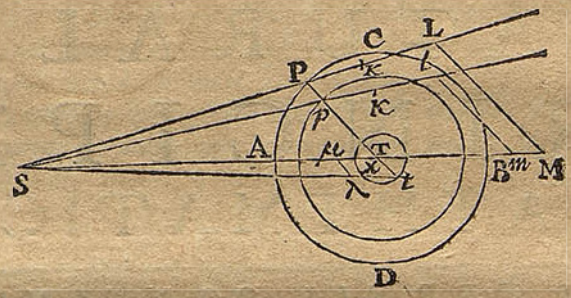
Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.



Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *CADB* orbem lunæ. In *SP* capiatur *SK* æqualis *ST*; sitque *SL* ad *SK* in duplicatâ ratione *SK* ad *SP*, & ipsi *PT* agatur parallela *LM*, & si gravitas acceleratix terræ in solem exponatur per

De Mundi Systemate.

distantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix lunæ in solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum lunæ, ut in libri primi prop. LXVI. & ejus corollariis expositum est. (q) Quâtenus terra & luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad lunam, & summas virium per lineas ipsis analo-

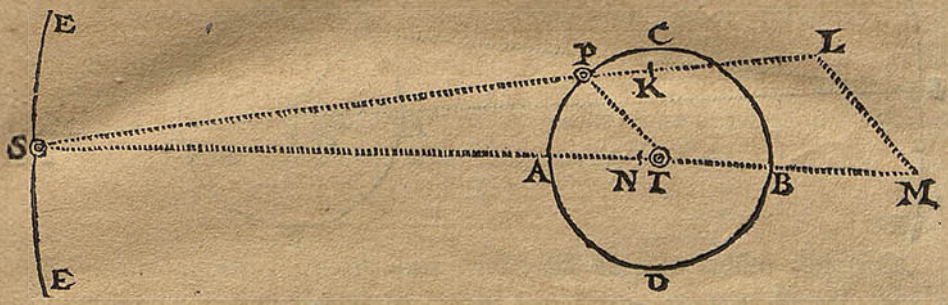


209.

(q) * *Quâtenus Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvuntur perturbabitur etiam motus terræ circa centrum illud à viribus consimilibus;* Designet ut prius S solem, sed sit T centrum commune gravitatis terræ & lunæ; sit itaque p luna & t terra circum commune gravitatis centrum revolventes, ita ut distantia p t sit æqualis P T, ductisque Sp, St, sumptisque in eis lineis productis si opus sit Sk, Sκ æqualibus ST, secatisque Sl & Sλ ita ut sint ad ST in duplicatâ ratione ST ad Sp & ad St, actisque lm, λμ Parallelis ad p t, si exponat ST vim acceleratricem centri communis gravitatis T in solem, exponent Sl & Sλ vires acceleratrices lunam & terram in solem, & perturbabuntur utriusque motus respectu centri communis gravitatis per vires lm & λμ, Tm & Tμ; Quæ vires consimiles sunt viribus LM & TM quibus lunam solam perturbari dictum fuit in suppositione terram esse immotam, nam ob maximam distantiam puncti S, lineæ PL, pl, TM, tλ pro parallelis sunt habendæ, ideoque figuræ TPLM, Tplm, Ttλμ pro Parallelogrammis sunt habendæ, quæ angulum æqualem in T habent, præterea latera PT, TM; pT, Tm; Tt, Tμ, eamdem habent inter se rationem, demonstratur enim in notâ 500. lib. 1. (quæ ad majorem facilitatem repetitur in notâ (u) subsequente) esse PT ad TM, pT ad Tm, Tt ad Tμ ut Radius ad triplum Cosinus anguli ATP qui Cosinus cum idem sit in tribus hisce casibus, latera Parallelogrammorum circa æqualem angulum posita erunt proportionalia, ea verò latera designant tam vires quibus Luna circa terram immotam revolvendo perturbatur quam eas quibus perturbarentur luna & terrâ circa centrum commune revolvendo, illæ *Vires ergo sunt consimiles.*

Sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam. Quippe in observationibus motus Lunæ respectu terræ quasi hæc immota esset consideratur, tunc autem summæ virium acceleratricium, ex quibus velocitates respectivæ nascuntur ipsi tribui debent, *& summas virium per lineas*

analogas TM & ML designare. Vis ML in (r) mediocri suâ quantitate est ad vim centripetam, quâ luna in orbe suo circa terram quiescentem ad distantiam PT revolvi posset, in duplicatâ ratione temporum periodicorum lunæ circa terram & terræ circa solem (per corol. 17. prop. LXVI. lib. 1.) hoc est,



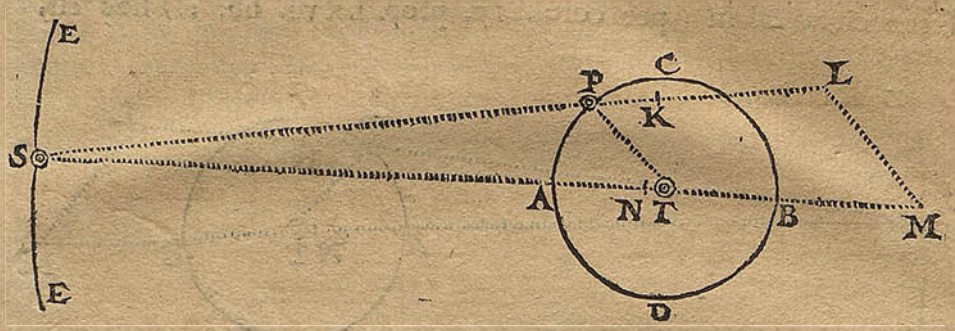
in duplicatâ ratione dierum 27. hor. 7. min. 43. ad dies 365. hor. 6. min. 9. id est, ut 1000 ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in propositione quartâ quod, si terra & luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium terræ

near TM & ML ipsis analogas designare. Vires enim acceleratrices pT & Tt simul junctæ æquales sunt soli vi PT & similem effectum edunt, admovent utique corpora p & t, secundum directionem pTt, si ergo vis acceleratrix PT summæ utriusque æqualis admoveat corpus P versus immotum T, planè idem erit effectus ex corpore t vel T spectatus: Vires MT, $T\mu$ divellunt corpora à se mutuo secundum directionem ST, idem verò præstat vis TM quæ summæ ambarum est æqualis, nam est $pT : Tt :: mT : T\mu$ :: ergo $pT : pT+Tt :: mT : mT+T\mu$ & altermando $pT : mT :: (PT : MT) :: pT+Tt : mT+T\mu$. Sed est $pT+Tt = PT$ ergo etiam $mT+T\mu = MT$.

(r) * *Vis ML in mediocri suâ quantitate* &c. Ob magnam Solis distantiam figura PTML est parallelogrammum ideoque ML est proximè æqualis lineæ PT, ergo vis ML erit ad vim quâ Sol agit in punctum T, ut PT ad SK sive ST, sed vires centrales qualescumque sunt inter se directè ut Radii circulorum qui per eas describuntur & inverse ut quadrata temporum Periodicorum, ergo ea vis quâ sol agit in punctum T, est ad vim quâ Lunâ in orbe suo retinetur (posito illam revolvi circa terram quiescentem) ut ST ad PT directè & ut quadratum temporis Periodici Lunæ circa terram ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem; Ergo compositis rationibus, vis ML est ad vim quâ Lunâ in orbe suo retinetur ut quadratum temporis Periodici Lunæ ad quadratum temporis Periodici Terræ circa Solem hoc est in duplicatâ ratione dierum 27, hor. 7, 43′ ad 365 dies, 6 hor. 9′ quæ est duratio anni siderei. 1092

DE MUNDI SYSTEMATE.

terræ quamproximè. Et (r) vis quâ luna in orbem circa terram quiescentem, ad distantiam *PT* semidiametrorum terrestrium 60, revolvi posset, est ad vim, quâ eodem tempore ad distantiam



semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & (t) hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproximè. Ideoque vis mediocris *ML* est ad vim gravitatis in superficie terræ,

109. (r) * *Et vis quâ Luna ad distantiam* $60\frac{1}{2}$ *semid. revolvi posset est ad vim quâ ad distantiam 60 semid. revolvi posset eodem tempore ut 60* $\frac{1}{2}$ *ad 60.* Vires enim centrales sunt ut distantiæ directè & tempora Periodica inversè (Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) cum ergo hic tempora Periodica æqualia ponantur, Vires Centrales sunt ut distantiæ. Newtonus autem loco distantiæ $60\frac{1}{2}$ semid. terræ quæ revera intercedit inter terram & lunam, assumit distantiam 60 semid. tantùm, quia in præcedente ratiocinio vim qua Lunâ in orbe suo retinetur æstimaverat quasi terra immota esset & Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. à terrâ tempore 27. dier. 7 hor. 43. min. circa terram revolveretur; Verum cum terra revera circa centrum gravitatis commune Lunæ & Terræ revolvatur, ea vis quâ Luna ad distantiam $60\frac{1}{2}$ semid. tempore illo revolvi apparet, minor est ea quâ ad eamdem distantiam eodemque tempore circa terram immotam revolveretur, & est æqualis illi quâ, eodem quidem tempore Periodico, sed ad distantiam 60 semid. circa terram immotam revolveretur, ut constat ex Prop. LX. Lib. I. Eâ enim Propositione statuitur quod si duo corpora revolvantur circa centrum commune gravitatis, axis Ellipseos quam unum circa alterum motum describit est ad axem Ellipseos quam circa illud quiescens eodem tempore Periodico & eâdem vi describere posset, ut summa corporum amborum ad primam duarum medieproportionalium inter hanc summam & corpus alterum, quare cum Telluris corpus sit ad corpus Lunæ ut 42 ad 1, & prima duarum medieproportionalium inter 43 & 42 sit $42\frac{2}{3}$ sitque 43 ad $42\frac{2}{3}$ ut $60\frac{1}{2}$ ad 60 proximè, Vis quâ Luna in orbe suo retinetur, ea est quâ ad distantiam 60 semid. terræ eodem ipso tempore Periodico quod observatur circa terram immotam revolvi posset.

(t) * *Et hæc vis &c.* Per hujusce Libri Prop. IV.

terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{20}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Inde verò & ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM (u): & hæ sunt vires solis quibus lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

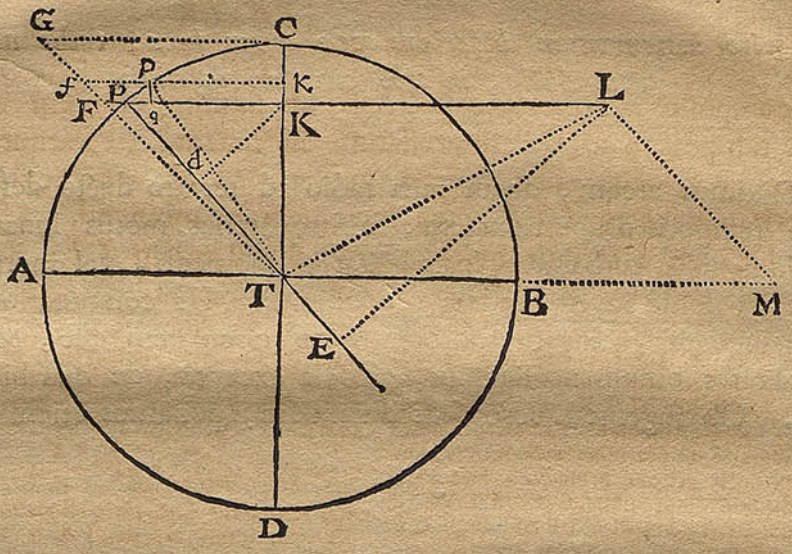
Invenire incrementum horarium areæ quam luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.

Diximus aream, quam luna radio ad terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quâtenus motus lunaris ab actione solis turbatur. Inæqualitatem momenti, vel incrementi horarii hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, eâ solâ exceptâ, de quâ hic agitur. Ob ingentem verò solis distantiam, ponamus etiam lineas *SP*

(u) * *Datur etiam vis TM.* Ob parallelas PT, LM & ingentem puncti S distantiam, PL & TM sunt parallelæ, & figura PTLM est parallelogrammum, ideoque TM sumitur ut proxime æqualis PL; Est autem PL triplum Cosinus anguli ATP existente TP sive LM radio; Nam quia SK est æqualis ST, si centro S radio ST describatur arcus TK, erunt ST & SK in eum arcum perpendiculares, sed is arcus proxime coincidit cum rectâ TC perpendiculari lineæ ST in T (ob distantiam centri S) ergo punctum K in ea recta TC occurret & SK sive PK illi rectæ TC erit perpendicularis, ideoque PK erit Cosinus Anguli ATP; sed, per constructionem, est SP^2 ad $SK^2 - SP^2$ (sive quia $SK = SP + PK$) ad $2SP \times PK + PK^2$ ut SK (sive SP + SK) ad SL − SK (sive KL) ideoque est $KL = 2PK + 3PK^2/SP + PK^3/SP^2$, sed omittendi sunt ultimi termini propter ingentem divisorem SP, ergo est $KL = 2PK$, & $PK + KL$ sive $PL = 3PK$. Q. E. D. 105

DE MUNDI SYSTEMATE.

SP, ST sibi invicem parallelas esse. (x) Hoc pacto vis LM reducetur semper ad mediocrem suam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem suam quantitatem $3PK$. Hæ vires (per legum corol. 2.) componunt vim TL; & hæc vis, si in radium TP demittatur perpendiculum LE, resolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo semper secundum radium TP, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ TPC radio illo TP



factam; & EL agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat lunam. Acceleratio illa lunæ, in transitu ipsius à quadraturâ C ad conjunctionem A, singulis temporis momentis facta, est ut (y) ipsa vis accelerans EL, (z) hoc est, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus

(x) * *Hoc pacto.* Vide notam (u) præcedentem.

(y) * *Ut ipsa vis accelerans* (13. lib. 1.).

(z) * *Hoc est ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Nam Triangula PTK, PLE sunt similia propter angulum communem in P & angulos rectos K & E, ergo est TP : TK :: PL : $EL = \frac{PL \times TK}{TP}$, (sed per notam u) est $PL = 3PK$ ergo est $EL = \frac{3PK \times TK}{TP}$.

tempus per motum medium lunarem, (a) vel (quod eodem ferè recidit) per angulum CTP, vel etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possint, ductâque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit FK æqualis TK, & (b) Kk erit ad PK ut Pp ad Tp, (c) hoc est in datâ ratione, (d) ideoque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$, erit ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & compositè, area tota $GCKF$ ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in lunam, (e) atque ideo etiam ut velocitas hâc summâ genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. (f) Vis quâ luna circa terram quiescentem ad distantiam TP, tempore

LIBER TERTIUS. PROP. XXVI. PROB. VII.

110 (a) * *Quod eodem ferè recidit.* In hypothesi orbem Lunarem esse circularem, angulus CTP vel arcus CP forent proportionales tempori, semotâ consideratione perturbationis motus Lunæ ex Solis actione productæ; hæc vero perturbatio respectu ipsius motus Lunæ est exigua, itaque anguli CTP vel arcus CP tempori ferè proportionales censeri possunt.

(b) * *Kk erit ad PK ut Pp ad Tp* sive TP; Ex notissimâ circuli proprietate fluit hæc proportio, nam si ex puncto p ducatur lineola pq perpendicularis ad PK, ea erit parallela & æqualis lineæ Kk, formabiturque Triangulum fluxionale Ppq simile Triangulo PKT, nam cum anguli pPK & KPT rectum simul efficiant, & pariter anguli KPT & PTK, æquales sunt anguli pPK & PTK unde est pq sive Kk ad PK ut Pp ad TP.

(c) * *Hoc est in datâ ratione.* Ratio enim Pp ad Tp est data, quia singulæ partes Pp sumuntur æquales, sunt itaque singulæ in eâdem ratione ad radium TP.

(d) * *Ideoque* $FK \times Kk$ *seu area* $FKkf$ *ut* $\frac{3PK \times TK}{TP}$; Cum ratio Kk ad PK sit data, data etiam erit ratio Kk ad $3PK$, & hæc ratio manebit etiamnum data si consequens $3PK$ per quantitatem constantem TP dividatur, erit ergo data ratio Kk ad $\frac{3PK}{TP}$, denique non mutabitur hæc ratio si ambo termini per quantitates æquales FK & TK multiplicentur, ergo ratio $Kk \times FK$ (seu areæ $FKkf$) ad $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est etiam data, hoc est, est area $FKkf$ ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. 110.

(e) * *Atque ideo etiam ut velocitas* (13. lib. 1.).

(f) * *Vis quâ Lunâ circa terram ad distantiam TP tempore suo Periodico CADB revolvi posset efficeret ut corpus liberè cadendo tempore CI describeret longitudinem* $\frac{1}{2}CT$ &c. Si corpus gyretur in circulo per vim ad ejus centrum tendentem, primum uniformiter girabitur; tum, quadratum arcûs quovis tempore descripti erit æquale circuli Diametro ducto in altitudinem quam corpus liberè cadendo tempore eodem percurreret si uniformiter acce-

DE MUNDI SYSTEMATE.

re suo periodico $CADB$ dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, quâ luna in orbe suo movetur. Patet hoc per corol. 9. prop. IV. lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demissum (g) sit ipsius EL pars tertia, & (h) ipsius TP seu ML in octantibus pars dimidia, vis EL in octantibus, (i) ubi maxima

110 acceleraretur per vim centripetam quâ circulus describitur.

Nam si sumatur arcus quam minimus altitudo quæ per vim centralem liberè percurreretur dum ille arcus quamminimus describeretur, foret ejus arcus minimi sinus versus; sed ex natura circuli, factum Diametri ducti in sinum versum arcûs, est æquale quadrato chordæ illius arcus, sive quadrato arcus ipsius si adeo sit exiguus ut pro suâ chordâ sumi possit.

Spatia verò liberè cadendo per vim uniformiter accelerantem descripta, sunt ut quadrata temporum, arcus verò interea percursi sunt ut tempora, quia corpus uniformi celeritate giratur, ergo spatium minimum per vim centripetam liberè descriptum est ad aliud quodvis spatium per eamdem vim centrifugam liberè descriptum (ideoque etiam facta horum spatiorum per Diametrum circuli) sunt ut quadrata arcuum correspondentibus temporibus descriptorum: sed prius factum est æquale quadrato arcus correspondentis, ergo & alterum factum erit æquale quadrato arcus correspondentis, hoc est altitudo quæcumque cadendo liberè descripta in Diametrum ducta efficit factum æquale quadrato arcus eodem tempore revolvendo uniformiter percursi.

Quod cum ita sit, cadat libere corpus per $\frac{1}{2}CT$ h. e. per radii semissem, ducaturque hæc longitudo per Diametrum seu $2CT$ factum CT^2 sive quadratum ipsius radii æquale erit quadrato arcus eodem tempore descripti, erit ergo is arcus æqualis radio CT, sed velocitas acquisita liberè cadendo per Radii semissem $\frac{1}{2}CT$ talis est ut corpus movendo uniformiter eâ celeritate acquisitâ duplum ejus altitudinis Radium nempe integrum CT eodem tempore describere posset, quæ est ipsa longitudo arcus quam corpus uniformiter revolvens describisset eodem tempore, ergo velocitas acquisita lapsu per $\frac{1}{2}CT$ ea est quâ corpus in orbe suo revolvitur.

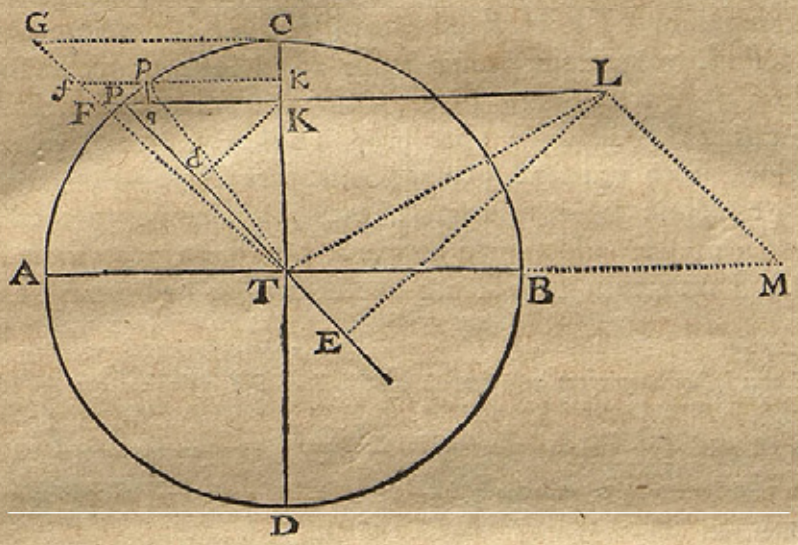
Ea denique longitudo $\frac{1}{2}CT$ percurretur tempore quod erit ad totum tempus Periodicum ut CT ad circumferentiam $CADB$, nam tempora sunt ut arcus uniformiter descripti, sed tempus quo corpus per $\frac{1}{2}CT$ labitur est æquale tempori quo arcus æqualis CT percurritur ergo est illud tempus ad totum tempus Periodicum ut CT ad totam peripheriam $CADB$.

(g) * *Kd sit ipsius EL pars tertia.* Ob Triangula similia PLE, PKd est EL ad Kd ut PL ad PK, sed (per notam (u)) est PK tertia pars lineæ PL, est itaque pariter Kd tertia pars lineæ EL.

(h) * *Kd ipsius TP seu ML in octantibus pars dimidia*; Nam in octantibus anguli KTd, PKd, KPd sunt omnes 45 grad. est itaque $Td = Kd = dP$ est ergo Td sive Kd ipsius TP pars dimidia in octantibus.

111 (i) * *Ubi maxima est.* Ut inveniatur punctum in quod vis EL sive $\frac{3PK \times TK}{TP}$ est maxima, sit $TP = r$, $TK = x$, $PK = y$ erit $EL = \frac{3yx}{r}$ cujus fluxio est $\frac{3ydx + 3xdy}{r}$, maxima est ergo EL ubi hæc fluxio æquatur nihilo, ideoque ubi $ydx = -xdy$, sed cum in circulo sit

maxima est, superabit vim ML in ([k]) ratione 3 ad 2, ideoque erit ad vim illam, quâ luna tempore suo periodico circa terram quiescentem revolvi posset, ([l]) ut 100 ad $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$



seu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ ([m]) esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT seu TP. Expo-

sit $y = \sqrt{rr - xx}$, & $dy = \frac{-x\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ unde substitutis valoribus æquatio $ydx = -xdy$ in hanc mutatur $dx\sqrt{rr-xx} = \frac{xx\,dx}{\sqrt{rr-xx}}$ & reductis terminis fit $rr = 2xx$, unde est $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ & $dy = -dx$, & $y = x$; Ideoque in Triangulo PTK angulus T debet esse 45 grad. & P debet esse in octante Circuli.

(k) * *In ratione 3 ad 2.* Est EL ad Kd ut 3 ad 1 (not. g) est Kd ad TP sive ML ut 1 ad 2 (not. h) ergo EL ad ML ut 3 ad 2, ex æquo.

(l) * *Ut* 100 *ad* $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$. Vis EL est ad vim ML ut 3 ad 2; vis ML est ad vim quâ Lunâ in orbe suo circa terram quiescentem revolvi posset tempore suo Periodico ut 1000 ad 178725 (Prop. XXV. hujusce) sive ut 100 ad 17872 $\frac{1}{2}$; Ergo compositis rationibus vis EL est ad eam vim quâ Luna revolvitur ut 100×3 ad 2×17872 $\frac{1}{2}$ sive ut 100 ad $\frac{2}{3}$ 17872 $\frac{1}{2}$ hoc est ad 11915, ideoque vis EL est $\frac{100}{11915}$ vis Lunæ. III.

(m) *Quæ esset pars* $\frac{100}{11915}$ *velocitatis Lunaris.* Patet ex notâ (f) vim quâ Lunâ revolvitur efficere ut corpus ab eâ vi uniformiter acceleratum cadendo tempo-

DE MUNDI SYSTEMATE. Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream $FK \times Kk$ rectangulo (n) $\frac{1}{2} TP \times Pp$ æqualem. Et (o) velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad aream $KCGF$: tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2} TP \times CA$ & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per prop. IX. lib. V. elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis lunæ. (p) Huic lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, (q) addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, sum-

211, re CT eam ipsam acquireret velocitatem quâ Luna revolvitur, vis ergo quæ vis Lunaris est pars $\frac{100}{11915}$ eodem tempore generaret velocitatem quæ velocitatis Lunaris foret pars $\frac{100}{11915}$.

(n) * *Exponatur vis maxima EL in octantibus per aream FK × Kk rectangulo* $\frac{1}{2} TP \times Pp$ *æqualem*, vis EL semper est proportionalis areæ FK × Kk ex demonstratis, sed in octantibus ubi ea vis est maxima est FK sive $TK = \frac{TP}{\sqrt{2}}$ & $Kk = \frac{Pp}{\sqrt{2}}$ ergo $FK \times Kk = \frac{TP \times Pp}{2}$.

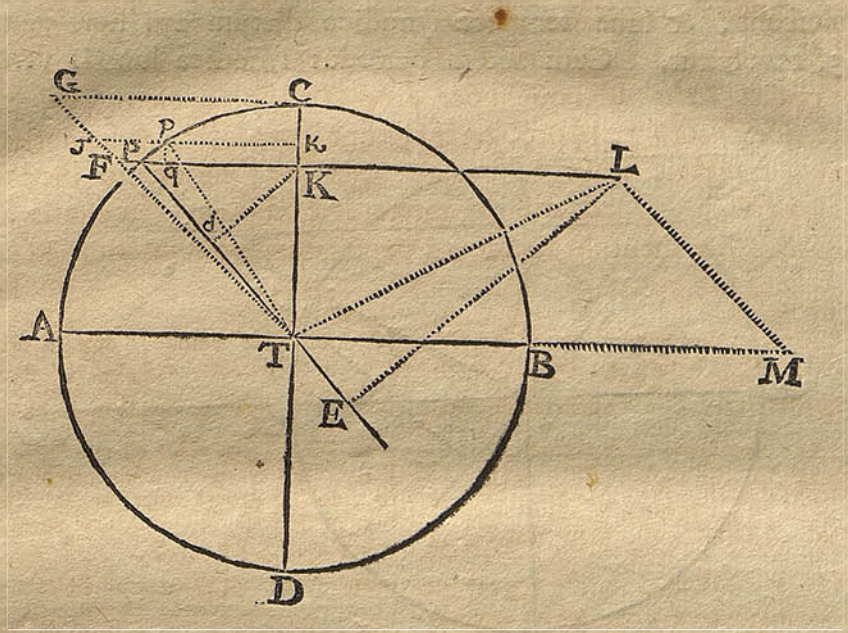
(o) * *Et velocitas quam vis maxima tempore quovis CP generat ad velocitatem quam generant* vires veræ EL *eodem tempore agentes ut* $\frac{1}{2} TP \times CP$ *ad aream KCGF*; Velocitates genitæ sunt ut vires quibus generantur ductæ in tempus per quod generantur, cum itaque supponatur omnes arcus Pp temporibus quamproxime æqualibus describi, si ii arcus Pp æquales inter se sumantur (vid. not. a præced.) velocitates genitæ dum arcus Pp percurruntur sunt ut ipsæ vires sive ut areæ FKkf, ideoque summa velocitatum genitarum tempore CP, sive dum arcus CP describitur, est ut tota area KCGF, sed vis in octantibus sive velocitas quæ in octante generatur durante tempore Pp, est $\frac{TP \times Pp}{2}$, quia eo in loco is est valor areæ FKkf, qui valor est ipse valor areæ PTp, ergo si singulis momentis Pp similis velocitas generaretur, summa velocitatum genitarum tempore CP foret area CTP sive $\frac{1}{2} TP \times CP$, ergo velocitas quam vis maxima generat est ad eam quam vires veræ generant, tempore utrinque eodem CP, ut $\frac{1}{2} TP \times CP$ ad KCGF.

(p) *Huic Lunæ velocitati quæ areæ momento mediocri est analoga.* Areæ momentum mediocre illud est quod Luna dato exiguo tempore verreret si uniformi velocitate toto suo tempore ferretur, cumque Luna per vim EL certis in locis plus minusve acceleretur, areæ momentum, seu ea areæ particula quæ dato exiguo tempore describitur, nunc major nunc minor est; sed cum orbis Lunaris circularis censeatur, areæ momenta sunt ut arcus qui sunt eorum bases, cumque iisdem temporibus illa momenta illique arcus describantur, sunt ut velocitates quibus describuntur. Hinc pro arearum momentis ipsæ velocitatum rationes assumuntur.

(q) * *Addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius.* Hic assumit Newtonus velocitatem mediocrem eam nempe quâ orbita Lunaris tempore suo Periodi-

co

ſumma 11915+50 ſeu 11965 exhibebit momentum maximum arcæ in ſyzygiâ *A*, ac differentia 11915−50 ſeu 11865 ejuſdem momentum minimum in quadraturis. Igitur arcæ tempo-



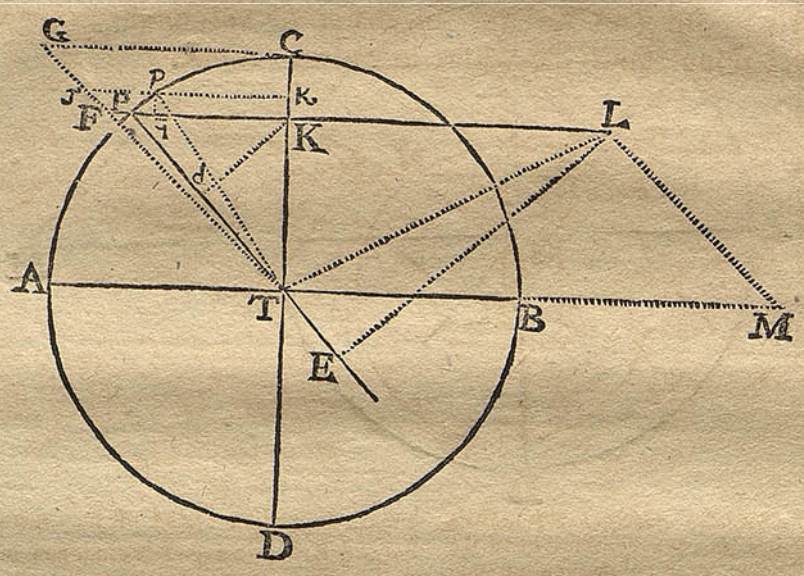
ribus æqualibus in ſyzygiis & quadraturis deſcriptæ, ſunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod ſit ad momentorum differentiam 100 ut

to uniformiter deſcriberetur eſſe mediam proportionalem Arithmeticè inter velocitatem minimam & maximam. Hanc tamen propoſitionem quaſi evidentem aſſumere non licuit, ſi enim v. gr. diutius durarent parvæ velocitates quam magnæ, velocitas mediocris propior foret parvis velocitatibus quam magnis, hinc exponenda eſt prius ratio quâ creſcunt illæ velocitates, ut poſſimus aſſerere mediocrem velocitatem Lunæ eſſe mediam Arithmeticè inter extremas. Quod quidem efficere conabimur Problemate huic propoſitioni mox ſubjungendo. 111.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ut trapezium *FKCG* ad triangulum *TCG* vel (r) quod perinde est, ut quadratum sinus *PK* ad quadratum radii *TP*, id (s) est, ut *Pd* ad *TP*) & summa exhibebit momentum areæ, ubi luna est in loco quovis intermedio *P*.

Hæc omnia ita se habent, ex hypothesi quod sol & terra quiescunt, & luna tempore synodico dierum 27. hor. 7. min. 43. revolvitur. Cum autem periodus synodica lunaris verè sit



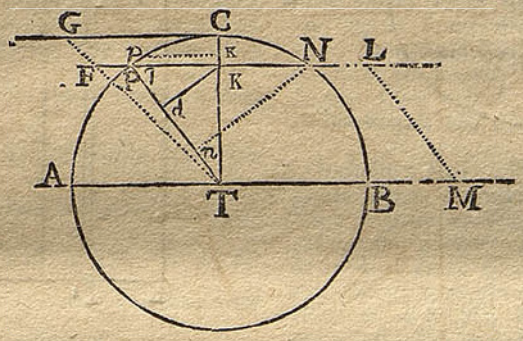
dierum 29. hor. 12. & min. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id est, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11915}$ momenti mediocris, jam fiet ejusdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in quadraturâ lunæ erit ad ejus momentum in syzygiâ ut 11023−50 ad 11023+50, seu 10973 ad 11073,

112. (r) * *Vel quod perinde est ut quadratum sinus PK ad quadratum radii TP* area TCG est aream TKF ut quad. TC ad quad. TK & dividendo TCG−TKF (sive FKCG) ad TCG ut TC^2-TK^2 (sive PK^2) ad TC^2.

(s) * *Id est ut Pd ad TP* est Pd ad PK ut PK ad TP propter similitudinem Triangulorum PKd, PTK, ergo per compositionem rationum est Pd ad TP ut PK^2 ad TP^2.

11073, & ad ejus momentum, ubi luna in alio quovis loco intermedio P versatur, ut 10973 ad $10973 + Pd$, (t) existente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis particulis æqualibus describit, est quam proximè ut summa numeri 219,46 & sinus versi duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturâ proximâ, in (u) circulo cujus radius est unitas. Hæc ita se habent ubi variatio in octantibus est magnitudinis mediocris. Sin (x) variatio ibi major sit vel minor, augeri debet vel minui sinus ille versus in eâdem ratione.

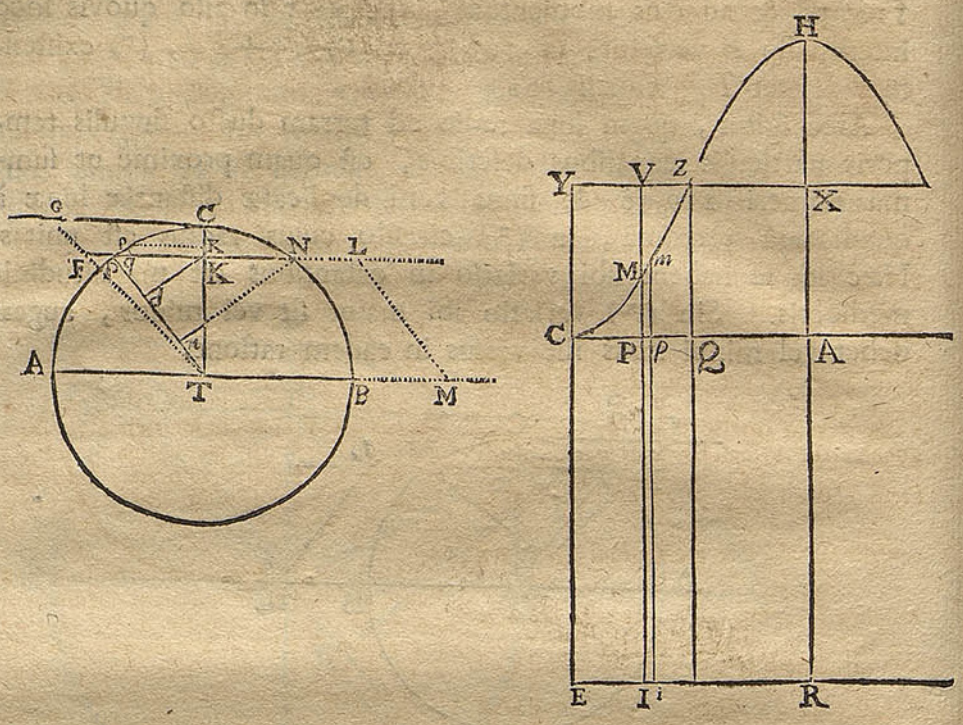


(t) * *Existente videlicet TP æquali* 100, sequitur ex præcedentibus quod illud quod debet addi ad momentum minimum 10973 est ad 100 ut est Pd ad PT, si ergo PT sit æqualis numero 100 erit Pd æqualis illi numero qui debet addi ad momenti minimi valorem.

(u) * *Ut summa numeri 219.46 & sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ in circulo cujus radius est unitas;* Areæ momentum in puncto P est ut $10973 + Pd$, est autem Pd dimidium sinus versus duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, nam dicatur N punctum in quo linea PKL secat circulum erit arcus PCN duplus distantiæ PC à quadraturâ proximâ ductaque Nn perpendiculari in radium PT erit Pn sinus versus duplicatæ illius distantiæ, sed cum Nn & Kd sint perpendiculares in eamdem lineam ideoque Parallelæ, & sit punctum K medium lineæ PN erit etiam d medium lineæ Pn, eritque $Pd = \frac{1}{2} Pn$, sive erit Pd dimidium sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, est ergo momentum areæ ut summa numeri $10973 + \frac{1}{2} Pn$ existente Radio 100, seu ut hujus quantitatis duplum $21946 + Pn$ ideoque si Radius sit 1 ut $219{,}46 + Pn$. XLIII.

(x) * 112. *Sin variatio ibi major sit* &c. Manente eâdem Hypothesi, Lunæ orbem esse circularem & Lunam aliam non pati irregularitatem præter eam quæ ab eâ parte actionis Solis nascitur quæ per lineam EL designatur, variatio Lunæ erit arcus interceptus inter locum in quo Luna esse deberet si velocitate suâ mediocri moveretur tempore dato CP, & locum in quo reverâ est tunc temporis, cujus quidem variationis conditiones ex Problemate sequenti exponere facile erit.

DE MUNDI SYSTEMATE.



PROBLEMA.

XII. Ex hypothesibus & demonstratis in Propositione hâc XXVI. exponere rationem secundum quam describuntur areæ CTPA momenta.

Designet recta CA (in 2da. figurâ) tempus quo arcus CA describitur, erigantur per singula puncta P rectæ PM perpendiculares in CA & proportionales velocitati tempore CP per vim EL genitæ; Per ea quæ in hâc Propositione demonstrantur independenter ab his, illæ velocitates in punctis P arcus CP sunt ut Trapezia FKCG correspondentia, illa vero Trapezia sunt ut sinus versi duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturâ proximâ, sive ut sinus versus arcus dupli CP, (ut mox in notis explicabitur) fiant ergo illæ perpendiculares PM æquales sinui verso arcus 2CP, ultima perpendicularis AH erit æqualis ipsi Diametro AB, quia est sinus versus dupli quadrantis; ducatur curva CMH per omnium perpendicularium vertices transiens, ducatur etiam AR perpendicularis ad CA, sitque AH ad AR ut velocitas ultimò acquisita in A ad velocitatem uniformem quâ Lunâ ferretur si vis EL, omninò non ageret, absolvaturque Parallelogrammum AREC, productâque lineâ MP usque ad lineam RE tota linea IM erit ut velocitas Lunæ tempore CP, & ducta linea quamproxima mpi erit area MPImpi ut area descripta tempore Pp, & tota area RECMH repræsentabit totam aream tempore CA descriptam; Denique secetur AH in X & ducatur XY parallela CA quæ secet curvam CMH in Z & ex puncto Z ducatur ordinata ZQ. Liquet quod si punctum X ita sit assumptum ut Parallelogrammum XREY sit æquale mixtilineo HARECMH, erit XR velocitas Lunæ mediocris, & CQ tempus quo Luna à quadraturâ profecta ad

ad eam velocitatem mediocrem perveniet, quod quidem ex ipsâ constructione liquet. Jam autem dico quod illud punctum X incidet in medio lineæ AH, ita ut hæc velocitas mediocris XR sit media proportionalis Arithmetica inter RA & RH & præterea quod punctum Q cadet in medio inter A & C ita ut ea celeritas mediocris in octante obtineatur, (saltem si medium arcus medio temporis respondeat quod proximè verum est juxta notam 110 præcedentem).

Ut obtineatur itaque area HAPCMH, dicatur v arcus CP & dicatur mv recta CP quæ arcui CP est proportionalis (saltem quam proximè per not. 110.) & Pp sit $m\,dv$, sinus rectus PK arcus CP dicatur y, sinus verò totalis sit r. Ex notis Trigonometriæ Principiis sinus versus dupli arcus CP est $\frac{2yy}{r}$, ergo ordinata PM ei æqualis est $\frac{2yy}{r}$, & elementum areæ sive MPpm est $\frac{2yy}{r}\,m\,dv$, sed ex notâ proprietate circuli est $\sqrt{rr-yy}$ ad r ut dy ad dv est ergo $dv=\frac{r\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ itaque areæ elementum evadit $\frac{2\,m\,yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ conferatur illud elementum cum elemento areæ circuli radio TC descripti dicatur CK, z, Kk, dz, Elementum PpkK est $y\,dz$, sed est TK ($\sqrt{rr-yy}$) ad PK (y) ut Pq (dy) ad qp (dz) hinc $dz=\frac{y\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ & elementum areæ circuli fit $\frac{yy\,dy}{\sqrt{rr-yy}}$ quod Elementum est ad Elementum correspondens areæ HAPCMH ut 1 ad $2m$, hinc tota hæc area est ad aream quadrantis TCPA ut $2m$ ad 1, sive si totus arcus CPA dicatur c & recta CPA dicatur mc, area HAPCMH erit mrc. Ergo si linea AR quæ designat velocitatem uniformem Lunæ cum nulla foret vis EL, dicatur l, area AREC erit mlc & tota area HARECH erit $mlc+mrc$, sive æqualis Parallelogrammo cujus unum latus foret mc alterum $l+r$, sed RE ex constructione est æqualis mc, ergo si sumatur RX $=l+r$ Parallelogrammum XREZ erit æquale mixtilineo HARECMH, ideoque erit RX sive $l+r$ velocitas Lunæ mediocris, sed erat AH $=2r$, ideoque RH $=l+2r$ est ergo RX ($l+r$) media proportionalis Arithmeticè inter RA (l) & RH ($l+2r$), ergo velocitas mediocris Lunæ est media proportionalis Arithmeticè inter minimam velocitatem Lunæ (l) & maximam ($l+2r$). 112

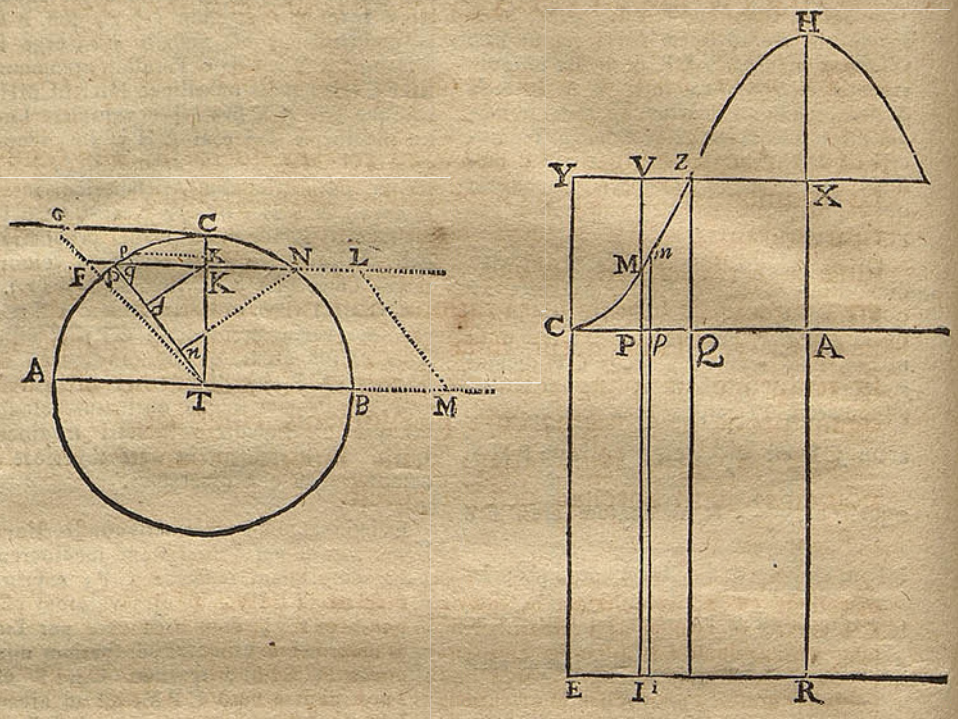
Quoniam verò ordinata ZQ $=$ AX $=r$ est sinus versus arcus dupli CP, & est r sinus versus arcus quadrantalis, ergo in hoc casu CP ejus dimidius est octans circuli, in octante itaque obtinetur velocitas quæ est æqualis velocitati mediocri Lunæ. Quæ quidem in notâ superiore q demonstranda esse dixeramus.

Ex hujus autem Problematis constructione liquet aream per velocitatem mediocrem Lunæ descriptam tempore CP, exprimi per aream YBIV, & ejus valorem esse $mlv+mrv$, dum area verè per Lunam descripta exprimetur per spatium mixtilineum CEIM; spatium CEIP est mlv, spatium verò CPM, est ad aream CPK ut $2m$ ad 1; tota area CTP est $\frac{rv}{2}$, spatium PKT est $\frac{y\times KT}{2}$, ergo area CPK est $\frac{rv-y\times KT}{2}$, est itaque spatium CPM $=mrv-my\times KT$ & tota area CEIM est $mlv+mrv-my\times KT$; Unde liquet differentiam inter aream per velocitatem mediocrem descriptam & aream reverâ descriptam esse $my\times KT$, quâ deficit area reverâ descripta, ab eâ quæ per mediocrem motum percursa censetur.

Hinc 1°. liquet variationem debere subtrahi ex motu medio à quadraturâ ad syzygiam, illam evanescere in syzygia A, quia illic $my\times KT=0$, à syzygiâ variationem addi debere motui medio, ut patet ex figuræ continuatione.

2°. Ut

DE MUNDI SYSTEMATE.



113. 2°. Ut quantitas $mlc + mrc$ est ad Rectangulum $yK \times TK$, ita est quadrans circuli CPAT ad aream quæ (propter variationem) detrahenda est ex areâ CTP motu mediocri descriptâ sive, quoniam CPAT est dimidium facti radii in arcum CPA, & ea area detrahenda est etiam dimidium facti radii in arcum variationis, erit etiam ut $mlc + mrc$ ad $my \times TK$ ita arcus quadrantalis CPA sive c ad arcum variationis qui itaque erit $\frac{y \times TK}{l + r}$ sive $\frac{PK \times TK}{l + r}$.

3°. Quoniam quantitates $lc + rc$, & arcus quadrantalis CPA sunt quantitates constantes, manifestum est quod variationes in omnibus punctis P, sunt ut $PK \times TK$, sive ut factum sinus arcus CP in ejus Cosinum.

4°. Rectangulum $TK \times PK$ est maximum ubi punctum P est in octante, quod demonstratur eo modo quem in notâ 111. præcedente videre licet, hinc variatio maxima, est in octantibus, unde fluit hoc Paradoxum, ubi vis EL maxima est, illic maximè retardatur Luna respectu motus sui medii.

5°. *Si variatio maxima mutetur, augeri debet vel minui sinus ille versus, qui velocitatem genitam in* singulis punctis exprimit *in eadem ratione;* Nam velocitas quæ generatur exprimitur per aream CKFG (vide figuram textus) in octantibus autem punctum F coincidit cum puncto P, & area CKFG illic evadit æqualis areæ PKT, ergo velocitas in octantibus genita est ut TK per PK, sed area quæ variationem illic exprimit est etiam ut TK per PK, (per hujusce notæ corol. 3.) ergo velocitas in octantibus est ut ipsa variatio in octantibus, sed velocitas in octanti-

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario lunæ invenire ipsius distantiam à terrâ.

(y) Area, quam luna radio ad terram ducto singulis temporis momentis describit, est ut motus horarius lunæ & quadratum distantiæ lunæ à terrâ conjunctim; & propterea distantia lunæ à terrâ est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione areæ directè & subduplicatâ ratione motus horarii inversè. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur lunæ diameter apparens: quippe quæ sit reciprocè ut ipsius distantiâ à terrâ. (z) Tentent astronomi quam probè hæc regula cum phænomenis congruat.

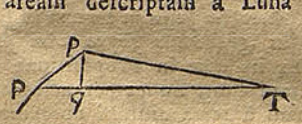
Corol. 2. (a) Hinc etiam orbis lunaris accuratiùs ex phænomenis quàm antehac definiri potest.

PRO-

octantibus est ad velocitatem in quovis alio puncto in ratione datâ Radii ad sinum versum duplicatæ distantiæ ejus dati puncti à quadraturâ proximâ, ergo hæc velocitas crescit ut velocitas in octantibus ideoque etiam ut variatio maxima, *ergo sinus ille versus* illi velocitati proportionalis debet augeri vel minui in eâdem ratione.

Verum ex actione TM aliam variationis portionem oriri ostenditur Prop. XXIX., illam autem portionem etiam futuram ut TK×PK per not. 114. mox adjiciendam constabit, ergo tota variatio erit ut TK×PK, sive, in octantibus, ut velocitas, quare manet hujus Corollarii veritas si agatur de totâ variatione.

(y) 113. *Area quam Luna singulis momentis describit est ut motus horarius Lunæ & quadratum distantiæ Lunæ à terrâ.* Designet TPp aream descriptam à Lunâ quovis



tempusculo, sitque P p arcus curvæ cujuslibet; centro T radio Tp describatur arcus circularis Pq qui pro rectâ perpendiculari in lineam TP assumi potest ideoque area à Lunâ descripta erit ut TP×pq, gradus autem, aut minuta in arcu pq contenta mensurabunt motum angularem Lunæ dato tempore qui æqualis est motui horario Lunæ, ideoque longitudo absoluta ejus arcus pq erit ut ejus radius TP & motus horarius Lunæ conjunctim hinc area TP×pq erit ut TP^2 & motus horarius Lunæ conjunctim. 113.

(z) * *Tentent Astronomi.* Observando nempe motum horarium Lunæ in variis temporibus ejus Periodi & simul angulum inter Solem & Lunam interceptum ut inde habeatur ejus distantia PTC à quadraturâ proximâ C, inde enim poterunt colligi numeri proportionales distantiis PT Lunæ à Terrâ, nam, per præced. Prop. area à Lunâ descripta est ut summa numeri 219.46 & sinus versi dupli anguli PTC quæ si dividatur per motum horarium qui observatione obtinetur, radix quadrata ejus quotientis erit ut distantiæ PT, & inversè ut Lunæ Diametri apparentes; Quare si hi etiam observati fuerint, collatio observationum cum numeris sic inventis Regulam Newtonianam illustrabit.

(a) * *Hinc etiam orbis Lunaris accuratiùs quam antehac definiri potest.* Or-

bis

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA IX.

Invenire diametros orbis in quo luna, sine eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura trajectoriæ, quam mobile, si secundum trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, describit, est ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè. (b) Curvaturas linearum pono esse inter se in ultimâ proportione sinuum vel tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium, ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem lunæ in terram in syzygiis est excessus gravitatis ipsius in terram supra (c) vim solarem $2PK$ quâ gravitas acceleratrix lunæ in solem superat gravitatem acceleratricem terræ in solem vel

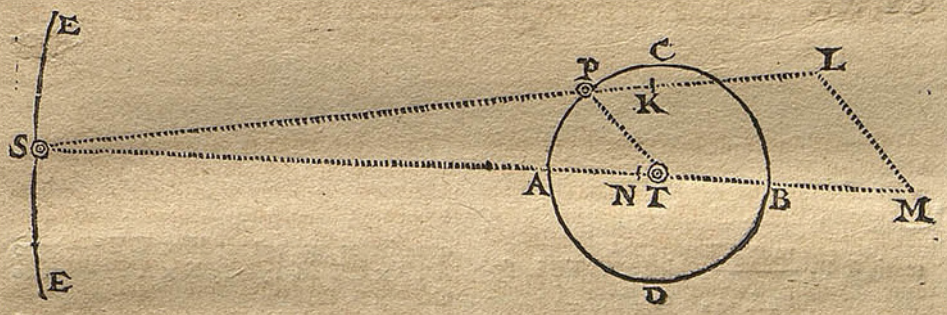
113. bis Lunaris figura definiri potest per observationes Diametrorum apparentium Lunæ in datis angulis à puncto quodam fixo, sicque cum distantiæ Lunæ sint his Diametris apparentibus reciprocæ, longitudines distantiis Lunæ proportionales in lateribus eorum angulorum secari possunt & per eas extremitates duci potest curva orbi Lunari similis: Sed observatio Diametri cujuslibet corporis lucidi est nimis lubrica ut satis tuta esse possit hæc Methodus, facilius tutiusque observabuntur motus horarius Lunæ ejusque distantia à quadraturâ proxima, hinc itaque accuratius cognita ratione distantiarum Lunæ à terrâ in datis angulis accuratius definietur quam antehac orbis Lunaris.

(b) *Curvaturas linearum* &c. Curvatura lineæ est ejus deflexio à Tangente, & æstimari debet per Angulum inter Tangentem curvæ & curvam nascentem interceptum; illi anguli sunt semper quamminimi, ideoque, juxta principia Trigonometrica, suis sinubus, suisve Tangentibus sunt proportionales, hinc Newtonus ponit curvaturas linearum esse in ultimâ proportione Tangentium angulorum contactus, si Tangentes illæ ad æquales radios referantur.

Radii illi æquales ad quos referuntur Tangentes illæ, describerentur per continuationem velocitatis corporis uniformis secundum Tangentem curvæ, ideoque quantulicumque sumantur tempora quibus describentur erunt inversè ut illæ velocitates, Tangentes verò anguli contactus quæ ad illos radios æquales referuntur sunt attractionis effectus siquidem supponitur illam attractionem agere secundum perpendiculum ad curvam, is verò attractionis effectus est semper ut ipsa vis & quadratum temporis per quod agere concipitur saltem si tempus exiguum intelligatur in quo attractio uniformiter ad modum gravitatis agere censenda sit; Ergo illæ Tangentes sunt ut attractio directè & quadratum velocitatis inversè, & in eâdem ratione sunt anguli contactus sive curvaturæ linearum.

(c) *Attractio lunæ in terram in syzygiis est excessus gravitatis supra vim solarem* $2PK$. Ex iis quæ in Propositione XXV. demonstrata sunt, liquet per actionem Solis, Lunam à terrâ distrahi ubicumque sita sit per vim TM, ad illam verò attrahi per vim LM, vis TM sive PL est semper æqualis $3PK$ (vid. not. (u) ad Prop. XXV.) & est PL Cosinus anguli ATP qui

vel ab eâ ſuperatur. In (d) quadraturis autem attractio illa eſt ſumma gravitatis lunæ in terram & vis ſolaris KT, quâ luna in terram trahitur. Et hæ (e) attractiones, ſi $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, ſunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CTq} + \frac{1000}{AT \times N}$ quam proximè; ſeu ut $178725\,N \times CTq - 2000\,ATq \times CT$ & $178725\,N \times ATq + 1000\,CTq \times AT$. Nam ſi gravitas acceleratrix lunæ in terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in quadraturis eſt PT vel TK & lunam trahit in terram, erit 1000, & vis mediocris TM in ſyzygiis erit



qui Coſinus in ſyzygiis eſt æqualis Radio, ita ut PT ſive LM eo in caſu ſit æqualis PK, ergo Luna attrahitur ad terram in ſyzygiis per vim gravitatis & per vim LM ſive PK, & diſtrahitur ab ea per vim 2PK, ſupereſt itaque attractioni Lunæ in terram in ſyzygiis exceſſus gravitatis ſupra vim Solarem 2PK.

(d) *In quadraturis* autem evaneſcit vis TM, attractio ergo Lunæ in terram eſt ſumma ejus gravitatis & vis LM ſive CT ſive KT quia in quadraturis puncta K & C coincidunt.

(e) * *Et hæ attractiones ſi* $\frac{AT+CT}{2}$ *dicatur N &c.* Ex Propoſitione XXV. conſtat vim gravitatis quâ Luna retinetur in orbe ſuo in mediocri ſua diſtantia N eſſe ad vim ſolarem mediocrem TM ut 178725 ad 1000, ideoque ad vim 2PK in ſyzygiis æqualem 2TM ut 178725 ad 2000, ſed diſtantiis AT, CT inæqualibus evadentibus variant iſtæ vires, eſt enim vis gravitatis in diſtantia N ad vim gravitatis in diſtantia AT ut $\frac{1}{N^2}$ ad $\frac{1}{AT^2}$ ideoque ſi prior exprimatur per 178725 erit poſterior $\frac{178725\,N^2}{AT^2}$, & ſimili ratiocinio vis gravitatis in diſtantia CT erit $\frac{178725\,N^2}{CT^2}$; Vires verò Solares 2PK, KT, creſcunt ut ipſæ diſtantiæ quare ſi vis 2PK in diſtantia N ſit 2000 in diſtantiâ AT erit $\frac{2000\,AT}{N}$, & ſi vis TM in quadraturis ſit 1000 in eâ diſtantiâ N, erit ea vis in diſ- 113

DE MUNDI SYSTEMATE.

erit 3000; de quâ, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 quâ luna in syzygiis distrahitur à terrâ, quamque jam ante nominavi $2PK$. Velocitas (f) autem lunæ in syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam luna radio ad terram ducto describit in syzygiis ad momentum ejusdem areæ in quadraturis conjunctim, i. e. ut $11073\,CT$ ad $10973\,AT$. (g) Sumatur hæc ratio bis inversè & ratio prior semel directè, & fiet curvatura orbis lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq \times N - 120406729 \times 2000\,ATqq \times CT$ ad $122611329 \times 178725\,ATq \times CTq \times N + 12261 \cdot 1329 \times 1000\,CTqq \times AT$, i. (h) e. ut $2151969\,AT \times CT \times N - 24081\,AT$ *cub.* ad $2191371\,AT \times CT \times N + 12261\,CT$ *cub.*

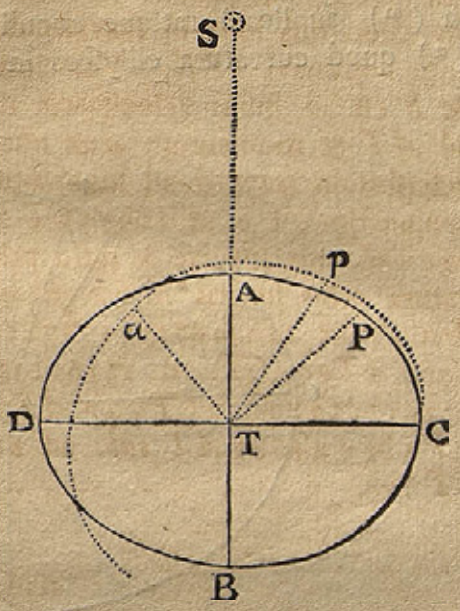
Quo-

113. tantia CT, $\frac{1000\,CT}{N}$; hinc attractio in syzygiis fit $\frac{178725\,N^2}{N} - \frac{2000\,AT}{N}$, & in quadraturis $\frac{178725\,N^2}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N}$, sive omnia dividendo per N^2 est attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000\,AT}{N^2 \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000\,CT}{N^2 \times N}$; quoniam verò N est medium Arithmeticum inter AT & CT quorum differentia est exigua, pro medio Geometrico inter eas quantitates proximè sumi potest, ita ut sit $N^2 = AT \times CT$, quo valore substituto loco N^2 fit attractio in syzygiis $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & in quadraturis $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$ & reductione facta ad eosdem denominatores fiunt istæ quantitates ut $178725\,N \times CT^2 - 2000\,AT^2 \times CT$ ad $178725\,N \times AT^2 + 1000\,CT^2 \times AT$.

(f) * *Velocitas Lunæ* &c. Quoniam in syzygiis & quadraturis arcus quos Luna describit sunt perpendiculares radiis AT, CT, areæ momenta dato tempore illic descripta sunt ut illi arcus & Radii AT, CT conjunctim, ii arcus dato tempore descripti sunt ut velocitates, ergo velocitates in syzygiis & quadraturis sunt ut arearum descriptarum momenta & Radii inversè.

(g) * *Sumatur* ratio duplicata velocitatum *inversè & ratio* simplex attractionum *directè*, factâque multiplicatione ut fractiones deleantur *fiet curvatura orbis Lunaris in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis* &c.

(h) * *i. e. ut.* Dividendo per $AT \times CT$, numeros signo $\times$ conjunctos in se invicem multiplicando neglectisque quatuor ultimis productorum cifris.



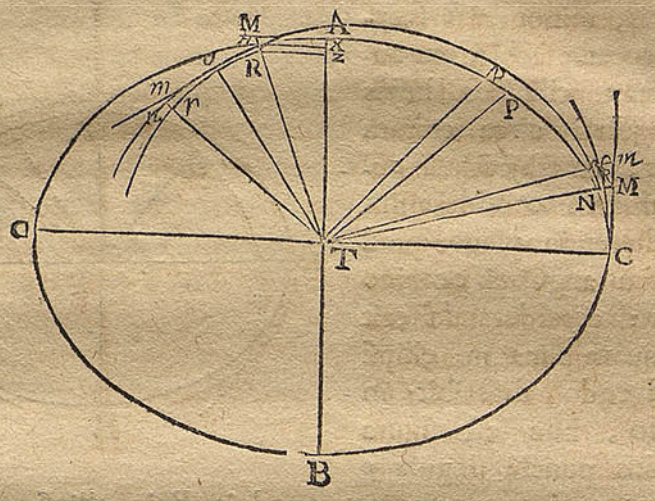
Quoniam figura orbis lunaris ignoratur, hujus vice assumamus ellipsin *DBCA*, in cujus centro *T* terra collocetur, & cujus axis major *DC* quadraturis, minor *AB* syzygiis interjaceat. (i) Cum autem planum ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur, & trajectoria cujus curvaturam consideramus describi debet in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit figura, quam luna in ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est figura *Cpa*, cujus puncta singula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in ellipsi, quod locum lunæ repræsentet, & ducendo *Tp* æqualem *TP*, eâ lege ut angulus *PTp* æqualis sit motui apparenti solis à tempore quadraturæ *C* confecto; vel (quod (l) eodem ferè recidit) ut angulus *CTp* sit ad angulum *CTP* ut tempus revolutionis synodicæ lunaris ad tempus revolutionis periodicæ seu $29^d. 12^h. 44'$, ad $27^d. 7^h. 43'$. Capiatur igitur angulus *CTa* in eâdem ratione ad angulum rectum *CTA*; & sit longitudo *Ta* æqualis longitudini *TA*; & erit *a* apsis ima & *C* apsis summa orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam circuli centro *T* intervallo *TA* descripti, sit ad differentiam inter curva

(i) * *Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa terram revolvatur.* Axis enim minor hujus Ellipseos ad Solem perpetuò dirigitur, ideoque eodem motu quo sol circa terram revolvitur axis iste sive planum Ellipseos circa terram fertur. 113.

(l) * *Quod eodem ferè recidit* quia Lunæ motus medius ab ipsius motu vero non multùm discrepat.

DE MUNDI SYSTEMATE.

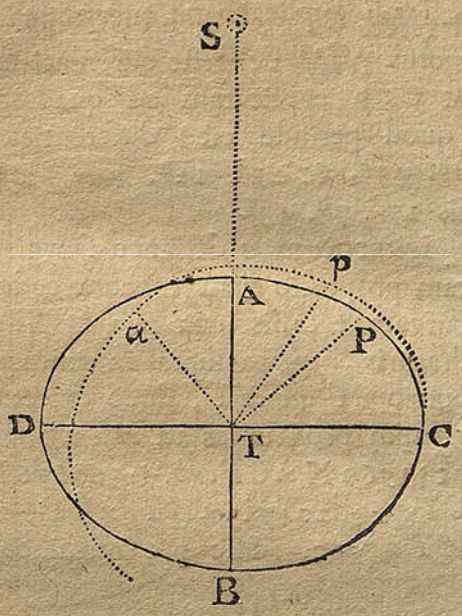
vaturam ellipseos in vertice *A* & curvaturam ejusdem circuli, in (m) duplicatâ ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & (n) quod curvatura ellipseos in *A* sit ad curvaturam circuli illius,



113. (m) * *In duplicatâ ratione anguli CTP ad angulum CTp.* Centro T intervallo TA describatur circuli arcus ARar, sit arcus AR ad arcum ar in ratione datâ anguli CTP ad angulum CTp, ducantur Radii TR, Tr & producantur ita ut Tangentibus in A & a ductis occurrant in M & m, occurrant vero Ellipsi in N, & curvæ Cpa in n; erit NR = nr, quia ex constructione Tn sumitur æqualis TN, & radii TR, Tr sunt æquales; Evanescentibus autem arcubus ra & RA curvatura orbis Cpa in a erit ad curvaturam circuli radio TA descripti, ut mn ad mr, & ideo differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA descripti est ad curvaturam ejusdem circuli ut mr − mn sive nr aut RN ad mr, simili modo patet quod curvatura circuli radio TA descripti est ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice A & curvaturam ejusdem circuli ut MR ad NR. Ideoque compositis rationibus differentia inter curvaturam orbis Cpa in a & curvaturam circuli radio TA descripti, est ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in A & curvaturam ejusdem circuli ut MR ad mr, hoc est, (Cor. I. Lem. XI. Lib. I.) in ratione duplicatâ arcus RA ad arcum ra, sive (per const.) in ratione duplicata anguli CTP ad angulum CTp.

(n) * *Et quod curvatura Ellipseos in A &c.* Curvatura Ellipseos in A est ad curvaturam circuli radio TA descripti in ratione MN ad MR; Ducatur verò NX tangenti parallela, & axi occurrens in X, & pariter RZ, erit per proprietatem Ellipseos AX × XB ad NX² ut TA² ad TC, & per proprietatem circuli erit AZ × ZB = RZ², sed quia sumuntur quantitates nascentes est AX = MN, AZ = MR, XB = AB = ZB & NX = RZ, quibus valoribus suo loco substitutis prima proportio evadit MN × AB : MR × AB :: TA² : TC² ideoque est MN ad MR, sive curvatura Ellipseos ad curvaturam circuli in duplicatâ ratione TA ad TC.

lius, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (o) curvatura circuli illius ad curvaturam circuli centro *T* intervallo *TC* descripti, ut *TC* ad *TA*; (p) hujus autem curvatura ad curvaturam ellipseos in *C*, in duplicatâ ratione *TA* ad *TC*; & (q) differentia inter curvaturam ellipseos in vertice *C* & curvaturam circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam figuræ *Cpa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem circuli, in duplicatâ ratione anguli *CTp* ad angulum *CTP*. Quæ quidem rationes ex sinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His (r) autem inter se collatis, prodit curvatura figuræ



(o) * *Curvatura circuli* &c. Nam circulorum curvaturæ sunt inverse ut eorum radii (not. 121. lib. 1.). 113.

(p) * *Hujus autem curvatura*, potest demonstrari eo ipso modo quo demonstravimus rationem curvaturæ Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio TA descripti (not. n).

(q) * *Et differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice C* &c. Demonstratio ferè eadem est ac in notâ (m): Centro C intervallo TC describatur circuli arcus CRr, sit arcus CR ad arcum Cr, in ratione anguli CTP ad angulum CTp ducatur Tangens CMm, & Radii TRM, Trm quorum prior occurrat Ellipsi in N, posterior curvæ Cpa in n, erit NR=nr propter æquales TN, Tn per curvæ const. & Radios æquales TR, Tr; Evanescentibus arcubus CN, Cn, curvatura Ellipseos in C est ad curvaturam circuli radio TC descripti ut MN ad MR, ideoque curvaturarum Ellipseos & circuli differentia est ad curvaturam circuli ut RN ad MR, simili modo curvatura circuli est ad curvaturam orbis Cpa ut mr ad mn, ideoque curvatura circuli ad differentiam curvaturarum orbis Cpa & circuli ut mr ad rn: itaque compositis rationibus erit curvaturarum Ellipseos & circuli differentia ad curvaturarum orbis Cpa & circuli differentiam ut mr ad MR hoc est in ratione duplicata arcus rC ad arcum RC, sive in ratione duplicatâ anguli CTp ad angulum CTP.

(r) *His autem inter se collatis* &c. Ut pateat ordo quo istæ rationes componuntur, dicatur *s* tempus revolutionis Synodicæ, & *t* tempus revolutionis Periodicæ, eritque angulus CTP ad angulum CTp ut *t* ad *s*.

DE MUNDI SYSTEMATE.

guræ Cpa in a ad ipsius curvaturam in C, ut $\overline{AT}$ *cub.* $+\frac{16824}{100000}$ $CTq \times AT$ ad CT *cub.* $+\frac{16824}{100000}$ $ATq + CT$. Ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ designat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP, seu (quod perinde est) differentiam quadratorum temporum $27^d. 7^h. 43'$, & $29^d. 12^h. 44'$, applicatam ad quadratum temporis $27^d. 7^h. 43'$.

Igitur cum a designet syzygiam lunæ, & C ipsius quadraturam proportio jam inventa eadem esse debet cum proportione curvaturæ orbis lunæ in syzygiis ad ejusdem curvaturam in quadraturis, quam supra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in se invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062{,}79\ CTqq - 2151969\ N \times CT$ *cub.* $+ 368676\ N \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ N \times ATq \times CT + 2191371\ N \times AT$ *cub.* $+ 40514\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT semisumma N scri-

113. (1) Differentia curvaturarum orbis Cpa in a & circuli radio TA descripti, est ad differentiam curvaturarum Ellipseos in A & ejusdem circuli ut tt ad ss (not. m).

(2) Curvatura Ellipseos in A ad curvaturam circuli radio TA descripti ut TA^2 ad TC^2 (not. n).

(3) Hinc dividendo, differentia curvaturarum Ellipseos in A & circuli est ad curvaturam ejusdem circuli ut $TC^2 - TA^2$ ad TC^2: & per compositionem 1^æ. & 3^æ. proportionis

(4) Est differentia curvaturarum orbis Cpa in a & circuli radio TA descripti ad curvaturam ejusdem circuli ut $tt \times TA^2 - TC^2$ ad $ss \times TC^2$.

(5) Hinc, convertendo curvatura orbis Cpa in a ad curvaturam circuli radio TA descripti ut $ss\ TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$ ad $ss \times TC^2$.

(6) Curvatura circuli radio TA descripti, ad curvaturam circuli radio TC descripti ut TC ad TA.

(7) Curvatura circuli radio TC descripti ad curvaturam Ellipseos in C ut TA^2 ad TC^2.

(8) Hinc, convertendo curvatura circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum ejus circuli & Ellipseos in C ut TA^2 ad $TC^2 - TA^2$.

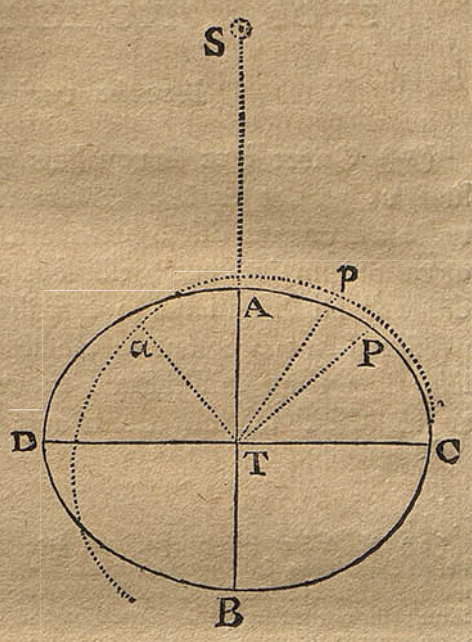
(9) Differentia curvaturarum ellipseos in C & ejus circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum figuræ Cpa in C & ejusdem circuli ut ss ad tt; & per compositionem 8^æ. & 9^æ. proportionis est

(10) Curvatura circuli radio TC descripti ad differentiam curvaturarum figuræ Cpa in C & ejusdem circuli ut $TA^2 \times ss$ ad $tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

(11) Et convertendo curvatura circuli radio TC descripti ad curvaturam figuræ Cpa in C ut $TA \times ss$ ad $TA^2 \times ss + tt \times \overline{TC^2 - TA^2}$.

Hinc tandem ex æquo & per compositionem 5^æ. 6^æ. & hujus 11^æ. proportionis, est curvatura orbis Cpa in a, ad ejus curvaturam in C ut $ss \times TC^2 - tt \times \overline{TC^2 - TA^2} \times TC$

scribo 1 ; & pro eorundem semidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: (f) quibus in æquatione scriptis, & æquatione prodeunte resolutâ, obtinetur x æqualis 0,00719, & inde semidiameter CT fit 1,00719, & semidiameter AT 0,99281, qui numeri sunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proximè. (t) Est igitur distantia lunæ à terrâ in syzygiis ad ipsius distantiam in quadraturis (sepositâ scilicet eccentricitatis consideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.



PRO-

$\times TC \times TA^2 \times s^2$ ad $s^2 \times TC^2 \times TA \times (TA^2 \times s^2 + tt \times (TC^2 - TA^2))$ quæ divisa per $s^2 \times TC \times TA$ fiunt ut $s^2 - tt \times TC^2 \times TA + t^2 \times TA^3$ ad $s^2 - tt \times TA^2 \times TC + tt \times TC^3$, omnibusque divisis per tt & inverso terminorum ordine fiunt ut $TA^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TC^2 \times TA$ ad $TC^3 + \frac{s^2 - tt}{tt} \times TA^2 \times TC$. Q. E. I.

(f) *Quibus in æquatione scriptis.* Hæc æquatio fit $42456.19\ x^4 - 5082017.44\ x^3 + 148262.14\ x^2 - 12307251.44\ x + 88487.19 = 0$, sed cum x debeat esse quantitas exigua omnes terminos præter duos ultimos negligit, & ex æquatione $12307251.44\ x = 88487.19$ valorem obtinet $x = \frac{88487.19}{12307251.44} = 0.00719$.

(t) * *Est igitur distantia Lunæ à Terrâ* &c. Astronomis est cognitum, quod si distantia mediocris Lunæ à Terra incidat in tempus syzygiarum, ea distantia mediocris minor erit quam si incidat in tempus quadraturarum; Clar. Halleius ex observationibus Astronomicis deduxit distantiam mediocrem Lunæ à Terrâ in Syzygiis esse ad ipsius distantiam mediocrem in quadraturis ut $44\frac{1}{2}$ ad $45\frac{1}{2}$; quod si vel tantillùm propter observationum lubricitatem de hoc ultimo numero detrahatur facile accedit hæc ratio ad eam quam Newtonus deprehendit suo calculo.

SCD Lyon 1

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire variationem lunæ.

(u) Oritur hæc inæqualitas partim ex formâ ellipticâ orbis lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam luna radio ad terram ducto describit. Si luna *P* in ellipsi *DBCA* circa terram in centro ellipseos quiescentem moveretur, & radio *TP* ad terram ducto describeret aream *CTP* tempori proportionalem; esset autem ellipseos semidiameter maxima *CT* ad semidiametrum minimam *TA* ut 70 ad 69: (x) foret tangens anguli *CTP* ad tangentem anguli motus medii à quadraturâ *C* com-

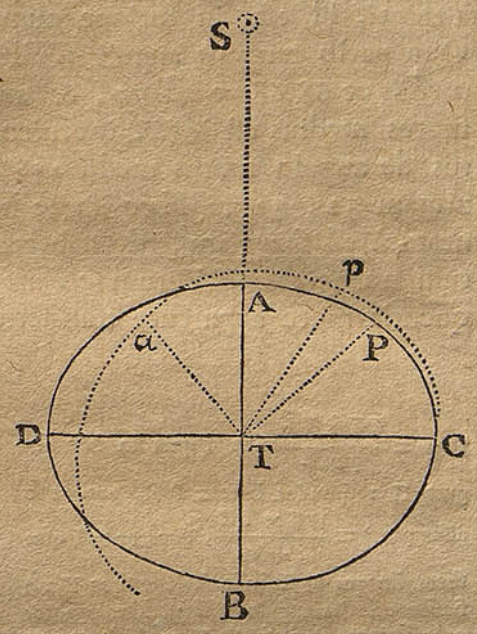
213. (u) * *Oritur hæc inæqualitas*, &c. Pergit Newtonus in hypothesi quod semotâ Solis actione orbis Lunæ circularis foret; in præcedenti verò Propositione, determinavit quamnam mutationem induceret illi circulo vis Solis, quâtenus ea ejus portio assumitur quæ ad centrum terræ spectat & cum gravitate Lunæ versus terram sociatur; itaque, sumpto novam figuram orbis Lunaris ad Ellipsim posse revocari, demonstrat in Prop. præcedente eam Ellipsim talem esse ut axis major sit ad minorem ut 70 ad 69; Motus autem Lunæ in tali Ellipsi debet fieri ita ut areæ descriptæ circa centrum terræ sint temporibus proportionales, quia vires quæ assumuntur ad id centrum diriguntur; cumque areæ illæ Ellipticæ, angulis in centro factis proportionales non sint, sequitur illos angulos in centro factos temporibus proportionales non esse, ideoque aliquid corrigendum esse motui medio Lunæ, in quo Anguli in centro terræ facti proportionales temporibus assumuntur, ut habeatur Lunæ motus Verus; & hæc correctio constituet partem variationis, quæ est, in hâc hypothesi, arcus interceptus inter locum medium Lunæ & locum ejus verum & hæc pars variationis *ex formâ ellipticâ* quam assumit *orbis Lunaris* per Solis actionem *oritur*.

Altera pars variationis oritur ex eâ actionis Solis parte quam consideravit Newtonus Prop. XXVI. & quâ fit ut ipsæ areæ à Lunâ descriptæ temporibus non sint proportionales, area itaque tempori proportionalis corrigenda est, idque detrahendum vel addendum quod debetur illi actioni, quodque per constructionem Probl. nostri n. 110. determinare facillimum erit, quam quidem constructionem non dedit Newtonus, quasi mediocribus uteretur quantitatibus ex æquo, ut aiunt, & bono assumptis, verum vix dubitandum quin ad hanc vel similem constructionem respexerit, ii enim non erant casus quibus hæc media sine demonstratione assumi possent à Viro summè accurato & perspicace.

(x) * *Foret Anguli Tangens.* Sit CADB ellipsis quam Luna describit, ita ut areæ circa centrum T sint temporibus proportionales, describatur circulus eodem centro, radio TC, in ejus circuli circumferentia moveatur Luna motu medio, sumaturque in eo circulo arcus CH tempori cuivis dato proportionalis, ducta ordinata HPK, dico quod area Elliptica TCP erit tempori proportionalis hoc est quod tota area Elliptica erit ad eum sectorem TCP ut est tempus Periodicum Lunæ ad tempus datum.

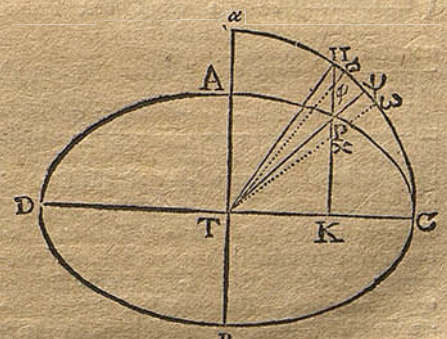
Est enim tota circuli circumferentia ad arcum CH, sive totus circulus ad aream CT

computati, ut ellipseos semimidiameter *TA* ad ejusdem semidiametrum *TC* seu 69 ad 70. (y) Debet autem descriptio areæ *CTP*, in progressu lunæ à quadraturâ ad syzygiam, eâ ratione accelerari, ut ejus momentum in syzygiâ lunæ sit ad ejus momentum in quadraturâ ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio *P* supra momentum in quadraturâ sit ut quadratum sinus anguli *CTP*. Id quod satis accuratè fiet, si tangens anguli diminuatur in subduplicatâ ratione numeri 10973 ad numerum 11073.



CTΠ, ut tempus Periodicum totum ad tempus datum ex constructione, sed ex notâ circuli & Ellipseos proprietate, est tota area elliptica ad totam aream circuli ut TA ad CT, & pariter est sector CTP ad CTΠ ut TA ad CT (nam Triangula Rectilinea TPK, TΠK sunt ut bases PK, ΠK; areæ curvilineæ CPK, CΠK sunt etiam, ex notâ Ellipseos & circuli proprietate ut PK ad ΠK, ergo toti sectores CTP, CTΠ sunt ut PK ad ΠK, quæ sunt ut TA ad CT,) ergo tota area Elliptica est ad aream circuli ut sector CTP ad CTΠ, & alternando, tota area Elliptica ad sectorem CTP, ut est circuli area ad CTΠ, seu ut est Tempus Periodicum, ad tempus datum.

Si ergo area CTP sit tempori proportionalis, motus Lunæ qui à terrâ videri debuisset sub angulo CTΠ si Luna motu medio fuisset lata, videbitur sub angulo CTP, & si linea TK pro radio assumatur erit KP tangens anguli CTP, &



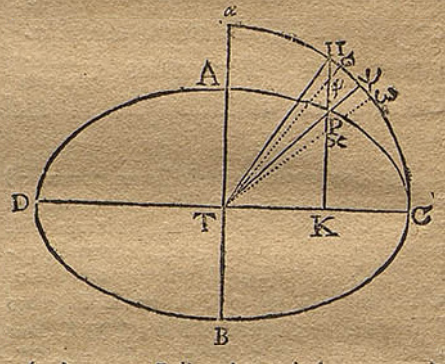
KΠ tangens Anguli CTΠ, sed est PK ad ΠK ut TA ad CT, ergo *tangens anguli CTP est ad tangentem anguli motus medii ut TA ad TC seu 69 ad 70.* 113.

(y) * *Debet autem descriptio areæ &c.* Manentibus iis omnibus quæ in notis 112. & 113., expositâ fuerunt, arcus variationis erit $\frac{PK \times TK}{l + r}$ (per cor. 2. not. 113.) sumatur ergo in arcu CΠ versus C arcus

DE MUNDI SYSTEMATE.

11073, id est, in ratione numeri 68,6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli *CTP* jam erit ad tangentem motus medii ut 68,6877 ad 70, & angulus *CTP* in octantibus, ubi motus medius est 45gr. invenietur 44gr. 27′. 28″. qui subductus de angulo motus medii 45gr. relinquit (z) variationem maximam 32′. 32″. Hæc ita se haberent si luna, pergendo à quadraturâ ad syzygiam, describeret angulum *CTA* graduum tantum nonaginta. Verum ob motum terræ, quo sol in consequentia motu apparente transfertur, luna, priusquam solem assequi-

114 $\Pi\varpi = \frac{PK \times TK}{l+r}$ sive (quia in hâc figura Π respondet litteræ P in not. 110 assumptæ) $= \frac{\Pi K \times TK}{l+r}$, ducatur ϖT quæ secet lineam ΠK in ϕ Triangulum $\Pi\varpi\phi$ simile erit Triangulo $TK\phi$, sive propter exiguitatem anguli $\Pi T\varpi$ Triangulum $\Pi\varpi\phi$ simile erit Triangulo $TK\Pi$, hinc erit TK ad $T\Pi$ (r) sicut $\Pi\varpi$ $\left(\frac{\Pi K \times TK}{l+r}\right)$ ad $\Pi\phi$ quod erit itaque $\frac{r \times \Pi K}{l+r}$, ideoque erit $K\phi$ ($= \Pi K - \Pi\phi$) $= \frac{\overline{l+r} \times \Pi K - r \times \Pi K}{l+r} = \frac{l \times \Pi K}{l+r}$, unde habetur hæc proportio $l+r : l :: \Pi K : \phi K$; si verò sumatur TK pro radio, erit ΠK Tangens motus medii & ϕK Tangens motus medii imminuti hac variationis portione; Debet minui in eadem ratione quam proxime, Tangens PK motus Lunæ in Ellipsi spectatæ aut saltem in ratione paulo minore; cum itaque $l+r$, sit medium Arithmeticum inter $l+2r$ sive 11073 & l sive 10973, & ratio medii Arithmetici ad minimum extremorum sit paulo major quam medii Geometrici ad eum extremum, satis accuratè fieri dicit si sumatur Tangens PK ad Tangentem anguli motus veri Lunæ ut medium Geometricum inter 11073 & 10973 ad 10973, sive in subduplicatâ ratione 11073 ad 10973; quæ est æqualis rationi 69 ad 68,6877 cum ergo sit ΠK ad PK ut 70 ad 69, & cum sit PK ad Tangentem motus Lunæ ultimò correcti ut 69 ad 68,6877 erit ex æquo Tangens motus medii ad Tangentem motus veri ut 70 ad 68,6877. Q. E. D.



(z) 114. *Relinquit variationem maximam.* Ex Cor. 4. not. 113. arcum variationis quæ pendet ex inæqualitate momentorum areæ, maximum esse in octantibus constat; Eam autem variationis portionem quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris etiam maximam esse in octantibus hoc modo patet, producatur TP in Ψ & cum arcus $\Pi\Psi$ vix excedat semigradum ubi maximus est pro recta sumatur, erit Triangulus $\Pi\Psi P$ similis Triangulo TKP, sive $TK\Pi$ ideoque est $T\Pi$ ad TK ut ΠP ad $\Pi\Psi$ qui erit ergo ubivis æqualis $\frac{\Pi P \times TK}{T\Pi}$, sed quoniam est ubivis 70 ad 69 ut ΠK ad PK, erit dividendo 70 ad 1 ut ΠK ad

quitur, describit angulum *CTa* angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis lunaris synodicæ ad tempus revolutionis periodicæ, id est, in ratione $29^d.\ 12^h.\ 44'.$ ad $27^d.\ 7^h.\ 43'.$ Et hoc pacto anguli omnes circa centrum *T* dilatantur in eâdem ratione, & variatio maxima quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eâdem ratione fit $35'.\ 10''$.

Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantiâ solis à terrâ, (a) neglectis differentiis quæ à curvaturâ orbis magni majorique solis actione in lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In (b) aliis distantiis solis à ter-

ad ΠP ideoque est $\Pi P = \frac{\Pi K}{70}$ & arcus $\Pi \Psi$ erit $\frac{\Pi K \times TK}{70 T \Pi}$, jam autem demonstratum est nota 111. quod maximum hujus quantitatis $\Pi K \times TK$ est in octantibus, ergo arcus $\Pi \Psi$ sive ea variationis portio quæ pendet ex formâ Ellipticâ orbis Lunaris est maxima in Octantibus sicut & altera portio, ergo Variatio tota est maxima in Octantibus.

(a) * *Neglectis differentiis quæ à curvatura orbis magni oriri possint.* Hactenus supposition est, lineam DTC repræsentare orbis magni portionem, & fieri quadraturas in punctis D & C; quod quidem absolutè verum non est, quippe semi-Diameter orbis Lunaris sub Angulo 10 circiter minutorum à Sole videtur, unde arcus DC est 20′ circiter & aliquam habet curvaturam, hinc revera utraque quadratura est circiter 20′ propior conjunctioni quam oppositioni, quæ consideratio hic neglecta est.

Majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, si vis Solis in punctum T exprimatur per $\frac{1}{ST^2}$ erit vis in Lunam novam & falcatam ut $\frac{1}{(ST-TA)^2}$ & vis in Lunam plenam & gibbosam ut $\frac{1}{(ST+TA)^2}$ revocentur omnia ad communem denominationem erit vis in punctum T ut $\overline{ST-TA^2} \times \overline{ST+TA^2}$ sive $ST^4 - 2ST^2 \times TA^2 + TA^4$, vis in Lunam novam $ST^4 + 2ST^3 \times TA + TA^2 \times ST^2$, vis in Lunam plenam $ST^4 - 2ST^3 \times TA + ST^2 \times TA^2$; Hinc excessus vis in Lunam novam supra vim mediocrem est $2ST^3 \times TA + 3ST^2 \times TA^2 - TA^4$; Et excessus vis mediocris supra vim in Lunam plenam est $2ST^3 \times TA - 3ST^2 \times TA^2 + TA^4$, qui quidem excessus differunt, & prior posteriorem superat quantitate $6ST^2 \times TA^2 - 2TA^4$; Verum propter magnitudinem lineæ ST præ linea TA, evanescit ferè hæc excessuum differentia respectu quantitatis communis $2ST^3 \times TA$, ideo pro æqualibus fuerunt habiti. 114.

(b) *In aliis distantiis Solis à Terrâ.* Duplex est causa quæ errores ab actione Solis pendentes mutet, primum vis solis mediocris mutatur inverse ut quadrata distantiarum & præterea cum Sol celerior vel tardior fiat prout propior est vel remotior à Terra, Luna é converso ipsum tardius vel celerius attingit, unde mensis Synodicus in Perigæo Solis fit longior quam idem mensis Synodicus in Apogæo; ex hac ultimâ causâ, si sola consideretur, fiet ut variatio maxima in ratione duplicatâ temporis revolutionis Synodicæ crescat, quod quidem separatim demonstrandum de utrâque variationis portione $\Pi \Psi$ & $\Psi \varpi$; Et quidem in octantibus cum Triangulum $\Pi P \Psi$ sit Rectangulum Isosceles, est $\Pi \Psi = \frac{\Pi P}{\sqrt{2}}$, est verò $\Pi P = \frac{\propto A}{\sqrt{2}}$, nam ex naturâ circuli & Ellipseos

DE MUNDI SYSTEMATE.

râ, variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione temporis revolutionis synodicæ lunaris (dato anni tempore) directè, & triplicatâ ratione distantiæ solis à terrâ inversè. (c) Ideoque in apogæo solis, variatio maxima est $33'.\ 14''$, & in ejus perigæo $37'.\ 11''$, si modo eccentricitas solis sit ad orbis magni semidiametrum transversam ut $16\frac{15}{16}$ ad 1000.

Hac-

114. est $\propto$T ad AT ut IIK ad PK & dividendo $\propto$T ad $\propto$A ut IIK ad IIP $= \frac{\propto A \times IIK}{\propto T}$ sed in octante est IIK $= \frac{\propto T}{\sqrt{2}}$ ergo IIP $= \frac{\propto A \times \propto T}{\propto T \sqrt{2}} = \frac{\propto A}{\sqrt{2}}$ hinc II$\Psi = \frac{\propto A}{2}$, est autem $\propto$A effectus virium Solis Lunam retrahentium à suo circulo, durante quartâ parte temporis revolutionis Synodicæ Lunæ, ergo si id tempus crescat manentibus iisdem viribus similiter agentibus, effectus totus $\propto$A erit ut quadratum temporis per quod illæ vires egerunt per Cor. I. Lem. X. lib. I. ideoque IIΨ crescit secundum quadrata temporum.

Idem demonstrabitur de portione variationis $\Psi\omega$ quæ pendet ex acceleratione descriptionis areæ; Quippe manentibus omnibus ut in not. III. & fig. 3ª, recta CA majus tempus designare censeatur, & partes Pp tempuscula in eadem ratione longiora, lineæ PM designant velocitates genitas durante momento Pp, si ergo id momentum crescat viribus generatricibus iisdem manentibus, velocitates genitæ PM crescent in proportione temporis, & quia PpMm designat spatiolum illâ velocitate percursum, crescuntque & PM & Pp in ratione temporum, crescet PMmp in ratione duplicatâ temporum, cumque singula elementa curvæ in eâ proportione crescant, & tota area CAH, & ei æqualis CAXY, ejusque dimidia CQZY in eâdem proportione crescent; ex quâ si detrahatur CQZ quod in eâdem proportione crevit, reliquum CZY quod areæ variationi maximæ ΨTω est proportionale crescet etiam in eâdem duplicatâ ratione temporum, manente itaque radio Tω, ipse arcus $\Psi\omega$ crescet in duplicatâ ratione temporum.

Hinc cum IIΨ crescat in duplicatâ ratione temporum tum etiam $\Psi\omega$, summa itaque IIω sive tota variatio crescet in eâdem duplicatâ temporum ratione.

Dico præterea quod si spectetur imminutio actionis Solis propter auctam distantiam variatio maxima decrescet in ratione triplicatâ distantiarum, nam designetur vis mediocris Solis per $\frac{1}{SK^2}$, est ex constructione SK ad TM ut vis Solis sive ut $\frac{1}{SK^2}$ ad vim TM ergo ea vis TM est ut $\frac{TM}{SK^3}$ manente ergo TM quæ est æqualis PT; vis TM ex actione Solis pendens decrescit ut distantiarum cubus augetur, Manente ergo tempore, sed vi mutatâ secundum rationem triplicatam, eadem ferè ratione ac prius ostendetur utramque variationis maximæ partem II$\Psi\omega$ & $\Psi\omega$ forè inversè in ratione triplicatâ distantiarum Solis; *Hinc que in variis Solis à terrâ distantiis quæ in* datis anni temporibus recurrunt *variationes maximæ erunt inter se in ratione duplicatâ durationis mensis Synodici eo tempore, & triplicatâ inversè distantiæ solis à terrâ.*

(c) * *Ideoque* &c. Ex his & præcedentibus facile intelligitur Newtoni calculus, si prius hæc Principia revocentur.

1°. Si dicatur *m* distantia mediocris Solis, sit $\pm e$ excessus vel defectus ejus distantiæ à mediocri distantiâ in loco quovis dato; denique dicatur *s* solis motus horarius mediocris, dico quod solis mo-

tus

Hactenus variationem inveſtigavimus in orbe non eccentrico, in quo utique luna in octantibus ſuis ſemper eſt in mediocri ſuâ diſtantiâ à terrâ. Si luna propter eccentricitatem ſuam, magis vel minus diſtat à terrâ quam ſi locaretur in hoc orbe, variatio

tus horarius in loco quovis ſuæ orbitæ exprimetur per quantitatem $\frac{m^2 s}{m \pm e^2}$.

Sit enim T Terra; P, Sol; T P p area horæ tempore deſcripta, ejus areæ valor ubivis erit ſemper idem, ſit p q arcus ra-

dio T p deſcriptus, qui ob exiguitatem ſumi poteſt ut ipſum perpendiculum in baſim P T demiſſum, ideoque ob areas ubivis æquales is arcus erit ubivis inverſe ut baſis T P, ſed numerus graduum ejus arcus p q eſt directè ut is ipſe arcus & inverſe ut ejus radius T p ſive T P, ergo numerus graduum ejus arcus p q eſt in ratione duplicatâ inverſa radii T P, is verò numerus exprimit motum Solis horarium, ergo Solis motus horarius, eſt inverſè ut quadratum radii T P; cum ergo in diſtantiâ mediocri eſt T P $= m$, in quâvis aliâ diſtantiâ eſt T P $= m \pm e$, ergo eſt $\frac{1}{m^2}$ ad $\frac{1}{(m \pm e)^2}$ ut s ad $\frac{s m^2}{(m \pm e)^2}$ quod exprimit motum horarium Solis in quâvis diſtantiâ T P.

In diſtantiâ mediocri evaneſcit quantitas $\pm e$ ideoque motus horarius illic evadit $\frac{m^2 s}{m^2} = s$ ſecundum hypotheſim.

2°. Poſito Lunam ſemper moveri motu ſuo horario mediocri, qui dicatur l, ſitque p ejus tempus Periodicum inter fixas, Duratio menſis Synodici quovis in loco orbitæ telluris circa Solem, exprimetur per quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2} \times l p}{m \pm e^2 l - m^2 s}$ ſive diviſâ hâc quantitate per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$ fiet menſis Synodicus ut $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2 l e}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ 114

Nam dicatur x numerus graduum quem Sol emetitur durante quovis menſe Synodico, numerus graduum quem Luna eodem tempore emetietur erit $360 + x$, erit ergo motus horarius Lunæ l ad motum horarium Solis $\frac{m^2 s}{m \pm e^2}$ ut $360 + x$ ad x, & dividendo $m^2 l \pm 2 m e l + e^2 - m^2 s$ ad $m^2 s$ ut 360 ad x, itaque erit $x = \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$. Hinc cùm Lunâ percurrat 360 gr. tempore p, abſolvet 360 gr. $+ \frac{360 m^2 s}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 - m^2 s}$ tempore $p + \frac{m^2 s p}{m^2 l \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ ſive reductione facta, tempore $\frac{m^2 l p \pm 2 m e l p + e^2 l p - m^2 s p + m^2 s p}{m^2 \pm 2 m e l + e^2 l - m^2 s}$ ſive $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}} \times \frac{l p}{m^2}$ quæ quantitas diviſa per conſtantem $\frac{l p}{m^2}$, relinquit quantitatem $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l - s \pm \frac{2 e l}{m} + \frac{e^2 l}{m^2}}$ quæ erit ut duratio menſis Synodici in diſtantiâ quavis $m \pm e$. Q. E. D.

In diſtantia mediocri evaneſcente quantitate $\pm e$ menſis Synodicus erit $\frac{m^2 l p}{m^2 l - m^2 s} = \frac{l p}{l - s}$ & erit ad menſes Synodicos in

aliis

tio paulo major esse potest vel paulo minor quam pro regulâ hic allatâ: sed excessum vel defectum ab astronomis per phænomena determinandum relinquo.

114. aliis quibusve distantiis ut $\frac{m^2}{l-s}$ ad $\frac{\overline{m \pm e^2}}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$.

3°. Variatio maxima erit ubivis ut $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$: Nam, ex hâc ipsâ Propositione variatio maxima est directè ut quadratum temporis Synodici & inversè ut cubus distantiæ sive in ratione compositâ quantitatum $\frac{\overline{m \pm e^4}}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$ & $\frac{1}{m \pm e^3}$ ideoque ut $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$.

Coroll. In distantiâ mediocri variatio maxima exprimitur per quantitatem $\frac{m}{l-s^2}$ & eam superius determinavit Newtonus ferè 35′ 10″ sive 2110″; Hinc itaque ut habeatur variatio maxima in quovis orbitæ Solaris puncto fiat ut $\frac{m}{l-s^2}$ ad $\frac{m \pm e}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}}$ ita 2110″ ad variationem maximam quæsitam, quæ itaque erit $\frac{\overline{l-s^2}}{l-s \pm \frac{2el}{m} + \frac{e^2 l^2}{m^2}} \times \frac{m \pm e}{m} \times 2110''$, (sive accuratius × 2109″.8.)

Ratio autem motus horarii Lunæ l ad motum horarium Solis s obtinetur ex tempore Periodico utriusque inter stellas fixas, itaque cum tempus Periodicum Lunæ sit $27^d.\ 7^h.\ 43'$ & annus sidereus Solis $365^d.\ 6^h.\ 9'$ & velocitates mediocres sive motus horarii mediocres sint inversè ut ista tempora Periodica erit l ad s ut 1.081 ad 0.81 ideoque erit $l - s = 1$, & Variationis maximæ expressio fiet $\frac{1}{1 \pm \frac{2.162\,e}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}} \times \frac{m \pm e}{m} \times$ 2109.8″. Cumque m sit 1000 & in Apogæo $\frac{m+e}{m}$ sit $1.016\frac{15}{16}$ in Perigæo vero sit $\frac{m-e}{m} = .983\frac{15}{16}$ hæc ducta in 2109.8″ efficiunt in Apogæo 2145.5″ & in Perigæo 2074″, sed cum sit $e = 16\frac{15}{16}$ quantitas $\frac{2.162\,e}{m}$ evadit .036618875 & $\frac{1.081\,e}{m^2}$ est .00031027. Unde quantitas $1 + \frac{2.162e^2}{m} + \frac{1.081\,e^2}{m^2}$ fit 1.03665 & $1 - \frac{2.162e}{m} + \frac{1.081e^2}{m^2}$ fit .9637.

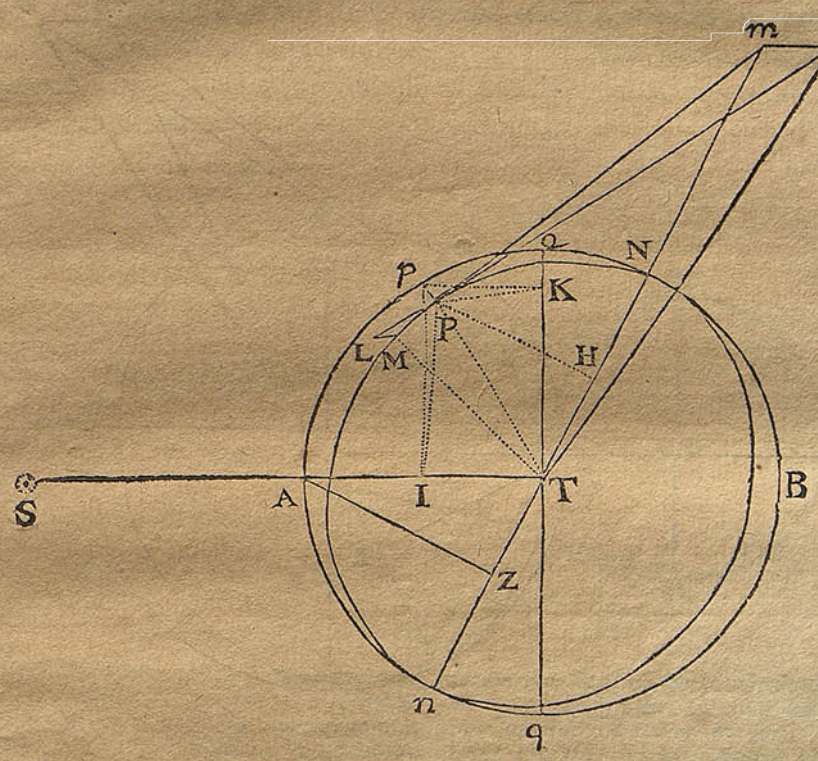
Dividatur ergo bis 2145′.5″ per 1.037 quotiens dabit variationem maximam in Apogæo 1994″ sive 33′. 14″, & dividatur bis 2074″ per .964 quotiens dabit variationem maximam in Perigæo quam proximè 2231 sive 37′ 11″.

PRO-

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe circulari.

Designet *S* solem, *T* terram, *P* lunam, *NPn* orbem lunæ, *Npn* (d) vestigium orbis in plano ecliptica; *N*, *n* nodos,



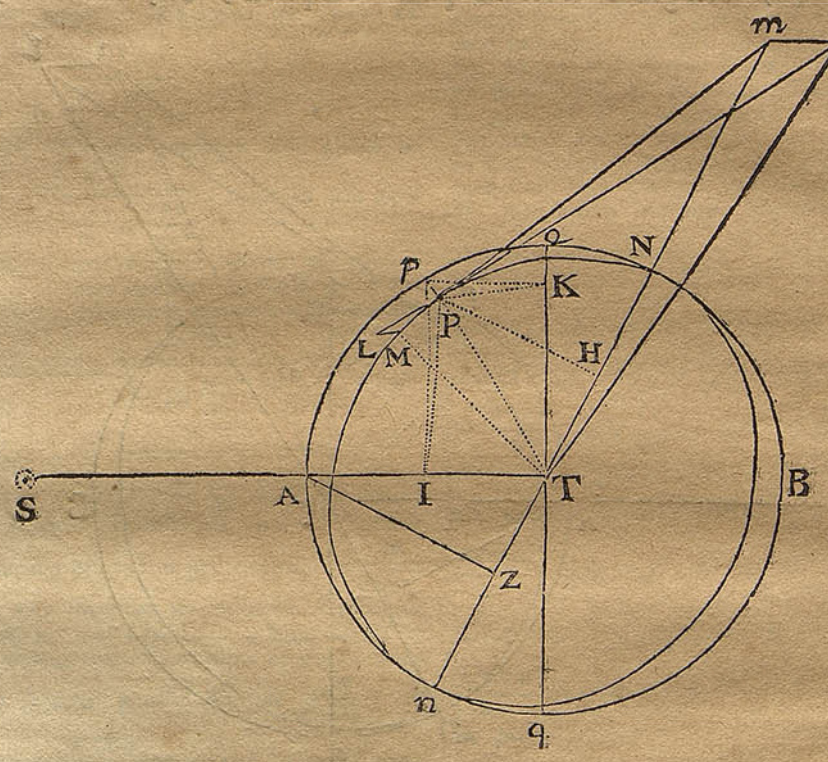
nTNm lineam nodorum infinitè productam; *PI*, *PK* perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum ecliptica; *A*, *B* syzygias lunæ in plano ecliptica; *AZ* perpendiculum in lineam nodorum *Nn*; *Q*, *q* quadraturas lunæ in plano ecliptica, & *pK* perpendiculum in lineam

Qq

(d) * *Vestigium orbis in plano Ecliptica.* Hoc est orbis genitus demittendo ex singulis punctis orbitæ Lunaris perpendicula ad planum Ecliptica. 114

DE MUNDI SYSTEMATE.

Q q quadraturis interjacentem. Vis solis ad perturbandum motum (per prop. xxv.) duplex est, altera lineæ *L M* in schemate propositionis illius, altera lineæ *MT* proportionalis. Et luna vi priore in terram, posteriore in solem secundum lineam rectæ *ST* à terrâ ad solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior



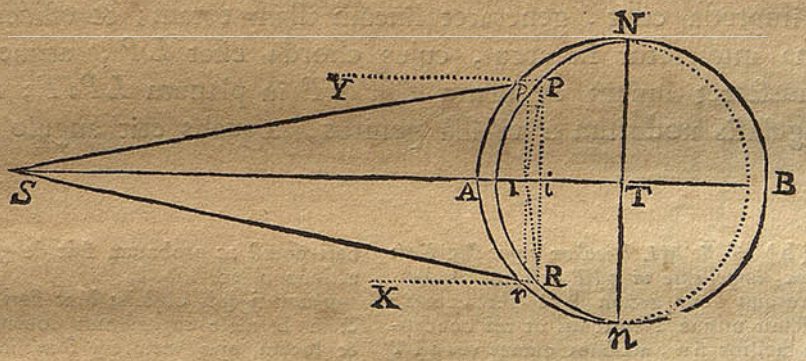
L M agit secundum planum orbis lunaris, & propterea situm plani nil mutat. Hæc igitur negligenda est. Vis posterior *MT* quâ planum orbis lunaris perturbatur eadem (e) est cum vi $3PK$ vel $3IT$. Et (f) hæc vis (per prop. xxv.) est ad vim

314. (e) * *Eadem est cum vi* $3PK$ (Prop. XXV. not. u).

(f) * *Et hæc vis est ad vim qua Lunâ in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset.* Vis TMT est ad vim ML ut est $3PK$ sive $3IT$ ad Radium, (Prop. XXVI. not. x); vis ML est ad vim quâ Luna circa terram tempore suo Periodico revolvi posset ut 1 ad 178.725 (Prop. XXV. not. r). Ergo, ex æquo, & conjunctis rationibus, est vis MT ad vim quâ Luna circa terram tempore suo Periodico revolvi posset ut est $3IT$ ad Radium circuli multiplicatum per 178.725.

quâ lunâ in circulo circa terram quiescentem tempore suo periodico uniformiter revolvi posset, ut $3IT$ ad radium circuli multiplicatum per numerum 178,725, sive ut IT ad radium multiplicatum per 59,575. Cæterum in hoc calculo, & eo omni qui sequitur, considero lineas omnes à lunâ ad solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ à terrâ ad solem ducitur, (g) propterea quod inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus, quantùm auget in aliis; & nodorum motus mediocres quærimus, neglectis istiusmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

Designet



(g) * *Propterea quod Inclinatio tantùm ferè minuit effectus omnes in aliquibus casibus quantùm auget in aliis.* Exempli gratiâ, sint nodi in quadraturis, spectetur-que Luna in punctis P & R æqualiter à quadraturis N & n distantibus & vis obliqua Solis SP, SR in ipsam agere concipiatur, quæ in duas dividatur, unam Parallelam lineæ ST, secundum directiones PY, RX agentem, alteram huic perpendicularem secundum directiones PI, RI; de effectu vis secundum directiones PY, RX agentis in hoc Problemate actum est; directiones verò PI, RI sese mutuo compensant; dividatur enim rursus vis PI, RI in duas vires unam Pi, Ri secundum planum orbitæ Lunaris agentem ideoque nodorum positionem non turbantem, alteram Pp, Rr ipsi perpendicularem; hæc nodorum positionem, planique inclinationem afficiet, sed cum de plani inclinatione hic non agatur, manere plani inclinationem fingatur, itaque vis Pp, Rr dum admovet puncta P & R ad Ecliptica efficit ut nodis viciniores videantur seu ut nodi versus puncta illa moveri censeantur, ideoque actio in punctum P efficit ut nodus N in consequentia feratur & actio in punctum R efficit ut nodus n in antecedentia fertur, ideoque, Solis actio obliqua in punctum P motum retrogressivum nodi natum ex vi PY parallela lineæ ST tantùm minuit quantùm eadem actio obliqua in punctum R auget eum motum retrogressivum natum ex vi RX. 1143

DE MUNDI SYSTEMATE.

Designet jam PM arcum, quem luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam cujus dimidium luna, impellente vi præfatâ $3IT$, eodem tempore describere posset. (h) Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad m & l, ubi secent planum eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela est plano eclipticæ, ideoque cum rectâ ml quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP, lmP. Jam cum MPm sit in plano orbis, in quo luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per orbis illius nodos N, n ductam. Et quoniam vis quâ dimidium lineolæ LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, generaret lineam illam totam; & efficeret ut luna moveretur in arcu, cujus chorda esset LP, atque ideo transferret lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis nodorum à vi illâ genitus, æqualis erit angulo mTl. Est

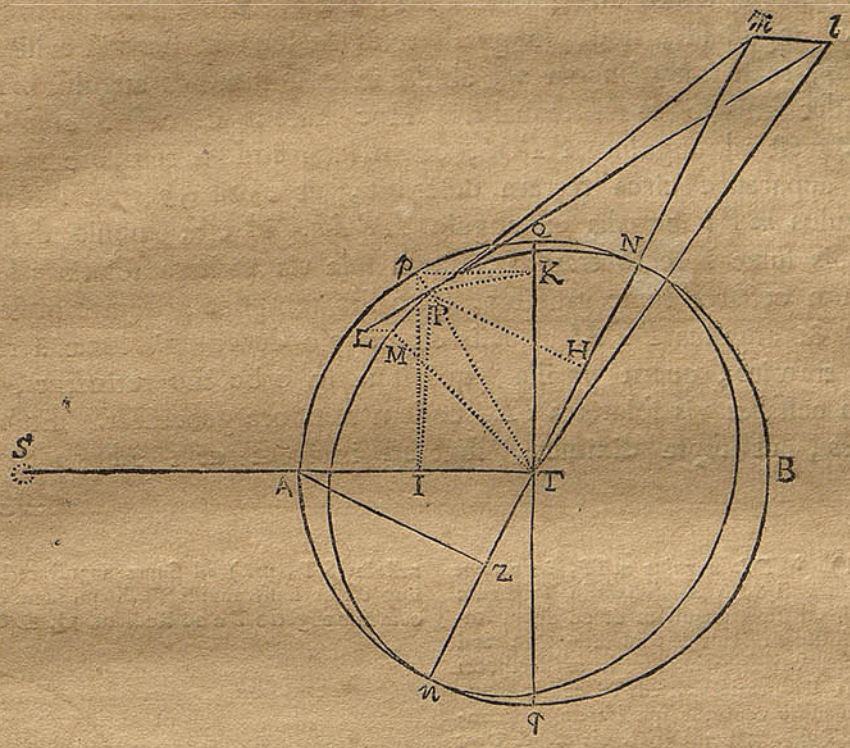
114. (h) * *Et ML lineolam cujus dimidium Luna, impellentè vi 3IT* describeret tempore quo Luna arcum PM percurreret; Assumit utique Newtonus ut rei conceptus facilior fiat, actiones omnes vis 3IT quæ exercitæ fuerunt dum arcus PM percurritur *simul & semel in loco P impressas esse*, sicque motum Lunæ ex P motæ, esse compositum ex velocitate acquisitâ secundum Tangentem, & ex velocitate ultimo genitâ per actionem vis 3IT agentem tempore æquali illi quo describitur arcus PM, ita ut Lunâ sequatur Diagonalem Parallelogrammi cujus unum latus sit PM alterum vero Parallelum & æquale lineæ LM; cum autem vis 3IT exiguo temporis intervallo sensibiliter non mutetur, toto tempore quo describeretur lineola PM ea vis pro uniformi adsumi potest, hinc via quæ describitur per velocitatem uniformiter crescentem ab eâ vi 3IT genitam est dimidia ejus viæ quæ describeretur per ultimam velocitatem in fine temporis PM genitam, & uniformem manentem toto tempore PM, quod eâdem ratione probari|potest ac probatum fuit de gravitatis actione n. 30. Lib. I.

Quod si quis objiciat hinc fieri ut punctum L male repræsentet locum Lunæ, & locum ejus veriorem fore in medio inter M & L, respondemus solutionem hujus Problematis ex eâ positione Lunæ neutiquam pendere, hæc enim solutio duabus constat partibus, priori statuitur ratio motus nodorum in quibusvis punctis P orbitæ Lunaris, & hæc ratio eadem est, sive ubique sumatur tota ML aut ubique ejus dimidium, dimidia enim sunt totis proportionalia; In secunda solutionis parte determinatur quantitas motus nodorum in syzygiis ipsis, respectu motus Lunæ in suâ orbita, & in hâc determinatione nihil deducitur ex magnitudine lineæ LM, sed tota hæc solutionis pars pendet ex proportione ipsius vis 3IT ad vim centripetam Lunæ, unde nullus error metuendus est in hoc calculo ex hâc falsâ suppositione Lunam in puncto L versari cum in medio inter L & M collocanda fuisset.

SCD LYON 1

Eſt autem ml ad mP ut ML ad MP, ideoque cum MP ob datum tempus data ſit, eſt ml ut rectangulum $ML \times mP$, id eſt, (i) ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, ſi (k) modo angulus TMl rectus ſit, eſt ut $\frac{ml}{Tm}$, & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id eſt (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, ideo-

LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROBL. XI.



(i) * *Ut Rectangulam IT × mP.* Linea ML eſt duplum viæ quæ dato tempore per actionem 3IT percurritur, vis illa 3IT dato illo tempore uniformis manere cenſetur, itaque in diverſis punctis P, viæ eodem dato tempore per actiones 3IT percurſæ ſunt ut illæ vires 3IT, ſive ut IT, ergo ML ejus viæ duplum eſt etiam ut IT, & MI × mP eſt ut IT × mP. 114

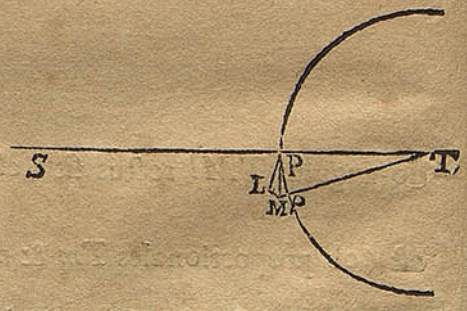
(k) * *Si modo angulus Tml ſit rectus* cum angulus mTl ſit admodum exiguus, ſi angulus Tml ſit rectus, uſurpari poterit recta ml pro arcu circuli cujus radius eſt Tm ideoque (154. lib. 1.) angulus mTl eſt ut $\frac{ml}{Tm}$.

De Mundi Systemate.

que ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml, seu STN obliquus sit, (l) erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad radium, seu AZ ad AT. Est igitur velocitas nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

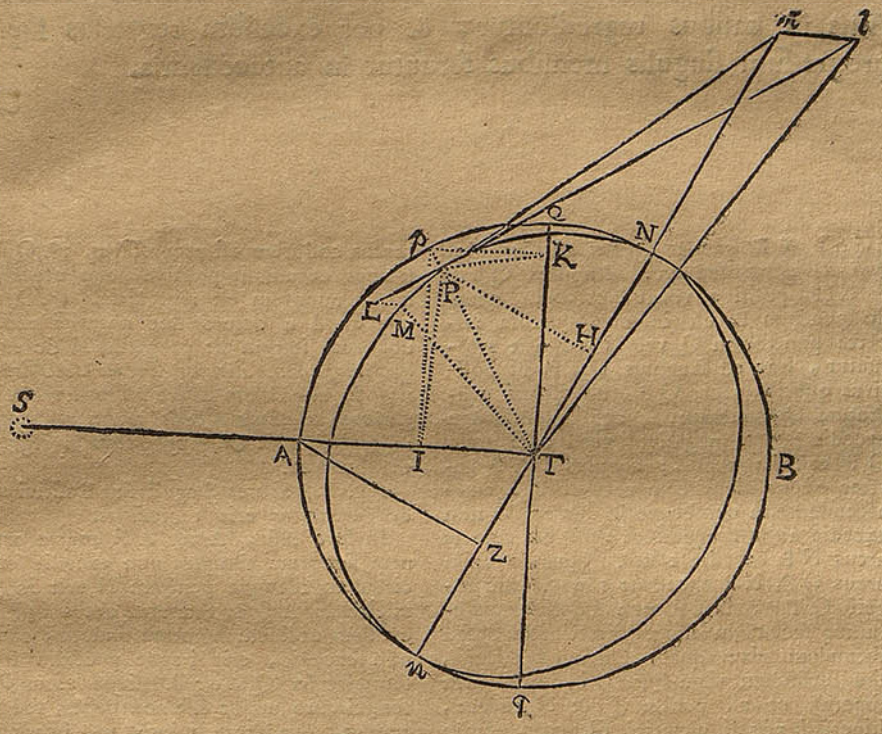
Si anguli illi, nodis in quadraturis & luna in syzygiâ existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM, quem luna eodem tempore motu suo apparente circa terram describit, ut 1 ad 59,575. Nam angulus mPl æqualis est angulo LPM, id est, angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem sola vis præfata solaris $3IT$, si tum cessaret lunæ gravitas, dato illo tempore generare posset; (m) & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis lunæ à recto tramite, quem vis illa, quâ luna in orbe suo retinetur, si tum cessaret vis solaris $3IT$, eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus, sunt ad invicem ut 1 ad 59,575. Ergo

114. (l) * *Erit angulus mTl, in ratione sinus anguli STN ad radium* in Triangulo Tml, est sinus anguli mTl ad sinum Anguli Tml ut latus ml ad latus Tl; Sed propter exiguitatem lateris ml respectu lateris Tl, ratio ml ad Tl eadem semper manere censetur qualiscumque sit angulus Tml, manentibus lineis ml & Tm; in angulo enim maximo linea Tl evadit $Tm + ml$, in minimo $Tm - ml$, est verò ml quantitas evanescens respectu Tm, hinc illius incrementi aut decrementi ml ratio nulla est habenda; Itaque manente quantitate ml qualiscumque sit angulus Tml, ratio ml ad Tl eadem est, itaque etiam manet ratio sinus anguli mTl ad sinum anguli Tml, sive etiam, cum anguli minimi, sint ut eorum sinus, anguli mTl in variâ inclinatione lineæ datæ ml ad lineam datam Tm sunt inter se ut sinus Angulorum Tml, est ergo angulus mTl, in quâvis magnitudine anguli Tml ad eum angulum mTl quando angulus Tml est rectus ut sinus anguli Tml (vel, ut sinus anguli ITn ipsi æqualis ob parallelas ST, ml) ad sinum anguli recti, hoc est ut sinus anguli STN qui idem est cum sinu anguli STn ad Radium. Q. E. O.



(m) * *Et angulus PTM æqualis est angulo deflexionis.* Angulus MPp est angulus deflexionis de quo nunc agitur Triangula verò MPp, MPT sunt similia ob angulum communem PMT, & angulos rectos TPM & PpM, hinc anguli residui PTM, MPp sunt æquales.

(n) Ergo cum motus medius horarius lunæ reſpectu fixarum ſit $32^{I}. 56^{II}. 27^{III}. 12^{IV}\frac{1}{2}$, motus horarius nodi in hoc caſu erit $33^{II}. 10^{III}. 33^{IV}. 12^{V}$. Aliis autem in caſibus motus iſte horarius erit ad $33^{II}. 10^{III}. 33^{IV}. 12^{V}$. ut contentum ſub ſinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (ſeu diſtantiarum lunæ à quadraturâ, lunæ à nodo, & nodi à ſole) ad cubum radii. LIBER TERTIUS. PROP. XXX. PROB. XI.



(n) * *Ergo* &c. Iſti anguli deflexionis debent eſſe ut vires illas deflexiones producentes, in hoc enim caſu, utrâque vis agit perpendiculariter ad Tangentem PM hinc lineolæ Mp, ML per eas vires genitæ tempore eodem, eo nempe quo percurretur Tangentis portio PM, debent eſſe ut ipſæ illæ vires; eæ verò lineolæ ſumpto PM pro radio ſunt Tangentes angulorum deflexionis pPM, MPL, & anguli quam minimi ſunt ut ipſorum Tangentes, ergo anguli illi deflexionis ſunt ut vires illas producentes, motus autem horarii Lunæ & nodorum ſunt ipſi anguli PTM & mTl, qui ſunt ex demonſtratis æquales angulis deflexionum MPp, MPL, ergo motus horarii ſunt ut vires illas deflexiones producentes. Q. E. O. 114

DE MUNDI SYSTEMATE.

(o) Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut nodi progrediantur quoties luna inter quadraturam alterutram & nodum quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Co-

114 (o) * *Et quoties signum alicujus Anguli de affirmativo* &c. Angulos QTP & NTP, positivos vocat Newtonus, quando punctum P est in consequentia respectu punctorum Q vel N ad quæ referuntur, hoc est Angulus QTP est positivus quoties arcus QP, ab ultimâ quadraturâ Q numeratus in consequentia non excedit 180gr. negativus verò cum arcus QP excedit 180gr.; angulus NTP pariter est positivus cum arcus NP à nodo ascendente in consequentia numeratus non excedit 180gr. negativus verò est cum is arcus NP excedit 180gr. Quando enim arcus QP, NP excedunt 180gr. tunc anguli QTP, NTP non amplius numerantur secundum Lunæ directionem, seu secundum viam quam Luna est emensa, sed secundum viam quæ ipsi describenda superest ut ad puncta Q & N redeat, hinc illi anguli negativi dicuntur, eorum respectu qui secundum viam à Lunâ descriptam mensurantur.

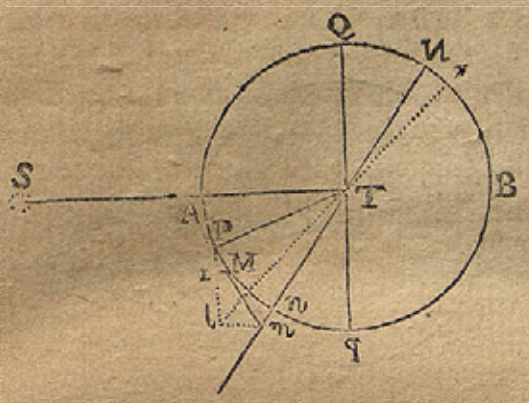
Angulus verò STN positivus dicitur quando arcus AN à loco conjunctionis Lunæ cum Sole usque ad nodum contra ordinem signorum numeratus, est minor 180gr., negativus verò dicitur cum excedit 180gr., quia, cum nodi moveantur contra ordinem signorum sive in antecedentia, angulus STN primo casu exprimit viam nodi à syzygia, secundo casu viam quam emetiri debet ut ad syzygiam redeat.

Probandum autem 1°. quod si tres illi Anguli QTP, NTP, STN sint positivi motus nodorum est regressivus: 2°. Quod si unus eorum sit negativus reliqui positivi motus nodorum est progressivus. 3°. Quod si unus eorum sit positivus duo negativi, motus nodorum est regressivus. 4°. Denique quod si omnes sint negativi motus nodorum iterum sit progressivus, sic enim *quoties signum alicujus anguli de affirmativo in negativum deque affirmativo in negativum mutatur debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari.*

Art. 1. Si tres Anguli sint Positivi nodorum motus erit regressivus.

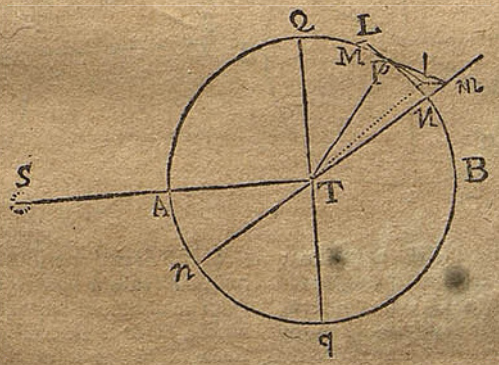
In hoc casu, Arcus AN contra ordinem signorum sumptus non excedit semicirculum ideoque punctum N erit in semicirculo AQB; Præterea arcus QP secundum ordinem signorum sumptus, 180gr. non excedit, erit itaque punctum P in semicirculo QAq; Denique arcus NP semicirculo major esse non debet, sed potest vel quadrante minor vel quadrante major, sit NP quadrante minor ut in figurâ Textus, in quâ reliquæ hujus casus conditiones occurrunt, ex ipsâ hujusce propositionis constructione liquet quod ductâ ML quæ exprimit actionem Solis, productâ MP quæ lineæ nodorum occurrit in m, productâ LP quæ occurrit plano Eclipticæ in l, ita ut ml sit parallela lineæ ML, cum L sit versus Solem respectu puncti M & lineæ MPm, LPl esse decussent punctum l erit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit quam angulus ATm ergo nodus promotus est contra ordinem signorum, hoc est ejus motus est regressivus.

Sit



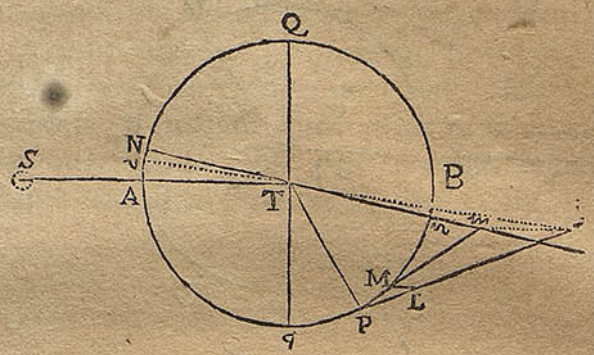
Sit NP quadrante major, tum lineæ PM, PL non amplius erunt retroproducendæ ut cum lineâ TN concurrant, sed antrorsum productæ concurrent cum ejus productione Tn, & quoniam sese non decussant, manebit punctum l propius Soli quam punctum m, & angulus ATl minor erit angulo ATm, ideoque productâ lineâ lT in V, angulus ATV complementum ad duos rectos anguli ATl, major erit angulo ATN complemento ad duos rectos anguli ATm, ergo nodus N promotus est contra ordinem signorum ut prius; Ergo ubicumque sit punctum P si tres anguli QTP, NTP, STN sint positivi motus nodi est regressivus. 114.

Art. 2. Mutetur horum Angulorum quivis ex positivo in negativum manentibus positivis angulis duobus reliquis motus nodorum ex regressivo progressivus fiet.

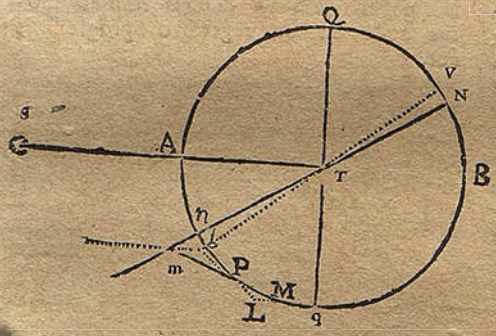


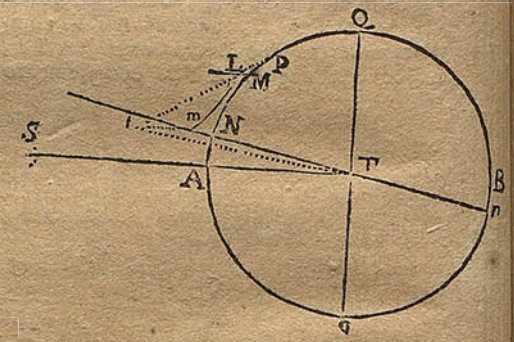
Cas. 1. Fiat angulus QTP negativus, hoc est, punctum P sit in semicirculo QBq, manente positivo angulo STN ita ut N sit in semicirculo AQB, & pariter manente positivo angulo NTP; observandum quod lineolâ ML in semicirculo QBq positionem habet oppositam illi quam habebat in semicirculo QAq ut constat ex Prop. LXVI. lib. 1. ita ut punctum L sit à Sole remotius quam punctum M; Itaque si PN sit minor quadrante, lineæ LP retroproducendæ erunt, & punctum l erit propius Soli quam punctum m; ideoque angulus ATl minor erit angulo ATm, ergo (cum diminuatur angulus ATN qui sumitur contra ordinem signorum) nodus secundum ordinem signorum est promotus ejusque motus progressivus est.

De Mundi Systemate.



114. Si verò NP sit major quadrante antrorsum productis lineis PM, PL punctum l manebit remotius à Sole quam punctum m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATm, productâ itaque lT in V, angulus lTV anguli AT lcomplementum minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A in consequentia processerit itaque motus nodi est ut prius progressivus.





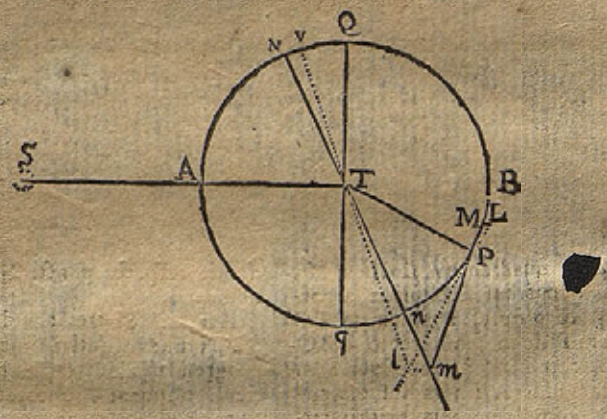
Cas. 2. Sit angulus NTP negativus; hoc est sit punctum N in consequentia respectu puncti P, sit vero QTP positivus hoc est sit punctum P in semicirculo QAq & pariter sit STN positivus ita ut N sit in semicirculo AQB, si NP (secundum consequentia) sit minor tribus quadrantibus, P distabit à puncto n minus quadrante, ideoque retroproductis lineis MP, lP in m & l, cum L sit soli propius quam M, erit l à sole remotius quam m, ideoque angulus ATl major erit angulo ATn, & angulus ATV prioris complementum minor erit angulo ATN qui est anguli ATm complementum; processit ergo nodus ab N versus A, motus ergo nodi est progressivus.

Si NP sit major tribus quadrantibus, P minus quadrante à puncto N distabit, cumque N sit in consequentia respectu puncti P ut & puncta M & L antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut plano Ecliptica occurrant in m & l, & cum L sit Soli vicinius quam M pariter l erit Soli vicinius quam m, hinc angulus ATl minor erit angulo ATN, nodus ergo ab N versus A processit & motus nodi est progressivus.

Cas. 3. Sit angulus STN negativus positivis existentibus angulis QTP, NTP. Sit NP minor quadrante, retroproducendæ sunt lineæ PM, PL ideoque l erit remotior à Sole, quam m, & angulus

lus ATI major erit quam ATm; vel ATN, cum ergo N sit in consequentia respectu puncti A, quia angulus STN est negativus, punctum I magis adhuc in consequentia processerit, motus ergo nodi erit progressivus. Sit NP major quadrante, antrorsum producendæ erunt lineæ PM, PL ut cum Ecliptica concurrant, à parte nodi n ideoque L erit propius Soli quam m, & angulus ATI minor erit angulo ATn; ideoque angulus ATV major erit quam ATN, ergo processit nodus ex N in V, secundum consequentia. LIBER TERTIUS. PROP. XXX.

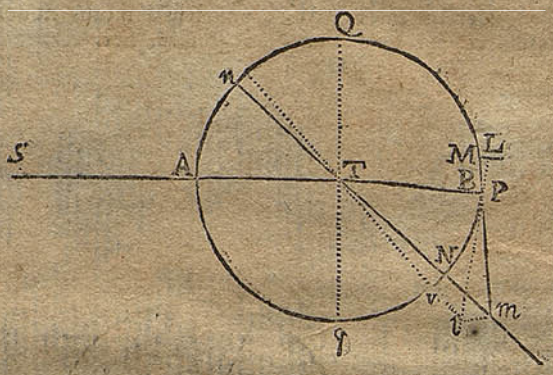
Art. 3. Sint duo ex tribus Angulis QTP, NTP, STN negativi, tertius positivus, motus nodorum ex progressivo regressivus fiet. PROBL. XL.



Casus 1us. Sint QTP & NTP negativi, solus STN sit positivus, distet P à nodo N minus tribus quadrantibus, sive minus quadrante à puncto n, idque in consequentia, retro producendæ erunt lineæ PM, PL, ut PM lineæ nodorum occurrat in m, & LP in l vicinius Soli, hinc ATI minor erit ATm & ideo ATV major quam ATN sed punctum N est in antecedentia respectu puncti A, ergo V est in antecedentia respectu puncti N, ergo nodus regreditur; Distet P ab N plus tribus quadrantibus, antrorsum producendæ sunt lineæ PM, PL ut occurrant lineæ nodorum & I manebit à Sole remotius quam m & angulus ATI major erit angulo ATN regreditur ergo Nodus.

Cas. 2. Sint QTP & STN negativi, solus vero NTP positivus, sit NP minor quadrante, retroproductis lineis, cum L sit remotius à Sole quam M, erit I ob decussationem linearum propius Soli & angulus ATI sive ATV minor angulo ATN, sed quia hic angulus est negativus, complementa ad quatuor rectos erunt sumenda, & arcus AQPV major erit arcu AQPN ergo nodus regreditur.

De Mundi Systemate.



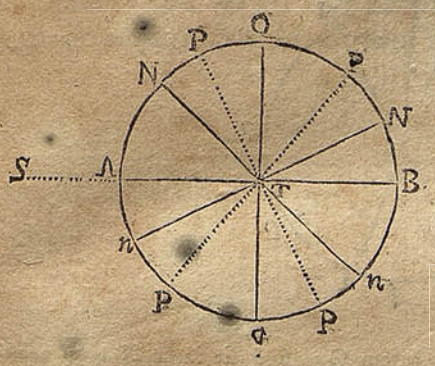
214. Sit NP m[illegible] quadrante, lineis PM, PL productis occurrent Ecclipticæ à parte puncti n, & propter angulum QTP negativum cum P sit in semicirculo qBQ erit l ut & L remotius à Sole quam m & M, ideo angulus ATn minor est angulo ATl & complementum prioris anguli ATN major est angulo ATV, sed A est in antecedentia respectu puncti N, ergo etiam V est in antecedentia respectu puncti N regreditur ergo nodus.

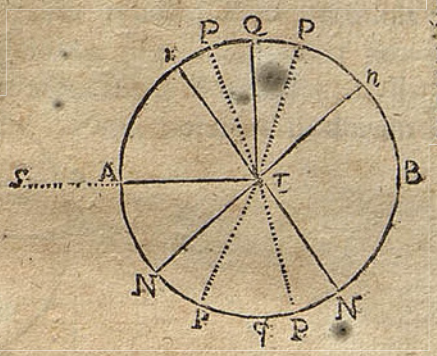
Cas. 3. Sint STN & NTP negativi, QTP vero positivus, punctum L est ubivis propius Soli quam M, si P minus tribus quadrantibus distet ab N retro producendæ sunt lineæ PM, PL, à parte puncti n & erit ATl majus quam ATn, sed quia STN est negativus, n est in semicirculo superiori AQB, & n est in antecedentia respectu A, ideoque l est in antecedentia respectu n, ut etiam V respectu N, regreditur ergo nodus; sit NP tribus quadrantibus major, lineæ PM, PL antrorsum sunt producendæ, l erit propius soli quam m & ATl sive ATV minor quam ATN, sed quia ATN est negativus, ideoque A est in Antecedentia respectu puncti N erit etiam V in Antecedentia respectu puncti N, regreditur ergo nodus.

Art. 4. Si tres anguli QTP, NTP, STN sint negativi motus ex regressivo progressivus fiet; ut Hypothesis hujus articuli obtineat, oportet ut nodus N & Luna P sit in quadrante qB; nam cum angulus QTP sit negativus, P debet esse in semicirculo qBQ; cum STN sit negativus, N debet esse in semicirculo AqB, & cum NTP sit negativus N debet esse in consequentia respectu P; ergo, N non potest versari in quadrante Aq, nec P in quadrante BQ: Antrorsum ergo erunt producendæ lineæ PM, PL ut Ecclipticæ occurrant, erit l remotius à Sole quam m, & angulus ATV major angulo ATN, sed hic angulus est negativus, sive est N in consequentia respectu A, erit ergo etiam V in consequentia respectu puncti N, nodus itaque progreditur.

His positis dico, quod motus nodi progressivus evadit dum Luna versatur inter alterutrum nodum & quadraturam ipsi proximam; quadraturam nodo proximam vocat Newtonus, si quadraturæ à nodo distantia quadrante major non sit.

Sit





Sit enim angulus A T N positivus, quoniam Luna sive punctum P est inter puncta Q & N vel q & n ex Hypothesi, alteruter ex angulis Q T P, N T P erit positivus alter negativus; nam sit N vel n in semicirculo Q B q, tum quia P est inter Q vel q & N vel n, erit P in eodem semicirculo Q B q, ideoque angulus Q T P erit negativus, sed angulus N T P erit positivus, nam quia P est inter N & Q aut q & n, & Q est in consequentia respectu N, erit etiam P in consequentia respectu puncti N, & pariter dum n versatur in semicirculo Q B q, n est in consequentia respectu puncti q & arcus N q in consequentia sumptus nec non arcus N P singuli minores erunt arcu N n sive minores semicirculo, ergo utroque casu angulus N T P erit positivus.

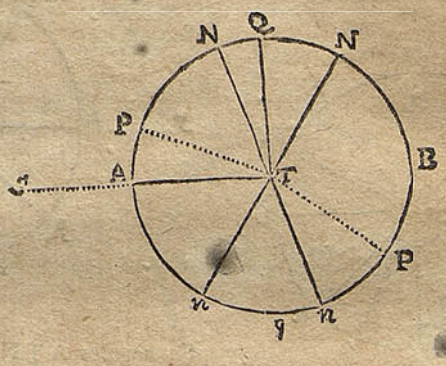
Manente A T N positivo sint N vel n in semicirculo Q A q, tum quia P est inter Q & N aut n & q, erit etiam P in semicirculo Q A q, ideoque angulus Q T P erit positivus, sed angulus N T P erit negativus, nam quia Q est in antecedentia respectu puncti N, P inter Q & N positum erit in antecedentia respectu N; & in casu quo P foret inter n & q quia q est in hac Hypothesi in consequentia respectu n, P foret etiam in consequentia respectu n, ideoque plus semicirculo à puncto N distaret utroque ergo casu angulus N T P negativus foret.

Sit angulus A T N negativus, sitque N in quadrante q A, vel n in quadrante A Q, & Luna P inter N & q vel n & Q, liquet angulum Q T P fore positivum; quia est P in semicirculo Q A q; angulus autem N T P erit etiam positivus, nam sit N in quadrante q A, q est in consequentia respectu N, ergo P quod est inter N & q est etiam in consequentia respectu N; sit n in quadrante A Q, cum n sit in consequentia respectu Q, erit etiam in consequentia respectu P, hinc arcus N P in consequentia minor erit semi-circulo, utroque ergo casu angulus N T P est positivus. = 114.

Itaque si angulus A T N sive S T N sit positivus, ubivis sit N in semicirculo A Q B & si angulus S T N sit negativus sed ita ut sit N in quadrante q A, quando Luna erit posita inter Nodum utrumvis N vel n, & quadraturam proximam unus è tribus angulis duntaxat erit negativus duo reliqui erunt positivi, itaque per articulum 2um. motus nodi progressivus erit.

Existente verò angulo S T N negativo, & N in quadrante q B vel n in quadrante B Q Luna verò posita inter utrumvis nodum & quadraturam proximam reliqui duo anguli Q T P, N T P negativi erunt; liquet enim facile punctum P in hâc hypothesi versari in semicirculo q B Q ideoque angulum Q T P esse negativum, præterea quia q est in antecedentia respectu N ex hypothesi, P est etiam in antecedentia respectu N, & quia Q est in consequentia respectu n, erit etiam P in consequentia respectu n, ideoque punctum N plus semicirculo à puncto P distabit, itaque sive sit P inter q & N sive inter n & Q in semicirculo q B Q tres anguli erunt negativi, sed per

DE MUNDI SYSTEMATE.



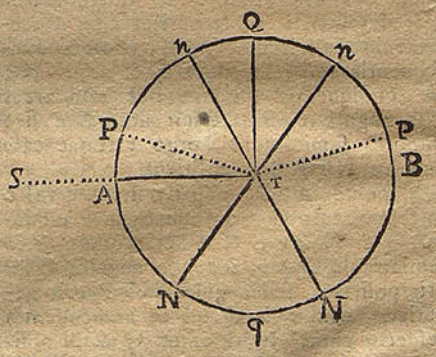
114. Art. 4. eo casu motus nodi est progressivus; Ergo in omni casu, si Luna sit inter nodum & quadraturam proximam nodi progrediuntur.

In omnibus aliis casibus motus nodi est regressivus; Nam quando omnes anguli sunt positivi, vel quando duo anguli sunt negativi & tertius positivus motus nodi regressivus est per Art. 1. & 3., alterutrum autem evenire necesse est cum P non est inter nodum & quadraturam proximam; Hoc enim posito, sit ut prius angulus STN positivus & N in quadrante QTA, & P ubivis inter N & remotiorem quadraturam q, vel inter n & remotiorem quadraturam Q; si P sit inter N & q angulus QTP est positivus siquidem P est in semicirculo QAq, & quia N est nunc inter P & Q, & N est in consequentia respectu Q, erit P in consequentia respectu N ergo angulus NTP est positivus; si P sit inter n & Q angulus QTP est negativus, sed & pariter angulus NTP, nam cum P sit in consequentia respectu n plus semicirculo à puncto N distabit.

Sit N ubivis in quadrante BTQ, & P inter Q & n vel inter q & N primo casu omnes angulos fore positivos, altero angulos QTP & NTP fore negativos ut in præcedenti demonstrabitur.

Denique angulus STN sit negativus, & P non sit inter quadraturam & nodum sed alibi ubivis, alteruter ex angulis QTP, NTP positivus erit negativus alter; sit N in quadrante ATq & P in arcu QAN (quadrante major) erit QTP positivus & NTP negativus, siquidem P est in antecedentia respectu N, sit P in arcu qBn erit QTP negativus, sed NTP positivus nam arcus NP in consequentia sumptus semicirculo minor erit.

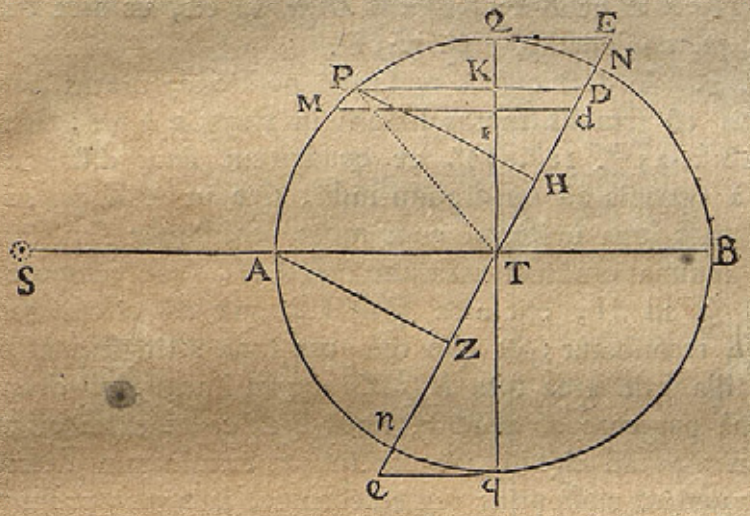
Sit N in quadrante qTB, si P sit in arcu nq, angulus QTP positivus est sed angulus NTP negativus quia arcus Nn+nP semicirculo major est, si P sit in arcu NQ angulus QTP est quidem negativus, sed quia P est in consequentia respectu N minusque semicirculo distat, ergo angulus NTP est positivus; Hinc ubivis sit P si modo non sit inter nodum & quadraturam proximam, vel omnes anguli



erunt Positivi, vel duo simul negativi alter verò positivus.

Cum ergo arcus inter N vel n & quadraturam proximam, numquam excedat quadrantem, eoque sit sæpe minor; è contra verò, arcus inter N vel n & quadratu-

Corol. 1. Hinc si à dati arcus quam minimi PM terminis P & M ad lineam quadraturas jungentem Qq demittantur perpendicula PK, Mk, eademque producantur donec secent lineam nodorum Nn in D & d; erit motus horarius nodorum



ut area $MPDd$ & quadratum lineæ AZ conjunctim. Sunto enim PK, PH & AZ prædicti tres sinus. Nempe PK sinus distantiæ lunæ à quadraturâ, PH sinus distantiæ lunæ à nodo, & AZ sinus distantiæ nodi à sole: & erit velocitas nodi ut con-

draturam remotiorem numquam sit minor quadrante & sæpe eo major, majori parte revolutionis Lunæ, Nodi regrediuntur & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus nodi feruntur in Antecedentia.

Potuissent Articuli 4. supra demonstrati, ex solâ vi signorum Algebricorum deduci, eamque demonstrationis speciem adhibere videtur Newtonus; at alicui negotium facessere potuissent horum signorum mutationes in angulis spectatæ, in quibus cum angulus ad semicirculum crevit & maximus fit, mox negativus evadit, quod sane non eveniset si viæ descriptæ, non verò anguli considerati fuissent; Juvant Algebricæ illæ consequentiæ, in retegendis prompte Propositionibus iisque ad generalissimas expressiones revocandis, sed in nonnullis quæstionibus ad certitudinem plenam idearumque claritatem requiritur ut, per casuum enumerationem, illæ Algebricæ consequentiæ, velut ad lapidem Lydium explorentur. Cæterum, quamvis figuras unicuique casui proprias non delineaverimus, facile erit ex iis quæ sculptæ sunt, figuras deficientes imaginari aut describere. 114

DE MUNDI SYSTEMATE.

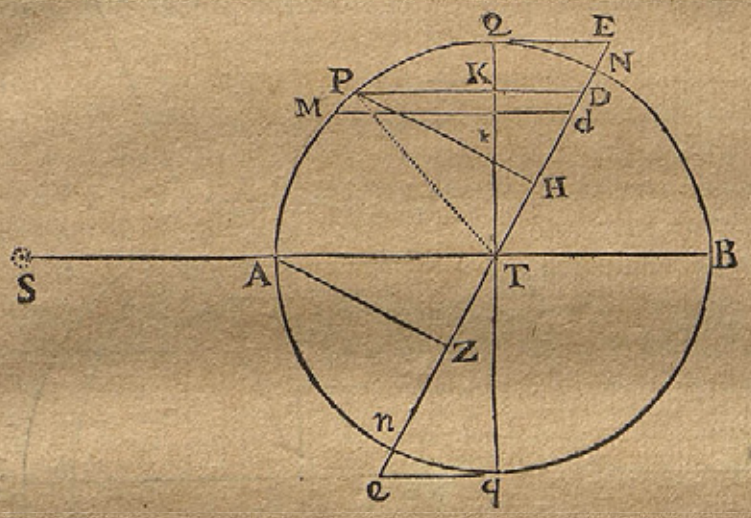
contentum $PK \times PH \times AZ$. Est (p) autem PT ad PK ut PM ad Kk, ideoque ob datas PT & PM est Kk ipsi PK proportionalis. Est & AT ad PD ut AZ ad PH, & propterea PH rectangulo $PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 2. In datâ quâvis nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in syzygiis lunæ, ideoque est ad $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}.$ ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii, sive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam si luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna pergit à Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein lunâ pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de areâ priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi luna versatur in syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio PT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentiâ totâ & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde nodi, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ quam habent in syzygiis lunaribus, spatium duplo majus describerent quam reverâ describunt; & propterea motus mediocris quocum,

si

(p) * *Est autem PT ad PK ut PM ad Kk* ex notissimâ circuli proprietate Radium esse ad ordinatam ut est fluxio arcus ad fluxionem abscissæ.

si uniformiter continuaretur, spatium à se inæquabili cum motu reverâ confectum describere possent, est semissis motus quem habent in syzygiis lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si nodi in quadraturis versantur, sit $33^{I}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.\ 12^{V}$, motus mediocris horarius in hoc casu erit $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{IV}.\ 36^{V}$. Et (q) cum motus horarius nodorum semper sit ut AZ *qu.* &



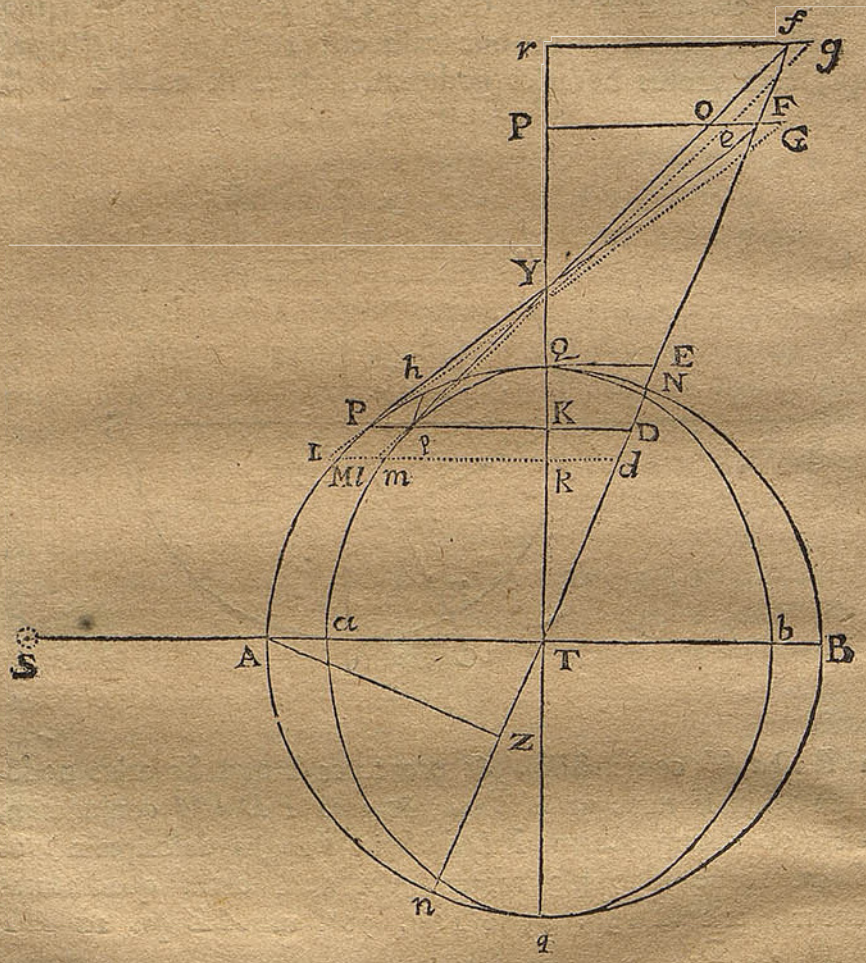
area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius nodorum in syzygiis lunæ ut AZ *qu.* & area $PDdM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PDdM$ in syzygiis descriptam) ut AZ *qu.* atque ideo hic motus, ubi nodi extra quadraturas versantur, erit ad $16^{II}.\ 35^{III}.\ 16^{IV}.\ 36^{V}.$ ut AZ *qu.* ad AT *qu.* *Q. E. D.*

(q) * *Et cum motus horarius nodorum sit &c.* per Corollarium præcedentem. 1143

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium nodorum lunæ in orbe elliptico (r).



Designet $Qpmaq$ ellipsin, axe majore Qq, minore ab descriptam, $QAqB$ circulum circumscriptum, T terram in utriusque centro communi, S solem, p lunam in ellipsi motam, & pm

(r) * *In orbe Elliptico* illo nempe orbe in quem figura circularis orbitæ Lunaris mutatur per actionem Solis, quique axem habet majorem ad axem minorem in ratione 70. ad 69. per Prop. XXVIII. hujusce.

pm arcum quem datâ temporis particulâ quam minimâ describit, *N* & *n* nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant circulo in *P* & *M*, & lineæ nodorum in *D* & *d*. (f) Et si luna, radio ad terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus horarius nodi in ellipsi ut area *pDdm* & *AZq* conjunctim.

Nam si *PF* tangat circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F* & *pf* tangat ellipsin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in *f*, (t) conveniant autem hæ tangentes in axe *TQ* ad *Y*; & si *ML* designet spatium quod luna in circulo revolvens, interea dum describit arcum *PM*, urgente & impellente vi prædictâ 3*IT*, seu 3*PK* motu transverso describere posset, & *ml* designet spatium quod luna in ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi 3*IT* seu 3*pK*, describere posset; & producantur *LP* & *lp* donec occurrant plano eclipticæ in *G* & *g*; & jungantur *FG* & *fg*, quarum *FG* producta secet *pf*, & in summo ordinatarum correspondentium ducantur Tangentes, illæ Tangentes in eodem axeos puncto concurrunt; Nam cum ordinatæ datam rationem servent (ex Hypoth.) oportet ut ipsarum fluxiones eamdem etiam servent rationem ita ut ratio fluxionis ordinatæ ad ordinatam ipsam, eadem sit in utrâque curvâ. Est verò semper fluxio ordinatæ ad ordinatam ut fluxio abscissæ ad subtangentem, ergo in hâc Hypothesi, ratio fluxionis abscissæ ad subtangentem est etiam eadem in utraque curva, sed fluxio abscissæ ipsa est eadem pro utrâque curvâ, ergo etiam subtangens eadem est, hinc itaque Tangentes in extremitatibus ordinatarum correspondentium ductæ in eodem puncto axem attingunt quando utriusque curvæ ordinatæ ad eadem axeos puncta pertinentes, constantem rationem servant: Notum autem est, ex not. 247. Lib. I, Quod si circulus describatur super axim Ellipseos, ordinatæ circuli & Ellipseos erunt inter se in ratione datâ axeos communis circulo & Ellipsi ad alterum axem, sive esse PK ad pK ut AT ad aT, hinc ergo Tangentes in punctis P & p ductæ axi occurrent in eodem puncto Y. 1143

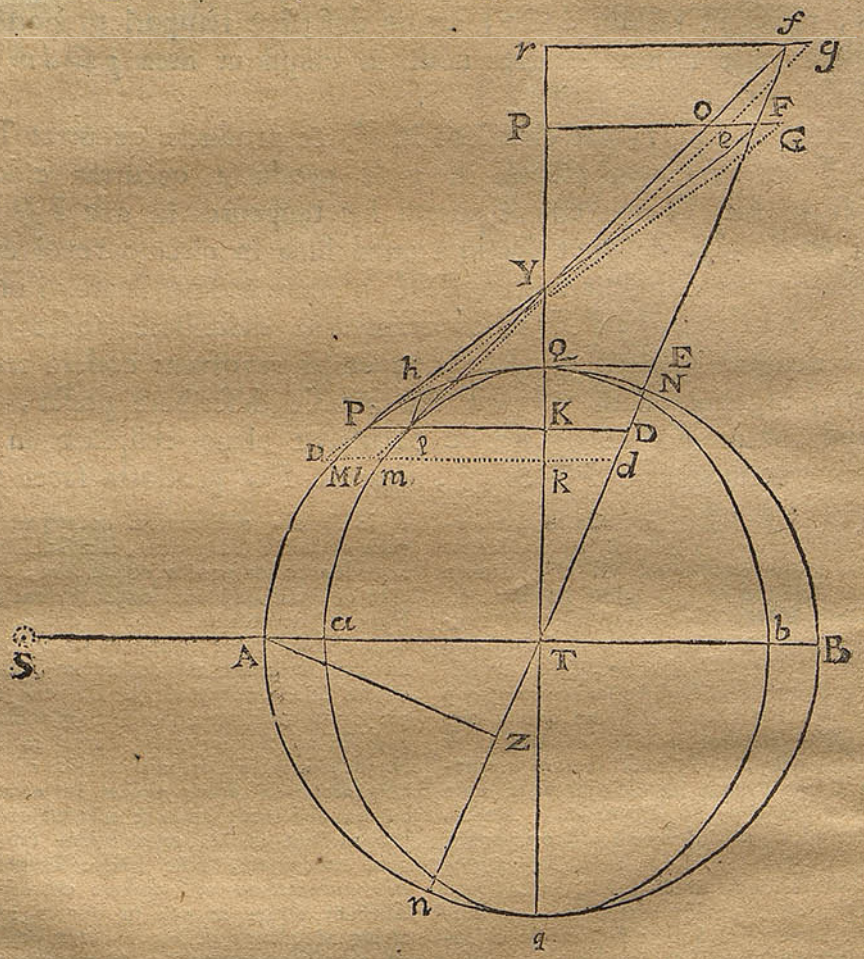
(f) * *Et si Luna radio ad terram ducto describat aream tempori proportionalem* &c. Liquet ex Propos. XXVIII. Lunam hanc Ellipsim de quâ agitur ita non describere ut areæ sint temporibus proportionales, sed hæc Hypothesis ad solutionem hujus Problematis erat necessaria, ut scilicet Luna possit fingi versari in puncto p ordinatæ PK eodem tempore quo si circulum describeret in ejus extremitate P versata esset, quod tunc tantùm obtineret si hæc Ellipsis ita describatur ut areæ sint proportionales temporibus; Notum enim est areas Ellipticas TpQ proportionales fore areis TPQ, areas TPQ proportionales esse arcubus PQ, arcus verò PQ proportionales temporibus, si quidem Luna citra Solis actionem in circulo lata, uniformiter moveretur.

Verum hæc falsa Hypothesis corrigitur in eâ solutionis hujus Problematis parte quæ post Corollarium adjicitur.

(t) * *Conveniant autem hæ Tangentes in axe TQ ad Y.* Liquet ex not. 257. Lib. I. Quod si duæ curvæ communem axem habentes, sint tales ut ipsarum ordinatæ datam inter se rationem servent,

DE MUNDI SYSTEMATE.

pg & TQ in c, e & R respectivè, & fg producta secet TQ in r. Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore ge-



nitum, ut PK ad pK, id est, ob similes figuras $PYKp$ & $FYRc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GL) ut pl ad pe, id est (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inversè ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR

& FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque ideo anguli, quos FG & fg subtenderent ad terram T, (u) æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente propositione exposuimus) sunt motus nodorum, quo tempore luna in circulo arcum PM, in ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus nodorum in circulo & ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fY ad cY, id est, si fg æqualis esset $\frac{ce \times fY}{cY}$. Verùm ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & (x) propterea angulus, quem fg reverâ subtendit, est ad angulum priorem quem FG subtendit, hoc est, motus nodorum in ellipsi ad motum nodorum in circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times fY}{cY}$, id est, ut $fp \times cY$ ad $fY \times cp$, seu fp ad fY & cY ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FY & FY ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, (y) ideoque ut area $Dpmd$ ad aream $DPMd$. Et propterea, cum (per corol. 1. prop. xxx.) area posterior & AZq conjunctim proportionalia sint motui horario nodorum in circulo, erunt area prior & AZq conjunctim proportionalia motui horario nodorum in ellipsi. *Q. E. D.*

Co-

(u) * *Atque ideo anguli quos FG & fg subtenderent ad terram T æquarentur inter se*, nam cum lineæ FG & fg sint inter se Parallelæ & proportionales lineis TF, Tf, recta TG producta transibit etiam per g, ideoque per eundem angulum videbuntur lineæ FG & fg ex terrâ T.

(x) * *Et propterea angulus quem fg reverâ subtendit est ad angulum priorem ut hæc fg ad priorem fg.* Cum enim linea fg sit minima, respectu lineæ Tg linea Tg eadem manere censenda est in utrâque magnitudine lineæ fg hic assumpta; sed in Triangulo utroque Tfg. Sinus anguli f est ad lineam Tg, ut sinus anguli fTg ad lineam fg; ergo cum maneat angulus f, & linea Tg; ratio sinus anguli fTg ad lineam fg erit data, sive quia anguli minimi sunt ut sui sinus, erit angulus quem fg reverâ subtendit ad angulum quem ficta fg subtendebat, ut vera fg ad fictam fg. 114.

(y) * *Ideoque ut area Dpmd ad aream DPMd* nempe propter communem altitudinem Kk; nam Trapezia pDdl, PDdL, pro Parallelogrammis assumi possunt quæ sunt ut Bases Dp, DP, & altitudines Kk conjunctim.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. Quare cum, in datâ nodorum positione, summa omnium arearum $pDdm$, quo tempore luna pergit à quadraturâ ad locum quemvis m, sit area $mpQEd$, quæ ad ellipseos tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integrâ, sit area ellipseos totius: motus mediocris nodorum in ellipsi erit ad motum mediocrem nodorum in circulo, ut ellipsis ad circulum; id est, ut Ta ad TA, seu 69 ad 70. Et propterea, cum (per corol. 2. prop. xxx) motus mediocris horarius nodorum in circulo sit ad $16^{''}. 53^{'''}. 16^{iv}. 36^{v}$. ut AZ *qu.* ad AT *qu.* si capiatur angulus $16^{''}. 21^{'''}. 3^{iv}. 30^{v}$. ad angulum $16^{''}. 35^{'''}. 16^{iv}. 36^{v}$. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius nodorum in ellipsi ad $16^{''}. 21^{'''}. 3^{iv}. 30^{v}$. ut APq ad ATq; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ nodi à sole ad quadratum radii.

(z) Cæterum luna, radio ad terram ducto, aream velocius describit in syzygiis quam in quadraturis, & eo nomine tempus in syzygiis contrahitur, in quadraturis producitur; & unà cum tempore motus nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in quadraturis lunæ ad ejus momentum in syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in octantibus est ad excessum in syzygiis, defectumque in quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus lunæ in singulis orbis particulis æqualibus sit reciprocè ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in octantibus ad excessum temporis in quadraturis, ac defectum in syzygiis, ab hâc causâ oriundum, ut 11023 ad 50 quam proximè. (a) Pergendo autem à quadraturis ad syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis quam proximè; & propterea differentia inter momentum in loco quocunque

114.

(z) * *Cæterum Luna*, &c. Hæc omnia ex Prop. 26. hujusce deducuntur.

(a) * *Pergendo autem à quadraturis*. Ville not. 1 Prop. 26. & locum ad quem refertur.

que & momentum mediocre in octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati radii; & incrementum temporis in locis singulis inter octantes & quadraturas, & decrementum ejus inter octantes & syzygias, est in eâdem ratione. Motus autem nodorum, quo tempore luna percurrit singulas orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicatâ ratione temporis. Est enim (b) motus iste, dum luna percurrit PM (cæteris paribus) ut ML, & ML est in duplicatâ ratione temporis. Quare (c) motus nodorum in syzygiis, eo tempore confectus quo luna datas orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicatâ ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque (d) decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100

(b) * *Est enim motus iste (cæteris paribus) ut ML, & ML est in duplicatâ ratione temporis*, motus nodorum generatur per actionem vis Solaris 3 I T quæ uniformis manere censetur dum describitur arcus P M, hinc crescit L M in duplicatâ ratione temporis Lem. X. Lib. I., expressit autem Newtonus motum nodorum, fingendo in puncto ipso P, à Sole simul & semel eam actionem imprimi quæ toto tempore quo arcus P M describitur ab ipso exercita fuisset, & lineam L M esse spatium quod velocitate ita productâ ipso eo tempore quo arcus P M percurritur describeretur, hinc itaque constat eam lineam fore in duplicatâ ratione temporis, (vid. not. 28. & 30. lib. 1.) hæc autem linea L M est proportionalis verò effectui actionis Solis (vid. not. h Prop. XXX. hujusce).

(c) * *Quare motus nodorum.* Momentum areæ in syzygiis sive velocitas Lunæ in syzygiis est ad velocitatem mediocrem in octantibus ut 11073 ad 11023 ergo tempus quo Luna æquales arcus P M describet in syzygiis est ad tempus quo eos arcus P M describere censebatur velocitate mediocri ut 11023 ad 11073, motus ergo nodorum in syzygiis fit minor quàm adsumptus fuerat in ratione duplicatâ numerorum 11023 & 11073. 1.14.

(d) * *Estque decrementum ad motum reliquum ut* 100 *ad* 10973, *ad motum totum ut* 100 *ad* 11073. Motus reliquus est ad motum totum ut $\overline{11023}^2$ ad $\overline{11073}^2$ sive ut $\overline{11073-50}^2$ ad $\overline{11073}^2$; sive priorem quantitatem ad quadratum evehendo secundum formulam vulgarem dignitatum ut $\overline{11073}^2-2\times50\times11073+\overline{50}^2$ ad $\overline{11073}^2$ negligatur terminus $\overline{50}^2$, cæterorum enim respectu evanescit fiet motus reliquus ad totum ut $\overline{11073}^2-2\times50\times11073$ ad $\overline{11073}^2$, & dividendo per 11073, ut $11073-2\times50$ ad 11073.

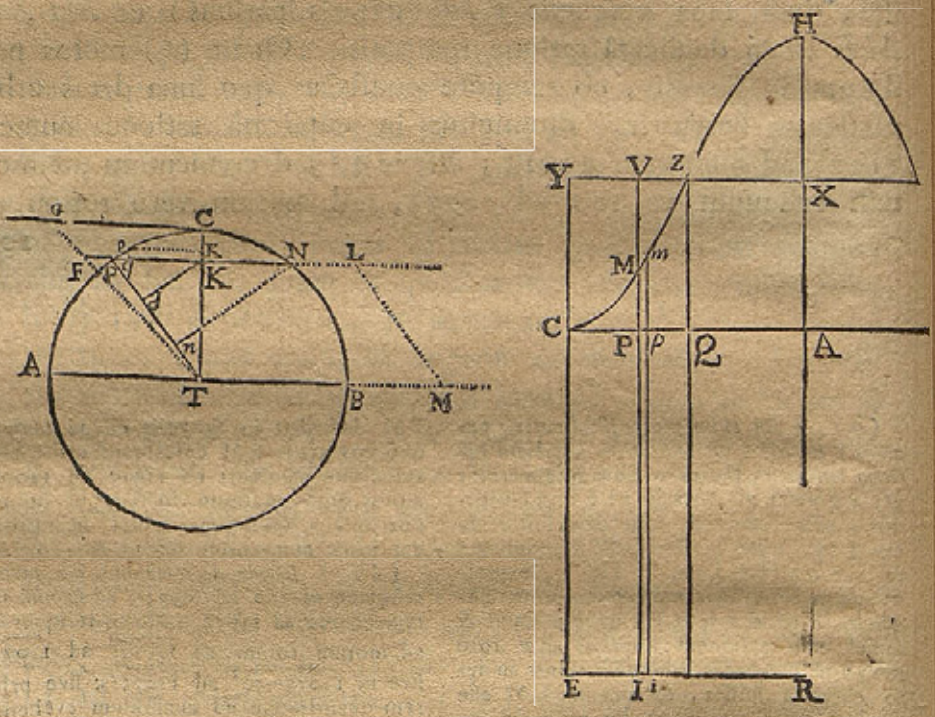
Est ergo differentia motûs reliqui & motus totius h. e. motûs decrementum ad motum totum, ut 2×50 sive 100 ad 11073, ideoque etiam est motus decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973.

SCD LYON 1

DE MUNDI SYSTEMATE.

100 ad 11073 quam proximè. (e) Decrementum autem in locis inter octantes & syzygias, & incrementum in locis inter octantes & quadraturas, est quam proximè ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii ad semissem quadrati radii conjunctim.

Unde

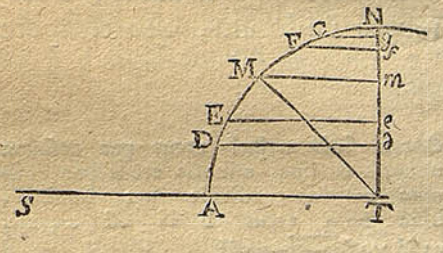


114. (e) * *Decrementum inter octantes & syzygias & incrementum inter octantes & quadraturas est quam proximè &c.* Resumptis iis quæ in Prop. XXVI. not. 112. sunt dicta, designet CP distantiam Lunæ à quadraturâ, lineâ IM exprimet ejus velocitatem & IV exprimet velocitatem mediocrem, idcircò tempus quo describitur arcus PM hâc velocitate IM, est ad tempus quo velocitate mediocri IV describeretur, ut IV ad IM, ideoque motus nodorum verus foret ad eorum motum si Luna mediocri suâ velocitate ferretur ut $\overline{IV}^2$ ad $\overline{IM}^2$ sive ut IV^2 ad $\overline{IV} \pm VM^2$ aut ut IV^2 ad $IV^2 \pm 2IV \times VM + VM^2$ & neglectâ quantitate $\overline{VM}^2$ divisisque terminis per IV ut IV ad $IV \pm 2VM$; & convertendo differentia motus veri nodorum & motus inventi, est ad motum inventum ut $\pm 2VM$ ad $IV \pm 2VM$, hinc illa differentia, sive incrementum aut

(f) Unde si nodi in quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab octante hinc inde distantia, & alia duo à syzygiâ & quadraturâ iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter syzygiam & octantem, sub-

aut decrementum motus nodorum est semper æquale motui nodorum qualis inventus fuerat ducto in 2 V M & diviso per J V ± V M, ideoque cum J V ± 2 V M pro constanti assumi possit quia 2 V M ferè evanescit respectu quantitatis J V, est illud incrementum aut decrementum ut motus nodorum qualis inventus fuerat & V M conjunctim; est verò V M differentia inter Z Q & M P, & sunt Z Q & M P ut quadrata sinuum arcuum C Q & C P, arcus verò C Q est 45gr. ex demonstratis ad Prop. XXVI. & quadratum ejus sinus est semissis quadrati radii; C P verò est distantia Lunæ à quadraturâ; Ergo, incrementum aut decrementum motus nodorum est ut motus nodorum qualis inventus fuerat & differentia inter quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissem quadrati radii conjunctim: In syzygiis quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadratura est ipsum quadratum radii, unde differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis quadrati radii, est in hoc casu ipse semissis quadrati radii, hinc erit decrementum aut incrementum motus nodorum in loco quovis ad decrementum ejus motus in syzygiis ut sunt motus nodorum iis in locis ad motum nodorum in syzygiis (quales citra hanc correctionem inventi fuerant,) & ut differentiæ quadratorum sinuum distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis quadrati radii ad eum semissem quadrati radii conjunctim. Q. E. O.

(f) * *Unde si nodi* &c. Versentur nodi in Quadraturis, capiantur loca F & E ab octante M hinc inde æqualiter distantia, & alia duo D & G à syzygiâ A & quadraturâ N distantia intervallis D A, G N quæ æqualia sint inter se, & eadem ac intervalla M E, M F, sumantur decrementa motus nodorum in punctis E & D & ex summa eorum decrementorum subducatur summa incrementorum in punctis G & F, & residuum erit ipsum decrementum in syzygia A. 114.



Etenim, per præcedentia, decrementa sive incrementa; sunt ut motus totus nodorum & differentia quadrati sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & semissis radii conjunctim; est verò motus totus nodorum, ut contentum sub sinubus distantiarum Lunæ à quadraturâ, Lunæ à nodo, & nodi à Sole (per Prop. XXX.) sinus autem distantiæ nodi à Sole, in hoc casu est ipse Radius, estque constans pro omnibus incrementis decrementisque assumendis, distantia verò Lunæ à nodo eadem est ac distantia Lunæ à quadraturâ, cum nodi sint in quadraturis; Ergo motus totus nodorum est ut quadratum sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ, & decrementa sive incrementa sunt ut contentum sub quadrato sinus distantiæ Lunæ à quadraturâ & sub differentiâ ejusdem quadrati & semissis radii.

Dicatur itaque Radius r, sinus arcus N G dicatur s, erit incrementum motus nodorum in G ut $ss \times \frac{1}{2}rr - ss$ sive $\frac{1}{2}r^2s^2 - s^4$.

Ut obtineatur incrementum motus nodorum in F, observandum, quod siquidem arcus F M est æqualis arcui N G cujus sinus est s, & N F + F M est æqualis octanti cujus sinus est $r\sqrt{\frac{1}{2}}$ & per Principia Trigonometrica, sinus arcus qui est differentia duorum arcuum quorum sinus sunt dati, est æqualis differentiæ factorum

DE MUNDI SYSTEMATE.

subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter octantem & quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in syzygiâ: uti rationem ineunti facile constabit. (g) Proindeque decrementum mediocre, quod de nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in syzygia. Motus totus horarius nodorum in syzygiis, ubi luna radio ad terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur, erat $32^{II}.\ 42^{III}.\ 7^{IV}$. Et decrementum motus nodorum, quo tempore luna jam velocior describit idem spa-

114. ctorum sinûs majoris arcus per cosinum minoris & sinus minoris arcus per cosinum majoris, divisæ per Radium, hinc sinus arcus F N est æqualis $\frac{r\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{rr-ss}-sr\sqrt{\frac{1}{2}}}{r}=\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{rr-ss}-s\sqrt{\frac{1}{2}}$, itaque incrementum nodorum in F erit $\frac{1}{2}\times\overline{rr-ss}-s\sqrt{rr-ss}+\frac{ss}{2}\times\frac{1}{2}rr-\frac{1}{2}\overline{rr-ss}+s\sqrt{rr-ss}-\frac{ss}{2}$ sive deletis terminis æqualibus & oppositis $\frac{1}{2}\overline{rr-s\sqrt{rr-ss}}\times s\sqrt{rr-ss}$, & multiplicatione factâ $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-r^2s^2+s^4$. Ideoque summa incrementorum in G & F est $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$.

Sinus autem in E & D sunt cosinus arcuum F & G, ergo quadratum sinus arcus N E est $rr-\frac{1}{2}\times\overline{rr-ss}+s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}ss=\frac{1}{2}rr+s\sqrt{rr-ss}$; Ideoque decrementum motus nodorum in E est $\frac{1}{2}rr+s\sqrt{rr-ss}\times\frac{1}{2}rr+s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}rr=\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}+r^2ss-s^4$.

Quadratum sinus arcus N D est $rr-ss$, ideoque decrementum motus nodorum in D est $rr-ss\times rr-ss-\frac{1}{2}rr=\frac{1}{2}r^4-\frac{3}{2}r^2s^2+s^4$; Sicque summa decrementorum est $\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$. Denique in ipsâ syzygiâ quadratum sinus arcus N D est rr, ideoque decrementum motus nodorum in syzygia est $r^2\times r^2-\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}r^4$.

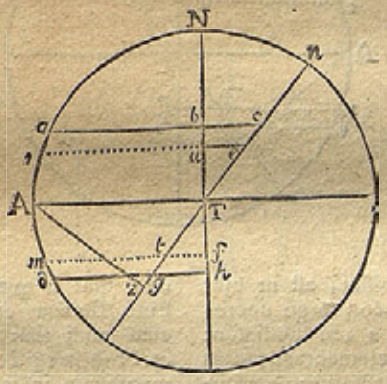
Si ergo ex summa decrementorum quæ inventa est $\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$ detrahatur summa incrementorum quæ inventa est $\frac{1}{2}r^2s\sqrt{rr-ss}-\frac{1}{2}r^2s^2$ decrementorum residuum est ipsum $\frac{1}{2}r^4$ quod decrementum motus nodorum in syzygia exprimet. Q. E. D.

(g) * *Proindeque decrementum mediocre* &c. In toto arcu N A, puncta assumantur quam proxima quotquot lubebit quæ quaternatim sumantur, ita ut quatuor quæ simul assumuntur ita disponantur ut duo ab octante æqualiter distent hinc inde, & alia duo tantumdem à syzygia & quadratura distent; Decrementum motus nodorum in duobus punctis quæ sunt inter syzygiam & octantem superat incrementum ejus motus in aliis duobus punctis quantitate æquali decremento in ipsâ syzygiâ; si itaque motus mediocris assumendus sit, id decrementum quadrifariam dividi debet & de motu mediocri singula quarta-pars detrahi debet, sic enim motus mediocris ille æquipollebit motui vero peracto in illis quatuor punctis simul sumptis; ille decrementi excessus idem est pro quibusvis punctis ita quaternatim sumptis itaque motus mediocris nodorum in omnibus punctis adjectâ consideratione inæqualitatis motus Lunæ ex actione Solis ortæ erit motus mediocris nodorum prius inventus, multatus quartâ parte illius decrementi.

Cum

ſpatium, diximus eſſe ad hunc motum ut 100 ad 11073; ideoque decrementum illud eſt $17^{III}.\ 43^{iv}.\ 11^{v}$, cujus pars quarta $4^{III}.\ 25^{iv}.\ 48^{v}$ motui horario mediocri ſuperius invento $16^{II}.\ 21^{III}.\ 3^{iv}.\ 30^{v}$ ſubducta, relinquit $16^{II}.\ 16^{III}.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$ motum mediocrem horarium correctum.

(h) Si nodi verſantur extra quadraturas, & ſpectentur loca bina à ſyzygiis hinc inde æqualiter diſtantia; ſumma motuum nodorum, ubi luna verſatur in his locis, erit ad ſummam motuum, ubi luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur, ut *AZ qu.* ad *AT qu.* Et (i) decrementa motuum, à cau-



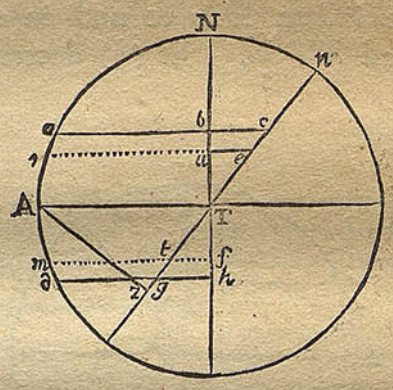
Cum ergo ille exceſſus decrementorum ſuper incrementa ſit ipſum decrementum motus in ſyzygiâ Seorſim conſideratâ, & id decrementum in ſyzygiâ ſeorſim inventum ſit, *decrementum mediocre quod de nodorum motu mediocri ſubduci debet eſt pars quarta decrementi in ſyzygiâ.*

(h) * *Si nodi verſantur extra quadraturas* putà in locis n & *ſpectentur loca bina a* & *d à ſyzygiâ A hinc inde diſtantia* erit motus nodorum in loco *a* ut Elementum *acer* & quadratum lineæ AZ conjunctim (cor. 1. prop. 30.); ſimiliter motus nodorum in loco *d* erit ut elementum *mtgd* & quadratum lineæ AZ conjunctim; ſi verò nodi verſentur in quadraturis erit (ibid.) ſumma motuum in binis locis *a* & *d* ut $abru + mfdh$, vel $2abrv$ & quadratum radii AT conjunctim; ſed ob æqualia intervalla Tb, Th ſumma arearum $acer + mtgd = 2abru$. Quare ſumma motuum nodorum ubi Luna verſatur in locis *a*, *d* nodis exiſtentibus extra quadraturas, erit ad ſummam motuum ubi Luna in iiſdem locis & nodi in quadraturis verſantur ut $2abru \times AZ^2$ ad $2abru \times AT^2$ hoc eſt ut AZ^2 ad AT^2. 1141

(i) * *Et decrementa motuum* in loco *a* quando nodi ſunt extra quadraturas, & quando nodi ſunt in quadraturis, ſunt ut ipſi motus; Nam cum arcus *ar* in utroque caſu æquali tempore percurratur, differentia ejus temporis à tempore mediocri utrinque eadem erit, ac per conſequens error nodi, à loco in quo eo tempore

DE MUNDI SYSTEMATE.

causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, ideoque motus reliqui erunt ad invicem ut AZ *qu.* ad AT *qu.* & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque nodorum situ, ad $16''$. $16'''$. 37^{iv}. 42^{v}. ut AZ *qu.* ad AT *qu.*; id est, ut quadratum sinus distantiæ nodorum à syzygiis ad quadratum radii.



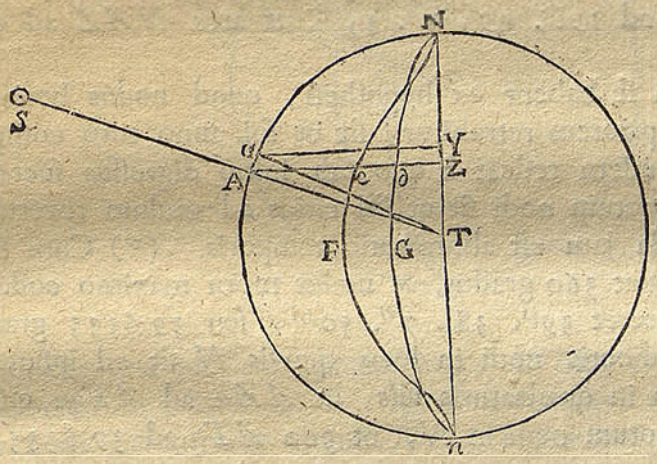
114. mediocri procedere debuisset, est ut ejus motus horarius in eo loco; ergo decrementum motus nodi in *a* ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas versantur ut $abru \times AT^2$ ad $acer \times AZ^2$, & pariter decrementum motus nodi in *d* ubi nodi sunt in quadraturis est ad decrementum motus in *d* cum nodi sunt extra quadraturas, ut $mfhd \times AT^2$ ad $mtgd \times AZ^2$; decrementa autem motus in *a* & *d* æqualia sunt quando nodi sunt in quadraturis, ob æquales distantias à syzygiâ, & $mfhd = abru$; hinc decrementum motus in *a* cum nodi extra quadraturas versantur est ad $acer \times AZ^2$ ut decrementum motus in *d* cum nodi extra quadraturas versantur est ad $mtgd \times AZ^2$, & etiam ut decrementum in *a*, aut *d* cum nodi sunt in quadraturis ad $abru \times AT^2$; Ergo summa decrementorum in *a* & *d* cum nodi sunt extra quadraturas est ad $acer + mtgd \times AZ^2$ ut summa decrementorum in *a* & *d* cum nodi sunt in quadraturis ad $2abru \times AT^2$, sed $acer + mtgd = 2abru$ per notam præcedentem, ergo, summa decrementorum in binis locis à syzygiis hinc inde æqualiter distantibus cum nodi sunt extra quadraturas est ad summam decrementorum in iisdem locis cum nodi sunt in syzygiis, ut AZ^2 ad AT^2, cum ergo summæ motuum ipsorum in eâ sint ratione, reliquâ motus erunt in eâ ipsâ ratione ideoque & motus mediocres; *Est itaque &c.*

PRO-

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium nodorum lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe nodum verſari in *N*, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad ſtellas fixas. Interea verò ſolem *S*, per motum terræ, progredi



à nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem *Aa* arcus datus quam minimus, quem recta *TS* ad ſolem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli *NAn*, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut *AZq*, id eſt (ob [1] proportionales *AZ*, *ZY*) ut rectangulum ſub *AZ* & *ZY*, hoc eſt, ut area *AZYa*. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium

(1) * *Ob proportionales AZ, ZY* eſt enim TA : Aa :: AZ : ZY, ideoque ob conſtantes TA & Aa, quantitates AZ, ZY ubique eamdem habent inter ſe rationem, ducatur utraque in AZ facta AZ×AZ, & ZY×AZ datam rationem ubique habebunt, erit itaque *AZq ut rectangulum ſub AZ & ZY.* LEMM. II.

De Mundi Systemate.

crium ab initio, ut summa omnium arearum $aYZA$, id est, ut area NAZ. Est (m) autem maxima $AZYa$ æqualis rectangulo sub arcu Aa & radio circuli; & propterea summa omnium rectangulorum in circulo toto ad summam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum sub circumferentiâ totâ & radio, id est, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo respondens, (n) erat $16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}$. Et hic motus, anno toto sidereo dierum 365. hor. 6. min. 9. fit $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$. Ideoque hujus dimidium $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. est motus medius nodorum circulo toti respondens. Et motus nodorum, quo tempore sol pergit ab N ad A est ad $19^{gr}.\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quod nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut sol anno toto completo ad nodum eundem redeat à quo sub initio digressus fuerat. Verùm per motum nodi fit ut sol citius ad nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. (o) Cum sol anno toto conficiat 360 gradus, & nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr}.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris nodi in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in quadraturis suis, ut AZq ad ATq: erit motus solis ad motum nodi in N, ut 360 ATq ad 39,6355 AZq; id

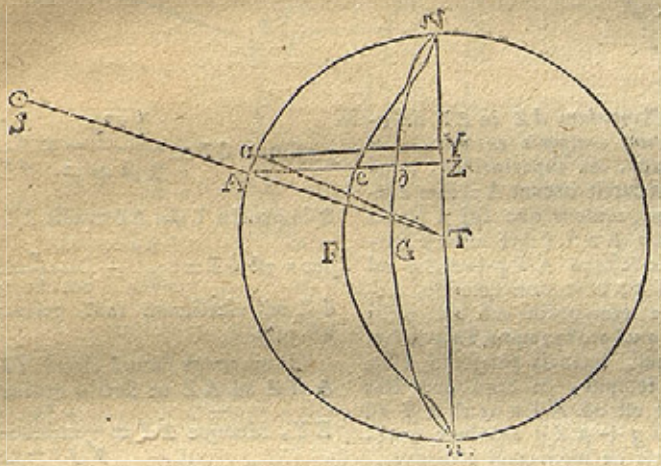
114. (m) * *Est autem maxima AZYa* &c. Nam quando TA est perpendicularis in Nn, AZ evadit TA & ZY evadit æqualis Aa, sicque AZY = AT × Aa, in omnibus autem aliis punctis TA est major quam AZ, & Aa major quam ZY, maxima itaque AZY*a* est *æqualis rectangulo sub arcu Aa & radio circuli.*

(n) * *Erat* $16''\ 16'''\ 37'^{v}\ 42^{v}$, is enim erat motus horarius mediocris, cum nodi erant in Quadraturis, per Prop. præced. ideoque in hâc Propos. cum SAT est perpendicularis in Nn.

(o) * *Cum Sol* &c. Velocitas solis est ad velocitatem nodi cum nodi sunt in quadraturis ut 360^{l}. quæ est via solis toto anno ad $39.\ 38'.\ 7''.\ 50'''$ seu 39.6355 gradus quos nodus toto anno conficeret, si toto anno maximâ sua celeritate moveretur; Velocitas nodi cum nodi sunt in quadraturis, est ad nodi velocitatem cum nodi distant à Sole arcu AN ut ATq ad AZq per Prop. præced. Ergo ex æquo & compositis rationibus, velocitas solis est ad velocitatem nodi cum nodi distant à Sole arcu AN ut 360 ATq ad 39.6355 AZq; id est, dividendo 360 per 39.6355 ut 9.0827667 ATq ad AZq. Sed dividendo 360 per $39^{gr}.\ 38'\ 7''\ 50'''$ prodit numerus 9.0827646 loco hujusce 9.0827667 collocandus.

id est, ut 9,0827646 ATq ad AZq. Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo sol percurrat particulam Aa, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus unà cum nodis circa centrum T revolvatur, reciprocè ut 9,0827646 ATq ad 9,0827646 $ATq+AZq$. Nam tempus est reciprocè ut velocitas quâ particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum solis & nodi. Igitur si tempus, quo sol sine motu nodi percurreret arcum NA, exponatur per sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quàm minimum Aa, exponatur per sectoris particulam ATa; & (perpendiculo aY in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis (P) ut sit rectangulum dZ in ZY ad sectoris parti-

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROB. XIII.



(p) * *Ut sit Rectangulum dZ in ZY ad sectoris particulam ATa.* Sectoris particula ATa est semper æqualis dimidio Rectanguli AT in Aa, est verò ZY ad Aa ut AZ ad AT, ducantur antecedentes in dZ & consequentes in $\frac{1}{2}$AT erit rectangulum dZ in ZY ad $\frac{1}{2}$AT×Aa sive ad sectoris particulam ATa ut dZ in AZ ad $\frac{1}{2}$ATq sive ut dZ in 2AZ ad ATq, sed sumitur esse dZ in ZY ad ATa ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq ergo etiam dZ in 2AZ est ad ATq ut AZq ad 9.0827646 ATq+AZq & vicissim dZ in 2AZ est ad AZq ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq & dividendo duos priores terminos per 2AZ est dZ ad $\frac{1}{2}$AZ ut ATq ad 9.0827646 ATq+AZq. 1145

DE MUNDI SYSTEMATE.

particulam ATa ut AZq ad 9,0827646 $ATq+AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}AZ$ ut ATq ad 9,0827646 $ATq+AZq$; (q) rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d (r) tangit curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA per-

114. (q) * *Rectangulum dZ in ZY designabit decrementum temporis ex motu nodi oriundum*; Nam, ex superioribus, tempus quo sol percurrit arcum A a sine motu nodi, est ad tempus quo sol à nodo discedet eo arcu A a si (ipse nodus moveatur) ut 9.0827646 $ATq+AZq$ ad 9.0827646 ATq; hinc convertendo, differentia eorum temporum est ad prius tempus ut AZq ad 9.0827646 $ATq+AZq$, sed, ex hypothesi, sectoris particula ATa designat prius tempus, ea ergo quantitas $dZ \times ZY$ quæ est ad ATa ut AZq ad 9.0827646 $ATq+AZq$ *exprimet decrementum temporis ex motu nodi oriundum.*

(r) * *Et si punctum d tangit curvam NdGn.* Numerus 360 designetur per a numerus 39.6355 dicatur b, ideoque 9.0827646 fit $\frac{a}{b}$, AT dicatur r, & AZ, y eritque $dZ = \frac{\frac{\pi}{2}r^2y}{\frac{a}{b}r^2+y^2} = \frac{\frac{\pi}{2}br^2y}{ar^2+by^2}$ & in puncto T ubi AZ evadit AT sive ubi fit $y=r$ est $dZ = \frac{\frac{\pi}{2}br}{a+b} = \frac{r}{20.1655292}$; ita ut dZ ad vicesimam radii partem nusquam assurgat.

Est autem ex naturâ circuli $TZ=\sqrt{rr-yy}$, & TZ ad AZ ut fluctio ordinatæ AZ ad ZY, ideoque $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$, hinc elementum $dZ \times ZY = \frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(ar^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ & elementum segmenti NAZ est $\frac{y^2dy}{\sqrt{rr-yy}}$.

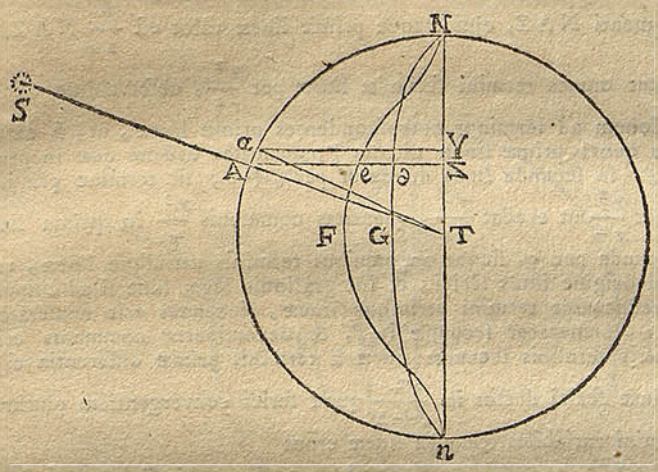
Est verò $\sqrt{rr-yy}$ æqualis seriei $r-\frac{y^2}{2r}-\frac{y^4}{8r^3}-\frac{y^6}{16r^5}-\frac{5y^8}{128r^7}-\frac{7y^{10}}{256r^9}$ &c. & $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ æqualis erei $\frac{y^2}{r}+\frac{y^4}{2r^3}+\frac{3y^6}{8r^5}+\frac{5y^8}{16r^7}+\frac{35y^{10}}{128r^9}+\frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c. quæ series parùm convergit quando y accedit ad valorem r unde prudenter est adhibenda.

Multiplicetur verò hæc series per dy & fiat integratio, obtinetur sequens series quæ exprimit segmentum NAZ, $\frac{y^3}{3r}+\frac{y^5}{10r^3}+\frac{3y^7}{56r^5}+\frac{5y^9}{144r^7}+\frac{35y^{11}}{1408r^9}$ &c. quæ series parum convergit quando $y=r$ sed tunc segmentum NAZ est quadrans circuli qui per alias commodiores approximationes obtinetur.

Dividatur $\frac{1}{2}br^2$ per ar^2+by^2, fit series $\frac{b}{2a} \times 1-\frac{by^2}{ar^2}+\frac{b^2y^4}{a^2r^4}-\frac{b^3y^6}{a^3r^6}+\frac{b^4y^8}{a^4r^2}$ &c. quæ plurimum convergit propter dignitates crescentes fractionis $\frac{b}{a}$ quæ est circiter $\frac{1}{9}$.

Mul-

percurritur; & propterea excessus sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus nodi tempore



Multiplicetur itaque per hanç seriem, series $\frac{y^2}{\sqrt{rr-yy}}$ superius inventa & obtinebi- 115.

tur hæc series $\frac{b}{2a} \times \frac{y^2}{r} + \frac{y^4}{2r^3} + \frac{3y^6}{8r^5} + \frac{5y^8}{16r^7} + \frac{35y^{10}}{128r^9} + \frac{63y^{12}}{256r^{11}}$ &c.

$$-\frac{b^2}{2a^2} \times \quad \frac{y^4}{r^3} + \frac{y^6}{2r^5} + \frac{3y^8}{8r^7} + \frac{5y^{10}}{16r^9} + \frac{35y^{12}}{128r^{11}} \text{ \&c.}$$

$$+\frac{b^3}{2a^3} \times \quad \frac{y^6}{r^5} + \frac{y^8}{2r^7} + \frac{3y^{10}}{8r^9} + \frac{5y^{12}}{16r^{11}} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{b^4}{2a^4} \times \quad \frac{y^8}{r^7} + \frac{y^{10}}{2r^9} + \frac{3y^{12}}{8r^{11}} \text{ \&c.}$$

&c.

& multiplicetur hæc series per dy & integretur, fiet series quæ exhibebit valorem areæ NdZ

$$\frac{b}{2a} \times \frac{y^3}{3r} + \frac{y^5}{10r^3} + \frac{3y^7}{56r^5} + \frac{5y^9}{144r^7} + \frac{35y^{11}}{1408r^9} + \frac{63y^{13}}{3308r^{11}} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{b^2}{2a^2} \quad \frac{y^5}{5r^3} + \frac{y^7}{14r^5} + \frac{3y^9}{72r^7} + \frac{5y^{11}}{176r^9} + \frac{35y^{13}}{1664r^{11}}$$

$$+\frac{b^3}{2a^3} \times \quad \frac{y^7}{7r^5} + \frac{y^9}{18r^7} + \frac{3y^{11}}{88r^7} + \frac{5y^{13}}{208r^{13}}$$

$$-\frac{b^4}{2a^4} \times \quad \frac{y^9}{9r^7} + \frac{y^{11}}{22r^9} + \frac{3y^{13}}{104r^{11}}$$

DE MUNDI SYSTEMATE.

pore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaYZ$

315. Termini variabiles primæ lineæ hujusce seriei, seriem ipsam illam constituunt quæ est valor segmenti NAZ, ejus itaque primæ lineæ valor est $\frac{b}{2a}$ NAZ.

Si dividantur omnes termini secundæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, observabitur quotientes hanc habere relationem ad terminos correspondentes primæ lineæ, ut, si exponens litteræ y in termino quovis primæ lineæ dicatur 6, quantitas eadem quæ in prima linea dividitur per 6, in secunda linea dividatur per $6+2$; sic termino primo secundæ lineæ diviso per $\frac{y^2}{r^2}$ ut evadat $\frac{y^3}{5r}$, quantitas communis $\frac{y^3}{r}$ in prima linea dividitur per 3, in secunda per 5, sicque in omnibus terminis utriusque lineæ, ut facile constabit ex ipsâ origine istius seriei, & Integrationis lege; hinc si ad communem denominatorem reducantur termini utriusque lineæ, ducendus erit numerator primæ lineæ in $6+2$, numerator secundæ in 6, & denominator communis erit $6\times 6+2$; quare subductis terminis secundæ lineæ à terminis primæ differentia exprimetur per terminos primæ seriei ductos in $\frac{2}{6+2}$ quod seriei convergentiam plurimum augebit; ideoque termini variabiles secundæ lineæ erunt

$$\frac{y^2}{r^2}\times \text{NAZ} - \frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^3}{15r} + \frac{2y^5}{70r^3} + \frac{6y^7}{504r^5} + \frac{10y^9}{1584r^7} \text{ &c.}$$

dicatur ad brevitatem series horum terminorum D & valor verus istius secundæ lineæ est $-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}$ NAZ $+\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times D$.

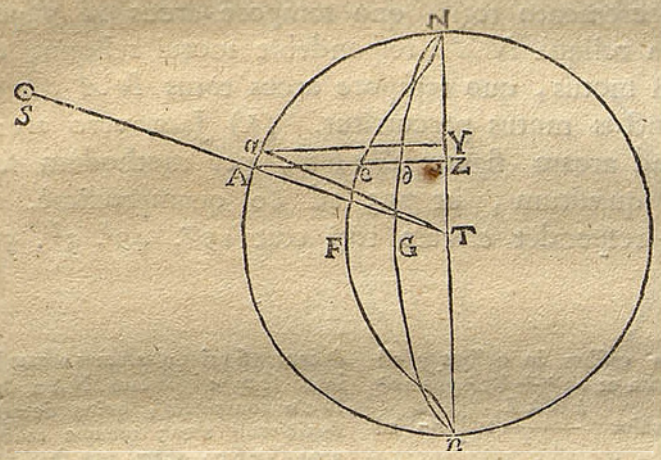
Simili ratiocinio, ut referantur termini variabiles tertiæ lineæ ad secundam, dividantur omnes termini tertiæ lineæ per $\frac{y^2}{r^2}$, & si dicantur y exponentes terminorum, differentia terminorum secundæ & tertiæ lineæ exprimetur per terminos secundæ seriei ductos in $\frac{2}{y+2}$, ideoque termini variabiles tertiæ lineæ erunt $\frac{y^4}{r^4}\times \text{NAZ} - \frac{y^4}{r^4}\times D - \frac{y^2}{r^2}\times\frac{2y^5}{35r^3} + \frac{2y^7}{126r^5} + \frac{6y^9}{792r^7}$ dicatur E series horum terminorum & valor verus tertiæ lineæ erit $+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times \text{NAZ} - \frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times D - \frac{b^3y^2}{2a^2r^2}$ E

ex quibus facile intelligitur valorem areæ NdZ exprimi posse hac ratione

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{2a}\times \text{NAZ.}\\
&-\frac{b^2y^2}{2a^2r^2}\times \text{NAZ} + \frac{b^2y^2}{2a^2r^2} D\\
&+\frac{b^3y^4}{2a^3r^4}\times \text{NAZ} - \frac{b^3y^2}{2a^3r^4} D - \frac{b^3y^2}{2a^3r^2} E\\
&-\frac{b^4y^6}{2a^4r^6}\times \text{NAZ} + \frac{b^4y^6}{2a^4r^6} D + \frac{b^4y^4}{2a^4r^4} E + \frac{b^4y^2}{2a^4y^2} F \text{ &c.}
\end{aligned}$$

Unde

$AaYZ$ diminui in eâdem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad



Unde summæ coefficientium quantitatum NAZ, D, E, F, qui progressiones Geometricas formant juxta regulas vulgares obtineri possunt, ideoque tandem area NdZ est $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}NAZ+\frac{\frac{1}{2}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}D-\frac{\frac{1}{2}b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}E+\frac{\frac{1}{2}b^4y^2}{a^4r^4+a^3by^2}F$ &c. 1151

Cor. 1. Primus terminus seriei quæ exprimitur per D est $\frac{2}{5}$ primi termini seriei quæ exprimit segmentum NAZ, & reliqui termini seriei D sunt minores respectu reliquorum terminorum seriei quæ exprimit id segmentum, ergo D minor est quam $\frac{2}{5}NAZ$, & pariter E minor est quam $\frac{3y^2}{7r^2}D$, & F minor quam $\frac{5y^2}{9r^2}$ &c. hinc valor NdZ major esse nequit quantitate $\frac{\frac{1}{2}br^2}{ar^2+by^2}NAZ+\frac{\frac{1}{5}b^2y^2}{a^2r^2+aby^2}NAZ$, $=\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2+\frac{b}{5a}y^2$ nec minor esse potest quantitate $\frac{bNAZ}{ar^2+by^2}\times\frac{1}{2}r^2$.

Cor. 2. Hinc ubi $r=y$ & NAZ est quadrans circuli valor areæ NdZ major non est quantitate $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}+\frac{b}{5a}$, nec minor quam $NAZ\times\frac{b}{a+b}\times\frac{1}{2}$; sive major non est quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}+\frac{1}{457.8068865}$ sive quadrantis $\frac{1}{19.3147492}$ nec minor quadrantis portione $\frac{1}{20.1655292}$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 9,08276 $ATq + AZq$. (f) Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream $AZYa$ ut decrementum temporis, quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur, si nodus quiesceret: & propterea rectangulum illud respondebit decremento motus nodi. Et si punctum e tangat curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est nodi motus, quo tempore arcus totus NA per solis & nodi conjunctos motus percurritur. (t) Jam vero area semicirculi est ad aream figuræ $NeFn$, per methodum serierum infinitarum quæsitum, ut 793 ad 60 quamproximè. Motus autem qui respondet circulo toti erat $19^{gr}. 49^{l}. 3^{ll}. 55^{lll}.$ & prop-

116. Cor. 3. In casibus in quibus y est quam minima, ita ut $ar^2 + by^2$ pro ar^2 sumi possit, valor $\frac{bNAZ}{ar^2} \times \frac{1}{2} r^2$ ad verum valorem satis accedet fietque valor areæ $NdZ = \frac{1}{18.1655292}$ segmenti NAZ, unde habentur velut limites valoris areæ NdZ in variis punctis curvæ.

(f) * *Sic enim rectangulum eZ in ZY erit ad aream AZYa*, &c. Ex præcedentibus, area $AZYa$ motum nodorum mediocrem exprimit posito solem sine motu nodi percurrere arcum Aa, si itaque cæteris manentibus celerius percurratur is arcus, motus nodorum sive spatium à nodis percursum minus erit, prout tempus erit brevius; cum ergo tempus quo sol percurrit Ae sine motu nodi, sit ad tempus quo percurreretur Aa posito motu nodi ut $9.0827646\ ATq + AZq$ ad $9.0827646\ ATq$ si fiat AZ ad Ae in eâ ratione & utrumque ducatur in ZY, erunt areæ $AZ \times ZY$, ad $Ae \times ZY$ ut motus nodorum in Hypothesi priori ad eorum verum motum; & convertendo erit $eZ \times ZY$ ad $AZ \times ZY$ ut differentiâ motuum ad motum priorem sive ut AZq ad $9.0827646\ ATq + AZq$.

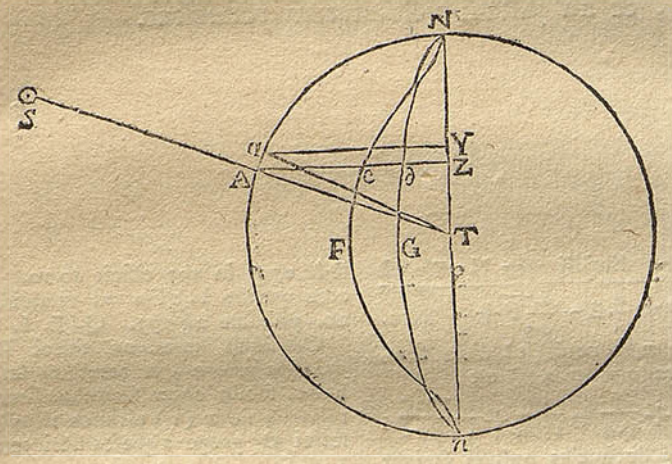
(t) 116. * *Jam verò area semicirculi est ad aream NeFn.* Commodius calculi ducentur si prius quæramus aream $NAneN$ inter semiperipheriam NAn & curvam Nen contentam, quàm detrahemus ex semicirculi area; tumque residuum erit area $NeFn$, quam cum semicirculi area conferre licebit.

Sit ergo ut prius $360^s = a$, $39^o.6355 = b$, $AT = r$ & ATr & $AZ = y$; erit ex notâ præcedenti $9.0827646\ ATq + AZq$ (sive $\frac{ar^2}{b} + y^2$ ad $9.0827646\ ATq$ (sive $\frac{ar^2}{b}$) ut AZ (sive y) ad Ae quod erit itaque $\frac{ar^2y}{ar^2+by^2}$; est verò $ZY = \frac{ydy}{\sqrt{rr-yy}}$; hinc Elementum areæ aAe est $\frac{ar^2y^2dy}{ar^2+by^2\sqrt{rr-yy}}$ sed elementum areæ curvæ $NdGn$ notâ superiore 115 inventum erat $\frac{\frac{1}{2}br^2y^2dy}{(a^2+by^2)\sqrt{rr-yy}}$ ergo elementum areæ curvilineæ $NAnFN$ est ad elementum areæ $NdGn$ in ratione datâ a ad $\frac{1}{2}b$; Unde si valor hujus areæ $NdGn$ in notâ r inventus per $\frac{1}{x}$ dividatur & multiplicetur per a habebitur valor areæ $NAnFN$ qui itaque prodibit

ar^2-

propterea motus, qui figuræ *NeFn* duplicatæ respondet, est $1^{gr}. 29^{l}. 58^{ll}. 2^{lll}.$ Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr}. 19^{l}. 5^{ll}. 53^{lll}.$ motum totum nodi respectu fixarum inter sui ipsius conjunctiones cum sole; & hic motus de solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr}. 40^{l}. 54^{ll}. 7^{lll}.$ motum solis inter easdem conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum $360^{gr}.$ ut nodi motus jam inventus $18^{gr}. 19^{l}. 5^{ll}. 53^{lll}.$ ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr}. 18^{l}.$

LIBER TERTIUS. PROP. XXXII. PROBL. XIII.



$\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ NAZ + $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ D − $\frac{b^2y^2}{a^2r^2+by}$ E + $\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ F &c.

Tollatur verò hæc area ex segmento NAZ, sive ex $\frac{ar^2+by^2}{ar^2+by^2}$ NAZ residuum erit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ NAZ − $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ D + $\frac{b^2y^2}{a^2r^2+bay^2}$ E − $\frac{b^3y^2}{a^3r^2+a^2by^2}$ F &c.

idque residuum est area quæsita NeZ, quod brevius expressum fit $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ × NAZ − D + $\frac{b}{a}$ E − $\frac{b^2}{a^2}$ F &c. 116

Jam autem ut habeatur ratio semicirculi ad aream NeFn, sive quod idem est quadrantis circuli ad NFT ejus aræ NeFn dimidium; dicatur *c* quadrans peripheriæ cujus radius est *r*; sitque *m* ad *n* ut *c* est ad *r*; valor quadrantis est $\frac{rc}{2}$, & cum NAZ est quadrans tum

DE MUNDI SYSTEMATE.

$18^{l}.\ 1^{ll}.\ 23^{lll}.$ Hic est motus medius nodorum in anno sidereo. (u) Idem per tabulas astronomicas est $19^{gr}.\ 21^{l}\ 21^{ll}.\ 50^{lll}.$ Differentia minor est parte trecentesimâ motus totius, & ab orbis lunaris eccentricitate & inclinatione ad planum ecliptiæ oriri videtur. Per eccentricitatem orbis motus nodorum nimis acceleratur, & per ejus inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

PRO-

116. $y = r$ ergo valor dimidii areæ NeFn est $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - D + \frac{b}{a}E - \frac{b^2}{a^2}F + \frac{b^3}{a^3}G$ &c. ex iis autem quæ in notâ (r) dicta sunt, valor D (ponendo r loco y) est $r^2 \times \frac{2}{15} + \frac{2}{70} + \frac{6}{504} + \frac{10}{1584} + \frac{70}{18304}$; qui termini ad decimales reducti faciunt $.184\ r^2$ Omittantur reliqui termini quantitatis D ut & quantitates E, F de quâ omissione postea dicemus, & quoniam est $r = \frac{nc}{m}$ ideoque $r^2 = \frac{nrc}{m} = \frac{2n}{m} \times \frac{rc}{2}$. Valor areæ evadit $\frac{b}{a+b} \times \frac{rc}{2} - \frac{rc}{2} \times \frac{2n}{m} \times .184$ qui valor est ad valorem quadrantis $\frac{rc}{2}$, ut $\frac{b}{a+b} \times 1 - \frac{2n}{m} \times .184$ ad 1, substituendo autem loco b & a, eorum valores, est $\frac{b}{a+b} = .099$; & ex naturâ circuli est $2n$ ad m, sive Diameter ad quartam peripheriæ partem ut 1.274 ad 1 ideoque $\frac{2n}{m} \times .184 = 1.27 \times .184 = .23$, quod detractum ex unitate relinquit .766; Quod tandem ductum in $\frac{b}{a+b}$ sive .099 efficit .0758 qui valor est ad 1; ut area quæsita ad quadrantem; manebit eadem ratio si uterque terminus per 793 ducatur sed .0758 in 793 efficit 60.10. Ergo est area quæsita NeFn ad semicirculum ut 60. proximè ad 793. Q. E. I.

Omisimus terminos seriei D præter quinque priores, & terminos serierum E, F &c. facile enim deprehenditur ex Corollariis notæ (r) ultimos illos terminos seriei D, prope æquales fieri terminis seriei E ductæ in $\frac{a}{b}$ qui termini negativi sunt, sicque mutuò destrui reliquæ verò series cum per dignitates fractionis $\frac{b}{a}$ ducantur brevi evanescunt ut quidem exploravimus calculo ad plures terminos producto.

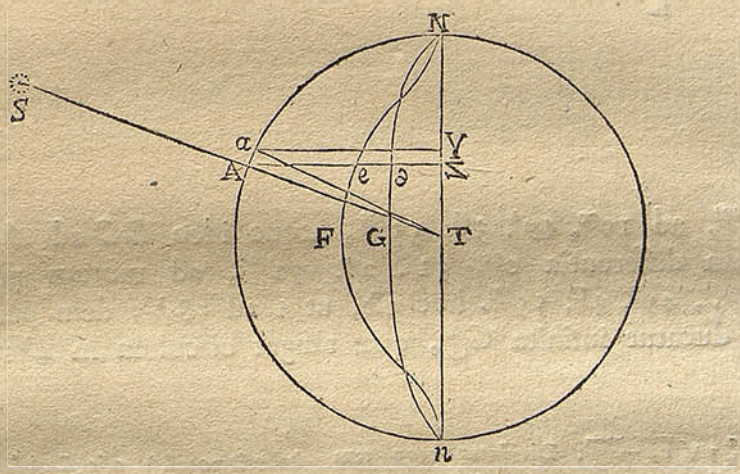
(u) * *Idem per tabulas Astronomicas.* Cassinus ex antiquis observationibus nodorum motum determinat in anno communi 19°. 19′. 45″. quibus additis 49″ pro motu nodi per $6^{h}.\ 10'\ 54'''$ quibus annus sidereus excedit annum communem, motus ergo nodorum in anno sidereo est 19°. 20′. 34″., ita ut exiguâ duntaxat quantitate differat motus nodorum per calculum inventus, ab eo qui ex observationibus deducitur, & is dissensus est adeo parvus, ut neutiquam turbet argumentum quo confirmetur Newtoniana Theoria ex calculo motus nodorum cum observationibus collato; imo dissensus istius causas ex orbis Lunæ excentricitate & inclinatione fluere indicat Newtonus, sed hæc hujus non sunt loci.

SCD LYON 1

PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum nodorum lunæ.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, motus iste est ut area NAe, & inde datur. (x) Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem problematis

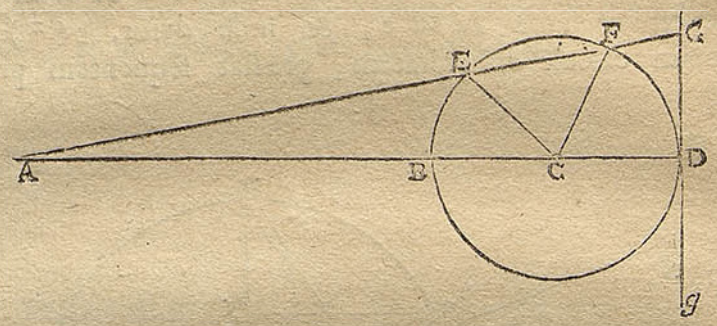


(x) 117. * *Verum ob nimiam calculi difficultatem.* Satis liquet maximam futuram calculi difficultatem ex ipsis seriebus in notis 115 & 116 adhibitis, quæ cum parum convergant, regressum non tantùm difficilem, sed etiam parùm tutum habent; hinc alia artificia commodiora adhibet Newtonus quæ ut intelligantur duas Hypotheses assumere liceat quibus pedetentim ad ipsam constructionem Newtonianam deveniemus.

Prior ergo Hypothesis ea sit quam in Prop. XXXII. fingit Newtonus, singulis horis retrahi nodum in locum suum priorem, ut nonobstante motu suo proprio datum servet situm ad fixas, interea verò solem progredi à nodo: Eâ quippe in Hypothesi, ex Prop. XXXII. tota area circuli repræsentat totum nodorum motum integro anno sidereo, ideoque sectores NAT repræsentabunt motum medium eo tempore quo Sol discedit à nodo arcu NA & segmenta NAZ repræsentabunt motum verum eo ipso tempore, ideoque Triangulum ATZ repræsentabit differentiam motus medii à motu vero, quæ debebit subtrahi à motu medio ut verus motus habeatur in primo quadrante, & tertio ut ex ipsâ figurâ liquet; addi autem in secundo & quarto: Cum itaque tota area circuli sive factum totius Peripheriæ in $\frac{1}{2}r$, designet totum motum nodorum durante anno sidereo, repræsentabit ATZ eam æquationem, quæ æquatio cum AZ sit y & $TZ = \sqrt{rr - yy}$ est: 117.

De Mundi Systemate.

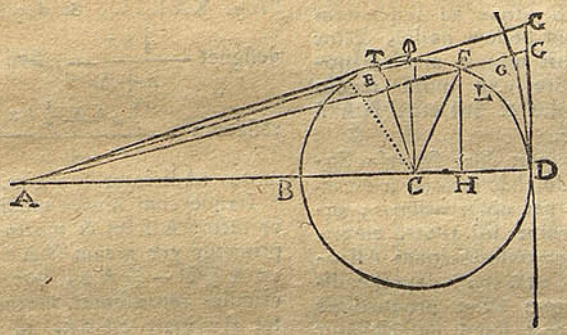
tis conſtructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, deſcribatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut ſit AB ad AC ut motus medius ad ſemiſſem motus veri mediocris, ubi nodi ſunt in quadraturis, id eſt, ut $19^{gr.}\ 18'\ 1''$.



$23'''$. ad $19^{gr.}\ 49'\ 3''\ 55'''$, atque ideo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'\ 2''\ 32'''$, ad motum poſteriorem $19^{gr.}, 49'\ 3''\ 55'''$. hoc eſt, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$; dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & ſi capiatur

117. eſt $\frac{1}{2}y\sqrt{rr-yy}$: Dividatur ergo tam circuli valor quam areæ ATZ valor per $\frac{1}{2}r$, erit Peripheria tota ad $\frac{y\sqrt{rr-yy}}{r}$ ut totus motus nodi anno ſidereo ad Æquationem quæſitam, ſive primum conſequentem duplicando & ſecundi antecedentis dimidium ſumendo quod proportionem non turbat, erit Peripheria tota ad $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ut motus ſemeſtris nodi ad Æquationem quæſitam; Sed ex Principiis Trigonometricis, ſinus ejus arcus qui foret duplus arcus NA cujus ſinus eſt y foret $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Ergo ſi deſcribatur circulus radio quocumque CB, & ſumatur arcus BF duplus, arcus NA, hoc, eſt duplus diſtantiæ Solis à nodo (quæ diſtantia per motus medios Solis & nodi haberi poteſt) erit Peripheria tota ad FH ſinum ejus arcus BF ut motus ſemeſtris nodi ad æquationem quæſitam; ideo producatur DCB in A, ita ut radius AD ſit ad radium CD ut Peripheria tota ad motum ſemeſtrem nodi ſive ut a ad $\frac{1}{4}b$, & centro A radio AD deſcribatur arcus DG & ſumatur ejus arcus longitudo quæ ſit æqualis ſinui FH, numerus graduum ejus arcus DG erit ipſa æquatio quæſita; nam ſi ſumeretur in circulo cujus radius eſt CD arcus DL cujus longitudo eſſet æqualis FH, foret tota Peripheria ſeu $360^{g.}$ ad numerum graduum in eo arcu DL contentorum ut numerus graduum motus ſemeſtris nodi ad numerum graduum æquationis quæſitæ, ſive alternando tota Peripheria ad numerum graduum motus ſemeſtris ut numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæſitæ; ſed ex conſtru-

piatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ distantiæ solis à loco nodi, per motum medium invento; & agatur AE vel AF secans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui sit ad motum totum nodi inter ipsius syzygias (id est, ad $9^{gr}.\ 11'.\ 3''.$) ut tangens DG ad circuli BFD circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus DAG usurpari potest) ad



structione cum longitudo arcus DG sumatur æqualis sinui FH, sive arcui DL, numerus graduum in eo arcu DL contentorum est ad numerum graduum in arcu DG contentorum inverse ut eorum circulorum radii, hoc est ex constructione, ut 360° ad numerum graduum motus semestris nodi, ergo numerus graduum arcus DG est ipse numerus graduum æquationis quæsitæ; Satis liquet autem arcum DG paucorum graduum esse debere, & à lineâ rectâ parum differre, hinc si in puncto D erigatur tangens ad circulum cujus radius est CD, sumaturque DG in tangente æqualis ipsi sinui FH, perinde prope erit ac si sumeretur ea longitudo secundum arcum circuli radio AD descripti, & punctum G sive in Tangente sive in arcu sumatur eodem in loco ocurret quam proximè; ita ut ex hâc constructione, angulus GAD cujus arcus DG est mensura sit ipsa æquatio quæsita, substractiva in 1°. & 3°. quadrante, additiva in 2°. & 4to. & obtinebitur juxta Trigonometriæ Principia, dicendo ut AC, sive $360^{gr} - 9^{gr}.\ 54'.\ 31''.\ 57'''$, ad CF sive CB, nempe $9^{d}.\ 54'.\ 31''\ 57'''$. hoc est, ut $a - \frac{1}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$, sive ut $35\frac{1}{5}$ ad 1. Ita sinus duplæ distantiæ Solis à nodo ad Æquationem quæsitam: Maxima autem erit æquatio in octantibus, quia area ATZ quæ æquationem repræsentat est major in octantibus quam in ullo alio loco. 117.

His probè intellectis facile inde ad veriorem computum procedere licebit.

2°. Hyp. In constructione Newtonianâ Prop. XXXII. circulus integer NAnN designat annum sidereum, simulque motum nodorum in Hypothesi quòd Sol ipse describit id spatium quo nodi reverâ ab ipso discedunt; in hâc autem Hypothesi motus nodorum est $19^{gr}.\ 49'\ 3''.\ 55'''$. & in calculis nostris per quantitatem $\frac{1}{2}b$ fuit expressum.

Si autem reverâ arcus AN repræsentet recessum Solis à nodo, tàm per motum proprium Solis quàm per medium motum nodi, tempus quo tota circumferentia NAnN describetur non erit annus sidereus, sed tempus elapsum inter syzygiam Solis Nodique & syzygiam sequentem Solis cum eodem nodo, cumque uniformi-

ad motum medium nodorum addatur ubi nodi transeunt à quadraturis ad syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi tran-

117. ter describatur ea circumferentia siquidem ad motus medios solis & nodorum refertur, sectores circuli N A n N erunt proportionales motui medio nodorum; itaque si totus circulus repræsentet motum nodorum à tempore quo sol & nodus fuere conjuncti usque ad sequentem Solis syzygiam cum eodem nodo, sector A T N repræsentabit motum medium nodorum eo tempore quo motu medio Solis & nodi, nodus & Sol arcu N A à se mutuo recessére.

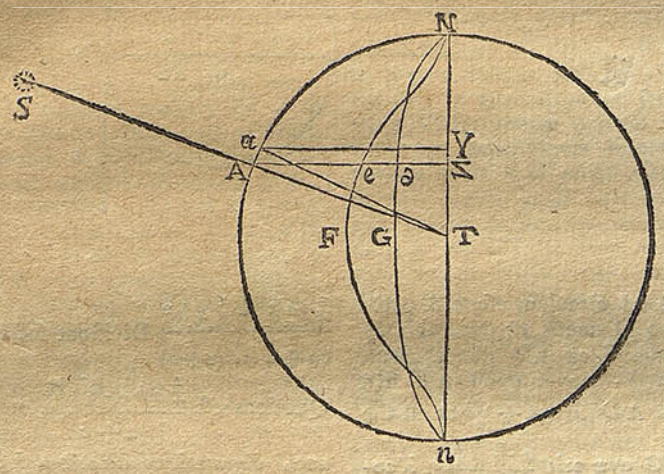
Tempus autem, inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, hâc ratione à Newtono determinatur per observationes; anno sidereo dum nempe sol 360gr. emetitur motus nodi per observationes Astronomicas 19gr. 21′. 21″. 50‴ deprehenditur, in eâdem autem erunt proportione viæ Solis & nodi quæ simul describuntur quocumque tempore, ideoque via Solis & via nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo, erunt inter se ut 360 ad 19gr. 21′ 21″ 50‴, sed illæ duæ viæ simul sumptæ 360gr. efficiunt, itaque 360 gradus dividantur in duas partes quarum una sit ad alteram ut 360gr. ad 19gr. 21′ 21″ 50‴. Hæc ultima pars quæ est 18gr. 22′. 6″ circiter, erit motus nodi inter duas syzygias Solis cum eodem nodo.

Idem motus ex calculo Prop. XXXII., hoc modo determinabitur, si ex toto circulo N A n N duplum areæ N F n tollatur residuum est verus motus nodi inter syzygias; sed valor areæ N F T erat ad quadrantem ut $\frac{b \times 766}{a+b}$ ad 1. sive proximè ut $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad 1. In eâdem vero erit ratione duplum areæ N F n (quod est quadruplum areæ N F T) ad totum circulum, ut itaque 1. ad $\frac{\frac{3}{4}b}{a+b}$ ita $\frac{1}{2}b$ qui est numerus graduum quem area circuli designat, ad numerum graduum designatum per duplum areæ N F n, qui erit itaque $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$; Cum ergo totus circulus numerum graduum $\frac{1}{2}b$ designet in Prop. XXXII., & duplum areæ N F n designet $\frac{\frac{3}{8}b^2}{a+b}$, hoc ex $\frac{1}{2}b$ tollatur, residuum $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ est verus motus nodi inter syzygias.

Itaque cum motus medius nodorum sit ut sector A T N, & motus verus nodi exprimatur per aream N A e; Æquatio est ut A T N − N A e, hoc est, cum totus circulus repræsentet motum nodorum inter syzygias, est $2rc$ ad A T N − N A e ut $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad Æquat. $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (A T N − N A e), sed in not. 116. valor areæ N A e fuit inventus $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z (omissis cæteris terminis qui per D, E &c. multiplicantur ut pote minimis). Itaque fiet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (N T A − $\frac{ar^2}{ar^2+by^2}$ N A Z):

Eum autem casum sumamus in quo A N est peripheriæ octans, quia in primâ Hypothesi liquet eo in casu Æquationem fieri maximam, fiet $y^2=\frac{1}{2}r^2$, & eâ substitutione factâ & loco N T A posito ejus valore T A Z + N A Z factâque reductione, evadet æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$ (T A Z + $\frac{\frac{1}{2}b\text{N A Z}}{a+\frac{1}{2}b}$) & cum area circuli sit .785 dum quadratum Diametri est 1, & octâns circuli N T A sit ad ejus quadrati octantem cujus dimidium est T A Z in eâdem ratione, est N T A ad T A Z ut .785 ad .5, ideo-

transeunt à syzygiis ad quadraturas; habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proximè cum

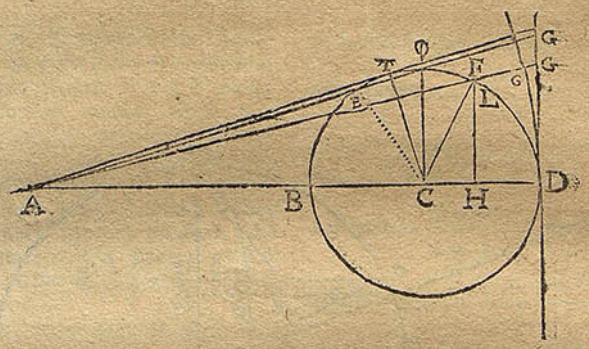


ideoque dividendo est NAZ ad TAZ ut .285 ad .5, & est NAZ = .57 TAZ unde tandem æq. evadit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc\,(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)$ TAZ Sed in hâc hypothesi est $TAZ=\frac{1}{4}r^2$; hinc æquatio fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}\right)r$ & ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2\,(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{a+.78b^2}{a+\frac{1}{2}b}r$ ad Æquationem; hoc modo autem constructur quantitas $\frac{a+.78b}{a+\frac{1}{2}b}r$, sive simplicius $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, describatur circulus B C D cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$; producatur C B in A ut sit $AB=a+\frac{1}{4}b$, ideoque $AC=a+\frac{1}{2}b$ & $AD=a+\frac{3}{4}b$, centro C erigatur per- 117

DE MUNDI SYSTEMATE.

cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream

NTA



LIB. I. pendicularis Φ ad circulum usque & pariter in extremo Diametri D ducatur tangens, ductaque linea A Φ donec secet Tangentem in G, liquet quod A C sive $a + \frac{1}{2}b$ est ad A D sive $a + \frac{3}{4}b$ ut est C Φ sive r ad D G quæ erit $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+\frac{1}{2}b}r$, ideoque erit tota circumferentia ad dimidium motus inter syzygias ut D G ad Æquationem quæsitam: sive invertendo terminos omnes & alternando ut Newtoni expressio habeatur, est Æquatio ad motum nodi inter Syzygias proximas ut D G ad circuli B E D circumferentiam.

Illa autem Æquatio quæsita erit prope æqualis angulo D A G; nam in Triangulo D A G est D G ad sinum anguli D A G sive ad ipsum angulum D A G (nam in parvis angulis, angulos pro sinubus sumere licet) ut est A G vel A D, quod est $a + \frac{3}{4}b$, ad sinum totum sive ad radium C D quod est $\frac{1}{4}b$; sed si $a + \frac{3}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ dividantur per $a + b$, quod rationem non mutat, fiatque $\frac{a+\frac{3}{4}b}{a+b}$ ad $\frac{\frac{1}{4}b}{a+b}$ ita a sive gradus 360 ad quartum, invenitur is quartus terminus $\frac{\frac{1}{4}a^2b + \frac{1}{4}ab^2}{(a+\frac{3}{4}b)(a+b)}$; Divisione factâ per $a + \frac{3}{4}b$ Quotiens est $\frac{\frac{1}{4}ab + \frac{1}{16}b^2}{a+b}$ omissis, ut licet, dignitatibus altioribus $\frac{1}{4}b$, is verò quotiens est ipsa quantitas $\frac{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quæ exprimit dimidium motus nodi inter syzygias; Ergo resumendo cum sit D G ad angulum D A G ut $a + \frac{3}{4}b$ ad $\frac{1}{4}b$ sive ut circumferentia tota ad dimidium motus nodi inter syzygias in eâque ratione sit D G ad Æquationem, ipse angulus D A G est æqualis æquationi.

Idem alio modo constabit; In ipsâ Peripheriâ D Φ B D, sumatur arcus D L æqualis D G, erit ut 360gr. ad dimidium motus nodi, ita numerus graduum in arcu D L contentorum ad numerum graduum æquationis; centro A radio A D describatur arcus & in eo sumatur longitudo D G æqualis D L, erit ut radius A D sive $a + \frac{3}{4}b$ ad radium C D sive $\frac{1}{4}b$, ita numerus graduum arcus D L ad numerum graduum arcus D G, numeri enim graduum in arcubus æqualibus sunt inverse ut eorum

radii

$NTA-NdZ$, & motum nodi per aream NAe; ut rem perpendenti

radii sed $a+\frac{3}{4}b$ est ad $\frac{1}{4}b$ ut 360gr. sive a ad dimidium motus nodi sive ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$; Est ergo 360 ad dimidium motus nodi inter syzygias ut numerus graduum arcus DL ad numerum gradum arcus DG sed ita etiam erat numerus graduum arcus DL ad numerum graduum æquationis quæsitæ, ergo numerus graduum arcus DG est ipsa æquatio quæsita, sed AG secabit arcum DG in puncto tali ut arcus inter eam lineam & punctum D interceptus sit proximè æqualis Tangenti DG, nam in parvis arcubus, Tangentes prope æquantur suis arcubus, ergo linea AG secabit arcum DG in G quamproximè, sed arcus DG cujus gradus sunt ipsa æquatio, est mensura anguli DAG, ergo angulus DAG pro æquatione usurpari potest.

Dicit autem Newtonus lineam AB debere esse ad lineam AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris quando nodi sunt in quadraturis, id est, ut 19gr. 18′. 1″. 23‴. ad 10gr. 49′. 3″. 55‴. In hâc autem constructione fecimus $AB=a+\frac{1}{4}b$ & $AC=a+\frac{1}{2}b$, res autem eodem redit, cum enim motus nodi inter syzygias sit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ demtur ex a habebitur motus Solis inter syzygias $\frac{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}b^2}{a+b}$; iste motus Solis erit ad ejus motum annuum 360gr. sive a ut motus nodi inter syzygias $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{a+b}$ ad motum annuum nodi qui itaque erit $\frac{\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2}{aa+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}ab^2}$ is itaque motus erit ad $\frac{1}{2}b$ quod exprimit semissem motus veri mediocris ubi nodi sunt in quadraturis ut $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{8}ab^2$ ad $\frac{1}{2}aab+\frac{1}{4}abb-\frac{1}{16}b^3$; sive omisso termino $\frac{1}{16}b^3$, divisis reliquis terminis per ab & duplicatis ut $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$; Ergo in constructione nostra est AB sive $a+\frac{1}{4}b$ ad AC sive $a+\frac{1}{2}b$ ut motus annuus nodi, ad semissem ejus quod toto anno describeretur eo motu quem habent nodi in quadraturis; Itaque erit etiam $a+\frac{1}{4}b$ ad $a+\frac{1}{2}b$ sive AB ad AC ut motus medius nodi ad semissem motus veri in quadraturis ut statuit Newtonus; Observandum quidem ex hâc constructione æquationem futuram maximam quando linea AG tangit circulum, quod quidem incidit paulò ante punctum Φ, & si à puncto A ducatur tangens AT erit ut AC ad CT ita sinus totus ad Cosinum anguli BCT, qui angulus, BCT deprehendetur esse $88^{\circ}\frac{1}{2}$. cujus dimidium $44\frac{1}{4}^{\circ}$. est verus locus medius in quo maxima fit æquatio, ab Octante adeo parum diffitus ut in sequentibus æquationem maximam fieri in Octantibus supponere liceat, tanto magis quod hæc æquatio quæ vere maxima foret ab ea quæ fit in Octantibus insensibiliter differret.

117.

3ª. *Hypoth.* Finximus arcum AN esse octantem Peripheriæ, & eo in casu ostendimus constructionem Newtonianam exhibere æquationem illi loco debitam, in aliis distantiis Solis à nodo paulo minus accurata est constructio, sed errore exiguo; ubivis enim, æquatio erit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}$

$$(TAZ+NAZ-\frac{ar^2}{ar^2+by^2}NAZ)=$$

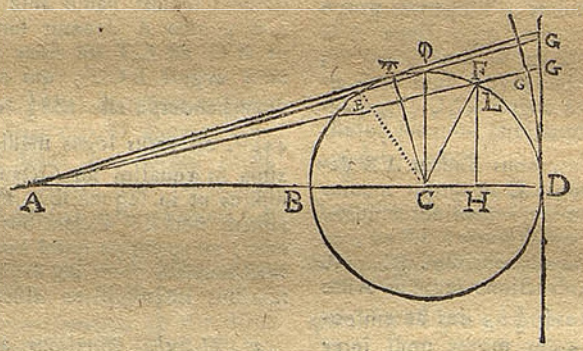
$$\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}(TAZ+\frac{by^2}{ar^2+by^2}NAZ)$$

sumatur NAZ esse ad TAZ ut $r-\sqrt{rr-yy}$ ad $\sqrt{rr-yy}$, quod quidem verum est de spatio Rectilineo NAZ non vero de curvilines NAZ, sed propter exiguitatem fractionis $\frac{by^2}{ar^2+by^2}$ erro-

DE MUNDI SYSTEMATE.

ti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris

117. rorem non magnum pariet, fit æquatio $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2rc(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)$ TAZ sive numeratore & denominatore quadruplicato quod valorem non mutat, fit $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{4c\times 2(a+b)}\left(\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\right)\frac{4TAZ}{r}$, quæ quantitas ad hanc proportionem revocatur, $4c$ sive tota circumferentia est ad $\frac{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}b^2}{2(a+b)}$ quod est dimidium motus nodi inter syzygias ut $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$ ad Æquationem quæsitam.



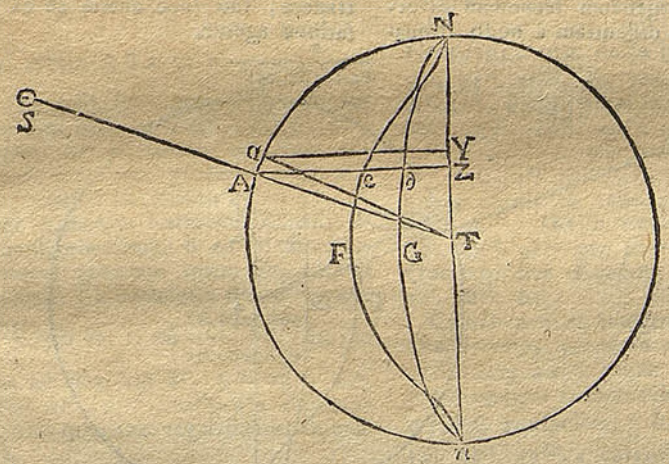
Ut construatur hæc quant. $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$, fiat ut prius circulus BFD cujus radius $BC=r=\frac{1}{4}b$, ideoque $b=4r$, producaturque CB in A ita ut sit $AB=a+\frac{1}{4}b$, sumatur arcus BF duplus arcus AN, ductoque perpendiculo FH, & tangente erectâ in D ductâque AFG erit DG prope æqualis quantitati $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$; est enim ex constructione AH ad AD ut FH ad DG ideoque $DG=\frac{AD}{AH}FH$ est autem $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{r^2-y^2}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}=\frac{AD}{AH}\times FH$, nam posito $4r$ loco b & utroque termino diviso per r^2, fit $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}$; Valor mediocris quadrati y^2 est $\frac{1}{2}r^2$, unde $\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}=\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}$ & $\sqrt{\frac{1}{2}}$ est paulo major quam $\frac{2}{3}$ hinc $\frac{4y^2}{r\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{6y^2}{r}=3r$; Præterea

$4y^2$

mestris motus nodorum. Est & (y) æquatio menstrua, sed quæ

117.

$\frac{2y^2}{r}$ valore suo medioci est r, est etiam $\frac{2y^2}{r}$ sinus versus arcus dupli ejus cujus sinus est y, ideoque $\frac{2y^2}{r}$ est accuratè æquale BH unde $a+\frac{4y^2}{r}$ est $a+r+$BH, sed $a+r$ per constructionem est AB, ergo $a+\frac{4y^2}{r}$ est AH, ideoque $\frac{a+\frac{4y^2}{\sqrt{rr-yy}}}{a+\frac{4y^2}{r}}=\frac{a+3r}{AH}$ absque errore sensibili, quia si $\frac{2y^2}{r}$ minus sit aut majus quam r, quoniam idem valor in numeratore ac denominatore occurrit, & ea quantitas non est magna respectu totius AH, manebit idem fractionis valor; sed $a+3r=$AD ideoque fractio $\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-y^2}}}{ar^2+by^2}$ est proximè æqualis fractioni $\frac{AD}{AH}$.



Est vero accuratè $\frac{4TAZ}{r}=$FH, namTriangulum $TAZ=\frac{AZ\times TZ}{2}$, est $AZ=y$, $TZ=\sqrt{rr-yy}$, ergo $\frac{4TAZ}{r}=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$; Sed, ex Principiis Trigonometricis, sinus arcus dupli ejus cujus sinus est y, est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, ergo sinus arcus BF qui duplus est arcus AN cujus sinus est y est $\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}$, sed sinus arcus BF est FH ex constructione, ideoque $FH=\frac{2y\sqrt{rr-yy}}{r}=\frac{4TAZ}{r}$, & quantitas $\frac{AD}{AH}\times FH=\frac{ar^2+\frac{bry^2}{\sqrt{rr-yy}}}{ar^2+by^2}\times\frac{4TAZ}{r}$.

Quibus expositis, cætera, nempe angulum DAG pro æquatione sumi posse, lineas AB ad AC sumendas esse ut motus medius nodi ad semissem ejus motus in quadraturis, cætera, inquam, patent ut in Hypothesi secundâ.

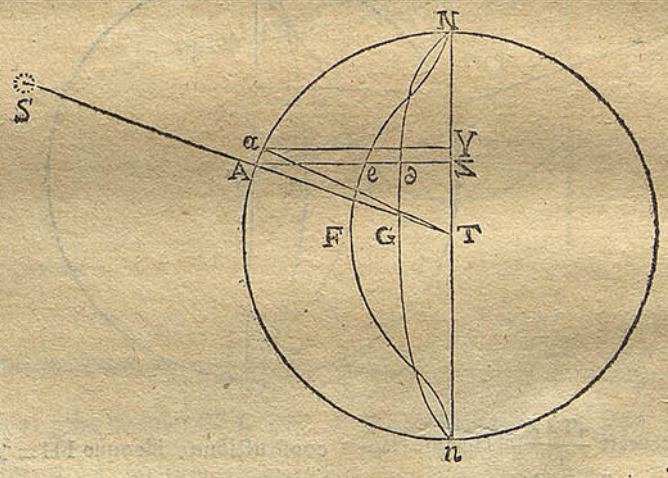
(y) * *Est & æquatio menstrua*, ex iis quæ

DE MUNDI SYSTEMATE

quæ ad inventionem latitudinis lunæ minime necessaria est. Nam cum variatio inclinationis orbis lunaris ad planum ecliptiæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; inæqualitas & æquatio menstrua nodorum ita se mutuò contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinandâ latitudine lunæ negligi possunt.

Corol. Ex hac & præcedente propositione liquet quod nodi in (z) syzygiis suis quiescunt, in quadraturis autem regrediuntur

117. quæ in Prop. XXX. & XXXI. dicta sunt, liquet quod dum Luna motu menstruo circa terram fertur, nodi satis inæqualiter feruntur hinc si locus nodorum ex eorum motu medio æstimaretur, locus ille medius à vero nonnihil differret, idque quod esset corrigendum secundum diversam Lunæ ipsius distantiam à nodo Æquatio menstrua meritò diceretur, sed cum totus motus menstruus Lunæ non sit 2gr. & compensetur latitudinis error qui ex falsâ nodi positione oriretur per inclinationis Lunæ inæqualitates, operæ pretium non duxit Newtonus hanc Æquationem tradere, suo loco autem de eâ compensatione agetur.



(z) * *Liquet quod nodi in syzygiis quiescunt.* Etenim motus nodorum est ut area AZYa dempta area eZY, ubi verò nodi sunt in syzygiis ideoque ubi punctum A incidit in N, evanescit linea AZ ac per consequens area AZYa−eZY nullus itaque est nodorum motus. *In quadraturis autem regrediuntur motu horario* 16″ 19‴ 26ⁱᵛ. Si nodi distent 90gr. à Sole, AZ fit æqualis AT, & ZY=Aa, ideoque area AZYa quæ est Parallelogrammum ejusdem altitudinis ac baseos ac Triangulum ATa est ejus duplum, cumque eZ sit ad AZ ut AZ q ad 9.0827646 AT q + AZ q sitque AZ=AT in hoc casu, sit eZ= $\frac{AT}{10.08276}$ & area eZY est $\frac{AT \times Aa}{10.0827646}$ sive duplum Trianguli ATa divisum per 10.0827646 hinc motus nodi qui exprimitur per aream AZYa−eZY, est in hoc casu

tur motu horario $16^{II}. 19^{III}. 26^{IV}.$ (a) Et quod æquatio motus nodorum in octantibus sit $18^{gr}. 30'$. Quæ omnia cum phænomenis cœlestibus probè quadrant.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.

Scholium.

Aliâ ratione motum nodorum *J. Machin Astron. Prof. Gresham.* & *Hen. Pemberton* M D. seorsum invenerunt. Hujus methodi mentio quædam alibi facta est. Et utriusque chartæ, quas vidi, duas propositiones continebant, & inter se in utrisque congruebant. Chartam vero D. *Machin*, cum prior in manus meas venerit, hic adjungam.

DE

casu ad aream ATa ut $2 - \frac{2}{10.08827646}$ ad 1, sed quia tota area NAnN motum annuum designat $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. Triangulus ATa motum horarium repræsentans numerum graduum designabit qui obineretur dividendo $19^{gr}. 49'. 3''. 55'''$. per numerum horarum in anno sidereo comprehensarum & ea divisione factâ numerus graduum quem repræsentat Triangulus ATa invenietur $8''. 8'''. 18^{IV}. 51^{V}$. si itaque fiat 1. ad $\frac{18.08827646}{10.08827646}$ ita iste numerus ad quartum $8''. 8'''. 18^{V}. 51^{V}$. invenietur $16''. 19'''. 26^{IV}$. qui erit motus horarius quo nodi regrediuntur in quadraturis.

(a) * *Et quod Æquatio motus nodorum in octantibus sit* $18^{gr}. 30'$. Ex secundâ hypothesi notæ 117. Æquatio in Octantibus per hanc proportionem invenitur, ut tota circumferentia circuli BFDB ad dimidium motus nodi inter syzygias quod est $9^{gr}. 11'. 3''$. ita $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{2}b} r$ ad Æquationem quæsitam; est autem b ad a ut 1 ad 9.0827646, itaque $a + .78b$ est ut 9.8627646 & $a + \frac{1}{2}b$ ut 9.5827646 itaque fractio $\frac{a + .78b}{a + \frac{1}{4}b} = \frac{9.8627646}{9.5827646} =$ 1.0292191, quæ ducta in $r = \frac{1}{4}b = 9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. dat $10^{d}. 11'. 54''. 15'''. 8^{V}. 11^{V}$., ducta iterum in $9^{gr}. 11'. 3''$, dat $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$., sed si radius r circuli BFDB exprimatur per numerum $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., longitudo circumferentiæ continebit tales gradus $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Diviso itaque numero $93^{gr}. 39'. 49''. 48'''$ per $62^{gr}. 13'. 39''. 50'''$. Quotiens sive Æquatio quæsita est $1^{gr}. 30'. 18''$. &c. 117.

Calculum hunc integrum exhibuimus ut ostenderemus quomodo adhibendæ forent quantitates $4c$ & r quæ circumferentiam totam ejusque radium exhibent, cum enim is radius æquipolleat $\frac{1}{4}b$, & $\frac{1}{4}b$ sit $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$., cavendum ne $4c$ sive circumferentia tota, 360^{gr}. assumatur, sed debet assumi ejus numeri graduum qui sit ad $9^{gr}. 54'. 31''. 57'''$. ut est circumferentia ad Radium.

De hâc autem Æquatione semestri non agunt De La Hirius & Cassinus in Tabulis Astronomicis, nullius enim usus est ad calculum Eclipsium ad quem potissimum accommodantur pleræque Lunares Tabulæ; hanc autem Æquationem habent Tabulæ Rudolphinæ (pag. 87. Tabul.) & in Octantibus distantiæ Solis à nodo hanc faciunt $1^{gr}. 39'. 46''$., utrum accuratioribus Tabulis hæc æquatio ad $1^{gr}. 30'. 18''$, magis accederet ignoramus, at, qui pro-

De Motu Nodorum Lunæ.

Propositio I.

„*Motus solis medius à nodo, definitur per medium proportio-*
„*nale geometricum, inter motum ipsius solis medium, & motum*
„*illum mediocrem quo sol celerrimè recedit à nodo in quadraturis.*

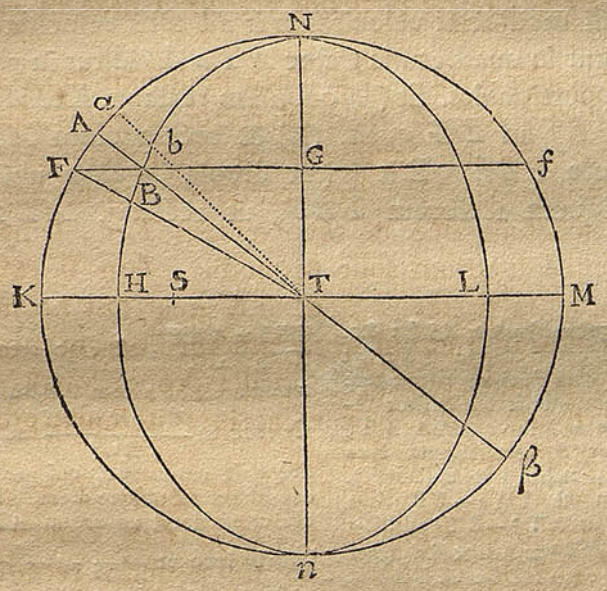
„Sit *T* locus ubi terra, *Nn* linea nodorum lunæ ad tempus
„quodvis datum, *KTM* huic ad rectos angulos ducta, *TA*
„recta circum centrum revolvens eâ cum velocitate angulari
„quâ sol & nodus à se invicem recedunt, ita ut angulus inter
„rectam quiescentem *Nn* & revolventem *TA*, semper fiat æ-
„qualis distantiæ locorum solis & nodi. Jam si recta quævis
„*TK* dividatur in partes *TS* & *SK* quæ sint ut motus solis
„horarius medius ad motum horarium mediocrem nodi in qua-
„draturis, & ponatur recta *TH* media proportionalis inter par-
„tem *TS* & totam *TK*, hæc recta inter reliquas proportiona-
„lis erit motui medio solis à nodo.

„Describatur enim circulus *NKnM* centro *T* & radio *TK*,
„eodemque centro & semiaxibus *TH* & *TN* describatur ellip-
„sis *NHnL*, & in tempore quo sol à nodo recedit per ar-
„cum *Na*, si ducatur recta *Tba*, area sectoris *NTa* exponet
„summam motuum nodi & solis in eodem tempore. Sit igitur
„arcus *aA* quam minimus quem recta *Tba* præfatâ lege revol-
„vens in datâ temporis particulâ uniformiter describit, & sector
„quam minimus *TAa* erit ut summa velocitatum quâ sol &
„nodus tum temporis seorsim feruntur. Solis autem velocitas
„ferè uniformis est, utpote cujus parva inæqualitas vix ullam
„indu-

117. bè norunt quam difficile sit observationes loci Nodi accuratissimas habere extrà Eclipses, & quantùm parvus error in latitudine Lunæ & in verâ inclinatione orbitæ assignandâ locum nodi mutet, non invenient hoc discrimen ꝑ' obesse, quominus dici possit æquationem ita inventam cum Phænomenis cœlestibus probè quadrare, & facile suspicabuntur errorem hunc observationi potius quam calculo esse tribuendum.

SCD LYON 1

„inducit in medio nodorum motu varietatem. Altera pars hu- „jus ſummæ nempe velocitas nodi in mediocri ſuâ quantitate, „augetur in receſſu à ſyzygiis in duplicatâ ratione ſinus diſtan- „tiæ ejus à ſole; per Coroll. Prop. 31. Lib. 3^tii. Princip. & „cum maxima eſt in quadraturis ad ſolem in *K*, (b) eandem „rationem obtinet ad ſolis velocitatem ac ea quam habet *SK*



„ad *TS* hoc eſt (c) ut (differentia quadratorum ex *TK* & *TH* „vel) (d) rectangulum *KHM* ad *TH* quadratum. Sed ellip- „ſis *NBH* dividit ſectorem *ATa* ſummæ harum duarum ve- „locitatum exponentem, in duas partes *ABba* & *BTb* ipſis „velocitatibus proportionales. Producatur enim *BT* ad circu- „lum in *β*, & à puncto *B* demittatur ad axem majorem per- „pen-

(b) * *Eamdem rationem obtinet* per conſtructionem.

(c) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH — ad TH quadratum.* Eſt ex conſtructione TK ad TH ut TH ad TS, eſt ergo TK^2 ad TH^2 ut TK ad TS, & dividendo $TK^2 - TH^2$ ad TH^2 ut TK — TS ſive SK ad TS. 117.

(d) * *Ut differentia quadratorum ex TK & TH vel rectangulum KHM.* Eſt enim $TK^2 - TH^2 = KH \times HM$, per 5^am. Lib. 2^i. Elem. Euclidis.

DE MUNDI SYSTEMATE.

„pendicularis *BG*, quæ utrinque producta occurrat circulo in „punctis *F* & *f*, & (e) quoniam ſpatium *ABba* eſt ad ſecto„rem *TBb* ut rectangulum *ABβ* ad *BT* quadratum (rectangulum „enim illud æquatur differentiæ quadratorum ex *TA* & *TB* „ob rectam *Aβ* æqualiter & inæqualiter ſectam in *T* & *B*.) „Hæc igitur ratio ubi ſpatium *ABba* maximum eſt in *K*, ea„dem erit ac ratio rectanguli *KHM* ad *HT* quadratum, ſed „maxima nodi mediocris velocitas erat ad ſolis velocitatem in hâc „ratione. Igitur in quadraturis ſector *ATa* dividitur in partes velo„citatibus proportionales. Et (f) quoniam rectang. *KHM* eſt ad *HT* „quadr. ut *FBf* ad *BG* quad. (g) & rectangulum *ABβ* æqua„tur rectangulo *FBf*. Erit igitur areola *ABba* ubi maxima „eſt ad reliquum ſectorem *TBb*, ut rectang. *ABβ* ad *BG* „qua-

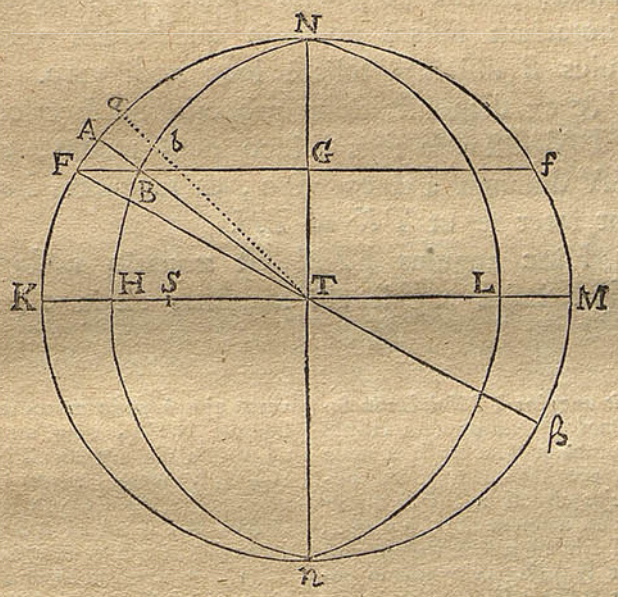
117. (e) * *Et quoniam ſpatium ABba* &c. Sector TAa eſt ad ſectorem TBb ut AT^2 ad BT^2, (quia propter parvitatem anguli ATa, non differt ſenſibiliter ſector BTb ab eo qui inter lineas AT, aT interciperetur & terminaretur arcu circuli centro T, radio TB deſcripti). Dividendo autem eſt $TAa - TBb$ ſive ABba ad TBb ut $AT^2 - BT^2$ ad BT^2; eſt verò $AT^2 - BT^2 = AB \times B\beta$ (per 5. 2^i. Lib. El.) ergo *ABba ad TBb ut ABβ ad BI quadratum.*

(f) * *Et quoniam rectangulum KHM eſt ad HT quad. ut FBf ad BG quad.* Ex natura Ellipſeos & circuli circumſcripti, eſt KT ad HT ut FG ad BG, & quadrando KT^2 ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, & dividendo $KT^2 - HT^2$ ad HT^2 ut FG^2 ad BG^2, ſed (per 5^am. Lib. 2^i. Elem.) $KT^2 - HT^2 = KH \times HM$ & $FG^2 - BG^2 = FB \times Bf$ ergo KHM ad HT^2 ut FBf ad BG^2.

(g) * *Et rectangulum ABβ = FBf* (per 35. 3^i. Elem.) hoc ratiocinium ita exprimi poteſt, area ABba ubi maxima eſt, eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad BG^2 ergo ubi maxima eſt ABba eſt $\frac{TB \times AB\beta}{BG^2}$, in aliis verò locis area ABba eſt ad TBb ut $AB\beta$ ad BT^2, ergo illis in locis eſt $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$, eſt ergo area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{TBb \times AB\beta}{BG^2}$ ad $\frac{TBb \times AB\beta}{BT^2}$ ſive quia motus Solis qui per aream TBb exprimitur eſt ubique idem, eſt area ABba ubi maxima eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut $\frac{1}{BG^2}$ ad $\frac{1}{BT^2}$ ſive ut BT^2 ad BG^2, ſed in Triangulo BTG eſt BT ad BG ut ſinus anguli recti G ad ſinum anguli BTG per Principia Trigonom. & diſtantia Solis à nodo ubi area ABba eſt maxima, nempe in K, menſuratur per angulum rectum, & ubi eſt in loco quovis A per angulum BTG, ergo area ABba ubi maxima eſt, eſt ad aream ABba in alio quovis loco ut quadrata ſinuum diſtantiæ Solis à nodo in utrovis loco, ſed in eâ ſunt ratione motus nodorum in iis diſtantiis; Ergo ut eſt area ABba ubi maxima eſt ad motum nodi in eo loco, ita eſt area ABba in alio quovis loco ad motum nodi in eo loco, ſed ubi area ABba maxima eſt, eſt ad motum nodi ut BTb ad motum Solis, ergo cum areæ BTb & motus Solis ubique eadem maneant, eſt etiam in quovis loco area ABba ad motum nodi ut area BTb

ad

„quadr. Sed ratio harum areolarum ſemper erat ut $ABβ$ re-
„ctang. ad BT quadratum; & propterea areola $ABba$ in lo-
„co A minor eſt ſimili areola in quadraturis, in duplicatâ ra-
„tione BG ad BT hoc eſt in duplicatâ ratione ſinus diſtantiæ
„ſolis à nodo. Et proinde ſumma omnium areolarum $ABba$
„nempe ſpatium ABN erit ut motus nodi in tempore quo ſol
„digreditur à nodo per arcum NA. Et ſpatium reliquum nem-



„pe ſector ellipticus NTB erit ut motus ſolis medius in eodem
„tempore. Et propterea quoniam annuus motus nodi medius,
„is eſt qui fit in tempore quo ſol periodum ſuam abſolverit,
„motus nodi medius à ſole erit ad motum ipſius ſolis medium,
„ut area circuli ad aream ellipſeos, hoc eſt ut recta TK ad re-
„ctam TH mediam ſcilicet proportionalem inter TK & TS; vel
„quod eodem redit ut media proportionalis TH ad rectam TS.

PRO-

ad motum Solis ſive alternando eſt ubique $ABba$ ad BTb ut motus nodi ad motum Solis. *Et proinde ſumma omnium* 3.17.
ABba &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

PROPOSITIO II.

„*Dato motu medio nodorum lunæ invenire motum verum.*

„Sit angulus *A* distantia solis à loco nodi medio, sive motus „medius solis à nodo. Tum si capiatur angulus *B* cujus tangens „sit ad tangentem anguli *A* ut *TH* ad *TK*, hoc est in subdu„plicatâ ratione motus mediocris horarii solis ad motum me„diocrem horarium solis à nodo in quadraturis versante; erit „idem angulus *B* distantia solis à loco nodi vero. Nam jun„gatur *FT* & ex demonstratione propositionis superioris (h) erit „angulus *FTN* distantia solis à loco nodi medio, angulus au„tem *ATN* distantia à loco vero, & tangentes horum angu„lorum sunt inter se ut *TK* ad *TH*.

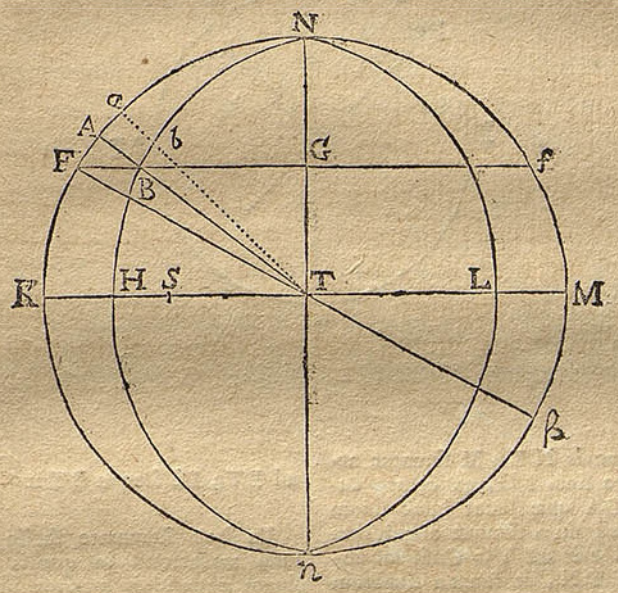
„*Coroll.* Hinc angulus *FTA* est æquatio nodorum lunæ, „(i) sinusque hujus anguli ubi maximus est in octantibus, est „ad

117. (h) * *Erit angulus FTN distantia Solis à loco nodi medio.* Cum circulus NKnM repræsentet totum motum Solis à nodo inter syzygias proximas cum eodem nodo, sectores ejus circuli ut FTN repræsentabunt motum medium Solis à Nodo, tempore quod erit ad totum tempus motus Solis inter syzygias cum eodem nodo, ut erit is sector assumptus ad totum circulum.

Ducatur verò FG quæ occurrat Ellipsi in B, cumque sectores Elliptici BTN repræsentent Solis motum qui uniformis supponitur, ii sectores BTN sunt proportionales tempori; sed sector Ellipticus BTN erit, ex natura Ellipseos & circuli circumscripti, ad totam Ellipsim ut sector circularis FTN ad totum circulum, ideoque tempus quo Solis motus repræsentabitur per BTN erit idem ac tempus quo Sol à nodis recesserit motu medio repræsentato per FTN, sed dum Sol describit sectorem BTN, vero motu recedit à nodo sectore NTA, per dem. prop. super. ergo sector FTN repræsentat medium motum Solis à nodo eo tempore quo verus ejus à nodo motus repræsentari debet per NTA, ergo medius motus est ad verum ut angulus TN ad angulum ATN, Tangentes autem horum angulorum, sumendo TG pro radio, sunt FG & BG, & FG est ad BG ut KT ad KH ex naturâ circuli & Ellipseos.

(i) * *Sinusque hujus anguli in octantibus est ad Radium ut KH ad TK + TH.* Ex Principiis Trigonometricis, est sinus hujus anguli FTA qui est æquatio nodorum Lunæ ad sinum anguli TFG, qui in hoc casu est 45gr. (cujus ergo sinus est $TA\sqrt{\frac{1}{2}}$) ut est FB ad BT, sive omnes terminos quadrando; est quad. sinus Æquationis ad $\frac{TA^2}{2}$ ut FB^2 ad BT^2 sive tollendo fractionem, est quadr. sinus Æquationis quæsitæ ad TA^2 ut FB^2 ad $2BT^2$, sed $BT^2 = BG^2 + TG^2$ & in octantibus est $TG = FG$ sive $BG + BF$ cujus quad. est $BG^2 + 2BG \times BF + BF^2$ hinc $BT^2 = 2BG^2 + 2BG \times DF + BF^2$ & $2BT^2 = 4BG^2 + 4BG \times BF + 2BF^2$, cujus Radix quadrata (negligendo BF^2) est

„ad radium ut KH ad $TK+TH$. Sinus autem hujus æqua-
„tionis in loco (k) quovis alio A est ad sinum maximum, ut
„sinus summæ angulorum $FTN+ATN$ ad radium: hoc est
„ferè ut sinus duplæ distantiæ solis à loco nodi medio (nempe
„$2FTN$) ad radium.



Scholium.

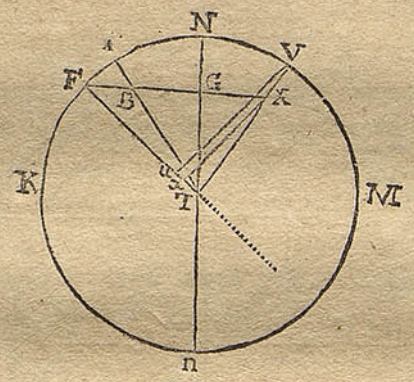
„Si motus nodorum mediocris horarius in quadraturis sit
„$16''.\ 16'''.\ 37^{iv}.\ 42^{v}.$ hoc est in anno toto sidereo $39°.\ 38'.$
„$7''$.

est $2BG+BF=FG+BG$: Ergo tandem cum sit quad. sinus Æquationis quæsitæ ad TA^2 ut est FB^2 ad $2BT^2$; Radices quadratas omnium terminorum sumendo est sinus Æquationis ad TA sive ad Radium ut est FB ad $FG+BG$, sed est BF ad $FG+BG$ ut KH ad $TK+TH$, hinc tandem, sinus Æquationis maximæ est ad radium ut KH ad $TK+TH$. 117.

(k) * *Sinus autem Æquationis in loco quovis alio &c.* Ut hoc commode demonstretur hoc Lemma adhibendum est.

DE MUNDI SYSTEMATE.

„7′′. 50′′′. erit (l) *TH* ad *TK* in ſubduplicatâ ratione numeri 9,082764 ad numerum 10,0827646, hoc eſt ut „18,



§ 17. In circulo quovis N K n M ſumatur arcus N F ejuſque ſinus F G, ex centro ducatur recta T B A quæ ſecet hunc ſinum in B, dico quod ſinus ſummæ angulorum F T N, A T N erit ad T G Coſinum anguli aſſumpti F T N, ut ſumma linearum F G, B G, ad lineam B T.

Ex alterâ parte puncti N ſumatur arcus N V = N A, ducatur T V & producatur F G quæ occurrat radio T V in X, ductoque radio F I eoque producto ſi opus eſt, ducantur, in ipſum perpendiculares X x, V u.

Liquet ex conſtructione, lineam B T eſſe æqualem lineæ X T, lineam G X eſſe æqualem lineæ B G, ideoque totam F X eſſe æqualem ſummæ linearum F G, B G; liquet pariter lineam V u eſſe ſinum arcus F V qui eſt ſumma arcuum N F & N V ſive N A, & propter Triangula F X x, F T G ſimilia, ob angulum F communem & rectos x & G eſt T F ad T G ut F X ad X x, & propter Triangula ſimilia u V T, x X T eſſe V u ad T V ſive T F ut X x ad T X ſive B T; unde ex perturbato ordine fit V u ad T G ut F X ſive F G + B G ad B T; Eſt itaque $BT = \frac{(FG+BG)TG}{Vu}$.

Ex hoc Lemmate facile probatur ſinum æquationis in quovis loco eſſe ad ſinum æquationis maximæ ut ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ad radium; nam ex Principiis Trigonometricis, eſt ſinus Æquationis quæſitæ ſive ſinus anguli F T B ad ſinum anguli F (qui eſt T G Coſinus nempe anguli F T N) ut eſt B F ad B T hoc eſt, ut eſt B F ad $\frac{(FG+BG)TG}{Vu}$ per Lemma; ducatur uterque conſequens in $\frac{Vu}{TG}$ fiet ſinus æquationis quæſitæ ad V u qui eſt ſinus ſummæ angulorum F T N + A T N ut B F ad F G + B G, ſed ex notâ præcedenti eſt B F ad B F + B G ut K H ad T K + T H, & eſt K H ad T K + T H ut ſinus æquationis maximæ ad Radium, hinc tandem, ſinus æquationis cujuſvis ad ſinum ſummæ angulorum F T N + A T N, ut ſinus æquationis maximæ ad Radium.

(l) * *Erit TH ad TK in ſubduplicatâ*

„18,6524761 ad 19,6524761. Et propterea *TH* ad *HK* ut „18,6524761 ad 1. hoc est ut motus solis in anno sidereo ad „motum nodi medium 19°. 18′, 1″. $23'''\frac{2}{5}$. LIBER TERTIUS. PROP. XXXIII. PROBL. XIV.

„At si motus medius nodorum Lunæ in 20 annis Julianis „sit 360°. 50′. 15″. sicut ex observationibus in theoriâ lunæ „adhibitis deducitur: motus medius nodorum in anno sidereo „erit 19°. 20′. 31″. 58‴. Et *TH* erit ad *HK* ut 360gr. „ad 19°. 20′. 31″. 58‴. hoc est ut 18,61214 ad 1. unde „motus mediocris horarius nodorum in quadraturis evadet „16″. 18‴. 48iv. Et æquatio nodorum maxima in octanti„bus 1°. 29′ 57″.

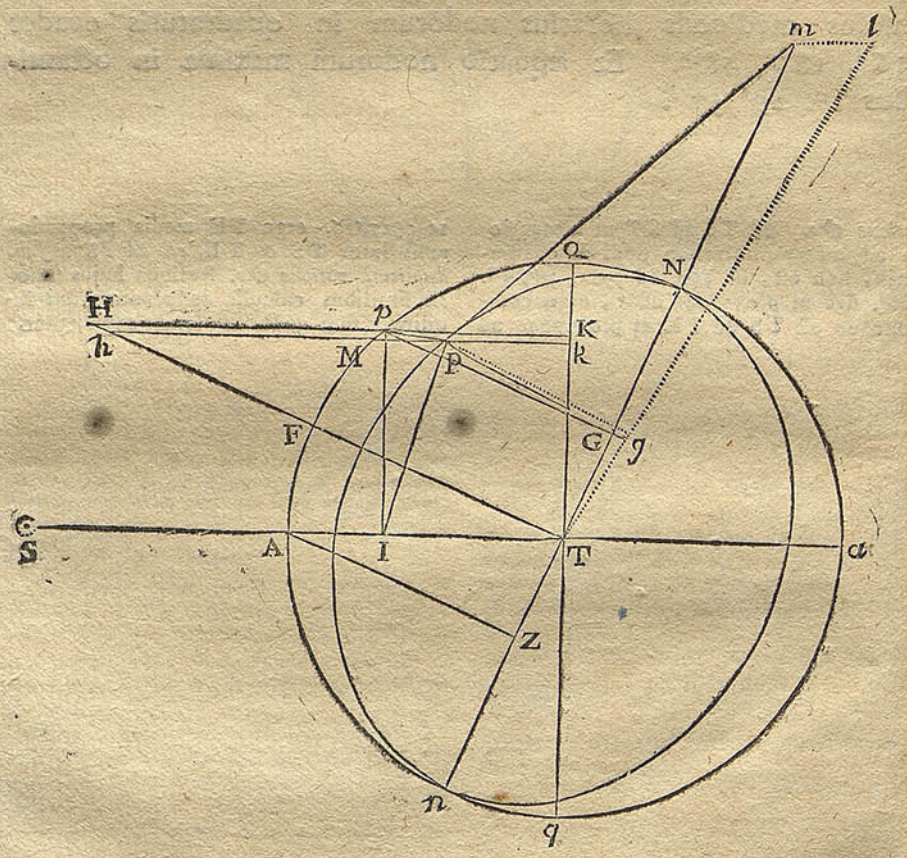
ratione &c. Est TS ad SK ut motus Solis ad motum horarium nodi in quadraturis, hoc est, ut 360. ad 39gr. 38′. 7″. 50‴. sive ut 9.0827646 ad 1, ergo componendo est TS ad TK ut 9.0827646 ad 10.0827646. ergo TH media proportionalis inter TS & TK, *est ad TK in subduplicatâ ratione &c.* Reliqua hujus scholii similibus calculis deducuntur, qui faciliores sunt quàm ut plenius explicentur. 117

De Mundi Systemate.

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire variationem horariam inclinationis orbis lunaris ad planum eclipticæ.

Designent *A* & *a* syzygias; *Q* & *q* quadraturas; *N* & *n* nodos; *P* locum lunæ in orbe suo; *p* vestigium loci illius in



plano eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, *pG* & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* inclinatio orbis lunaris ad planum eclipticæ,

ticæ, ubi luna versatur in P; & angulus PgP inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; ideoque angulus GPg variatio momentanea inclinationis. Est (m) autem hic angulus GPg ad angulum GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus GTg (per prop. xxx.) sit ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times PG \times AZ$ ad AT *cub.* erit angulus GPg (seu inclinationis horariæ variatio) ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 3^{vi}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* *QEI.*

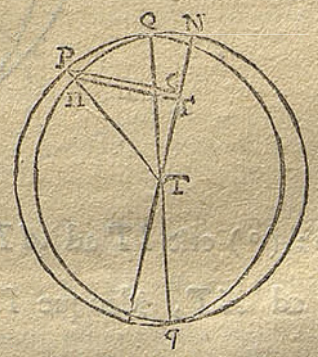
Hæc ita se habent ex hypothesi quod luna in orbe circulari uniformiter gyratur. Quod si orbis ille ellipticus sit, motus mediocris nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. (n) Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.

Co-

(m) *Est autem angulus GPg ad angulum.* In Triangulo PGg, sinus anguli GPg est ad lineam Gg, ut sinus anguli PGg ad Pg (sive PG, nam Pg & PG quam minimum differunt) si verò PG assumatur pro radio, sinus anguli PGg est Pp, ergo sinus anguli GPg est ad Gg ut Pp ad PG.

In Triangulo GTg, est Gg ad sinum anguli GTg ut Tg sive TG ipsi proximè æqualis ad sinum Anguli Recti in G qui est radius pro quo PG hic assumitur ergo ex æquo, sinus Anguli GPg est ad sinum anguli GTg ut TG ad PG & Pp ad PG conjunctim, & quia sinus parvorum Angulorum sunt ut ipsi Anguli, est *angulus GPg ad angulum* &c.

(n) * *Et in eâdem ratione minuetur etiam inclinationis variatio.* Ex propositionis demonstratione liquet quod variatio inclinationis est ad motum nodorum ut Pp ad PG (sive ut sinus inclinationis plani ad Radium) & ut PG ad TG; sumatur Π in Ellipsi ad eamdem distantiam à nodo ac P in circulo, ratio PG ad TG eadem erit ac ratio ΠΓ ad TΓ, per construction. cum autem hic agatur de quantitate mediocri sumatur eamdem esse plani inclinationem sive agatur de Plano Elliptico sive de plano circulari; Ergo variatio Inclinationis erit semper ut motus nodorum sive agatur de plano Elliptico sive de plano circulari; sed motus nodo- 117

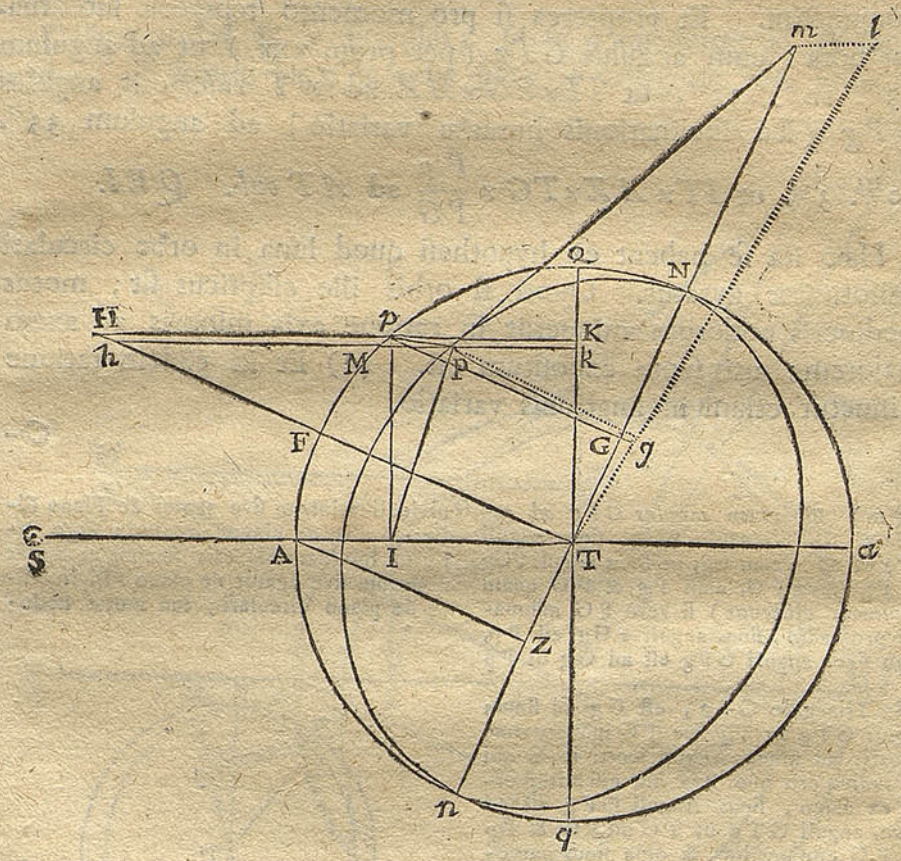


rum mediocris in orbe circulari est ad ejus motum in orbe Elliptico ut axis major ad minorem per Cor. Prop. XXXI.

In eâdem etiam ratione minuetur inclinationis variatio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 1. Si ad *Nn* erigatur perpendiculum *TF*, sitque *pM* motus horarius lunæ in plano ecliptícæ; & perpendicula *pK*, *Mk* in *QT* demissa & utrinque producta occurrant *TF* in *H*



& *h*: (o) erit *IT* ad *AT* ut *Kk* ad *Mp*, & *TG* ad *Hp* ut *TZ* ad *AT*, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc

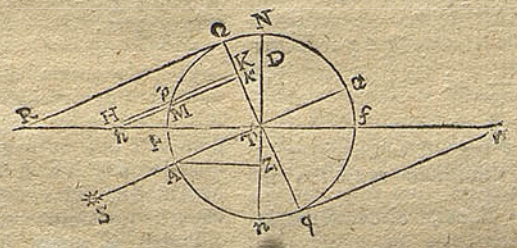
117. (o) * *Erit IT ad AT ut Kk ad Mp.* Est, ex naturâ circuli, ordinata pK cui æqualis est IT ad Radium AT, ut fluxio abcissæ Kk ad fluxionem arcus Mp, *& TG ad Hp ut TZ ad AT* producatur HpK ita ut occurrat lineæ Nn in D, propter Parallelas, HD, AT & HT, AZ per constructionem, est DT ad HD ut TZ ad AT, est pariter eamdem ob rationem DG ad pD ut TZ ad AT, quare sumendo differentiam terminorum duarum priorum rationum utriusque rationis *est TG ad Hp ut TZ ad AT.*

SCD LYON 1

est, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea inclinationis variatio horaria ad $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$ ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.*

Corol. 2. Ideoque si terra & nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota inclinationis variatio tempore mensis illius foret ad $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$, ut (P) aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & − conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (q) id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus

(p) * *Ut aggregatum omnium arearum HpMh sub signis propriis conjunctarum* scilicet prout linea MH sumitur in eamdem partem ac linea MK aut in partem oppositam; priore casu area HpMh signo affirmativo est afficienda, posteriora negativo.



(q) * *Id est, ut circulus totus QAqa* &c. Liquet ex ipsâ constructione quod dum punctum p movetur ab F usque ad q, areæ HpMH constituunt aream positivam FAnqrfIF, dum ex q ad f procedit areæ HpMh constituunt aream negativam qrf, quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum Fnf.

Quod dum punctum p procedit ex f ad Q areæ HpMh efficiunt aream positivam faNQRFIf & dum ex Q ad F procedit, efficiunt aream negativam QRF quæ ex priori detractâ relinquit semicirculum fNF. 117

Itaque omnes areæ HpMh sub signis propriis conjunctæ efficiunt circulum totum QAqa.

Cæterum observandum Variationem inclina-

De Mundi Systemate.

ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ *cub.* (r) hoc est, ut circumferentia $QAqa$ ducta in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2Mp \times AT$ *quad.*

Corol. 3. Proinde in dato nodorum situ, variatio mediocris horaria, ex quâ per mensem uniformiter continuata variatio illa menstrua generari posset, est ad $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}$. ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2ATq$ sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ ad $PG \times 4AT$, id est (cum Pp sit ad PG ut sinus inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ sit ad $4AT$ ut (f) sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol.

117. clinationis esse positivam aut negativam, hoc est crescere aut decrescere secundum signa quantitatis $AZ \times TZ$ de quibus in Coroll. proximo dicemus.

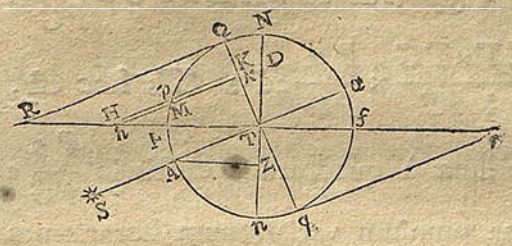
(r) * *Ut circulus totus QAqa ductus in* $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ *ad* $Mp \times AT$ *cub.* Si in hac ratione loco circuli QAqa, ponatur ejus valor qui est circumferentia QAqa ductâ in dimidium radii seu in $\frac{AT}{2}$, hæc ratio licet, circumferentia $QAqa \times \frac{AT}{2} \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT$ cub. Multiplicetur uterque terminus per 2 & dividatur per AT, non mutabitur ratio & fiet *ut circumferentia QAqa ducta in* $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ *ad* $Mp \times AT$ *quad.*

(f) *Ut sinus duplicati anguli.* Ex Trigonometriæ elementis sinus duplicati anguli ATn sive ATN, cujus sinus est AZ & Cosinus TZ, est $\frac{2AZ \times TZ}{AT}$ sive $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$.

Quando autem duplum anguli ATN excedit semicirculum sive quando angulus ATN est rectus, signum sinus dupli anguli ATN, fit negativum ex positivo; quando angulus ATN excedit 180gr. signum sinus ejus dupli iterum fit positivus, sicque deinceps.

Positivum autem signum designat angulum Planum per variationem minui, negativum verò signum eum angulum augeri significat, ita ut angulus minuatur dum nodus N recedit ex conjunctione A ad quadraturam ultimam Q, crescit verò dum nodus à quadraturâ Q ad oppositionem a movetur, iterum minuitur dum ab oppositione ad primam quadraturam q tendit, & denique augetur dum à quadraturâ q ad conjunctionem A redit; ita ut Inclinationis angulus fit minimus cum nodi in quadraturis Q & q versantur, maximus

Corol. 4. Quoniam inclinationis horariæ variatio, ubi nodi in



ximus verò cum nodi sunt in syzygiis A & a; Quæ Lex ab Astronomis est observata sed paulò accuratius ostendendum id sequi reverâ ex hâc Propositione.

Sit nodus N ubivis inter conjunctionem A & ultimam quadraturam Q, ductâque FTf perpendiculari in lineam nodorum, dum Lunâ movebitur ex N ad F inclinationis variatio designabitur per aream NAFTh, cumque Luna tum versetur inter Nodum & remotiorem quadraturam motus nodi erit regressivus, ideoque cum linea ϒT fiat semper remotior à Lunâ quam linea NT (punctum ϒ quod hic exaratum non est designat novum locum in quem Nodus adscendens Lunæ movetur) inclinationis Lunæ angulus ad lineam Tϒ relatus minor erit quam si ad TN referretur, area ergo NAFTh designabit imminutionem anguli inclinat. dum pergit Luna ab N ad F.

Dum Luna movetur ab F ad q pergit quidem ut prius nodus in antecedentia, sed producta linea ϒT, ejus productio erit vicinior Lunæ in area Fq existenti quam productio lineæ NT, ideoque inclinationis Lunæ angulus ad productionem lineæ Tϒ relatus major erit quam si ad lineam Tn referretur, sed hoc in casu area FRq designat inclinationis variationem, ergo area FAq designat incrementum anguli inclinationis.

Dum Luna ab n ad f movetur, motus nodi fit regressivus & ex N in ϒ migrat, & lineæ ϒT productio remotior est à Lunâ in areâ nf versante quam productio lineæ NT ideo angulus inclinationis minor erit quam si ad lineam Tn referretur ea verò variationis mutatio designatur per aream Hnaf quæ ideo imminutionem anguli inclinationis designat.

Ab f ad Q crescit quidem inclinationis angulus, quia refertur ad lineam Tϒ, totum itaque illud variationis incrementum designatur per aream Qfr sed à Q ad n, cum motus nodi fiat progressivus, referaturque inclinationis angulus ad Tl, minuitur is angulus totaque imminutio designatur per aream NhrQ. 117.

Resumantur hæc omnia, deprehenditur imminutionem anguli inclinationis exprimi per areas NAFh, qnHR, Hnaf & NhrQ, quarum prima & ultima efficiunt QAFTr, duæ mediæ aream qafFR.

Totum verò incrementum anguli inclinationis exprimitur per areas FRq & Qfr, quarum hæc detracta ex area QAFTr relinquit semicirculum QAFf, prior detracta ex areæ qafTR relinquit semicirculum qafF ideoque circulus totus QAqa designat imminutionem anguli inclinationis cum nodus versatur in quovis puncto N quadrantis AQ.

Si hæc ratiocinia applicentur ad figuram Newtonianam ubi nodus N est in quadrante Qa, ex iis deprehendetur circulum QAqa designare incrementum anguli inclinationis.

Si nodus in quadrante aq versetur, omnia eodem modo procedent ac in primo casu, mutatis solummodo litteris majusculis in minores, ideoque etiam ostendetur circulum QAqa imminutionem anguli inclinationis designare; & pariter ubi nodus erit in quadrante qA casus hic ad secundum referri poterit, minuitur ergo inclinatio dum Nodus procedit ab A ad Q, tumque est minima, siquidem inde crescere incipit usque ad a, ubi est maxima, siquidem inde decrescit usque ad q, ubi iterum est minima indeque crescit usque ad A ubi iterum maxima est.

SCD LYON 1

DE MUNDI SYSTEMATE.

in quadraturis versantur, est (per hanc propositionem) ad angulum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* id (t) est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT$; hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ductis in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium variationum horariarum, quo tempore luna in hoc situ nodorum transit à quadraturâ ad syzygiam (id est, spatio horarum $177\frac{1}{6}$,) erit ad summam totidem angulorum $33^{II}.\ 10^{III}.\ 33^{IV}.$, seu $5878^{II}.$, ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad summam totidem diametrorum; hoc (u) est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam; id est, si inclinatio sit $5^{gr}.$

$1'$.

121. (t) * *Id est.* Ubi nodi versantur in quadraturis, recta N n coincidit cum Q q, ideóque perpendicularis A E, abit in radium A T. Quarè $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ est ad A T cub. ut $IT \times AT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad A T cub. Sivè ut $IT \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT^2 ac dividendo per $\frac{1}{2}$ AT, ut $IT \times \frac{TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 A T.

(u) 121. * *Hoc est ut diameter.* Sit TI vel pK $= y$, radius Q T $= 1$, erit $TK = \sqrt{1-yy}$, ex naturâ circuli, & TK = TG quia in hoc casu recta n N, coincidit cum Q q, cum nempe nodi versentur in quadraturis; ac proinde sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis, id est $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} = 2y \times \sqrt{1-y^2}$ Jam ut obtineatur elementum areæ quæ componitur ex omnibus sinubus distantiæ duplicatæ, multiplicari debet sinus variabilis $2y \times \sqrt{1-y^2}$, per elementum arcûs circuli, hoc est, per $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, undè habetur elementum areæ quæsitæ $= 2ydy$, sumptisque fluentibus, prodit area tota $= y^2$, factâ autem $y = 1$, erit area illa ubi Luna pergit à quadraturâ ad syzigiam, æqualis quadrato radii. Nunc verò ut habeatur summa totidem diametrorum multiplicandus est quadrans circuli per totam diametrum. Hinc si radius dicatur r peripheria p, erit summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis, quo tempore Luna transit à quadraturâ ad syzigiam ad summam totidem diametrorum ut r^2 ad $\frac{p \times 2r}{4}$, sivè ut $2r$ ad p, hoc est, ut diameter ad circumferentiam.

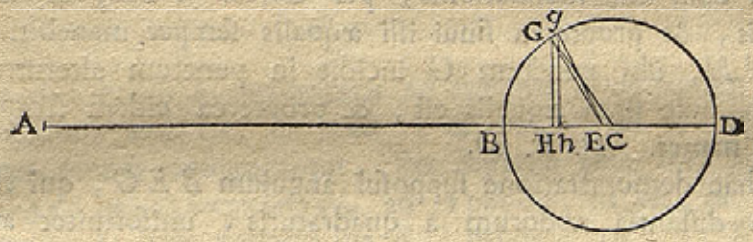
Si

1', ut $7 \times \frac{874}{100000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque variatio tota, ex summâ omnium horariarum variationum tempore prædicto conflata, est 163'', seu 2'. 43''.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire inclinationem orbis lunaris ad planum ecliptiæ.

Sit AD sinus inclinationis maximæ, & AB sinus inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C, & centro C, intervallo BC describatur circulus BGD. In AC capiatur CE in eâ



ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$: & si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH sinus inclinationis quæsitæ.

Nam

Si autem inclinatio sit 5°. 1'. Erit sinus Pp, huic inclinationi respondens, ad radium PG, ut 874 ad 10000 (ex vulgaribus sinuum tabulis). Est autem diameter ad peripheriam ut 7. ad 22, quare summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$ est ad summam totidem diametrorum ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22. Facile autem percipitur quod nodo existente in quadraturâ dum Luna à quadraturâ ad conjunctionem vadit, angulus inclinationis minuitur, quod tantumdem augetur, dum a conjunctione ad primam quadraturam movetur, minuitur rursum dum ad oppositionem vadit, augeturque iterum dum ad ultimam quadraturam redit, ita compensatis incrementis & decrementis ut nulla sensibilis supersit inclinationis mutatio, quâtenus scilicet nodus reverâ immotus in puncto Q supponitur. 121

DE MUNDI SYSTEMATE.

Nam GEq æquale est $GHq + HEq = BHD$ (x) $+ HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, est GEq ut AH. Designet jam AEg duplicatam distantiam nodorum à quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg ob datum angulum GEg erit ut distantia GE. Est (y) autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh est ut contentum $GH \times Gg$, seu $GH \times GE$; id est ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit sinus inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed (z) AH, ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D, huic sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hâc demonstratione supposui angulum BEG, qui est duplicata distantia nodorum à quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantiæ nodorum & solis ab invicem, & inclinationis variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. noviſſimæ) erit ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut (a) contentum sub inclinationis sinu AH & sinu anguli recti BEG, qui est duplicata distantia nodorum à sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus AH ad radium

1121. (x) $* = BHD + HEq$. (Prop. 5. Lib. 2. elem.) $= HBD + HEq - BHq$ (per prop. 3. lib. 2. elem.) $= HBD + BEq - 2BH \times BE$ (Prop. 7. ejusdem Lib.) $= BEq + 2EC \times BH$ (ob $BD = 2EC + 2BE$). Est autem (per constr.) $EB^2 = 2EC \times BA$; quare $BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH$.

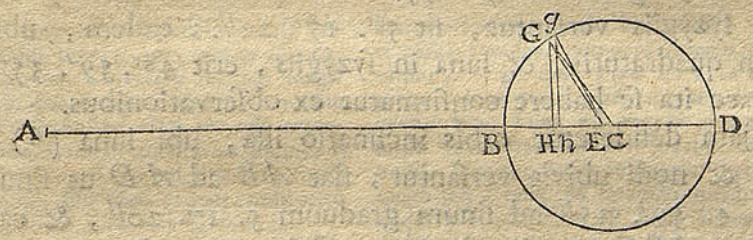
(y) $*$ *Est autem Hh ad Gg.* (Per naturam circuli).

(z) *Sed AH.* (Per constr.)

(a) $*$ *Ut contentum sub inclinationis sinu AH, & sinu anguli recti BEG*, hoc est, ut contentum sub mediocris inclinationis sinu AH (quia in hoc casu AH = AC) & radio *ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris inclinationis sinus AH ad radium quadruplicatum.*

radium quadruplicatum; hoc eſt (cum inclinatio illa mediocris ſit quaſi $5^{gr}.\ 8'\frac{1}{2}$) ut ejus ſinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, ſive ut 224 ad 10000. Eſt autem variatio tota, ſinuum differentiæ *BD* reſpondens, ad variationem illam horariam ut (b) diameter *BD* ad arcum *Gg*; id eſt, ut diameter *BD* ad ſemicircumferentiam *BGD* & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.



quo nodus pergit à quadraturis ad ſyzygias, ad horam unam conjunctim; hoc eſt, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare ſi rationes omnes conjungantur, fiet variatio tota *BD* ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id eſt, ut 29645 ad 1000, & inde variatio illa *BD* prodibit $16'$, $23''\frac{1}{2}$.

Hæc eſt inclinationis variatio maxima quatenus locus lunæ in orbe ſuo non conſideratur. Nam inclinatio, ſi nodi in ſyzygiis verſantur, nil (c) mutatur ex vario ſitu lunæ. At ſi nodi in quadraturis conſiſtunt, inclinatio minor eſt ubi luna verſatur

(b) * *Ut Diameter BD ad arcum Gg.* Nam, in hâc conſtructione, variatio tota ſinuum differentiæ BD reſpondens per Diametrum BD exprimitur, & Hh eſt incrementum ſinus inclinationis tempore quod per Gg deſignatur, ſive horæ tempore; ſed ubi punctum H cadit in centro C, & punctum G in medio ſemicirculi, tunc eſt $Gg = Hh$; Ergo, eſt Diameter BD ad arcum Gg ut variatio tota ad variationem horariam in Octantibus; ſed ut ſunt $2079\frac{7}{10}$ horæ quæ effluunt dum nodus pergit à quadraturâ ad ſyzygiam ad unam horam, ita ſemicircumferentia BGD ad Gg, eſt ergo $Gg = \frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$, ideoque variatio tota eſt ad vatiationem horariam in octantibus ut BD ad $\frac{BGD \times 1^h}{2079\frac{7}{10}h}$ ſive ut BD ad BGD & $2079\frac{7}{10}^h$. ad 1^h. conjunctim. 121.

(c) * *Nil mutatur ex vario ſitu Lunæ.* Nam ex demonſtratione Prop. XXXIV. inclinationis variatio horaria eſt ad angulum $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad AT *cub.* ſed nodis verſantibus in ſyzygiis fit $AZ = 0$ quare quantitas

De Mundi Systemate.

satur in syzygiis, quam ubi ea versatur in quadraturis, excessu $2'.\ 43''$; uti in propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio $1'.\ 21''\frac{1}{2}$ variatio tota mediocris BD in quadraturis lunaribus diminuta fit $15'.\ 2''$, in ipsius autem syzygiis aucta fit $17'.\ 43''$. Si luna igitur in syzygiis constituatur, variatio tota in transitu nodorum à quadraturis ad syzygias erit $17'.\ 45''$: ideoque si inclinatio, ubi nodi in syzygiis versantur, sit $5^{gr}.\ 17'.\ 20''$.; eadem, ubi nodi sunt in quadraturis, & luna in syzygiis, erit $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$. Atque hæc ita se habere confirmatur ex observationibus.

Si jam desideretur orbis inclinatio illa, ubi luna (d) in syzygiis & nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum 4. 59'. 35'' ad sinum graduum 5. 17. 20'', & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ nodorum à quadraturis; & erit AH sinus inclinationis quæsitæ. (e) Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio, ubi luna distat $90^{gr}.$

à

121. $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ fit etiam 0, evanescit itaque hoc in casu horaria variatio, ideoque in vario situ Lunæ non mutatur ejus orbitæ inclinatio. Et quidem idem citra calculum patet ex ipsâ rei naturâ, nam versantibus in syzygiis, sive sole existente in lineâ nodorum, sol est in eo plano in quo jacet linea nodorum, sed linea nodorum est in plano orbitæ Lunaris, ergo sol in ipsâ orbitâ Lunari productâ positus censeri potest, ac per consequens qualiscumque sit ejus actio in Lunam, ipsam ex plano utrique communi neutiquam dimovebit.

(d) * *Ubi Luna in syzygiis & nodi ubivis versantur.* Nam dum Luna ab unâ syzygiâ ad eamdem syzygiam redit, tota variatio menstrua est ad $33''.\ 10'''.\ 33^{iv}.$ ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2AT^q$, sive ut ex Cor. 3°. Prop. præcedentis constat ut Inclinationis sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ nodi à Sole ad quadruplum quadratum radii, sed per hujus Probl. constructionem in ea ratione est AH, si modo AB sit ut sinus minimæ inclinationis & AD sinus maximæ, sed $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$ est minimus inclinationis Angulus ubi Luna est in syzygiis & $5^{gr}.\ 17'.\ 20''$ est maximus. *Ergo fiat AB ad AD ut sinus graduum* $4^{gr}.\ 59'.\ 35''$ &c.

(e) *Huic orbis inclinationi æqualis est ejusdem inclinatio ubi Luna distat* $90^{gr}.$ *à nodis.* Minima inclinatio ubi Luna distat $90^{gr}.$ à nodis est ubi nodi sunt in quadraturis, nonagesimus autem à nodis gradus incidit in ipsam syzygiam itaque minima inclinatio eadem est ac in præcedenti casu; maxima vero inclinatio est cum nodi sunt in ipsis syzygiis, & nonagesimus à nodis gradus tunc quidem incidit in quadraturas, sed tunc inclinatio nihil mutatur ex vario situ Lunæ, itaque eadem est sive Luna in syzygiis sive in quadraturis versetur, eadem ergo est iterum maxima inclinatio ac in casu præcedenti, ideoque in hoc casu AB & AD eadem assumenda sunt ac in casu præcedenti. Reliquum ratiocinium hic etiam applicatur, nam quamvis tempus reditus Lunæ ad nonagesimum à nodo gradum brevior sit tempore ejus reditus ad syzygiam

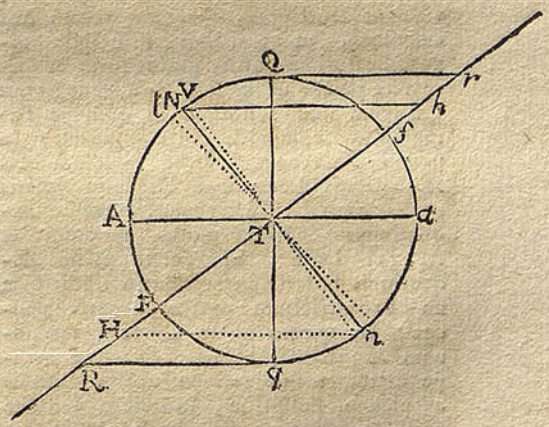
sive

à nodis. In aliis lunæ locis inæqualitas menſtrua, quam inclinationis variatio admittit, in (f) calculo latitudinis lunæ compenſatur, & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum (ut ſupra diximus) ideoque in calculo latitudinis illius negligi poteſt.

Scho-

ſive menſe ſynodico, ſiquidem menſe Periodico etiam brevior eſt, tamen hic caſus ad fictionem Corollarii ſecundi magis accedit, in quo nempe ſupponitur nodum toto menſe ſenſibilem viam non eſſe emenſum, quod quidem accuratius dicetur ſi aſſumatur reditus Lunæ ad eumdem ſitum reſpectu nodi; hic ergo eadem conſtructio ac prior potiori jure erit adhibenda.

(f) * *In calculo latitudinis compenſatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menſtruam motus nodorum.* Calculus latitudinis fit, poſitâ inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ, & aſſumptâ diſtantiâ Lunæ à nodo, hinc latitudo Lunæ obtinetur, quæ creſcit à nodo ad gradum à nodo nonageſimum, inde decreſcit accedendo ad alterum nodum &c. Procedat ergo Luna à nodo N ad punctum F 90gr. à nodo diſtitum, motus medius nodi eſt major motu vero, toto eo intervallo, ut ſuperius (ad Prop. XXXII.) oſtenſum eſt, ergo aſſumpta mediocri diſtantia à nodo quæ verâ major eſt & mediocri inclinatione quæ convenit illi menſi, latitudo major invenietur quam debuiſſet, ſed quoniam in caſu iſtius figuræ minuitur Angulus inclinationis dum Luna movetur ab N in F, & is angulus ad mediocrem imminutionem tunc pervenit cum Luna eſt in F circiter, quia area NFh eſt ferè ſemicirculo æqualis, hinc inclinatio orbitæ angulum majorem efficit quam is qui per inclinationem mediocrem ſupponitur, unde latitudo vera major evadit quam ea quæ propter mediocrem inclinationem orbitæ obtinetur: hinc ex eo quod nodi motus mediocris loco motus veri aſſumitur invenitur latitudo major vera, ſed ex eo quod inclinatio mediocris aſſumitur loco veræ, invenitur latitudo minor vera; inæqualitates itaque menſtruæ quam variatio inclinationis & motus nodorum admittunt ſeſe mutuo compenſant in calculo latitudinis. Cæteri caſus eamdem compenſationem ſuppeditant, v. gr dum Luna ex F in q movetur motus verus nodi eſt minor motu vero, hinc Luna eſt reverâ remotior à nodo quam ſtatuitur per motum medium nodi, ideoque latitudo major ſupponitur quam eſt (quia in ſecundo quadrante à nodo quò proprior eſt Luna à nodo aſcendente N, ideoque eo remotior à deſ- F 22.



cendente n, eò ejus latitudo eſt major) ſed cum orbita Lunæ habuerit in F inclinationem mediocrem augetur is Angulus dum movetur Luna ab F ad q, ideoque aſſumendo eam inclinationem mediocrem minor obtinetur latitudo quam reverâ eſt, ergo, propter inæqualitatem motus nodi latitudo quæ ex motu nodi mediocri habetur eſt major vera, latitudo quæ obtinetur ex inclinatione mediocri eſt minor verâ, compenſantur ergo errores &c.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Scholium. (g)

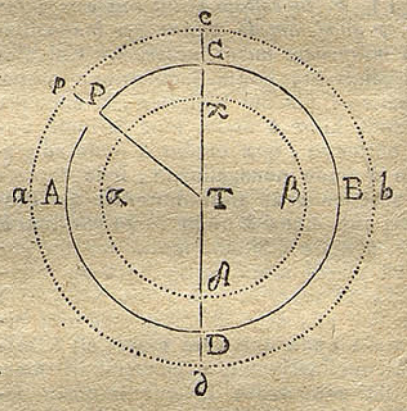
121. (g) * *Scholium.* Scholio hoc tradit Newtonus rationes quibus quædam ex Æquationibus Lunaribus ad calculos revocari possint, sed dolendum est illum non aperuisse vias quibus usus est ad eas concinnandas: defectum hunc utcumque reparare sumus conati & Methodos aperuimus quibus ex Gravitatis Theoria eas Æquationes deducere liceat, quantum fieri potuit iisdem usi sumus Methodis quas Newtono familiares fuisset constat & ad ejus solutiones proxime nos accessisse percipient Viri Docti cum paucis duntaxat secundis ab ipsius numeris discedat calculus noster & ejus consequentiæ planæ sint similes iis quas ex suis Principiis Newtonus derivavit, utrum aliis Methodis res feliciùs absolvi potuerit, viderint Doctiores, speramus tamen hos calculos, ut legitimis Principiis nixos, Lectoribus nostris gratos fore, & forte eos juvare ut melius quid excogitent: Cæterum hoc Scholium in quinque Paragraphos commodè distribui potest; In primo Newtonus Indicat calculum ejus Æquationis Lunæ quæ Æquatio Solaris prima dicitur: In secundo, tradit Æquationes Solares motus nodorum & Apogæi Lunæ; In Tertio illam Æquationis Solaris correctionem tradit quæ ab Excentricitate orbitæ Lunaris pendet; In quarto aliam adhuc correctionem Æquationis Solaris addit quæ nempe oritur ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Eclipticæ; In quinto denique agit de Æquationibus motûs Lunæ & ejus Apogæi quæ pendent ex situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Ut autem hæc omnia & potissimum ea quæ Æquationem Solarem Lunæ spectant, & quæ primo, tertio & quarto Paragrapho à Newtono indicantur meliùs intelligantur, totum eum calculum qualis ex Theoriâ gravitatis instituendus nobis videbatur, uno tenore tradendum censuimus.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus Æquatione annuâ, ex Solis actione pendentibus, primum in Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, postea in Hypothesi Orbem Lunæ esse Ellipticum. Denique in Orbe Lunari ad Ecclipticam inclinato.

THEOR. I.

Corpus P revolvatur in circulo ADBC circa corpus T à quo retineatur per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum; accedat autem vis quædam constans quæ retrahat perpetuo corpus P à corpore centrali T, sed quæ sit exigua respectu vis ejus corporis T; Et describatur circulus a d b c in tali distantiâ ut residuum vis quam exerceret corpus T in eâ distantiâ (detractâ eâ vi extraneâ) sit ad vim quâ corpus P revolvebatur in circulo A D B C inversè ut cubi Radiorum Tp, TP; Dico, quod propter illam vim extraneam fiet ut corpus P circa circulum a d b c oscilletur, nunc citrà nunc ultra delatum, parum ab illo discedens, ita ut ejus motus assumi possit quasi fieret in eo circulo.



Nam fingatur eam vim extraneam non esse

esse constantem, sed talem ut, post discessum corporis P à circulo A D B C propter ejus vis extraneæ actionem, residuum vis quam exercet corpus T in distantia ad quam abit corpus P (detractâ eâ vi extraneâ) sit semper inversè ut cubi distantiarum, eveniet ut (per Prop. IX. Lib. I. Princip.) corpus P spiralem Logarithmicam describat, in quâ angulus curvæ cum radio ad curvam ducto semper manet idem; Verùm quoniam ab initio vis illa Extranea fuit constans, liquet quod priusquam corpus P circulum a d b c attigerit ea vis plus imminuebat vim centralem quam ut decrescat secundùm cubos distantiarum auctarum, ideoque quod anguli curvæ cum radio ad curvam ducto semper crescere debuerunt, sed incremento perpetuo minore quo magis accedit virium decrescentium ratio ad rationem inversam cubi distantiarum; Perveniet ergo corpus P ad circulum a d b c, & angulus curvæ cum Radio, quando P erit in circulo a d b c, erit recto major, quia semper crevit is Angulus à tempore quo corpus P circulum A D B C describebat in quo angulus radii cum curva rectus est; ideo P ultra circulum a d b c perget; cum autem P ultra circulum a d b c pervenerit, detractio vis constantis vim Centralem minus minuet quam secundum cubum distantiarum, itaque angulus curvæ cum radio minor fiet quam si Logarithmica spiralis describeretur & tandem reducetur ad angulum rectum ultra circulmu a d b c, inde verò curva cum radio faciet angulum acutum, nam vis centralis illic major est quam ut circulus describi possit quod sic demonstrari potest; Areæ æqualibus temporibus descriptæ durante toto hoc corporis P motu sunt ubique æquales, quoniam vires ad centrum T constanter diriguntur (ex Hyp.), ideoque in eo loco ultra circulum a d b c in quo angulus curvæ cum radio fit rectus, arcus dato tempore descriptus foret ipsa basis areæ descriptæ cujus altitudo est distantia à Centro seu ipse radius, & is arcus debet esse ad arcum qui eodem tempore descriptus fuisset a corpore P si in circulo A D B C moveri perseverasset, nullaque vis extranea accessisset inversè ut radii; sagittæ autem eorum arcuum (quæ sunt semper ut quadrata arcuum divisa per Radios) forent inversè ut Cubi radiorum, sed vis centralis ultra circulum a d b c, minus decrescit quam secundum cubum distantiarum, ergo sagitta arcus descripti quæ est ejus vis centralis effectus, major est sagittâ quæ foret secundum rationem inversam cubi distantiarum, ergo ea sagitta quæ per vim centralem producitur major est illa quæ orbtineretur si circulus in eo loco describeretur; Ergo corpus P à Tangente magis discedit versus centrum quam si circulum describeret, ergo ejus via acutum angulum cum Radio efficere incipit, sicque accedit iterum ad circulum a d b c angulis curvæ cum radio perpetuo decrescentibus; Cum autem infra eum circulum transiverit angulus quem facit curva cum Radio iterum augetur donec is angulus rectus evadat, inde vero fiet obtusus quia vis centralis illic minor est quam ut corpus P in circulo moveri pergat, redit ergo corpus P versus circulum a d b c idque perpetuâ oscillatione, ut liquet ex collatione motûs quem haberet in Logarithmicâ spirali cum hoc motu: Sed quò minor est vis illa data quæ ex centrali detrahitur eò illæ alternæ oscillationes minus à circulo a d b c recedent, quare si vis ea exigua supponatur respectu vis Centralis corporis T, supponi etiam potest motum corporis P in circulo a d b c fiet. Q. E. D. 121.

Cor. 1. Si vis illa extranea & constans perpetuo traheret corpus P versus T, iisdem argumentis ostendetur quod si describatur circulus interior $\alpha\delta\beta n$ in tali distantiâ à centro T, ut vis corporis T ad eam distantiam aucta per vim illam extraneam sit ad vim in circulo A D B C inversè ut cubi Radiorum circulorum A D B C, $\alpha\delta\beta n$, corpus P hinc inde cis citrave circulum $\alpha\delta\beta n$ oscillatur, & si ea vis extranea sit exigua censeri potest quod corpus P in eo ipso circulo $\alpha\delta\beta n$ movebitur.

Cor. 2. Et si vis illa extranea constans non foret sed cresceret secundum aliquam dignitatem positivam distantiarum, iisdem omninò ratiociniis ostendi posset quod corpus P in circulo a d b c vel $\alpha\delta\beta n$ movebitur, eveniet solummodo ut radius T p paulum diversus sumi debeat ab eo qui inveniretur si vis ea extranea constans foret.

Schol. Aliis Methodis effectum illius vis extraneæ ad calculos revocari posse non negamus & quidem unam aut alteram Methodum ab hâc diversam eumdem in finem in sequentibus proponemus.

THE-

DE MUNDI SYSTEMATE.

THEOR. II.

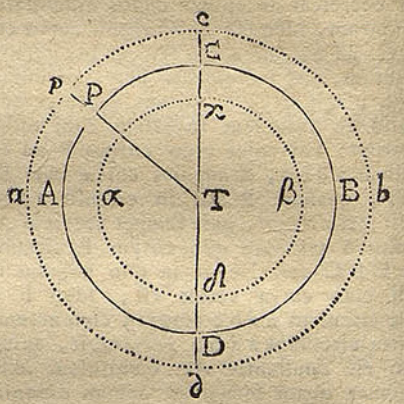
121. Positis iis quæ in primo Theoremate supponuntur, dicatur r Radius circuli ADBC, sit ϱ radius circuli a d b c, vel $\alpha\delta\beta n$, sit p Radiorum r & ϱ differentia; Vis corporis T in distantia r dicatur V & in eadem distantia vis extranea dicatur Y quæ erescat ut distantiæ à centro T & quæ positiva censeatur si distrahat corpus P à centro, negativa verò si illud attrahat ad centrum, dico quod Radius ϱ erit semper æqualis quantitati $\frac{V-\frac{1}{2}Y}{V-4Y}r$, sive quantitati $r\times 1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}+\frac{16Y^3}{V^3}$ &c. & omissis terminis propter exiguitatem quantitatis Y evanescentibus, est ille radius $\varrho = Y\times 1+\frac{Y}{V}$.

Nam vis corporis T in distantia ϱ erit $\frac{rr}{\varrho\varrho}V$ vis extranea erit $\frac{\varrho}{r}Y$ ex hypoth., ideoque vis quâ circulus adbc (vel $\alpha\delta\beta n$) describitur est $\frac{rr}{\varrho\varrho}V-\frac{\varrho}{r}Y$, sed hæc vis debet esse ad vim V quâ circulus A B C D describitur inversè ut cubi Radiorum, sive ut $\frac{1}{\varrho^3}$ ad $\frac{1}{r^3}$ (per Theor. præc.) ergo est $\frac{V}{\varrho^3}=\frac{V}{r\varrho^2}-\frac{Y\varrho}{r^4}$, sive reductis terminis ad eumdem denominatorem est $\varrho^4Y=r^3V\times\varrho-r=\pm r^3pV$. Loco ϱ scribatur $r\pm p$ fiet $r^4Y\pm 4r^3pY+6r^2p^2Y\pm 4rp^3Y+p^4Y=\pm r^3pV$, sive deletis terminis ubi p superat primum gradum, quoniam hæc quantitas exigua est fit $r^4Y\pm 4r^3pY=\pm r^3pV$, sive $\pm pV\mp 4pY=rY$, unde obtinetur $\pm p=\frac{rY}{V-4Y}$; ideoque ϱ, quod est $r\pm p$, fit $\frac{V-3Y}{V-4Y}r$ qui valor in seriem redactus est $r\times 1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. sive $r\times 1+\frac{2Y}{V}$.

THEOR. III.

Dicatur M Tempus Periodicum corporis P in circulo A D B C, dico quod ejus Tempus Periodicum in circulo a d b c (vel $\alpha\delta\beta n$) erit $M\times 1+\frac{2Y}{V}$.

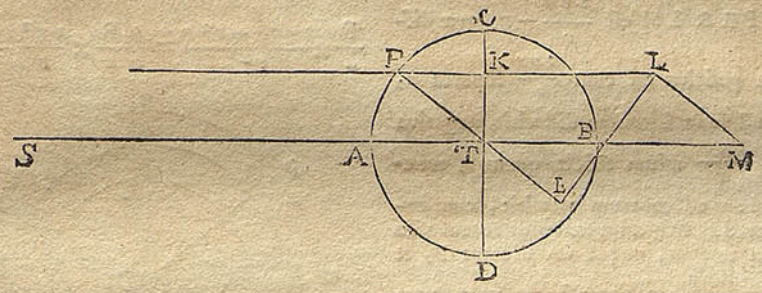
Dem. Tempus Periodicum corporis P revolventis in circulo a d b c d (vel $\alpha\delta\beta\delta$) propter vim extraneam Y detractam vel additam est ad Tempus Periodicum ejus corporis P cum revolvebatur in circulo A D B C citra omnem vim extraneam, ut est quadratum radii ϱ ad quadratum radii r; Nam quia vis Y est semper directa ad centrum T, areæ manebunt temporibus proportionales quamcumque in viam flectatur corpus P, ergo, si tandem ejus via in circulum a d b c d (vel $\alpha\delta\beta n\delta$) mutetur, tempus quo describetur peripheria a d b c (vel $\alpha\delta\beta n$) erit ad tempus quo describebatur peripheria A D B C, ut tota area circuli a d b c (vel $\alpha\delta\beta n$) ad totam aream circuli A D B C ideoque ut quadrata radiorum ϱ & r, sive (per Theor. præced.) ut $\frac{V-3Y^2}{V-4Y^2}rr$ ad rr, ideoque ut $\frac{V-3Y^2}{V-4Y^2}$ ad 1. sed hâc fractione in seriem



seriem resoluta ea evadit $1+\frac{Y}{V}+\frac{4Y^2}{V^2}$ &c. &c. quæ series valde convergit propter exiguitatem istius fractionis $\frac{Y}{V}$ & illius quadratum est $1+\frac{2Y}{V}+\frac{9Y^2}{V^2}+\frac{40Y^3}{V^3}$ &c. Ergo ut 1 ad $1+\frac{2Y}{V}$ + &c. ita M ad $M\times 1+\frac{2Y}{V}$ + quod est tempus quo describetur Peripheria a d b c vel $\alpha\delta\beta n$.

THEOR. IV.

Sit T terra, P Luna, ADBC circulus quem Luna describit; sit ST distantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur a; dicatur F vis Solis in terram in mediocri illa distantia, Sol supponatur immotus; distantia Lunæ à Terrâ PT dicatur r & ea non obstante actione Solis in Lunam eadem manere censeatur; Sit CP distantia Lunæ à quadraturâ proxima quæ dicatur u, sit ejus sinus y, sit ejus Cosinus z, Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundùm directionem radii PT, est ubivis $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$.

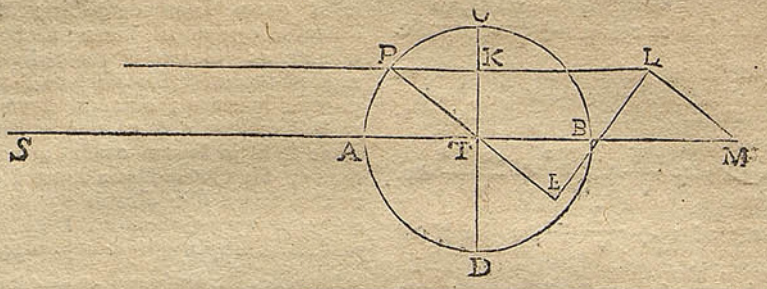


Nam, secundùm constructionem Prop. LXVI. Lib. I. Princ., repræsentetur vis Solis quæ dicitur F per lineam ST vel SK, ea vis Solis quâ trahitur Luna in loco P repræsentetur per lineam SL, & hæc vis censeatur composita ex duabus SM & LM, quarum LM sit Parallela radio PT, cum autem linea SM sit æqualis lineæ $ST\pm TM$, & terra trahatur per vim ST non secus ac Luna, situs respectivus Lunæ ac Terræ per eam vim ST non mutatur, ideo sola ea pars vis SM quæ exprimitur per TM consideranda venit; Præterea ex naturâ gravitatis, est SK ad SL ut est $\frac{1}{SK^2}$ ad $\frac{1}{SK\mp PK^2}$ sive ut est $SK^2\mp 2SK\times PK+PK^2$ ad SK^2, aut omisso termino PK^2 ut $SK\mp 2PK$ ad SK, sive quoniam 2PK est exiguum respectu lineæ SK ut SK ad $SK\pm 2PK$ est ergo SL sive $SK\pm KL=SK\pm 2PK$ & $KL=2PK$, cum autem linea PL sit proxime parallela lineæ SM, & ex constructione PT sit parallela LM, est TM proxime æqualis lineæ PL, & est $PL=PK+2KL=3PK$; Ex puncto L ducatur perpendiculum in radium PT (productum si necesse sit) & vis TM, seu vis ipsi æqualis PL resoluta intelligatur in vim PE & vim LE, vis LE radio PT sit perpendicularis ideoque vim centralem non afficit, vis PE secundùm directionem radii agat, sicque punctum P à centro T distrahat, altera autem pars quæ per LM repræsentatur secundum directionem radii agens punctum P versus centrum trahit; Ergo ea pars Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii PT est differentia virium PE & LM.

Jam vero ob Parallelas SL, SM & TP, LM est $LM=TP=r$, & cum PK sit proxime perpendicularis in lineam TC erit

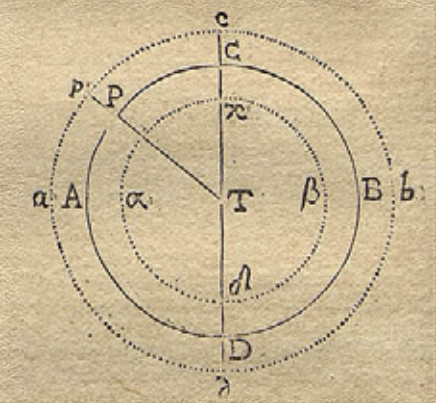
De Mundi Systemate.

Lib. I.



erit PK sinus arcus PC qui sinus dictus est y, ideoque $PL = 3PK = 3y$, cum autem Triangula PKT, PEL sint similia, est PT (r) ad PK (y) ut PL ($3y$) ad PE quod erit ergo $\frac{3yy}{r}$ & differentia virium PE & LM est $\frac{3yy}{r} - r$, quæ differentia positiva est cum $\frac{3yy}{r}$ superat r, tuncque Lunam à centro distrahit, negativa quando $\frac{3yy}{r}$ minus efficit quam r, tuncque Lunam ad centrum attrahit, cum ergo linea ST sive a repræsentet totam vim Solis in terram, eaque vis dicatur F, & quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ repræsentet eam partem vis Solis quæ in Lunam agit secundùm directionem PT, fiat ut a ad $\frac{3yy}{r} - r$, ita F ad eam partem vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam quæ idcircò erit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. Q. E. O.

Coroll. Si transferatur Luna in alium orbem a d b c, $\alpha \delta \beta \nu$ cujus radius sit ϱ, Dico, quod, manente distantia Lunæ à quadraturâ proximâ, ea pars vis Solis quæ afficit vim centralem Terræ in Lunam crescet ut illæ distantiæ ϱ, eritque ideo $\frac{\varrho}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, nam cum arcus p c ejusdem numeri graduum censeatur ac arcus P C sinus eorum erunt ut radii, ideoque sinus arcus p c erit $\frac{\varrho}{r} y$, Demonstrabitur vero iisdem plane argumentis quibus in Theoremata usi sumus quod, si Luna in circulo a d b c vel $\alpha \delta \beta \nu$ moveretur, ea pars vis Solis quæ secundum directionem radii P T exercetur erit $\frac{F}{a} \times 3\frac{\varrho\varrho y^2}{r^2} - \varrho = \frac{F}{a} \times \frac{3\varrho^2 y^2 - r^2\varrho^2}{r^2\varrho} =$ $\frac{F}{a} \times \frac{3\varrho y^2 - r^2\varrho}{r^2} = \frac{\varrho F}{ra} \times \frac{3y^2}{r} - r$.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi potest, si concipiatur Lunam ex suâ orbita ADBC in aliam transferri, cujus singulæ particulæ quamminimæ sint portiones circulorum talium ut vis centralis Terræ in singulo circulo agens sublata vel addita vis Solis quæ in eo loco exerceretur sit ad vim centralem Terræ in circulo ADBC citra Solis actionem agentem, inversè ut cubus radii ejus circuli ad cubum radii circuli ADBC.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat vel decrescat, sitque aut-

nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit sicque gradatim crescat, si constans censeatur per tempusculum aliquod, brevissime transibit Luna in circulum a d b c illi vi congruum per Theor. I., mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minima, ea vis censeatur constans per alterum tempusculum, transibit Luna ex circulo primæ vi congruo in alterum huic incremento consentaneum, sicque semper, ideoque in singulis particulis arcus C P Luna censeri potest delata in circulum vi Solis in eo puncto agenti congruum.

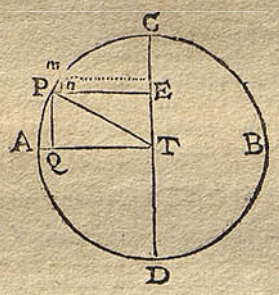
THEOR. VI.

Manentibus quæ in Theor. IV. supposita sunt, dicatur c tota circumferentia cujus radius est r, dicatur Y vis Solis agens in Lunam secundum directionem P T & in datâ distantiâ C P à quadraturâ C, quæ distantia C P dicatur u, dicatur M tempus Periodicum Lunæ in circulo A D B C citrà Solis actionem, arcus exiguus à puncto P assumptus dicatur du, dico quod tempus quo similis arcus describetur in orbitâ in quam Luna per actionem Solis est translata erit $\frac{M du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c.

Nam si vis Y quæ in punctum P à Sole exercetur, in exiguas particulas dividetur & singula quæ dicatur d Y maneret constans durante unicâ revolutione Lunæ, sicque gradatim Lunam in circulum a d b c transferret, tempus Periodicum in singulo circulo excederet tempus Periodicum in circulo præcedenti quantitate $\frac{2dY}{V}$. Hinc tandem tempus Periodicum quo circulus a d b c describeretur foret $M \times 1 + \frac{2Y}{V} +$ &c. per Theor. III. & tempus quo arcus similis arcui du describeretur in eo circulo, foret ad hoc tempus Periodicum ut du ad c, foret itaque $\frac{M du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V} +$, sed singulæ particulæ orbitæ quam Luna describit propter adjunctionem vis Solis spectari possunt quasi pertinerent ad circulos congruos vi Soli in illis punctis agenti, per Theor. V. Ergo, tempus inventum est illud ipsum, quo durante, Luna describet arcum similem arcui du in orbitâ in quam transfertur per actionem Solis.

LEMMA I.

Invenire integrales quantitatum $y\,du$, $z\,du$, $y^2\,du$, $z^2y\,du$, $zy^2\,du$, $yz^2\,du$, $y^3\,du$, $y^4\,du$ &c. factarum ex Elemento arcus & dignitatibus ejus sinus y, vel ejus Cosinus z.



Ex naturâ circuli Triangulum P T E est simile Triangulo fluxionali P m n; ideoque est P T (r) ad P m (du) ut P E (y) ad P n (dz), ut T E (z) ad m n (dy), hinc est $du = \frac{r\,dz}{y} = \frac{r\,dy}{z}$; Hinc fit Primò, ut, omnes termini in quibus alteruter factorum y vel z quantitatis du dimensionem habet imparis numeri, possint integrari; nam loco elementi du, ponatur ejus valor $\frac{r\,dz}{y}$ si y sit imparis dimensionis, vel $\frac{r\,dy}{z}$ si z sit imparis dimensionis, ea substitutione fiet ut pares evadant dimensiones y vel z quæ prius impares erant, & quia in primo casu habetur fluxio dz, loco y^2 substituatur $r^2 - z^2$, sicque omnes factores ducentes dz, erunt aut r aut z, ideoque quantitas proposita erit absolutè integrabilis, in altero casu cum habeatur fluxio dy, ut tollantur factores z cujus dimensiones sunt pares, loco z^2 substituatur $r^2 - y^2$, sicque omnes factores ducentes dy erunt aut r aut y ideoque habebuntur termini absolutè integrabiles.

Secundò, factores quantitatis du sint pares, & quidam primo sit $z^2\,du$ vel $y^2\,du$; Integralis horum Elementorum est $r \times$ C P Q T vel $r \times$ C P E, nam est $z^2\,du = rz\,dy$, & $z\,dy$ est fluxio areæ C P Q T; est $y^2\,du =$

DE MUNDI SYSTEMATE.

$r y dz$, & $y dz$ est fluxio areæ CPE; itaque quando P ex C pervenit in A & absolvit quadrantem Integralis $z^2 du$ vel $y^2 du$ est $r \times \frac{rc}{8}$.

121.

Sint itaque ambo factores y vel z quantitatis du numero pari qualicumque, semper reduci poterunt ita ut quantitas proposita contineat dignitates pares alterutrius quantitatis, puta y, altera variabili exclusa ponendo loco z^2 quantitatem $r^2 - y^2$. Si ergo quæratur integralis quantitatis $y^{2m} du$, ut ea ad impares dimensiones revocetur spectetur ut $y^{2m-1} \times y du$; Est autem juxta Methodos vulgares $\int y^{2m-1} \times y du = y^{2m-1} \int y du - \int \int y du \times 2m-1 \times y^{2m-2} dy$, sed $y du = \frac{r y dz}{y} = r dz$, & Integralis quantitatis dz sumptæ à puncto C est $r-z$, hinc $\int y du = rr - rz$, qua substituta in valore Integralis $\int y^{2m-1} \times y du$ ea fit $y^{2m-1} r^2 - y^{2m-1} rz - rr \int 2m-1 \times y^{2m-2} dy + \int rz \times 2m-1 \times y^{2m-2} dy$, sive (quia $rr \int 2m-1 \times y^{2m-2} dy = \frac{2m-1}{2m-1} r^2 y^{2m-1} = r^2 y^{2m-1}$) est $\int y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int \times 2m-1 \times rz \times y^{2m-2} dy$ (sive quia $r dy = z du$) $= -rzy^{2m-1} + \int 2m-1 \times z^2 y^{2m-1} du$ (& loco z^2 substituendo $r^2 - y^2$) $= -rzy^{2m-1} + 2m-1 \int r^2 y^{2m-2} du - 2m-1 \int y^{2m} du$; Et transpositione facta est $2m \int y^{2m} du = -rzy^{2m-1} + \int 2m-1 \times r^2 \int y^{2m-2} du$, & tandem $\int y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} \times r^2 \int y^{2m-2} du - \frac{rzy^{2m-1}}{2m}$; Hinc cum habeatur Integralis quantitatis $y^2 du$; si quæratur Integralis $y^4 du$ ea obtinebitur per hanc formulam, siquidem in eo casu est $y^{2m-2} du = y^2 du$, & ex ejus integratione habetur integratio quantitatis $\int y^{2m} du$, quæ isto in casu est $y^4 du$; Simili modo ex integrali quantitatis $y^4 du$ habebitur Integralis quantitatis $y^6 du$ &c.

Quando P pervenit in A, terminus $\frac{rzy^{2m-1}}{2m}$ evanescit, quia illic est $z = o$ habetur ergo $\int y^{2m} du = \frac{2m-1}{2m} r^2 \int y^{2m-2} du$; In eo ergo casu si quæratur integralis quantitatis $y^4 du$, fiat $m = 2$ erit $\int y^4 du = \frac{3}{4} r^2 \int y^2 du$, sed $\int y^2 du = \frac{r^2 c}{8}$ ideoque $\int y^4 du = \frac{3 r^4 c}{4 \times 8}$; Si quæratur Integralis quantitatis $y^6 du$ fiat $m = 3$ & erit $\int y^6 du = \frac{5}{6} r^2 \int y^4 du = \text{sed} \int y^4 du = \frac{3 r^4 c}{4.8.}$ ideoque $\int y^6 du \frac{3.5 r^6 c}{4.6.8}$.

Cor. 1. Si in primo casu in quo alteruter factorum quantitatis du aut ambo factores sunt imparis dimensionis, totum elementum per quantitates r, z, dz exprimatur, Integralis quæ tunc obtinebitur non erit completa, quia cosinus z ex T incipit & arcus u ex puncto C, unde dz negativum esse debet; erit ergo $\int r^n z^m dz = C - \frac{r^n z^{m+1}}{m+1}$, ut hæc constans C obtineatur, observandum quod ubi u est o, ideoque evanescit hoc elementum tunc est $z = r$ ergo $o = C - \frac{r^{n+m+1}}{m+1}$ hinc $C = \frac{1}{m+1} r^{n+m+1}$; v. gr. sit $\int rz^3 dz = C - \frac{rz^4}{4}$ fit $C = \frac{1}{4} r^5$.

Cor. 2. Si è contra arcus u ex puncto A inciperet, Integralis quæ obtinebitur cùm elementum per quantitatem y exprimetur completa non erit, & eâ ratione compleri debebit quæ in præcedenti Corollario est indicata.

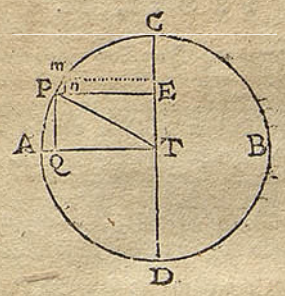
Cor. 3. In secundo casu, si u ex puncto A incipiat erit $\int y dz = APET$ & $\int z dy$ est area APQ, ut liquet ex ipsa figura.

Cor. 4. Denique si u ex puncto A incipiat & ambo factores sint uterque dimensionis paris, elementum non est reducendum ad litteram y, ut in Lemmatis solutione factum est, sed ad quantitatem z, quæ in toto calculo loco y substituatur & vice versa; Liquet enim quod z est sinus respectu arcus AP, & y ejus Cosinus.

PROBLEMA I.

Invenire totam retardationem Lunæ dum unam revolutionem absolvit.

Cons-



Constat ex Theor. VI. Quod si Sol sit immotus, & Luna in totâ revolutione eam vim Solis patiatur quam patitur in puncto P, eveniet ut tempus quo describitur arcus du, (quodque debet esse $\frac{Mdu}{c}$ posito M tempore Periodico Lunæ, & c Peripheriâ quam percurrit) evadat $\frac{Mdu}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; itaque tempus illud producitur quantitate $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, ideo cum tempore $\frac{Mdu}{c}$ iste arcus du describi debuisset hoc tempore $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2Y}{V}$, arcus $\frac{2Y}{V}du$ describeretur, hæc est ergo retardatio Lunæ in puncto P orta per actionem Solis.

Sed in singulo puncto P orbitæ Lunaris vis Y est $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ (per Theor. IV.) ergo Elementum retardationis Lunæ est $du \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$, cujus Integralis secundum Lemma præcedens est $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r+c}{8r} - \frac{1}{4}rc$, sive $\frac{2F}{Va} \times \frac{1}{8}rc$, cum P pervenit in A, cumque idem sit Solis effectus in singulo quadrante tota retardatio Lunæ est $\frac{2F}{Va} \times \frac{4}{8}rc$ sive $\frac{Frc}{Va}$, dum Luna revolutionem absolvit, respectu Solis immoti.

Si reddatur Soli motus suus, & loco mensis Periodici M, mensis Synodicus μ intelligatur, & censeatur quod proxime verum est mensem synodicum qui respondet mensi Periodico in circulo adbc peracto, esse ad eum mensem Periodicum ut μ ad M, ideoque eum mensem Synodicum esse $\mu \times 1 + \frac{2Y}{V}$ omnia procedent ut prius & erit $\frac{Frc}{Va}$ retardatio Lunæ toto ejus tempore synodico.

Scrupulus esse potest, utrum in hac expressione, quantitas c designet peripheriam 360 grad. an eam peripheriam conjunctam cum viâ quam Sol emensus est mense synodico; sed ex integrationis adhibitæ ratione patet, actum fuisse de veris quadrantibus circuli, ideoque hic c designare peripheriam ipsam nihilque ultra, ita ut $\frac{Frc}{Va}$ sit retardatio absoluta Lunæ tempore synodico.

Verum alia certior correctio est adhibenda; Constat ex Propositione XXVI. hujusce Libri, velocitatem Lunæ augeri per Solis actionem Radio orbitæ Lunaris perpendicularem, ita ut, velocitas Lunæ in Quadraturis sit ad ejus velocitatem in quolibet puncto ut $109.73r$ ad $109.73r + \frac{yy}{r}$, hinc tempus quo describitur arcus du brevius fit in proportione velocitatum, ideoque cum id tempus fuerit $\frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, fit $\frac{109.73r}{109.73r + \frac{yy}{r}} \times \frac{\mu du}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$ sive fractionem ad series reducendo $1 - \frac{yy}{109.73rr} \times \frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$; Quantitas autem hæc $\frac{\mu dc}{c} \times 1 + \frac{2Y}{V}$, duas partes continet, priorem independentem ab actione Solis secundùm directionem radii exercitam, & de acceleratione ad hanc partem pertinente actum est in XXVI. Prop.; & hinc fit ut mensis synodicus medius sit brevior eo qui debuisset esse in proportione numeri 10973 ad 11023, & inæqualitates inde natæ in variis partibus mensis synodici in variatione continentur;

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

altera pars $\frac{\mu du}{c} \times \frac{2Y}{V}$ pendet ab actione Solis secundum radium orbitæ Lunaris exercitam, & de hac sola isto calculo agitur, ideoque cum ex ista oriatur retardatio $\frac{2Y}{V} du$, & tempus $\frac{\mu du}{c}$ fiat minus in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ retardatio quæ fiet dum arcus du describi debuisset erit solummodo $\frac{2Y du}{V} - \frac{2Yyydu}{109.73r^2V}$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ evadet hoc Elementum $du \times \frac{2F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^4}{109.73r^3} + \frac{yy}{109.73r}$ cujus Integralis pro quadrante juxta Lemma I. est $\frac{2F}{Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{1}{4}rc - \frac{3 \times 3r^4c}{4 \times 8 \times 109.73r^3} + \frac{r^2c}{8 \times 109.73}$ sive $\frac{2Frc}{Va} \times \frac{1}{8} - \frac{5}{4.8.109.73}$ & quadruplicatum pro tota revolutione fit $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$.

Coroll. Constat ex Cor. 2do. Prop. IV. Lib. I. Princ. Quod vires centrales sunt inter se directè ut radii & inversè ut temporum Periodicorum quadrata: hinc, si sit A annus sidereus, & M mensis Periodicus sidereus sepositâ omni Solis actione, erit F ad V ut $\frac{a}{AA}$ ad $\frac{r}{MM}$, sive $\frac{F}{V} = \frac{aMM}{rAA}$ substituto itaque hoc valore loco $\frac{F}{V}$ in quantitate $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ quæ retardationem durante mense synodico exprimit, ea retardatio fit $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}c$, & si non attendatur ad correctionem quæ pendet ex actione Solis perpendicularis radio orbitæ Lunaris ea retardatio foret $\frac{M^2}{A^2}c$.

PROBL. II.

Dato tempore synodico apparenti Lunæ, invenire tempus periodicum quod observari debuisset, si abesset actio Solis in Lunam secundùm radium orbitæ Lunaris exercitam.

Sit S mensis synodicus apparens, A annus sidereus, inde (ex nota proportione mensis synodici ad Periodicum) invenietur mensem Periodicum apparentem esse $\frac{AS}{A+S}$, & quoniam hoc tempore Periodico Luna describeret peripheriam c deducetur quod tempore synodico S describet arcum $\frac{A+S}{A}c$.

Sed Luna citra Solis actionem tempore Periodico M describere debuisset Peripheriam c, &, eadem in Hypothesi, tempore S descripsisset aream $\frac{Sc}{M}$ hinc ergo retardatio absoluta quam patitur tempore S est $\frac{Sc}{M} - \frac{A+S}{A}c = \frac{AS-AM-MS}{AM}c$. Sed per Corollarium præcedentis problematis ea retardatio inventa fuerat $\frac{M^2}{A^2} \times \frac{433.92}{438.92}c$ hinc obtinetur hæc æquatio $AS - AM - MS = \frac{433.92M^3}{438.92A}$, loco M scribatur XA, loco S scribatur EA, & fiet hæc æquatio $A^2E - A^2X - A^2EX = \frac{433.92A^3X^3}{438.92A}$ sive $E = X + EX + \frac{433.92}{438.92}X^3$, sed mensis synodicus medius est .08084896 A hinc $E = .08084896$ & æquatio fit $.08084896 = 1.08084896X + \frac{433.92}{438.92}X^3$, loco X substituatur .0744 + R & æquatio evadit $.08084896 = .08082129 + 1.09726905R$, unde habetur $.00002767 = 1.09726905R$, hinc obtinetur $R = .000025$ & $M = .0744252A$.

THEOR. VII.

Si mutetur utcumque Solis à Terra distantia, ita ut loco a dicatur X, dico quod, cæteris manentibus, Retardatio Lunæ durante Tempore synodico, cum Ter-

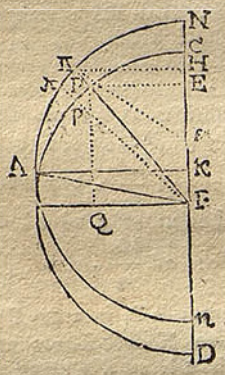
Terra distabit à Sole quantitate X erit $\frac{a^3 M^2}{X^3 A^2} \times \frac{433.92\,c}{430.92}$.

Nam ex Problemate I. Retardatio Lunæ inventa fuerat $\frac{Frc}{Va} \times \frac{433.92}{438.92}$ sed in aliâ à Sole distantia loco a ponatur X, & præterea loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$, decrescit enim vis Solis F ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione facta retardatio Lunæ fit $\frac{a^2 Frc}{X^3 V} \times \frac{433.92}{438.92}$; Tum vero loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a M^2}{r A^2}$ & habebitur expressio Theorematis hujusce.

LEMMA II.

Foco F, axe majore N F n qui dicatur $2a$ describatur Ellipsis, sit e ejus excentricitas eaque parva sit, axis minor sit $2b$, erit $b^2 = a - e^2$; Ex foco ut Centro radio a describatur circulus, & ducantur à foco lineæ secantes circulum in P & Ellipsim in Π, linea F Π dicatur X, sinus anguli A F P sit y, Cosinus z, Dico quod linea x erit $\frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$.

Ducatur ex Π, Π H perpendicularis ad Axem, & propter Triangulorum F P E, F Π H similitudinem erit F P ad F Π ut P E ad Π H & ut F E ad F H, hoc est $a : x = y : \frac{y}{a} x = z : \frac{z}{a} x$: Sit f alter focus Ellipseos ex eo ducatur linea f Π, ex natura Ellipseos est f Π $= 2a - x$ sed f Π^2 = Π H^2 + f H^2 & Π H $= \frac{y}{a} x$, & f H = F H − F f vel F f − F H vel F f + F H, & est F f $= 2e$ & F H $= \frac{z}{a} x$ hinc Π H^2 + f H^2 $= \frac{y^2}{a^2} x^2 + \frac{z^2}{a^2} x^2 \mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 =$ f Π^2 $= 4a^2 - 4ax + x^2$, est autem $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} x^2 = x^2$, ergo $\mp \frac{4ez}{a} x + 4e^2 = 4a^2 - 4ax$, & dividendo per 4 & transponendo est $ax \mp \frac{ez}{a} x = a^2 - e^2 = b^2$; Unde habetur $x = \frac{b^2 a}{a^2 \mp ez}$. Q. E. O.



Cor. Hic valor x in series resolutus est $\frac{b^2}{a} \times 1 \pm \frac{ez}{a^2} + \frac{z^2 e^2}{a^2} \pm \frac{e^3 z^3}{a^3}$ &c. sumptis signis superioribus quando E cadit in eâdem parte ac centrum, & sumptis signis inferioribus quando E cadit in parte in quâ non est centrum.

Cor. 2. Si fractio $\frac{a}{x} \times \frac{a^2 \mp cz}{b^2}$ ad dignitates superiores evehatur termini in quibus e plurium dimensionum poterunt omitti, propter suppositionem excentricitatem exiguam esse, & quidem si agatur de Solis excentricitate ea non assurgit ad duas centesimas radii, & excentricitas Lunæ non assurgit ad septem centesimas.

Cor. 3. Hinc tardatio Lunæ quæ ex Solis actione pendet, fiet durante tempore synodico S, $\frac{433.92c}{438.92} \times \frac{M^2}{A^2} \times \frac{a^2 \mp ez^3}{b^6}$, positis a pro semi-axe majore orbitæ Solis, e pro ejus excentricitate, & b pro axe minore.

PROBL. III.

Determinare quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis dum

Ter-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Terra describit circa Solem arcum quam minimum datum.

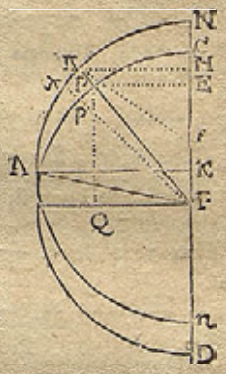
121. Sit ut in præcedenti Lemmate N Π n Ellipsis quam terra describit, sit Sol in foco F, ducatur ut prius linea F P Π & ei quam proxima F p π quæ secet in circulo C A D arcum P p, & quæratur quantitas graduum quâ tardatur Luna per Solis actionem, dum Terra videretur è Sole, describisse arcum P p.

Sit ut prius A tempus annuum, a Ellipseos semi-axis major, k circumferentia eo radio descripta ex foco F, sit e excentricitas, $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ semi-axis minor, area semi-circuli $\frac{ak}{4}$, quæ est ad aream semi-Ellipseos ut est a ad b, hinc area semi-Ellipseos est $\frac{bk}{4}$.

Dicatur arcus A P, u, arcus P p sit du, radio F Π sive X describatur arculus ex π in F Π, is erit ad du ut est F Π sive X ad a, ergo is arculus erit $\frac{x\,du}{a}$, ideoque area F Π π est $\frac{x^2 du}{2a} = \frac{b^4 a\,du}{2 \times a^2 \mp ez^2}$ (per Lem. præced.)

Sed tempus quo terra arcum P p describisse videtur est ad tempus semestre $\frac{1}{2}$ A, ut hæc area F Π π, sive $\frac{x^2 du}{2a}$ ad semi-Ellipsim $\frac{bk}{4}$, Est itaque illud tempus quo terra arcum P p describisse videtur $\frac{4\,x\,du}{2\,a\,b\,k} \times \frac{1}{2}\,A = \frac{x^2 A\,du}{a\,b\,k}$.

Inventum autem est quod tempore S Luna tardabatur propter actionem Solis quantitate $\frac{433.92\,c}{439.92} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ ergo tempore $\frac{x^2 A\,du}{a\,b\,k}$ tardabitur quantitate $\frac{433.92\,c \times x^2 A\,du}{438.92 \times S\,a\,b\,k} \times \frac{M^2 a^3}{A^2 x^3}$ sive $\frac{433.92\,c \times du}{438.92 \times S.\,b.\,k} \times \frac{M^2 a^2}{A\,x}$; aut substituendo valorem fractio. $\frac{a}{x}$, fit $\frac{433.92.c\,du}{438.92.S\,b\,k} \times \frac{M^2 a}{A} \times \frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ sive $\frac{433.92 c\,du \times M^2 a}{438.92\,S\,A\,b^3 k} \times a^2 \mp ez$.



PROBL. IV.

Invenire retardationem Lunæ ex actione Solis ortam durante semestri revolutione terræ circa Solem.

Primo inveniatur Integralis Elementi per Probl. III. inventi quod est $\frac{433.92\,c\,du \times M^2 a}{438.92.\,S.\,A.\,b^3 k}\,a^2 \pm az$ cujus Integralis est $\frac{433.92\,c \times M^2 a}{438.92.\,S.\,A\,b^3 k} \times a^2 u \mp aey$.

Si ergo sumatur semestris revolutio, illic est $u = \frac{1}{2}k$, & termini in quibus occurrit y sese destruunt, ut quidem liquet ex eo quod y illic evanescat, unde semestris retardatio fit $\frac{433.92c \times M^2 a}{438.92 S A b^3 k} \times \frac{1}{2}a^2 k = \frac{433.92c \times M^2 a^3}{438.92\,S\,A\,b^3} \times \frac{1}{2}$ sive ponendo $a = b$ quod proxime verum est $\frac{433.92\,c\,M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{1}{2}$.

Cor. Si quæratur retardatio Lunæ, facta tempore quo Terra à suo Aphelio ad mediocrem ejus distantiam pervenit, observandum quod eo in loco arcus u est $\frac{1}{4}k - e$, & y est b, unde Integralis inventa evadit $\frac{433.92\,c \times M^2 a}{438.92\,S.\,A\,b^3 k} \times \frac{1}{4}a^2 k - a^2 e - abe$, aut simplicius si quantitates a & b pro æqua-

æqualibus sumere liceat fiet $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S.A\,k} \times \frac{1}{4}k - 2e$ sive $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92 \times SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$.

PROBL. V.

Invenire Æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione, & quæ est adhibenda quando Terra est in suâ mediocri distantiâ à Sole.

Primo observandum est motum Lunæ qualis ex apparentiis determinatur ex duplici causâ pendere, ex actione Terræ cum motu projectili conjunctâ & ex Solis actione quæ motum ex præcedenti causâ natum tardat; Prior motus in orbe circulari uniformis foret, sed tardatio ex alterâ causâ procedens inæqualiter priori illi sese immiscet, Astronomi verò cum motum medium Lunæ æstimant, hanc tardationem sumunt quasi uniformiter in omne tempus distributam.

Cum ergo ea tardatio major sit in aliquibus Terræ positionibus, in aliis sit minor, quæstio est quænam correctio motui medio Lunæ sit facienda, ut habeatur Lunæ locus verus, ideoque investiganda est differentia inter tardationem proportionaliter tempori distributam, & tardationem veram quæ singulo loco competit, quæ differentia loco medio addita aut ex eo detracta restituet verum locum Lunæ quatenus hæc sola irregularitas spectatur.

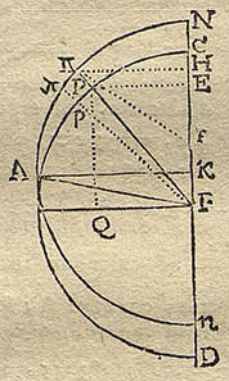
Ut ergo habeatur tardatio tempori proportionalis quando Terra est in mediocri distantia, fiat secundum Regulam Keplerianam, ut area semi-Ellipseos (quæ est $\frac{bk}{4}$ & est semestri tempori proportionalis) ad aream FNA (quæ est Ellipseos quarta pars cum Triangulo FAK ideoque est $\frac{bk}{8} + \frac{be}{2}$ & est proportionalis tempori quo Terra ab Aphelio suo ad mediocrem à Sole distantiam pervenit) hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4} + \frac{e}{k}$, ita tardatio semestri tempore factâ quæ (per Probl. IV.) est $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92 \times A\,b^3} \times \frac{1}{2}$, ad tardationem proportionalem tempori quo Terra ab Aphelio ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit, quæ erit ergo $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{4} + \frac{e}{k}$; sed per Cor. Probl. IV. vera tardatio eo in loco erat $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,SA\,b^3} \times \frac{1}{4} - \frac{2e}{k}$. Hinc substractione factâ, tardatio mediocris superat tardationem veram quantitate $\frac{433.92\,ca^3 \times M^2}{438.92\,S.A\,b^3} \times \frac{3e}{k}$. Hæc ergo quantitas graduum debet addi loco medio ut locus verus obtineatur. Si ergo loco e sumatur $.016\frac{7}{8}\,a$, erit $3e = .050\frac{5}{8}\,a$, & loco k scribatur $6.283188\,a$; & loco c, 360 gr. erit $\frac{3ec}{k} = \frac{18^{gr}.225}{6.283188} = 2^{gr}.9005$; Præterea $\frac{M^2}{S.A}$ ad calculum revocatur si loco M ponatur, $.0744252$ A; & loco S, $.08084896$ A, ut in Prob. 2do. repertum est, fit $\frac{M^2}{S.A} = .068511838 35$, idque ductum in fractionem $\frac{433.92}{438.92}$ efficit $.06773137$, cumque fractio $\frac{a^3}{b^3}$ sit tantum 1.00045 & superius sumptum sit a loco b hæc fractio pro unitate sumi potest, hinc est $\frac{a^3 M^2}{b^3 S.A} \times \frac{433.92}{438.92} = .06773137$, quod ductum in $2^{gr}.9005$ efficit $0^{o}.19646$ quod ductum per $60'$ efficit $11'.7876$, sive $11'.47''.256'''$, quam Newtonus $11'.49''$ assumit; majorem autem Æquationem in Hypothesi Elliptica inveniemus, unde medium quoddam inter utramque ab ipso assumptum esse videtur.

Cor. 1. Cum hæc æquatio sit $\frac{433.92 \times ca^3 \times M^2}{438.92 \times S.b^3 A} \times \frac{3e}{k}$ sive proxime $\frac{433.92\,c \times M^2}{438.92\,S \times A} \times \frac{3e}{k}$, & quantitates c, M, S, A, k, sint constantes, hæc æquatio, ubi Tellus est in suâ mediocri distantiâ, est sicut excentricitas orbitæ Telluris e, ideoque si ea excentricitas major sit quam $.016\frac{7}{8}$ radii a, crescet hæc æquatio in hac proportione; sit v. gr. $e = a \times .016\frac{11}{12}$,

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

& fiat ut $16\frac{7}{8}$ ad $16\frac{11}{12}$ ita $11^{l}.47^{\prime\prime}.616$ ad quartum, is quartus terminus $11^{l}.49^{\prime\prime}.42$, erit æquatio, suppositâ excentricitate orbitæ Telluris $.016\frac{11}{12}$, hoc in casu Newtonus Æquationem facit $11^{l}.50^{\prime}$.



Cor. 2. In alio quovis loco orbitæ Telluris, æquatio habebitur si fiat ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita semestris tardatio $\frac{433.92cM^2}{438.92\times S.A}\times\frac{a^3}{2b^3}$ ad tardationem huic tempori proportionalem, quæ erit ergo $\frac{433.92c\times M^2\times FN\Pi}{438.92\times S\times Ab^3}\times\frac{2a^3}{bk}$ tum vero si sumatur tardatio loco Π conveniens quæ est $\frac{433.92\times c\times M^2a}{438.92\times S\times Ab^3k}\times a^2u\mp aey$, (Probl. 4.) erit hæc æqu. $\frac{433.92c\times M^2a^2}{438.92\times S.A\times b^3k}\times\frac{2a\times FN\Pi}{b}-au\pm ey$, ideoque erit ut $\frac{2aFN\Pi-abu\pm bey}{b}$; aut sumendo $a=b$, ut $\frac{2FN\Pi-bu\pm ey}{b}$. Jam vero hæc quantitas est ipsa æquatio centri Solis; nam arcus qui describeretur per motum medium Solis eo tempore quo arcus u revera percurritur hac proportione obtinetur, ut semi-Ellipsis $\frac{bk}{4}$ ad aream F N Π ita semicirculus $\frac{1}{2}k$ ad arcum medio motu descriptum qui ergo erit $\frac{4FN\Pi}{bk}\times\frac{1}{2}k=\frac{2FN\Pi}{b}$; sed arcus tunc temporis revera descriptus, est N Π sive u, ergo æquatio centri Solis est $\frac{2FN\Pi}{b}-u$ sive $\frac{2FN\Pi-bu}{b}$ cui quantit. $\frac{2FN\Pi-bu\pm ey}{b}$ est quam proximè æqualis, nam terminus ey propter exiguitatem e respectu b, & y respectu u considerationem nullam hic meretur, ergo æquatio Lunaris in quovis loco orbitæ Telluris est sicut æquatio centri Solis eo in loco; Ergo ut æquatio centri Solis in mediocri distantia Telluris à Sole, est ad æquationem motus Lunaris adhibendam cum Tellus est in ea mediocri distantia à Sole, ita est æquatio centri Solis in quâvis distantiâ u ab Aphelio, ad æquationem Luni Solarem primam Lunæ illi loco convenientem.

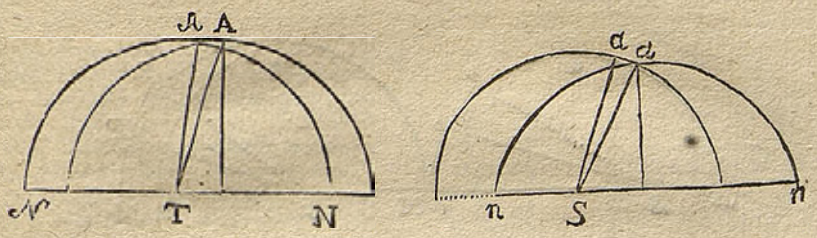
Cor. 3. Æquatio ista Lunæ, quæ Solaris prima dicitur, est maxima in distantia mediocri Terræ à Sole; nam cum sit proportionata æquationi centri Solis, & æquatio centri Solis sit maxima in mediocri distantiâ Telluris à Sole per ea quæ primo Libro circa hanc æquationem demonstrata sunt, Æquatio Solaris Lunæ eo in loco maxima pariter erit.

De Incremento motus medii Lunæ, & ejus æquatione ex Solis actione pendentibus, in Hypothesi eum orbem esse Ellipticum, Methodo diversâ ab eâ quæ in calculo præcedente fuit adhibitâ.

THEOR. I.

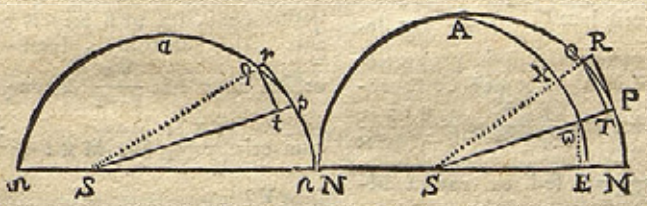
Sint duæ Ellipses descriptæ circa corpora centralia in ipsarum focis posita, quorum vires absolutæ diversæ sint; Dico, quod si Tempora Periodica in utraque Ellipsi sint ut earum Ellipsium areæ; Ellipses illæ erunt inter se similes.

Describantur duæ Ellipses N A N, n a n, circa corpora S & s in focis Ellipsium posita, & quorum vires sint diversæ, si totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos N A N, sit ad totum tempus quo describitur Peripheria Ellipseos n A n ut area prioris Ellipseos ad aream alterius, Ellip-



Ellipſes illæ ſimiles eſſe debebunt, hoc eſt earum Ellipſium axes majores erunt inter ſe ut ſunt inter ſe earum minores axes, v gr. ſi ſemi-axis major Ellipſeos N A N dicatur r, ejus minor ſemi-axis dicatur q & major ſemi-axis Ellipſeos n a n dicatur ϱ, ejus minor ſemi-axis n, Dico quod erit q ad n ut eſt r ad ϱ.

Ex naturâ Ellipſium area Ellipſeos NAN eſt ad aream Ellipſeos n a n ut eſt rq ad ϱn, & ex Hypotheſi tempus Periodicum in Ellipſi N A N eſt ad tempus Periodicum in Ellipſi n a n in eadem ratione rq ad ϱn, ſi ergo ſumantur arcus ſimiles A A, a a in mediocri diſtantiâ in utrâque Ellipſi, tempora quibus deſcribentur illi arcus erunt ut tota tempora Periodica, quia illi arcus A A, a a in mediocri diſtantiâ poſiti deſcribuntur motu medio corporum eas Ellipſes deſcribentium, & erunt etiam ut areæ A S A & a s a ex Hypotheſi, & iſtæ areæ A S A & a s a, ſunt ut quadrata linearum S A & s a ſive ut r^2 ad ϱ^2; Ergo eſt r^2 ad ϱ^2 ut rq ad ϱn, & dividendo terminos homologos per r & ϱ eſt r ad ϱ ut q ad n; Ergo Ellipſes ſunt ſimiles. Q. E. D.



THEOR. II.

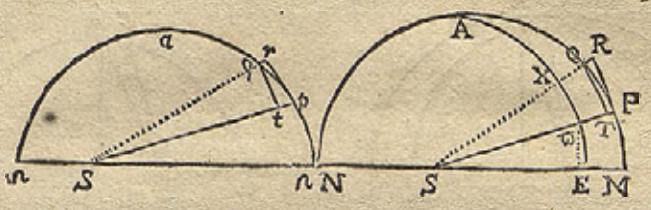
Sint, ut prius, duæ Ellipſes deſcriptæ circa corpora centralia in ipſarum focis poſita quorum vires abſolutæ diverſæ ſint, & ſint tempora Periodica in utrâque Ellipſi ut earum Ellipſium areæ, Dico quod axes majores earum Ellipſium erunt reciprocè ut vires abſolutæ corporum centralium.

Vis abſoluta corporis S dicatur V, corporis s dicatur V—Y, ducantur in utrâque Ellipſi lineæ S P, s p ad lineas apſidum S N, s n ſimiliter inclinatæ, & iis proximæ ducantur lineæ S Q, s q angulos ſimiles P S Q, p s q conſtituentes, ducantur ex Q & q perpendiculares Q T, q t in lineas S P, s p, & productis lineis S Q s q donec occurrant Tangentibus in R & r, erunt Q R, q r virium centralium effectus dum deſcribuntur arcus P Q, p q.

Primò quidem ex Hypotheſi, Tempora quibus deſcribentur ii arcus P Q, p q erunt ut areæ P S Q, p s q, & quia, ex conſt. illæ areæ ſunt ſimiles, erunt ut quadrata linearum homologarum ſive ut SP^2 ad sp^2 aut QT^2 ad qt^2. Sunt autem virium centralium effectus, directè ut vires centrales & ut quadrata temporum, vires verò centrales ſunt ut

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



$\frac{V}{SP^2}$ ad $\frac{V-Y}{sp^2}$, & quadrata temporum sunt ut SP^4 ad sp^4, Ergo lineæ QR & qr erunt inter se ut $\frac{V}{SP^2} \times SP^4$ ad $\frac{V-Y}{sp^2} \times sp^4$, sive ut $V \times SP^2$ ad $\overline{V-Y} \times sp^2$, aut denique ut $V \times QT^2$ ad $\overline{V-Y} \times qt^2$.

Secundo, In omnibus Ellipsibus per vim centralem ex foco prodeuntem descriptis latus rectum est æquale $\frac{QT^2}{QR}$ ut constat ex Prop. XI. Lib. I. Princ. Si itaque latus rectum Ellipseos NAN sit L, Ellipseos vero nan sit λ erit $L = \frac{QT^2}{QR}$ & $\lambda = \frac{qt^2}{qr}$, loco QR & qr quantitates ipsis proportionales $V \times QT^2$ & $V-Y \times qt^2$ collocentur, & erit L ad λ ut $\frac{QT^2}{V \times QT^2}$ ad $\frac{qt^2}{V-Yqt^2 \times}$ sive ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; sed ex naturâ Ellipsium, est $L = \frac{q^2}{r}$ & $\lambda = \frac{n^2}{\varrho}$, præterea quia Ellipses sunt similes ex præcedente Theoremate est $q : r = n : \varrho$, ideoque $\frac{q}{r} = \frac{n}{\varrho}$; Est ergo $L : \lambda$ ut q ad n sive ut r ad ϱ; Itaque est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$. Q. E. D.

Cor. In his itaque Hypothesibus Tempora Periodica erunt inverse ut Quadrata virium absolutarum corporum S & s; sunt enim per Theor. I. ut r^2 ad ϱ^2, & ex hoc Theoremate est r ad ϱ ut $\frac{1}{V}$ ad $\frac{1}{V-Y}$; Ergo Tempora Periodica sunt ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{\overline{V-Y}^2}$.

THEOR. III.

Sit T terra, P Luna quæ circa terram (sepositâ omni actione Solis) describat orbitam circulo proximam tempore Periodico M, Vis absoluta Terræ in Lunam dicatur V, minuatur ea vis absoluta quantitate exiguâ Y; Dico quod si ea vis V—Y maneat constans Luna describet circa Terram orbitam similem illi quam prius describebat, ita ut si prioris orbitæ semiaxis major dicatur r, semi-axis major orbitæ novæ erit $\frac{Vr}{V-Y}$ & tempus Periodicum erit $\frac{V^2 M}{\overline{V-Y}^2}$ sive $M \times 1 + \frac{2Y}{V} + \frac{3Y^2}{V^2} + \frac{4Y^3}{V^3}$ &c.

Nam 1°. cum Luna discedit à suâ orbitâ, retinetur tamen per vim decrescentem secundum quadrata distantiarum, describet ergo circa corpus in foco positum sectionem Conicam, quæ erit adhuc Ellipsis, quia mutatio vis centralis ponitur exigua, & per vim priorem orbita circulo finitima describebatur ita ut nec in Hyperbolam nec in Parabolam mutari possit hæc orbita.

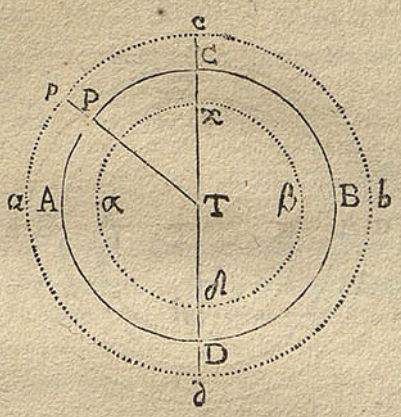
2°. Cum vis nova Y ad centrum sit etiamnum directa, quamcumque in viam flectatur Luna, areæ semper manebunt Temporibus proportionales, ideo si tandem in orbitam a d b ç deveniat ex orbi-

12

ta ADBC, tempus quo describetur peripheria adbc erit ad tempus M quo describebatur peripheria ADBC ut tota area ADBC ad aream adbc.

3°. Cum ergo in his orbitis ADBC, adbc (quæ describuntur circa corpus idem quidem, sed cujus vis absoluta alia censetur cum describitur orbita ADBC quam cum describitur adbc) tempora sint areis proportionalia, istæ areæ similes erunt, per Theor. I., circulisque finitimæ per Hyp., axes majores erunt inversè ut vites V & V−Y, per Theor. II. & tempora Periodica ut $\frac{1}{V^2}$ ad $\frac{1}{V-Y^2}$ itaque si in orbita ADBC, id tempus dictum fuerit M, in orbita adbc, erit $\frac{V^2 M}{V-Y^2}$, sive hanc quantitatem in seriem resolvendo $M\times 1+\frac{2Y}{V}+\frac{3Y^2}{V^2}$. Q. E. D.

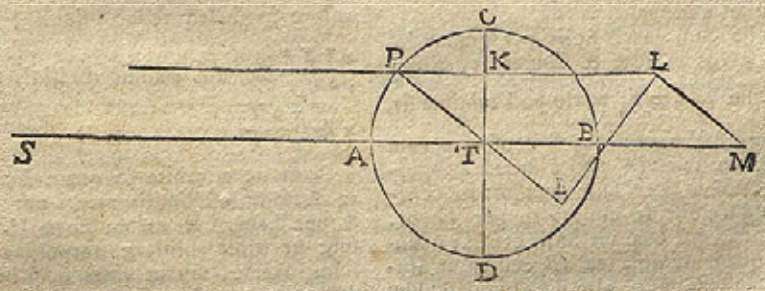
Cor. Iisdem Principiis ostendetur, quod si vis absoluta terræ augeretur quantitate exigua Y, Luna deferretur in orbitam interiorem $\alpha\delta\beta n$ similem priori ADBC, cujus radius foret $\frac{rV}{V-Y}$, sumendo quantitatem Y negativè & quæ describeretur tempore $M\times 1+\frac{2Y^2}{V}+\frac{3Y^2}{V^2}+\frac{4Y^3}{V^3}$ &c.



sumendo negativè terminos in quibus quantitas Y est imparium dimensionum.

Ut autem servetur hæc conditio quantitatem Y esse exiguam, fractiones $\frac{3Y^2}{V^2}$ &c. sunt delendæ in utroque casu ut infinitè parvæ.

Schol. In primo calculo, cum supposuerimus orbitam Lunæ ADBC esse circularem, orbitas novas adbc, $\alpha\delta\beta n$ circulares etiam esse, supponere necesse erat per Theor. I. hujusce calculi.

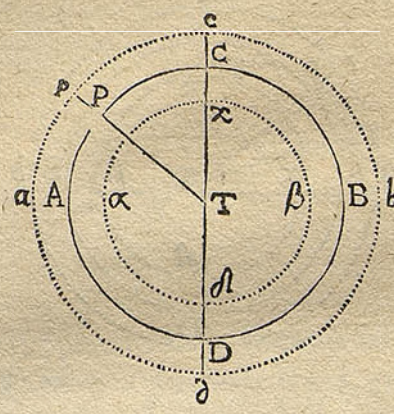


THEOR. IV.

Sit T Terra, P Luna, ADBC orbita quam Luna circa terram describeret sepositâ omni Solis actione, sit ST distantia mediocris Terræ à Sole quæ dicatur *a*; dicatur F vis Solis in Terram ipsam in mediocri illâ distantia, distantiâ Lunæ à Terrâ PT dicatur *r*; Sit CP distantia Lunæ à quadraturâ proximâ quæ dicatur *u*, sit ejus sinus *y*, sit ejus cosinus *z*; Dico quod ea pars vis Solis quæ agit in Lunam secundum directionem radii PT est ubique $\frac{F}{a}\times\frac{3yy}{r}-r$. Hoc Theor. idem est cum Theor. IV. præcedentis calculi, cujus demonstratio adiri potest.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



THEOR. V.

Effectus actionis Solis in Lunam secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitæ intelligi poterit, si concipiatur Lunam ex suâ orbitâ A D B C in aliam transferri cujus singulæ particulæ quamminimæ, forent portiones earum orbitarum quas Luna revera describeret, si vis Terræ constanter imminuta aut aucta foret eâ quantitate, quæ, per actionem Solis in eam particulam exercitæ, ex vi Terræ detrahitur aut ei additur.

Etenim cum ea vis Solis per gradus infinitè parvos crescat & decrescat, sitque nulla cum $\frac{3yy}{r} = r$, paulo post minima sit, sicque gradatim crescat, si censeatur eam constantem manere per aliquod tempusculum, Luna brevissimè transibit in orbitam a d b c illi vi congruam per Theor. III. mox verò cum vis Solis crescat quantitate quam minimâ ea vis censeatur iterum constans per alterum tempusculum transibit Luna ex orbitâ primæ vi congruâ in alteram huic incremento consentaneam, sicque semper: ideoque in singulis particulis arcus C P, censeri potest Lunam delatam esse in orbitam vi Solis in eo puncto agenti congruam.

THEOR. VI.

Dicatur mediocris distantia Lunæ à Terra, r; vis Terræ in eâ distantiâ sit V, vis Solis sive addititia sive substractiva sit, quæ agit in Lunam secundum radii Telluris directionem, sit Y in eâ mediocri distantiâ à Terra, crescat verò ut distantiæ; Dicatur x alia quævis distantia Lunæ à Terra in quâ vis Terræ erit $\frac{rrV}{xx}$, & vis Solis erit $\frac{xY}{r}$; Dico quod vis corporis centralis quæ in distantiâ x foret $\frac{rrV}{xx} - \frac{xY}{r}$, in mediocri distantiâ esse debuisset $V - \frac{x^3}{r^3}Y$.

Nam siquidem fingitur vim Corporis ejus centralis fictitii sequi legem gravitatis & decrescere sicut quadrata distantiarum fiat ut $\frac{1}{xx}$ ad $\frac{1}{rr}$ ita $\frac{rrV}{xx} - \frac{xV}{r}$ quæ est vis in distantiâ x ad $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ quæ erit vis in distantiâ r.

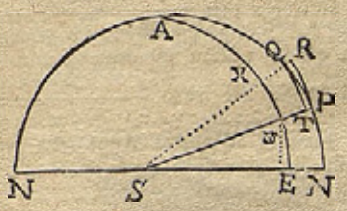
THEOR. VII.

Sit x ut prius distantia Lunæ à Terrâ in propriâ orbitâ, dico quod per actionem Solis illa distantia fiet $\frac{r^3 x V}{Vr^3 - Yx^3}$, sive hoc valore in seriem redacto fiet $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V} + \frac{x^7 Y^2}{r^6 V^2}$ &c. aut omissis terminis superfluis $x + \frac{x^4 Y}{r^3 V}$.

Nam nova orbita in quam Luna delata censetur est similis priori per Lem. I. & per Lem. II. earum lineæ Homologæ sunt ut vires absolutæ corporum centralium inversè, seu ut vires quas habent in distantiis æqualibus, nempe inversè ut $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ergo ut $V - \frac{x^3}{r^3}Y$ ad V, ita x ad distantiam Homologam in novâ orbitâ quæ erit ergo $\frac{xV}{V - \frac{x^3}{r^3}Y}$ sive $\frac{r^3 xV}{Vr^3 - x^3 Y}$.

Q. E. D.

THEO-



THEOR. VIII.

Centro S, radio æquali mediocri distantiæ r, describatur circulus, arcus ejus wX inter lineas SP, SQ interceptus dicatur du; Dico primò quod Luna in eo circulo uniformiter moveri posset eodem tempore Periodico quo moveretur in propriâ orbitâ si abesset vis Solis, ideoque si tempus Periodicum Lunæ in propriâ orbitâ dicatur M, & tota Peripheria circuli cujus radius est r dicatur c, tempus quo arcus du describetur mediocri Lunæ motu citra Solis actionem erit $\frac{Mdu}{c}$; 2°. Cum sit r semi-axis major Orbitæ Lunaris, si dicatur q ejus axis minor, Dico quod tempus quo idem ille arcus du describi videbitur urgente Solis actione & spectatâ excentricitate orbitæ Lunaris erit $\frac{Mdu}{c} \times \frac{x^2}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V} + \frac{3x^8Y^2}{qr^7V^2}$ &c.

Primo enim liquet quod is circulus describetur eo tempore Periodico quo describeretur orbita Elliptica Lunaris si sola vis Telluris agat; nam si corpora plura circa centrum commune revolvantur in quibuscumque Ellipsibus, Tempora eorum Periodica sunt in sesquiplicatâ ratione axium majorum (per Prop. XV. Lib. I. Princ. Newt.) sed hujus circuli & orbitæ Lunaris axes majores sunt æquales (per const.) Ergo eorum tempora Periodica sunt æqualia.

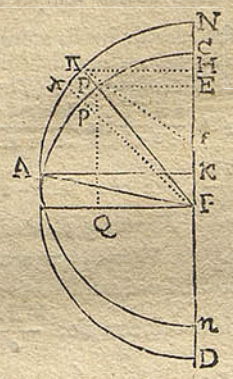
Secundo dicatur E tota superficies Ellipseos orbitæ Lunaris, hæc superficies E erit ad aream SQP ut tempus Periodicum M ad tempus quo arcus PQ describeretur, quod erit ergo $\frac{SQP \times M}{E}$ valor autem areæ SPQ est $\frac{QT \times SP}{2}$, sed ut r ad du ita SQ sive SP (x) ad QT, est ergo $QT = \frac{x\,du}{r}$ & $\frac{QT \times SP}{2} = \frac{xx\,du}{2r}$ hinc tempus quo Luna in propriâ orbitâ citra Solis actionem describeret arcum QP est $\frac{Mxx\,du}{2r.E}$. Hoc autem tempus erit ad illud quo describeretur similis arcus in orbitâ in quam Luna per actionem Solis defertur ut quadrata radiorum seu, per (Theor. præc.) ut xx ad $xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$ ita $\frac{Mxx\,du}{2r.E}$ ad $\frac{Mdu}{2r.E} \times xx + \frac{2x^5Y}{r^3V}$, sive cùm semi-axis minor orbitæ Lunaris dicatur q & area Ellipseos E sit ideo $\frac{1}{2}qc$, Tempus quo arcus du describi videbitur à Lunâ translatâ per actionem Solis in aliam orbitam fiet $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr} + \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ + &c.

Cor. 1. Ex ipsâ demonstratione liquet quod tempus quo citra Solis actionem describeretur area SPQ foret $\frac{Mdu}{c} \times \frac{xx}{qr}$, & discrepantiæ illius quantitatis à motu medio in æquatione Lunæ, quæ dicitur soluta, continentur: excessus vero (vel defectus si vis Y fiat negativa) $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ per Solis actionem genitus novam motus medii perturbationem producit de quâ hic agendum; Ergo, siquidem per medium motum tempore $\frac{Mdu}{c}$ arcus du descriptus fuisset, tempore hujus excessus $\frac{Mdu}{c} \times \frac{2x^5Y}{qr^4V}$ arcus $\frac{2x^5Y\,du}{qr^4V}$ describi potuisset, eâque quantitate graduum tardatur medius motus Lunæ propter actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam.

Cor. 2. Iisdem vero ratiociniis quibus usi sumus in solutione Probl. 1. calculi præcedentis constabit, quod propter accelerationem quæ oritur per actionem Solis perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris exercitam hæc retardatio $\frac{2x^5Y\,du}{qr^4V}$ debet minui in proportione 1 ad $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ sicque evadit $\frac{2x^5Y\,du}{qr^4V} - \frac{2x^5y^2Y\,du}{109.73qr^6V}$.

LEM.

121.



LEMMA I.

Ex præcedentis calculi Lemmate II. conſtat quod ſi ex puncto ϖ ducatur perpendicularis ϖE in lineam Apſidum, & excentricitas dicatur f erit FI ſive $* = \frac{q^2 r}{r^2 \mp f \times FE}$.

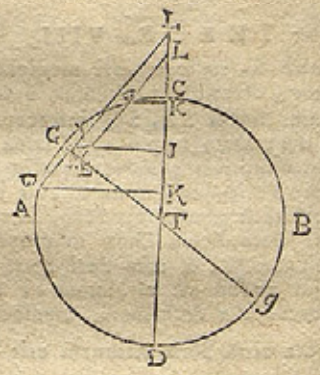
Nulla enim eſt differentia niſi in litteris, quæ diverſæ ſunt quia hic agitur de orbitâ Elliptica Lunæ illic de orbitâ Elliptica Telluris, cæterum eadem eſt demonſtratio.

Hic autem valor in ſeriem redactus evadet $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{FE \times f}{r} + \frac{FE^2 \times f^2}{r^4} \pm \frac{FE^3 \times f^3}{r^6}$ &c.

Signa ſuperiora adhibenda ſunt cum Luna diſtat ab Apogæo minus quam 90 gr. tam in conſequentia quam in antecedentia, cum Luna magis diſtat ab Apogæo quam 90 gr. ſigna inferiora ſunt adhibenda.

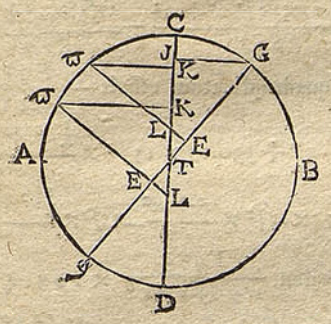
LEMMA II.

Si linea Apſidum non coincidat cum lineâ quadraturarum, Dicatur vero *m* ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ Apſidum, & *n* ejus anguli coſinus; Sit *y* ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ, *z* ejus coſinus, Diço quod diſtantia Lunæ à terrâ, quæ dicitur * erit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$ cum Luna eſt in eâdem quadraturâ cum alterutrâ Apſi, eſt verò $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ cum Luna & alterutra Apſis non ſunt in eâdem quadraturâ.



Sit CADB circulus deſcriptus centro T, radio æquali mediocri diſtantiæ Lunæ à terrâ quæ dicitur *r*. Sit GT g linea Apſidum, CTD linea quadraturarum, GI ſinus anguli lineæ quadraturarum & lineæ apſidum qui dicitur *m*, TI ejus coſinus qui dicitur *n*, ϖ punctum circuli CADB quod reſpondet vero loco Lunæ in peripheria ſuæ orbitæ, quod ſumitur vel ultra vel citra apſidem, ϖK ſinus diſtantiæ Lunæ à quadraturâ qui dicitur *y*, TK ejus coſinus qui dicitur *z*, Ducatur ex ϖ in lineam apſidum perpendicularis ϖE, quæ producatur donec ſecet lineam quadraturarum in L, Triangulum TIG eſt ſimile Triangulo TEL (ob angulos rectos E & I & angulum communem T); Triangulum TEL eſt ſimile Triangulo ϖKL (ob angulos rectos E & K & angulum communem L; Hinc eſt TI (*n*) : IG (*m*) :: ϖK (*y*) : KL $= \frac{my}{n}$; Hinc in iſto caſu TL = TK + KL $= z + \frac{my}{n}$, ſed ex ſimilitudine Triang. TIG & TEL eſt TG (*r*) : TI (*n*) :: TL $(z + \frac{my}{n})$: TE $= \frac{nz + my}{r}$, ſubſtituto ergo

go hoc valore in valore x Lemmate superiori reperto fit $\frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz + my}$. Q. E. 1°. O.



Si ϖ & apsis alterutra non sint in eadem quadratura, & 1°. si tamen ϖ non distet 90 gr. à proxima apside, similia erunt ut prius Triang. TJG, TEL, ϖKL, unde erit $KL = \frac{my}{n}$, sed erit $TL = TK - KL$ sive $z - \frac{my}{y}$, unde fiet $TE = \frac{nz - my}{r}$ ideoque erit $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$; Sed si ϖ distet à linea apsidum plusquam 90 gradibus erit $TL = KL - TK$ sive, $-TK + KL$, ideoque TE fiet $\frac{-nz + my}{r}$, sed cum in eo casu signum anceps litteræ f mutari debeat, statuatur non mutari illud signum litteræ f dum Luna est in eâdem quadraturâ donec in aliam quadraturam transeat, quamvis magis quam 90 gradibus ab apside discedat, mutari debebit ut fiat æquipollentia signum quantitatis $\frac{-nz+my}{r}$, quæ itaque evadet ut prius $\frac{nz-my}{r}$ ideoque fiet $x = \frac{q^2 r^2}{r^3 \mp f \times nz - my}$ quotiescumque ϖ & apsis alterutra non erunt in eâdem quadraturâ, determinando signum anceps $\mp f$ ex apside cui vicinior fuit Luna cum eam quadraturam describere incepit. Q. E. 2°. Ost.

Cor. Hic valor x in seriem redactus evadit $\frac{q^2}{r} \times 1 \pm \frac{f \times nz \pm my}{r^2} + \frac{f^2 \times nz \pm my^2}{r^4} \pm \frac{f^3 \times nz \pm my^3}{r^6}$ &c. signa superiora litteræ f sunt adhibenda cum initium quadraturæ quam describit Luna minus distat ab Apogæo quam 90 gr. tam in consequentia quam in antecedentia, si vero magis distet ab Apogæo quam 90 gr. signa inferiora sunt adhibenda. 121.

Signa superiora quantitatis my sunt adhibenda cum & Luna & apsis alterutra sunt in eâdem quadraturâ, signa inferiora cum Luna & apsis sunt in diversis quadraturis.

PROBL. I.

Dato Sinu & Cosinu anguli quem faciunt linea Apsidum & linea quadraturarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, tempore quo Luna orbitam suam percurrit.

Supponitur lineam Apsidum & Solem immotos manere durante illâ revolutione Lunæ; Quo posito cum retardationis Lunæ elementum inventum fuerit (Cor. 2. Theor. 8.) $\frac{2a^5 Y du}{qr^4 V} - \frac{2x^5 y^2 Y du}{109.73 q r^6 V}$, loco $\frac{2rYdu}{qV}$ ponatur ejus valor $\frac{2rFdu}{Vaq} \times \frac{3yz}{r} - y$ & loco $\frac{x}{r}$ valor ejus $\frac{q^2}{r^2} \times 1 \pm f \times \frac{nz \pm my}{r^2}$ &c. qui ad quintam dignitatem evehatur, dicatur A terminus $nz \pm my$, ea quinta dignitas erit $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 \pm \frac{5fA}{r^3} + \frac{15f^2A^2}{r^6} \pm \frac{35f^3A^3}{r^8}$; Verum observari potest, quod siquidem totidem sunt quadrantes in quibus f positivum aut negativum sumi debet, si tota revolutio Lunæ spectetur, hi termini ancipites omitti possunt, vel ab initio, hæc quinta dignitas sumi debet quasi foret $\frac{q^{10}}{r^{10}} \times 1 + \frac{15f^2A^2}{r^2}$

In his pagellis exponentem 2 loco exponentis 2 exaratum esse facilè percipiet eruditus Lector, quod monemus ne illo Typographico mendo turbetur horum intellectio.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIB. I.

ducatur in $1 - \frac{yy}{109.73r^2}$ fiet $\frac{q^{10}}{109.73r^{12}} \times 109.73r^2 - y^2 + 15 \times 109.73 \frac{f^2A^2}{r^4} - \frac{15f^2y^2A^2}{r^6}$, Denique ducatur in $\frac{2Fdu}{Vaq} \times 3y^2 - r^2$ fit $\frac{2Fq^9du}{109.73\,Var^{12}} \times 329.19r^2y^2 - 3y^4 - 109.73r^4 + r^2y^2 + \frac{45 \times 109.73f^2y^2A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73f^2r^2A^2}{r^4} - \frac{45f^2y^4A^2}{r^6} + \frac{15f^2y^2A^2}{r^4}$ sive $\frac{2Fq^9du}{109.73\,Var^{12}} \times 330.19r^2y^2 - 3y^4 - 109.73r^4 + \frac{330.19 \times 15f^2y^2A^2}{r^4} - \frac{15 \times 109.73f^2r^2A^2}{r^4} - \frac{45f^2y^4A^2}{r^6}$. Loco A^2 substituatur $n^2z^2 + m^2y^2$, omisso termino $\pm 2mnzy$, quia quando tota revolutio Lunæ assumitur duo sunt quadrantes in quibus Luna est cum apside, duo vero in quibus Luna cum neutrâ apside occurrit, fit tandem totum Elementum $\frac{2Fq^9du}{109.73\,Var^{12}} \times 330.19r^2y^2 - 3y^4 - 109.73r^4 + \frac{330.19 \times 15f^2n^2z^2y^2}{r^4} + \frac{330.19 \times 15f^2m^2y^4}{r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2r^2n^2z^2}{r^4} - \frac{109.37 \times 15f^2r^2m^2y^2}{r^4} - \frac{45f^2n^2z^2y^4}{r^6} - \frac{45f^2m^2y^6}{r^6}$; Cujus Integralis secundum Lemma I. calculi præcedentis pro quadrante fit $\frac{2Fq^9}{109.73\,Var} \times \frac{330.19r^4c}{8} - \frac{3 \times r^4c}{4 \times 8} - \frac{109.73r^4c}{4} + \frac{330.19 \times 15f^2n^2r^4c}{8r^4} - \frac{330.9 \times 15f^2n^2 \times \frac{3}{4}r^4c}{8r^4} + \frac{330.19 \times 15f^2m^2 \times \frac{3}{4}r^4c}{8r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2n^2r^4c}{4r^4} + \frac{109.73 \times 15f^2n^2r^4c}{8r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2m^2r^4c}{8r^4} - \frac{45f^2n^2 \times \frac{3}{4}r^4c}{8r^4} + \frac{45f^2n^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6}r^4c}{8r^4} - \frac{45f^2m^2 \times \frac{3 \times 5}{4 \times 6}r^4c}{8r^4}$; Quod reductum efficit $\frac{2Fq^9c}{109.73\,V.\,a.\,r} \times \frac{108.48}{8} + \frac{330.19 \times 15 \times f^2 \times \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}m^2}{8r^4} - \frac{109.73 \times 15f^2n^2 + m^2}{8r^4} - \frac{45f^2 \times \frac{1}{8}n^2 + \frac{5}{8}m^2}{8r^4}$ quod quadruplicatum efficit $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 330.19 \times 15f^2 \times \frac{\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}m^2}{r^4} - 109.73 \times 15f^2 \times \frac{n^2 + m^2}{r^4} - 45f^2 \times \frac{\frac{1}{8}n^2 + \frac{5}{8}m^2}{r^4}$ sive tandem $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times \frac{15f^2n^2}{r^4}$.

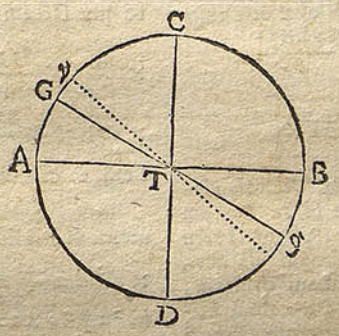
Cor. Si Sol & Apsis immoti non fingantur, sed supponatur eos pari passu moveri res eodem redibit, si modo hæc revolutio quâ durante nascitur hæc tardatio censeatur æqualis mensi Synodico; Quamvis autem Apsis reverâ non sequatur motum Solis, sed longe lentiùs procedat, imo in isto calculo immota censeri debeat, non tamen inde oritur error ullius momenti tam propter Eccentricitatem Orbitæ Lunaris quæ magna non est, quam propterea quod maxima pars hujus tardationis pendeat ex positione Lunæ respectu Solis, & minima sit ea pars hujus tardationis quæ per situm Lunæ respectu Apsidum determinatur.

Cor. 2. Ex his terminis $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^2m^2}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^2n^2}{r^4}$ liquet quod si linea Apsidum cum linea quadraturarum consentiat, quo casu sinus m anguli quem facit linea Apsidum cum linea quadraturarum evanescit, & ejus Cosinus n fit r, hæc tardatio fit omnium minima, nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.\,Var} \times 108.48 - 27.5575 \times 15\frac{f^2}{r^2}$.

E con-

E contra, si linea Apsidum sit in Syzygiis ita ut m fiat r, & n evanescat, hæc expressio fit omnium maxima nempe $\frac{Fq^9c}{109.73.Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^z}{r^z}$; Ideo mensis Synodicus fit minimus cum Apsides sunt in Quadraturis, longissimus vero cum Apsides sunt in Syzygiis.

Cor. 3. Hinc oritur altera æquatio Solaris Lunæ quæ secunda dicitur & pendet ex situ Apsidum, sive Apogæi respectu Solis.



PROBL. II.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari & lineam Apsidum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successivè obtinere, Invenire tardationem mediocrem Lunæ in singulâ ejus revolutione synodicâ.

Sit linea Apsidum, in ipsâ directione syzygiarum A & B, & dum Sol ab Apogæo Lunæ in consequentia movetur, & Apogæum revera est immotum, fingatur Solem immotum stare & ipsum Apogæum à Sole in antecedentia regredi; Moveatur Apogæum ex G in γ per arcum quamminimum Gγ qui dicatur du tardatio Lunæ quæ fiet dum describitur Gγ erit ad totam tardationem quæ fieret si apsis foret immota in G & quæ per Probl. præcedens inveniretur, ut tempus quo Apsis describit arcum Gγ ad totum mensem synodicum: Dicatur ergo A tempus quo Apsidum revolutio Solis respectu absolveretur, quod in hac hypothesi est ipse annus sidereus, erit ut tota circumferentia c ad du, ita A ad tempus quo Apsis arcum du describet quod erit $\frac{A\,du}{c}$. Præterea ut mensis synodicus S ad hoc tempus $\frac{A\,du}{c}$, Ita tardatio mense synodico facta quæ est $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^z m^z}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^z n^z}{r^4}$ ad tardationem quæ fiet tempore $\frac{A\,du}{c}$ quæ erit itaque $\frac{AFq^9du}{S \times 109.73 . V.\,ar^8} \times 108.48 + 136.0375 \times 15\frac{f^z m^z}{r^4} - 27.5575 \times 15\frac{f^z n^z}{r^4}$ (in quâ expressione m respondet quantitati y quæ in Lemmate I. præcedentis

DE MUNDI SYSTEMATE.

tis calculi adhibetur, & n respondet quantitati z) & integretur pro quadrante juxta Coroll. 4. ejus Lemmatis habebitur

121. $\frac{\text{A. F. } q^9}{S \times 109.73 . V . ar^8} \times \frac{108.48\, c}{4} + \frac{136.0375 \times 15 f^2 r^2 c}{4 r^4} - \frac{163.595 \times 15 f^2 r^2 c}{8 r^4}$;

Quadruplicetur vero pro toto circulo fiet $\frac{A F q^9 c}{S \times 109.73 . V ar^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$; Denique ut totum tempus A ad tempus synodicum S ita hæc tardatio ad tardationem menſe synodico factam quæ erit ergo $\frac{F q^9 c}{109.73\, V ar^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$.

PROBL. III.

Positâ excentricitate orbitæ Telluris circa Solem, & orbitæ Lunæ circa Terram invenire tardationem Lunæ 1°. dum Terra describit arcum quamminimum datum, 2°. Dum describit annuam suam orbitam, 3°. durante menſe synodico, 4°. dum Luna ab Aphelio suo ad mediocrem suam à Sole distantiam pervenit.

Sit a mediocris distantia Telluris à Sole, x alia quævis distantia, si F sit vis Solis in distantia a erit $\frac{aaF}{xx}$ ejus vis in distantia x; Ergo in calculo Probl. mox præcedentis quo tardationem menſe synodico factam invenimus, x loco a ponatur & $\frac{aaF}{xx}$ loco F evadet tardatio $\frac{a^2 F q^9 c}{109.73\, V x^3 r^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$, & si A sit annus sidereus, M menſis Periodicus Lunæ citra omnem Solis actionem, est $\frac{F}{V} = \frac{M^2 a}{A^2 r}$ (per Cor. 2. Prop. IV. Lib. I.) hinc ista tardatio evadit $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{109.73 A^2 x^3 r^9} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$.

Sit b semi-axis minor Ellipseos quam Terra describit circa Solem, e excentricitas, k Peripheria radio a descripta, ideoque sit $\frac{1}{2} bk$ area tota Ellipseos quam Terra describit circa Solem, sit du motus angularis terræ circa Solem quam minimo tempore, area illi angulari motui respondens erit $\frac{x x du}{2a}$ (ut constat ex calculo præcedente) ideoque ut Ellipsis tota $\frac{1}{2} bk$ ad hanc aream $\frac{x x du}{2a}$, ita annus A, ad tempus quo arcus du describitur qui erit ergo $\frac{A x x du}{abk}$, & ut menſis synodicus Sad id tempus ita tota tardatio ad tardationem hoc tempore quæ factam erit $\frac{A M^2 a^3 x^2 q^9 c du}{109.73 . S . A^2 x^3 abk r^9} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$ sive $\frac{M^2 a^2 q^9 c du}{109.73\, S\, A\, x . bk r^9} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$ sed $\frac{a}{x}$ est $\frac{a^2 \mp ez}{b^2}$ per Lem. 2. calculi præcedentis, hinc istud elementum evadit $\frac{M^2 a q^9 c \times 108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73 . S . A . b^3 k . r^9} \times a^2 du \mp ezdu$ cujus Integralis est $\frac{M^2 a q^9 c \times 108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73 . S . A . b^3 . k r^9} \times a^2 u \mp aey$, quæ semi-circulo absoluto fit $\frac{M^2 a^3 q^9 c \times 108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73\, S . A . b^3 k r^9} \times \frac{1}{2} k$; cujus duplum est retardatio anno durante factâ, estque $\frac{M^2 a^3 q^9 c \times 108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73 . S . A . b^3 r^9}$ hinc ut A ad S ita hæc tardatio ad tardationem menſe synodico factam quæ erit ergo $\frac{M^2 a^3 q^9 c}{A^3 b^3 r^9} \times \frac{108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Denique, retardatio quæ convenit mediocri distantiæ à Sole, in quâ u est $\frac{1}{4} k - e$, & est $y = b$, est $\frac{M^2 a q^9 c \times 108.48 + 813.6 \frac{f^2}{r^2}}{109.73\, S . A . b^3 r^3} \times \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 e}{k} - \frac{abe}{k}$.

PRO-

PROBL. IV.

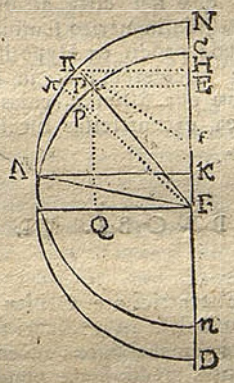
Dato tempore Synodico apparenti Lunæ invenire tempus Periodicum M quod observaretur si omnino abesset vis Solis.

Siquidem tempore M describeretur arcus c, tempore S describeretur $\frac{Sc}{M}$, tempus autem Periodicum quod tempori Synodico S respondet est $\frac{AS}{A+S}$, ideoque cum illo tempore revera describatur arcus c, tempore Synodico S describeretur $\frac{A+S}{A}c$, hinc retardatio quæ fit mense Synodico est $\frac{Sc}{M} - \frac{Ac+Sc}{A}$ sive $\frac{ASc-AMc-MSc}{AM}$; quæ inventa fuit $\frac{M^2a^3q^9c}{A^2b^2r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ unde fit æquatio ex quâ valor quantitatis M obtinebitur, fiat ut in præcedenti calculo $S=EA$ & $M=XA$, æquatio evadit $E=X+EX+X^3 \times \frac{a^3q^9}{b^3r^9} \times \frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$.

Sumatur excentricitas mediocris orbitæ Lunaris quam .055505 r facit Newtonus in hoc Scholio, unde is terminus $\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}$ evadit 1.0110782 est $\frac{q^9}{r^9}=.9864$, est $\frac{a^3}{b^3}=1$. proximè, itaque æquatio est $E=X\times\overline{1+E}+.9972X^3$; loco E substituatur .0804896, loco X substituatur .0744 + R & æquatio evadit .08084896 = .08082583 + 1.09740854 R unde habetur .00002313 = 1.09740854 R unde obtinetur R = .0000210, & M = .0744210 A; fere ut in præcedenti calculo.

PROBLEMA V.

Invenire æquationem motus medii Lunaris quæ pendet ex Solis actione & quæ adhibenda est cum Terra est in mediocri suâ distantiâ à Sole.



Hoc Problema solvitur ut in præcedenti calculo, itaque ut tota Ellipsis cujus area est $\frac{1}{2}bk$ ad aream FNA (sive $\frac{kk}{8}+\frac{be}{2}$.) ita tardatio annua quæ inventa est $\frac{M^2a^3q^9c\times 108.48+813.6\times\frac{f^2}{r^2}}{S.A.\,b^3r^9\times 109.73}$, ad tardationem quæ in motu medio continetur & quæ est ideo $\frac{M^2\,a\,q^9\,c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times 109.73}\times\frac{1}{4}a^2+\frac{a^2e}{k}$, cujus excessus supra retardationem veram Probl. III. inventam est $\frac{M^2aq^9c\times 108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{S.A\,b^3r^9\times 109.73}\times\frac{2a^2e+abe}{k}$ sive sumendo ab pro a^2 fit $\frac{M^2a^3q^9c}{S.A.\,b^3r^9}\times\frac{108.48+813.6\frac{f^2}{r^2}}{109.73}\times\frac{3e}{k}=\frac{.9972M^2}{S.A}\times\frac{3ec}{k^2}$

SCD LYON 1

DE MUNDI SYSTEMATE.

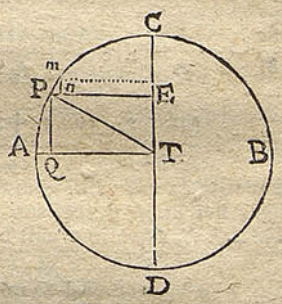
121.

(per Prob. IV.) est $\frac{3ec}{k} = 2\text{gr.}9005$, est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$ quod ductum in .9972 efficit .0683123 88, quod ductum in 2gr. 9005, efficit 0°.1982 quod ductum per 60′ bis efficit 11″. 52‴ &c. sed in priori calculo erat 11′. 47″, itaque medium inter hos duos valores est 11′. 49″, ut invenit Newtonus; cum enim Orbitæ Lunaris figura sit admodum variabilis, & incerta sit excentricitas quæ ipsi citra actionem Solis conveniret, non immerito sumitur medium inter id quod prodit ex Hypothesi orbem Lunæ esse circularem, & in Hypothesi orbem Lunæ esse Ellipsim, cujus excentricitas est ea excentricitas mediocris quæ observatur.

PROBL. VI.

Positâ Excentricitate Orbitæ Lunaris, Posito vero Solem in mediocri suâ distantiâ à Terrâ semper stare, invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ Apogæi Lunæ respectu Solis.

Inventum erat in Problemate 1°. quod tota tardatio Lunæ, durante mense Periodico, in mediocri distantia Terræ à Sole & in data Apsidis ad Quadraturam positione erat $\frac{Fq^9c}{109.73\,Var^8} \times 107.48 + \frac{136.035 \times 15 f^2 m^2}{r^4} - \frac{27.5575.15 f^2 n^2}{r^4}$, Posito sinum anguli lineæ Apsidum cum linea quadraturarum esse m, Cosinum vero anguli esse n, sive quod eodem redit sinum distantiæ Apsidis à Syzygia esse n, ejus Cosinum esse m; Præterea inventum erat quod si linea Apsidum omnes possibiles positiones cum linea Syzygiarum assumat, tota tardatio quæ eo tempore fit est $\frac{AFq^9c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$; Hinc si linea apsidum discedat à Syzygia arcu u, & fingatur retardationem esse proportionaliter tempori distributam, fiet ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio facta dum Peripheria describitur quæ est $\frac{AFq^9c}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.f^2}{r^2}$ ad tardationem mediam huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{AFq^9u}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{813.6 f^2}{r^2}$, sed cum Elementum tardationis (eodem Probl. 2°.) repertum sit $\frac{AFq^9du}{S.\ 109.73 \times Var^8} \times 108.48 + \frac{136.0375 \times 15 f^2 m^2 - 27.5575 \times 15 f^2 n^2}{r^4}$. Integralis ejus sumatur per Lemma I. calculi præcedentis, loco m ponendo z & loco n ponendo y, & Integralis erit



$\frac{AFq^9}{S \times 109.73 \times Var^8} \times 108.48u + \frac{136.0375 \times 15 f^2 \times APET - 27.5575 \times 15 f^2 APQ}{r^3}$

quæ quantitas si subtrahatur ex præcedenti, æquatio in data distantia u Apogæi à Sole in Antecedentia, vel Solis ab Apogæo in consequentia erit $\frac{AFq^9f^2}{S \times 109.73\,Var^8} \times 813.6ru - 136.0375 \times 15 APET + 27.5575 \times 15 APQ$ est autem $APET = APQ + 2PQT$, est $ru = 2APT = 2APQ + 2PQT$, quibus valoribus substitutis, divisoque primo termino 813.6 per 15 æquatio evadit $\frac{15AFq^9f^2}{109.73 \times S.V.ar^8} \times 108'.48\,APQ + 108.48\,PQT - 136.0375\,APQ - 272.075\,PQT + 27.5575\,APQ$, & reductione facta fit $\frac{15A \times Fq^9f^2}{109.73 \times S.V.ar^8} \times -163.595\,PQT$.

Hæc æquatio negativa est cum Apogæum

gæum Lunæ ex A in C à Syzygiâ ad quadraturam procedit, in Quadratura evanescit, nam PQT in Quadratura fit zero: Si Apsis ex C in syzygiam B pergat, fit APET = APQ − 2PQT, est $ru = 2APT = 2AQP - 2PQT$, quibus valoribus in æquatione substitutis quantitas $-163.595\,PQT$ ex negativâ positiva fit, rursus fit negativa cum ex syzygiâ B ad quadraturam D Apogæum pergit, positiva iterum ex D in A; evanescit vero in omnibus punctis syzygiarum & quadraturarum.

Cor. 1. Ex Trigonometriâ notum est quod sinus arcus dupli alterius arcus est duplum facti sinus arcus simpli per ejus Cosinum divisum per Radium; ideoque constat quod sinus arcus dupli alterius arcus est semper ut factum arcus simpli per ipsius Cosinum; sed areæ QPT duplum, nempe area TQPE, est ipsum factum sinus QP arcus AP per ejus Cosinum TQ, ergo area QPT est ut sinus arcus dupli arcus AP, Æquatio autem inventa est ubique ut area illa PQT siquidem constat ex facto illius areæ per constantes ductæ; Ergo æquatio proposita est ubique ut sinus arcus dupli Distantiæ Apogæi Lunæ à Syzygiâ.

Cor. 2. Hinc etiam sequitur illam æquationem evanescere in syzygiis & Quadraturis, iis enim in punctis Luna distat à syzygiâ vel 90gr. vel 180gr. vel 270 vel 360, quorum arcuum duplum est 180, 360, 540, 720, quorum arcuum sinus sunt zero.

Cor. 3. Hinc etiam sequitur hanc æquationem esse maximam in Octantibus tunc enim cum Apogæum distet à syzygia vel 45. gr. vel 135 vel 225 vel 315 quorum dupli sunt, 90 gr 270, 450, 630 &c. & horum arcuum sinus sit Radius qui omnium sinuum maximus est sequitur æquationem istis sinibus proportionatam hic loci esse maximam.

Cor. 4. In Octantibus hæc area PQT est $\frac{1}{2}rv$, ut notum est, hinc ista Æquatio evadit $\frac{40.449375 \times 15AF\,q^9 f^2}{109.73 \text{ S. } V \times ar^9}$, loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$ est $f^2 = .0030305 r^2$; est $\frac{q^9}{r^9} = .9864$. tota quantitas fit $\frac{40.449375 \times 15 \times .00298928 r \times AM^2}{109.73.S.A^2} = 2$ sed inventum est quod est $\frac{M^2}{SA} = .0685042$, & est $\frac{40.449375 \times 15}{109.73} = 5.52939$, hinc tota æquatio est $.0011297456r$, sed r est æqualis arcui 57 gr. 29. &c. hinc æquatio est graduum .063723125 &c. quod ductum per 60 efficit $3'.82338$, & .82338 ductum per 60, efficit $49''.4$, Ita ut tota æquatio sit $3'.49''$. &c.

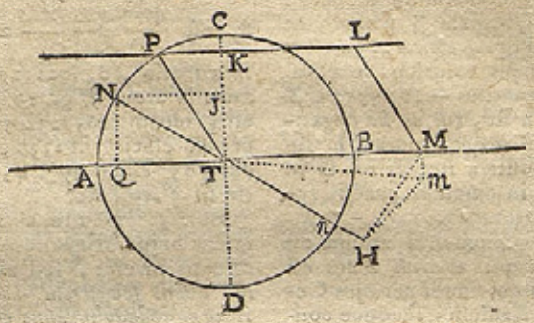
Cor. 5. Newtonus non tradit quantitatem hujus Æquationis qualem illam ex calculis invenit, sed ait ille, *Hæc æquatio quam semestrem vocabo in Octantibus Apogæi quando maxima est ascendit ad* $3'\,45''$ *circiter quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia a Terra.* Scilicet in Hypothesibus nostris Apsidem & terram immotam assumpsimus, cum id revera non sit, ideoque, si concedatur nos attigisse verum Newtoni calculum, æquatio per calculum inventa non plane eadem erit cum vera, parum tamen admodum ab illa differet; cæterum omnes æquationis veræ Leges ex iis quæ per istum calculum obtinentur merito deducentur, & eæ ipsæ sunt quæ in præcedentibus Coroll. sunt constitutæ, sed absoluta æquationis quantitas ex observatione non ex calculo est petenda, differunt autem calculus & rei veritas $3''$ duntaxat quod Theoriæ præstantiam sufficienter probat.

De Æquatione motus Lunaris semestri secunda quæ pendet ex positione lineæ Nodorum respectu lineæ Syzygiarum.

Ex inclinatione orbitæ Lunaris ad planum Ecliptiæ fit ut pars actionis Solis consumatur in ipso plano orbitæ Lunaris ad Planum Ecliptiæ admovendo, sicque tota non occupetur, ut hactenus suppositum fuerat in distrahendo Lunam à terræ centro aut illam ad id attrahendo, aut alio modo Lunam in proprio ejus Plano accelerando aut retardando. Hinc æquationes prius inventæ novâ correctione indigent.

PRO-

DE MUNDI SYSTEMATE. 121.



PROBL. I.

Invenire partem actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ eâ parte actionis Solis quæ consumitur in ipso plano orbitæ Lunaris dimovendo.

Sit ATB linea Syzygiarum in Eclipticæ plano; NTn linea nodorum; P locus Lunæ in propria orbita; PL, LM directiones virium in quas resolvitur vis Solis, quarum PL est parallela TM & LM Parallela radio TP.

Ducatur ex M in planum orbitæ Lunaris productum perpendicularis Mm, ducatur in plano orbitæ Lunaris linea Tm, & ex M & m ducantur perpendiculares MH, mH in lineam nodorum Nn productam.

Radius TP dicatur r ut prius, Distantiæ Lunæ à Quadratura sinus PK dicatur y, Cosinus TK dicatur z; Distantiæ nodorum à Syzygia sinus NQ sit n, Cosinus TQ sit m; Denique sinus Inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam dicatur l, existente r radio, & ea inclinatio constans supponatur, quæ secundum Keplerum, De la Hirium &c. est ubi maxima, graduum 5. 19. 30.

Ex demonstratis est $TM = 3y$; & propter similitudinem Triangulorum NTQ, MTH, est $NT\ (r) : MT\ (3y) :: NQ\ (n) : MH\left(\frac{3yn}{r}\right)$, & quia angulus MHm est angulus inclinationis orbitæ Lunaris ad Eclipticam, ut $r : l :: MH\left(\frac{3yn}{r}\right) : Mm = \frac{3ynl}{r^2}$; Denique ut est $TM\ (3y)$ ad $Mm\left(\frac{3ynl}{r^2}\right)$ sic est r ad sinum anguguli MTm qui erit ergo $\frac{nl}{r}$, cujusque Cosinus erit $\sqrt{r^2 - \frac{n^2l^2}{r^2}}$ sive $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$.

Jam autem tota vis TM est ad eam ejus partem quæ agit secundum planum orbitæ Lunaris ut radius ad Cosinum anguli MTm sive ut r ad $r - \frac{n^2l^2}{2r^3}$ & in eâdem proportione minuuntur partes in quas resolvitur ea vis, ergo cum portio totius vis TM secundum directionem radii exercita (si Planum orbitæ Lunaris & Eclipticæ idem fuissent) sit $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r}$ ex superiùs demonstratis; Pars residua propter inclinationem Plani erit $\frac{F}{a} \times \overline{\frac{3yy}{r} - \frac{3y^2n^2l^2}{2r^5}}$; Vis autem LM quæ est $\frac{F}{a}\,r$ & negativè sumitur, nullam diminutionem patitur ex hâc plani inclinatione, quippe PT est in ipsâ orbitâ Lunari, ideoque ejus planum quomodocumque situm non dimovet; Hinc ergo pars actionis Solis quæ Lunam secundum radium ejus orbitæ trahit, sublatâ

tâ eâ parte quæ consumitur in plano orbitæ dimovendo est $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$.

PROBL. II.

Dato sinu anguli quem faciunt lineæ Nodorum & Syzygiarum invenire quantitatem graduum quibus tardatur Luna per actionem Solis secundùm directionem radii orbitæ Lunaris exercitam, semotâ eâ ejus actionis parte quæ in dimovendo plano orbitæ Lunaris exercetur.

Elementum retardationis Lunæ (Probl. 1. calculi prioris) inventum erat $\frac{2Ydu}{V}$, loco Y ponatur ejus valor Probl. præcedente inventus $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r - \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$; si, quia jam actum est de retardatione per vim $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ productâ, adhibeatur solummodo quantitas $\frac{F}{a} \times - \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$ (quæ cum negativa sit ex retardatione fit acceleratio) hinc, accelerationis ex hâc causâ pendentis Elementum est $\frac{2Fdu}{Va} \times \frac{3y^2n^2l^2}{2rs}$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{Fn^2l^2}{Vars} \times \frac{3r^2c}{8}$ & quadruplicatum pro revolutione integrâ fit $\frac{3Fn^2l^2c}{2Var^3}$. Unde liquet quod cum linea nodorum est in ipsâ lineâ Syzygiarum quo casu n evanescit, tunc motus Lunæ est ipse ille qui præcedentibus Theoriis fuit inventus, quando vero linea nodorum est in lineâ syzygiarum tunc est $n = r$, & est acceleratio $\frac{2Fl^2c}{2Var}$ quæ tum maxima est.

PROBL. III.

Posito Solem in mediocri suâ distantiâ versari, & lineam Nodorum omnes possibiles positiones cum lineâ Syzygiarum successivè obtinere, Invenire æquationem motus medii Lunæ pendentem ex vario situ nodorum Lunæ.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

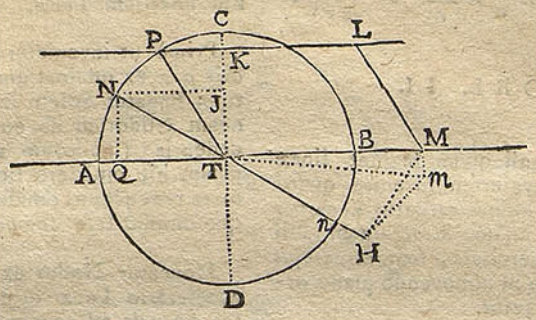
Primò ut inveniatur acceleratio mediocris quæ ex inclinatione plani Lunaris oritur; fingatur Solem immotum stare & lineam Nodorum ab eo recedere in Antecedentia (nodorum autem motum proprium hic omittere licet, cum in Problemate præcedente omissus sit, sic enim utraque omissio sese compensant.)

Moveatur Nodus ex N per arcum du, acceleratio Lunæ quæ fiet dum describitur du erit ad accelerationem toto mense factam, ut tempus quo Nodus describit arcum du ad totum mensem, sed tempus quo nodus describit arcum du est $\frac{Adu}{c}$, nam ut tota Peripheria c ad arcum du ita annus sidereus A ad tempus quo arcus du describitur, quod erit ergo $\frac{Adu}{c}$, ergo ut mensis synodicus S, ad hoc tempus $\frac{Adu}{c}$, ita acceleratio uno mense factâ quæ inventa est $\frac{3Fl^2n^2c}{2Var^3}$ ad $\frac{3AFl^2n^2du}{2S.Var^3}$ Integretur pro quadrante & erit $\frac{3AFl^2r^2c}{2\times 8S.Var^3}$ quadruplicetur pro totâ revolutione fiet $\frac{3AFl^2c}{4SVar}$, & hæc erit acceleratio motus medii Lunæ propter orbitæ inclinationem.

Hinc si linea nodorum discedat à lineâ syzygiarum arcu u, & fingatur totam accelerationem proportionaliter tempori distribui, fiat ut tota Peripheria c ad eum arcum u, ita tota tardatio $\frac{3AFl^2c}{4S.Var}$, ad accelerationem huic tempori proportionalem quæ erit $\frac{3AFl^2u}{4S.Var}$ sive $\frac{3AFl^2}{2S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$. Sed Integralis elementi $\frac{3AFl^2n^2du}{2SVar^3}$ quando arcus NA est u, est $\frac{3AFl^2 \times ANQ}{2.S.V.ar^2}$ (ex Lem. I. calc. 1.) hæc ergo quantitas ex præcedenti subtracta dat æquationem sive differentiam accelerationis mediæ & accelerationis

DE MUNDI SYSTEMATE.

§ 21.



veræ, quæ æquatio erit ergo $\frac{3AFl^2}{2SVar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ sed $\frac{ru}{2} - ANQ$ est Triangulum NQT, & est $NQT = \frac{nm}{2} = \frac{2nm}{4}$; Hinc æquatio proposita sive Excessus accelerationis mediæ super veram est $\frac{3AFl^2}{8S.Var} \times \frac{2nm}{r}$, quæ est quantitas quâ minuendus est motus medius Lunæ ut ejus locus verior habeatur.

Cor. Hinc cum quantitates $\frac{3AFl^2}{8S.Var}$ sint constantes & $\frac{2nm}{r}$ sit sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, æquatio est ubique ut sinus arcus dupli distantiæ nodi à syzygiâ, ergo evanescit in syzygiis & Quadraturis; Maxima est in Octantibus, cumque sit illic $m = n = r\sqrt{\frac{1}{2}}$, est $\frac{2nm}{r} = r$: loco $\frac{F}{V}$ ponatur $\frac{M^2 a}{A^2 r}$, æquatio in Octantibus fit $\frac{3M^2 l^2}{8S.A.r}$, sed cum Inclinatio sit 5 gr. $19\frac{1}{2}'$ cujus sinus l est .92817, ideoque $\frac{l^2}{r}$ est .00863 r, & $\frac{3l^2}{8r} = .00325$, cum vero $\frac{M^2}{S.A}$ (per Prob. V. calc. præc.) sit. 0685, hinc æquatio evadit in Octantibus .000221 r; Denique est $r = 57^{st}.29$, quod ad secundas reductum efficit $206264''$, & ductum per .000223 efficit $45''.6$, quam Newtonus $47''$ per Theoriam gravitatis se inveniisse profitetur.

DE MOTU APSIDUM.

Newtonus Sectione XI. Lib. I. Princ. ingeniosissimam excogitavit rationem motum Apsidum ad calculum revocandi, fingendo nempe vim externam Solis posse conferri cum vi quæ ex revolutione plani ipsius orbitæ Lunaris oriretur, sicque inveniri curvam per motum corporis in Ellipsi mobili genitam quæ eadem foret cum eâ quæ per vis extraneæ adjunctionem nasceretur; Eidem Methodo mox insistemus & ex eâ Leges motûs Apsidum derivantur accuratissimè quales illas Newtonus statuit; sed fatendum ipsam absolutam ejus motus quantitatem dimidio circiter minorem inveniri illâ quæ per observationes innotescit; Itaque aliam indicare Methodum rem eamdem æstimandi priori illâ non omissâ, inopportunum visum non est.

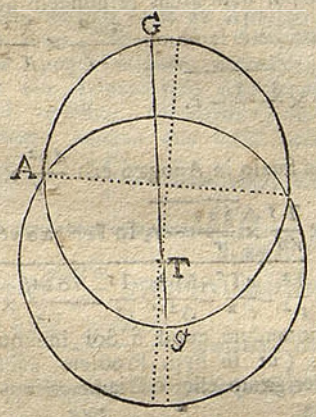
PROBL. I.

Sol supponatur immotus; Linea Apsidum qualemcumque Angulum cum lineâ quadraturarum efficiat, ejusque anguli sinus sit y;

In-

Invenire motum Apogæi dum Luna ab Apogæo ad Apogæum redit.

Sit G A g Ellipsis quam Luna circa Terram T describit; sit G Apogæum, g Perigæum; dicatur r semi-axis major; T distantia Apogæa; $T - 2f$ distantia Perigæa. Centro T describatur circulus radio r, eum circulum Luna describeret eodem tempore quo Ellipsim suam describit, & Vis Centralis Terræ in Lunam in eodem circulo revolventem foret $\frac{du^2}{2r}$ ex notâ circuli proprietate.



Portiones du ejus circuli ubique æquales intelligantur, & sumantur in Ellipsi arcus terminati per lineas e centro T per utrumque extremum arcus illius du ductas; liquet, quod dum arcus illi Elliptici describentur, lineolæ per quas Luna ex Tangente ad Ellipsin reducetur erunt effectus vis centralis Terræ & vis Solis secundum directionem radii orbitæ Lunaris conjunctis vel oppositis actionibus Lunam trahentium.

Lineolæ autem propter vim centralem terræ descriptæ erunt ubique, primò in ratione ipsius vis centralis, sive inverse ut quadrata distantiarum à centro, ideoque in distantia X erunt $\frac{r^2 du^2}{2rX^2}$; & secundò ut quadrata temporum sive ut quadrata arearum Ellipseos quæ respondent arcubus æqualibus du; illæ vero areæ cum sint inter se similes (ob æquales angulos in T arcubus æqualibus du mensuratos) erunt ut X^2, ideoque tempora erunt ut X^2 eorumque quadrata ut X^4; Ideoque vis centralis Terræ effectus dum describitur area quæ respondet arcui du erit ubique $\frac{r^2 du^2}{2rX^2} \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^2 du^2}{2r^3}$. In Apogæo erit $\frac{T^2 du^2}{2r^3}$ in Perigæo $\frac{T^2 du^2}{2r^3} - \frac{4Tf du^2}{2r^3}$ &c.

Vis Solis in Lunam agens secundum directionem radii orbitæ Lunaris dicatur Y in mediocri distantiâ, & quia crescit ut distantiæ, in distantiâ X fit $\frac{X}{r}$ Y, ejus verò effectus crescit ut quadrata temporum, ideoque per ea quæ dicta sunt, effectus ejus vis dum describitur area quæ respondet arcui du est $\frac{X}{r} \times Y \times \frac{X^4}{r^4}$ sive $\frac{X^5}{r^5}$ Y, in Apogæo erit $\frac{T^5}{r^5}$ Y, in Perigæo $\frac{T^5}{r^5}$ Y $- \frac{10T^4 f}{r^5}$ Y &c.

Sit, ut prius, F vis Solis in Terram in ejus mediocri distantiâ à Terra a, inventum est vim Y esse $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vim Lunæ in mediocri distantia esse ad vim Solis F ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ (A ut prius est annus sidereus, M mensis Periodicus, sed sepositâ Solis actione) cum ergo effectus vis Terræ in Lunam in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ sit $\frac{du^2}{2r}$, si fiat ut $A^2 r$ ad $M^2 a$ ita $\frac{du^2}{2r}$ ad quartum qui erit $\frac{M^2 a}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r}$, is terminus erit effectus vis Solis quæ per F exprimitur, sicque effectus vis Y in mediocri distantiâ dum describitur area $\frac{r du}{2}$ erit $\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$, & in qualicumque distantiâ X erit $\frac{X^5}{r^5} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{du^2}{2r} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Hinc fluxio secunda orbitæ Lunaris, hoc est, lineola ad Terram directa, intercepta inter Tangentem & curvam Lu-

DE MUNDI SYSTEMATE.

narem quæ est differentia (vel summa) effectuum vis Centralis Terræ & vis Solis in Lunam dum arcus respondens arcui du percurritur erit ubique $\frac{du^2}{2r} \times \frac{X^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{X^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$.

121.

Hæc fluxio in Apogæo erit $\frac{du^2}{2r} \times \frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$; In Perigæo vero erit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$; Ubi notandum quod si Sol immotus fingatur, (ut in hyp. Problem. assumitur) & si Perigæum esset è Diametro oppositum Apogæo tunc quantitas $\frac{3yy}{r} - r$ eadem absolutè foret tam in Apogæo quam in Perigæo.

Si conciperetur quod effectu virium existente in Apogæo $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$ vera Ellipsis describeretur, hic effectus virium in Apogæo deberet esse ad earum effectum in Perigæo, primo inversè ut quadrata distantiarum, secundo directè ut quadrata temporum sive ut quartæ dignitates distantiarum, unde illi effectus erunt ut quadrata distantiarum directe hoc est ut T^2 ad $T^2 - 4Tf$, dividatur ergo effectus virium in Apogæo per T^2 & ducatur in $T^2 - 4Tf$ effectus virium in Perigæo esse deberet $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$; Sed in Perigæo ut & in Apogæo ex naturâ Apsidum evanescit fluxio distantiæ X utpote maximæ vel minimæ, ejus autem fluxionis fluxio est is ipse effectus Virium Terræ & Solis, ideo fluens hujus effectus virium revera evanesceret, itaque ex ipsis hypothesibus oportebit ut $\int \frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r} = 0$; Sed in Perigæo, spectatâ actione Terræ & Solis, fluxio secunda reperta erat $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$. Itaque excedit eam quantitatem cujus fluens evadit zero quantitate $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{6T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$.

Punctum itaque Perigæi non erit in puncto è Diametro opposito Apogæo, sed arcu quodam differet, quem obtinemus quærendo quonam in loco orbitæ Lunaris fluens fluxionis secundæ ejus curvæ evanescat. Observandum autem, quod distantiæ Lunæ à Terrâ, circa puncta Apogæi vel Perigæi non multum mutantur, ideoque si Perigæum arcu p transferatur non magna mutatio exinde orietur in effectu vis centralis terræ, sed sinus y qui occurrit in valore vis Solis evadet, $y + \frac{zp}{r}$ (sumpto z pro cosinu arcus cujus sinus est y, est enim $dy = \frac{z\,du}{r}$ per naturam circuli, cùm hic verò agatur de arcu p non magno, potest poni p loco du, & differentia sinuum pro dy) fiet itaque fluxio secunda orbitæ Lunaris in loco in quo Perigæum esse debebit $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^3} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{10T4f}{r^5} \times \overline{3yy + \frac{6yzp}{r} + \frac{3z^2p^2}{r^2}} - r}$; cujus pars $\frac{du^2}{2r} \times \overline{\frac{T^2}{r^2} - \frac{4Tf}{r^2} - \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{T^5}{r^5} - \frac{4T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r}$, Fluentem habet æqualem zero; Fluens autem excessus $\frac{du^2}{2r} \times \frac{M^2}{A^2 r} \times - \frac{T^5}{r^5} \times \frac{6yzp}{r^2} + \frac{6T4f}{r^5} \times \frac{3yy}{r} - r$ fiat æqualis zero (omissis terminis in quibus f aut p ad duas dimensiones assurgunt) & habebitur valor p, quâtenus designat arcum quo processit Perigæum, siquidem tota fluens fluxionis secundæ orbitæ Lunaris in eo puncto fiet zero.

Hinc itaque divisis terminis per quantitatem communem $\frac{6M^2T^4du}{2Ar^8}$ habetur

hæc

hæc Æquatio $T\,p \times \int \frac{y\,z\,d\,u}{r} = f \times \int 3yy\,du - rr\,du$, sive quia $y\,du = -r\,dz$ fit $T\,p \times \int -z\,dz = f \times \int -3ry\,dz - r^2\,du$. Est autem $\int -z\,dz = \frac{1}{2}rr - \frac{1}{2}zz$ & $\int -ydz$ segmentum circulare cujus ordinata est y, sive sector circularis $\frac{1}{2}r\,u$, dempto vel assumpto Triangulo cujus area est $\frac{1}{2}yz$; Hinc æquatio evadit $\frac{1}{2}T\,p \times rr - zz = f \times \frac{1}{2}r^2u - \frac{3}{2}ryz - r^2u$, sive $T\,p \times yy = f \times r^2u - 3\,ryz$, unde tandem habetur $p = \frac{rf}{T} \times \frac{ru - 3yz}{yy}$.

Atque cum hic sit motus Perigæi quo tempore Luna fertur ab Apogæo ad Perigæum erit motus Apsidis durante unâ revolutione Lunæ ab Apogæo ad Apogæum $\frac{2\,f\,r}{T} \times \frac{r\,u - 3\,y\,z}{yy}$.

Cor. 1. Hinc motus Apsidum nullus est cum $r\,u - 3yz = 0$; in Quadraturis verò fit negativus regrediuntur itaque Apsides; maximus autem est in syzygiis & positivus, tunc enim evanescit quantitas negativa $3\,y\,z$, fit $u = \frac{1}{4}c$, & $y = r$, unde ille motus fit $\frac{f\,c}{2\,T}$ durante unâ revolutione Lunæ.

Cor. 2. Si hunc calculum accuratius instituere liceret, attendi posset ad motum Solis dum Luna ab Apogæo ad Perigæum movetur, promovetur enim interim Sol 13 circiter gradibus, itaque etsi Luna veram describeret Ellipsim, Perigæum non faceret cum quadratura eumdem angulum quem faciebat Apogæum, sed 13 gradibus minus distaret in consequentia. Sed instituto calculo invenimus parum admodum exinde mutari motum Perigæi in propriâ orbitâ, ita ut ad institutum nostrum sufficiat illum assumere qualis per Problema repertus est.

PROBL. II.

Invenire quantitatem motus Apsidum singulo anno.

Sit Apogæum in quadraturâ, & Sole procedente Apogæum inde versus Syzygiam recedat.

Dicatur α tempus quo Sol revolutionem respectu Apogæi Lunæ absolvit, dicatur π tempus quo Luna ab Apogæo ad Apogæum redit, sit c tota Peripheria quam Sol Apogæi respectu describit, & $d\,u$ arcus ejus exiguus quo Apogæum à quadraturâ recessisse censebitur propter Solis motum, tempus quo hunc arcum describserit erit $\frac{\alpha\,d\,u}{c}$, & cum tempore π, Apogæum moveatur quantitate $\frac{2\,f\,r}{T.yy} \times r\,u - 3yz$ tempore $\frac{\alpha\,d\,u}{c}$ procedet quantitate $\frac{2\,\alpha\,f\,r}{\pi.T\,c} \times \frac{r\,u\,d\,u}{y^2} - \frac{3\,y\,z\,d\,u}{y^2}$, erit autem u arcus qui metitur distantiam Apogæi à quadraturâ, y ejus sinus, & z ejus Cosinus, & $d\,u = \frac{r\,d\,y}{z}$ hinc quantitas $\frac{2\,a\,f\,r}{\pi.T.c} \times \frac{r\,u\,d\,u}{y^2} - \frac{3\,z\,y\,d\,u}{y^2}$, fit $\frac{2\,\alpha\,f\,r}{\pi.T.\,c} \times \frac{r\,u\,d\,u}{y^2} - \frac{3\,r\,d\,y.}{y}$. Ut habeatur fluens quantitatis $\frac{r\,u\,d\,u}{y^2}$, ponatur loco u ejus valor $y + \frac{y^3}{6\,r\,r} + \frac{3\,y^5}{40\,r^4} + \frac{5\,y^7}{112\,r^6} + \frac{35\,y^9}{1152\,r^8} + \frac{63\,y^{11}}{2816\,r^{10}}$ &c. fiet $\frac{r\,u\,d\,u}{yy} = \frac{r\,d\,u}{y} + \frac{y\,d\,u}{6\,r} + \frac{3\,y^3\,d\,u}{40\,r^3} + \frac{5\,y^5\,d\,u}{112\,r^6}$ &c. & dividendo $r\,d\,u$ per valorem y, qui est $u - \frac{u^3}{6\,r\,r} + \frac{u^5}{120\,r^4} - \frac{u^7}{5040\,r^6}$ est $\frac{r\,d\,u}{y} = \frac{r\,d\,u}{u} + \frac{u\,d\,u}{6\,r} + \frac{7\,u^3\,d\,u}{360\,r^3} + \frac{31\,u^5\,d\,u}{15120\,r^5}$; & loco $y\,d\,u$ in sequentibus terminis ponendo $-r\,dz$ & loco y^2 ejusque dignitatum ponendo $r^2 - z^2$ ejusque dignitates, fit $\frac{r\,u\,d\,u}{yy} = \frac{r\,d\,u}{u} + \frac{u\,d\,u}{6\,r} + \frac{7\,u^3\,d\,u}{360\,r^3}$ &c. $-\frac{r\,d\,z}{6\,r} + \frac{3}{40} \times \frac{rr - zz \times -r\,dz}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\overline{rr - zz}^2 \times -r\,dz}{r^6} + \frac{35}{1152} \times \frac{\overline{rr - zz}^3 \times -r\,dz}{r^8} + \frac{63}{2816} \times \frac{\overline{rr - zz}^4 \times -r\,dz}{r^{10}}$ &c. Cujus quantitatis

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

fluens est r L. $u + \frac{u^2}{12r} + \frac{7u^4}{1440r^3}$ &c. $+$

$$\frac{rr-rz}{6r} + \frac{3}{40} \times \frac{\frac{2}{5}r^4 - r^3z + \frac{1}{5}rz^3}{r^3} + \frac{5}{112} \times \frac{\frac{8}{15}r^6 - r^5z + \frac{2}{3}r^3z^3 - \frac{1}{5}rz^5}{r^5} + \frac{35}{1152} \times \frac{\frac{16}{35}r^8 - r^7z + r^5z^3 - \frac{3}{5}r^3z^5 + \frac{1}{7}rz^7}{r^7} + \frac{63}{1816} \times \frac{\frac{128}{315}r^{10} - r^9z + \frac{4}{3}r^7z^3 - \frac{6}{5}r^5z^5 + \frac{4}{7}r^3z^7 - \frac{1}{9}rz^9}{r^9}$$

cui fluenti si adjungatur fluens quantitatis $-\frac{3rdy}{y}$ quæ est $-3r$ L. y & omne ducatur per $\frac{2afr}{\pi Tc}$ habetur motus Apogæi dum propter Solis motum Apsis recessit à quadraturâ arcu u.

Si ergo u sit quadrans, y erit r, & z fiet zero unde hæc expressio evadet $\frac{2\alpha fr}{\pi Tc}$

$$\times r \text{ L. } \tfrac{1}{4}c + \frac{\frac{1}{16}c^2}{12r} + \frac{\frac{7}{256}c^4}{1440r^3} \text{ &c. } + \frac{r}{6} + \frac{3}{40} \times \frac{2}{3}r + \frac{5}{112} \times \frac{8}{15}r + \frac{35}{1152} \times \frac{16}{35}r + \text{ &c.} - 3r \text{ L. } r = \frac{2\alpha fr^2}{\pi . Tc} \times \text{L.} \frac{\frac{1}{4}c}{r^4} + \frac{c^2}{192r^2} + \frac{7c^4}{368640r^4} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10\times11} \text{ &c.}$$

harum fractionum $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5}$ &c. summa variis modis haberi potest, & quidem liquet oriri istos terminos ex terminis seriei quæ excessum quadrantis supra radium exprimit cum radius est Unitas, cujus seriei quinque priores termini efficiunt .33905, residui .23174; hinc cum quinque primi termini hic assumpti evadant propter fractiones per quas ducuntur .26343, & sequentes per fractiones minores quam $\frac{1}{5}$ ducantur, ii omnes sequentes simul sumpti non efficient $\frac{.23174}{3}$ sive .07724, id itaque addatur ad .26343, erit .34067 numerus major quæsito, & .26343 numerus quæsito minor, assumatur medium .30205 quantitas proposita evadit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times \text{L} \frac{1}{4}c + \frac{c^2}{192} + .30205$.

Si verò dicatur g excessus quadrantis super Radium, per naturam Logarithmorum fiet L. $\frac{1}{4}c = g - \frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{3}g^3 - \frac{1}{4}g^4$ + &c. = .57079 − .16290 + .06196 − .02652 + .01211 − .00576 = .4496, unde expressio inventa fit $\frac{2\alpha f}{\pi Tc} \times .4496r^2 + \frac{c^2}{192} + .30205r^2 = \frac{2\alpha f}{\varpi T} \times .75165r^2 + \frac{c}{192} = \frac{\alpha f}{\varpi T} \times \frac{1.50333r^2}{c} + \frac{c}{96}$, sive quia est $\frac{c}{96} = 3^{gr}.75$, & $\frac{r^2}{c} = \frac{r}{6.283188} = 9^{gr}.1189$ & $\frac{1.5r^2}{c} = 135^{gr}.6783$, habetur motus Apogæi durante quadrante $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 175^{gr}.4283$ & durante totâ revo- $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$, sed ut totum tempus α qualecumque sit, ad tempus annuum A, ita motus $\frac{f}{T} \times \frac{\alpha}{\pi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum annuo tempore factum qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$; Præterea sit P mensis Periodicus Lunæ fiatque ut A ad P ita $\frac{f}{T} \times \frac{A}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$ ad motum Apsidum tempore Periodico Lunæ, qui erit $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, & ut P ad ϖ ita $\frac{f}{T} \times \frac{P}{\varpi} \times 69^{gr}.7132$, ad motum Apsidum mense Anomalistico ϖ qui erit $\frac{f}{T} 69^{gr}.7132$, & ut 360 ad $360 + \frac{f}{T} \times 69^{gr}.7132$ ita P ad mensem Anomalisticum ϖ qui ergo erit $P \times 1 + \frac{f}{T} \times \frac{69^{gr}.7132}{360}$; Ideoque motus annuus Apogæi erit $\frac{f}{T} \times \frac{A \times 69.7132}{P \times 1 + \frac{f}{T} \times \frac{69.7132}{360}}$, sed annus Tropicus

picus est $13\frac{1}{3}P$ proxime, hinc motus Apogæi fit $\frac{f}{T} \times \frac{13\frac{1}{3} \times 69.7132}{1+\frac{f}{T}\times\frac{69.7132}{360}}$.

Excentricitas f orbitæ Lunaris est quidem variabilis, de ejus legibus posthac; Excentricitatis valorem mediocrem assumit Newtonus .05505 si Radius sit 1, Ill. Cassinus eam paulo minorem facit nempe .05430; ex Legibus autem variationis excentricitatis patebit quod loco f scribi debet .05147 & loco T, 1.05147 unde motus Apsidum fiet $\frac{.04895\times13\frac{1}{3}\times69^{gr}.7132}{1+\frac{.04895\times69.7132}{360}} = \frac{45^{gr}.4997}{1.0126} = 44.9$ circiter; qui quidem motus invenitur per observationes 40^{gr}.

DE MOTU APSIDUM

Secundum Newtoni methodum.

Hic revocanda sunt ea quæ in Sectione IX. Lib. I. dicta sunt de motu corporum in orbibus mobilibus.

LEMMA I. Prop. XLIV. Lib. I.

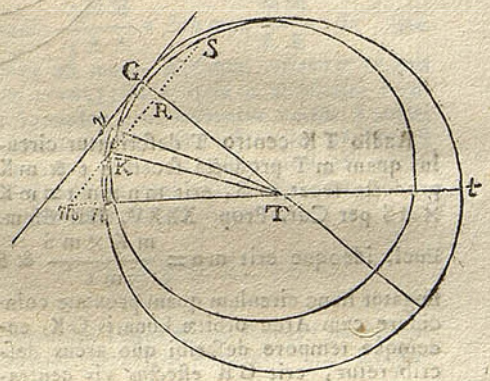
Concipiatur planum Orbitæ alicujus uniformiter revolvi, dum corpus quoddam ipsam orbitam propter vim centralem aliquam percurrit, id corpus in singulo puncto duplici vi centrali urgebitur, propriâ nempe quâ urgetur in centrum virium, & eâ quæ ex revolutione Plani orbitæ pendet. Hæc ubique erit inversè in triplicatâ ratione distantiæ à Centro.

Demonstrationem vide Propositione suprà indicatâ.

LEMMA II.

Si vis Solis in Lunam agens, sit quantitas quæ in mediocri distantiâ sit constans, dicaturque Y, crescat vero ut distantia à Terrâ, vis Terræ in distantiâ mediocri sit V, Dico quod (ponendo orbitam Lunarem circulo satis finitimam esse) motus Lunæ concipi potest quasi fieret in Ellipsi simili illi quam revera describit, sed cujus Planum foret mobile, ita ut integrâ revolutione Apsis ejus orbitæ promoveretur quantitate $360^{gr}. \times \sqrt{\frac{r^3V-T^3Y}{r^3V-4T^3Y}}$.

Demonstratio est in exemplis tertiis ad Propositionem XLV, sed eam demonstrationem hic breviter trademus. 121.

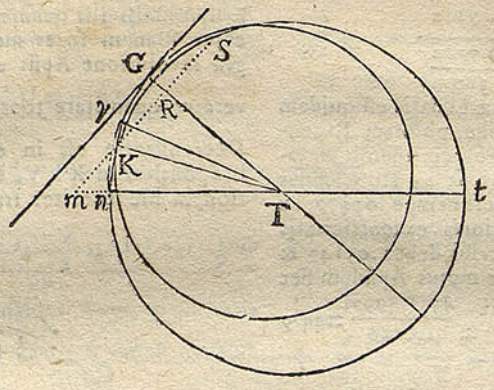


Sit G Lunæ Apogæum, GK arcus quam minimus quem Luna in propriâ orbitâ dato exiguo tempore describeret, transferatur vero Luna cum suo Plano ita ut ejus Apsis transferatur in γ dum Luna ex G in K moveri debuisset; motus Lunæ in G ex duobus compositus censeatur, nempe ex motu secundum Tangentem per velocitatem acquisitam, & ex motu per vim centralem genito quævis simul ac semel in puncto G agere censeatur, hic motus per GR repræsentetur, motus secundum Tangentem per RK, fiat vero RK ad Rm, ut angulus GTK ad $GTK + GT\gamma$, & si nulla vis centralis ex revolutione plani oriretur, Luna foret in m cum debuisset esse in K, sed quia Tm est longior quam TK sumatur $Tn = TK$ & revera Luna erit in n, & erit mn effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ dum Luna describisset arcum GK.

Ra-

DE MUNDI SYSTEMATE.

LIB. I.



Radio TK centro T describatur circulus quem mT producta secet in t & mK producta secet in S, erit $mn \times mt = mK \times mS$ per Cor. Prop. XXXV. III. Elem. Eucl. ideoque erit $mn = \frac{mK \times mS}{mt}$ & si fingatur hunc circulum quam proxime coincidere cum Arcu orbitæ Lunaris GK, eodemque tempore describi quo arcus describeretur, erit GR effectus vis centralis Terræ dum Luna describisset arcum GK, & per notam proprietatem circuli hic arcus foret $\frac{RK^2}{2GT}$.

Ergo cum effectus vis centralis ex revolutione plani genitæ, & effectus vis centralis terræ eodem tempore producti sint mn & GR, vires illæ erunt uti mn & GR, sive ut quantitates ipsis æquales $\frac{mK \times mS}{mt}$ & $\frac{RK^2}{2GT}$ sed cum mt sit quamproxime 2GT, sitque $mS = mR + RK$, & $mK = mR - RK$, istæ vires sunt ut $mR^2 - RK^2$ ad RK^2, si itaque dicatur T distantia maxima Lunæ, T−X alia distantia quævis, r mediocris distantia, V vis terræ in eâ mediocri distantiâ, erit $\frac{r^2}{I^2}V$ vis centralis terræ in distantia T, ideoque, cum sit RK^2 ad $mR^2 - RK^2$ ut vis gravitatis ad vim ex revolutione plani genitam hæc erit, $\frac{r^2V \times mR^2 - r^2V \times RK^2}{T^2 \times RK^2}$.

In puncto K aut alio quocumque ubi TK est T−X, vis gravitatis est $\frac{r^2}{T-X^2}V$, & quoniam vires ex revolutione Plani genitæ sunt inversè in triplicatâ ratione distantiarum, vis plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2 - Tr^2V \times RK^2}{T-X^3 \times RK^2}$ quæ si addatur vi gravitatis fit $\frac{Tr^2VRK^2 - Xr^2VRK^2 + Tr^2VmR^2 - Tr^2VRK^2}{T-X^3 \times RK^2}$

Sed cum in eo puncto vis gravitatis sit $\frac{r^2}{T-X^2}V$, & vis subtractitia Solis sit ut distantiæ, ideoque sit $\frac{T-X}{r}Y$, si reducantur ad communem denominatorem $Tr^2V - Xr^2V - \frac{T^4Y}{r} + \frac{4T^3XY}{r}$ fient $\frac{\qquad}{T-X^3}$

Ut autem æquipolleat Plani revolutio cum subtractione vis Solis, ita determinandæ sunt quantitates RK^2 & mR^2, ut expressiones harum virium sint ubique æquales, & 1°. quidem cum X fit zero, vis gravitatis cum vi Plani est $\frac{Tr^2V \times mR^2}{T-X^3 \times RK^2}$ & vis gravitatis subtractâ vi Solis remanet $\frac{Tr^2V - \frac{T^4Y}{r}}{T-X^3}$. Oportet ergo ut sit

$mR^2 =$

$mR^2 = \frac{\overline{RK^2}}{r^2V} \times r^2V - \frac{T^3Y}{r}$. Termini vero reliqui in quibus est X sunt $-\frac{Xr^2VRK^2}{T.X^3 \times RK^2}$ & $-\frac{Xr^2V + 4T^3X\frac{Y}{r}}{T - Y^3}$. Oportet ergo ut sit $RK^2 = \frac{\overline{RK^2}}{r^2V} \times r^2V - 4T^3\frac{Y}{r}$.

Itaque ut vis revolutionis plani vi gravitatis permixta, idem efficiet ac vis subtractitia Solis, oportet ut sit mR^2 ad RK^2 ut $r^2V - \frac{T^3Y}{r}$ ad $r^2V - \frac{4T^3Y}{r}$, sive ut sit mR ad RK ut $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - 4\frac{T^3Y}{r}}$ unde cùm sit mR ut motus Lunæ & Apogæi conjunctim & RK ut motus Lunæ, si Luna descripserit 360gr. fiet ut $\sqrt{r^2V - 4\frac{T^3Y}{r}}$ ad $\sqrt{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}$ ita 360gr. ad Lunæ & Apogæi motum conjunctim, qui erit ergo $360 \times \sqrt{\frac{r^2V - \frac{T^3Y}{r}}{r^2V - \frac{4T^3Y}{r}}} = 360\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}}$ itaque si ex hoc valore tollantur 360gr. Residuum erit motus Apogæi integrâ revolutione Lunæ. Q. E. O.

THEOR. I.

Invenire motum Apogæi Lunaris, supponendo orbitam Lunarem esse circulo finitimam.

Describat Luna arcum du, & eo durante vis Y constans maneat, & spectatur du quasi portio Ellipseos descriptæ, si vis Y durante totâ revolutione crevisset sicut distantiæ; Motus Apsidis durante totâ revolutione C, foret (per Lemma 2.) $c\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3r}} - c$, ideoque durante tempore quo arcus du percurritur foret $du\sqrt{\frac{r^3V - T^3Y}{r^3V - 4T^3Y}} - du$, sit $r = T$, & sumatur valor quantitatis $\sqrt{\frac{V - Y}{V - 4Y}}$ is erit $1 + \frac{3Y}{2Y}$, hinc itaque elementum motus Apsidum est $\frac{3r}{2V}du$, loco Y ponatur $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$. fit $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3yydu}{r} - r\,du$, cujus Integralis pro quadrante est $\frac{3F}{2Va} \times \frac{3r^2c}{8r} - \frac{rc}{4}$ & pro circulo $\frac{3F}{2Va} \times \frac{rc}{2}$ & cum $\frac{F}{V}$ sit $\frac{MM}{rAA}$ evadit, $\frac{3MM}{4AA}c$ sive cum $\frac{MM}{AA}$ sit fere .0055 est motus Apsidum $.0041c = 1^d.476$ sive $1^d28'.33''$, & quia is absolvitur mense Synodico, ut habeatur motus Apogæi annuus, fiat ut .0808 ad 1, ita $1^d.476$ ad $18^{gr}.267$ sive $18^{gr}.16'$. quod est circiter dimidium veri motus Apsidis ut observat Newtonus.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI. 121

THEOR. II.

Invenire Leges motus Apogæi Lunæ supponendo Orbitam Lunarem esse Ellipticam.

Distantia Lunæ Apogæa dicatur A, Perigæa dicatur P, sinus anguli Apogæi & lineæ quadraturarum sit y, vis Solis in Apogæo agens erit per demonstrata $A \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & vis Solis agens in Perigæo, erit $P \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$, & y in utroque casu est eadem quantitas, dicatur itaque C hæc quantitas $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$; siquidem est constans; Vis Solis subtractitia aut additicia in Apogæo ac Perigæo erit AC vel PC; hoc est, erit ut quantitas constans C, ducta in distantiam A vel P; si itaque fingatur in punctis intermediis, eam vim esse etiam eandem constantem C, per distantiam ductam, aut saltem variationem quantitatis C compensari tunc per Cor 2. Prop. XLV., & Exempla tertia ejusdem, erit motus Lunæ ab Apside ad Apsidem $360 \times \sqrt{\frac{V - C}{V - 4C}}$, si V

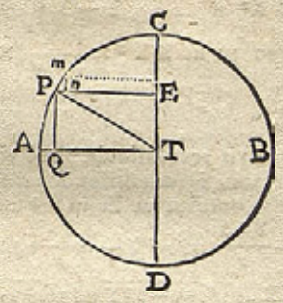
DE MUNDI SYSTEMATE.

sit ut vis gravitatis terræ in data distantia, est vero $360 \sqrt{\frac{V-C}{V-4C}} = 360 \times 1 + \frac{3C}{2V}$,

121. ideoque motus Apsidis erit $360 \times \frac{3C}{2V}$ tota revolutione Synodico-Anomalisticâ quam pro synodicâ sumimus.

Loco C litteram Y quæ in toto calculo designabat quantitatem $\frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$ resumamus, & fingatur talem esse Apogæi motum ut ubique sit proportionalis motui $360 \times \frac{3Y}{2V}$ durante mense Synodico quod quidem ex prædictis consequitur, fingaturque Solem immotum stare & Apogæum ejus respectu in Antecedentia regredi, totamque revolutionem respectu Solis tempore α absolvere, sit ergo c tota peripheria, Apsis percurret respectu Solis arcum du tempore $\frac{\alpha du}{c}$; Ideo tempore synodico S percurret $360^{gr.} \times \frac{3Y}{2V}$ motuo suo, tempore $\frac{\alpha du}{c}$ percurret $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3Ydu}{2V}$, sed quia est $\frac{Y}{V} = \frac{F}{Va} \times \frac{3yy}{r} - r$ & $\frac{F}{V} = \frac{MMa}{AAr}$, elementum motus Apogæi est $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3yydu - r^2du$, cujus integralis est (si fingatur Apogæum à quadraturâ ad syzygiam in antecedentia retrocedere) $\frac{\alpha}{S} \times \frac{3MM}{2AAr^2} \times 3.rf.ydz - r^2u$ est autem autem $f.ydz = CPE$, hinc sumendo $\frac{\alpha M}{SA}$ pro unitate, est $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$ & pro quadrante $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{8}$ & pro circulo $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{rc}{2}$ prope ut in præcedenti Theoremate.

Hinc si sumatur motus Apogæi proportionalis tempori, dum Apogæum discedet à Sole arcu u, ejus motus esse debuisset $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{ru}{2}$ cum revera inventus sit $\frac{3M}{2Ar} \times 3CPE - ru$, hinc æquatio est $\frac{3M}{2Ar} \times \frac{3ru}{2} - 3CPE$, sed $3CPE = \frac{3ru}{2} + \frac{3yz}{2}$ per



constr. hinc Æquatio fit $\frac{3M}{2Ar} \times \pm\frac{3yz}{2}$, sed $\frac{2yz}{r}$ est sinus arcus dupli distantiæ à Sole, hinc itaque hæc æquatio est ut sinus arcus dupli distantiæ Apogæi à Sole, unde Lex æquationis habetur, quod sit maxima in Octantibus, nulla in Syzygiis & quadraturis, positiva à quadraturis ad Syzygias negativa inde, sed ejus quantitas, non per hunc calculum, sed per observationes est determinanda; Siquidem, ut observatum est, Hypotheses adhibitæ ut ut à motu Apsidum non dissimiles, attamen ipsius quantitatem dimidio fere minorem exhibent. De his in Notis subsequentibus plura.

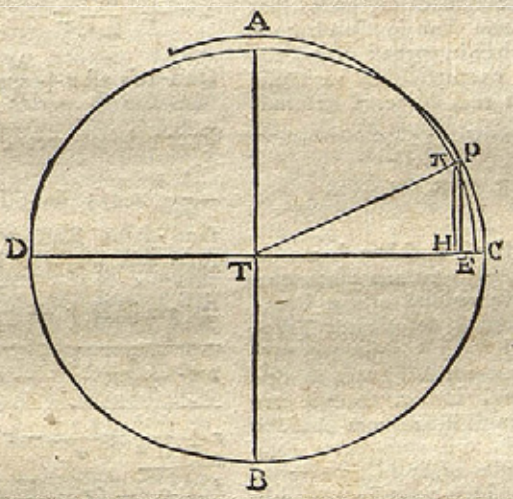
DE EXCENTRICITATE ORBITÆ LUNARIS.

Ipsa Curva quam Luna describit posset determinari per calculum adhibita ejus curvæ fluxione secunda, quæ obtinetur subtrahendo vim Solarem à vi terræ; Audivimus autem Viros in Matheſi Primarios hoc Problema, quod certè non est exiguæ difficultatis, suum fecisse; Cum autem nobis videatur Newtonum non aliter hanc curvam investigasse quam per approximationes quasdam, eadem Methodo, tenui nostro modulo magis accommodata, idem persequi conabimur.

I. Propositione XXVIII. hujus Libri quæ-

quæsivit Newtonus qualis foret orbita Lunaris ex suppositione illam citra actionem Solis circularem esse, & invenit quod si assumatur eam orbitam fieri Ellipsim per Solis actionem ea Ellipsis terram in centro haberet & ejus axis minor foret ad majorem qui secundùm lineam quadraturarum jaceret, ut 69 ad 70.

Hinc deducitur quod si semi-axis major 70 dicatur $r+p$, semi-axis minor 69 sit $r-p$, distantia Lunæ à terra in loco quovis dicatur $r+x$, sit y sinus distantiæ Lunæ à quadratura proxima, z ejus distantiæ Cosinus erit ubivis $x = p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.



Nam sit $T\Pi = r$, $TP = r+x$, $\Pi H = y$, $TH = z$; propter Triangula similia TPE, $T\Pi H$ est $PE = \frac{r+x}{r} \times y$ & $TE = \frac{r+x}{r} \times z$, unde per naturam Ellipseos est $\frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \overline{r+p}^2 - \frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2$; Unde est $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} \times \frac{r+x^2}{r^2} \times z^2$, sed divisione factâ, omissisque terminis superfluis, est $\frac{\overline{r-p}^2}{r+p^2} = 1 - \frac{4p}{r}$, hinc fit $\overline{r-p}^2 = \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times y^2 + \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times z^2 - \frac{\overline{r+x}^2}{r^2} \times \frac{4pz^2}{r}$ & quia $y^2 + z^2 = r^2$, & formatis dignitatibus omissisque terminis in quibus p, vel x ad secundam dimensionem assurgunt habetur $r^2 - 2rp = r^2 + 2rx - \frac{4pz^2}{r} =$ sive loco z^2 scripto $r^2 - y^2$; deletis terminis æqualibus & transpositione factâ & divisione per 2, habetur $rx = \frac{2pr^2}{r} - \frac{2py^2}{r} - rp$ ideoque $x = p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.

Ex quo sequitur quod in Octantibus x evanescit, illic enim $\frac{2y^2}{r^2} = 1$.

II. Ponatur vero Orbitam Lunarem

DE MUNDI SYSTEMATE.

121. Ellipticam citra Solis actionem ejusque semi-axem majorem esse V, excentricitatem dici f, accedere autem vim Solis, sed eam tantùm partem ejus actionis considerari quæ secundum orbitæ radium agit, omissâ illâ parte ejus actionis Solaris quæ radio est perpendicularis, in hâc Hypothesi deprehendetur hujus orbitæ figuram variari, & magis oblongam evadere dum Apsides sunt in Syzygiis quam dum sunt in quadraturis, Excentricitatem pariter variabilem esse maximam dum Apsides sunt in Syzygiis, mediocrem cum Apsides sunt in Octantibus, cum sunt in Quadraturis minimam, & ex hâc hypothesi cum priori conjunctâ ejus excentricitatis variabilis Leges & quantitas rudi Minervâ determinari potest.

THEOR. I.

Positis Sole & lineâ Apsidum immotis, item omissâ eâ actionis Solaris parte quæ perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris agit; Dico quod si describatur Ellipsis, cujus Terra sit focus & cujus axis major sit linea inter Lunæ Apogæum & Perigæum interjacens, Orbita Lunaris erit contenta intra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Syzygiis, erit vero extra eam Ellipsim cum Apsides erunt in Quadraturis, cum vero Apsides erunt in Octantibus orbita Lunaris cum eâ Ellipsi coincidet.

Resumptis iis quæ in Theor. VII. calculi secundi dicta fuerunt, inventum est quod si distantia Lunæ citra Solis actionem fuisset x, evadit per Solis actionem secundum radium exercitam $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V}$ sive quia est $\frac{Y}{V} = \frac{M^2}{A^2 r} \times \frac{3yy}{r} - r$, hæc distantia fit $x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{x^4}{r^3}$. Hinc cum distantia Apogæa sit $r+f$, distantia Perigæa sit $r-f$, & ea distantia quæ est perpendicularis in axem, & quæ est semi-lateri recto Ellipseos æqualis $r - \frac{f^2}{r}$; Distantia Apogæa evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4y^2 + 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 + 4r^3f}{r^3}$. Distantia Perigæa fit $r - f + \frac{M^2}{A^2} \times \times \frac{3r^4y^2 - 12r^3y^2f}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{r^4 - 4r^3f}{r^3}$ & Distantia perpendicularis est $r - \frac{H}{r} + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4z^2 - 12r^2z^2f^2}{r^5}$; Ponendo z loco y, ut fieri debere ex ipsâ constructione patet, Ergo totus axis major invenitur $2r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{6r^4y^2}{r^5} - \frac{M^2}{A^2} \times \frac{2r^4}{r^3}$, sive semi-axis est $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - \frac{M^2}{A^2} \times r$; Excentricitas vero est $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2f}{r^2} - \frac{M^2}{A^2} \times 4f$; Ex Ellipseon autem naturâ, semi-latus Rectum Ellipseos cujus hic foret axis major & hæc foret excentricitas evaderet $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r - \frac{1 + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{12y^2}{r^2} - 4}{r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3y^2}{r} - r} f^2 = r + \frac{M^2}{A^2} \times \sqrt{\frac{3y^2}{r} - r - f^2} \times \frac{1}{r} + \frac{7M^2}{A^2 r^2} \times \frac{3y^2}{r} - r$, sed ea distantia perpendicularis est in curva Lunari $r - \frac{f^2}{r} + \frac{M^2}{A^2} + \sqrt{\frac{3z^2}{r} - r} - \frac{4M^2f^2}{A^2r^2} \times \frac{3z^2}{r} - r$ unde differentia inter distantiam perpendicularem in Ellipsi & eam distantiam in Orbita Lunari est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2 - \frac{M^2f^2}{A^2r^3} \times 21y^2 - 12z^2 - 3r^2$, sive omisso hoc ultimo termino propter f^2, ea differentia est $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$. Si Apsides sunt in Syzygiis est $y = r$, & $z = o$, unde hæc quantitas est maxima quæ esse possit, unde distantia perpendicularis in Ellipsi excedit distantiam in orbita Lunari quantitate $\frac{3M^2r}{A^2}$; Si Apsides sunt in quadraturis fit $y = o$, & $z = r$, un-

unde hæc quantitas $\frac{3M^2}{A^2 r} \times y^2 - z^2$ evadit $-\frac{3M^2 r}{A^2}$, ideoque distantia perpendicularis in Ellipsi minor est distantia in Orbita Lunari, unde fit ut Orbita Lunaris contineat intra se Ellipsim; Si vero Apsides sint in Octantibus evanescit $y^2 - z^2$, hinc ipsa Orbita Lunaris cum Ellipsi coincidit.

Cor. Ex hoc Theoremate liquet quod omissio vis quæ agit perpendiculariter in radium orbitæ Lunaris, exhibet orbitæ Lunaris mutationem plane oppositam illi quæ ex ejus consideratione deduceretur omissâ excentricitate orbitæ, nam sive Apsides sint in Syzygiis sive in quadraturis liquet ex Theoremate præcedenti orbitam Lunæ prolongari secundum lineam Syzygiarum, contrahi vero secundum lineam quadraturarum, cujus oppositum statuebatur Prop. XXVIII. hujusce, ex consideratione vis Solaris totius, sed semotâ Excentricitatis orbitæ Lunaris ratione; hinc ergo ut mediocrem quodammodo teneamus viam; jungemus incremento distantiæ Lunaris secundum Hypothesim Theor. VII. calculi 2di. invento, partem aliquam $\frac{m}{n}$ decrementi secundum methodum Newtonianam inventi; Unde sic medium quoddam inter ambas Hypotheses obtinebimus. Itaque quævis distantia x evadet $x + \frac{x^4}{r^3} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2} = x + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3x^4 y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times x^4}{A^2 \times r^3} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$.

PROBL. I.

Positis iis quæ in Corollario præcedentis Theorematis statuuntur, & supposito Orbitam Lunarem, quomodocumque mutatam per Solis actionem, Ellipsi proximam esse, Invenire Leges excentricitatis Orbitæ Lunaris.

Primò cum distantia Apogea sit $r + f$, hæc distantia loco x substituta in valore per Coroll. Theor. præcedentis reperto evadit $r + f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 y^2 + 12 r^3 f y^2}{r^5} - \frac{M^2 \times r^4 + 4r^3}{A^2 r^3} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; ut habeatur distantia mediocris loco x scribatur r, sinus autem ejus distantiæ à quadratura proxima est quam proxime Cosinus distantiæ Apogæi à quadratura proxima, ideoque loco y scribatur z, fit $r + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3z^2}{r} - \frac{M^2 r}{A^2} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2z^2}{r^2}$ quæ substracta ex distantiâ Apogæâ relinquit excentricitatem $f + \frac{M^2}{A^2} \times \frac{3r^4 \times y^2 - z^2 + 12 r f y^2}{r^5} + \frac{M^2}{A^2} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$, quæ omissis terminis omittendis fit $f + \frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$; Hinc illius excentricitatis hæ sunt leges, 1°. Excentricitas est maxima cum Apsides sunt in Syzygiis, nam illic y fit r, & $z = o$, hinc excentricitas evadit $f + \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

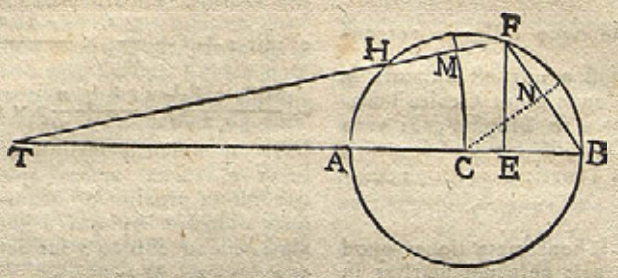
2°. Excentricitas est minima cum Apsides sunt in Quadraturis, illic enim est $y = o$ & $z = r$, unde Excentricitas evadit $f - \frac{3M^2 r - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2}$.

3°. Excentricitas est mediocris cum Apsides versantur in Octantibus, estque $= f$, quia $y^2 = z^2$ sicque evanescit $\frac{3M^2 r^2 - \frac{2n}{m} A^2 p}{A^2} \times \frac{y^2 - z^2}{r^2}$.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROB. XVI. 121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.



4°. In aliis quibuſcunque locis hâc conſtructione obtinetur ferè excentricitas, ſumatur $TC = f$, $CB = \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2}$, hoc radio CB deſcribatur circulus in quo ſumatur BF æqualis duplæ diſtantiæ Apſidum à Syzygiâ, erit ſatis proximè CF excentricitas, nam centro T radio TC deſcribatur arcus CM, cum ſit perpendicularis in lineam THMF, & is arcus parum diſcedat à linea recta, punctum M erit medium lineæ HF per 3. 3 Elem. & MF erit æqualis Coſinui CE arcûs BF.

Radius CB ad compendium dicatur g, & quia ſinus dimidii arcus BF in circulo cujus radius erat r dicebatur z in hoc calculo, hinc in hoc circulo erit $BN = \frac{g}{r}z$, & juxta nota Trig. Theoremata, ut $CB(g)$ ad $BN\left(\frac{g}{r}z\right)$ ſic $FB\left(\frac{2gz}{r}\right)$ ad $EB = \frac{2zz}{rr}g$, & $CE = g - \frac{2zz}{rr}g = g \times \frac{rr - 2zz}{rr}$, ſed $rr - zz = yy$, hinc $CE = g \times \frac{yy - zz}{rr}$, ideoque TF ſive $TE = f + \frac{3M^2r - \frac{2n}{m}A^2p}{A^2} \times \frac{yy - zz}{r^2}$ ut prius inventum fuerat.

Schol. Hæc fictitia Ellipſis nonnihil diſcederet à loco Perigæi Lunæ per eaſdem hypotheſes determinato, ſi verò ex diſtantia Perigæa cum diſtantia Apogæa collatis excentricitas quæreretur, diverſa quidem ejus quantitas obtineretur, ſed eædem forent Leges, nam diſtantia Apogæa foret $r + f + \sqrt{r + 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ & Perigæa $r - f + \sqrt{r - 4f} \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ hinc axis major eſſet $2r + 2r \times \frac{Y}{V} + \frac{2n}{m} \times p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ & ſemi-axis $r + r \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m}p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; Excentricitas vero $f + 4f \times \frac{Y}{V}$ ſive $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{3yy}{r} - r$. Quæ quidem eſt maxima cum Apſides ſunt in Syzygiis quia illic $y^2 = r^2$ ergo $f \times 1 + \frac{8M^2}{A^2}$. In quadraturis fit minima quia evaneſcit y, ideoque fit $f \times 1 - \frac{4M^2}{A^2}$, hinc mediocris excentricitas eſt $f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$, quod evenit in Octantibus tunc enim $y^2 = \frac{1}{2}r^2$, ideoque $\frac{3y^2}{r} - r = \frac{1}{2}r$, ſit ergo $f \times 1 + \frac{4M^2}{A^2r} \times \frac{1}{2}r = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$. In cæteris locis ſumatur $TC = f \times 1 + \frac{2M^2}{A^2}$ & $CB = \frac{6M^2}{A^2}f$, & ſi CB dicatur

g ut in Probl. præcedente erit $CE = g \times \frac{rr - 2zz}{rr} = g \times \frac{rr - 2rr + 2yy}{rr} = g \times \frac{2yy - rr}{rr}$ ideoque $TE = f \times 1 + \frac{2M^z}{A^z} + \frac{6M^z}{A^z} \times \frac{2yy - rr}{rr} = f \times 1 + \frac{2M^z}{A^z r} \times r + \frac{4M^z}{A^z r} \times \frac{3yy}{r} - \frac{6M^z}{A^z r} \times r = f \times 1 + \frac{4M^z}{A^z r} \times \frac{3y^2}{r} - r$ quæ est Excentricitas reperta, & eadem constructione obtinetur ac in hypothesi Problematis.

Si denique sicut Astronomis solemne est axim majorem constantem assumamus, & semi-axis major dicatur r, qui ex distantiâ Apogæa subducatur ut habeatur Excentricitas, eædem ejus excentricitatis Leges iterum obtinebuntur; erit quippe Excentricitas $f + r + 4f \times \frac{Y}{V} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$ sive $f + \frac{M^z}{A^z} \times \frac{3yy}{r} - r + \frac{4M^z f}{A^z r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r} + \frac{n}{m} p \times 1 - \frac{2y^2}{r^2}$; Quæ fit in Syzygiis ubi $y^2 = r^2$, $f + \frac{2M^z r}{A^z} + \frac{8M^z f}{A^z} - \frac{2np}{m}$, in Quadraturis ubi y evanescit $f - \frac{M^z r}{A^z} + \frac{4M^z f}{A^z f} + \frac{n}{mp}$. Unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^z r}{2A^z} + \frac{2M^z f}{A^z} - \frac{np}{2m}$, quæ quidem etiam in Octantibus circiter occurrit quia majores termini $\frac{M^z}{A^z} \times \frac{3yy}{r} - r + \frac{4M^z f}{A^z r} \times \overline{\frac{3yy}{r} - r}$ evadunt $\frac{M^z r}{2A^z} + \frac{M^z f}{A^z}$ in Octantibus, nam cum y^2 illic sit $\frac{1}{2} r^2$ fiunt ii termini $\frac{M^z}{A^z} \times \frac{3rr}{2r} - r$, $+ \frac{4M^z f}{A^z r} \times \frac{3rr}{2r} - r = \frac{M^z r}{2A^z} + \frac{2M^z f}{A^z}$.

PROBL. II.

Variationis Excentricitatis quantitatem maximam determinare.

Hoc Problema nonnisi per determinationem veræ curvæ quam sequitur Luna potest determinari, quâ non inventâ ad Observationes recurrendum, ut fecisse videtur Newtonus, mediocrem Excentricitatem esse partium 5505 quarum radius sit 100000 assumit, & maximum incrementum vel decrementum assumit 1172 $\frac{3}{4}$, tam ex Observationibus quàm quod ille numerus ad concinnandam constructionem pro Æquatione Apogæi commodus esset ut suo loco dicemus. 121.

Illust. Cassinus mediocrem illam Excentricitatem facit 5430 Incrementum vero & Decrementum 1086, nec malè hæc consentiunt cum quantitatibus Prob. 1°. inventis, si loco quantitatis indeterminatæ $\frac{n}{m}$ scribatur $\frac{1}{2}$; Nam, id Incrementum aut Decrementum inventum fuerat $\frac{3M^z r - \frac{2n}{m} A^z p}{A^z}$, sive accuratiùs sumptis quantitatibus quæ ad simplicitatem calculi omissæ fuerant cum Excentricitas inventa fuisset $f + \frac{M^z}{A^z} \times \frac{3r^4 \times \overline{y^2 - z^2} + 12r^3 f y^2}{r^5} + \frac{M^z}{A^z} \times 4f - \frac{2np}{m} \times \frac{y^2 z^2}{r^2}$, hæc evadit (cum Apsides sunt in Syzygiis & $z = o$, $y = r$) $f + \frac{M^z}{A^z} \times 3r + 12f + \frac{M^z}{A^z} \times 4f - p$. & cum sunt in Quadraturis ubi $z = r$ & $y = o$, $f - \frac{M^z}{A^z} \times 3r + \frac{M^z}{A^z} \times 4f + p$, unde mediocris Excentricitas est $f + \frac{M^z}{A^z} \times 10f$, & Incrementum vel Decrementum, $\frac{M^z}{A^z} \times \overline{3r + 6f - p}$.

Cum itaque sit $\frac{M^z}{A^z} = .0055$ ex priùs inventis, mediocris Excentricitas $1 + \overline{\frac{10M^z}{A^z} \times f}$ quam

DE MUNDI SYSTEMATE.

121.

(†) Hiſce motuum lunarium computationibus oſtendere volui, quod motus lunares per theoriam gravitatis à cauſis ſuis computari poſſint. Per eandem theoriam inveni præterea quod æquatio annua medii motus lunæ oriatur à variâ dilatatione orbis lunæ per vim ſolis, juxta Corol 6. Prop. LXVI. Lib. I. (h) Hæc vis in perigæo ſolis major eſt, & orbem lunæ dilatat; in apogæo ejus minor eſt, & orbem illum contrahi permittit. In orbe dilatato luna tardiùs revolvitur, in contracto citiùs; & æquatio annua, per quam hæc inæqualitas compenſatur, in (i) apogæo & perigæo ſolis nulla eſt, in (k) mediocris ſolis à terrâ diſtantia ad $11'.\ 50''$ circiter aſcendit, in aliis locis æquationi centri ſolis proportionalis eſt; & additur medio motui lunæ ubi terra pergit ab aphelio ſuo ad perihelium, & in oppoſitâ orbis parte ſubducitur. Aſſumendo radium orbis magni $\frac{1000}{}$

(quam Caſſinus invenit 5430 & Newtonus 5505) eſt 1.055 f, hinc eſt f=5147 ſecundùm Caſſinum & 5218 ſecundùm Newtonum quod utrumque ductum in .0055, prius efficit 1819.85 alterum 1822.2 cumque p ſit 719, id ex priore detractum relinquit 1100.85, ex poſteriore 1103.2; qui numeri incidunt inter 1172 & 1086 quos pro Excentricitatis variatione aſſignant Newtonus aut Hallejus & Caſſinus.

(†) * *Hiſce motuum* &c. Hæc eſt enim veritatis ejus Theoriæ fortiſſima probatio, ſi ea quæ Mathematicè deducuntur ex eâ Theoriâ apprimè conſentiant cum Phænomenis in caſu maxime compoſito.

(h) * *Hæc vis in Perigæo Solis major eſt & orbem Lunæ dilatat*; Vis Solis aliquando adjungitur vi Terræ ut Lunam verſus Terram attrahat, aliquando idque ſæpiùs & ubi fortiùs agit vi Terræ eſt oppoſita, & Lunam à Terrâ diſtrahit, itaque toto effectu vis Solis ſimul conſiderato, Luna per eam vim à Terrâ diſtrahitur & eò magis quò ea vis Solis major eſt; ideoque Luna magis à Terrâ diſtrahitur dum Terra verſatur in ſuo Perihelio quàm ubi verſatur in Aphelio: hinc primo caſu orbita Lunæ magis eſt dilatata quàm hoc altero.

(i) * *In Apogæo & Perigæo nulla eſt* id omninò liquet ex Coroll. 2. Probl. V. prioris calculi, nam ex iis quæ in eo Corollario ſtatuuntur liquet quod ut habeatur Æquatio quovis in loco, hæc proportio eſt inſtituenda, ut areæ Ellipſeos quam Terrâ deſcribit dimidium ad aream deſcriptam à Terrâ ab Aphelio (vel Perihelio) uſque ad eum locum propoſitum, ita ſemeſtris tardatio ad tardationem mediocri motui adſcriptam, ſed in hoc caſu ea area à Terra deſcripta eſt ipſa ſemi-Ellipſis, ergo etiam tardatio medio motui adſcripta eſt ipſa ſemeſtris tardatio; Tum verò ſumitur ex Probl. IV. tardatio loco dato conveniens quæ ex tardatione mediocri tollitur, & differentia eſt æquatio quæſita; ſed rurſus ea tardatio Aphelio aut Perihelio conveniens eſt ipſa ſemeſtris tardatio, ergo, ex tardatione mediocri motui eo in loco adſcripta, detracta nullum eſt reſiduum, cum planè ſint æquales, ergo æquatio in Apogæo ac Perigæo nulla eſt.

(k) * *In mediocri Solis diſtantia &c.* Videntur hæc verba ſtatuere quid conſtet ex Obſervationibus, nempe hanc æquationem eſſe $11'.\ 50''$. ubi maxima eſt, & eſſe æquationi centri proportionalem; obſerva-

1000 & eccentricitatem terræ $16\frac{7}{8}$, hæc (l) æquatio, ubi maxima est, per theoriam gravitatis prodiit $11'.\ 49''$. Sed eccentricitas terræ paulo major esse videtur, & auctâ eccentricitate hæc æquatio augeri debet in eâdem ratione. Sit eccentricitas, $16\frac{11}{12}$, & æquatio maxima erit $11'.\ 51''$.

(m) Inveni etiam quod in perihelio terræ, propter majorem vim solis, apogæum & nodi lunæ velocius moventur quam in aphelio ejus, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (n) Et inde oriuntur æquationes annuæ horum motuum

servavimus autem Ill. Cassinum hanc æquationem ubi maxima est $9'.\ 44''$. efficere.

(l) * *Hæc æquatio ubi maxima est prodiit* $11'.\ 49''$. Sumptâ Orbitâ Lunari ut circulari, per Theoriam gravitatis prodiit $11'.\ 47''$. imo minor, sive Newtonus aliâ viâ eum calculum instituerit quàm nos, sive alia Elementa assumpserit, sive ex excentricitate Orbitæ Lunaris consideratione hanc quantitatem auxerit, cætera verò ad amussim quadrant.

Eam Æquationem excentricitati Terræ esse proportionatam ex Cor. I. Prob. V. pag. 487., prodit enim ejus valor per quantitates fixas ductas in excentricitatem quæ in calculo dicebatur e; & quamvis quantitas b quæ est $\sqrt{a^2 - e^2}$ in eo valore occurrat, idcircò non est censendum æquationis valorem multùm pendere ex illa dignitate e^2 siquidem in illo termino ea dignitas ferè evanescit respectu a^2.

Liquet etiam ex Cor. 2. ejusd. Probl. cæteras æquationes esse proportionatas æquationi centri Solis: addendas esse motui Lunæ dùm pergit ab Aphelio ad Perihelium, illic enim tardatio vera minor est quam tardatio mediocris, ergo provectior est Luna quam secundùm tardationem mediocrem, addi ergo debet ejus viæ iste tardationis defectus; ex Perihelio pergendo res oppositâ ratione procedet.

(m) * *Inveni etiam &c.* Id utique statuit Cor. 14. Prop. LXVI. Lib. I., illic ostendit Vires Solis esse ut Cubos distantiarum reciprocè, unde cùm sint causæ errorum Apogæi & Nodorum, illi errores sive motus qui suis causis sunt proportionales, debent esse ut cubi distantiarum reciproce; Hinc dicatur a mediocris distantia Terræ à Sole, distantia quævis alia dicatur $a \pm x$, motus medius diurnus Apogæi in distantia a sit g motus medius nodi in ea distantia a sit n, in distantia x, motus Apogæi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3}\, g$ & motus nodi erit $\frac{a^3}{a \pm x^3}\, n$ aut formando seriem ex his quotientibus & omissis terminis in quibus altior dignitas quantitatis x occurrit, erit motus Apogæi in quavis distantia, $g \mp \frac{3x}{a} g$, & motus nodi $n \mp \frac{3x}{a} n$. I 2 I.

(n) * *Et inde oriuntur Æquationes annuæ, Æquationi centri Solis proportionales.* Cùm motus Apogæi Lunæ & nodi uniformis non sit cùm Terra ad varias à Sole distantias transfertur, sed addatur aut detrahatur ex eorum motu medio quantitas variabilis $\frac{3x}{a} g$, & $\frac{3x}{a} n$, si quæratur progressus Apogæi Lunæ aut nodi cùm Terra ab Aphelio Solis certâ quantitate dierum discesserit, is progressus ex motu medio Apogæi Lunæ aut nodi rectè non computabitur, quippe singulis diebus præter motum medium quantitate $\frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ processerunt aut recesserunt, summa ergo om-

DE MUNDI SYSTEMATE.

tuum æquationi centri solis proportionales. Motus (o) autem solis est in duplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè & (p) maxima centri æquatio, quam hæc inæqualitas generat, est $1^{gr}.\ 56'.\ 20''$ prædictæ solis eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. (q) Quod si motus solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè, hæc inæqualitas generaret æquationem maximam $2^{gr}.\ 54'$

121. omnium harum quantitatum erit sumenda, quæ erunt correctiones seu æquationes quibus ex loco medio Apogæi & Nodi ad verum ejus locum deveniemus, illæ verò æquationes æquationibus centri Solis erunt proportionales, nam cùm motus Solis sit in duplicatâ ratione distantiæ inverse (ut exponetur in notâ o proximè sequenti) sit m motus medius diurnus Solis in mediocri distantia a, in distantiâ quavis $a \pm x$ is motus erit $\frac{a}{a \pm x^2} m$, seu in seriem resolvendo hanc Expressionem erit $m \mp \frac{2x}{a} m$, hinc differentia inter motum medium & verum erit $\pm \frac{2x}{a} m$, & ex summâ earum differentiarum conflabuntur æquationes centri Solis, cùm ergo æquationes Apogæi & Lunæ ex summâ quantitatum $\pm \frac{3x}{a} g$, $\frac{3x}{a} n$ constent, erunt istæ æquationes ubivis in punctis correspondentibus seu in æqualibus ab Aphelio Terræ distantiis in ratione constanti $3g$. & $3n$ ad $2m$: Ideoque erunt ubique proportionales æquationibus centri Solis.

(o) * *Motus Solis est in duplicatâ ratione distantiæ inversè* scilicet motus Solis angularis è Terrâ spectatus; nam cùm Sol describat semper areas tempori proportionales, arcus quos reverâ describit sunt semper inversè ut distantiæ, sed præterea magnitudines apparentes eorum arcuum e Terrâ spectatorum sunt etiam inverse ut eorum à Terrâ distantia, ergo arcus quos Sol singulis temporis æqualibus describere videtur è Terrâ, sunt in duplicatâ ratione distantiarum inversè.

(p) *Et maxima Centri Æquatio est* $1^{o}.\ 56'.\ 20''$. Illam $1^{o}.\ 55'.\ 50''$. facit Ill. Cassinus.

(q) * *Quod si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiæ inversè*; Dicatur M motus Solis in distantiâ mediocri, quæ dicatur a, & distantia quævis alia sit $a \pm x$; si motus Solis esset in triplicatâ ratione distantiarum inversè, in distantiâ $a \pm x$ foret $\frac{a^3}{a \pm x^3} M$ sive $\frac{a^3 M}{a^3 \pm 3a^2x + 3ax^2 \pm x^3}$ aut formando seriem, is motus in distantia $a \pm x$ erit $M \pm \frac{3x}{a} M$ omissis reliquis terminis ob exiguitatem fractionis $\frac{x}{a}$; ideoque differentia motus in distantiâ verâ & motus in distantiâ mediocri foret $\mp \frac{3x}{a} m$: In verâ autem hypothesi quòd Solis motus crescat in ratione subduplicatâ inversâ distantiarum, eodem ratiocinio invenitur quod in quovis loco motus Solis erit $\frac{a^2 M}{a^2 \mp 2ax + x^2}$ & divisione facta erit is motus $M \mp \frac{2x}{a} M$, & differentia motus veri & motus medii erit $\mp \frac{2x}{a} M$, eritque ergo hæc differentia ad differentiam in priore Hypothesi inventam ut 2 ad 3 in omnibus locis correspondentibus; sed æquationes conflantur ex summâ differentiarum motus veri & medii sumptarum in omnibus locis ab Aphelio usque ad locum eum ubi æquatio applicatur; cùm ergo in utrâque hypothesi singulæ differentiæ motus veri & medii sint in omnibus punctis correspondentibus in

$54^{\prime}\ 30^{\prime\prime}$. (r) Et propterea æquationes maximæ, quas inæqualitates motuum apogæi & nodorum lunæ generant, sunt ad 28^{gr}, $54^{\prime}$. $30^{\prime\prime}$. ut motus medius diurnus apogæi, & motus medius diurnus nodorum lunæ sunt ad motum medium diurnum solis. Unde prodit æquatio maxima medii motus apogæi $19^{\prime}$. $43^{\prime\prime}$, & æquatio maxima medii motus nodorum $9^{\prime}$. $24^{\prime\prime}$. (s) Additur verò æquatio prior & subducitur posterior, ubi terra pergit à perihelio suo ad aphelium: & contrarium fit in oppositâ orbis parte.

Per theoriam gravitatis (t) constitit etiam quod actio solis in lunam

in ratione constanti 2 ad 3 erunt etiam summæ earum differentiarum in locis correspondentibus, ipsæ nempe æquationes in eâdem ratione, ergo maxima centri æquatio in hypothesi verâ motum Solis decrescere in duplicatâ ratione distantiarum est ad æquationem maximam in hypothesi fictitiâ motum Solis decrescere in triplicatâ ratione distantiarum ut 2 ad 3 cum ergo æquatio maxima sit per Observationes 1^{gr}. $56^{\prime}$. $20^{\prime\prime}$. hæc altera erit $\frac{3}{2} \times 1^{gr}$. $56^{\prime}$. $20^{\prime\prime}$. sive 28^{gr}. $54^{\prime}$. $30^{\prime\prime}$. Q. E. D.

(r) * *Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & nodorum generant sunt ad* 28^{gr}. $54^{\prime}$. $30^{\prime\prime}$. *ut modus medius Apogæi & Nodi ad motum medium Solis* Nam statutum est motus horum esse in triplicatâ ratione distantiarum inversè, sit g motus medius Apogæi in mediocri nempe distantiâ, n motus medius nodorum, & m motus medius Solis, decrescantque in triplicatâ ratione inversâ distantiarum, deprehenditur eodem modo ac in notâ præcedente quod in quolibet loco differentiæ inter motum verum & motum mediocrem erunt $\mp\frac{3x}{a}g$, $\mp\frac{3x}{a}n$, $\mp\frac{3x}{a}m$, Æquationes maximæ sunt summa earum quantitatum sumptarum ab Apogæo Solis usque ad mediocrem ejus à Terrâ distantiam, itaque illæ Æquationes constituuntur per series omnium $\frac{3x}{a}g$, omnium $\frac{3x}{a}n$, & omnium $\frac{3x}{a}m$, qualescumque ergo sint illæ quantitates variabiles x, cùm eædem sint in tribus hisce seriebus summæ earum serierum sive Æquationes maximæ, erunt inter se ut illæ quantitates g, n & m, per quas omnes partes singularum illarum serierum ducuntur, illæ verò quantitates sunt motus medii Apogæi, nodi & Solis, ergo datâ unâ ex his Æquationibus, v. gr. datâ Æquatione maximâ Solis & motu medio Apogæi, nodi & Solis, habentur cæteræ Æquationes maximæ statuendo illas esse ad eam Æquationem datam, ut ii motus medii dati. 121.

Liquet verò ex ipsâ hac Demonstratione, verùm quidem Solis motum medium assumi debere, non autem veram ipsius Æquationem sed eam quæ prodit fingendo Solis motum in triplicatâ ratione distantiarum decrescere.

(s) * *Additur verò Æquatio* Apogæi Lunæ *& subducitur Æquatio* nodi *ubi Terra pergit a Perihelio suo ad Aphelium*; motus Apogæi Lunæ est progressivus, motus verò nodi est retrogradus; Terrâ autem à Perihelio procedente uterque motus major fit motu medio, inde ergo plus procedit Apogæum Lunæ, quàm per motum medium, plus recedit nodus, prior ergo Æquatio addenda, posterior detrahenda.

(t) * *Per theoriam gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo ma-*

DE MUNDI SYSTEMATE.

lunam paulo major sit, ubi transversa diameter orbis lunaris transit per solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea terram & solem jungente: & propterea orbis lunaris paulo major est in priore casu quam in posteriore. Et (u) hinc oritur alia æquatio motus medii lunaris, pendens à situ apogæi lunæ ad solem, quæ quidem maxima est cum apogæum lunæ versatur in octante cum sole, & nulla cum illud ad quadraturas vel syzygias pervenit: & motui medio additur in transitu apogæi lunæ à solis quadraturâ ad syzygiam, & subducitur in transitu apogæi à syzygiâ ad quadraturam. Hæc æquatio, quam semestrem vocabo, in octantibus apogæi, quando maxima est, ascendit ad $3'.\ 45''$ circiter, (x) quantùm ex phænomenis colligere

121. *jor sit ubi transversa Diameter orbis Lunaris transit per Solem* &c.

Facile deducitur ex Cor. Theor. IV. calculi primi (pag. 479) quod (existente x distantiâ Lunæ à Terrâ, r ejus distantiâ mediocri, & y sinu ejus distantiæ à quadraturâ, existente etiam F vis Solis in terram in mediocri ejus distantiâ a) actio Solis Lunam trahentis secundum directionem radii orbitæ Lunaris est $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times \frac{3yy}{r} - r$.

Unde ea vis, Lunâ in quadraturis existente, fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times -r$, est ergone gativa & Lunam ad Terram attrahit cum verò Luna est in syzygiis, ea actio Solis fit $\frac{x}{r} \times \frac{F}{a} \times 2r$, est itaque positiva & Lunam à Terra distrahit; In locis autem similibus hæ Solis actiones sunt ut distantiæ x Lunæ à Terrâ. Hinc si Apsides sint in syzygiis fit verò Luna in quadraturis, ubi per actionem Solis ad terram trahitur ambæ distantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ sunt simul æquales lateri recto orbitæ Lunaris; cum verò Luna est in syzygiis ubi per actionem Solis à Terra distrahitur, ambæ distantiæ x Lunæ in conjunctione & oppositione positæ sunt simul æquales axi majori, qui semper superat latus rectum.

Si verò Apsides sunt in quadraturis, & Luna etiam in quadraturis ambæ distantiæ x Lunæ in utrâque quadraturâ positæ simul sumptæ sunt æquales axi majori, & cum Lunâ est in syzygiis, ambæ distantiæ x Lunæ in conjunctione & oppositione positæ sunt simul æquales lateri recto orbitæ Lunaris.

Ergo cum Apsides sunt in Syzygiis actio Solis quæ Lunam ad Terram attrahit est minor, & è contra actio quæ Lunam à Terra distrahit est major quam cum Apsides sunt in quadraturis, ideoque orbis Lunaris paulo major fieri debet in priore casu quam in posteriore.

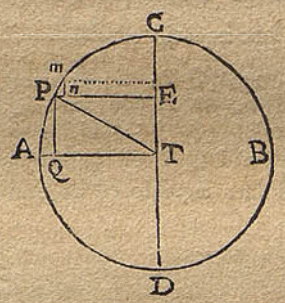
De punctis autem inter quadraturas & Syzygias intermediis ab eo quod in his punctis extremis evenit judicari potest, sed potissimum ex calculo quo Æquatio ex hâc causâ natâ determinatur.

(u) * *Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris* &c. Hujus æquationis calculum ejusque Leges explicatas habes Probl. VI. calculi secundi (pag. 500.) ejusque Corollariis.

(x) * *Quantùm ex Phænomenis colligere potui* &c. Ex Coroll. 5to. Probl. VI. (pag. 501. in quo quædam menda irrepserunt à B. L. prius corrigenda) Æquatio hæc $3'.\ 56''$ est reperta, quædam autem cau-

ligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri solis distantiâ à terrâ. (y) Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ solis inversè; ideoque in maximâ solis distantiâ est $3'$. $34''$, causæ sunt cur hæc quantitas pro verâ quantitate adhiberi nequeat, sed hæc æquatio ex phænomenis sit colligenda; primò, quantitas f sive excentricitas Orbitæ Lunaris satis certo non est cognita, ut constat ex iis quæ de excentricitate dicta sunt, hic autem mediocrem excentricitatem assumpsimus 5505 partium quarum radius orbitæ sit 100000 cum Newtono quam Cassinus facit tantum 5430 partium, & forte minor assumi deberet si attendatur ad Excentricitatem Orbitæ Lunaris qualis ea foret citra Solis actionem ex quibus considerationibus, liquet æquationem inventam minorem factum iri quam $3'$. $56''$, sicque magis accessuram ad æquationem $3'$. $45''$ quæ ex Phænomenis colligitur: secundò cum varias Hypotheses assumpserimus vero quidem proximas non tamen veras absolutè ut liquet ex Cor. I. Probl. I. (pag. 496) ex iis erroribus ipsæ quantitates absolutæ mutantur sed manent earum proportiones ex quibus Leges æquationum pendent ita ut datâ aliquâ ex æquationibus per Phænomena, reliquæ satis tuto exinde deduci queant.

pag. 484) æquatio evadit $\frac{15\,M^2 a^3 q^9 f^2}{109.73 S.A.X^3.r^9} \times - 163.595\,PQT$, & quia in octantibus est $PQT = \frac{1}{4} r^2$ æquatio est $-\frac{15 \times 163.595 \times M^2 a^3 q^9 f^2}{4 \times 109.73 \times S.A\,X^3 r^7}$, in quâ cum nulla sit variabilis quantitas præter X^3 in denominatore occurrente, liquet Æquatio- 121.



(y) * *Augetur verò ac diminuitur in triplicatâ ratione distantiæ inversè.* Probl. VI. (pag. 500. col. 2.) hæc æquatio inventa est $\frac{15\,A \times F\,q^9 f^2}{109.73 \times S.V.\,a r^8} \times - 163.595\,PQT$, in quâ expressione a repræsentat mediocrem Solis à Terra distantiam, in aliâ itaque à Sole distantiâ loco a ponatur X, & loco F ponatur $\frac{a^2 F}{X^2}$ quia vis Solis F est inversè ut quadrata distantiarum, hac ergo substitutione factâ æquatio fit $\frac{15\,A\,a^2 F\,q^9 f^2}{109.73.S.V\,X^2.Xr^8} \times - 163.595\,PQT$ tum loco $\frac{F}{V}$ substituatur $\frac{a\,M^2}{r\,A^2}$ (ut liquet ex Cor. Probl. I. calculi primi, nem cum Apogæum est in Octantibus; hoc est æquationem maximam esse ut X^3 inversè, hoc est *augeri ac diminui in triplicatâ ratione distantiæ Solis X inversè; ideoque* &c.

Scilicet positâ Excentricitate Orbitæ telluris $.016\frac{11}{12}$, distantia maxima est $1 + .016\frac{11}{12}$, distantia mediocris 1, & distantia minima $1 - .016\frac{11}{12}$, itaque sumendo rationem triplicatam mediocris & maximæ distantiæ fiat ut $1 + 3 \times .016\frac{11}{12} + 3 \times .000285\frac{1}{3}$ &c. (1.0516) ad 1, ita $3'45''$ ad quartum qui erit $3'.34''$. & sumendo rationem triplicatam inversam mediocris & minimæ distantiæ fiat ut $1 - 3 \times .016\frac{11}{12}$

X x x 3 +

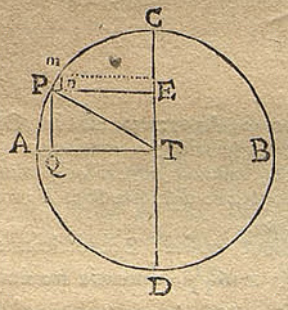
DE MUNDI SYSTEMATE.

34″, & in minima 3′. 56″ quamproximè: ubi vero apogæum lunæ situm est extra octantes, evadit minor; (z) estque ad æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ apogæi lunæ à proximâ syzygiâ vel quadraturâ ad radium.

(a) Per eandem gravitatis theoriam actio solis in lunam paulo major est ubi linea recta per nodos lunæ ducta transit per solem, quam ubi linea illa ad rectos est angulos cum rectâ solem ac terram jungente. (b) Et inde oritur alia medii motus lu-

121. $+3X.000285\frac{1}{2}$ &c. (.950197) ad 1 ita 3′. 45″. ad quartum qui erit 3′. 56″.

(z) * *Estque ad æquationem maximam.* Siquidem in quâcumque distantiâ Terræ à Sole, hæc æquatio est $\frac{15\,M^2\,a^3\,r^9\,f^2}{109.73\,S.A.\,X^3\,x^9} \times - 63.595\,PQT$, liquet quod supponendo distantiam X non variari, hæc æquatio erit ubique ut PQT; in octantibus autem PQT est $\frac{1}{4}r^2$, hinc in quovis loco hæc æquatio est ad eam quæ in

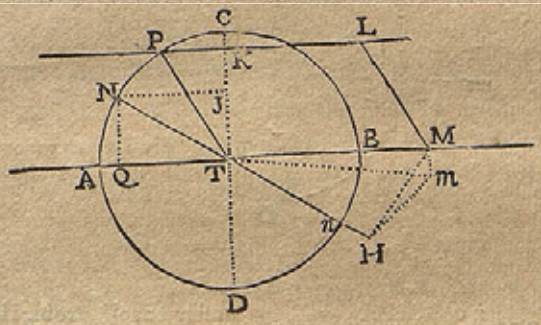


Octantibus obtineretur, manente eâdem distantiâ Solis à Terrâ ut PQT ad $\frac{1}{4}r^2$, sive quia PQT est $\frac{1}{2}zy$ ut $\frac{1}{2}zy$ ad $\frac{1}{4}r^2$, & utrumque ducendo per $\frac{4}{r}$ ut $\frac{2zy}{r}$ ad r, sed $\frac{2zy}{r}$ est sinus duplæ distantiæ puncti P; hoc est Apogæi à Syzygiâ, (aut à quadraturâ perinde enim est ut ex Trigonometriæ Principiis liquet) hinc æquatio in quovis situ Apogæi extra octantes est ad Æquationem maximam quæ obtineretur in Octantibus manente eâdem distantiâ Telluris à Sole, ut sinus duplæ distantiæ Apogæi Lunæ à proximâ Syzygiâ, ad radium.

(a) * *Per eamdem* &c. Cum linea recta per nodos ducta transit per Solem, tunc Sol versatur in plano ipsius orbitæ Lunaris producto, ejus itaque actio non consumitur in dimovendâ Lunâ ab eo plano, sed tota impenditur ad eam vel à terrâ distrahendam, vel ad terram attrahendam, vel ad eam accelerandam aut retardandam in proprio suo Plano, cum autem linea nodorum est ad angulos rectos cum rectâ solem ac terram jungente, tunc Sol maxime discedit à plano orbitæ Lunaris, hinc pars ejus actionis consumitur in admovendo Plano orbitæ Lunaris ad Eclipticam, & per residuum duntaxat ejus actionis Lunæ errores *in longum* producit; hinc priori casu actio Solis in Lunam paulò major est quam in posteriore, partem autem actionis Solis residuam sublatâ eâ ejus parte quæ in plano orbitæ Lunaris dimovendo consumitur ad calculum vocamus Probl. 1°. Calculi tertii (pag. 502.).

(b) * *Et inde oritur alia motus medii æquatio.* Hujus æquationis quantitatem & Leges Probl. III. Calculi 3i. (pag. 503.) exposuimus, illamque $\frac{3\,A.F.\,l^2}{8\,S.V.\,ar} \times \frac{2\,n\,m}{r}$ in-

lunaris æquatio, quam ſemeſtrem ſecundam vocabo, quæque maxima eſt ubi nodi in ſolis octantibus verſantur, & evaneſcit ubi ſunt in ſyzygiis vel quadraturis, & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi alterutrius à proximâ ſyzygiâ aut quadraturâ: (c) additur vero medio motui lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia, ſubducitur ſi in conſequentia, & in octantibus, ubi maxima eſt, aſcen-



invenimus, ſumendo *l* pro ſinu inclinationis orbitæ, & *n* & *m* pro ſinu & Coſinu diſtantiæ nodorum à Syzygiâ. Hinc cum $\frac{2nm}{r}$ ſit ſinus duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ, cæteri verò termini ſint conſtantes hæc æquatio eſt maxima *ubi nodi in Solis octantibus verſantur*, & evaneſcit *ubi ſunt in Syzygiis vel quadraturis & in aliis nodorum poſitionibus proportionalis eſt ſinui duplæ diſtantiæ nodi à Syzygiâ* &c.

(c) * *Additur verò medio motui Lunæ, ſi ſol diſtat à nodo ſibi proximo in antecedentia ſubducitur ſi in conſequentia.* Ex actione Solis in Lunam, Luna retardatur, ex diminutione verò ejus actionis propter obliquitatem plani orbitæ Lunaris, diminuitur hæc Lunæ retardatio, hoc eſt acceleratio quædam oritur reſpectu motus qui, omiſſa hac conſideratione, fuerat determinatus; mediocris acceleratio hinc nata, & quæ includitur in medio motu Solis eſt ubique $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.Var^2} \times \frac{ru}{2}$, vera autem acceleratio eſt $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.Var^2} \times ANQ$. Unde æquatio eſt $\frac{3\,A.F.l^2}{2.S.Var^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ per Probl. III. calculi 3. (pag. 503. & ſeq.) jam itaque ſi $\frac{ru}{2}$ ſit major quam ANQ quod evenit in toto quadrante ANC, acceleratio mediocris eſt major vera, & Luna magis proceſſiſſe cenſetur quam revera proceſſit, hinc iſta differentia $\frac{3\,A.F.l^2}{2\,S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ debet detrahi ex ejus loco invento ut verus locus habeatur, in hoc autem caſu Sol qui puncto A reſpondere cenſetur eſt in conſequentia reſpectu nodi N.

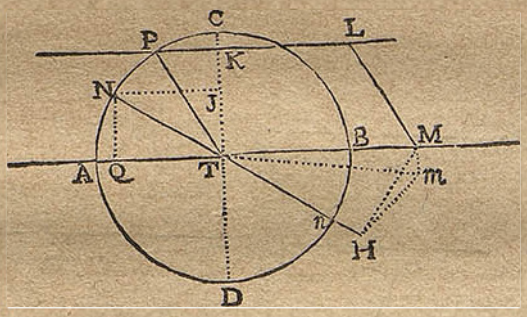
Dum verò N verſatur inter C & B, & n

DE MUNDI SYSTEMATE.

cendit ad $47^{\prime\prime}$ in mediocri solis distantiâ à terrâ, (d) uti ex theoriâ gravitatis colligo. In (e) aliis solis distantiis hæc æquatio maxima in octantibus nodorum est reciprocè ut cubus distantiæ solis à terrâ, ideoque in perigæo solis ad $49^{\prime\prime}$ in apogæo ejus ad $45^{\prime\prime}$ circiter ascendit.

LEM. XI.

Per



n inter A & D, tunc $\frac{ru}{2}$ est minor quam ANQ, sic itaque acceleratio mediocris est minor quam acceleratio vera, ideoque differentia $\frac{3A.F/^2}{2S.V.ar^2} \times \frac{ru}{2} - ANQ$ addi debet loco medio Lunæ, tunc autem Sol in A est in antecedentia respectu nodi proximi n.

3°. Dum N versatur inter B & D & n in A & C $\frac{ru}{2}$ excedit ANQ, sive motus mediocris excedit verum subduci itaque debet differentia, est vero in eo casu Sol in A in consequentia respectu nodi n.

Denique Dum N est inter D & A, $\frac{ru}{2}$ minor est quam ANQ addi itaque debet æquatio loco medio Lunæ & Sol est in Antecedentia respectu nodi N.

Ergo æquatio subducitur ex medio motu Lunæ cum Sol est in consequentia respectu nodi proximi, additur vero ei motui cum Sol est in antecedentia.

(d) * *Uti ex Theoriâ colligo*, calculus noster coroll. Probl. III. contentus, Æquationem maximam $45^{\prime\prime}.6$ exhibet, qui numerus est adeo proximus numero $47^{\prime\prime}$. quem ex Theoriâ gravitatis collegit Newtonus, ut credere facile sit ipsum hunc numerum ex Theoriâ gravitatis collegisse eâ proximè ratione quæ in calculo (pag. 501.) adhibetur, differentiola enim ista oriri potest ex eo quod, vel angulum inclinationis orbitæ, vel quantitatem M mensis Periodici citra actionem Solis considerati, paulo majorem fecerit quam nos.

(e) * *In aliis Solis distantiis.* Eadem plane est demonstratio ac in notâ (y) præcedente; cum æquatio fit $\frac{3AF/^2}{8SV.ar} \times \frac{2nm}{r}$ in diversâ Solis à Terrâ distantiâ X, loco a scribatur X, loco F, $\frac{a^2F}{X^2}$, loco $\frac{F}{V}$, $\frac{aM^2}{rA^2}$, æquatio evadit $\frac{3M^2a^3/^2}{8A.S.X^3r^2} \times \frac{2nm}{r}$ & in Octantibus quia $\frac{2nm}{r} = r$, Æquatio est $\frac{3M^2a^3/^2}{8A.SX^3r}$, ideoque æquationes in Octan-

Per (f) eandem gravitatis theoriam apogæum lunæ progreditur quam maximè ubi vel cum sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum sole quadraturam facit. (g) Et eccentricitas fit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol. 7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & æquationem principalem apogæi generant, quam semestrem vocabo. (h) Et æquatio maxima semestris est 12gr. 18′ circiter, quantùm ex observationibus colligere potui. *Horroxius* noster lunam in ellipsi circum terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum ellipseos in epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum terram. Et (i) ex motu in epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu apogæi & quantitate eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris lunæ à terrâ in partes 100000, & refe-

Octantibus in diversâ Solis à Terrâ distantiâ, sunt inter se inverse ut X^3, si fiat itaque ut Cubus maximæ distantiæ Terræ à Sole qui est 1.0516, ad Cubum 1 mediocris distantiæ, ita 47″ Æquatio pro mediocri distantia inventa erit ad 45″ circiter eaque erit Æquatio in maximâ distantiâ Solis à Terrâ, & ut .950107 Cubus minimæ distantiæ, ad 1 ita 47″ ad 49″ circiter quæ erit Æquatio maxima cum Sol erit in Perigæo. Eâdem etiam ratione ac in notâ (z) ostendetur quomodo in quâvis Solis à Terrâ distantiâ, & in quavis positione Nodi respectu Solis Æquatio obtineri debeat.

(f) * *Per eamdem gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maximè* &c. Per Methodum ex ipsis Newtoni Principiis derivatam invenimus (pag. 505. & seq.) motum Apsidis esse ut $3yy-rr$, sumendo y pro sinu distantiæ Apsidis à quadraturâ, is ergo motus, juxta hunc calculum, evanescit cum $y\sqrt{3}=r$, cum nempe y est sinus arcus 35gr. 15′, positivus verò est in syzygiis illic enim fit $3yy-rr=2rr$ negativus in Quadraturis illic enim est $3yy-rr=-rr$.

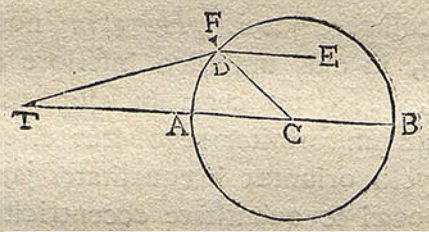
(g) * *Et excentricitas fit maxima in priore casu* cum nempe Apsides sunt in syzygiis & minima in posteriore, cum nempe *Absides sunt in Quadraturis*. Id utique statuitur toto calculo de Excentricitate orbitæ Lunaris superius pag. 512. & seq. tradito. 121.

(h) * *Et Æquatio maxima semestris*, &c. Hanc ex observationibus determinandam liquet cum non satis feliciter obtineatur absoluta quantitas motus Apogæi per calculos secundum Newtoniana Principia institutos; Methodus autem à nobis indicata est admodum incompleta & rudis, & in ea multa quæ considerari debuissent sunt omissa, hinc cum in cæteris motibus Lunæ & Æquationibus ad votum succedat Theoria Newtoniana, in hoc casu aliquid adhuc desiderari, fatendum est.

(i) * *Et ex motu in Epicyclo.* Ingeniose & feliciter conjunctas esse unicâ constructione Geometricâ Excentricitatis variationes, & motus Apogæi æquationes, ex iis quæ de Excentricitate dicta sunt pag. 516. intelligi potest; Illic enim ostenditur quod si TC sit excentricitas media f, CB maxima excentricitatis variatio ab excentricitate mediocri, BF arcus duplus distantiæ apsidis à syzygiâ, tunc linea TF est excentricitas, ostenditur verò, Probl. II. pag. 517. variationem maxi-

De Mundi Systemate.

referat T terram & TC eccentricitatem mediocrem lunæ partium 5505. Producatur TC ad B, ut sit CB sinus æquationis maximæ semestris 12gr. 18′ ad radium TC, & circulus BDA centro C, intervallo CB descriptus erit epicyclus ille in quo centrum orbis lunaris locatur & secundum ordinem literarum



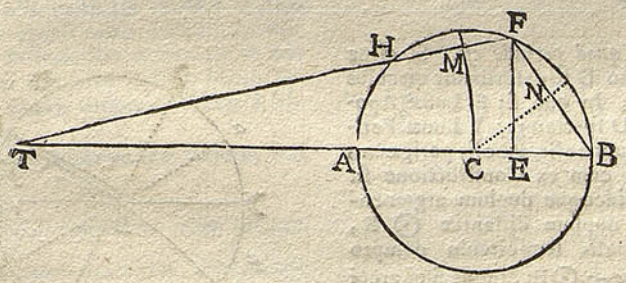
BDA revolvitur. Capiatur angulus BCD æqualis duplo argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci solis ab apogæo lunæ semel æquato, & erit CTD æquatio semestris apogæi lunæ & TD eccentricitas orbis ejus in apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem lunæ motu medio & apogæo & eccentri-

221. mam excentricitatis quæ est A B tam ex observationibus quam consentiente calculo sumi posse 1172 partium quarum Radius orbitæ Lunaris est 100000 & excentricitas TC 5505, simul autem cum constet ex observationibus æquationem semestrem Apogæi 12gr. 18′ esse, ejus Anguli sinus est partium 1172 Radio existente partium 5505, ut liquet si fiat ut Radius 100000 ad sinum Anguli 12°. 18′ qui est 21303 ita 5505 ad quartum qui est $1172\frac{1}{4}$ hinc illum numerum pro maximâ variatione excentricitatis selegit Halleius, quia non procul est ab iis quos & observationes & calculus indicant, simulque est sinus anguli maximi quo discedunt Apsides à loco medio. Ergo quando B F est quadrans, ideoque Apsides octante à syzygiâ distant, sinus anguli F T B est ipsa linea C B sive $1172\frac{3}{4}$ dum radius T F est æqualis T C sive 5505, ergo eo in casu angulus F T B est verus discessus lineæ Apsidum à suo loco medio, & jacet T F in verâ positione lineæ apsidum, & cum T F sit excentricitas eo in loco est F in ipsâ positione centri orbitæ Lunaris; Idem proximè eveniet in quovis alio loco F; Nam cum Æquationes Apogæi (pag. 512.) sint ut sinus Arcus dupli distantiæ Apsidis à Sole, & sit F B arcus duplus distantiæ Apsidis à Sole & F E ejus sinus, æquatio maxima 12gr. 18′. debebit esse ad eam quæ huic loco F competit ut B C ad F E, sed in ea proximè sunt ratione anguli omnes F T B, hinc itaque est quam proximè T F in verâ positione lineæ Apsidum & F centrum orbitæ.

SCD LYON 1

tricitate, ut & orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus lunæ locus in orbe & distantia ejus à terrâ, (k) idque per methodos notissimas.

(l) In perihelio terræ, propter majorem vim solis, centrum orbis lunæ velociùs movetur circum centrum *C* quam in aphelio, idque in triplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. (m) Ob æquationem centri solis in argumento annuo comprehensam, centrum orbis lunæ velocius movetur in epicyclo *BDA* in duplicatâ ratione distantiæ terræ à sole inversè. Ut idem adhuc velociùs moveatur in ratione simplici distantiæ inversè; ab orbis centro *D* agatur recta *DE* versus apogæum lunæ seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDF* æqualis excessui argumenti annui prædicti supra distantiam apogæi lunæ à perigæo



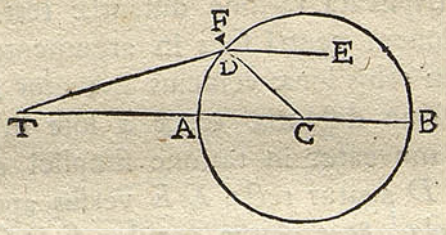
(k) * *Per Methodos notissimas.* De iis agitur Lib. I. Prop. XXXI.

(l) * *In perihelio.* Si nulla esset vis Solis quiescerent Apsides orbitæ Lunaris, nec mutaretur ejus excentricitas, motum itaque centri orbitæ Lunaris F in circulo BFHA vi Solari esse debitum liquet, omnes verò errores ex vi Solari ortos, esse proximè in triplicatâ ratione distantiæ terræ à Sole sæpius observatum est, hinc motus centri F orbitæ Lunaris in circulo BFHA eâ proportione variari debet.

(m) * *Ob Æquationem centri Solis in argumento annuo comprehensam* &c. Arcus FB vel arcus BD in figura Textus est duplus distantiæ Apsidis à syzygiâ, hoc est, duplus distantiæ Apsidis à Sole, itaque punctum F invenitur locum Solis à loco Apsidis tollendo, residui in consequentia duplum est arcus BF, & id residuum est argumentum annuum, fingatur apsidem immotam esse solem vero moveri, pendebit arcus BF ex motu Solis fietque major quo celerius Sol movebitur, sed motus Solis est inversè in ratione duplicatâ distantiarum Terræ à Sole (not. o), ergo motus puncti F ex hac consideratione sequitur rationem inversam duplicatam distantiæ Terræ à Sole. 121.

DE MUNDI SYSTEMATE.

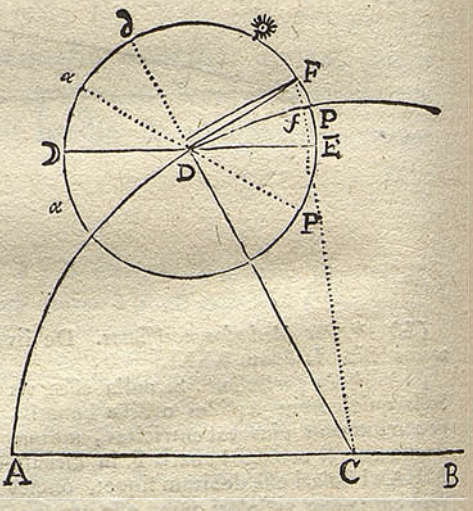
gæo solis in consequentia; vel (n) quod perinde est, capiatur angulus CDF æqualis complemento anomaliæ veræ solis ad gradus 360. Et sit DF ad DC ut dupla eccentricitas orbis magni ad distantiam mediocrem solis à terra, & motus medius



diurnus solis ab apogæo lunæ ad motum medium diurnum solis ab apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & $52^{l}.\ 27^{ll}.\ 16^{lll}.$ ad $59^{l}.\ 8^{lll}.\ 10^{ll}.$ conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et

121. (n) * *Vel quod perinde est.* Si circa punctum D radio DF describatur circulus $EF\odot d\alpha)P$; In quo sit E Lunæ Apogæum è centro D spectatum;) Lunæ Perigæum, α Apogæum Solis, P Solis perigæum, $\odot$ locus Solis, cum ex Constructione fit $dDE=DCB$, ideoque duplum argumenti annui, sive duplum distantiæ $\odot E$, erit EDC æqualis semicirculo dempto $2\odot E$, sive erit $\frac{1}{2}c-2\odot E$; Itaque si ei arcui EDC addatur EDF æqualis annuo argumento dempta distantia Apogæi Lunæ a Perigæo Solis, sive $\odot E-PE$, fiet $CDF=\frac{1}{2}c-\odot E-PE$, sed cum $\frac{1}{2}c$ sit æqualis distantiæ Perigæi Solis ab ejus Apogæo erit $\frac{1}{2}c=PE\odot\alpha$, ex quo itaque detracto PE & $E\odot$, est $CDF=\odot\alpha$ sive distantiæ Solis ab Apogæo in antecedentia, aut quod idem est complemento ad 360 gr. arcus $\alpha)PEF\odot$, qui arcus est distantia Solis ab Apogæo suo, in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia vera.

Si punctum P foret in consequentia respectu puncti E, tunc EDF faciendus esset æqualis argumento annuo addita distantia Perigæi Solis à Lunâ, sicque fieret $CDF=\frac{1}{2}c-\odot+PE$ & quoniam in eo



casu est $\frac{1}{2}c=P\odot)\alpha$, & $-\odot E+PE=-P\odot$, erit $CDF=\odot)\alpha$, sive erit distantia Solis ab Apogæo in Antecedentia posito, hoc est, complementum ad 360 gr. arcûs $\alpha)PEF\odot$, qui arcus est distantia Solis ab Apogæo suo in consequentia sumpta, quæ est Solis anomalia vera.

SCD LYON 1

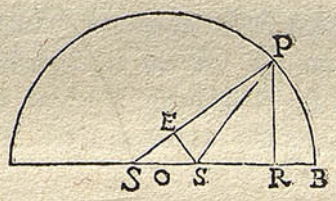
Et concipe centrum orbis lunæ locari in puncto F, & in epicyclo, cujus centrum est D, & radium DF, interea revolvi dum punctum D progreditur in circumferentiâ circuli $DABD$. Hâc (o) enim ratione velocitas, quâ centrum orbis lunæ in lineâ quâdam curvâ circum centrum C descriptâ movebitur, erit reciprocè ut cubus distantiæ solis à terrâ quamproximè, ut oportet.

Com-

(o) * *Hâc enim ratione.* Æquationem hujus motus centri orbis Lunaris quæ adhibenda est ut moveatur velocius quam per primam constructionem, idque in simplici ratione distantiæ inversè esse proportionalem æquationi centri Solis constat eadem demonstratione quâ in notis m & n pag. 519. de Æquationibus annuis Apogæi & nodi idem probatum fuit.

Dicatur a mediocris distantia Terræ à Sole, quævis alia distantia dicatur $a \pm x$, motus medius centri orbis Lunaris in distantia a sit o, & quia ille motus est in triplicatâ ratione distantiæ Solis à Terra inverse, in aliâ quavis distantiâ Terræ à Sole erit $\frac{a^3}{a \pm x^3} o$ & formando seriem, erit $o \mp \frac{3x}{a} o$, sed si fingeretur eum motum sequi proportionem inversam duplicatam distantiarum, inveniretur is motus singulis in locis $o \mp \frac{2x}{a} o$, & ita assumptus fuerat in primâ constructione (vid. not. *m* præced.), ergo singulo in loco error commissus per hanc fictionem foret $\mp \frac{x}{a} o$; Pariter si Solis motus medius dicatur m ostensum est (not. *n* pag. 519. 520.) differentiam inter motum medium & verum esse $\mp \frac{2x}{a} m$, Ideoque cum ratio $\mp \frac{x}{a} o$ ad $\mp \frac{2x}{a} m$, sit in singulis punctis x eadem, Æquatio ex errore $\mp \frac{x}{a} o$ orta erit proportionalis Æquationi ex $\mp \frac{2x}{a} m$ ortæ, hoc est erit proportionalis Æquationi centri Solis; Sed Æquatio centri Solis, est quamproximè proportionalis sinui anomaliæ Solis not. 372. Lib. I. nam illic demonstratur quod si ex utroque foco S & ſ orbitæ

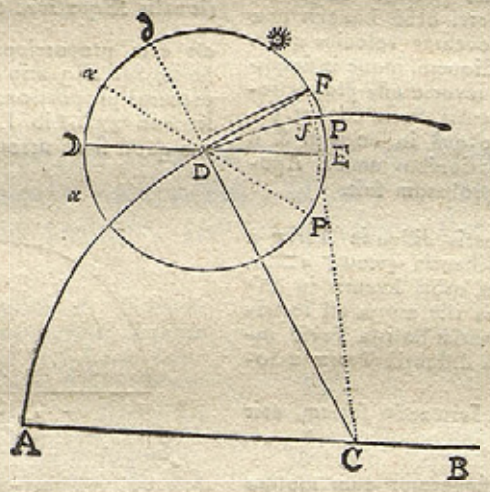
121.



Solis ducantur lineæ ad punctum P erit BſP anomalia media, & BSP anomalia vera, ideoque angulus SPſ erit Æquatio, ducatur ergo ex ſ in SP perpendiculum ſE & ex P perpendiculum PR ob similitudinem Triangulorum SſE & ſPR erit, SP ad PR ut Sſ ad ſE, sive sumendo SP pro radio constanti (quod est proximè verum) erit, ut Radius ad Sinum Anomaliæ veræ ita dupla excentricitas ad sinum æquationis Solis, sive ad ipsam Æquationem, nam in parvis angulis, arcus pro sinubus sumi possunt. Hinc sinus anomaliæ veræ est ad æquationem centri Solis in Ratione datâ radii nempe ad duplam excentricitatem, hinc itaque, Æquatio orta ex errore $\mp \frac{x}{a} o$, erit ut sinus Anomaliæ Solis, sed

De Mundi Systemate.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris lunæ à terra sit partium 100000, & eccentricitas TC sit partium 5505 ut supra: recta CB vel CD invenietur partium $1172\frac{1}{4}$ & recta DF partium $35\frac{1}{7}$. Et hæc recta ad distantiam TC subtendit angulum ad terram quem translatio centri orbis à loco D ad locum F generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata

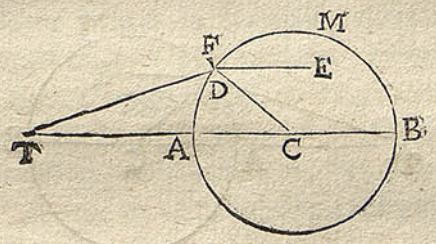


XXI. Angulus CDF est complementum ejus anomaliæ ad 360gr. sinus autem arcus alicujus & sinus ejus complementi ad 360gr. sunt unum & idem, ergo Æquatio ex errore $\mp\frac{x}{a}o$ nata est proportionalis sinui angulorum CDF & si sumatur Radius DF æqualis æquationi maximæ hinc natæ, cæteri omnes sinus angulorum CDF erunt ipsæ æquationes in datâ Solis anomaliâ, si itaque sumantur à puncto D arcus Df in circulo BDA æquales illis sinubus, erit f verus locus centri orbitæ Lunaris, & quia ob exiguitatem horum sinuum respectu radii CD, linea per C & f ducta cadit etiam in F sumi potest F, ut verus locus centri orbitæ Lunaris.

Invenitur autem Æquatio maxima orta ex errore $\mp\frac{x}{a}o$; si attendatur quod Solis motus est ubique $m \mp \frac{2x}{a}m$, sive $m \mp \frac{x}{a} \times 2m$ ideoque summam omnium errorum ex errore $\frac{x}{x}o$ fore ad summam omnium errorum in solis motu genitorum ut o ad $2m$, sive Æquationem quæsitam esse ad Æquationem Solis ut est motus centri orbitæ Lunaris per circulum BDA ad duplum motum medium Solis respectu sui Apogæi, sed quoniam arcus BD sunt semper dupli distantiæ Solis ab Apogæo Lunæ motus

cata in ſitu parallelo ad diſtantiam ſuperioris umbilici orbis lunæ à terra, ſubtendit eundem angulum, quem utique tranſlatio illa generat in motu umbilici, & ad diſtantiam lunæ à terrâ (p) ſubtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu lunæ, quique propterea æquatio centri ſecunda dici poteſt. Et hæc æquatio, in mediocri lunæ diſtantia à terrâ, eſt ut ſinus anguli, quem recta illa *DF* cum recta à puncto *F* ad lunam ducta continet quamproximè, & ubi maxima eſt evadit 2′.

LIBER TERTIUS. PROP. XXXV. PROBL. XVI.

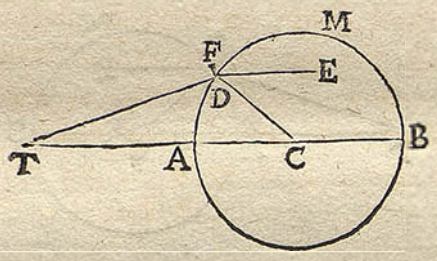


tus diurnus centri orbis Lunaris per circulum BDA eſt etiam duplus motus Solis ab Apogæo Lunæ, hinc Æquatio quæſita eſt ad maximam Æquationem Solis ut eſt radius DC ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra & ut duplus motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad duplum motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, maxima autem Solis Æquatio eſt ipſa dupla excentricitas orbis magni, hinc Æquatio quæſita ſive radius DF eſt ad duplam excentricitatem ut DC ad diſtantiam mediocrem Solis à Terra, & ut motus diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo conjunctim, undè viciſſim eſt etiam DF ad DC ut dupla excentricitas ducta per motum diurnum Solis ab Apogæo Lunæ, ad diſtantiam mediocrem Solis à Terrâ ductam per motum diurnum Solis ab Apogæo ſuo.

(p) * *Subtendit angulum quem eadem tranſlatio generat in motu Lunæ.* Scilicet tota orbita Lunæ, ipſaque Luna per motum centri orbitæ ex D in F tranſlatum ex proprio loco mota cenſeri debet in locum alium per lineam ipſius DF duplam ipſique Parallelam, cum itaque diſtantia mediocris ſit partium 100.000, ſi hæc linea quæ duplicata eſt 70.4, angulum rectum cum linea à Terra ducta efficiat quo caſu maximam æquationem facit, ipſa ſubtendet angulum 2′ 25″ ſiquidem ſinus duorum minutorum eſt 58.18 ſinus trium 87.27. In aliis autem hujus lineæ poſitionibus reſpectu lineæ à Terrâ ductæ, anguli quos ſubtendet erunt ad iſtum ut eſt ſinus Anguli quem facit cum lineis à Terrâ ductis ad Radium; Nam in Triangulis in quibus duæ lineæ ſunt conſtantes ſed earum angulus variabilis, ſi una ex iis lineis alterius reſpectu ſit minima, Tertia linea pro conſtante aſſumi poteſt, eſt verò ad minimam lineam, ut ſinus anguli variabilis ad ſinum anguli oppoſiti minimæ lineæ, hinc ſinus anguli variabilis & ſinus anguli minimi ſunt in ratione datâ. Ergo ut ſinus 121.

De Mundi Systemate.

2′. 25″. (9) Angulus autem quem recta *DF* & recta à puncto *F* ad lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum *EDF* ab anomalia media lunæ, vel addendo distantiam lunæ à sole ad distantiam apogæi lunæ ab apogæo so-



lis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2′. 25″. sunt ad æquationem centri secundam, addendam, si summa illa sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus longitudo in ipsis luminarium syzygiis.

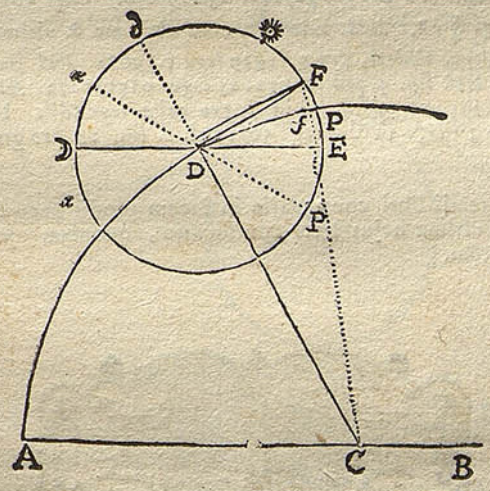
Cum

121. sinus Anguli recti sive Radius ad 2′. 25″. ita sinus anguli quem facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad DF, ad angulum quo locus Lunæ mutatus cernitur.

(9) * *Angulus autem quem* facit linea à terrâ ducta cum lineola Parallela ad DF, & in ipso loco Lunæ posita, æqualis est illi quem facit recta DF & recta à puncto F ad Lunam ducta, saltem proximè quia F est centrum orbitæ Lunaris à quo Terra non multum distat; Fingatur, produci lineam DF & ex puncto F duci lineam Parallelam lineæ DE, quæ ad Apogæum Lunæ tendit, & ex eodem puncto F aliam duci lineam ad Lunam, angulus hujus lineæ cum linea DE erit anomalia media Lunæ ergo angulus hujus lineæ cum linea DF producta erit differentia anguli EDF & anomaliæ mediæ Lunæ, sive quia erat EDF differentia argumenti annui, & distantiæ Apogæi Lunæ à Perigæo Solis si ex Anomalia media Lunæ tollatur argumentum annuum supereſt distantiæ Lunæ à Sole, cui addi debet distantia Apogæi Lunæ & Perigæi Solis, sive (quia semi circuli additi vel detracti non mutant valores Angulorum eorumque sinuum) distantia Apogæi Lunæ & Apogæi Solis: cætera facile patebunt ex figuræ descriptione; Exemplum esto in conjunctione ubi est ☉ locus Solis & Lunæ, liquet enim quod quando punctum ☉ est in consequentia respectu puncti F, Luna quæ transfertur per lineam parallelam lineæ DF transfertur in Antecedentia; dum è contrà punctum ☉ est in antecedentia respectu puncti F, Luna transfertur in consequentia; est vero F☉=PE, cum ergo AL est major semicirculo, ut in figura, tunc PE sive F☉ est minor semicirculo, est ergo ☉ in consequentia respectu puncti F, hinc subducenda est ea Æquatio; sit verò AE minor semicirculo-

Cum atmosphæra terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem solis, & refringendo spargat eandem in umbram terræ, & spargendo lucem in confinio umbræ dilatet umbram: (r) Ad diametrum umbræ, quæ per parallaxim prodit, addo minutum unum primum in eclipsibus lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero lunæ primò in syzygiis, deinde in quadraturis, & ultimò in octantibus per phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios solis & lunæ ad tempus meridianum in observatorio regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommodè sequentes adhibebit: nempe motum medium solis ♑ 20gr. 43′. 40″., & apo-



lo erit PE major semicirculo ut & F ☉, ideoque est ☉ in antecedentia respectu F promovetur itaque Luna propter hanc Æquationem; cæterum non tantum in luminarium Syzygiis, sed ad cæteros Lunæ ad spectus hæc adaptari possunt, verum commodius est Astronomis, Theoriam suam ex syzygiarum observationibus explorare & constituere.

(r) * *Ad diametrum umbræ.* Parallaxis est angulus qui subtenditur per semi-Diametrum terræ ex Luna spectatæ; Jam vero propter atmosphæræ actionem in radios lucis idem evenit respectu umbræ ac si semi-Diameter terræ 35 vel 40 milliaribus augeretur, nam radii illâc pergentes rectam viam non sequuntur, sed introrsum in umbram conjiciuntur, hinc

DE MUNDI SYSTEMATE.

& apogæi ejus ♋ 7gr. 44′. 30″, & motum medium lunæ ♒ 15gr. 21′. 00″., & apogæi ejus ♐ 8gr. 20′. 00″, & nodi ascendentis ♌ 27gr. 24′. 20″.; & differentiam meridianorum observatorii hujus & observatorii regii *Parisiensis* 0hor. 9min. 20sec. motus autem medii lunæ & apogæi ejus nondum satis accuratè habentur.

XXI. carent radiis solaribus loca quæ trans Atmosphæram eos recipere deberent, fungitur ergo Atmosphæra vice corporis opaci, & umbra ea de causa dilatari debet quasi semi-Diameter terræ in 35 vel 40 milliaribus foret aucta.

ERRATA.

Pag. 400. Not. col. 2. lin. 8. & pag. 402. N. col. 1. l. 2. *pro* 110. *lege* 112. Pag. 498. Not. col. 1. l. 17. & 18. Luna *lege* Terra. *Ibid.* col. 2. l. 8. quæ factam erit *lege* factam, quæ erit. Pag. 500. col. 1. l. 27. *pro* 107.48. *lege* 108.48. Pag. 501. col. 1. linea 5a. ante ultimam $\frac{1}{2}r^2$ *lege* $\frac{1}{4}r^2$. *Ibid.* lineâ 4a. ante ultimam & ultimâ & col. 2. lin. 2. *pro* 40.449375 *lege* 40.89875, *ibidem*, *pro* 5.52939 *lege* 5.59082. *Ibid.* lin. 3. *pro* .00112974567 *lege* .00114487827. *Ibid.* lin. 5. *pro* .06372125 *lege* .06559087. *Ibid.* lin. 6. *pro* 3'82338. & *pro* .82338. *lege* 3'.9354. & .9354. Lin. 7. *pro* 49″.4. *lege* 56″. Lin. 8. *pro* 3'.49″. *lege* 3'.56″. Lin. 30. *pro* 3′′ *lege* 11″. Pag. 502. col. 1. lin. 28. *pro* graduum 5.19'.36″. *lege* graduum 5°.19'.30″.

Serò quidem hæc tertii libri continuatio in lucem prodit propter varia Editoris negotia; citiùs edetur ultima hujus libri continuatio, quoniam ejus operâ nimis tardâ non utemur in posterum.

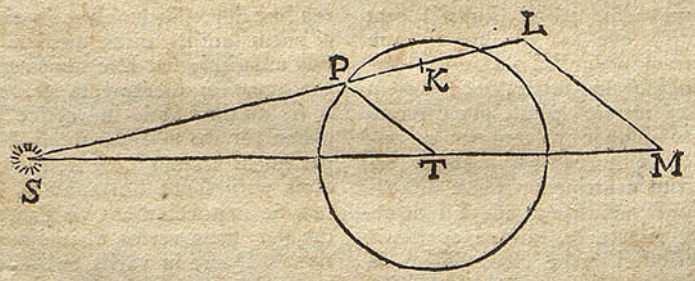
PHI-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

LIBRI TERTII CONTINUATIO II.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.



SOlis vis *ML* seu *PT*, in quadraturis lunaribus, ad perturbandos motus lunares erat (per Prop. XXV. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1. ad 638092,6. Et vis *TM*–*LM* seu 2*PK* in syzygiis lunaribus est duplo major. Hæ autem vires, si descendatur ad superficiem terræ, diminuuntur in ratione distantiarum à centro terræ, id est, in (z) ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; ideo-

(z) * *In ratione* $60\frac{1}{2}$ *ad* 1. Quemadmodùm in prop. 25ª. demonstratum est eam partem vis centripetæ Lunaris in Solem quâ motus ejus circà terram perturbatur

DE MUNDI SYSTEMATE.

ideoque vis prior in superficie terræ est ad vim gravitatis ut 1 ad 38604600. Hac vi mare deprimitur in locis, quæ 90 gradibus distant à sole. Vi alterâ, quæ duplo major est, mare elevatur & sub sole & in regione soli oppositâ. (x) Summa virium est ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, sive ea deprimat aquam in regionibus quæ 90 gradibus distant à sole, sive elevet eandem in regionibus sub sole & soli oppositis, hæc summa erit tota solis vis ad mare agitandum; & eundem habebit effectum, ac si tota in regionibus sub sole & soli oppositis mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus distant à sole nil ageret.

Hæc est vis solis ad mare ciendum in loco quovis dato, ubi sol tam in vertice loci versatur quam in mediocri suâ distantiâ à terrâ. (a) In aliis solis positionibus vis ad mare attollendum est ut sinus versus duplæ altitudinis solis supra horizontem loci directè & cubus distantiæ solis à terrâ inversè.

Co-

batur & quæ radio orbitæ Lunaris erat proportionalis, esse ad vim centripetam Lunæ in terram in duplicatâ ratione temporum periodicorum terræ circà Solem & Lunæ circà terram, simili plane modo probatur eam quoquè partem vis centripetæ in Solem quæ analoga est radio terræ esse ad vim centripetam Lunæ in terram in ratione radii terræ ad radium orbitæ Lunaris directè & ratione duplicatâ temporis periodici terræ circà Solem ad tempus periodicum Lunæ circà terram inversè. Quarè vires Solis ad perturbandos motus corporum propè superficiem terræ sunt ad vires Solis ad perturbandos motus Lunæ ut radius terræ ad radium orbitæ Lunaris, hoc est, ut 1 ad 60 $\frac{1}{2}$.

(x) * *Summa virium* est ad vim gravitatis ut 3 ad 38604600 sive ut 1 ad 12868200.

(a) * *In aliis Solis positionibus.* Hâc vi aqua maximè deprimitur ubi Sol versatur in horizonte & maximè elevatur ubi Sol in vertice loci versatur. Depressio autem & elevatio aquarum magis ac magis decrescit quò altiùs Sol ascendit suprà horizontem, aut à vertice descendit. Præterea hæc depressio aut elevatio circa initium & finem lentiùs, circà medium verò celeriùs minuitur; sed hæc contingent successiva aquarum incrementa & decrementa, si vis maxima Solis in vertice loci exprimatur per diametrum circuli, hoc est, per per sinum versum 180°. seù duplæ altitudinis Solis suprà horizontem, in aliis autem Solis positionibus vis eadem exhibeatur per sinus versos altitudinum duplicatarum; Quare in variis Solis positionibus, vis ad marè attollendum sumi potest ut sinus versus duplæ altitudinis Solis suprà horizontem, seclusâ tamen perturbatione quæ ex variâ Solis à tellure distantiâ oritur. At vis Solis augetur vel minuitur quò propiùs ad terram accedit aut longiùs abeà recedit, idque in ratione triplicatâ distantiarum inversâ (cor. 14. prop. 66. lib. 1.) considerari itaquè poterit, vis Solis ad mare attollendum ut sinus versus duplæ altitudinis Solis suprà horizontem loci directe & cubus distantiæ Solis à Terrâ inversè. Cæterùm tota hæc propositio eleganter admodùm calculo tractata legitur in tribus Dissertationibus quæ Tom. 3°. adjectæ sunt.

SCD LYON 1

Corol. Cum vis centrifuga partium terræ à diurno terræ motu oriunda, quæ est ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo aquæ sub æquatore superet ejus altitudinem sub polis mensurâ pedum *Parisiensium* 85472, ut supra in prop. XIX; vis solaris de quâ egimus, cum sit ad vim gravitatis ut 1. ad 12868200, atque ideo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 seu 1 ad 44527, (b) efficiet ut altitudo aquæ in regionibus sub sole & soli oppositis superet altitudinem ejus in locis, quæ 90 gradibus distant à sole, mensurâ tantùm pedis unius *Parisiensis* & digitorum undecim cum triceſimâ parte digiti. Est enim hæc mensura ad mensuram pedum 85472 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim lunæ ad mare movendum.

(c) Vis lunæ ad mare movendum colligenda est ex ejus proportione ad vim solis, & hæc proportio colligenda est ex proportione motuum maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante ostium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Bristolium*, tempore verno & autumnali totus aquæ ascensus in conjunctione & oppositione luminarium, observante *Samuele Sturmio*, est pedum plus minus 45, in quadraturis autem est pedum tantum 25. Altitudo prior ex summa virium, posterior ex earundem differen-

(b) * *Efficiet ut altitudo aquæ.* Quoniam ex variis pendulorum observationibus & nuperrime institutis gradûs meridiani mensuris sub circulo polari, terra altior est sub æquatore quam ex Theoriâ Newtonianâ prodiit (prop. 19. lib. hujus) paulò augenda erit altitudo aquæ in hoc corollario definita. Observandum autem est corollarium illud rigorosè verum non esse; Newtonus enim ex differentiâ diametri æquatoris & axis terræ per simplicem proportionem colligit altitudinem aquæ ex vi Solis oriundam; uterque tamen casus est longè diversus, primus siquidem pendet à quadraturâ circuli, alter verò refertur ad quadraturam hyperbolæ (ut patet ex cor. 2. prop. 90. lib. 1. & not. 106. lib. hujus). Sed quam parùm à veritate discrepet præsens corollarium apparet ex computo inito in Dissertatione Clariss. Macclaurin prop. 5. 121

(c) * *Vis Lunæ ad Mare movendum.* Vid. cap. 6. num. 10. in Dissertatione Clariss. Bernoullii & prop. 9. in Dissertatione Clariss. Macclaurini.

DE MUNDI SYSTEMATE.

rentiâ oritur. Solis igitur & lunæ in æquatore versantium & mediocriter à terrâ distantium sunto vires S & L, & erit L+S ad L−S ut 45 ad 25, seu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* æstus maris ex observatione *Samuelis Colepressi* ad pedes plus minus sexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo æstus in syzygiis superare potest altitudinem ejus in quadraturis pedibus plus septem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia sit pedum novem, erit L+S ad L−S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ seu 41 ad 23. Quæ proportio satis congruit cum priore. Ob magnitudinem æstus in portu *Bristoliæ*, observationibus *Sturmii* magis fidendum esse videtur, ideoque donec aliquid certius constiterit, proportionem 9 ad 5 usurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, æstus maximi non incidunt in ipsas luminarium syzygias, sed sunt tertii à syzygiis ut dictum fuit, seu proximè sequuntur tertium lunæ post syzygias appulsum ad meridianum loci, vel potius (ut à *Sturmio* notatur) sunt tertii post diem novilunii vel plenilunii, seu post horam à novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, ideoque incidunt in horam à novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu lunæ ad meridianum loci; ideoque proximè sequuntur appulsum lunæ ad meridianum, ubi luna distat à sole vel ab oppositione solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & hyems maxime vigent, non in ipsis solstitiis, sed ubi sol distat à solstitiis decimâ circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus æstus maris oritur ab appulsu lunæ ad meridianum loci, ubi luna distat à sole decimâ circiter parte motus totius ab æstu ad æstum. Sit distantiâ illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et (d) vis solis in hâc distantiâ lunæ à syzygiis & quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum

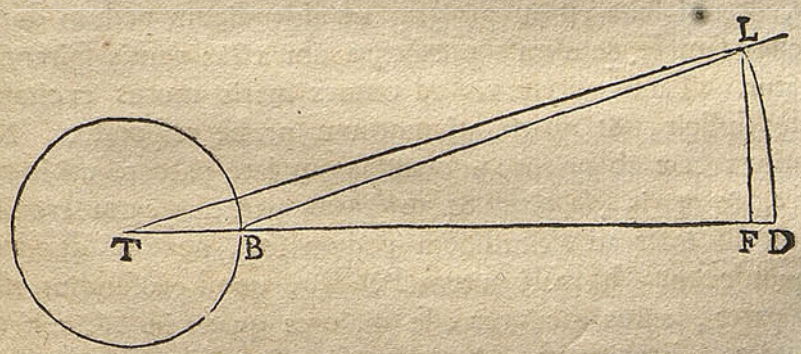
PROP. XXXVI.

(d) * *Et vis Solis.* Hanc virium proportionem non multùm à verò differre patet ex iis quæ immediatè præcedunt.

motum maris à vi lunæ oriundum, quam in ipsis syzygiis & quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0,7986355 S. LIBER TERTIUS. PROP. XXXVII. PROBL. XVIII.

Sed & vis lunæ in quadraturis, ob declinationem lunæ ab æquatore, diminui debet. Nam luna in quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et luminaris ab æquatore declinantis vis ad mare movendum diminuitur (e) in duplicatâ ratione sinus complementi declinationis quamproximè. Et propterea vis lunæ in his quadraturis est tantùm 0,8570327 L. Est igitur L+0,7986355S ad 0,8570327L−0,7986355S ut 9 ad 5.

(f) Præterea diametri orbis, in quo lunâ sine eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia



(e) 122 * *In duplicatâ ratione.* Sit TBD planum æquatoris, T centrum telluris, sitque Luna in L, erit angulus LBD, mensura declinationis ab æquatore, seu, ob exiguum angulum TLB, erit declinatio illa quamproximè æqualis angulo LTD, cujus anguli cosinus est TF, sumpto TL, pro radio. Jam vis quæ aquam in loco æquatoris B, directè trahit à centro T, ubi Luna versatur in plano æquatoris in D, est ad vim quæ eandem aquam directè à centro trahit, ubi Lunæ est in L, ut TL ad TF, hoc est, ut radius ad sinum complementi declinationis LTD, sepositâ vi aquæ centripetâ versus T. Sed, auctâ vi illâ centripetâ, in eâdem ratione minuitur vis altera aquam à centro trahens; Quarè, componendo, vis Lunæ in loco D, est ad vim ejus in L, ut quadratum sinûs totius TL, ad quadratum sinûs complementi TF, declinationis Lunæ LTD. 122

(f) * *Præterea diametri orbis.* (Prop. 28. Lib. hujus).

tia lunæ à terrâ in ſyzygiis eſt ad diſtantiam ejus in quadraturis ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et diſtantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ à ſyzygiis, ubi æſtus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ à quadraturis, ubi æſtus minimus generatur, ſunt ad mediocrem ejus diſtantiam ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. (g) Vires autem lunæ ad mare movendum ſunt in triplicatâ ratione diſtantiarum inversè, ideoque vires in maximâ & minimâ harum diſtantiarum ſunt ad vim in mediocri diſtantia ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. (h) Unde fit $1{,}017522L + 0{,}7986355S$ ad $0{,}9830427 \times 0{,}8570327L - 0{,}7986355S$ ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis ſolis ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol. 1. Cum aqua vi ſolis agitata aſcendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum triceſimâ parte digiti, eâdem vi lunæ aſcendet ad altitudinem octo pedum & digitorum $\frac{5}{22}$, & vi utrâque ad altitudinem pedum decem cum ſemiſſe, & ubi luna eſt in perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum ſemiſſe & ultra, præſertim ubi æſtus ventis ſpirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abundè ſufficit, & quantitati motuum probè reſpondet. Nam in maribus quæ ab oriente in occidentem latè patent, uti in mari *Pacifico*, & maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum ſex, novem, duodecim vel quindecim. In mari autem *Pacifico*, quod profundius eſt & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut (i) plenus ſit æſtus, latitudo maris ab oriente in occidentem non minor eſſe debet quam graduum nonagin-

122.

(g) * *Vires autem Lunæ.* (Cor. 14. Prop. 66. Lib. 1.).

(h) * *Undè fit.* Ut ex hâc analogiâ vis L Lunæ colligi poſſit ducenda ſunt media & extrema, hæcque orietur æquatio $1.017522\,L \times 5 + 0.7986355\,S \times 5 = 0.9830427 \times 9 \times 0.857032\,L - 0.7986355\,S \times 9$; & tranſponendo hæc habebitur proportio $S : L = 0.9830427 \times 0.8570327 \times 9 - .017522 \times 5 : 0.7986355 \times 5 + 0.7986355 \times 9$. Jam verò ſumptis horumce numerorum Logarithmis, & quæſitis reſpondentibus numeris in vulgaribus Logarithmorum tabulis, prodit S ad L ut 1 ad 4.4815 quamproxime.

(i) * *Ut plenus ſit æſtus.* (109).

ginta. In mari *Æthiopico* aſcenſus aquæ intra tropicos minor eſt quam in zonis temperatis, propter anguſtiam maris inter *Africam* & auſtralem partem *Americæ*. In medio mari aqua nequit aſcendere, niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Eâ de causâ fluxus & refluxus in inſulis, quæ à littoribus longiſſime abſunt, perexiguus eſſet ſolet. In portubus quibuſdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadoſa, ad ſinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent eſſe ſolito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepſtowæ* in *Anglia*; ad montes *S. Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Auranches*) in *Normannia*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magnâ cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par eſt ratio fretorum oblongorum & vadoſorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad littora vero quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli & ſubſidere poteſt, magnitudo æſtus reſpondet viribus ſolis & lunæ.

Corol. 2. Cum vis lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longè minor quam quæ vel in experimentis pendulorum, vel in ſtaticis aut hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. (k) In æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Co-

(k) * *In æſtu ſolo marino.* Hæ quidem vires ad movendum mare ſufficiunt, ſed alios effectus ſenſibiles producere non poſſunt. Etenim granum unum cum pondere granorum 4000 etiam accuratiſſimâ libra comparatum ſentiri vix poteſt, vis autem Solaris eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, ſummaque virium Solis & Lunæ eſt ad eandem vim gravitatis ut 1 ad 2032890. Quare patet vires illas licet conjunctas multò minores eſſe quam ut pondus corporis cujuſvis in Libra appenſi ſenſibiliter augere vel minuere poſſint. Unde nec in experimentis pendulorum, Baro- 122.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Corol. 3. Quoniam vis lunæ ad mare movendum est ad solis vim consimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per corol. 14. prop. LXIV. lib. 1.) sunt ut densitates corporum lunæ & solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; densitas lunæ erit ad densitatem solis ut 4.4815 ad 1 directè, & cubus diametri lunæ ad cubum diametri solis inversè: id est (cum diametri mediocres apparentes lunæ & solis sint $31'.\ 16''\frac{1}{2}$ & $32'.\ 12''$) ut 4891 ad 1000. (l) Densitas autem solis erat ad densitatem terræ ut 1000 ad 4000; & propterea densitas lunæ est ad densitatem terræ ut 4891 ad 4000 seu 11. ad 9. Est igitur corpus lunæ densius & magis terrestre quam terra nostra.

Corol. 4. Et cum vera diameter lunæ ex observationibus astronomicis sit ad veram diametrum terræ ut 100 ad 365; erit massa lunæ ad massam terræ ut 1 ad 39,788.

Corol. 5. Et (m) gravitas acceleratrix in superficie lunæ erit quasi triplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie terræ.

Corol. 6. (n) Et distantia centri lunæ à centro terræ erit ad distantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788.

(o) *Corol* 7. Et mediocris distantia centri lunæ à centro terræ in octantibus lunæ erit semidiametrorum maximarum terræ $60\frac{2}{5}$ quamproximè. Nam terræ semidiameter maxima fuit pedum *Parisiensium* 19658600, & mediocris distantia centrorum terræ & lunæ, ex hujusmodi diametris $60\frac{2}{5}$ constans, æqualis est pedibus 1187379440. Et hæc distantia (per corollarium supe-

122. Barometrorum, vel in staticis aut hydrostaticis sensibiles edent effectus. Idem corollarium eleganter demonstravit Clariss. Eulerus num. 30. Dissertationis de fluxu & refluxu maris.

(l) * *Densitas autem Solis.* (Cor. 3. Prop. 8. Lib. hujus).

(m) * *Et gravitas acceleratrix.* Nam gravitas acceleratrix est ut massa directe & quadratum distantiæ à centro, hoc est, semidiametri inverse (cor. 1. prop. 75. lib. 1.). Ideòque gravitas acceleratrix in superficie Lunæ est ad gravitatem acceleratricem in superficie terræ ut $1 \times 133^2 4$ ad 39.788×1000, hoc est, ut 1 ad 3 circiter.

(n) * *Et distantia centri Lunæ.* (61. Lib. 1.).

(o) * *Coroll.* 7. Computum eodem planè modo initur ac in prop. 4. lib. hujus.

superius) est ad distantiam centri lunæ à communi gravitatis centro terræ & lunæ, ut 40,788 ad 39,788: ideoque distantia posterior est pedum 1158268534. Et cum luna revolvatur, respectu fixarum, diebus 27, horis 7, & minutis primis $43\frac{4}{5}$; sinus versus anguli, quem luna tempore minuti unius primi describit, est 12752341, existente radio 1000,000000,000000. Et ut radius est ad hunc sinum versum, ita sunt pedes 1158268534 ad pedes 14,7706353. Luna igitur vi illa, qua retinetur in orbe, cadendo in terram, tempore minuti unius primi describet pedes 14,7706353. Et augendo hanc vim in ratione $178\frac{29}{40}$ ad $177\frac{29}{40}$, habebitur vis tota gravitatis in orbe lunæ per Corol. Prop. III. Et hac vi luna cadendo tempore minuti unius primi describet pedes 14,8538067. Et ad sexagesimam partem distantiæ lunæ à centro terræ, id est ad distantiam pedum 197896573 à centro terræ, corpus grave tempore minuti unius secundi cadendo describet etiam pedes 14,8538067. Ideoque ad distantiam pedum 19615800, quæ sunt terræ semidiameter mediocris, grave cadendo describet pedes 15,11175, seu pedes 15, dig. 1, & lin. $4\frac{1}{111}$. Hic erit descensus corporum in latitudine graduum 45. Et per tabulam præcedentem in prop. xx. descriptam, descensus erit paulo major in latitudine *Lutetiæ Parisiorum* existente excessu quasi $\frac{2}{3}$ partium lineæ. Gravia igitur per hoc computum in latitudine *Lutetiæ* cadendo in vacuo describent tempore unius secundi pedes *Parisienses* 15, dig. 1, & lin. $4\frac{25}{333}$ circiter. Et si gravitas minuatur auferendo vim centrifugam, quæ oritur à motu diurno terræ in illa latitudine; gravia ibi cadendo describent tempore minuti unius secundi pedes 15, dig. 1, & lin. $1\frac{1}{2}$. Et hac velocitate gravia cadere in latitudine *Lutetiæ* supra ostensum est ad prop. IV, & XIX.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum maximarum terræ, demptâ triceſimâ parte semidiametri circiter. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est $60\frac{5}{6}$ semidiametrorum terræ. Nam hæ duæ distantiæ sunt ad distantiam

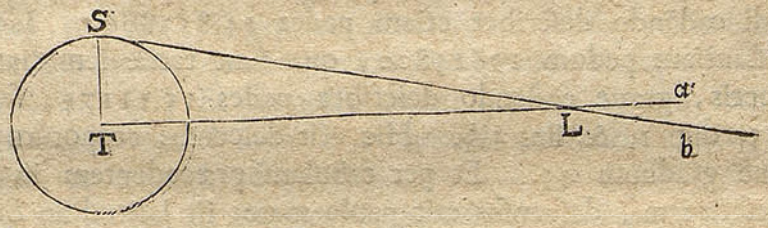
DE MUNDI SYSTEMATE.

mediocrem lunæ in octantibus ut 69 & 70 ad $69\frac{1}{2}$ per prop. XXVIII.

Corol. 9. Distantia mediocris centrorum terræ & lunæ in syzygiis lunæ est sexaginta semidiametrorum mediocrium terræ cum decimâ parte semidiametri. Et in quadraturis lunæ distantia mediocris eorundem centrorum est sexaginta & unius semidiametrorum mediocrium terræ, demptâ triceſimâ parte semidiametri.

Corol. 10. In syzygiis lunæ (P) parallaxis ejus horizontalis mediocris in latitudinibus graduum 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90, est $57'.20''$, $57'.16''$, $57'.14''$, $57'.12''$, $57'.10''$, $57'.8''$, $57'.4''$ respectivè.

In



(p) 123. * *Parallaxis* Lunæ horizontalis in diversis latitudinibus seu distantiis ab æquatore determinari potest. Parallaxis Lunæ horizontalis est differentia locorum in quibus Luna in horizonte posita, ex centro & superficie terræ observata inter stellas fixas conspicitur. Hæc autem locorum distantia æqualis est angulo sub quo videretur semidiameter terræ ex loco Lunæ observata. Sit Luna in horizonte constituta in L; observator in superficiei terrestris loco S, Lunam inter stellas referet in b, sed idem observator in centro terræ T positus Lunam referet in a. Est igitur differentia locorum æqualis aLb, qui æquatur angulo SLT, sub quo semidiameter terræ è loco Lunæ L spectatur. Sed quoniam terra est figuræ sphæroidicæ, semidiametri ejus in diversis latitudinibus inter se differunt & est semidiameter maxima secundum æquatorem ad minimam secundum polos, sive in latitudine 90° ut 19658600 ad 19573000 circiter, estque earum differentia 85472 (prop. 19 lib. huj.) in aliis latitudinibus differentia inter diametrum maximam & quamvis aliam est ad differentiam priorem in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum cujusvis latitudinis quamproximè (prop. 20. lib. huj.) hinc in syzigiis Lunæ parallaxis ejus horizontalis mediocris, hoc est, ubi distantia centrorum Lunæ & terræ est semidiametrorum maximarum terræ 59. 366 circiter (cor. 8.) sub æquatore invenitur dicendo, ut est distantia Lunæ à terrâ LS = 59. 366, ad semidiametrum maximam TS = 1, ità sinus totus ad sinum anguli TLS, qui est $57'\ 20''$. In aliis Lunæ locis minuitur parallaxis in eâdem fere ratione ac semi-

In his computationibus attractionem magneticam terræ non consideravi, cujus utique quantitas perparva est & ignoratur. Siquando vero hæc attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in meridiano, ac longitudines pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum maris, & parallaxis lunæ cum diametris apparentibus solis & lunæ ex phænomenis accuratiùs determinatæ fuerint: (q) licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.

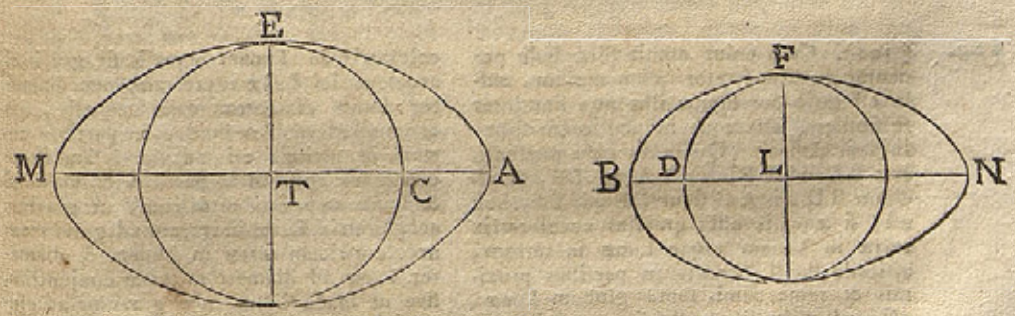
PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire figuram corporis lunæ.

Si corpus lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum esset ad vim lunæ, quâ mare nostrum in partibus & sub lunâ & lunæ oppositis attollitur, (r) ut gravitas acceleratrix lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in lunam, &

semidiametri terræ, & hinc prodeunt parallaxes in latitudinibus graduum 0. 30. 38. 45. 52. 60. 90. quales à Newtono determinantur.

(q) * *Licebit calculum hunc omnem accuratiùs repetere.* Theoriæ Newtoni de fluxu & refluxu maris plurima hic potuissemus adjungere quorum ope calculos accuratiùs repetere licuisset. Verùm materiam exhauriunt elegantissimæ dissertationes quas tom. 3. addidimus. 123

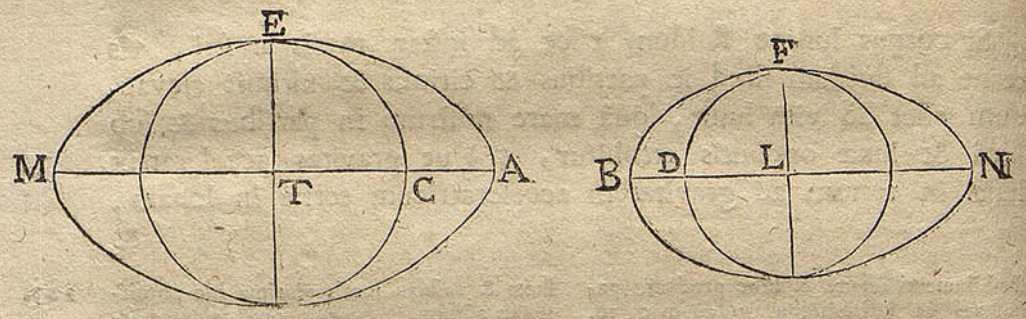


(r) * *Ut gravitas acceleratrix.* Sit T, globus terræ fluido satis profundo E A, coopertus, sitque L, globus Lunæ coopertus fluido F B. Si gravitas acceleratrix Terræ in Lunam æqualis esset gravitati acceleratrici Lunæ in terram, hoc est si æqualis esset materiæ quantitas in Lunâ & in Terrâ, globi duo T, L, sese componerent in figuras sphæroidicas similes quarum axes M A, B N, jacerent in directum

DE MUNDI SYSTEMATE.

& diameter lunæ ad diametrum terræ conjunctim; id est, ut 39,788 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1081 ad 100. Unde cum mare nostrum vi lunæ attollatur ad pedes $8\frac{3}{5}$, fluidum lunare vi terræ attolli deberet ad pedes 93. Eâque de causâ figura lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 186. Talem igitur figuram luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Co-



123. (106). Cum enim omnia hinc inde ponantur æqualia præter ipsam molem, nulla est ratio cur figuræ illæ non sint inter se similes, alteraque in acutiorem sphæroidem definat. Quare in casu præsenti, erit B L ad L F, ut T A ad T E, & vicissim B D ad A C sicut L F ad T E, hoc est, si æqualis esset gravitas acceleratrix terræ in Lunam atque Lunæ in terram, altitudo fluidi Lunaris in partibus proximis & remotissimis suprà globum Lunæ, esset ad altitudinem fluidi terrestris analogam suprà globum terræ ut diameter Lunæ ad diametrum terræ. Rursùs, si terra & Luna æquales habeant diametros, erunt altitudines fluidi suprà globos ut gravitates acceleratrices respective (prop. 74. lib. 1.). Quare si neque gravitas acceleratrix in Lunam æqualis sit gravitati acceleratrici Lunæ in terram, nec diameter Lunæ diametro terræ æqualis, vis terræ ad elevandum fluidum in partibus citimis & ultimis erit ad vim ipsam Lunæ quâ mare nostrum in partibus & sub Lunâ & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in terram ad gravitatem acceleratricem terræ in Lunam & diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim, sive ut massa Lunæ quæ gravitati acceleratrici est proportionalis ad massam terræ quæ itidem gravitati ejus acceleratrici est proportionalis & ut diameter Lunæ ad diametrum terræ conjunctim. De figurâ corporis Lunæ nova quàm plurima atque eximia habentur in dissertationibus de fluxu & refluxu maris.

Corol. (f) Inde vero fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur. In alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ: adeò ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum (ob rationem in prop. XVII allatam) respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

(f) * *Indè verò fit.* Quoniam maxima diameter Lunæ versùs centrum terræ dirigitur (ex dem.) hinc fit ut eadem semper Lunæ facies in terram obvertatur. Positâ autem Sphæroidicâ Lunæ figurâ, inter varias Lunæ partes non dabitur æquilibrium, nisi Sphæroïs Lunæ axem suum telluri obvertat (109); quarè in alio situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium in minimo scilicet axis majoris suprà minorem excessu, essent longè tardissimæ adeò ut non turbetur Lunaris motûs circà axem æquabilitas, ideóque (per not. in prop. 17.) facies illa quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.

124. Clariss. D. De Mairan in elegantissimâ dissertatione de motu diurno telluris circa axem quæ legitur in monum. Paris. an. 1729. exponit admodum ingeniosè prout semper facit, cur eadem Lunæ facies in terram continuò obvertatur, variasque explicat inæqualitates librationis Lunaris in longitudinem. Conjecturam facit Vir Doctissimus homogeneam non esse Lunæ materiam sed hemisphærium inferius superiori gravius supponit; quo posito facile demonstrat Lunam respectu telluris in situ constanti manere. Observat deinde fieri non posse ut constans maneat Lunæ positio, nisi constans quoque sit velocitas fluidi in quo Lunam ipsam deferri assumit. Sed in omni orbitâ ellipticâ vel excentricâ qualis est orbita Lunæ, variabiles sunt hujusce fluidi velocitates, quarè Luna in eodem situ consistere non potest, sed oscillationes quasdam in longitudinem patitur, ex quibus fiet ut modo nobis detegatur aliqua pars hemisphærii quod occultum esse solet, modo autem nobis abscondatur aliqua pars hemisphærii quod solet esse conspicuum, idque magis vel minus contingere debet pro majori vel minori inæqualitate velocitatum fluidi. Hâc ratione explicari poterit cur Lunaris librationis quantitas in longitudinem major aliquando ab Astronomis observatur quam ex prop. 17. lib. hujus, prodire debet. Verùm tota hæc explicatio ad rem nostram & Newtonianum systema accommodabitur, si vorticum loco substituatur attractio, quemadmodum à Clariss. Daniele Bernouillio factum est, cujus eximiam Dissertationem de fluxu & refluxu maris cap. 3. consulat Lector. 124.

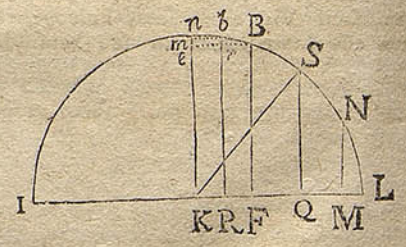
De Mundi Systemate.

LEMMA I.

Si APEPp *terram designet uniformiter densam, centroque* C *& polis* P, p *& æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta à centro solis ad centrum terræ ducta normaliter insistit; & terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ sphæra modo descriptâ altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde à plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia à plano: Dico primò, quod tota particularum omnium in æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in æquatoris puncto* A, *quod à plano* QR *maximè distat, consistentium vim & efficaciam, ad terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

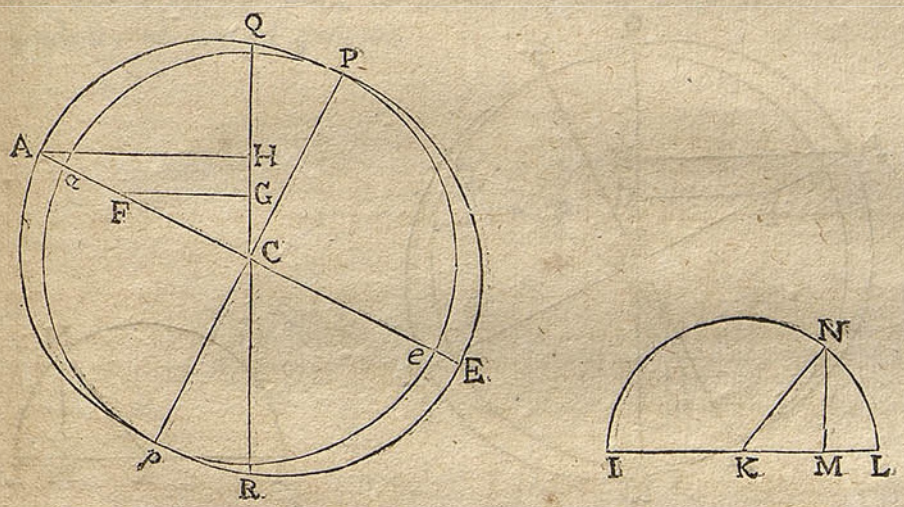
Nam centro *K* diametro *IL* describatur semicirculus *INL*. Dividi intelligatur semicircumferentia *INL* in partes innumeras æquales, & à partibus singulis *N* ad diametrum *IL* demittantur sinus *NM*. Et (t) summa quadratorum ex sinibus omnibus

225. (t) 125. * *Et summa quadratorum.* Divisa intelligatur semi-circumferentia INL, in particulas æquales innumeras nb, NL, NS, bB &c. erectisque sinibus bR, NM, &c. erit sinus bm, seu KR, æqualis sinui NM, & ità de cæteris (prop. 26. lib. 3. elem.). Quarè sinus omnes ut KR, KF, æquales erunt sinibus ut NM, SQ, ac proindè summa quadratorum ex sinibus omnibus NM, æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus KM. Præterea quadratum semi-diametri KN, æquale est quadratis sinuum KM, MN. Quarè (ob summam quadratorum KM,



æqua-

bus NM æqualis erit ſummæ quadratorum ex ſinibus KM, & ſumma utraque æqualis erit ſummæ quadratorum ex totidem ſemidiametris KN; ideoque ſumma quadratorum ex omnibus NM erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN.



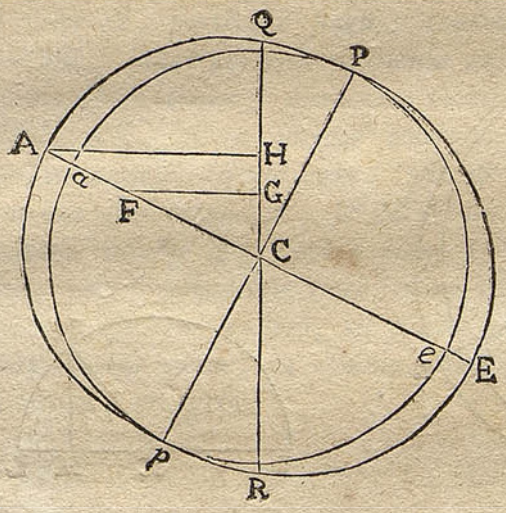
Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & à puncto A perpendiculum AH. Et vis, quâ particula F recedit à plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypotheſin, & hæc vis ducta in diſtantiam CG (u) erit efficacia particulæ F ad terram circum centrum ejus convertendam. Ideoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$,

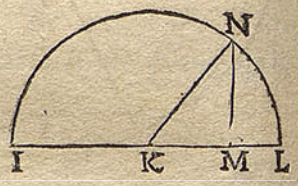
æqualem ſummæ quadratorum NM, ſumma quadratorum ex omnibus ſemidiametris KN, dupla eſt ſummæ quadratorum ex omnibus ſinibus NM, ideòque ſumma quadratorum ex omnibus NM, erit duplo minor quam ſumma quadratorum ex totidem ſemidiametris KN. 125.

(u) * *Erit efficacia.* (47. *lib.* 1.).

De Mundi Systemate.

HC, (x) hoc est, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq, hoc est (per (y) jam demonstrata) ut unum ad duo. *Q. E. D.*





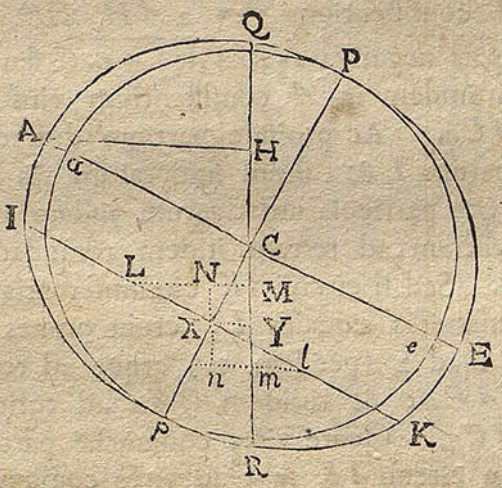
Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter à plano QR, idque æqualiter ab utrâque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli æquatoris, eique inhærentem terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano æquatoris jacentem.

Σ25. (x) * *Hoc est*, ob triangula ACH, FCG, similia. (y) * *Per jam demonstrata.* (150.)

LEM.

LEMMA II.

Iisdem positis: dico secundò quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in æquatoris circulo AE uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.



Sit enim *IK* circulus quilibet minor æquatori *AE* parallelus, sintque *L*, *l* particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum *Pape* sitæ. Et si in planum *QR*, (z) quod radio in solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula *LM*, *lm*: vires totæ, quibus particulæ illæ fugiunt planum *QR*, (a) proportionales erunt perpendiculis illis *LM*, *lm*. Sit

(z) * *Quod radio in Solem ducto.* (Per hyp. Lem. 1.).

(a) * *Proportionales erunt.* (Per hypothes. ejusdem Lem.). 125.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Sit autem recta Ll plano $Pape$ parellela & biſecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parellela ſit plano QR & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. (b) Et particularum L & l vires contrariæ, ad terram in contrarias partes rotandam, ſunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc eſt, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$; ſeu $LN \times MC + NM \times MC$ & (c) $LN \times mC - NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ eſt vis particularum ambarum ſimul ſumptarum ad terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ ſeu (d) $2LN \times NX$ eſt ad particularum duarum ejuſdem magnitudinis in A conſiſtentium vim $2AH \times HC$, (e) ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ ſeu $2XY \times CY$ ad particularum earumdem in A conſiſtentium vim $2AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id eſt, particularum duarum L & l ſimul ſumptarum vis ad terram rotandam eſt ad vim particularum duarum iiſdem æqualium & in loco A conſiſtentium ad terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed ſi circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2 (per lem. 1.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2CXq$ ad $2ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK ſunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2CXq$ ad $2ACq$: & propterea (per lem. 1.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2CXq$ ad ACq.

Jam

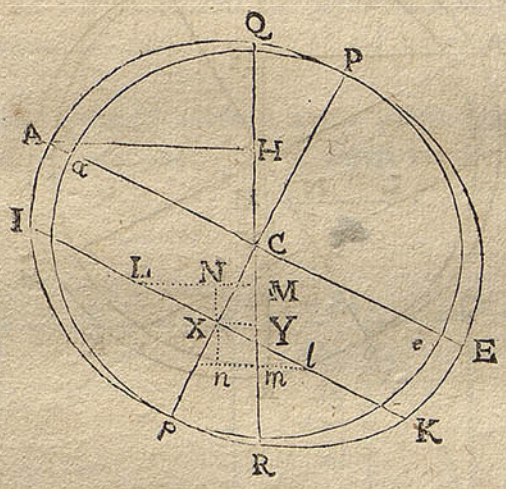
125. (b) * *Et particularum L & l.* (Ex Dem. in Lem. præced.).

(c) * *Et* $LN \times mC - NM \times mC$. Nam ob ſimilitudinem triangulorum LN: NM = ln: nm, ſed eſt NM = nm; quasi LN = ln, ideóque $ln \times mC - nm \times mC = LN \times mC - NM \times mC$ & ob $mC = mM + MC$, erit virium illarum differentia $= LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$.

(d) * *Seu* $2LN \times NX$. Nam, ob ſimilitudinem triangulorum, eſt NX = nX, ideóque Nn ſeu Mm = 2NX, ac proinde $LN \times Mm = 2LN \times NX$.

(e) * *Ut* LXq *ad* ACq. Eſt enim LN: AH = LX: AC & NX: HC = LX: AC, ideóque per compoſitionem rationum $LN \times NX : AH \times HC = LXq : ACq$. Simili argumento patet partem nega-

Jam verò si sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; (f) materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad terram rotandam, erit ut IXq in $IXq-2CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq-2CXq$ ad totidem IXq in ACq, (g) hoc est, ut omnia $ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$ ad totidem $ACq-CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq-4ACq\times CXq+3CXqq$ ad



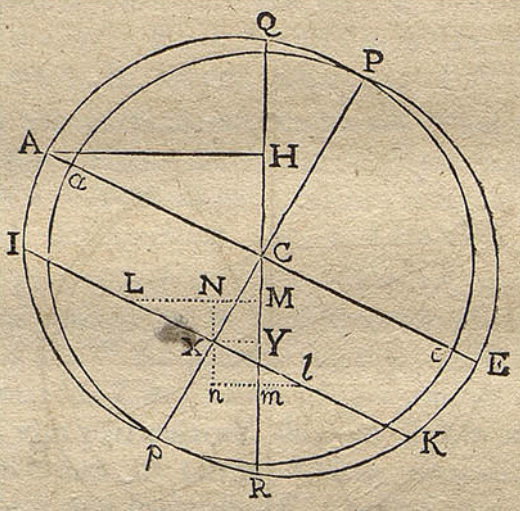
negativam esse ad vim particularum earumdem in A consistentium ut C X q ad A Cq.

(f) * *Materia in perimetro circuli.* Sunt enim zonæ sphæricæ similes ut quadrata radiorum.

(g) *Hoc est, ut omnia* &c. Nam ex centro C, ad punctum I, ducta intelligatur recta C I, erit $IX^2=CI^2-CX^2$, sed est $CI=AC$, quare $IX^2=AC^2-CX^2$, ac proinde IXq in $(IXq-2CXq)=ACq-CXq$ in $ACq-3CXq$. 125.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens, cujus fluxio est $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$, ad totam quantitatem fluentem, cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac (h) proinde per methodum fluxionum, ut $ACqq \times$



$CX - \frac{4}{5} ACq \times CX$ *cub.* $+ \frac{3}{5} CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3} ACq \times CX$ *cub.* id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15} ACqc$ ad $\frac{2}{5} ACqc$. hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

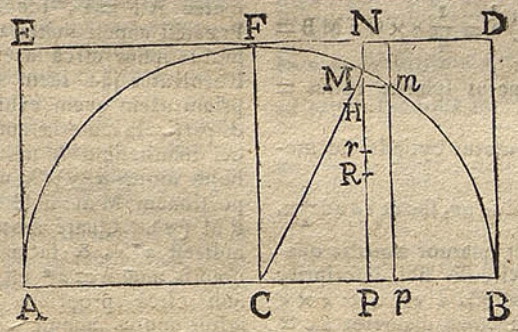
LEM.

125. (h) * *Ac proindè per methodum fluxionum.* Quantitates $ACqq - 4ACq \times CXq + 3CXqq$ & $ACqq - ACq \times CXq$, concipiantur multiplicatæ per fluxionem rectæ CX, sumptisque fluentibus, erit fluens prioris quantitatis $ACqq \times CX - \frac{4}{5} ACq \times CX$ cub. $+ \frac{3}{5} CXq$ cub. fluens autem posterioris quantitatis fiet $ACqq \times CX - \frac{1}{3} ACq \times CX$ cub. & ut habeatur efficacia tota, pro CX scribatur Cp vel AC, erit fluens prior ad posteriorem ut $\frac{4}{15} ACq$. cub. ad $\frac{2}{5} ACq$. cub.

(i) LEMMA III.

Iisdem positis: dico tertiò quod motus terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione, quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 *ad numerum* 1000000.

Est enim motus cylindri circum axem suum immotum revolventis ad motum sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet

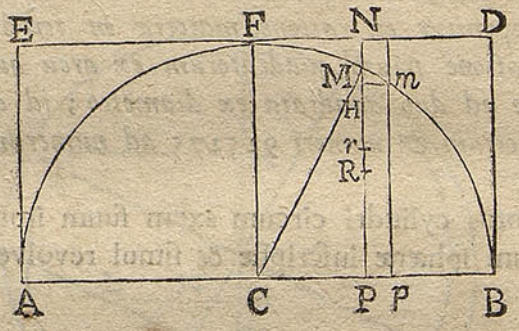


(i) 126. * *Lemma* demonstratur. Revolutione semicirculi AFB, & rectanguli eidem circumscripti AEDB, describantur sphæra & cylindrus circumscriptus. Sit radius CB = 1, peripheria circuli hoc radio descripti = n, abscissa CP = x, ordinata PM = y, quælibet ipsius pars PR = v, Rr = dv; peripheria circuli radio PR, descripti = nv, annulus circularis ex revolutione lineolæ Rr = $nv\,dv$, velocitas puncti R = v, motus annuli prædicti = nv^2dv, motus totius circuli radio PR, descripti = $\frac{1}{3}nv^3$, motus circuli radio PM, descripti = $\frac{1}{3}ny^3$, motus circuli radii PN descripti = $\frac{1}{3}n$, motus cylindri totius = $\frac{2}{3}n$. 126.

Sit Pp = dx motus annuli solidi revolutione figuræ PMmp descripti = $\frac{1}{3}ny^3dx = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}ndx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}nx^2dx \times (1-xx)^{\frac{1}{2}}$. Unde motus solidi revolutione figuræ CFMP, descripti = $\frac{1}{4}n\int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}}$

DE MUNDI SYSTEMATE.

libet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus cylindri ad motum annuli tenuissimi, sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum



$+\frac{1}{12}nx(1-xx)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}n \times CFMB = \frac{1}{32}nn$, adeóque motus sphæræ totiùs $= \frac{1}{16}nn$. Est igitur motus cylindri ad motum sphæræ ut $\frac{2}{3}n$ ad $16nn$, seu ut 16 ad $\frac{3}{2}n$, hoc est, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis; nam quadratum diametri 2 est 4 & $4 \times 4 = 16$, circulus verò cujus diameter 2, & peripheria n, est $\frac{1}{2}n$ & tres hujusmodi circuli sunt $\frac{3}{2}n$.

126.

Materia annuli tenuissimi sphæram & cylindrum ad communem eorum contactum F ambientis sit m, & velocitas erit ut CF, sive ut 1, adeóque motus $= m$, & proinde motus cylindri ad motum annuli illius ut $\frac{2}{3}n$ ad m, sive ut $2n$ ad $3m$, hoc est, ut duplum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; basis enim cylindri est circulus $\frac{1}{2}n$ & altitudo diameter AF $= 2$, ideóque cylindrus $= n$. Prædicti annuli materia sit aan, ideóque motus ipsius circà axem cylindri $= aan$. Revolvatur jam idem annulus circà proprium axem quem exhibeat diameter AB; & particula materiæ annuli respondens arcui infinitesimo Mm, erit $a^2 \times Mm$ & hujus motus $a^2y \times Mm = a^2dx$, ob proportionem Mm : mH $(dx) =$ CM (1) : PM (y). Quarè motus partis FM, annuli est a^2x, & factâ $x = 1$, motus quadrantis annuli $= a^2$ est motus totius annuli circà proprium axem $= 4a^2$. Est igitur motus annuli circà axem cylindri ad ejusdem motum circà axem proprium ut aan, ad $4aa$, seu ut n ad 4, hoc est, ut circumferentia circuli n, ad duplum diametri 4. Quamobrem motus cylindri est ad motum sphæræ

ut - - - - - 16 ad $\frac{3}{2}n$

motus annuli circà axem cylindri est ad motum cylindri ut m ad $\frac{2}{3}n$

& motus annuli circà axem proprium est ad ejus motum circà axem cylindri ut 4 ad n.

Quarè, per compositionem rationum & ex æquo, motus sphæræ circà axem proprium est ad motum annuli ut n^3 ad $64m$.

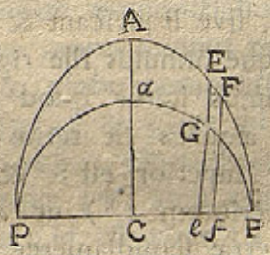
ſum materiæ in cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iſte circum axem cylindri uniformiter continuatus, ad ejuſdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HY-

$64m$. Eſt autem n^3 ad $64m$ ut $\frac{2n}{3} \times \frac{3n^2}{16}$ ad $8 \times m$, ſed $\frac{2n}{3}$, eſt quantitas materiæ in terrâ; m, quantitas materiæ in annulo $\frac{3n^3}{16}$ eſt ſumma trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli AFB, & 8 eſt ſumma duorum quadratorum ex diametro AB. Quare motus terræ totius circum axem jam ante deſcriptum ex motibus particularum omnium compoſitus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem, in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in terrâ ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuſcumque ad duo quadrata ex diametro, id eſt, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000, poſitâ ratione diametri ad peripheriam ut 1 ad 3.141 quamproxime. Q. E. D.

127. Lemma. Semiaxe majori CA & minori CP, deſcribatur ſemiellipſis PAp, atque radio CP, deſcribatur ſemicirculus Pap, circà axem Pp revolvi concipiantur tum ſemicirculus tum ſemiellipſis, erit ſphæra motu ſemicirculi genita ad ſphæroidem ſemiellipſeos revolutione deſcriptam ut Ca^2 ad CA^2. Sit $pe = x$ $Ge = y$, $Cp = r$, $CA = a$, exprimatque $\frac{r}{p}$ rationem radii ad peripheriam, erit $\frac{py}{r}$, peripheria circuli radio Ge deſcripti. Præterea (ex naturâ ellipſeos 248 lib. 1.) $Ca\ (r) : CA\ (a) = Ge\ (y) : Ee$, ideóque $Ee = \frac{ay}{r}$, hinc peripheria circuli radio Ee deſcripti $= \frac{pay}{rr}$, ejuſdemque circuli area $= \frac{pa^2y^2}{2r^3}$; area autem circuli radio Ge deſcripti eſt $\frac{py^2}{2r}$. Quarè fluxio ſphæroidis fit $\frac{pa^2y^2dx}{2r^3}$, & fluxio ſphæræ eſt $\frac{py^2dx}{2r}$. Sed (ex naturâ circuli) $y^2 = 2rx - xx$; hinc fluxio ſphæroidis eſt $\frac{2pa^2rxdx - pa^2x^2dx}{2r^3}$; & fluxio ſphæræ $\frac{2prxdx - pxxdx}{2r}$, ſumptiſque fluentibus, erit fluens prima ad alteram ut $\frac{pa^2rx^2}{r^3} - \frac{pa^2x^3}{6r^3}$ ad $\frac{prx^2}{2r} - \frac{px^3}{6r}$. Jam loco x, ſubſtituatur $2r$, erit ſphærois tota, ad totam ſphæram ut $\frac{4pa^2r^3}{r^3} - \frac{8pa^2r^3}{6r^3}$ ad $\frac{2pr^3}{r} - \frac{8pr^3}{6r}$, hoc eſt, ut a^2, ad r^2, ſivè in ratione duplicatâ CA^2 ad Ca^2. Simili argumento patet ſphæram ellipſeos ſemiaxe majori tanquam radio deſcriptam eſſe ad ellipſoidem in ratione duplicatâ ſemiaxis majoris ad minorem.

127.



De Mundi Systemate.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus terrâ omni reliquâ sublatâ, solus in orbe terræ, motu annuo circa solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum ecliptiæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus punctorum æquinoctialium, sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materiâ rigidâ & firmâ constaret.

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

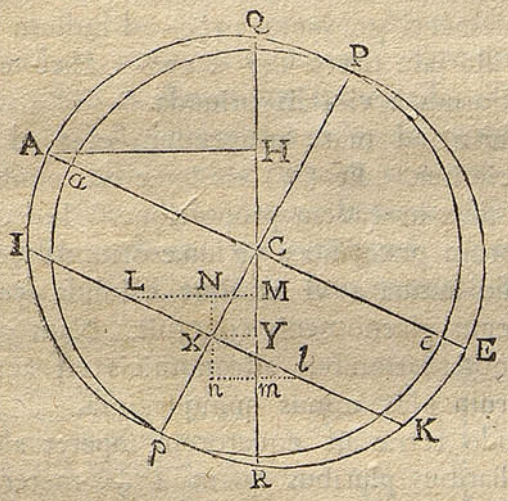
Invenire præcessionem æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius nodorum lunæ in orbe circulari, ubi nodi sunt in quadraturis, erat $16''.\ 35'''.\ 16^{iv}.\ 36^{v}$, & hujus dimidium $8''.\ 17'''.\ 38^{iv}.\ 18^{v}$. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius nodorum in tali orbe; fitque anno toto sidereo $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$. Quoniam igitur nodi lunæ in tali orbe conficerent annuatim $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$. in antecedentia; & si plures essent lunæ, motus nodorum cujusque (per corol. 16. prop. LXVI. lib. 1.) forent ut tempora periodica; si luna spatio diei siderei juxta superficiem terræ revolveretur, motus annuus nodorum foret ad $20^{gr}.\ 11'.\ 46''$ ut dies sidereus horarum 23. 56′ ad tempus periodicum lunæ dierum 27. 7 hor. 43; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio nodorum annuli lunarum terram ambientis; sive lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Papep* superior est; & quoniam globus iste ad terram illam superiorem (k) ut *aC qu.* ad *AC qu.* − *aC qu.* id est (cum terræ semidiameter minor *PC* vel *aC* sit ad semidiametrum majorem *AC* ut 229 ad 230) ut 52441 ad 459; si annulus iste terram secundùm æquatorem cingeret & uterque simul

127. (k) * *Ut aC qu. ad AC qu* − *aC qu.* Globus iste est ad terram totam ut aC^2, ad AC^2 (Lem. præc.) ideóque annulus materiæ inter globum & terram interceptus, hoc est, excessus materiæ in terrâ suprà materiam in globo est ut $AC\,qu. - aC\,qu.$

mul circa diametrum annuli revolveretur, motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus lem. III.) ut 459 ad 52441 & 100000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223, ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum, quo ipsius nodi seu puncta æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: (l) motus qui



restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum æquinoctialium diminuetur in eâdem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi ad motum $20^{gr.}\ 11'.\ 46''.$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus nodi lunarum (ut supra explicui) atque (m) ideo quibus puncta æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT in fig. pag.* 411. & 413.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano QR, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem in morem figuræ $PapAPepE$ ad superiorem

(l) * *Motus qui restabit in annulo.* (52. lib. 1.).

(m) * *Atquè ideò.* (vid. not. 101. lib. hujus). 117.

illam terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad terram circa quamvis æquatoris diametrum rotandam, atque ideo ad movenda puncta æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus æquinoctiorum regressus jam esset ad $20^{s}.\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv}$.

Cæterum hic motus (n) ob inclinationem æquatoris ad planum eclipticæ minuendus, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$.) ad radium 100000. Quâ ratione motus iste jam fiet $9'.\ 7''.\ 20^{iv}$. Hæc est annua præcessio æquinoctiorum à vi solis oriunda.

Vis autem lunæ ad mare movendum erat ad vim solis, ut 4,4815 ad 1 circiter. Et (o) vis lunæ ad æquinoctia movenda est ad vim solis in eâdem proportione. Indeque prodit annua æquinoctiorum præcessio à vi lunæ oriunda $40''.\ 52'''.\ 52^{iv}$, ac tota præcessio annua à vi utrâque oriunda $50''.\ 00'''.\ 12^{iv}$. Et hic motus cum phænomenis congruit. Nam præcessio æquinoctiorum ex observationibus astronomicis est annuatim minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si (p) altitudo terræ ad æquatorem superet altitudinem ejus ad polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{2}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & præcessio æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

Des-

127. (n) * *Ob inclinationem.* Pro majori vel minori inclinatione plani æquatoris ad planum Ecclipticæ minorem esse vel majorem regressum æquinoctiorum patet ex not. 101. lib. hujus. Illud autem decrementum obtinetur, si minuatur motus in ratione sinûs complementi inclinationis ad radium. Sed planum æquatoris inclinatur ad planum Ecclipticæ gradibus $23\frac{1}{2}$ circiter, quare cum motus æquinoctiorum sit tardissimus, satis accurate minuitur motus ille in ratione sinûs 91706. qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$ ad radium 100000.

(o) * *Et vis Lunæ.* (Cor. 18. 19. Lib. I.).

(p) * *Si altitudo terræ.* Quò enim altior erit materia ad æquatorem eò levior sit oportet ut materiam quæ est versus polos in æquilibrio possit sustinere. Cæterum quia in tribus non satis Laudandis Dissertationibus tom. 3. adjunctis, nova occurrunt quamplurima de figurâ telluris, de viribus Solis & Lunæ, præcessionem æquinoctiorum, eâdem quâ hactenus factum est, methodo, accuratiùs licebit computare.

Deſcripſimus jam ſyſtema ſolis, terræ, lunæ, & planetarum: ſupereſt ut de cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA IV.

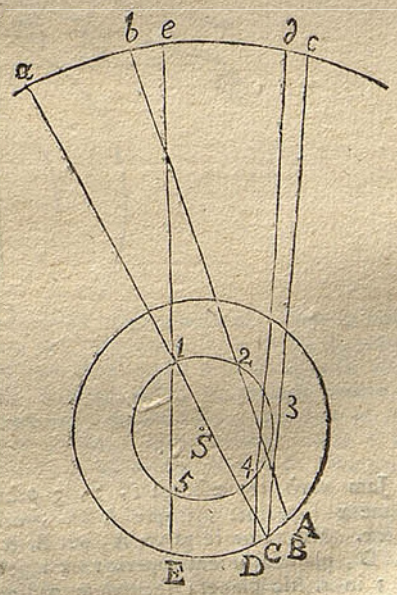
Cometas eſſe lunâ ſuperiores & in regione planetarum verſari.

(q) Ut defectus parallaxeos diurnæ extulit cometas ſupra regiones ſublunares, ſic (r) ex parallaxi annuâ convincitur eorum deſcenſus in regiones planetarum. Nam cometæ, qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum, ſunt omnes ſub exitu apparitionis aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi terra eſt inter ipſos & ſolem; at juſto celeriores ſi terra vergit ad oppoſitionem. Et contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi terra verſatur inter ipſos & ſolem; & juſto tardiores vel retrogradi, ſi terra ſita eſt ad contrarias partes. (f) Contingit hoc maximè ex motu terræ

(q) * *Ut defectus parallaxeos diurnæ.* Parallaxis diurna cometæ eſt differentia locorum in quibus cometa ex centro terræ, vel ex eo ſuperficiei terræ loco ad quem cometa verticalis eſt & ex quovis alio loco ſuperficiei terræ obſervatus, inter ſtellas fixas refertur. Hæc parallaxis diurna, maxima eſt in Lunâ, ubi ea in horizonte conſtituitur, inde verò magis magiſque decreſcit quò altius Luna ſuprà horizontem elevatur. Quia verò hæc parallaxis non obſervatur in cometis, patet eos eſſe Lunâ ſuperiores (30.).

(r) * *Sic ex parrallaxi annuâ.* Parallaxis annua ex motu circà ſolem oritur, hæcque reſpicit longitudinem cometæ, hoc eſt, diſtantiam ejus in Eccliptică à primo arietis puncto. Quomodò ex hâc parallaxi Newtonus colligat cometas deſcendere in regiones planetarum explicabitur in decurſu.

(f) 128. * *Contingit hoc maximè.* Sit S, Sol A B E, orbita telluris & a b c, ſphæra fixarum ad quam Planetæ referantur, exhibeatque 1, 2, 3, 4, Planetæ alicujus inferioris orbitam. Moveatur terra ex A, per B, in C, & intereà Planeta ex 1, per 2, in 3, hic Planeta ex a, per b, in c, ſecundum ordinem ſignorum progredi videbitur. At ſi terra moveatur ex

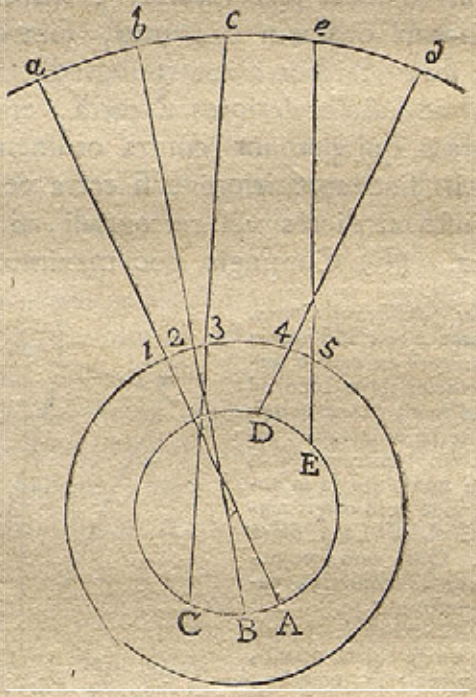


128.

C, per D, in E & planeta ex 3, per 4 in 5, idem planeta per d, in e, retrogredi videbitur.

DE MUNDI SYSTEMATE.

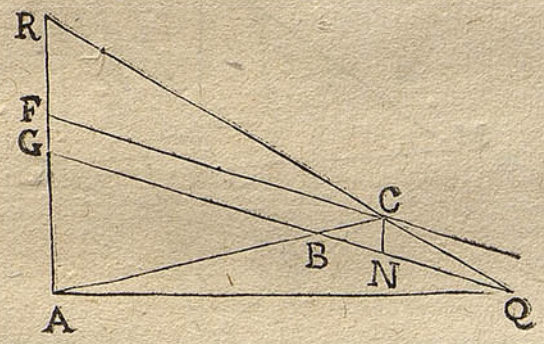
in vario ipsius situ, perinde ut fit in planetis, qui pro motu terræ vel conspirante vel contrario nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs. Si terra pergit ad eandem partem cum cometa, & motu angulari circa solem tantò celeriùs fertur, ut recta per terram & cometam perpetuo ducta



128. Jam verò repræsentet 1, 2, 3 orbem planetæ superioris, sitque ABC, orbis terræ. Moveatur terra ex A, per B, & C in D, planeta autem superior ex 1 per 2 & 3 in 4, hic planeta secundum ordinem signorum progredi videbitur. At si terra moveatur ex D in E, planeta verò ex 4 in 5, idem planeta ex loco d in e, retrogredi apparebit. Quia verò planetæ modò in consequentia, modò in antecedentia ferri videntur, necessum est ut modò tardiores, modò celeriores appareant, atque in ipso veluti motuum æquilibrio, neque in consequentia neque in antecedentia sensibiliter pergant sed quasi stationarii videantur. Hæc itaque planetarum phænomena ex motu terræ maximè contingunt, oriri tamen possunt etiam aliquantulum ex inæquali planetarum motu.

SCD LYON 1

ducta convergat ad partes ultra cometam, cometa è terrâ spectatus ob motum suum tardiorem apparet esse retrogradus; sin terra tardius fertur, motus cometæ (detracto motu terræ) fit saltem tardior. At si terra pergit in contrarias partes, cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione



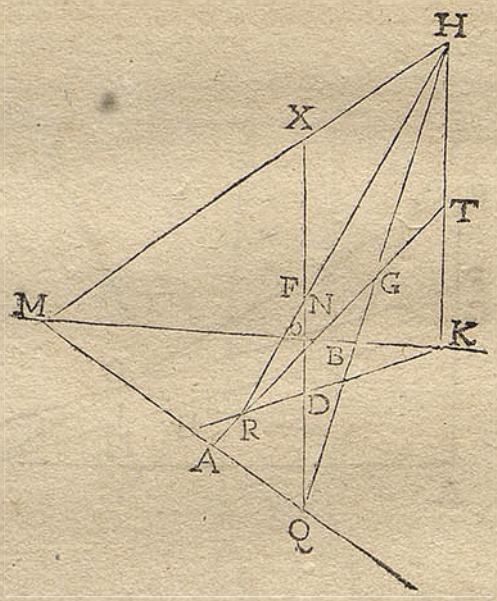
129. Lemma. Datis positione tribus rectis QA, QB, QC, ex eodem puncto Q, ductis & in eodem plano jacentibus, ducere rectam AC, ex puncto quolibet A, ità ut partes AB, CB, sint in datâ ratione m, ad n.

Ex A ducatur utcum que recta AR, rectis QC, QB, productis occurrens in G, R, capianturque GF, AG, in datâ ratione m ad n (prop. 12. lib. 6. elem.). Per F, agatur FC parallela rectæ GQ, ipsique QR occurrens in C, erit juncta AC, recta quæsita. Nam ob parallelas FC, GQ, est AB: BC = AG: GF, sed (per constr.) GF, AG, sunt in datâ ratione m ad n. Quarè eandem inter se rationem habent partes interceptæ AB, BC.

Idem fit trigonometricè. Nam in triangulo AQG, datur latus AG, & præterea noti sunt anguli AQG, QAG, ideóque dabitur AG, ac proinde innotescit etiam GF, datam habens rationem ad AG (per constr.) quare dabitur recta CN, æqualis & parallela rectæ GF. Rursus in triangulo QNC, cognitis angulo CQN, & angulo CNQ, qui æqualis est angulo FGN, hoc est, anguli priùs inventi ACQ, complemento ad duos rectos, atque insuper dato latere CN, innotescet CQ, tandem in triangulo ACQ, datis lateribus QA, QC, & angulo intercepto AQC, invenientur latus CA atque anguli QAC, QCA, id est, magnitudo & positio rectæ AC. 129.

DE MUNDI SYSTEMATE.

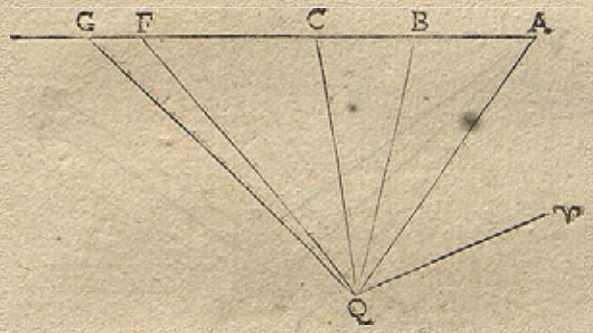
tione vel motu retrogrado distantia cometæ in hunc modum colligitur. Sunto $\curlyvee QA$, $\curlyvee QB$, $\curlyvee QC$ observatæ tres longitudines cometæ sub initio motus, sitque $\curlyvee QF$ longitudo ultimò obser-



130. 130. Lemma. Datis positione quatuor rectis QA, QB, RB, RD, in eodem plano jacentibus ducere rectam MK, ità ut MO, sit ad ON ut m ad n, & ON ad NK ut n ad r. Capiatur BG, ad BA, sicut $n+r$ ad m. Item capiatur FB ad BD ut $m+n$ ad r. Junctæ rectæ QG, RF, producantur donec concurrant. Per punctum concursus H, ducatur HK parallela rectæ BD, itemque HM, parallela rectæ RB, erit MK recta quæsita. Nam propter parallelas HM, TN (per constr.) erit KN ad NM, ut KT ad TH. Sed quia HK parallela est rectæ FD, KT est ad TH ut DB ad BF, hoc est, (per constr.) ut r ad $m+n$, ac proinde KN est ad NM ut r ad $m+n$. Rursus ob parallelas HK, OX, erit MO ad OK ut MX ad XH, sed quia HM, parallela est rectæ AG, erit MX ad XH ut AB ad BG, id est, (per constr.) ut m ad $n+r$. Est igitur MO ad OK ut r ad $m+n$. Quare, dividendo & ex æquo, tres rectæ MO, ON, NK, sunt in eâdem ratione cum tribus quantitatibus m, n, r. Idem fit trigonometricè. Nam rectarum quatuor datarum QA, QB, RB, RD, dantur intersectiones omnes ac proindè rectæ QB, DB, RB, BA, RD, sunt magnitudine datæ. Præterea dantur etiam BF & BG, utpote habentes datam rationem ad BD & RA. Jam verò in triangulo RBF, datis lateribus BR, BF, cum angulo intercepto RBF, dantur latus RF & angulus RFB ac proindè etiam datur angulus QFH.

Simi-

observata, ubi cometa videri desinit. (a) Agatur recta ABC, cujus partes AB, BC rectis QA & QB, QB & QC interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur AC ad G, ut sit AG ad AB ut tempus inter observationem primam & ultimam ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur QG. Et si cometa moveretur uniformiter in lineâ rectâ, atque terra vel quiesceret, LIBER TERTIUS. PROP. XXXIX. PROB. XX.



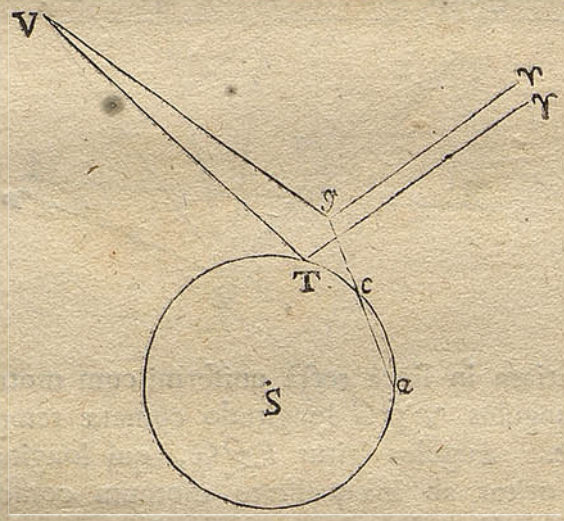
ceret, vel etiam in lineâ rectâ uniformi cum motu progrederetur; foret angulus $\curlyvee QG$ longitudo cometæ tempore observationis ultimæ. Angulus igitur FQG, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum cometæ ac terræ. Hic autem angulus, si terra & cometa in contrarias partes moventur, additur angulo $\curlyvee QG$, & sic motum apparentem cometæ

Similiter in triangulo QBG, datis lateribus QB, BG, & angulo QBG, dabitur angulus BQG; quare in triangulo QFH, datis duobus angulis QFH, FQH, cum latere QF, quod est summa vel differentia rectarum datarum QB, QF innotescet latus QH. Tandem in triangulo QHM, dato angulo HQM qui est summa vel differentia notorum angulorum BQA, HQB, datoque angulo QMH qui æqualis est angulo dato QAB, simulque noto latere QH, innotescent latera HM, QM. Simili prorsus modo invenientur latera RK, HK, in triangulo RKH. Igitur in triangulo MHK, notis lateribus HM, HK, & angulo intercepto MHK, qui æqualis est angulo dato ABQ, innotescent anguli HMK, HKM & basis MK. Datis autem angulis HMQ, HMK, dabitur horum summa vel differentia QMK, hoc est, positio rectæ MK, ob rectam QM, positione datam. Simili modo rectæ QO, RN, RK & anguli quos MK cum his rectis efficit, trigonometrice inveniuntur. 130.

(a) * *Agatur recta ABC.* (129).

De Mundi Systemate.

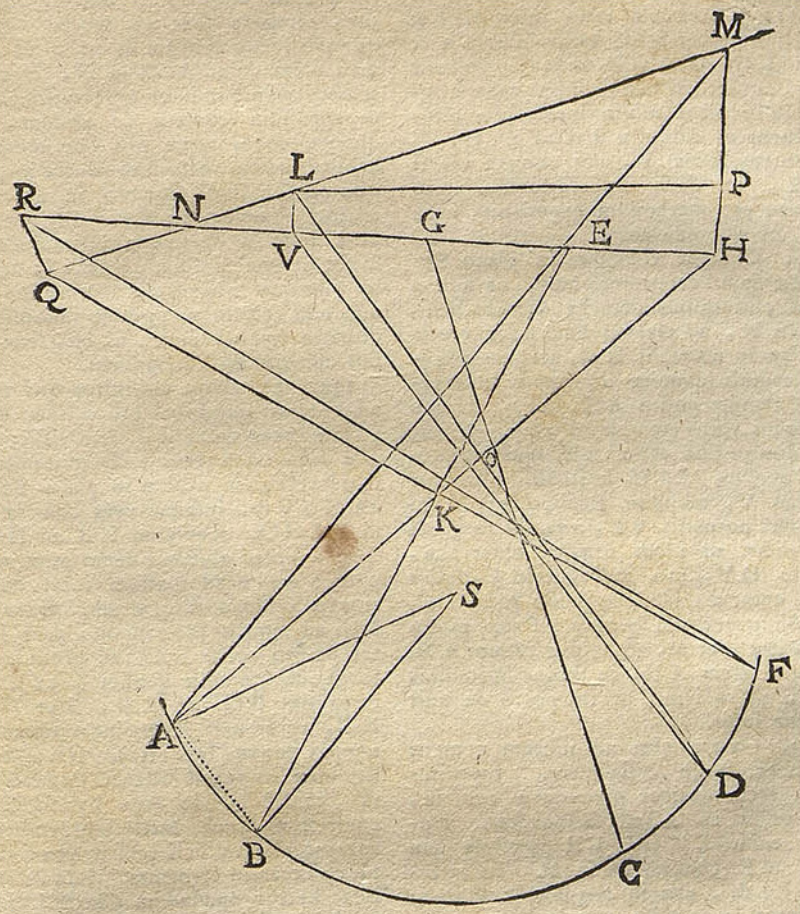
metæ velociorem reddit: ſin cometa pergit in eaſdem partes cum terrâ, eidem ſubducitur, motumque cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti (b) modo expoſui. Oritur igitur hic angulus præcipuè ex motu terræ, & ideirco pro parallaxi cometæ meritò habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero cometæ ex hâc parallaxi ſic colligitur. Deſignet S ſolem, acT orbem magnum, a locum terræ in obſervatione primâ, c locum



terræ in obſervatione tertiâ, T locum terræ in obſervatione ultimâ, & $T\curlyvee$ lineam rectam verſus principium arietis ductam. Sumatur angulus $\curlyvee TV$ æqualis angulo $\curlyvee QF$, hoc eſt, æqualis longitudini cometæ ubi terra verſatur in T. Jungatur ac, & producatur ea ad g, ut ſit ag ad ac ut AG ad AC, & erit g locus quem terra tempore obſervationis ultimæ, motu in rectâ ac uniformiter continuato, attingeret. Ideoque ſi ducatur $g\curlyvee$ ipſi $T\curlyvee$ parallela, & capiatur angulus $\curlyvee gV$ angulo $\curlyvee QG$

130. (b) * Uti modò expoſui. (128).

νQG æqualis, erit hic angulus νgV æqualis longitudini cometæ è loco g ſpectati; & angulus TVg parallaxis erit, quæ oritur à tranſlatione terræ de loco g in locum T: ac proinde V locus erit cometæ in plano eclipticæ. Hic (c) autem locus V orbe *Jovis* inferior eſſe ſolet. Idem



(c) 131. * *Hic autem locus V.* Recta HV, referat veſtigium cometæ in plano Eccliptiæ, ſintque V, G, E, H, quatuor cometæ loca in plano Eccliptiæ præcedenti methodo inventa. Sit S, ſol, ABCD, orbis magnus, ſintque A, B, C, D, quatuor terræ loca ad tempora obſervationum nota. In triangulo ASB, dantur latera SA, SB, daturque angulus ASB; differentia ſcilicet locorum terræ è ſole viſorum; quarè dabuntur anguli SAB, SBA, notaque erit in partibus ſemidiametri orbis magni recta AB, chorda nempè arcûs à tellure interim percurſi. Rurſus in triangulo KAB dantur omnes anguli, nam datur angulus KAB, qui eſt ſum- 131.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ cometarum. (d) Pergunt hæc

132. summa vel differentia notorum angulorum SBA, SBK. Quarè datur ratio laterum AK, AB, sed data est ratio rectarum SA, AB, dabitur itaque ratio SA ad KA. At (131.) nota est ratio inter KO & KH, innotescet igitur ratio inter SA & KH, Quarè datur AH, distantia cometæ à terrâ in partibus semidiametri orbis magni. Simili planè modo invenientur aliorum locorum distantiæ à terrâ E, G, V, hic autem locus V, ubi cometa videri desinit, ex datis observationibus inito computo per methodum expositam, orbe Jovis inferior esse solet.

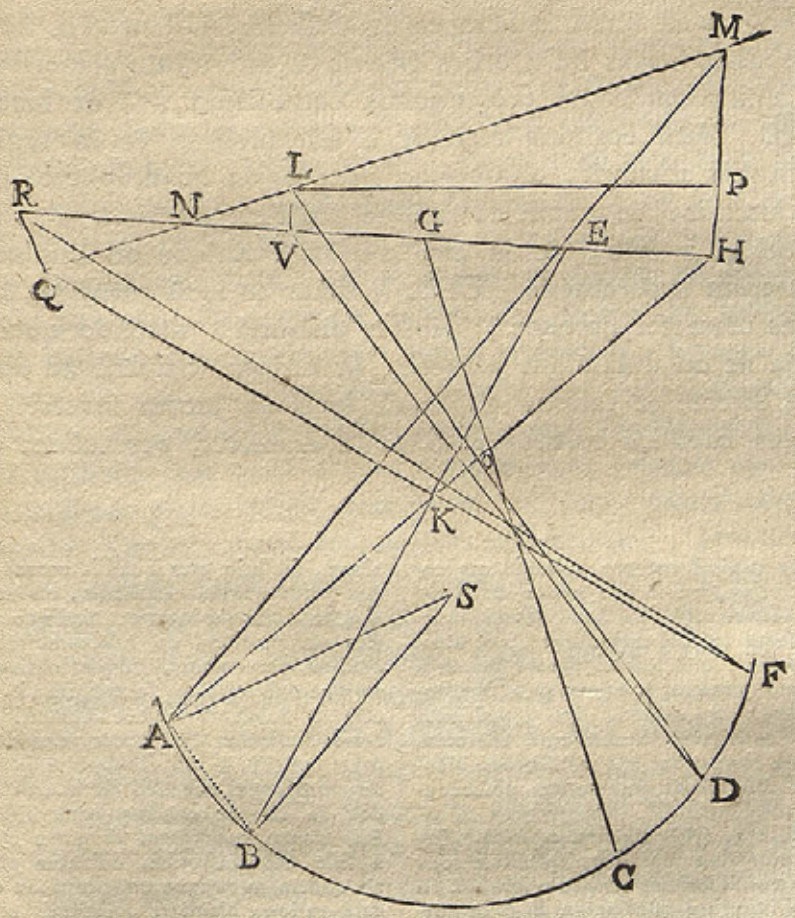
132. Cometæ vestigium in plano Ecclipticæ jam determinavimus, ut autem veram obtineamus cometæ trajectoriam, ex loco H, ad planum Ecclipticæ erecta intelligatur normalis HM, tangens anguli latitudinis cometæ ad datum observationis tempus posito AH, radio, eritque M, locus verus cometæ ad tempus datum; Est enim positio rectæ AH, ejus longitudo & angulus MAH, latitudo. Similiter in loco V, ad idem Ecclipticæ planum erigatur normalis VL, æqualis tangenti latitudinis ad idem tempus observatæ, sumpto DV, pro radio, erit L, locus verus cometæ, ideóque juncta recta LM, est ipsa trajectoria quæsita. Patet autem distantiam loci M, ab A, sive rectam AM, esse ad rectam AH, ut secans latitudinis in H, ad radium, & ità porrò de aliis cometæ locis.

133. Cætera quæ ad motum cometæ pertinent facilè definientur. Invenitur LM, recta scilicet percursa à cometa, dum tellus ab A ad D movetur. Ducatur enim LP ipsi VH parallela cum rectâ ME concurrens in P. In triangulo PLM, præter angulum rectum in P, datur latus LP, æquale lateri VH, atque etiam datur latus PM, æquale differentiæ rectarum datarum MH, LV, quarè dabitur LM. Producatur ML, donec cum HV, concurrat in N, erit N nodus. Præterea NV erit ad VL, ut VH ad PM, itemque LN ad LV ut LM ad MP, & ideò dabuntur LN, LV, capiatur tempus quod sit ad tempus inter observationem in M, & observationem in L, ut NL ad LM, habebitur tempus inter observationem in L, & appulsum cometæ ad nodum, cum enim cometa in linea rectâ uniformiter moveri supponatur, tempora sunt ut spatia. Dabitur quoque locus cometæ in nodo versantis, cum enim detur punctum N, & propter tempus cognitum inter observationem in L, & appulsum cometæ ad nodum, detur quoque locus terræ pro hoc momento, dabitur positio rectæ hæc puncta jungentis, hoc est longitudo cometæ in nodo existentis. Tandem ob datam distantiam nodi à loco V datamque latitudinem cometæ in eodem loco, dantur in triangulo sphærico rectangulo latera duo circà angulum rectum ac proinde innotescit inclinatio hypothenusæ, id est, semitæ ipsius cometæ ad Ecclipticam.

134. Ex dictis colligitur quâ ratione ad tempus quodlibet propositum definiri possint locus cometæ è terrâ visus, illiusque distantia à terrâ. Determinentur ut suprà vestigium orbitæ in plano Ecclipticæ HEVR, ipsaque vera cometæ orbita MLNQ. Capiatur HR ad HV, ut spatium inter observationem primam tempusque datum ad spatium inter observationem primam & quartam. Dato terræ loco ad tempus propositum, putà F, datur positio rectæ FR, ac proinde datur longitudo cometæ quæsita (132.). Præterea fiat RQ ad RN, sicut MH ad HN, patet dari latitudinem cometæ ad tempus datum (loc. cit.). His autem datis, obtineri potest distantia cometæ à terrâ (ibid.) in hâc ergò hypothesi quod cometæ in lineis rectis uniformiter moveantur, determinari possint præcipua motûs cometarum elementa. Hâc de re consulat Lector opusculum Clariss. Viri Dominici Cassini de cometâ an 1664., Davidis Gregorii Astronomiam Physicam & Cassini filii Theoriam cometarum in monumentis Paris. an 1727.

(d) * *Pergunt hæc corpora.* Est & alia parallaxis proveniens ex motu terræ circà Solem. Hæc latitudinem cometarum respicit, hoc est, distantiam eorum ab Ecclipticâ versus Boream aut austrum, undè fit ut cometæ in sphærâ fixarum à cursu

hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum



circulari deflectere & lineam admodum irregularem videantur describere. Cum enim planum in quo cometa movetur, cum plano Ecclipticæ in quo terra fertur, non coincidat, cometa modò suprà Ecclipticam in Septentrionem ascendit, modò infrà Ecclipticam in austrum descendit. Quia tamen in eodem plano semper incedit, orbem circularem, tellure quiescente, videretur describere, sed quoniam tellus ipsa movetur in plano Ecclipticæ, cometa pro diversis terræ locis observatus, modò versùs Boream altius ascendere, modò versùs austrum inferius descendere apparebit. Observationibus compertum est cometas propemodum in

1340

DE MUNDI SYSTEMATE.

totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maximè ex parallaxi, propterea quod respondet motui terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes cometas satis longe infra jovem. Unde consequens est quod in perigæis & periheliis, ubi propiùs adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas cometarum (e) ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicatâ ratione distantiæ: in duplicatâ ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à sole, & in aliâ duplicatâ ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam planetæ, in ratione diametri ad diametrum directè & ratione duplicatâ lucis ad lucem inversè. Sic minima capillitii cometæ anni 1682 diameter, per tubum opticum

cum

335. circulis maximis pergere, quandiu moventur celerius, at in fine cursûs deflectere solent ab his circulis; hæc autem deflexio pendet ex ipsâ trajectoriæ cometarum curvaturâ de quâ infrà. Quarè deinceps trademus normam computi quo Newtonus disparentes cometas satis longe infrà Jovem collocavit, nonnullaque afferemus exempla cometarum qui infrà orbes Martis & inferiorum planetarum descenderunt.

(e) 135. (*) *Ex Luce capitum.* Intelligantur duæ superficies sphæricæ concentricæ, minor una, major altera, & in centro utriusque constitutum fingatur corpus aliquod lucidum. Quoniam corpus illud radios suos per omnem circuitum diffundit, evidens est eandem radiorum quantitatem in concavâ superficie utriusque sphæræ contineri, ideóque densitates radiorum erunt in ratione superficierum sphæricarum inverse, hoc est, in ratione duplicatâ semidiametrorum sive distantiarum à corpore lucido inverse (14. lib. 1.). Quarè nullâ distantiarum habitâ ratione, sensatio quæ à radiis nervos opticos percutientibus excitatur, est ut quadratum distantiæ inversè. Sed quò remotius est lucidum, eo pauciores radii ad oculum perveniunt, idque in duplicatâ ratione distantiarum (loco suprà cit.) hoc est, in duplicatâ ratione diametri apparentis diminutæ. Quare, componendo, corporis cœlestis à sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in ratione quadruplicatâ distantiæ. Erit itaque quadratum distantiæ cometæ à sole ad quadratum distantiæ planetæ ab eodem in ratione compositâ ex duplicatâ ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione lucis planetæ ad lucem cometæ. Unde distantia cometæ à Sole est ad distantiam planetæ ab eodem in ratione compositâ ex ratione diametri apparentis cometæ ad diametrum apparentem planetæ & ratione subduplicatâ Lucis planetæ ad Lucem cometæ.

SCD LYON 1

cum sexdecim pedum à *Flamstedio* observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″; nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, ideoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, idcoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia cometæ ad distantiam saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inversè, & 12″ ad 30″ directè, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus cometa anni 1665 mense aprili, ut auctor est *Hevelius*, claritate suâ pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum saturnum ratione coloris videlicet longè vividioris. Quippe lucidior erat hic cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum planetis ope tubi optici collatus plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porrò cum diameter capillitii cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter verò nuclei, seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet stellas hasce ut plurimùm ejusdem esse apparentis magnitudinis cum planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non rarò conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est, quod cometæ omnes in perihelis vel infrà Saturnum collocandi sint, vel non longè suprà. Errant igitur toto cœlo, qui cometas in regionem fixarum prope ablegant: quâ certe ratione non magis illustrari deberent à Sole nostro, quam planetæ, qui hic sunt, illustrantur à stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem cometarum per fumum illum maximè copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtusè semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tantò pro-

DE MUNDI SYSTEMATE.

pius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexæ planetas æmuletur. Inde veriſimile fit cometas longè infra ſphæram Saturni deſcendere, uti ex parallaxi probavimus. Idem verò quam maximè confirmatur ex caudis. (f) Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia cometarum, ne fumus à capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur ſi concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra diſcum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, (g) Jovem ipſum ſplendore ſuo multùm ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multò magis illuſtrabitur à ſole, ideoque erit ſoli multò propior. Quinetiam capita ſub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam venerem ne dicam veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem

1135. (f) * *Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi*, ut poſteà probabitur.

(g) * *Jovem ipſum ſplendore ſuo.* Id variis obſervationibus confirmat Newtonus in opuſculo de mundi ſyſtemate. Cometa anni 1679. Decembris 12. & 15. ſtilo veteri, quo tempore caudam clariſſimam emittebat & Luci multorum Jovium per tantum ſpatium diffuſæ ac dilatatæ non imparem, magnitudine nuclei, ut obſervabat *Hamſtedius*, cedebat Jovi, adeóque Soli longe vicinior, quin imò minor erat Mercurio. Nam die 17ª. menſis hujus, ubi terræ propior erat, apparuit Caſſino per teleſcopium Ped. 35. paulò minor globo Saturni. Die 8ª. menſis hujus, tempore matutino, vidit Halleius caudam perbrevem & latam & quaſi ex corpore ſolis jamjam orituri exeuntem, ad inſtar nubis inſolito more fulgentis, nec priùs diſparentem quam ſol ipſe inciperet ſuprà horizontem conſpici. Superabat igitur hic ſplendor Lucem nubium uſque ad ortum ſolis, & immediato ſolis ſplendori ſolum cedendo, vincebat longe lucem omnium ſtellarum conjunctim. Non Mercurius, non Venus, non ipſa Luna in tantâ ſolis orientis vicinitate cerni ſolet. Fingamus lucem hancce dilatatam coarctari & in orbem nuclei cometici Mercurio minorem coarctari & ſplendore longe fortiori jam reddita magis conſpicua, Mercurium longè ſuperabit, adeóque erit ſoli vicinior. Diebus 12. & 15. ejuſdem menſis, cauda hæc per ſpatium longe majus diffuſa apparuit rarior, & luce tamen adeò forti ut ſtellis fixis vixdum apparentibus cerneretur & mox trabis mirum in modum fulgentis ſpeciem exhibuit.

SCD LYON 1

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu cometarum à terrâ solem versùs, ac decrescente in eorum recessu à sole versus terram. Sic enim cometa posterior anni 1665. (observante *Hevelio*) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de motu suo apparente, ideoque præterierat perigæum; splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum cometa radiis solaribus obtectus desiit apparere. Cometa anni 1683 (observante eodem *Hevelio*) in fine mensis Julii, ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuò augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore cometa ad terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum $6'. 5''$ inclusa coma, at *Sept* 2. esse $9'. 7''$. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in viciniâ solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius à sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad terram. Cometa anni 1618. circa medium mensis *Decembris*, & iste anni 1680. circa finem ejusdem mensis, celerrimè movebantur, ideoque tunc erant in perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate solis. Caput cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & à *Flamstedio* observatum est caput cometæ posterioris in distantia novem graduum à sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore nubium juxta solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissimè

motus

DE MUNDI SYSTEMATE.

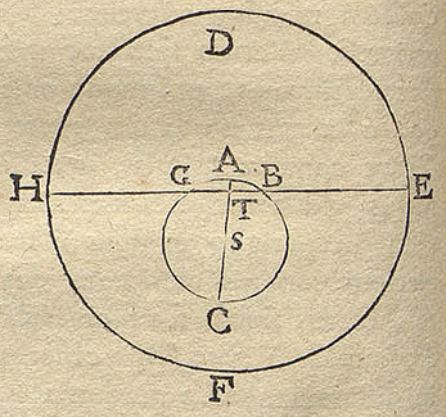
motus, inque perigæo propemodum existens, cedebat ori pegasi, stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut stella quartæ, *Jan.* 9. ut stella quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à terrâ distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga solis maximè splenduêre, ex altera perigæi parte evanuêre. Igitur ex magnâ lucis in utroque situ differentia, concluditur magna solis & cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissimè moventur, atque ideo sunt in perigæis; nisi quâtenus ea major est in vicinia solis.

Corol. 1. Splendent igitur cometæ (h) luce solis à se reflexâ.

Corol. 2. (i) Ex dictis etiam intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem solis. Si cernerentur in regionibus longè

135. (h) * *Luce Solis à se reflexâ.* Nam à terrâ recedentibus cometis & ad solem accedentibus, augetur eorum splendor, decrescente licet diametro, ut ex præcedentibus observationibus patet.

(i) * *Ex dictis etiam intelligitur.* Referat S solem, T, terram, circulus DEFH, sphæram fixarum. Quoniam cometæ splendent luce solis à se reflexâ, (cor. 1.), ii non videbuntur, nisi à sole ità illustrentur ut oculi nostri hâc luce moveri possint. Præterea cometæ per caudas suas maximè fiunt conspicui, has autem caudas non emittunt priusquam ad solem aliquantulum incaluerint, quare patet cometas sese conspicuos non præbere nisi ad definitam quandam à sole distantiam accedant. Ponatur itaque sphæra ABCG, soli concentrica ad talem distantiam descripta ut nullus cometa propter illustrationis defectum, detegi possit, priusquam ad sphæræ hujus superficiem pervenerit, juncta recta ST, producatur utrinque donec superficiei huic occurrat in A, & C. Per T, ductum intelligatur planum HE, cui normalis est recta AC, planum illud sphæram dividet in duo hemispheria quorum unum HFE, est versus solem, alterum verò HDE, soli opponitur. Cometæ omnes in sphæ-



ræ segmento BCG, existentes, videbuntur in hemisphærio versus solem, omnes autem qui versantur in segmento BAG videbuntur in hemisphærio quod soli opponitur.

longè ultra ſaturnum, deberent ſæpiùs apparere in partibus ſoli oppoſitis Forent enim terræ viciniores, qui in his partibus verſarentur; & ſol interpoſitus obſcuraret cæteros. Verum percurrendo hiſtorias cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti ſunt in hemiſphærio ſolem verſus, quam in hemiſphærio oppoſito, præter alios proculdubio non paucos, quos lux ſolaris obtexit. Nimirum in deſcenſu ad regiones noſtras neque caudas emittunt, neque adeo illuſtrantur à ſole, ut nudis oculis ſe prius detegendos exhibeant, quam ſint ipſo jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa ſolem deſcripti pars longè major ſita eſt à latere terræ, quod ſolem reſpicit; inque parte illâ majore cometæ, ſoli ut plurimum viciniores, magis illuminari ſolent.

Coroll. 3. Hinc (k) etiam manifeſtum eſt, quod cœli reſiſtentia deſtituuntur. Nam cometæ vias obliquas & nonnunquam curſui

tur. Quarè ſi ſegmentum BCG, majus ſit ſegmento BAG, plures cometæ videbuntur in hemiſpherio verſus ſolem quam in oppoſito. Jam verò cometæ nudis oculis ſe priùs detegendos non exhibent quam ſint Jove propiores; ponatur itaque SA, circiter $\frac{3}{2}$ diſtantiæ Martis à ſole, hoc eſt, SA ſit circiter dupla ipſius ST, erit ſegmentum BGC pluſquam quadruplo majus ſegmento BAG, ideóque quadruplo vel quintuplo plures cometæ detegentur in hemiſpherio verſus ſolem quam in hemiſpherio oppoſito. At ſi cometæ cernerentur in regionibus longè ultrà Saturnum, foret SA, longè major quam ST, & ideò cometæ ſæpiùs deberent apparere in partibus ſoli oppoſitis, forent enim terræ viciniores qui in ſegmento BAG, verſantur, cæteros verò in ſegmento BCG, ſol interpoſitus obſcuraret. Ex his intelligitur cur cometæ tantoperè frequentant regionem Solis.

(k) * *Hinc etiam manifeſtum eſt.* Clariſſ. Caſſinus in mon. Pariſ. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosè reduxit. Obſervatos plurimorum cometarum motus retrogrados meras eſſe apparentias conjectatur, non ſecus ac directus planetarum circumſolarium motus apparet aliquandò retrogradus. Sed quamvis celeberrimi hujuſce Aſtronomi judicium maximè veneremur, nonnullos tamen cometas motu verè retrogrado contrà ſeriem ſignorum curſum tenuiſſe conabimur oſtendere, ubi hâc de re plura dicendi locus dabitur, poſtquam ſcilicet tradiderimus motuum cometarum elementa. Obliquas eſſe nonnunquam cometarum vias & curſui planetarum contrarias fateri non dubitarunt quidam Carteſiani. Verùm quâ ratione diverſi illi cometarum motus cum vorticibus conciliari poſſint difficilè intelligitur, cum enim cometæ in regiones planetarum deſcendant, neceſſe videtur ut rapidiſſimo vorticum torrente contrarii cometarum motus maximè perturbentur, citóque deſtruantur, ac tandem cometæ hujuſce torrentis vi rapiantur. At ſummè regulares eſſe cometarum motus & contrà curſum planetarum diutiſſimè conſervari, nonnullis cometarum exemplis deinceps patebit. 135

DE MUNDI SYSTEMATE.

cursui planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrimè, & motus suos, etiam contra cursum planetarum diutissimè conservant. (l) Fallor ni genus planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod scriptores aliqui meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. (m) Capita cometarum atmosphæris ingentibus cinguntur; & atmosphæræ infernè densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic terra si è planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus propè deliteſceret. Sic cingula jovis in nubibus planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum jovis copus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora cometarum sub atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moveri, & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere.

(n) Patet per corol. I. prop. XIII. libri primi, collatum cum prop. VIII. XII. & XIII. libri tertii.

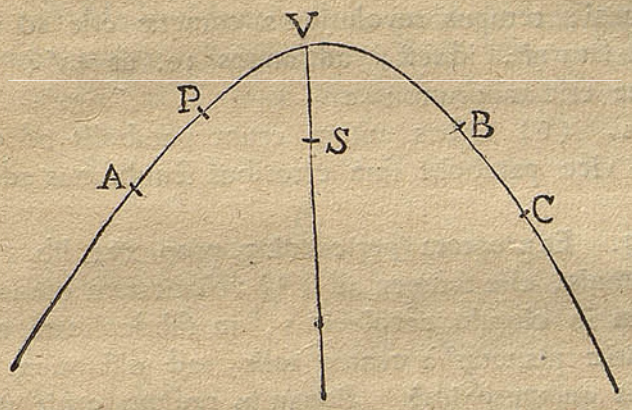
Co-

135. (l) * *Fallor, ni genus planetarum sint.* Quam gravibus fundamentis nitatur hæc sententia manifestum erit posteà ex variis cometarum phænomenis.

(m) * *Capite cometarum* atmosphæris ingentibus cingi variis argumentis imposterum confirmat Newtonus. Cæterum in ipsis cometarum corporibus non fieri perpetuas mutationes illas in decursu constabit independenter omninò ab illâ opinione quæ cometis ingentes atmophæras tribuit.

(n) * *Patet.* Quoniam cometæ motu suo lineas curvas circà solem describunt, ut ex observationibus constat, vi aliquâ à motu rectilineo detorquentur (per leg. I.). Quoniam autem hæc vis quæ planetas à lineis rectis detorquet maximè tendit versùs solem ut pote corpus cætera omnia systematis solaris corpore longè superans, eadem quoquè vis in cometis solem maximè debet respicere. Sed vis acceleratrix in planetis est in duplicatâ ratione distantiarum à sole inversâ (prop. 8. lib. 3.). Quare eandem quoquè legem observare debent cometæ quæ sunt corpora planetis similia ac proindè (cor. prop. 13. lib. 1. & prop. 13. lib. 3.) come-

Corol. 1. Hinc si cometæ in orbem redeunt; orbes erunt ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica planeta



cometæ non secus ac planetæ in sectionibus conicis umbilicos in centro solis habentibus moventur & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describunt. Hæc ità se habent, si sol è loco suo nullatenus moveatur; sed quamvis sol per attractionem planetarum perpetuo motu agitetur, non tamen longe recedit à communi gravitatis centro planetarum omnium, ideóque etiam cometæ qui in regionibus à sole maximè diffitis commorantur, non magnoperè hujus centri situm turbare possunt. Quarè orbitarum suarum umbilicus non longè distabit à centro solis, ac proindè propositio hæc vera est quamproximè. Quantum accuratè observatis cometarum motibus congruat patebit deinceps.

136. Keplerus aliique post eum astronomi non pauci cometas in lineis rectis moveri posuerunt, & indè cometarum quorumdam loca observationibus satis congrua calculo investigarunt. Res ità succedere potest, si observetur cometa in eâ tantùm orbitæ suæ parte quæ à rectâ non multum differat. Sit APVBC, Sectio conica admodùm excentrica in cujus umbilico altero S collocatum sit solis centrum. Ponamus cometam observari, dum orbitæ suæ partem AP, describit, fieri 136.
potest ut reliquo tempore, dum scilicet à loco P, per V, B, ad locum C promovetur, in regiones remotissimas abiens oculis se subducat & sub radiis solaribus delitescat respectu observatoris in tellure circà solem S motâ, vel etiam accidere potest ut, motu telluris ità exigente, cometa percurrens orbitæ partem APVB, sub solaribus radiis abscondatur & tunc primum observetur cum ad locum B pervenerit, lineam BC describturus. In hoc utroque casu via cometæ à lineâ rectâ parum differet. In primo casu, cometæ à Sole absorpti credentur, quia ad solem accedentes, pro destructis habebuntur. In altero casu, è sole videbuntur emergere, quia tunc primum sese conspicuos præbuerunt, dum à Sole in remotas regiones discedebant. Porrò dum cometa versus solem descendit, putà dum AP percurrit posteà ad solem accedens sub ejus radiis latet, putà dum PVB describit, tandemque dum ad alteras solis partes subitò emergit, usurpatur sæpè pro novo cometa à priori in AP diverso, & duæ rectæ AP, BC pro duabus trajectoriis habentur. Ex his patet cur trajectoriæ rectilineæ, observatis cometarum motibus

DE MUNDI SYSTEMATE.

netarum in (o) axium principalium ratione sesquiplicatâ. (P) Ideoque cometæ maximâ ex parte supra planetas versantes, & eo nomine orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis orbis cometæ sit quadruplo major axe orbis Saturni, tempus revolutionis cometæ erit ad tempus revolutionis saturni, id est, ad annos 30. ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1. ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. (P) Orbes autem erunt parabolis adeo finitimi, ut eorum vice parabolæ sine erroribus sensibilibus adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) velocitas cometæ omnis, erit semper ad (q) velocitatem planetæ cujusvis circa solem in circulo revolventis, in subduplicatâ ratione duplæ distantiæ planetæ à centro solis, ad distantiam cometæ à centro solis quamproximè. Ponamus radium orbis magni, seu ellipseos in quâ terra revolvitur semidiametrum maximam esse partium 100000000: & (r) terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque cometa in eâdem telluris à sole distantiâ mediocri, eâ cum velocitate quæ sit ad velocitatem telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{11}{12}$.

136. plerumque respondeant. Id fit scilicet eò quod aliqua duntaxat portio trajectoriæ pro integrâ trajectoriâ habeatur. At si tota simul consideretur tam in ascensu versus solem quam in descensu, aliam nullam præter Sectionem conicam satisfacere constabit.

(o) * *In axium principalium ratione sesquiplicatâ.* (Prop. 15. lib. 1.).

(P) * *Ideóque cometæ* maximâ ex parte suprà planetas versantes, quo tempore scilicet oculos nostros fugiunt & eo nomine orbes axibus majoribus quam planetæ describentes tardius revolventur.

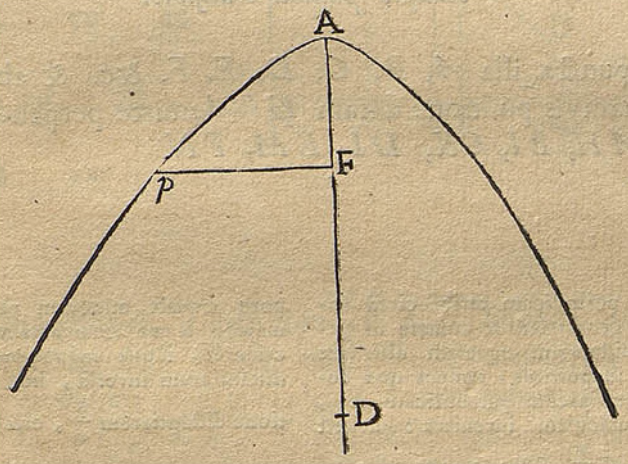
(p) * *Orbes autem parabolis adeò finitimi.* Orbes cometarum sunt admodum excentrici, ut ex observationibus colligitur, & valdè exigua est portio orbis quem toto apparitionis tempore describunt, exiguo enim temporis spatio sese conspicuos præbent. Verum si in ellipsi centrum ad infinitam ab umbilico distantiam removeatur, portio ellipsis cujus abscissa finita est, abit in parabolam. Quare elliptici orbes cometarum erunt parabolis valdè finitimi.

(q) * *Ad velocitatem planetæ cujusvis* circà solem in circulo revolventis, hoc est, ad velocitatem ejus mediocrem.

(r) * *Et terra.* Fiat hæc analogia: ut est tempus periodicum terræ circà solem ad totam peripheriam circuli 3.141, ità dies una vel hora una ad partem peripheriæ unâ die vel horâ unâ descriptam.

$101364\frac{1}{2}$. (f) In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicatâ ratione distantiarum reciprocè, ideoque datur.

Corol. 4. (t) Unde si latus rectum parabolæ quadruplo majus sit radio orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam cometa radio ad solem ducto singu-



(f) * *In majoribus autem vel minoribus.* (Cor. 6. prop. 4. & prop. 15. lib. 3. vel per cor. 6. prop. 16. ejusdem libri).

(t) * *Undè si latus rectum.* Ex umbilico parabolæ F, ducatur ad axem A D, ordinata P F, erit area A p F, ad aream circuli quartâ parte lateris recti seu radio A F descripti (theor. 2. de parabolâ lib. 1.) ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. Nam si radius circuli sumatur æqualis unitati, erit area circuli ad quadratum diametri, ut 3.14159 ad 4. Sed rectangulum sub ordinatâ p F & abscissâ F A, est dimidium hujus quadrati, hoc est 2, & area parabolica A p F, hujus rectanguli duæ tertiæ partes, hoc est $\frac{4}{3}$ (per theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè area parabolica A p F, est ad aream circuli radio A F, descripti ut $\frac{4}{3}$ ad 3.14159. 136.

Si igitur velocitas cometæ revolventis in parabolâ eadem esset cum velocitate planetæ gyrantis in circulo, in eâdem quoque ratione foret tempus quo cometa describit arcum parabolæ A p, ad tempus periodicum planetæ. Sed velocitas cometæ est ad velocitatem planetæ in eâdem distantiâ à sole ut $\sqrt{2}$ ad 1, in hâc igitur ratione diminuenda est prior ratio. Undè tempus quo cometa describit arcum parabolicum A p, erit ad tempus periodicum planetæ ut $\frac{4}{3\times\sqrt{2}}$ ad $\frac{3.14159}{1}$. Sivè ut $\sqrt{\frac{16}{9\times 2}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{8}{9}}$ ad 3.14159.

singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. (u) Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quâvis, erit area diurna & horaria major vel minor in eâdem ratione subduplicatâ.

(x) LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, *EM*, *FN*.

Cas.

136. Jam tempus periodicum terræ circâ solem sit 365.2565 dier. & cometa in perihelio ad distantiam æqualem distantiæ terræ à sole supponatur, tempus quo cometa describet arcum parabolicum Ap, per hanc analogiam invenitur: ut est 3.14159 ad $\sqrt{\frac{8}{9}}$, ità 365.2565 ad tempus quæsitum quod erit 109. dier. 14 hor. 46′. Si quadratum radii ponatur esse partium 100000000. erit area parabolica harum partium 133333333, quas cometa radiis ad solem ductis describit diebus 109. hor. 14.46′. Quarè area quam cometa singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$ & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$.

(u) * *Sin latus rectum.* Tempora quibus cometa in distantiis inæqualibus areas parabolicas similes describeret, sunt ut revolutiones in circulis, ideóque in ratione distantiarum sesquiplicatâ (cor. 6. prop. 4. lib. 1.), id est, majus temporis intervallum requiritur ut cometa in majori parabolâ aream similem describat, minus autem in minori, ac proinde cometa tempore æquali minorem partem parabolæ majoris & majorem parabolæ minoris describeret, idque in ratione sesquiplicatâ distantiarum inversâ, hoc est, positâ ratione distantiarum $\frac{d}{e}$, erit ratio arearum æquali tempore descriptarum ut $\frac{1}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{1}{e\sqrt{e}}$. Sed areæ similes parabolarum inæqualium sunt in ratione duplicatâ laterum rectorum (112. lib. I.). Sive distantiarum quæ sunt laterum rectorum pars quarta (cor. 2. theor. 1. de parab. lib. 1.). Quarè ratio prior in hâc ratione duplicatâ augenda est, totaque ratio composita erit ut $\frac{dd}{d\sqrt{d}}$ ad $\frac{ee}{e\sqrt{e}}$, hoc est, ut $\sqrt{d}$ ad $\sqrt{e}$, quæ est ratio subduplicata distantiarum sive laterum rectorum. Patet aream minorem fieri in eâdem ratione subduplicatâ, si ratio sesquiplicata distantiarum minuatur in ratione duplicatâ laterum rectorum seu distantiarum.

(x) * *Lemma.* Totum illud Lemma exponitur num. 76. lib. 2.

SCD LYON 1

Caſ. 1. Si punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* æqualia ſunt intervalla *HI*, *IK*, *KL*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, &c. ſecundas *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias *d*, 2*d*, 3*d*, &c. id eſt, ita ut ſit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, dein $b - 2b = c$, &c. & ſic pergatur ad

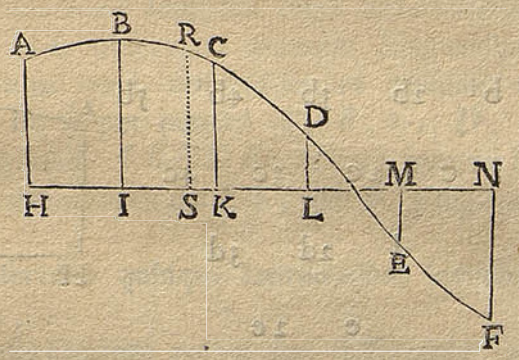
b 2b 3b 4b 5b

c 2c 3c 4c

d 2d 3d

e 2e

f

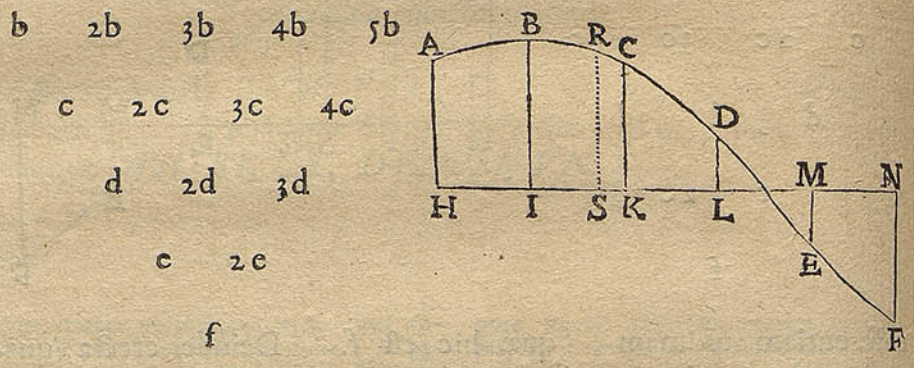


differentiam ultimam, quæ hic eſt *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæſitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, &c. unitates eſſe, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad uſque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo ſigna negativa terminis *HS*, *IS*, &c. qui jacent ad partes puncti *S* verſus *A*, & ſigna affirmativa terminis *SK*, *SL*, &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et ſignis probe obſervatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Caſ. 2. Quod ſi punctorum *H*, *I*, *K*, *L*, &c. inæqualia ſint intervalla *HI*, *IK*, &c. collige perpendiculorum *AH*, *BI*, *CK*, &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum diviſas *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*; ſecundas per intervalla bina diviſa *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, &c. tertias per intervalla terna diviſas *d*, 2*d*, 3*d*, &c. quartas per intervalla quaterna diviſas *e*, 2*e*, &c. & ſic

DE MUNDI SYSTEMATE.

sic deinceps; id est, ita ut sit $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. dein $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. postea $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Inventis



differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, s in $+SM = t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproximè. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & parabola per eadem duci intelligatur: erit area parabolæ hujus eadem quamproximè cum area curvæ illius quadrandæ. (y) Potest autem parabola per methodos notissimas semper quadrari Geometricè.

LEM-

136. (y) * *Potest autem Parabola*, per methodos notissimas (165. lib. 1.) semper quadrari geometricè. Inveniatur itaque æquatio definiens curvam parabolicam quæ transibit per curvæ quadrandæ puncta quotlibet, erit area parabolæ hujus eadem quam proximè cum areâ curvæ illius quadrandæ. Quò plura sunt puncta curvæ propositæ per quæ transit curva Parabolica, eò propius area hujus accedit ad aream illius.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent *HI*, *IK*, *KL*, *LM* tempora inter observationes *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* observatas quinque longitudines cometæ, *HS* tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E* duci intelligatur curva regularis *ABCDE*; & per lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata *RS*, erit *RS* longitudo quæsita.

Eâdem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

(z) Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; sufficerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

LEM-

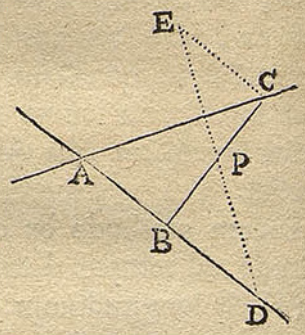
(z) 137. * *Si longitudinum observatarum*, (patet per not. in cor. præc.). Methodus Lemmatis præcedentis quæ methodus interpolationum dici solet, in rebus Astronomicis usus habere potest eximios. Hanc methodum adhibuit Clariss. Maierus tom 2. Comment. Acad. Petropol. ad investiganda solstitiorum momenta. Circà tempus solstitii observentur aliquæ Solis altitudines meridianæ, illasque Solis altitudines repræsentent quædam ordinatæ, & tempora inter observationes elapsa ordinatarum intervallis exhibeantur. Deinde transeat Parabola per extremitates ordinatarum, abscissa quæ correspondet minimæ ordinatæ, tempus solstitii determinabit. Cæterum definiri potest tempus solstitii per plures observationes & parabolam plurium dimensionum, vel per tres observationes duntaxat & parabolam conicam, uti fecit Halleius. Verum in quocumque casu adhibeatur interpolationum methodus, oportet differentias observatas sensibiliter majores esse erroribus qui in ipsâ observatione committi possunt, hâc autem adhibitâ curâ, satis accurate determinari poterunt plurima astronomiæ phænomena quæ aliâ quidem viâ forent determinatu difficillima. Elegantissimum ejusdem methodi exemplum dedit eximius geometra D. Clairaut in Mon. Paris. an. 1736., ubi determinandæ telluris figuræ modum exponit ex mensurâ plurium meridiani arcuum in diversis latitudinibus captâ. 137.

DE MUNDI SYSTEMATE.

LEMMA VII.

Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, PC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*

A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in datâ illâ ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F.*



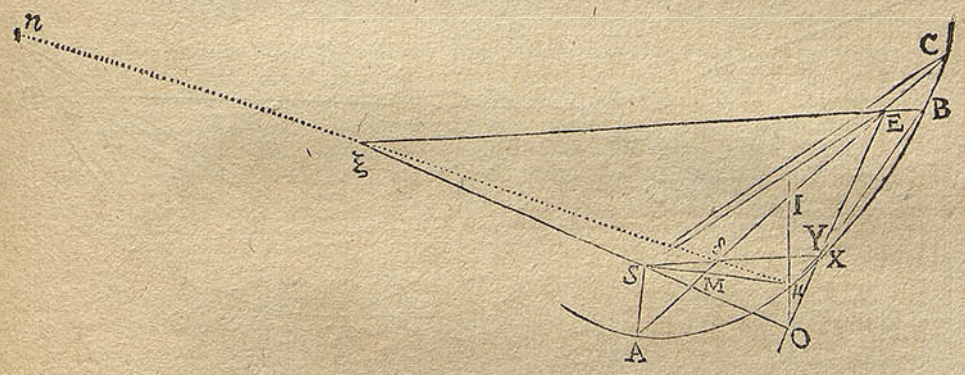
LEMMA VIII.

Sit ABC *parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ *& vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius* Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* $\S$, *ut sit* S$\S$ *æqualis* 2SO. *Et si cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* $\S$B *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chordâ* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproximè.*

Jungatur enim *EO* secans arcum parabolicum *ABC* in *Y*, & agatur μX, quæ tangat eundem arcum in vertice μ, & actæ *EO* occurrat in *X*; & (a) erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACY\mu A$ ut *AE ad AC*. Ideoque cum trian-

137. (a) * *Et erit area.* Quoniam chorda AC bisecta est in I, erit semisegmentum AμI æquale semisegmento μIC. Item quia μX tangit parabolam in μ, erit μX, parallela chordæ AC (per Lem. 4. de conic. lib. 1.) ac proinde triangulum

triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eâdem ratione, erit area tota $ASEX_{\mu}A$ ad aream totam $ASCY_{\mu}A$ ut AE ad AC. Cum autem $\frac{1}{3}O$ sit ad SO ut 3 ad 1, & FO ad XO in eâdem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. LIBER TERTIUS. PROP. XL THEOR. XX.



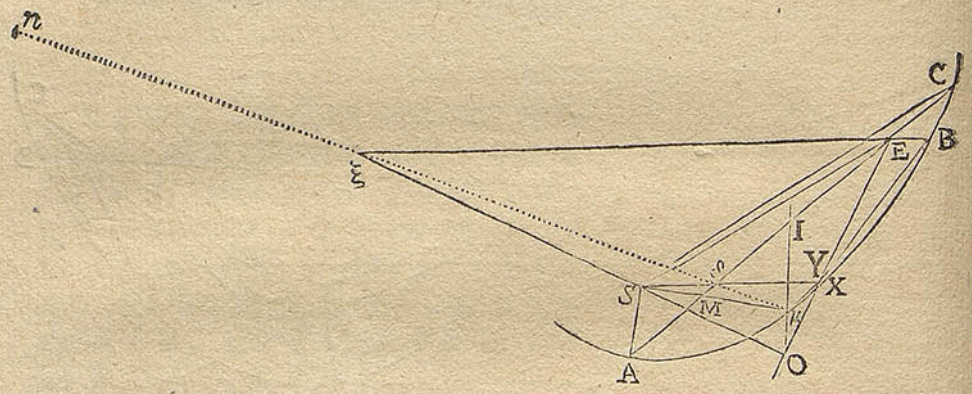
Unde si ad aream $ASEX_{\mu}A$ addatur triangulum EXB, & de summa auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX_{\mu}A$ areæ $ASEX_{\mu}A$ æqualis, atque ideo ad aream $ASCY_{\mu}A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX_{\mu}A$ æqualis est area $ASBY_{\mu}A$ (b) quamproximè, & hæc area $ASBY_{\mu}A$ est ad aream $ASCY$

lum OIE simile, est triangulo OμX, ideóque ob IO triplam ipsius μO, erit triangulum IOE trianguli μOX, noncuplum & triangulum IOE trapezii IμXE, sesquioctavum. Præterea triangulum IAO, est trianguli IAμ, sesquialterum (omittuntur in figurâ aliquæ lineæ ad vitandam confusionem) cum idem sit trianguli utriusque vertex A, sitque basis OI sesquialtera basis μI; triangulum verò AμI, subsesquitertium est semisegmenti AμI (prop. 24. Archimed. de parab. vel theor. 4. de parab. lib. 1.). Quarè triangulum AOI est sesquioctavum semisegmenti AμI, hoc est, in ratione compositâ ex rationibus sesquialterâ & subsesquitertiâ ac proinde triangulum AOI, est ad semisegmentum AμI, sicut triangulum IOE, ad trapezium μXIE, & vicissim trapezium μXIE est ad semisegmentum AμI ut IE ad AI, ac proinde, componendo, area curvilinea AμXE, est ad semisegmentum AμI, ut AE, ad AI, ideóque area curvilinea AμXE est ad segmentum totum AμC ut AE ad AC. 137

(b) * *Quamproximè.* Ob viciniam punctorum μ, X (ex hyp.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

$ASCY\mu A$, (c) ut tempus descripti arcus AB ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproximè *Q. E. D.*



Corol. Ubi punctum B incidit in parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accuratè (d).

Scho-

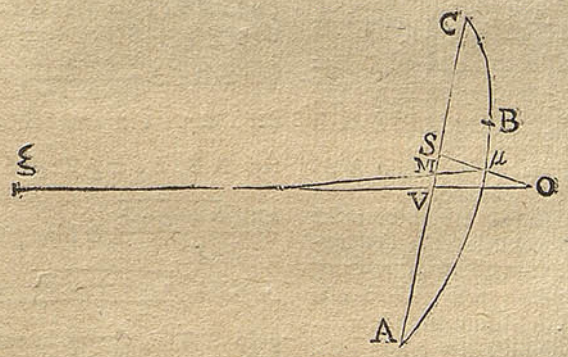
138. (c) * *Ut tempus descripti arcûs.* (prop. 1. lib. 1.).

(d) * *Accuratè.* Ideò enim in casu Lemmatis hujus A E non est ad A C in ratione temporum accuratè, quia area A S B X μ A, sumpta est æqualis areæ A S B Y μ A, quod verum est duntaxat quamproximè. Sed coincidentibus punctis B, μ, areæ illæ æquales fiunt accuratè, quare in hoc casu A E est ad A C, in ratione temporum accuratè.

138. Quoniam coincidentibus punctis B, μ, chorda A C dividitur in E in ratione temporum accuratè, iisdem verò punctis non coincidentibus hæc chorda dividitur in ratione temporum quamproximè tantùm, quò propius erit punctum B vertici parabolæ μ, eò magis accuratè dividetur chorda A C in duo segmenta quæ temporum rationem habeant. Observandum est chordam A C magis accuratè dividi in ratione temporum, si B distet à vertice μ versus C quam si ab eodem vertice μ, versus A, æquali intervallo distet. Quoniam enim parabolæ portio μ A vertici principali propior est, ea fit curvior & à tangente μ X, magis deflectit quam portio μ C, à vertice μ, remotior. Quarè si investiganda sint tria temporis momenta quibus cometa in parabolæ locis tribus A, B, C, versatur ità ut A E sit ad A C, ut temporum intervalla accuratè, sumenda sunt prædicta tempora ferè æqualia. Nam ob exiguas trajectoriæ parabolicæ portiones astronomicis observationibus subjectas, pun-

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in ea capiatur ξn, quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in punctum E, non multum distat à chordæ medio puncto I. Oportet autem intervallum illud, ubi cometa tardior est, paulò majus esse altero; cometa enim existente in μ, ubi chorda AC, dividitur accuratè in ratione temporum; erit recta EC, major quam AE, hoc est, tempus quo cometa tunc tardior (cor. 3. prop. 40. lib. huj.) describit arcum BC, majus est tempore quo idem cometa factus velocior describit arcum BA. Accuratius itaque eligentur tempora parum inæqualia ut punctum E potius abeat versus C, quam versus A, ob rationem modò allatam.



139. Si vertex μ, segmenti parabolici $A\mu C$ parum distet à vertice principali, sitque punctum B proximum puncto μ, recta $S\mu$, ex parabolæ umbilico S, ad verticem μ, ducta dividet chordam AC, in M, ferè in ratione temporum, ut ex præcedentibus patet.

140. Si fuerit recta $S\mu$, admodum magna respectu abscissæ μI, erit SV, tripla ipsius MV. Quoniam enim rectæ SVO, $SM\mu$; in hoc casu pro parallelis haberi possunt, erit IV ad VM ut IO ad μO, hoc est, (per constr. Lem. 8.) ut 3 ad 1.

141. Iisdem positis, erit $V\xi = 3VS + 3I\mu$; quoniam enim (per constr.) $S\xi = 2SO$, erit $O\xi = 3SO = 3SV + 3VO$. Jam utrinque auferatur VO, fiet $V\xi = 3SV + 2VO$. Sed ob rectas VO, $M\mu$ parallelas, VO est ad $M\mu$, ut IO ad $I\mu$, hoc est, ut 3 ad 2, ideóque $2VO = 3M\mu$. Prætereà rectæ $S\mu$, $I\mu$, æquales constituunt angulos cum rectâ tangente parabolam in μ, quæ est chordæ AC parallela (per theor. 3. de parab. & lem. 4. de conic.). Quarè æquales sunt anguli $MI\mu$, $IM\mu$, ac proindè recta $M\mu = I\mu$; undè fit $3I\mu = 2VO$, & $V\xi = 3VS + 3I\mu$. 141.

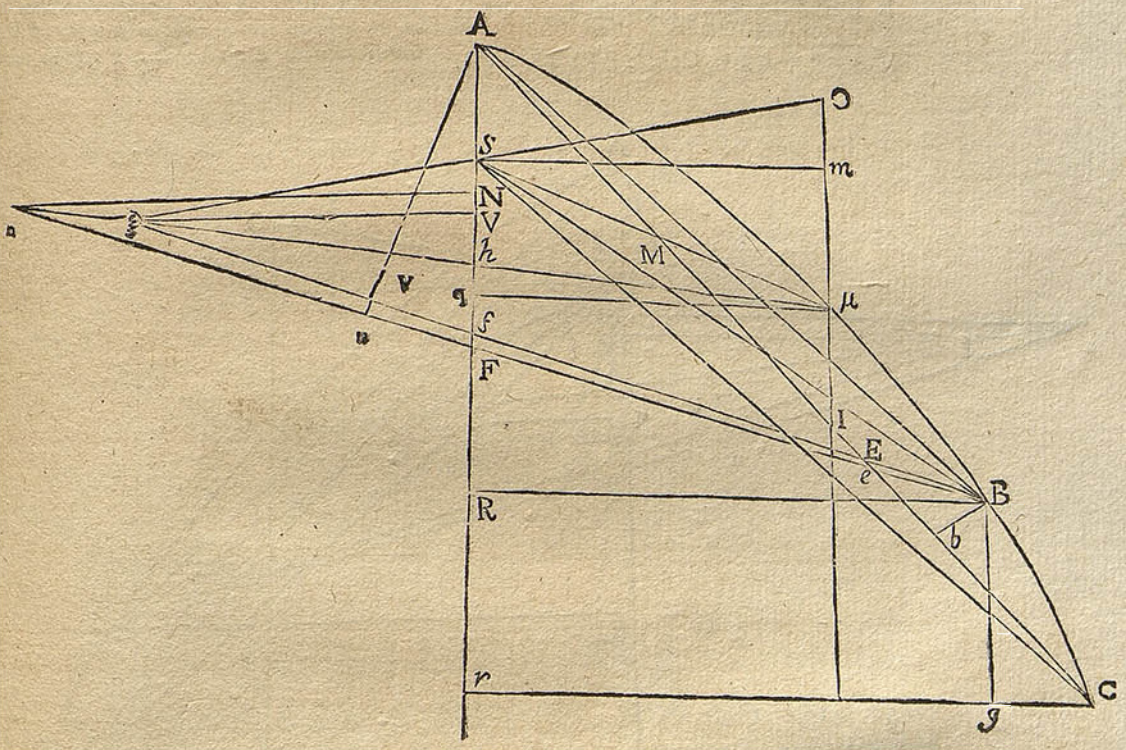
DE MUNDI SYSTEMATE.

in ratione temporum (e) magis accuratè quàm priùs. Jaceat autem punctum *n* ultra punctum ξ, si punctum *B* magis distat à

142. (e) 142. * *Magis accuratè quam priùs.* Sit A vertex principalis parabolæ, S umbilicus, $AS = f$, ideóque latus rectum principale $= 4f$. Ponatur $RB = x$, $rC = x$, erit area $ASBC = \frac{x^3 + 12f^2x}{24f}$, & area $ASBA = \frac{y^3 + 12f^2y}{24f}$ (theor. 4. de parab.); ac proinde area ASBC, est ad aream ASBA, ut $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ ad $\frac{y^3+12f^2y}{24f}$, seu ut $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$, id est, in ratione temporum accuratè. Præterea est $AC = \sqrt{Ar^2 + rC^2} = \frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$; quarè si fiat $x^3 + 12f^2x$ ad $y^3 + 12f^2y$ ut $\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f}$ ad $AE = \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f(x^3+12f^2x)}$, erit quoque recta AC ad hanc rectam AE, in ratione temporum accuratè.

Jam verò investigandus est valor rectæ AE, qui prodit ex constructione Lemmatis præcedentis. Ex umbilico S, erigatur ad μO perpendicularis Sm, hæc erit æqualis ordinatæ $q\mu$. Deinde (theor. 1. de parab.) $q\mu$, dimidia est ipsius rC, seu $\frac{1}{2}x$, & $\mu m = qS = \frac{xx-16ff}{16f}$. Præterea est $\mu I = 2\mu O$ (per constr.) & $\mu I = \frac{AI^2}{4S\mu}$ (165 & theor. 2. de parab.). Sed est $AI^2 = \frac{x^4+16f^2x^2}{64f^2}$, & $S\mu^2 = \left(\frac{x^2-16f^2}{16f}\right)^2 + \frac{1}{4}xx$, quare est μO seu $\frac{AI^2}{8S\mu} = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x}$, ac proindè $mO = \mu O - m\mu = \frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}$, ideóque $SO = \sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$, & $\xi O = 3\sqrt{\frac{1}{4}xx + \left(\frac{x^4+16f^2x^2}{32fx^2+512f^2x} + \frac{16ff-xx}{16f}\right)^2}$. Insuper ex puncto ξ, ad absidiam AR erectâ perpendiculari ξV, ob similitudinem triangulorum SmO, SξV, fit SO: $q\mu = \xi S : \xi V$, ideóque $\xi V = x$. Præterea $SO : mO = S\xi : SV$, ac proinde $SV = 2mO$, hincque prodit $AV = AS + 2mO$, & $VR = AR - AS - 2mO$. Sed ob triangulorum similitudinem $\xi V(x) : BR(y) = Vf : Rf$, & componendo, $\xi V + BR : BR = Vf + Rf : Rf$, quare $Rf = \frac{VR+BR}{\xi V+BR}$, datur itaque Rf, per *x* & *y*. Præterea $fB^2 = RB^2 + Rf^2$, sed $RB : Bf = \xi V : \xi f = \frac{\xi V \times Bf}{RB} = \frac{x\times\sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$, & hinc $\xi B = \sqrt{RB^2+Rf^2} + \frac{x\times\sqrt{RB^2+Rf^2}}{y}$. Deinde in triangulo ABC, dantur latera AB, AC, & præterea datur latus BC; ductâ enim Bg perpendiculari ad rC, erit $BC = \sqrt{Bg^2+gC^2} = \sqrt{Rr^2 + (RB-rC)^2}$; datur itaque perpendicularis $Bb = \sqrt{\frac{3}{4}}BC^2$. Insuper ducatur AV perpendicularis ad AB, ob similitudinem triangulorum AVf, BRf, erit $Af : AV = Rf : RB$, ideóque $AV = \frac{RB\times Af}{Rf}$. Denique ductâ Bb, perpendiculari ad AC, similia erunt triangula EAV, Bbe, ac proinde $Bb : bE = AV : AE$, & invertendo $Bb : AV = bE : AE$, atquè, componendo $Bb + AV : AV = bE + AE : AE$, hinc $AE = Ab$

à vertice principali parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.



$\frac{Ab \times AV}{Bb + AV}$. Jam loco Ab, Bb, AV, substitutis eorum valoribus modò inventis prodit AE, paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

Investigandus supereſt valor rectæ Ae, qui prodit ex constructione scholii hujus. Quoniam similia sunt triangula ξSh, $\xi O\mu$, erit $\xi S : Sh = \xi O : O\mu$, hinc $Sh = \frac{\xi S \times O\mu}{\xi O}$; Sed inventa est suprà recta Sq, invenietur itaque qh, ac proindè etiam $h\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2}$. Præterea $\xi S : SO = \xi h : h\mu$, quarè $\xi h = \frac{S\xi \times \sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$, ac proindè tota recta $\xi\mu = \sqrt{qh^2 + q\mu^2} + S\xi \times \frac{\sqrt{qh^2 + q\mu^2}}{SO}$. 142.

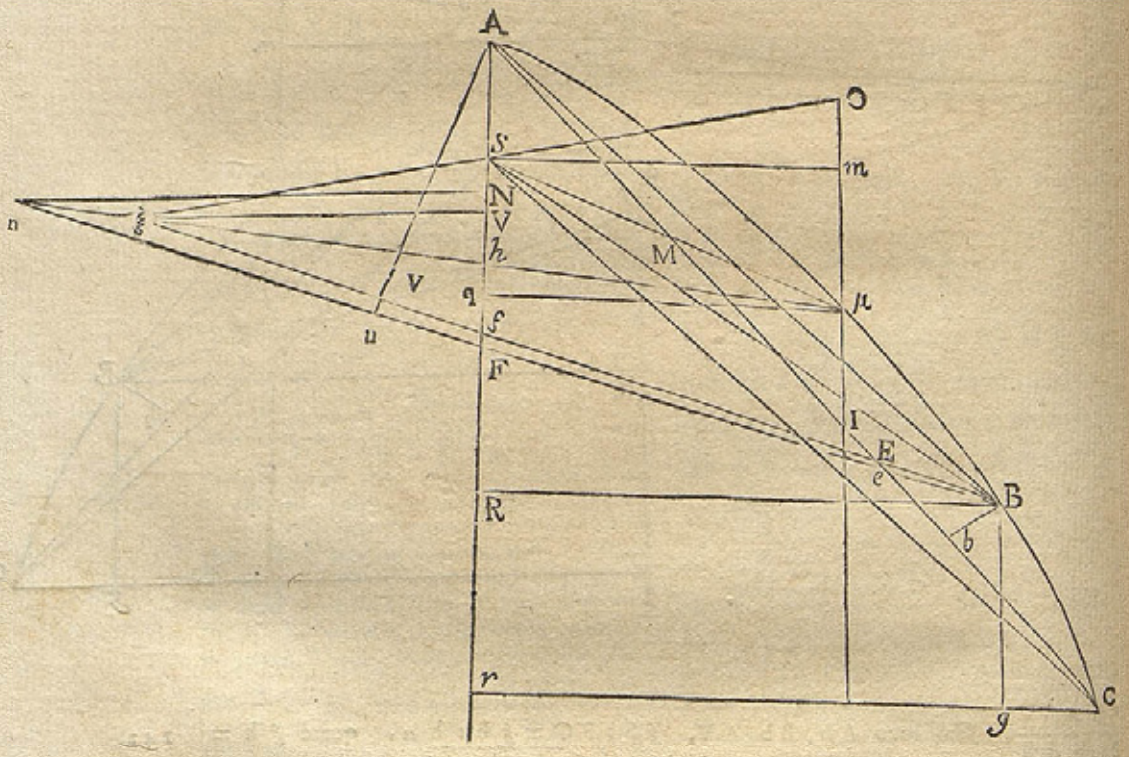
Deindè (per constr.) fit $\xi n = \frac{27\,MI \times \mu B}{16\,M\mu}$.

Sed $AM : MI = AS : I\mu$, ac proindè, componendo $AM + MI : MI = AS + I\mu : I\mu$, invenietur itaque MI, ideóque tota recta $n\mu$. Insuper $h\mu : qh = hr : hM$, invenietur itaque hN, ac proindè & Nn, ob triangulum hrN, rectangulum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

lum. Prætereà (ex præced.) inventa est hR, ideóque etiam datur nR. Jam fiat rN : NF = BR : RF, & invertendo NF : RF = rN : BR, atque componendo NF + RF : RF = rN + BR : BR, hinc $RF = \frac{BR \times NR}{rN + BR}$, ideóque datur BF = $\sqrt{BR^2 + RF^2}$. Deindè BF : BR = rF : FN, & inde $rF = \frac{BF \times FN}{BR}$, atque recta tota $rB = \frac{BF \times FN}{BR} + \sqrt{BR^2 + RF^2}$.

142. Ducatur recta A u, perpendicularis ad AB, erit ob triangulorum AuF, RBF, similitudinem AF : Au = RF : RB, ideó-



que $Au = \frac{RB \times AF}{RF}$, & hinc prorsus ut suprà habetur $Ae = \frac{Ab \times Au}{Bb + Au}$. Ex hactenus dictis patet dari rectas AE, Ae, per x, y, & quantitates constantes. Jam loco Ab, Bb, Au, substitutis eorum valoribus analyticis, fit Ae, paulò major quam AE, & paulò minor quam $\frac{(y^3 + 12f^2y)\sqrt{x^4 + 16f^2x^2}}{4f(x^3 + 12f^2x)}$.

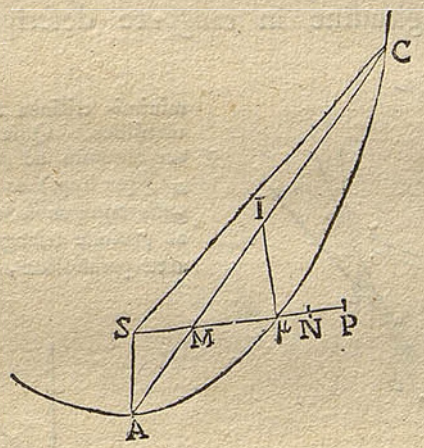
Quarè recta Bn, secabit chordam AC, in e, in ratione temporum magis accuratè quàm recta ξB.

Idem scholium faciliùs demonstrari potest hoc modo. Quoniam $Ae = \frac{Ab \times Au}{Ab + Au} = Ab - \frac{Ab \times Ab}{Au + Bb}$ (ex dem.) erit Ae semper minor quam Ab. Jam verò factâ analogiâ $x^3 + 12f^2x : y^3 + 12f^2y =$ $\sqrt{}$

(f) LEMMA IX.

Rectæ I μ *&* μ M *&* *longitudo* $\frac{AIq}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

Nam $4S\mu$ est latus rectum parabolæ pertinens ad verticem μ.



LEMMA X.

Si producatur S μ *ad* N *&* P, *ut* μ N *sit pars tertia ipsius* μ I, *&* SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* S μ. *Cometa, quo tempore des-*

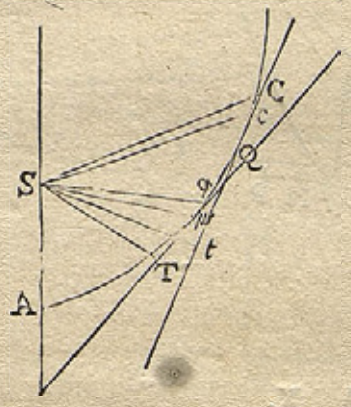
$\frac{\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f} : \frac{(y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$, si Ae æqualis foret huic quarto termino haberetur ratio temporum accuratè (prop. 1. lib. 1.). Sed quartus ille terminus major est rectâ Ae; nam terminus ille major est quam chorda AB, est enim $AB = \frac{\sqrt{y^4+16f^2z^2}}{4f} = \sqrt{x^3+12f^2x} \times \frac{\sqrt{y^4+16f^2z^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$ hæc autem quantitas minor est quam $\frac{y^3+12f^2y)\sqrt{x^4+16f^2x^2}}{4f\sqrt{x^3+12f^2x}}$. Sed (per constr.) ità ducitur μn, ut recta nB semper secet chordam AC in puncto e, quod proximius est puncto C quam punctum E; quarè cum recta Ae semper minor sit verâ, major tamen quam AE, hæc magis quam illa ad justum valorem accedet, ac proindè recta nB, secat chordam AC in ratione temporum magis accuratè quam recta ξB. Res eodem modo demonstratur, ubicumque sumatur punctum A. 1420

(f) * *Lemma IX.* (Patet per num. 139. lib. huj. & theor. 1. & 2. de parab. lib. 1.).

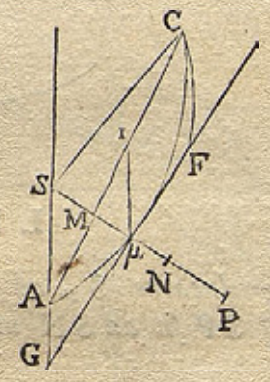
DE MUNDI SYSTEMATE.

describit arcum A μ C, *si progrederetur eâ semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si cometa velocitate, quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in rectâ, quæ parabolam tangit in μ; (g) area, quam radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ *A S C μ*. (h) Ideoque contentum sub longitudine in tangente descriptâ & longitudine $S\mu$



minimis trilinea A S C μ, S μ Q constituentibus. Quia verò æqualia insumuntur tempora ad percurrendas lineas A C, μ Q (ex hyp.) ex æqualibus numero triangulis componuntur spatia A S C μ, S μ Q, ac proinde triangulum S μ Q, æquale est areæ parabolicæ, A S C μ.

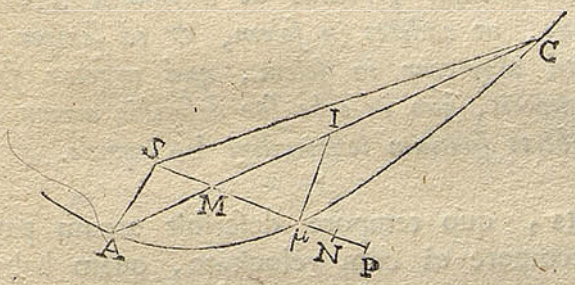


142. (g) * *Area quam radio.* Cometa velocitate quam habet in μ, relictâ parabolâ, progrediatur uniformiter in rectâ μ Q, quæ parabolam tangit in μ, area S μ Q, quam radio ad punctum S, ducto describeret, æqualis esset areæ parabolicæ A S C μ, quam eodem tempore describit. Sumantur enim lineolæ C c, q μ, à cometa descriptæ & à parabolæ umbilico S, ad tangentes C t, μ T, erigantur perpendiculares S t, S T, velocitas in C, est ad velocitatem in μ, ut S T ad S t (cor. 1. prop. 1. lib. 1.) sed velocitates in C, & μ, sunt ut spatia eodem tempore percursa, putà C c & q μ; est igitur C c ad μ q ut S T ad S t. Quare triangulum S μ q, æquale est triangulo C S c. Istud autem ubique obtinet in triangulis

(h) * *Ideóque.* Quoniam recta S μ, cum tangente in μ, & chordâ A C, æquales constituit angulos (Lem. 4. de conicis), spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ S μ, erit ad spatium contentum sub chordâ A C, & rectâ S M, ut area A S C μ, ad triangulum A S C, id est, ut triangulum S A C + segm. parab. C A c ad triangulum S A C, id est, ut triangulum S A C + $\frac{2}{3}$ paral-

lelo-

$S\mu$ esset ad contentum sub longitudinibus AC & SM, ut area $ASC\mu$ ad triangulum ASC, id est, ut SN ad SM. Quare AC est ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Cum autem velocitas cometæ in altitudine SP sit (per corol. 6. prop. XVI. lib. 1.) ad ejus velocitatem in



altitudine $S\mu$, in subduplicatâ ratione SP ad $S\mu$ inversè, id est, in ratione $S\mu$ ad SN; (i) longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut $S\mu$ ad SN. Igitur AC & longitudo hâc novâ velo-

lelogrammi AGFC, ad triangulum ASC, hoc est, ut $AC \times \frac{1}{2}SM + AC \times \frac{2}{3}I\mu$ ad $AC \times \frac{1}{2}SM$, sivè ut $SM + \frac{4}{3}I\mu$ ad SM. Sed μN, sumpta est æqualis $\frac{1}{3}I\mu$, & est $M\mu = \mu I$ (num. 139.). Quarè $MN = \frac{4}{3}I\mu$. Est igitur spatium contentum sub longitudine descriptâ in tangente & rectâ $S\mu$, ad spatium contentum sub chordâ AC, & rectâ SM, ut $SM + MN$ ad SM, hoc est, ut SN ad SM: Unde si longitudo descripta in tangente dicatur L, erit $L \times S\mu : AC \times SM = SN : SM$, ideóque longitudo descripta in tangente erit ad chordam AC, ut $\frac{SN}{S\mu}$ ad $\frac{SM}{SM}$, hoc est, ut SN ad $S\mu$. 142.

(i) * *Longitudo.* Nam longitudines iisdem temporibus uniformi motu descriptæ, sunt ut velocitates (5. lib. 1.).

DE MUNDI SYSTEMATE.

locitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam in eâdem ratione, æquantur inter se. *Q. E. D.*

(k) *Corol.* Cometa igitur eâ cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$, eodem tempore describeret chordam AC quamproximè.

LEMMA XI.

Si cometa motu omni privatus de altitudine SN seu $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$ *demitteretur, ut caderet in solem, & eâ semper vi uniformiter continuatâ urgeretur in solem, quâ urgetur sub initio; idem semisse temporis, quo in orbe suo describit arcum AC, descensu suo describeret spatium longitudini* $I\mu$ *æquale.*

Nam cometa, quo tempore describit arcum parabolicum AC, eodem tempore eâ cum velocitate, quam habet in altitudine SP (per lemma novissimum) describet chordam AC, ideoque (per corol. 7. prop. XVI. lib. 1.) eodem tempore in circulo, cujus semidiameter esset SP, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum, cujus longitudo esset ad arcus parabolici chordam AC, in subduplicatâ ratione unitatis ad binarium. Et propterea eo cum pondere, quod habet in solem in altitudine SP, cadendo de altitudine illâ in solem, describeret semisse temporis illius ((l) per corol. 9. prop. IV. lib. 1.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis SP, id est, spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$. (m) Unde cùm pondus

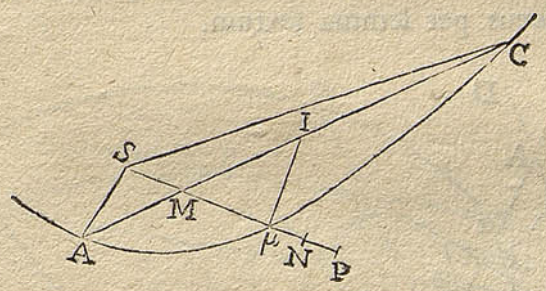
co-

142. (k) * *Corol.* Si $S\mu$, sit admodum magna respectu μN, tres geometricè proportionales $S\mu$, SN, SP, erunt etiam arithmeticè proportionales quamproximè, id est NP, æquabitur μN, sivè trienti ipsius $I\mu$, ideóque μP, æqualis quamproximè $\frac{2}{3}$ ipsius $I\mu$. Quare patet corollarium.

(l) * *Per corol. 9. prop. IV. lib. 1.* Vel per num. 201. ejusdem lib.

(m) * *Undè cum pondus cometæ.* Gravitas acceleratrix cometæ versus Solem in distantiâ SN, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in distantiâ SP, ut SP^2 ad SN^2, hoc est, ob proportionales SP, SN, $S\mu$, ut SP ad $S\mu$.

cometæ in ſolem in altitudine SN ſit ad ipſius pondus in ſolem in altitudine SP, ut SP ad $S\mu$: cometa pondere quod habet in altitudine SN eodem tempore, in ſolem cadendo, deſcri- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.



bet ſpatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, (n) id eſt, ſpatium longitudini $I\mu$ vel $M\mu$ æquale. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in parabola moti trajectoriam ex datis tribus obſervationibus determinare.

Problema hocce longè difficillimum multimodè aggreſſus, compoſui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus ſolutionem ſpectant. Poſtea ſolutionem ſequentem paulo ſimpliciorem excogitavi.

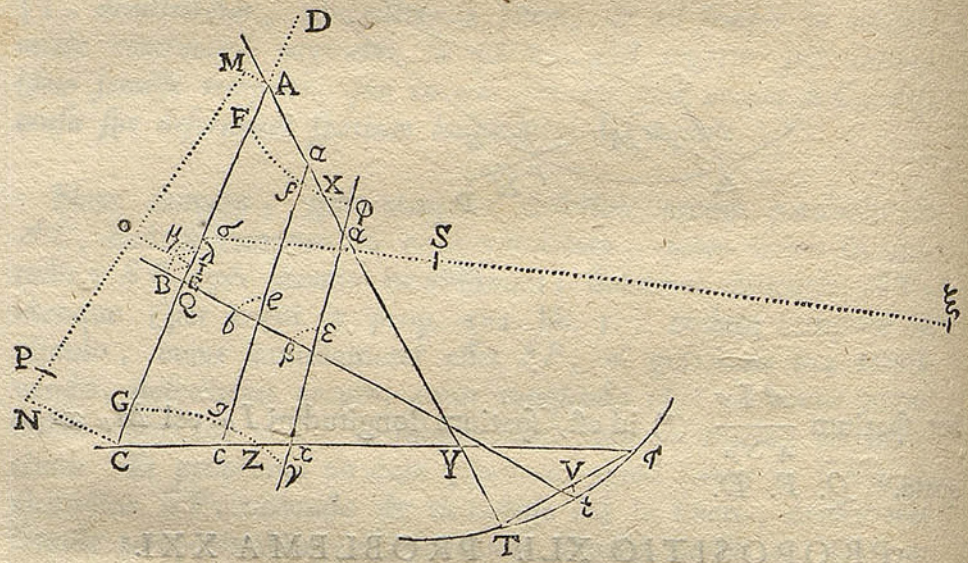
Seligantur tres obſervationes (o) æqualibus temporum intervallis

(n) * *Id eſt.* (Lem. IX.).

(o) * *Æqualibus temporum intervallis.* Ratio patet per not. 138. 142.

DE MUNDI SYSTEMATE.

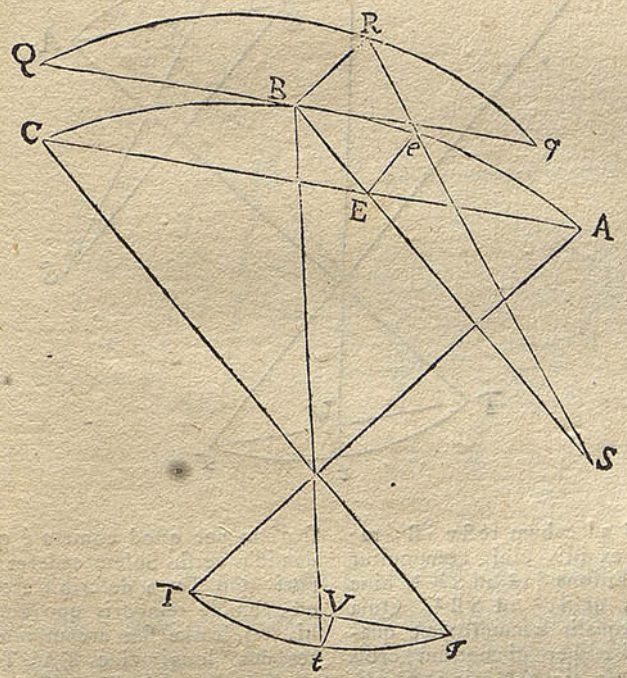
vallis ab invicem quamproximè distantes. Sit autem temporis intervallum illud, ubi cometa tardius movetur, paulo majus altero, ita videlicet ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum *E* (in fig. lem. VIII.) incidat in punctum *M* quamproximè, & inde aberret versus *I* potius quam versus *A*. (P) Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus cometæ locus per lemma sextum.



Designet *S* solem, *T*, *t*, *τ* tria loca terræ in orbe magno, *TA*, *tB*, *τC* observatas tres longitudines cometæ, *V* tempus inter observationem primam & secundam, *W* tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem, quam cometa toto illo tempore eâ cum velocitate, quam habet in mediocri telluris à sole distantiâ, describere posset, quæque (per corol. 3. prop. XL. lib. III.) invenienda est, & *tV* perpendiculum in chordam *Tτ*. In observatâ longitudine mediâ *tB* sumatur utcunque punctum *B* pro loco cometæ in plano ecliptiæ, & inde versus

142. (p) * *Si tales observationes.* (Ibid.).

versus solem *S* ducatur linea *BE*, quæ sit ad sagittam *tV*, ut contentum sub *SB* & *St quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt *SB* & (q) tangens latitudinis cometæ in observatione secundâ ad radium *tB*. Et per punctum *E* agatur (per hujus lem. VII.) recta *AEC*, cujus partes *AE*, *EC*, ad rectas *TA* & *τC* terminatæ, sint ad invicem ut tempora *V* & *W*: & (r) & erunt *A* & *C* loca cometæ in plano eclip-



(q) * *Et tangens latitudinis cometæ.* Ex puncto B, ad planum Ecclipticæ erecta intelligatur normalis, hæc erit tangens latitudinis cometæ in secundâ observatione, sumpto tB pro radio.

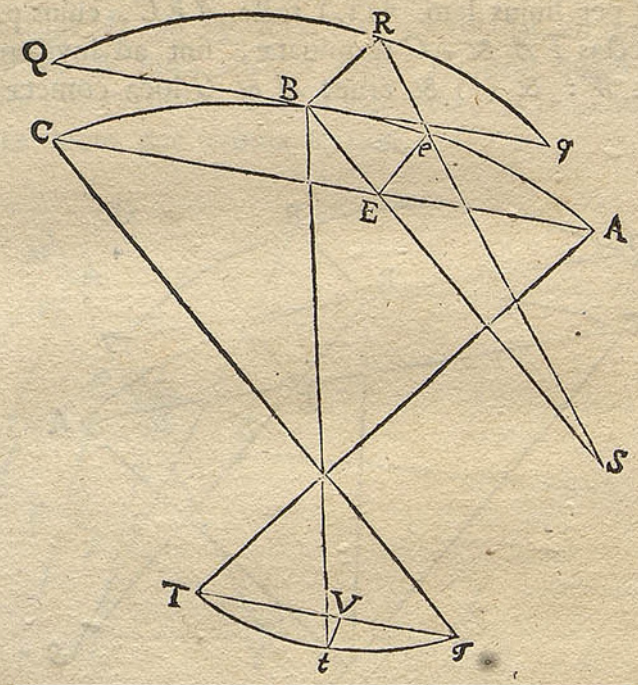
(r) * *Et erunt A & C loca cometæ.* Quoniam (ex hyp.) B est vestigium cometæ in plano Ecclipticæ, & BR ad planum Ecclipticæ normaliter ducta, tangens latitudinis observatæ ex t ad radium tB, patet punctum R esse verum cometæ locum, atque RS distantiam cometæ à Sole in observatione secundâ. Per E, agatur Ee, ad BR, parallela quæ (per prop. 8. lib. XI. elem.) normalis est ad planum Ecclipticæ, jacetque in plano trianguli SBR, occurrat hæc ipsi SR in e. Jam verò recta Re, est ad rectam tV, in ratione compositâ ex Re, ad BE, & BE ad tV. Sed (per prop. 12. lib. 6. elem.) Re est ad BE ut RS ad BS & BE est ad tV, ut $St^2 \times SB$ ad SR^3. Quare Ee est ad tV, in ratione compositâ ex ratione SR ad BS, & ratione 142

SCD Lyon 1 Mathématiques

SCD LYON 1

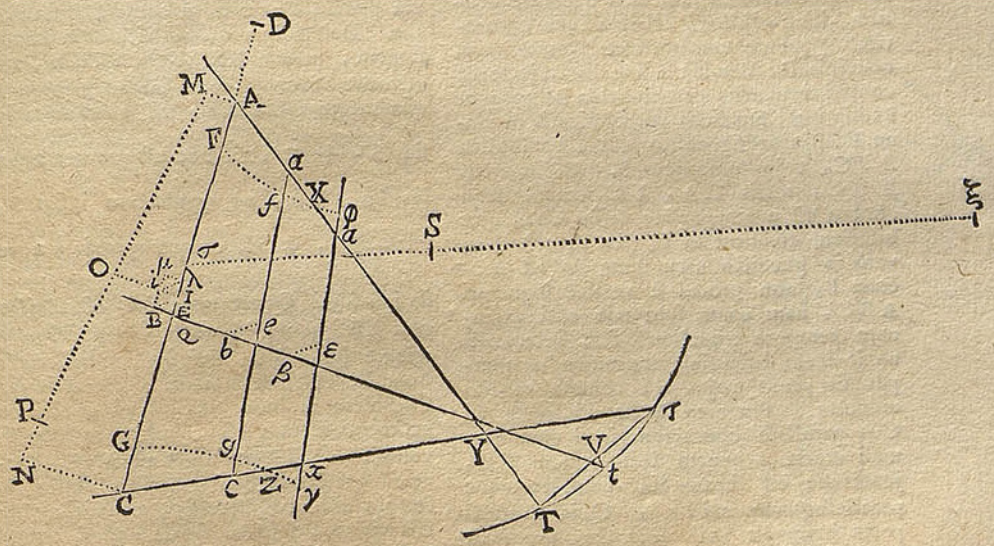
eclipticæ in obſervatione primâ ac tertiâ quamproximè, ſi modo *B* ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ.

Ad



142. tione $St^2 \times SB$ ad cubum rectæ SB; ratio autem quæ ex iſtis binis componitur eadem eſt cum ratione St^2 ad SR^2, hinc Re eſt ad BE, ut St^2 ad SB^2. Quia verò tV eſt æqualis quamproximè quadrato arcûs Tt per diametrum orbis magni diviſo (182. lib. 1.) erit recta tV, quamproxime ſpatium per quod terra è quiete demiſſa vi ſuæ gravitatis caderet verſus Solem, dum ſemiſſem arcûs Tt, deſcribet, ſi eâdem ubique gravitate acceleratrice uniformiter continuatâ urgeretur quâ urgetur in loco t, (202. lib. 1.). Præterea gravitas acceleratrix verſus ſolem in loco t, eſt ad gravitatem acceleratricem verſus eundem in loco R, ut SR^2 ad St^2, & ſpatia eodem tempore, urgentibus illis viribus deorſum verſus Solem, deſcripta, ſunt inter ſe ut vires (Lem. X. Lib. I.); Quare recta Re, eſt ſpatium per quod cometa è quiete ex R demiſſus verſus Solem caderet ſemiſſe temporis quo Terra deſcribit arcum Tt, hoc eſt, ſemiſſe temporis quo cometa deſcribit trajectoriæ ſuæ arcum interceptum inter duas longitudines TA, TC, ideóque punctum R, eſt in arcûs iſtius chordâ. Undè ſi tam arcûs trajectoriæ Q R q binis longitudinibus TA, TC terminati quam puncti e, concipiantur veſtigia normalibus ad planum Eccliptiæ demiſſis ſignata, nempè A, B, C & E, erit punctum E in chordâ arcûs ABC. Sed chorda arcûs ABC dividitur à rectâ SB ferè in ratione temporum quibus cometa ad Eclipticam reductus, deſcribit arcus AB, BC, (165.) & (per conſtr.) in eâdem ratione dividitur recta AC, nullaque alia hiſce conditionibus poteſt ſatisfacere. Cùm igitur oporteat chordam arcûs qui eſt

Ad AC biſectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipſi AC parallelam. Junge occultam Si ſecantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3I\lambda$, & per ſolem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem



$3S\sigma + 3i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, à puncto B verſus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ ſit ad priorem BE in duplicata ratione diſtantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eâdem lege ac prius, id eſt, ita ut ejus partes AE & EC ſint ad invicem, ut tem-

eſt veſtigium portionis trajectoriæ inter longitudines T A, T C interceptæ, à rectis T A, T C terminari & per E tranſire & in E dividi in ratione temporum, cumque recta A C haſce conditiones ſola & unica obtineat, evidens eſt rectam A C eſſe chordam prædicti arcûs, ac proindè puncta A & C ſunt quamproxime veſtigia cometæ in plano Eccliptiçæ in obſervationibus primâ & tertiâ, ſi modò B, ſit locus ejus rectè aſſumptus in obſervatione ſecundâ. 142.

DE MUNDI SYSTEMATE.

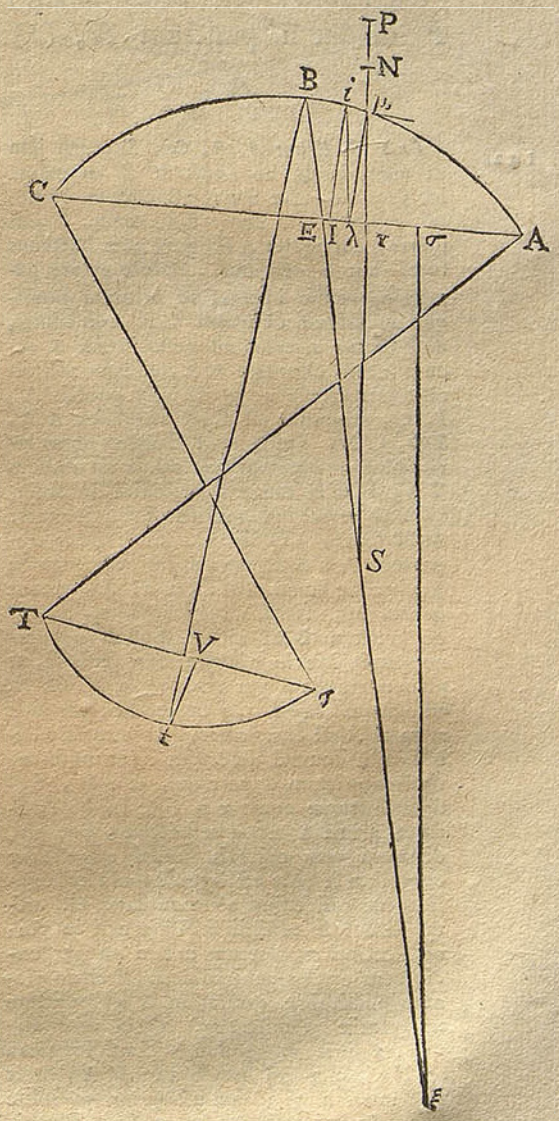
tempora inter observationes *V* & *W*. Et erunt *A* & *C* loca cometæ (f) magis accuratè.

Ad

142. (f) * *Magis accuratè.* Quoniam (per constr. præced.) assumptus est locus B vero non satis proximus, & licet accuratè sumptus fuisset, tamen loca A & C, inde deducta non sunt satis accuratè definita, hinc adhiberi debet aliqua correctio. Manente constructione Newtonianâ, concipiantur demissa à singulis trajectoriæ cometicæ punctis perpendicula ad planum Ecclipticæ, prædictis perpendiculis in plano Ecclipticæ signabitur curva parabolica A B C, cujus umbilicus S. Hujus arcûs A B C, rectis T A, T C comprehensi chorda est quamproximè recta C A, quæ bifariam dividitur in I, (ex dem.). Jam verò in prædicto arcu sumptum est punctum B, non procul à vertice segmenti A B C, nam capta sunt tria observationum tempora æqualibus ferè intervallis ab invicem distantia, ita tamen ut tempus sit paulò majus ubi cometa tardiùs movetur. Præterea ducta est recta ad C A parallela concurrens in i cum normali erectâ à puncto I ad rectam C A, junctaque est secans S i, completumque parallelogrammum i I λ μ. Quia verò respectu immensæ Solis distantiæ, evanescit distantia punctorum I, μ; erit α ferè vertex segmenti A B C. Jungatur μ S, secans chordam A C in Y, erit μ Y, ferè parallela i λ, ob immensam puncti S distantiam, ideóque λ γ, æqualis rectæ i μ, ac proindè & ipsi i λ. Sed (ex constr.) I σ sumpta est tripla ipsius i λ, quarè est etiam tripla ipsius λ γ & reliquæ Y σ, ideóque juncta σ S, (165) ea ipsa est recta σ S, quæ exhibetur in Lem. 8. id est, in rectâ σ S, productâ versus S, reperitur punctum ξ, à quo ducta quævis recta chordam A C arcumque C B A secans, chordam secat in segmenta quæ eandem habent rationem cum temporibus quibus respondentes arcus à cometâ describuntur. Sed (ex constr.) $\sigma\xi = 3S\sigma + 3\,i\lambda$ & $i\lambda = I\mu$, sunt enim rectæ i λ, I μ, diametri ejusdem parallelogrammi rectanguli, hinc $\sigma\xi = 3\sigma s + 3\,I\mu$. Quarè (140) punctum ξ, suprà inventum, illud est ex quo ducta utcumque recta dividit chordam C A in ratione temporum quibus binæ partes arcûs A C ab eâdem rectâ productâ notatæ, à cometâ describuntur. Deletâ igitur, ad vitandam confusionem, priore B E versus S ductâ, acta est nova versus ξ, quæ est ad priorem ut quadratum ipsius S B, ad quadratum ipsius $S\mu + \frac{1}{3}\,i\lambda$, hoc est propter æquales $i\lambda$, $I\mu$, ad quadratum ipsius $S\mu + \frac{1}{3}\,I\mu$, & S B est quamproximè æqualis ipsi S μ. Quarè nova B E, est ad priorem B E, ut $S\mu^2$, ad SN^2, positâ μ N triente ipsius I μ, sivè i λ, ut in constr. Lem. X. Deinde gravitas acceleratrix versus Solem in loco N, est ad gravitatem acceleratricem versus eundem in loco B, vel μ, ut SB^2 vel $S\mu^2$ ad SN^2. Præterea gravitates acceleratrices versus solem in distantiis diversis, manentibus dictis viribus, sunt ut spatia eodem tempore versus solem cadendo descripta; est igitur nova B E, ad priorem B E, ut spatium versus solem cadendo percursum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco N, semisse temporis quo cometa describit arcum longitudinibus T A, T C, comprehensum, ad spatium eodem tempore versus solem cadendo descriptum, urgente vi acceleratrice quæ urget in loco B. Sed æquales sunt hujus analogiæ consequentes, quarè æquantur etiam antecedentes, ideóque nova recta B E æquatur spatio à grave cadente versus solem percurso, semisse temporis quo cometa arcum A B C, in Ecclipticâ describit, urgente vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in distantiâ S N, à sole obtinet. At (Lem. XI.) spatium per quod corpus decidit versus solem semisse temporis quo cometa describit arcum A B C, cum urgetur vi acceleratrice uniformiter continuatâ quæ in loco N ob-

tinet

Ad *AC* bisectam in *I* erigantur perpendicula *AM*, *CN*, *IO*, quorum *AM* & *CN* sint tangentes latitudinum in observatione primâ ac tertiâ ad radios *TA* & *τC*. Jungatur *MN* secans



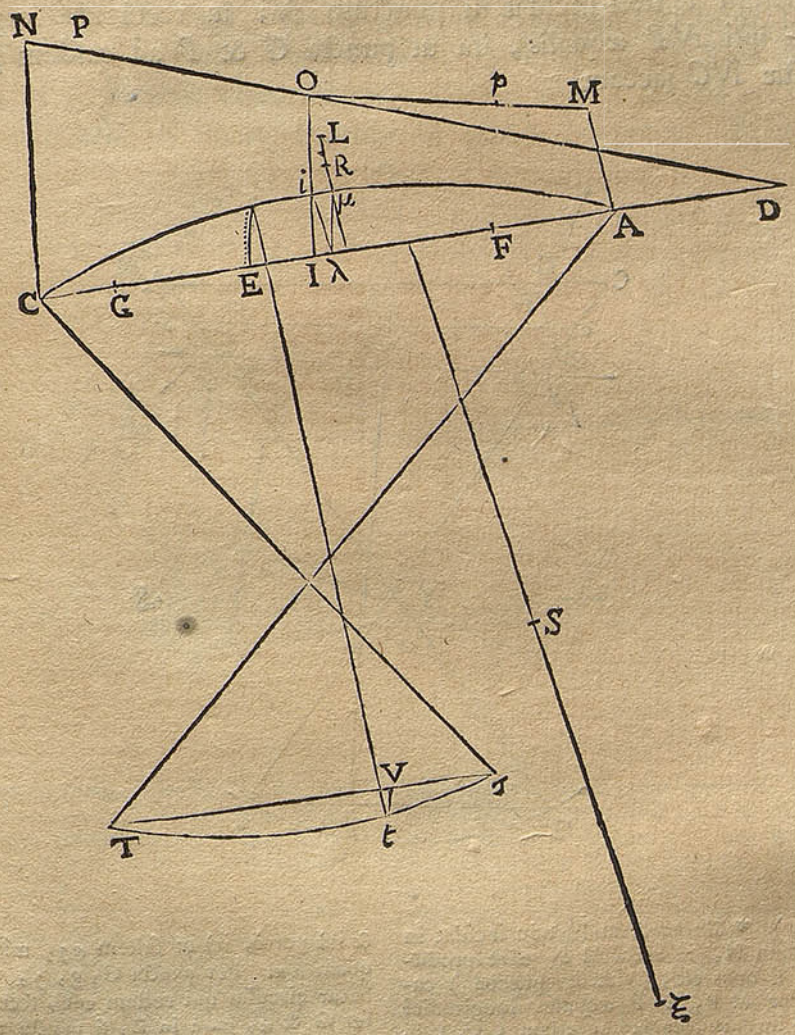
tinet, æquale est rectæ μY, segmento ipsius μS, inter verticem μ & chordam AC intercepto, ac proinde æquatur quamproximè ipsi BE segmento rectæ $B\xi$, inter punctum B ipsi μ proximum & chordam AC comprehenso. Undè punctum E est in chordâ AC magis accurate quam anteà, hoc est, chorda arcûs qui est vestigium portionis trajectoriæ cometicæ in plano Ecclipticæ, inter longitudines TA, TC interceptæ, per punctum E ultimò inventum transit quamproximè. Porrò chorda prædicta per E traducta inter TA, TC, ità locari debet ut AE, sit ad EC, sicut tempus quo cometa describit Ecclipticæ arcum inter longitudines TA & tB, ad tempus quo arcum inter tB & TC describit (Lem. 8.) sed AC ità (per Lem. 8) acta est per E, ut AE sit ad EC in eâdem illâ ratione, nempè sicut tempus inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam. Rectè igitur acta est AC, per E scilicet transiens & divisa in E ut oportebat, ac proinde si modò punctum B, rectè fuerit assumptum pro cometæ vestigio in observatione secundâ, puncta A, C sunt ejusdem vestigia quamproximè in observationibus primâ & tertiâ.

DE MUNDI SYSTEMATE.

cans IO in O. Constituatur rectangulum $iI\lambda\alpha$ ut prius. In IA productâ capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$. Deinde in MN versus N capiatur MP, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicatâ ratione mediocris distantiæ telluris à sole (seu semidiametri orbis magni) ad distantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N, (t) erunt A, B, C tria loca cometæ,

342. (t) * *Erunt A, B, C.* Superest jam ut dignoscatur an punctum B in mediâ longitudine rectè fuerit assumptum cometæ vestigium, ut error hinc ortus, si quis fuerit, corrigatur, reliquis quæ hactenus facta sunt manentibus. Deleto priore parallelogrammo $iI\lambda\mu$, ad priorem minusque accuratam chordam CA constituto, describatur alterum ad posteriorem & accuratiorem chordam CA, eâdem adhibitâ constructione ut priùs. Ex punctis A, I, C, erigantur ad CA normales AM, IO, CN, sitque AM tangens notæ latitudinis in observatione primâ ad radium TA, & CN tangens latitudinis in observatione tertiâ ad radium TC; jungatur MN secans IO in O. Si erigatur trapezium ACNM normaliter ad planum Eclipticæ manente rectâ CA, erunt puncta M, N loca vera cometæ, si modò punctum B sit ejus vestigium in plano Eclipticæ in observatione secundâ, & planum transiens per tria puncta M, O, N, est planum trajectoriæ cometicæ, ideoque recta MN est chorda arcus trajectoriæ parabolicæ à cometâ descriptæ inter observationem primam & tertiam, & SM, SN sunt distantiæ cometæ à sole in observatione primâ & tertiâ respectivè, hoc est, distantia vera cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ à Sole est hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia à sole vestigii illius puncti in plano Eclipticæ, alterum autem est perpendiculum ex isto vestigio normaliter ad planum Eclipticæ excitatum & ad punctum trajectoriæ terminatum. Quia verò aliqua ex istis perpendiculis sunt longiora ut NC, quædam breviora ut MA, inter hæc medium quoddam usurpetur, putà hic IO. Et universaliter loquendo, distantia cujusvis puncti trajectoriæ cometicæ à sole erit quamproximè hypothenusa trianguli rectanguli cujus alterum latus est distantia puncti analogi in vestigio trajectoriæ descripto & alterum latus est ipsa recta IO. Quibus positis in IA, eâve productâ capiatur $ID = S\mu + \frac{2}{3}i\lambda = SR$, factâ $LR = L\mu$, & jungatur DO, hæc quamproxime æquabitur puncti trajectoriæ cujus μ est vestigium distantiæ à sole auctæ duabus tertiis rectæ interjectæ inter punctum illud & chordam arcûs trajectoriæ, ipsam scilicet MN in trapezio ACNM, id est, recta DO æqualis est rectæ in plano trajectoriæ cometæ analogæ ipsi SR in ejus vestigio in plano Eclipticæ, hoc est DO æqualis est rectæ SR in parabolâ (Lem. X.). Jam (per cor. 3 prop. 40.) conferatur velocitas cometæ, dum in parabolicâ suâ trajectoriâ movetur in distantiâ à sole æquali rectæ DO, cum velocitate telluris circà solem, & definiatur linea quam cometa, cum prædictâ velocitate æquabiliter motus, percurreret toto tempore quo tellus arcum τ t T describit, sive toto tempore quo cometa arcum ABC in Eclipticâ percurrit, in partibus arcûs T t τ à tellure interim percursi. Id autem facile præstatur modo sequenti. Calculo inveniatur longitudo arcûs τ t T à tellure descripti inter observationem primam & tertiam, posito quovis numero rotundo pro mediocri distantiâ terræ à sole, longitudo putà MP quæ est ad longitudinem priùs inventam X, in subduplicatâ ratione diametri orbis magni ad rectam notam DO, quæque proindè datur, est ipsa longitudo quæsita, ea nempe quam, cometa æquabiliter latus cum velocitate quam trajectoriam suam parabolicam describens habet ad distantiam à sole æqualem rectæ DO, percurreret

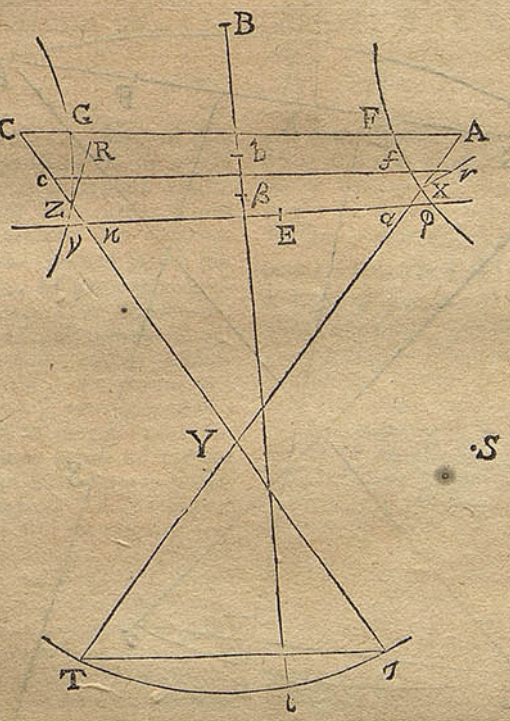
tem-



tempore quo cometa arcum cujus chorda MN revera percurrit. Nam (per cor. 3. prop. 40.) velocitas cometæ in hâc distantiâ DO, est ad velocitatem telluris in prædictâ ratione. Sed (per Lem. X.) dicta longitudo MP æqualis est chordæ arcûs quem cometa isto tempore revera describit; Quare si reperiatur MP æqualis chordæ MN, hoc est, si punctum P incidat in punctum N recte assumptum fuit punctum B in longitudine secundò observatâ pro vestigio cometæ, ideóque erunt A, B, C, tria loca cometæ per quæ orbis ejus in plano Ecclipticæ describi debet. 142

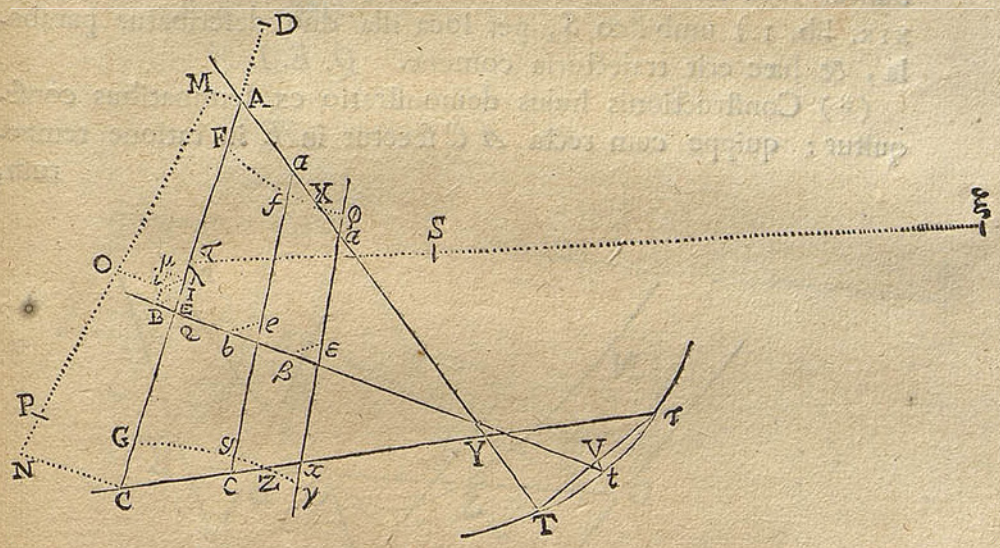
DE MUNDI SYSTEMATE.

tæ, per quæ orbis ejus in plano ecliptícæ describi debet. (u) Sin punctum *P* non incidat in punctum *N*; in rectâ *AC* capiatur *CG* ipsi *NP* æqualis, ita ut puncta *G* & *P* ad easdem partes rectæ *NC* jaceant. Ea-



142. (u) * *Sin punctum* P, non incidat in punctum N, in rectâ M N eâve productâ, si opus est, (vid. fig. præced.) capiantur M P, N P æquales longitudini prius inventæ, capiantur etiam C G, C F, æquales M P, N P, ità ut G & P ad easdem partes rectæ N C jaceant. Præterea eâdem methodo quâ ex assumpto puncto B, inventa sunt puncta E, A, C, G, ex assumptis aliis punctis b & β, inveniantur nova puncta e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Quod si longitudo prius inventa M P, minor fuerit quam M N, aut A G, vel C F, punctum b, sumendum erit propius puncto Y, in quo C τ & A T concurrunt, & ità porrò, ità ut saltem α γ, minor fiat quam α κ. Per puncta G, g, γ, describatur circulus qui rectam τ C, secabit inter G & κ, putà in Z, si puncta nova b, β, sumpta fuerint, ut jam diximus. Similiter per puncta F, f, φ, describatur circulus rectam T A, intersecans in X, erunt puncta Z, X, loca cometæ ad Eclipticam reducta, sive cometæ vestigia in observatione primâ & tertiâ, si B sit ejusdem vestigium in observatione secundâ. Idem similiter obtinet in a, c, & b, item in α, κ & β. Jam verò demonstratum est locum B, esse vestigium cometæ in observa-

Eadem methodo, quâ punctâ *E*, *A*, *C*, *G*, ex assumpto puncto *B* inventa sunt, invenientur ex assumptis utcunque punctis aliis *b* & *β* puncta nova *e*, *a*, *c*, *g* & *ε*, *α*, *κ*, *γ*. Deinde si per *G*, *g*, *γ* ducatur circumferentia circuli *Gg γ*, secans rectam *τC* in *Z*: erit *Z* locus cometæ in plano eclipticæ. Et si in

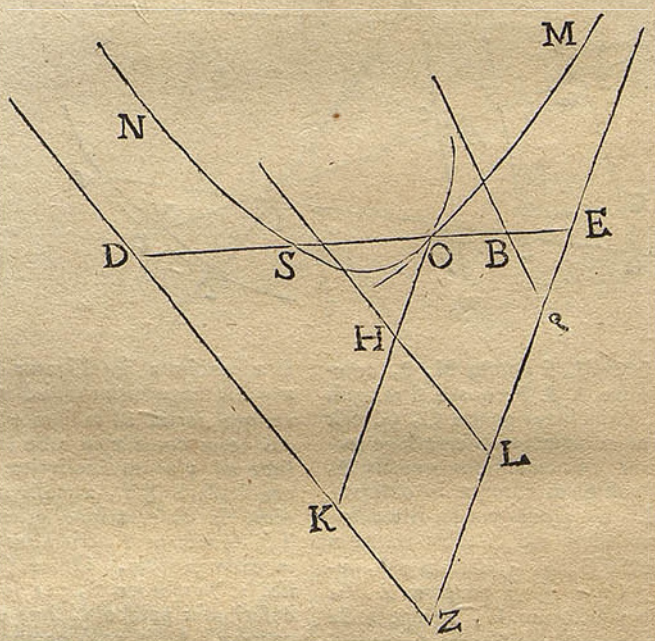


servatione secundâ, si puncta N, P, coincidant, itemque A & F; quarè si reliquis manentibus, coincidant puncta C, G, erit C, vestigium cometæ in observatione tertiâ. Similiter coincidentibus punctis A, F, erit A, vestigium cometæ in observatione primâ. Ut autem puncta illa coinciderent, traductus est circulus transiens per tria puncta G, g, γ, rectam τC, secans in Z. Cùm igitur punctum Z, sit tam in loco punctorum C, nempe rectâ τC, quam in loco punctorum G, nempè circulo, quandò punctum C reperitur in Z, punctum G in illo etiam reperietur, id est, in isto casu coincident puncta C, G, ideóque punctum Z est verum cometæ vestigium in plano Eclipticæ in observatione tertiâ, huic enim conveniunt omnes conditiones requisitæ. Similiter ob easdem rationes, punctum X est verum cometæ vestigium in observatione primâ. Quare si ex puncto Z, ad planum Ecclipticæ excitata intelligatur normalis ZR æqualis tangenti latitudinis notæ in observatione tertiâ ad radium τZ, erit R locus verus cometæ in orbe proprio. Similiter ad planum Eclipticæ erigatur perpendicularis XY, æqualis tangenti latitudinis in observatione primâ ad radium TX, punctum Y, erit alter cometæ locus in orbe proprio. Quarè (per prop. 19. lib. 1.) umbilico S, per loca bina R, r, describatur parabola, hæc erit trajectoria cometæ. Quia verò parabolæ per puncta R, r, & umbilico S, descriptæ duplex positio esse potest (ut patet ex constr. prop. 19. lib. 1.) ex eodem umbilico S, & binis punctis R, r, duæ describi poterunt parabolæ; utra autem pro orbe cometæ sumenda sit ex aliâ quâvis cometæ observatione manifestum erit. Nam locus cometæ qui ex alterâ harum parabolarum colligetur, cum observato loco conveniet, locus autem ex alterâ parabolâ deductus nequaquam observationibus congruet. 142

DE MUNDI SYSTEMATE.

AC, ac, $\alpha\nu$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipsis CG, cg, $\nu\gamma$ respectivè æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$, secans rectam AT in X; erit punctum X alius cometæ locus in plano eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo cometæ in orbe proprio. Denique (per prop. XIX. lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur parabola, & hæc erit trajectoria cometæ. *Q. E. I.*

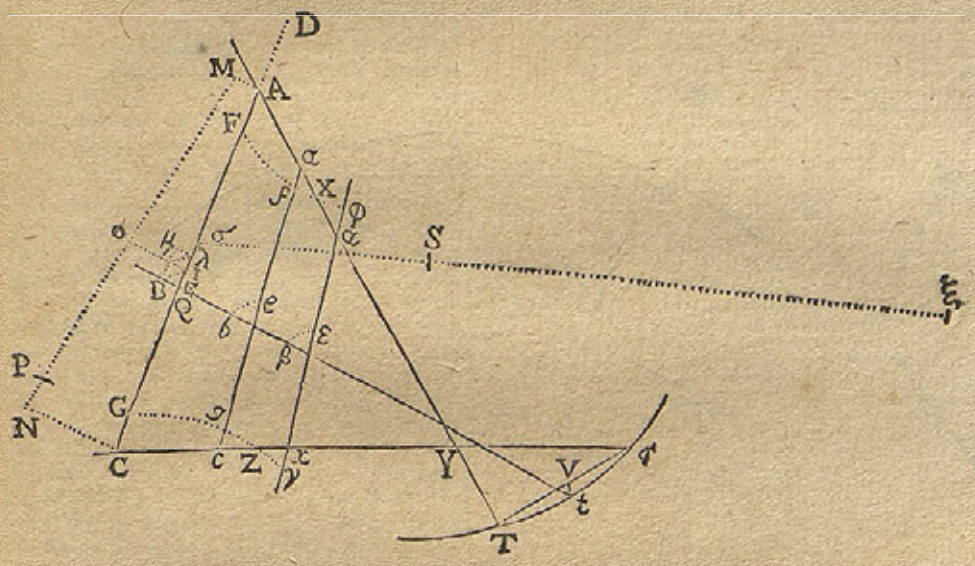
(x) Constructionis hujus demonstratio ex lemmatibus consequitur: quippe cum recta AC secetur in E in ratione temporum,



143. (x) * *Constructionis hujus demonstratio.* Patet ex notis præced.

† 143. Lemma. Sit angulus rectilineus AQB datumque punctum S; item sit curva MON, talis ut per S ductâ quâvis rectâ SE sit BE, anguli lateribus intercepta, æqualis rectæ SO, erit curva MON, hyperbola. Nam ducatur SL, ad BQ, parallela, occurrensque ipsi AQ in L, in rectâ QL productâ capiatur LZ = LQ, agaturque ZD ad QB parallela, itemque ducatur OK parallela ad QZ: ob SO = BE (per hyp.) erit HO = QE. Quare cum sit SH : HO = SL : LE = SL − SH : LE − HO = LH : LQ = LH : HK, erit SH × HK = HO × LH, hoc est, SL

rum, per lemma VII, ut oportet per lem. VIII: & BE per lem XI. fit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per corol. lem. X.) lon- LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



gitudo sit chordæ arcus, quem cometa in orbe proprio inter observationem primam ac tertiam describere debet, ideoque ipsi MN æqualis fuerit, si modo B sit verus cometæ locus in plano eclipticæ.

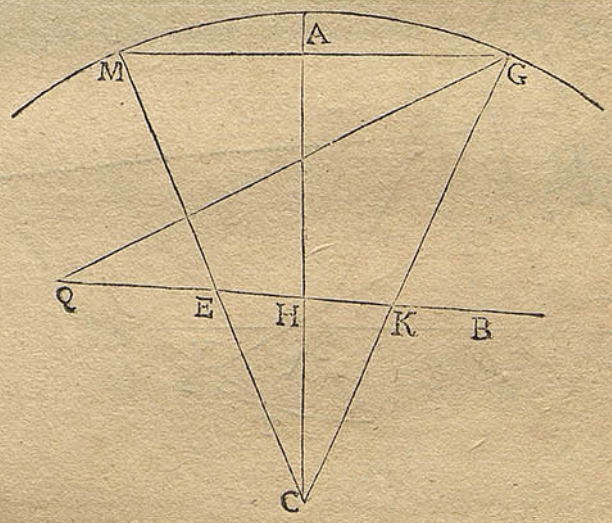
Cæterum puncta B, b, β non quælibet, sed vero proxima eli-

$SL \times HK - LH \times HK = KO \times LH - HK \times LH$. Unde erit $SL \times HK = KO \times LH$, vel $ZL \times LS = ZK \times KO$, ideóque curva MON, est hyperbola cujus asymptoti ZA, ZS (Lem. I. de con.).

144. Corol. Hinc per datum punctum S, recta linea duci potest ità ut pars rectæ BE, lateribus anguli dati EQB, intercepta, æqualis sit rectæ datæ. Nam descriptâ hyperbolâ MON, centro S, intervallo datam rectam æquante, describatur circulus hyperbolam intersecans in O, & producatur SOE, erit BE, æqualis rectæ datæ SO (143). 144

DE MUNDI SYSTEMATE.

(y) eligere convenit. Si angulus AQt, in quo vestigium orbis in plano eclipticæ descriptum secat rectam tB, præter propter innotescat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ



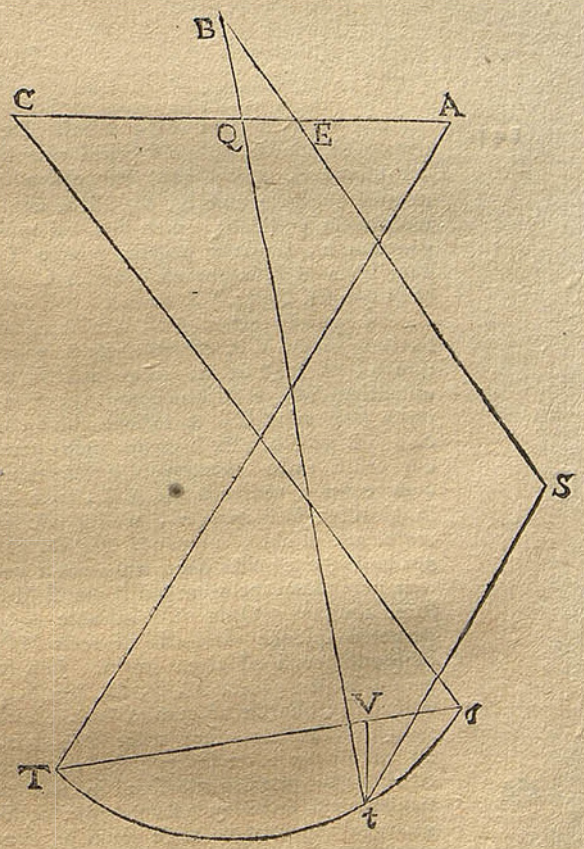
145. 145. Newtonus in arithmeticâ universali præcedentis corollarii constructionem quæ fit per conchoidem more veterum, anteponendam esse ait constructioni quæ Sectiones Conicas adhibet. Quare veterum constructionem utpotè simpliciorem hic quoque subjungemus. Sic autem describitur conchois. Agatur nempè recta QB, ad quam erigatur normalis AH, deindè ex puncto C, tanquam polo ità ducantur rectæ quotcumque CM, rectam QB secantes in E, ut semper sit EM, æqualis rectæ datæ AE, curva in quâ sunt puncta M, A dicitur conchois. Jam verò inter latera anguli GQB, ducere oporteat rectam GK, quæ transeat per punctum datum C, & æqualis sit rectæ datæ CK, puncto C tanquam polo & intervallo dato AH=CK describatur conchois quæ occurrat rectæ CG, in G patet fore KG, æqualem rectæ datæ CK. Q.E.F.

(y) * *Eligere convenit.* Si præter propter innotescat angulus quem vestigium orbitæ cometicæ continet cum rectâ terram & cometam in observatione secundâ conjun-

quæ sit ad $\frac{4}{3}$ *T t* in subduplicatâ ratione *S Q* ad *S t*. Et agendo rectam *S E B*, cujus pars *E B* æquetur longitudini *V t*, determinabi-

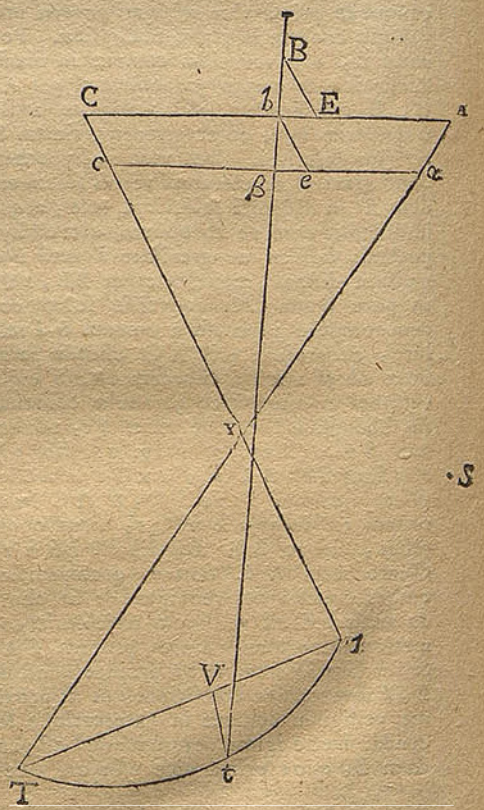
145.

jungente, sive huic æqualis angulus A Q t (Lem. 4. de con.) quem chorda A C continet cum rectâ t B, id quod præstari poterit per num. 133. tunc punctum B, primò assumendum hoc modo determinabitur. Ducatur recta A C, rectis positione datis T A, T C utrinque comprehensa, rectamque t B, positione datam, in angulo æquali dato in Q intersecans quæ sit ad $\sqrt{2} \times$ T t, hoc est, proximè ad $\frac{4}{3}$ T t, in subduplicatâ ratione S t ad S Q, & agatur per S, recta S E B, talis ut pars E B à cruribus anguli A Q B intercepta, æqualis sit rectæ t V (144. 145.) punctum B, ità definitum, est illud ipsum quod commodè primâ vice usurpari poterit pro vestigio cometæ in plano Eccliptice. Ponatur B, esse vestigium cometæ in plano Eccliptice & arcum parabolicum per A, C, B transeuntem esse vestigium arcûs trajectoriæ inter observationem primam & tertiam descripti. Jam verò in hypothesi quod gravitas acceleratrix versùs solem eâdem sit in distantiâ telluris à sole, atquè in distantiâ cometæ ab eodem, quæ est hypothesis Galilæi de gravitate à verâ non multum distans, æquales erunt B E, t V, ut pote spatia cadendo versùs solem eodem tempore percursa à cometâ & à tellure, ac proindè erit A C chorda parabolæ ad $\sqrt{2} \times$ T t chordam circuli cujus centrum cum umbilico parabolæ coincidit in subduplicatâ ratione rectæ S t, ad rectam S E, (Cor. 7. prop. 16. lib. 1). Sed sumpta est A C ad $\sqrt{2} \times$ T t in subduplicatâ ratione S t ad S Q, & A C secat rectam t B in angulo A Q t, sicut oportebat, atquè B E æqualis est ipsi t V; Quare recta A C obtinet quamproximè omnes conditiones requisitas ut sit chorda arcûs qui est vestigium trajectoriæ cometicæ inter longitudinem primam T A, & tertiam interceptæ ac proinde punctum B, habet omnes conditiones ut sit proximè vestigium cometæ in observatione secundâ. Rectè igitur determinatum est punctum B, quod primâ vice usurpare licet.



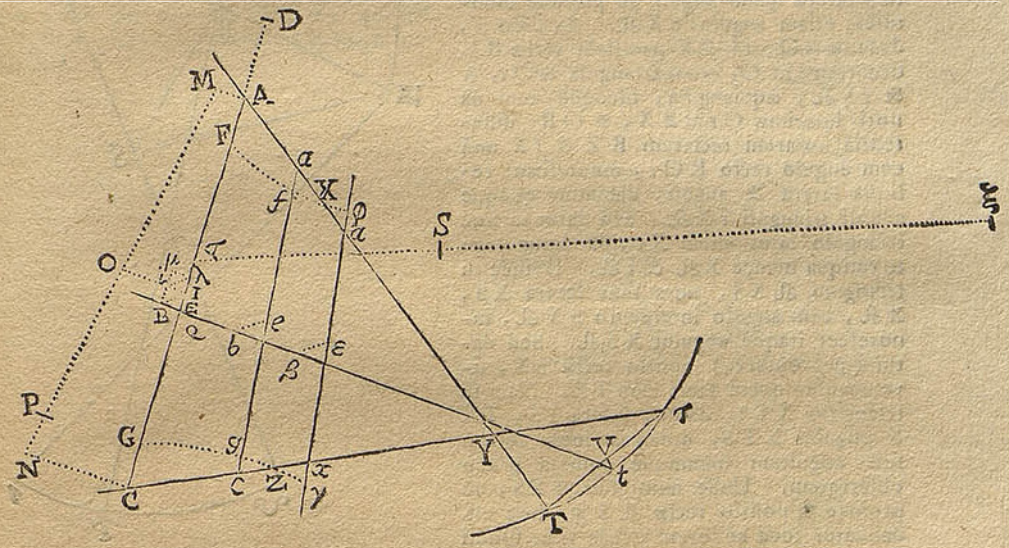
nabitur punctum *B* quod prim vice usurpare licet. (z) Tum rectâ *AC* deletâ & secundùm præcedentem constructionem iterum ductâ, & inventâ insuper longitudine *MP*; in *tB* capiatur punctum *b*, e lege, ut si *TA*, *τC* se mutuò secuerint in *Y*, sit distantia *Yb* ad distantiam *YB*, in ratione compositâ ex ratione *MP* ad *MN* & ratione subduplicatâ *SB* ad *Sb*. Et eâdem methodo inveniendum erit punctum tertium *β* si modo

145. (z) * *Tum rectâ AC, deletâ.* Determinato puncto B, quod primâ vice licet usurpare, cætera quæ deinceps assumuntur puncta nempè b, *β*, aliam constructionem postulant. Nec satis est quod punctum b, sumatur propius puncto Y, dum linea MP, minor est quam AC vel MN (in fig. Newt.) & contrà. Sed quia ducere oportet rectam AC, quæ sit æqualis longitudini MP, capiatur in tB punctum b, eâ lege ut sit distantia Yb, ad distantiam YB, in ratione compositâ ex ratione MP ad AC, & ratione subduplicatâ SB ad Sb. Ex hactenus dictis patet cur prior ratio componens adhibeatur; cum enim invenienda sit AC, quæ sit longitudini MP æqualis, si illa hâc sit major aut minor, minuenda erit vel augenda donec æquales fiant, æquarentur autem per solam priorem rationem si MP foret constans. Quia verò variante AC, perpetuò quoque variabilis est recta MP, ideò adhibenda est altera ratio. Jam in parabolis per puncta A, B, C, & a, b, c, descriptis, chordæ arcuum ABC, abc, in quibus æquales sunt rectæ BE, be, ad umbilicum S tendentes inter verticem & chordam interceptæ, sunt in ratione subduplicatâ rectarum SB, Sb (ut colligitur ex theor. 1. & 2. de parab.). Præterea (ex dem.) æquales sunt rectæ BE, be quamproximè; sunt enim spatia à cometâ versus solem cadendo in diversis ab illo distantiis eodem tempore percursa, & vestigium cometæ in observatione secundâ proximum est vertici arcûs ABC, seu vestigii portionis trajectoriæ à cometâ inter observationem primam & tertiam descriptæ. Quare habetur punctum b, co-



metæ

dò operationem tertiò repetere lubet. Sed hâc methodo operationes duæ ut plurimum ſufficerint. Nam ſi diſtantia $B\,b$ perexigua obvenerit; poſtquam inventa ſunt puncta F, f & G, g, LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.



actæ rectæ Ff & Gg ſecabunt TA & τC in (*) punctis quæſitis X & Z.

Exem-

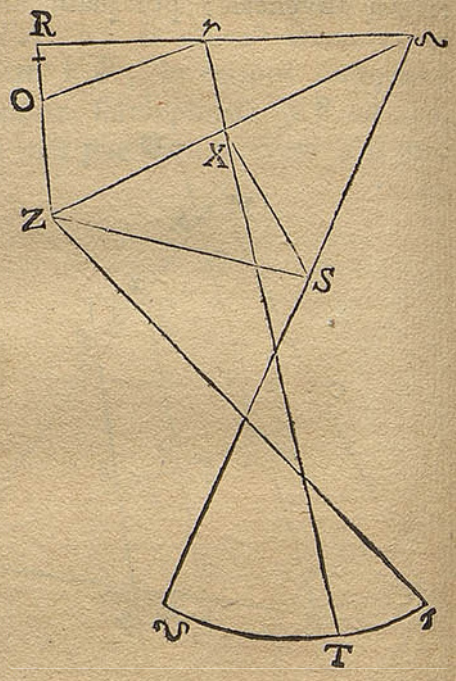
metæ veſtigium in plano Eccliptícæ, non tamen accuratum, ſed verò proximum duntaxat.

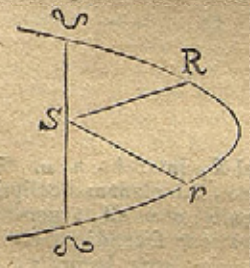
(*) * *In punctis quæſitis X & Z.* (Ut patet ex notâ u, in hanc prop.).

146. Si elliptica cometæ orbita magis accuratè obſervationibus ſatisfacere deprehendatur, ea ſic poterit deſcribi. Reperiatur veſtigium cometæ in plano Eccliptícæ in obſervatione ſecundâ, eundem ordinem ſitumque obtinet veſtigium illud inter puncta B, b, β, quem punctum Z, inter C, c, ϰ, vel X, inter A, a, α. Ex veſtigio ſic invento, ad planum Eccliptícæ erigatur normalis quæ eſt tangens latitudinis in obſervatione ſecundâ ad radium æqualem diſtantiæ inter locum t, dictumque veſtigium. Hujus perpendiculi extremum punctum ſignabit locum cometæ in orbitâ propriâ ſecundò obſervatum. Denique umbilico S, per puncta X, Z, & punctum modò inventum deſcribatur ellipſis (prop. 20. lib. 1.), hæc erit quæſita cometæ trajectoria. 146

DE MUNDI SYSTEMATE.

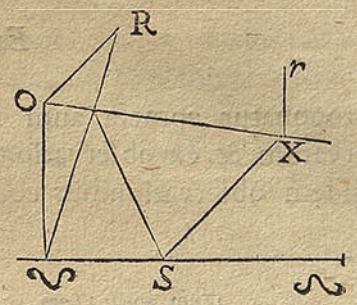
147. Ex præcedentis problematis solutione colligi possunt positio lineæ nodorum trajectoriæ & tempus quo cometa nodos tenet. Iisdem manentibus, & per easdem litteras designatis ut suprà, producantur rectæ Z X, R r, donec concurrant in ☊, jungaturque S Z, S X, S ☊. Jam vero (ex præced.) data sunt omnia puncta S, Z, X, ideóque trianguli S Z X, tam latera quam anguli ac proindè innotescit etiam angulus S X ☊. Ex loco r, ducatur r O, ad Z X parallela rectæ R Z, occurrens in O, erunt triangula R O r, & & r X ☊, æquiangula, ideóque cum ex notis lateribus O r = Z X, & O R, differentiâ notarum rectarum R Z & r X unà cum angulo recto R O r, innotescant reliqua latera & anguli, dabuntur quoque anguli trianguli r X ☊. Sed datur in hoc triangulo latus unum X r, dabuntur ergò & reliqua nempè X ☊ & r ☊. Deindè in triangulo ☊ X S, nota sunt latera X S, X ☊, cum angulo intercepto S X ☊, innotescet itaque angulus X S ☊. Sed datur (per observ.) positio rectæ S X, sivè angulus quem facit cum T X. Nam in triangulo X T S, dantur latera T S, T X & angulus X T S, distantia inter locum solis cognitum locumque cometæ primò observatum. Unde innotescit T X S, ac proindè & positio rectæ ☊ S ♈, hoc est, dabuntur loca nodorum è sole visa. Quod si æquales fuerint rectæ Z R, X r, nodorum linea parallela est rectæ Z X, ideóque positione cognita.

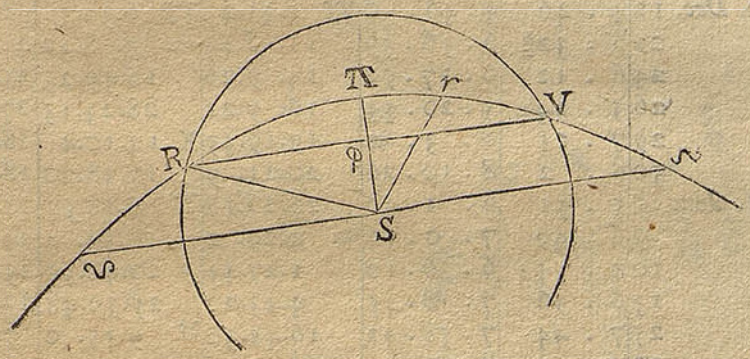




Ad determinandum tempus quo cometa in nodo versatur, sit R r, trajectoria cometæ (per prop. præced.) descripta, sitque superius inventa nodorum linea ☊ S ♈, trajectoriæ in ☊ & ☊ occurrens, erit (prop. 1. lib. 1.) intervallum temporis inter observationem primam & momentum quo cometa ad nodum ☊ appellit, ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r ☊ S, ad aream R S r; sed arearum r ☊ S, R S r, nota est ratio (per theor. 4. de parab. vel num. 142.) notum igitur est tempus quo cometa nodum ☊, tenet. Pari modo innotescit tempus quo cometa ad nodum alterum ♈ appellit.

148. Iisdem manentibus, determinabitur inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ. Ex puncto O ad ☌ S ☊, nodorum lineam erigatur perpendicularis O ☌, jungaturque R ☌. In triangulo O S ☌, præter rectum ad ☌, dantur (147.) angulus O S ☌ & latus O S, quare datur O ☌. Deinde in triangulo R O ☌, dantur latera circà rectum O R & O ☌, ideóque notus erit angulus O ☌ R, qui est inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ.





149. Facilè obtineri potest tempus quo cometa perihelium tenet. Umbilico S, per puncta R, r, describatur trajectoria cometæ. Centro S, per alterutrum punctorum putà R, describatur circulus trajectoriæ denuò occurrens in V, jungaturque R V, ad quam ex puncto S demittatur perpendicularis S φ, quæ producatur donec parabolæ occurrat in π, erit π trajectoriæ perihelium; & proindè recta ipsius S π quadrupla, erit ejusdem latus rectum principale. Cum enim umbilicus S, in parabolæ axe reperiatur, circulus centro S descriptus, parabolam intersecabit in duobus punctis ab axe æqualiter distantibus ac proindè axi normalis erit R V intersectiones conjungens; Quarè S φ est axis & π vertex parabolæ, sivè trajectoriæ perihelium & quadrupla S π parameter diametri cujus π est vertex (theor. 2. de parab.) hoc est, latus rectum principale. Jam capiatur tempus cujus intervallum ab observatione primâ, dum cometa versabatur in r, est ad intervallum temporis inter observationem primam & tertiam ut area r S π ad aream R r S, habebitur illud ipsum tempus quo cometa perihelium occupat.

150. Hinc etiam cometæ perigæum ejusque tempus determinabitur. Cum enim detur tempus inter observationem primam & tertiam interceptum, quo scilicet data area r R S, à cometa radio ad solem ducto describitur, data quoque erit area uno die similiter descripta. Præterea datur r, locus cometæ in observatione primâ, quare dabuntur loca cometæ in proprio orbe ad dies singulos. Sed dantur loca telluris in orbitâ suâ, notusque est situs mutuus inter telluris orbitam & cometæ trajectoriam. Undè innotescet tempus quo cometa est terræ proximus, hoc est, tempus quo cometa in perigæo versatur.

Exem-

DE MUNDE SYSTEMATE.

Exemplum.

Proponatur cometa anni 1680. Hujus motum à *Flamſtedio* obſervatum & ex obſervationibus computatum, atque ab *Halleio* ex iiſdem obſervationibus correctum, tabula ſequens exhibet.

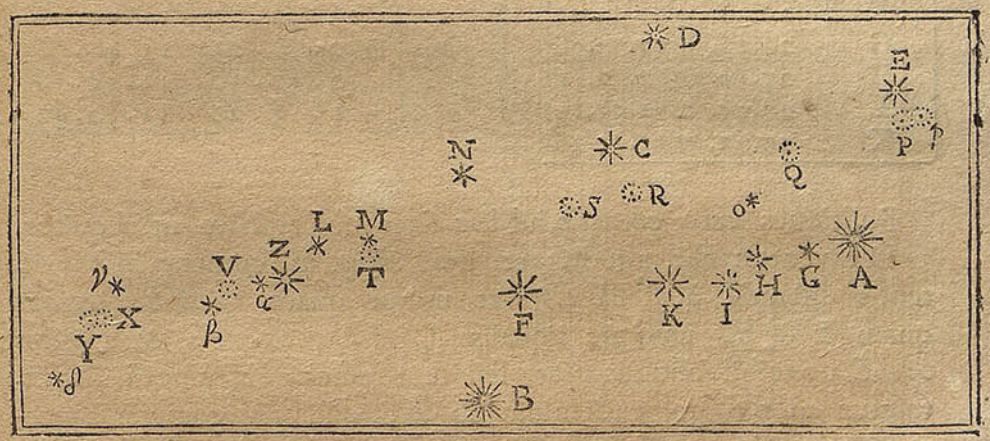
	Tem. appar.	Tem. verum	Long. Solis.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
	h. ′	h. ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680. *Dec.* 12	4 . 46	4 . 46 . 0	♍ 1 . 51 . 23	♍ 6 . 32 . 30	8 . 28 . 0
21	6 . 32½	6 . 36 . 59	11 . 6 . 44	♒ 5 . 8 . 12	21 . 42 . 13
24	6 . 12	6 . 17 . 52	14 . 9 . 26	18 . 49 . 23	25 . 23 . 5
26	5 . 14	5 . 20 . 44	16 . 9 . 22	28 . 24 . 13	27 . 0 . 32
29	7 . 55	8 . 3 . 2	19 . 19 . 43	♓ 13 . 10 . 41	28 . 9 . 58
30	8 . 2	8 . 10 . 26	20 . 21 . 9	17 . 38 . 20	28 . 11 . 53
1681. *Jan.* 5	5 . 51	6 . 1 . 38	26 . 22 . 18	♈ 8 . 48 . 53	26 . 15 . 7
9	6 . 49	7 . 0 . 53	♒ 0 . 29 . 2	18 . 44 . 4	24 . 11 . 56
10	5 . 54	6 . 6 . 10	1 . 27 . 43	20 . 40 . 50	23 . 43 . 52
13	6 . 56	7 . 8 . 55	4 . 33 . 20	25 . 59 . 48	22 . 17 . 28
25	7 . 44	7 . 58 . 42	16 . 45 . 36	♉ 9 . 35 . 0	17 . 56 . 50
30	8 . 7	8 . 21 . 53	21 . 49 . 58	13 . 19 . 51	16 . 42 . 18
Feb. 2	6 . 20	6 . 34 . 51	24 . 46 . 59	15 . 13 . 53	16 . 4 . 1
5	6 . 50	7 . 4 . 41	27 . 49 . 51	16 . 59 . 6	15 . 27 . 3

His adde obſervationes quaſdam è noſtris.

	Tem. appar.	Cometæ Longitudo	Cometæ Lat. bor.
1681. *Feb.* 25	8h . . 30′	♉ 26° . 18′ . 35″	12° . 46′ . 46″
27	8 . 15	27 . 4 . 30	12 . 36 . 12
Mar. 1	11 . 0	27 . 52 . 42	12 . 23 . 40
2	8 . 0	28 . 12 . 48	12 . 19 . 38
5	11 . 30	29 . 18 . 0	12 . 3 . 16
7	9 . 30	♊ 0 . 4 . 0	11 . 57 . 0
9	8 . 30	0 . 43 . 4	11 . 45 . 52

Hæ obſervationes teleſcopio ſeptupedali, & micrometro filiſque in foco teleſcopii locatis peractæ ſunt: quibus inſtrumentis

tis & positiones fixarum inter se & positiones cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam quartæ magnitudinis in sinistro calcaneo Persei (*Bayero o*) *B* stellam sequentem tertiæ magnitudinis in sinistro pede (*Bayero ?*) & *C* stellam sextæ magnitudinis (*Bayero n*) in talo ejusdem pedis, ac *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Z*, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stellas alias minores in eodem pede.



Sintque *p*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, *X*, loca cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantiâ *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$ *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$, *DI* $53\frac{5}{11}$ *AK* $38\frac{2}{3}$ *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hâc rectâ esset $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LN* ut 2 ad 9, & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tandem *Poundius* noster iterum observavit positiones harum fixarum inter se, & earum longitudines & latitudines in tabulam sequentem retulit.

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
A	♉ 26.41.50	12. 8.36
B	28.40.23	11.17.54
C	27.58.30	12.40.25
E	26.27.17	12.52. 7
F	28.28.37	11.52.22
G	26.56. 8	12. 4.58
H	27.11.45	12. 2. 1
I	27.25. 2	11.53.11
K	27.42. 7	11.53.26

Fixarum	Longitudines.	Lat. boreæ.
	° ′ ″	° ′ ″
L	♉ 29.33.34	12. 7.48
M	29.18.54	12. 7.20
N	28.48.29	12.31. 9
Z	29.44.48	11.57.13
α	29.52. 3	11.55.48
β	♊ 0. 8.23	11.48.56
γ	0.40.10	11.55.18
δ	1. 3.20	11.30.42

Positiones vero cometæ ad has fixas observabam ut sequitur.

Die veneris *Feb.* 25. st. vet. hor. $8\frac{1}{2}$ p. m. cometæ in p existentis distantia à stellâ E erat minor quam $\frac{3}{15}\ AE$, major quam $\frac{1}{5}\ AE$, ideoque æqualis $\frac{2}{11}\ AE$ proxime: & angulus ApE nonnihil obtusus erat, sed ferè rectus. Nempe si demitteretur ad pE perpendiculum ab A, distantia cometæ à perpendiculo illo erat $\frac{1}{3}\ pE$.

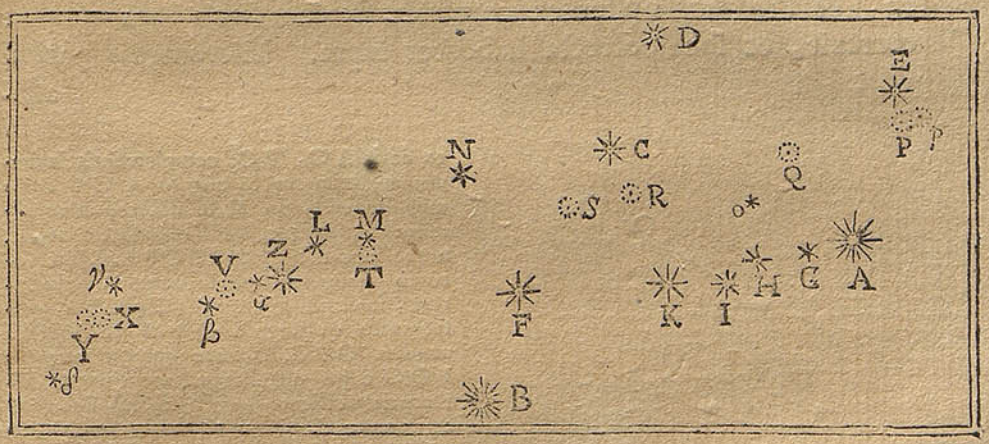
Eâdem nocte horâ $9\frac{1}{2}$, cometæ in P existentis distantia à stellâ E erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}\ AE$, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}\ AE$, ideoque æqualis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}\ AE$, seu $\frac{8}{39}\ AE$ quamproximè. A perpendiculo autem à stellâ A ad rectam PE demisso distantia cometæ erat $\frac{4}{5}\ PE$.

Die solis *Feb.* 27. hor. $8\frac{1}{4}$ p. m. cometæ in Q existentis distantia à stellâ O æquabat distantiam stellarum O & H, & recta QO producta transibat inter stellas K & B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes magis accuratè definire non potui.

Die martis *Mart.* 1. hor. 11. p. m. cometa in R existens, stellis

ſtellis *K* & *C* accuratè interjacebat, & rectæ *CRK* pars *CR* paulo major erat quam $\frac{1}{3}CK$, & paulo minor quam $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{8}CR$, ideoque æqualis $\frac{1}{3}CK+\frac{1}{16}CR$ ſeu $\frac{16}{45}CK$.

Die mercurii *Mart.* 2. hor. 8. p. m. cometæ exiſtentis in *S* diſtantia à ſtellâ *C* erat $\frac{4}{9}FC$ quamproximè. Diſtantia ſtellæ *F* à rectâ *CS* producta erat $\frac{1}{24}FC$; & diſtantia ſtellæ *B* ab eâdem rectâ, erat quintuplo major quam diſtantia ſtellæ *F*. Item recta *NS* producta tranſibat inter ſtellas *H* & *I*, quintuplo vel ſextuplo propior exiſtens ſtellæ *H* quam ſtellæ *I*.



Die ſaturni *Mart.* 5. hor. $11\frac{1}{2}$. p. m. cometâ exiſtente in *T*, recta *MT* æqualis erat $\frac{1}{2}ML$, & recta *LT* producta tranſibat inter *B* & *F*, quadruplo vel quintuplo propior *F* quam *B*, auferens à *BF* quintam vel ſextam ejus partem verſus *F*. Et *MT* producta tranſibat extra ſpatium *BF* ad partes ſtellæ *B*, quadruplo propior exiſtens ſtellæ *B* quam ſtellæ *F*. Erat *M* ſtella perexigua quæ per teleſcopium videri vix potuit, & *L* ſtella major quaſi magnitudinis octavæ.

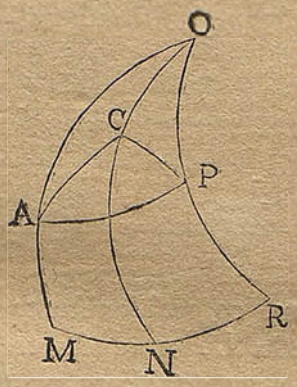
Die lunæ *Mart.* 7 hor. $9\frac{1}{2}$ p. m. cometæ exiſtente in *V*, recta $V\alpha$ producta tranſibat inter *B* & *F*, auferens à *BF* verſus *F* $\frac{1}{10}BF$, & erat ad rectam $V\beta$ ut 5 ad 4. Et diſtantia cometæ à rectâ $\alpha\beta$ erat $\frac{1}{2}V\beta$.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Die mercurii *Mart.* 9. hora $8\frac{1}{2}$ p. m cometa existente in *X*, recta γX æqualis erat $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum à stellâ δ ad rectam γX erat $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

Eâdem nocte horâ 12, cometa existente in *Y*, recta γY æqualis erat $\frac{1}{3}\gamma\delta$, aut paulo minor, puta $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & perpendiculum demissum à stellâ δ ad rectam γY æqualis erat $\frac{1}{8}\gamma\delta$ vel $\frac{1}{7}\gamma\delta$ circiter. Sed cometa ob viciniam horizontis cerni vix potuit, nec locus ejus tam distinctè ac in præcedentibus definiri.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes derivabam (a) longitudines & latitudines cometæ, & *Poundius* noster ex correctis fixarum locis loca cometæ correxit, & loca correcta habentur supra. Micrometro parùm affa-



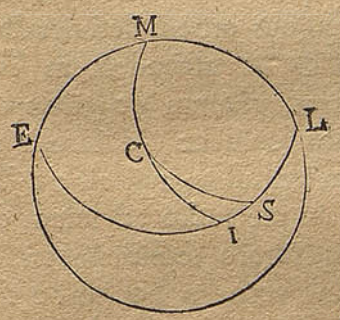
149. (a) 149. * *Longitudines & latitudines.* Si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum longitudines & latitudines notæ sunt, invenientur cometæ longitudo & latitudo ad tempus observationis. Referat MR, portionem Eclipticæ cujus polus O, sint A, P duæ stellæ quarum longitudines & latitudines datæ sunt, sitque C cometa cujus distantia à duabus stellis A, P nota sit. In triangulo AOP, ex datis AO, PO complementis latitudinum stellarum & angulo AOP cujus mensura est arcus MR differentia longitudinum, dabitur AF distantia stellarum, atque innotescet angulus OPA. Jam verò in triangulo ACP dantur omnia latera, unde invenietur angulus CPA, quo subtracto ex angulo OPA relinquetur angulus OPC. Quare dabitur angulus POC cujus mensura est arcus NR differentia scilicet longitudinum stellæ P & cometæ C. Item innotescet arcus OC, qui est complementum latitudinis cometæ. Eâdem prorsus ratione, si observentur distantiæ cometæ à duabus fixis quarum ascensiones rectæ & declinationes notæ sunt, indè colligentur ascensio recta & declinatio cometæ.

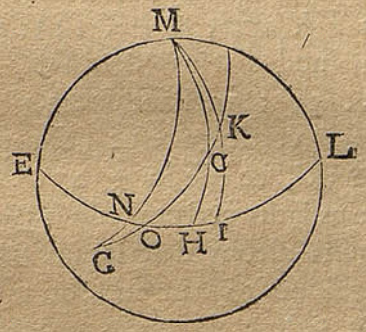
150. Datis declinatione & ascensione rectâ alicujus stellæ fixæ, inveniri possunt declinatio & ascensio recta cometæ, modò tamen stella & cometa transire vicissim possint per campum telescopii immoti aut alio quocunque modo obtineatur differentia declinationis & ascensionis rectæ inter fixam & cometam (39. lib. 3.) & hinc dabuntur cometæ longitudo & latitudo (17. lib. 3.)

151. Datis cometæ longitudine & latitudine, simulque notâ longitudine solis, datur distantia cometæ à sole. Sit enim EL portio Eclipticæ, Sol in S, latitudo

affabrè conſtructo uſus ſum, ſed longitudinum tamen & latitudinum errores (quâtenus ex obſervationibus noſtris oriantur) minutum unum primum vix ſuperant. Cometa autem (juxta obſervationes noſtras) in fine motus ſui notabiliter deflectere cœpit boream verſus, à parallelo quem in fine menſis *Februarii* tenuerat.

Jam





do cometæ CI; in triangulo CIS, ad I rectangulo (7. lib. 3.) datur latus CI, itemque notum eſt latus IS differentia longitudinum ſolis & cometæ, ideoque innoteſcit diſtantia cometæ à ſole CS.

152. Si duobus diebus ſeſe invicem immediatè ſubſequentibus obſerventur longitudines H, I & latitudines CH, KI cometæ alicujus, dabitur arcus KC quem cometa motu diurno proprio deſcripſit. Quoniam enim in triangulo KMC, datur angulus quem metitur arcus IH longitudinum differentia, ſimulque nota ſunt latera KM, CM, quæ ſunt datarum latitudinum KI, CH complementa, innoteſcet arcus KC. Si verò altera latitudo fuerit auſtralis, putà CH, altera Borealis ut GN, latus GM eſt ſumma latitudinis GN & quadrantis NM, ac proinde etiam in hoc caſu dabitur arcus CG.

153. Iiſdem manentibus, inveniri poteſt nodus O orbitæ cometæ datis enim in triangulo MCK lateribus MC, MK, cum angulo intercepto M quem metitur longitudinum datarum differentia HI, dabitur angulus MKC, qui ex 180°. ſubductus, relinquit angulum OKI. Jam verò datis triangulo OKI, ad I rectangulo, latitudine IK, & angulo OKI, invenitur angulus IOK, daturque arcus OI, quo addito longitudini I, obtinetur diſtantia nodi O à principio arietis. Ex præcedentibus patet datis duabus aſcenſionibus rectis & declinationibus inveniri quoque motum cometæ proprium, inclinationem orbitæ ad æquatorem & punctum in quo orbita illa æquatorem interſecat. 152.

154. Iiſdem poſitis ſit K locus cometæ primò obſervatus, à loco nodi O ſubtrahatur longitudo cometæ I, relinquetur arcus OI. Datis in triangulo KOI, ad I rectangulo, lateribus KI, OI, dabitur arcus KO quem cometa à primo obſervationis die uſque ad Eccliptican deſcripſit. Jam verò arcus KO conferatur cum arcubus deſcriptis ab initio obſervationis cometæ in K, ad datum uſque aliquod momentum ſingulis diebus pro arbitrio aſſumptum. Hinc proportionali parte adhibitâ, circiter colligetur tempus quo cometa ſecuit Eccliptican. Simili modo invenietur tempus quo trajecit æquatorem.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Jam ad orbem cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis, tres quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21. *Jan.* 5. & *Jan.* 25. (b) Ex his inveni *St* partium 9842,1 & *Vt* partium 455, quales 10000 sunt semidiameter orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo *tB* partium 5657, inveni *SB* 9747, *BE* primâ vice 412, *Sα* 9503, *tλ* 413: *BE* secundâ vice 421, *OD* 10186, *X* 8528,4 *MP* 8450, *MN* 8475, *NP* 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam *tb* 5640. Et per hanc operationem tandem distantias *TX* 4775 & *γZ* 11322. Ex quibus orbem definiendo, inveni nodos ejus descendentem in ☋ & ascendentem in ♈ 1 gr. 53′; inclinationem plani ejus ad planum ecliptica 61 gr. 20′ ½; verticem ejus (seu perihelium cometæ) distare à nodo 8 gr. 58′, & esse in ♐ 27 gr. 43′ cum latitudine australi 7 gr′. 34′; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri orbis magni posito 100000000; cometam verò in hoc orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8d. 0h. 4′. p. m. in vertice orbis seu perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex tabulâ sinuum naturalium collectas determinavi graphicè; constructo schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16⅔ pedis *Anglicani*.

Tan-

156. 155. Si cometa primò observetur in eâdem rectâ cum duabus fixis, deinde in aliâ quoque rectâ cum duabus aliis fixis observetur, accuratè trajectis per quatuor illas stellas duobus filis in superficie globi cœlestis, intersectio filorum determinabit locum cometæ pro tempore observationis. Si eodem modo definiantur alia cometæ loca, illius semita in superficie globi cœlestis delineabitur.

156. Accuratè designatis in superficie globi cometæ locis, filum duobus locis applicatum per cætera omnia propèmodum transire videbitur; Hæc igitur loca fere sunt in peripheriâ circuli maximi, ideóque cometa ex terrâ in circuli maximi peripheriâ incedere apparebit. Quarè si filum per duo loca transiens extendatur donec Ecliptica & æquatorem secet, habebuntur locus nodi, & inclinatio orbitæ cometicæ, simulque punctum in quo cometa trajicit æquatorem.

(b) * *Ex his inveni.* Quâ ratione sequentes determinationes possint inveniri vel graphicè vel arithmeticè, patet ex constructione prop. præced. & ex iis quæ huic propositioni addidimus.

SCD LYON 1

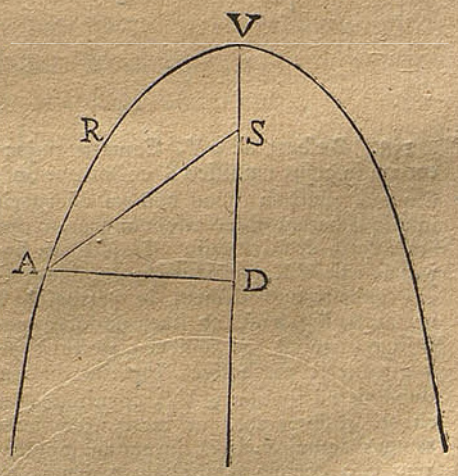
Tandem ut constaret an cometa in orbe sic invento verè moveretur, collegi per operationes partim arithmeticas partim graphicas loca cometæ in hoc orbe ad observationum quarundam tempora: uti in tabulâ sequente videre licet.

	Distant. Comet. à Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect	Long. Obs.	Lat. Obs	Differ. Long.	Differ. Lat.
		gr.	gr.	gr. ,	gr. ,	,	,
Dec. 12	2792	♍ 6 . 32′	8 . 18′½	♍ 6.31⅓	8.26	+ 1	− 7½
29	8403	♌ 13 . 13⅔	28 . 0	♌ 13.11¾	28.10 1/12	+ 2	− 10 1/12
Feb. 5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29⅔	♉ 16.59⅞	15.27⅖	+ 0	+ 2¼
Mar. 5	21737	29 . 19¾	12 . 4	29.20⅙	12. 3½	− 1	+ ½

Postea vero *Halleius* noster orbitam (c) per calculum arithmeticum accuratiùs determinavit, quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum nodorum in ♋ & ♍ 1 gr. 53′, & inclinationem plani orbitæ ad eclipticam 61 gr. 20′

157

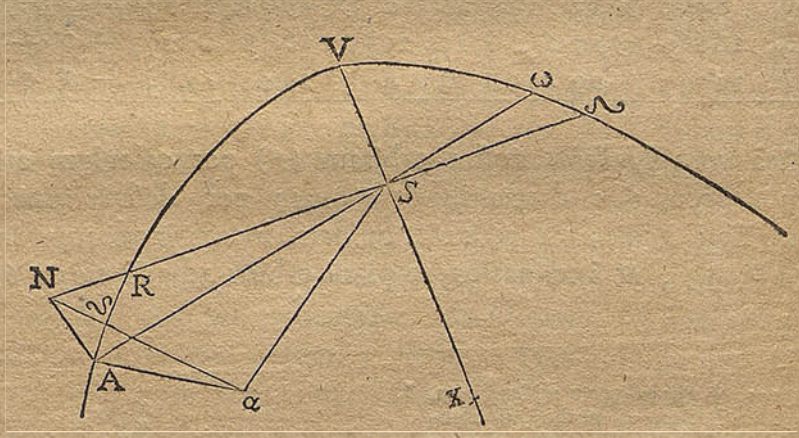
(c) 157. * *Per calculum arithmeticum.* Calculi hujus instituendi methodum exponemus. Sit S Sol, V R A orbita cometæ parabolica, cujus vertex V, sitque VS, distantia umbilici à vertice = f, erit parabolæ latus rectum principale = $4f$. Fiat AD = x, erit spatium V R A S = $\frac{x^3+12f^2x}{24f}$ (140). Ponatur area illa dato rectilineo æqualis putà bb, habebitur æquatio $24fbb = x^3 + 12f^2x$. Resolutâ hâc æquatione cubicâ per vulgares algebræ regulas, vel per constructionem geometricam, adhibitis parabolâ & circulo, innotescet ordinatim applicata A D. Datâ autem AD, dabitur VD, (per theor. 2. de parab.) quarè nota quoque erit recta composita ex DV & VS, cui æqualis est recta S A, (ibid.), ideóque recta illa dabitur magnitudine. Præterea datur etiam D A, quarè nota est ratio inter S A & A D, id est, inter radium & sinum rectum anguli A S D, quem scilicet S A cum axe comprehendit, ideóque datur angulus ille. Sed data est S A longitudine, quarè rectæ S A longitudo & inclinatio ad axem calculo determinari possunt.



DE MUNDI SYSTEMATE.

$20\frac{1}{3}$, ut & tempus perihelii cometæ *Decemb.* $8^{d}.\ 0^{h}.\ 4'$: distantiam vero perihelii à nodo ascendente in orbitâ cometæ mensuratam invenit esse $9^{gr}.\ 20'$, & latus rectum parabolæ esse 2430 partium, existente mediocri solis à terrâ distantiâ partium 100000. Et ex his datis, calculo itidem arithmetico accuratè instituto, loca cometæ ad observationum tempora computavit, ut sequitur.

Tem.



158. 158. Referat ☌ ω V, Cometæ trajectoriam in cujus umbilico S collocatur Sol, sitque ω punctum quod cometa occupavit in aliquâ harum observationum quarum ope trajectoria definita fuit. Trajectoriæ hujus sit axis V X positione datus; innotescat tempus quo cometa in perihelio V versatur, sitque ☌ ☋ linea nodorum positione cognitâ. Si cometæ trajectoria inventa fuerit parabolica, capiatur spatium quod sit ad spatium ω V S, cognitum (per theor. 4. de parab.) ut intervallum inter tempus datum & suprà inventum momentum quo cometa perihelium attingit, ad intervallum inter prædictum momentum & observationem cometæ in ω; ponatur spatium illud dato rectilineo, puta *b b*, æquale. Deinde (157.) ipsi *b b* æquale fiat spatium parabolicum V R A S, & inveniatur tam positio quam magnitudo rectæ S A respectu S V, cujus positio & magnitudo respectu distantiæ aphelii terræ à sole priùs notæ sunt. At si cometæ trajectoria deprehendatur elliptica, per methodos in prop. 31. lib. 1. expositas, ducatur recta S A, talis ut area V R A S, sit ad totam ellipseos aream, sicut intervallum inter tempus datum & momentum quo perihelium occupat integrum cometæ tempus periodicum quod ex dato orbitæ cometicæ axe principali cognitum est, dabiturque rectâ S A tam positione quam magnitudine. Jam verò in utroque casu ex A ad nodorum lineam ☋ ☌ erigatur normalis A N, rectæ ☋ ☌ occurrens in N; ex eodem A, ad Ecliptica planum demittatur perpendicu-

lum

Tempus verum.	Distantia Cometæ à ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in. Long.	Lat.
d. h. ′		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12. 4.46	28028	♍ 6.29.25	8.26. 0 Bor.	− 3. 5	− 2. 0
21. 6.37	61076	♒ 5. 6.30	21.43.20	− 1.42	+ 1. 7
24. 6.18	70008	18.48.20	25.22.40	− 1. 3	− 0.25
26. 5.21	75576	28.22.45	27. 1.36	− 1.28	+ 0.44
29. 8. 3	14021	♓ 13.12.40	28.10.10	+ 1.59	+ 0.12
30. 8.10	86661	17.40. 5	28.11.20	+ 1.45	− 0.33
Jan. 5. 6. 1½	101440	♈ 8.49.49	26.15.15	+ 0.56	+ 0. 8
9. 7. 0	110959	18.44.36	24.12.54	+ 0.32	+ 0.58
10. 6. 6	113162	20.41. 0	23.44.10	+ 0.10	+ 0.18
13. 7. 9	120000	26. 0.21	22.17.30	+ 0.33	+ 0. 2
25. 7.59	145370	♉ 9.33.40	17.57.55	− 1.20	+ 1.25
30. 8.22	155303	13.17.41	16.42. 7	− 2.10	− 0.11
Feb. 2. 6.35	160951	15.11.11	16. 4.15	− 2.42	+ 0.14
5. 7. 4½	166686	16.58.25	15.29.13	− 0.41	+ 2.10
25. 8.41	202570	26.15.46	12.48. 0	− 2.49	+ 1.14
Mar. 5.11.39	216205	29.18.35	12. 5.40	+ 0.35	+ 2.24

Apparuit etiam hic cometa menſe *Novembri* præcedente & *Coburgi* in *Saxoniâ* à Dno. *Gottfried Kirch* obſervatus eſt diebus menſis hujus quarto, ſexto & undecimo, ſtylo veteri; & ex poſitionibus ejus ad proximas ſtellas fixas ope teleſcopii nunc bipedalis nunc decempedalis ſatis accuratè obſervatis, ac differentia longitudinum *Coburgi* & *Londini* graduum undecim & locis fixarum à *Poundio* noſtro obſervatis, *Halleius* noſter loca cometæ determinavit ut ſequitur.

No-

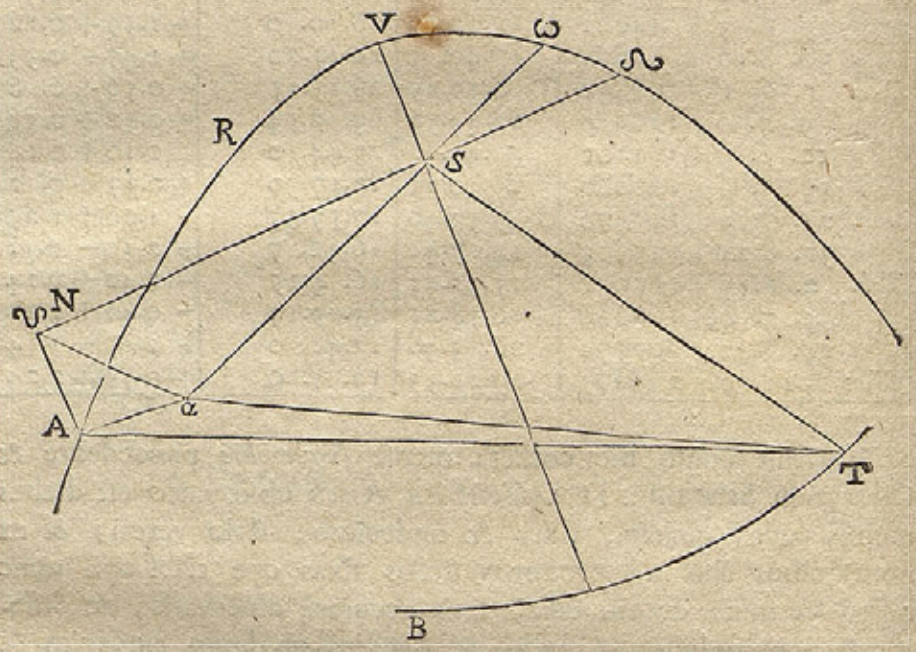
lum eidem rectæ occurrens in a, jungantur que aN, aS, erit angulus ANa, inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecliptice ac proinde cognitus (146). Deindè quoniam noti ſunt anguli VSA, VSN, notus quoquè erit angulus NSA, horum ſumma vel differentia. Quarè in triangulo rectangulo NaA, datis latere NA, & angulo ANa, innoteſcent reliqua latera Na & Aa. Præterea in triangulo rectangulo SNa, dantur latera SN & Na, ideóque dabuntur latus Sa, & angulus NSa. Sed (145.) datur poſitio rectæ SN, quare nota erit poſitio rectæ Sa, hoc eſt, cometæ longitudo heliocentrica, ſive locus cometæ heliocentricus ad Eclipticam reductus. Denique in triangulo SAa rectangulo ad a, nota ſunt omnia latera, ac proinde dabitur angulus ASa, latitudo cometæ heliocentrica. Ex his quoque patet viciſſim inveniri poſſe tempus quo cometa datum in orbe ſuo locum tenet. 158.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Novem. 3d. 17h. 2′, tempore apparente *Londini*, cometa erat in ♌ 29gr. 51′. cum lat. bor. 1gr. 17′. 45″,

Novem. 5d. 15h. 58′ cometa erat in ♍ 3gr. 23′ cum lat. bor. 1gr. 6′.

No.



159. 159. Iisdem manentibus sit BT orbis magnus, sitque tellus in T ad tempus datum. Jungantur TA, Ta, erit planum trianguli TAa, ad planum Ecclipticæ normale (prop 18. lib. 11. elem.). Jam in triangulo TSa, in plano Ecclipticæ datur latus Sa, (158.), notumque est latus ST, ex theoriâ telluris, & utrumque latus in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressum habetur. Præterea ob latera illa positione cognita, datur angulus TSa, ab illis comprehensus, quare innotescent latus Ta, & angulus STa; Sed datur TS positione, nempe locus solis ad tempus datum, nota igitur est positio rectæ Ta, hoc est, cometæ longitudo geocentrica, sive locus cometæ geocentricus ad Ecclipticam reductus. Deindè in triangulo rectangulo AaT, dantur latera duo in partibus mediocris distantiæ telluris à sole expressæ (158 & ex theoriâ telluris). Quare innotescet angulus ATa, hoc est, cometæ latitudo geocentrica, itemque dabitur hypothenusa TA, distantia scilicet cometæ à terrâ. Ex his itaque patet quomodo ad data observationum tempora, instituto calculo, loca cometæ possint computari. Clariss. Halleius iisdem usus principiis ad definiendos cometarum motus maximo labore tabulas construxit. Harum tabularum normam videat Lector in ejusdem Celeberrimi Viri opusculo quod inscribitur: come-

Novem. 10d. 16h. 31′ cometa æqualiter distabat à stellis leonis σ ac τ *Bayero*; nondum verò attigit rectam easdem jungentem, sed parum abfuit ab eâ. In stellarum catalogo *Flamsteadiano* σ tunc habuit ♍ 14gr. 15′ cum lat. bor. 1gr. 41′ ferè, τ verò ♍ 17gr. $3\frac{1}{2}$, cum lat austr. 0gr. 34′. Et medium punctum inter has stellas fuit ♍ 15gr. $39\frac{1}{4}$, cum lat. bor. 0gr. $33\frac{1}{2}$. Sit distantia cometæ à rectâ illâ 10′ vel 12′ circiter, & differentia longitudinum cometæ & puncti illius medii erit 7′, & differentia latitudinum $7\frac{1}{2}$, circiter. Et inde cometa erat in ♍ 15gr. 32′ cum lat. bor. 26′ circiter.

Observatio prima ex situ cometæ ad parvas quasdam fixas abundè satis accurata fuit. Secunda etiam satis accurata fuit. In tertia, quæ minùs accurata fuit, error minutorum sex vel septem subesse potuit, & vix major. Longitudo verò cometæ in observatione primâ, quæ cæteris accuratior fuit, in orbe prædicto parabolico computata erat ♌ 29gr. 30′. 22″. latitudo borealis 1gr. 25′. 7″. & distantia ejus à sole 115546.

Porro *Halleius* observando quod cometa insignis intervallo annorum 575 quater apparuisset, scilicet mense *Septembri* post cædem *Julii Cæsaris*, anno *Christi* 531 *Lampadio* & *Orestе Coss.* anno *Christi* 1106 mense *Februario*, & sub finem anni 1680, idque cum caudâ longâ & insigni (præterquam quod sub mortem

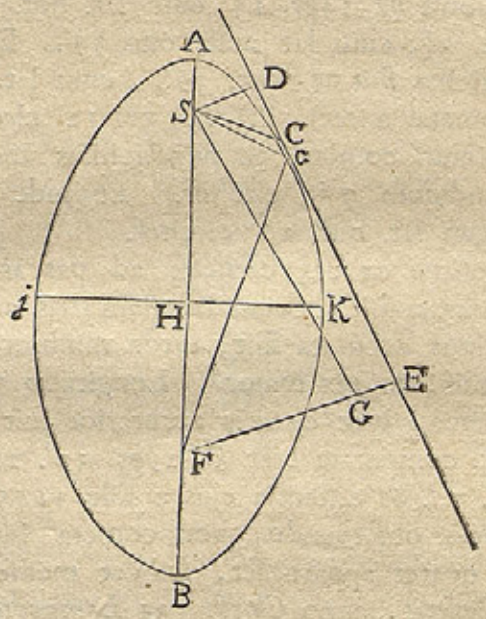
cometographia, seu Astronomiæ cometicæ Synopsis.

160. Si cometæ orbitas ellipticas describere & duas Kepleri leges observare ponantur, hoc est, si temporum periodicorum quadrata sint ut cubi mediocrium distantiarum à sole & areæ ellipticæ radiis ad solem ductis sint temporibus proportionales, facilè determinabitur orbitæ cometicæ magnitudo, omnesque motûs cometarum circumstantiæ definientur, quod elegantissimè præstitit D. Bouguer in monum. Paris. an. 1733. Clarissimi Viri methodum hic adjungemus.

Ex datis tribus observationibus à se invicem parum distantibus, inveniatur cometæ velocitas in aliquo orbitæ suæ loco, & exigua ejusdem orbitæ portio determinetur. Quoniam tria observationum tempora parum à se invicem distant, portio orbitæ hoc temporis intervallo descripta considerari poterit tanquam linea recta vel ipsamet tangens orbitæ motu uniformi percursa, ideoque portio hæc rectilinea orbitæ & ipsa cometæ velocitas inveniri poterunt per Lem 4. & per ea quæ huic lemmati addidimus. Idem quoque obtinebitur duplici elegantissimâ methodo quæ in monum. Paris. loco citato legitur. 160.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tem *Cæsaris*, cauda ob incommodam telluris positionem minùs ap-



180. His præmissis, sit S sol, C c exiguæ orbitæ cometicæ portio ex tribus observationibus determinata. Quoniam nota est S C, distantia scilicet cometæ à sole atque etiam innotescit angulus S C D, dabitur perpendicularis S D, hujus anguli S C D sinus, sumpto S C, pro radio. Dicatur S C = *a*, S D = *b*, designet *e*, spatiolum C c, tempusculo *f* percursum, sitque *x* = A B, seu axi principali ellipseos quam cometa circà solem in umbilico S, positum integro tempore periodico *t*, describit. Ut determinentur quantitates *x* & *t*, conferre oportet motum cometæ cum motu cogniti o planetæ alicujus. Sit *q* axis principalis ellipseos quam planeta describit, *n* tempus periodicum, dicaturque *p* peripheria circuli cujus diameter est *q*. Quoniam axis principalis ellipseos est summa maximæ & minimæ distantiæ planetæ à sole, erit distantia mediocris planetæ à sole æqualis dimidio axi principali, hoc est $\frac{1}{2}x$ est distantia mediocris cometæ, & $\frac{1}{2}q$ distantia mediocris planetæ. Jam verò fiat (per leg. 1. Kepleri.) $\frac{1}{8}q^3 : n^2 = \frac{1}{8}x^3 : t^2$ hinc fit $t = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}$. Invenienda superest altera expressio temporis periodici *t*. Quoniam C c, est portio orbitæ admodum exigua, sector C S c, considerari poterit instar trianguli evanescentis cujus area $\frac{1}{2}$ S D × C c = $\frac{1}{2}be$. Quarè, per alteram Kepleri

apparuiſſet:) quæſivit orbem ellipticum cujus axis major eſſet par-

pleri regulam, dicatur $\frac{1}{2}be$ eſt ad f, ut area tota ellipſeos ACBI, ad integrum tempus periodicum t, unde habetur $t=\frac{f}{\frac{1}{2}be}\times ACBI$. Nunc ut obtineatur area ACBI, ex puncto C, ad alterum umbilicum F, agatur recta $CF=AB-SC=x-a$ (theor. 3. de ellipſi). Ex eodem umbilico F, ad tangentem Cc productam in E, demittatur perpendicularis FE, ſitque SG parallela rectæ DE, triangula rectangula SCD, FCE ſimilia ſunt, ob angulos SCD, FCE, æquales (theor. 4. de ellipſ.) ideóque $SC(a):SD(b)=FC(x-a):FE=\frac{bx-ab}{a}$, ac proindè FG, ſeu $FE-SD=\frac{bx-2ab}{a}$.

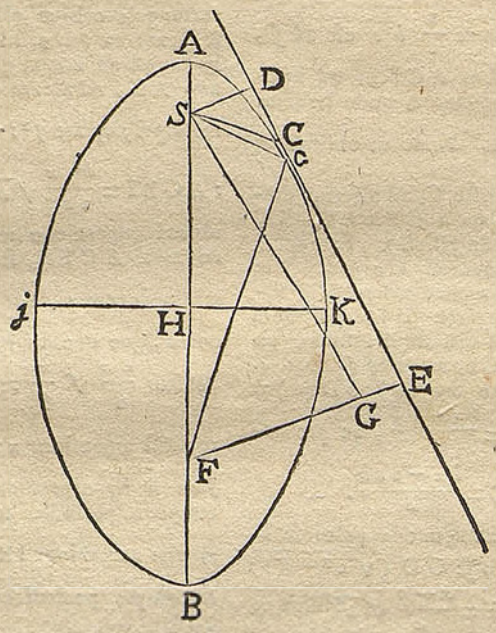
Deinde (ob eorumdem triangulorum ſimilitudinem) $SC(a):CD(\sqrt{a^2-b^2})=FC(x-a):CE=\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}$, & hinc DE, vel SG, ſeu $CE+CD=\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2-b^2}=\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. Sed $FG=\frac{bx-2ab}{a}$ (ex dem.), quarè eſt $SF=\frac{\sqrt{b^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2+a^2x^2-b^2x^2}}{a^2}=\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$; ideóque diſtantia SH vel FH umbilici alterutrius à centro $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2x^2-4ab^2x+4a^2b^2}{a^2}}$. Jam (ob triangulum SIH rectangulum in H, & per theor. 3. de ellipſi) erit $IH=\sqrt{\frac{1}{4}x^2-\frac{a^2x^2+4ab^2x-4a^2b^2}{4a^2}}=\frac{b}{a}\sqrt{ax-a^2}$ ac proindè axis minor $IK=\frac{2b}{a}\sqrt{ax-a^2}$, & factum ex axe majori in minorem $=\frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}$. Sed eſt factum illud area rectanguli orbitæ ellipticæ circumſcripti, & præterea (249. lib. 1.) area rectanguli hujus eſt ad aream ellipſeos ut quadratum axis AB, ad aream circuli huic quadrato inſcripti; quarè $q^2:\frac{1}{4}qp=\frac{2bx}{a}\sqrt{ax-a^2}:ACBI=\frac{bpx}{2aq}\sqrt{ax-a^2}$. Tandem in ultimâ expreſſione temporis periodici loco areæ ACBI, ſubſtituatur illius valor modo inventus, fiet $t=\frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, collatiſque duobus ipſius t valoribus, habebitur $\frac{nx}{q}\sqrt{\frac{x}{q}}=\frac{fpx}{aeq}\sqrt{ax-a^2}$, & reductâ æquatione $x=\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}$. Jam ſi in expreſſionibus axis minoris & temporis periodici ſubſtituatur valor ipſius x, erit axis minor $IK=2be\sqrt{\frac{a}{f^2p^2q-ae^2n^2}}$ & tempus periodicum $=f^3p^3n\times\frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^2p^2q-ae^2n^2}^{\frac{3}{2}}$. Hinc patet determinari poſſe omnia quæ ad cometarum motus pertinent.

161. Si formulæ modò inventæ quantitatibus finitis & poſitivis exprimantur, orbita ACBI erit elliptica, ideóque cometa reditum habebit. Quia verò circulus eſt ſpecies quædam ellipſis, cometa circulum quoque poterit deſcribere, in eo autem caſu æquales erunt diſtantiæ SA, SC, SB, axiſque AB duplus fiet diſtantiæ SC, ac proindè $\frac{af^2p^2q}{f^2p^2q-ae^2n^2}=2a$, & hinc $e=\frac{fp}{n}\sqrt{\frac{q}{2a}}$, valor ſcilicet ſpatioli Cc à cometa tempore f percurſi. Si ea ſit cometæ velocitas ut fiat $ae^2n^2=f^2p^2q$, tunc infinito æquales evadent expreſſiones axis majoris, minoris & temporis periodici; quarè orbita cometæ mutabitur in ellipſim infinite oblongatam ſeu paraboläm, ideóque cometa reditum non habet. Tandem ſi ae^2n^2, ſit major quam

161.

DE MUNDI SYSTEMATE.

partium 1382957, existente mediocri distantiâ telluris à sole par-



162. $f^2 p^2 q$, negativa sit expressio axis majoris & orbita abit in hyperbolam ac proindè cometa nunquam futurus est iterum conspicuus.

162. Ut prædictæ formulæ ad calculum reducantur, cometarum motus cum telluris motu conferatur. Sit q dupla distantia mediocris terræ à Sole, p peripheria circuli cujus diameter q, n annus sydereus seu intervallum 365. diër. 6^{hor}. $9'$: fiat mediocris distantia telluris à sole partium 10000000, ideòque $q = 20000000$, & $p = 62831853$, spatium Cc unius diei intervallo cometa ponatur descripsisse. His valoribus substitutis in formulis præcedentibus erit $x = \frac{591826599533557939 \times a}{591826599533557939 - ae^2}$ & $t = \frac{18592780951754022232 \times a^{\frac{3}{2}}}{591826599533557939 - ae^2^{\frac{3}{2}}}$. Jam nihil amplius faciendum superest, nisi ut in casibus particularibus loco a, & e, substituantur valores per observationem determinati. Utrum verò cometa rediturus sit vel non cognoscetur, si quantitas ae^2, minor majorve reperiatur numero constanti 591826599533557939. Minùs prolixus fiet calculus, si distantiam mediocrem telluris à sole ponamus partium 10000, tunc enim erit $x = \frac{591826599 \times a}{591826599 - ae^2}$, & $t = \frac{18592780951 \times a\sqrt{a}}{591826599 - ae^2 \times \sqrt{591826599 - ae^2}}$. Exemplo sit cometa qui annis 1729. 1730. apparuit. Ex observationibus Clariss. Cassini colligitur die 13^{a}. Octobris an. 1729. distantiam S C cometæ à sole, fuisse partium 42998, exiguam orbitæ portionem diei unius intervallo descriptam, fuisse partium $122\frac{452}{10000}$, atque angulum D C S, fuisse 82°. $11'$. Hinc invenitur quantitas ae^2 major quam 591826599, ideóque

(161)

partium 10000: in quo orbe utique cometa annis 575 (d) revolvi possit. Et ponendo nodum ascendentem in ☌ 2gr. $2'$; inclinationem plani orbis ad planum eclipticæ 61gr. $6'$. $48''$.; perihelium cometæ in hoc plano ♆ 22gr. $44'$. $25''$; tempus æquatum perihelii *Decem.* 7^{d}. 23^{h}. $9'$; distantiam perihelii à nodo ascendente in plano eclipticæ 9gr. $17'$. $35''$; & axem conjugatum 18481,2: (e) computavit motum cometæ in hoc orbe elliptico. Loca autem ejus tam ex observationibus deducta quam in hoc orbe computata exhibentur in tabulâ sequente.

(161) orbita cometæ est hyperbola, ac proindè expectandus non est hujus cometæ regressus. Cæterùm hæc vera sunt in eâ duntaxat hypothesi quod cometæ duas Kepleri leges observent.

(d) 163. * *Revolvi possit.* Quadrata temporum periodicorum in cometis æquè ac in planetis ponantur ut cubi mediocrium distantiarum à sole, tempus periodicum cometæ dicatur t, tempus periodicum terræ circà solem dicatur T, distantia mediocris terræ à sole sit D, axis major ellipseos à cometa descriptæ sit $2a$, ideóque mediocris distantia cometæ à sole $= a$, erit $T^2 : t^2 = D^3 : a^3$. Fiat $D = 10000$ partibus $T = 365$ dieb. $6^{hor.}$ $9' = 525969'$, $t = 575$ annis, invenietur $2a$, seu axis major ellipseos à Cometâ descriptæ, partium 1382957, existente mediocri distantiâ telluris à sole earumdem partium 10000. in hoc igitur orbe cometa annis 575 revolvi potest. 163.

(e) * *Computavit motum cometæ.* Ratio computi ineundi patet ex num. 158. 159. vel etiam ex methodo Clariss. D. Bouguer num. 160. & seq.

Tem-

DE MUNDI SYSTEMATE.

Tempus verum	Long. obs.	Lat. Bor. obs.	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h.	gr.	gr.	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Nov. 3.16.47″	♌ 29.51′. 0″	1.17.45″	♌ 29 51.22	1.17.32 B	+0.22	−0.13
5.15.37	♍ 3.23. 0	1. 6. 0	♍ 3.24.32	1. 6. 9	+1.32	+0. 9
10.16.18	15.32. 0	0.27. 0	15.33. 2	0.25. 7	+1. 2	−1.53
16.17. 0			♎ 8.16.45	0.53. 7 A		
18.21.34			18.52.15	1.26.54		
20.17. 0			28.10.36	1.53.35		
23.17. 5			♏ 13.22.42	2.29. 0		
Dec. 12. 4.46	♍ 6.32.30	8.28. 0	♍ 6.31.20	8.29. 6 B	−1.10	+1. 6
21. 6.37	♒ 5. 8.12	21.42.13	♒ 5. 6. 4	21.44.42	−1.58	+2.29
24. 6.18	18.49.23	25.23. 5	18.47.30	25.23.35	−1.53	+0.30
26. 5.21	28.24.13	27. 0.52	28.21.42	27. 2. 1	−2.31	+1. 9
29. 8. 3	♓ 13.10.41	28. 9.58	♓ 13.11.14	28.10.38	+0.33	+0.40
30. 8.10	17 38.20	28.11.53	17.38.27	28.11.37	+0. 7	−0.16
Jan. 5. 6. 1½	♈ 8.48.53	26.15. 7	♈ 8.48.51	26.14.57	−0. 2	−0.10
9. 7. 1	18.44. 4	24.11.56	18.43.51	24.12.17	−0.13	+0.21
10. 6. 6	20 40.50	23.43.32	20 40.23	23 43.25	−0.27	−0. 7
13. 7. 9	25.59.48	22.17.28	26. 0. 8	22.16.32	+0.20	−0.56
25. 7.59	♉ 9.35. 0	17.56.30	♉ 9.34.11	17.56. 6	−0.49	−0.24
30. 8.22	13.19.51	16.42.18	13.18.28	16.40. 5	−1.23	−2.13
Feb. 2. 6.35	15.13.53	16. 4. 1	15.11.59	16. 2. 7	−1.54	−1.54
5. 7. 4½	16.59. 6	15.27. 3	16.59.17	15.27. 0	+0.11	−0. 3
25. 8.41	26.18.35	12.46.46	26.16.59	12.45.22	−1.36	−1.24
Mar. 1.11.10	27.52.42	12.23.40	27.51.47	12.22.28	−0.55	−1.12
5.11.39	29.18. 0	12. 3.26	29.20.11	12. 2.50	+2.11	−0.26
9. 8.38	0.43. 4	11.45.52	♊ 0.42.43	11.45.35	−0.21	−0.17

Obſervationes cometæ hujus à principio ad finem non minùs congruunt cum motu cometæ in orbe jam deſcripto, quam motus planetarum congruere ſolent cum eorum theoriis, & congruendo probant unum & eundem fuiſſe cometam, qui toto hoc tempore apparuit, cjuſque orbem hic rectè definitum fuiſſe.

In tabulâ præcedente omiſimus obſervationes diebus *Novembris* 16, 18, 20 & 23 ut minùs accuratas. Nam cometa his etiam temporibus obſervatus fuit. *Ponthæus* utique & ſocii, *Novem.* 17. ſt. vet. horâ ſextâ matutinâ *Romæ*, id eſt, hora 5. 10′ *Londini*, filis ad fixas applicatis, cometam obſervarunt in ♎ 8gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0gr. 40′. Extant eorum obſervationes in tractatu, quem *Ponthæus* de hoc cometâ in lucem edidit. *Cellius*, qui aderat & obſervationes ſuas in epiſtolâ ad *D. Caſſinum* miſit, cometam eâdem horâ vidit in ♎ 8gr. 30′.

30′. cum latitudine auſtrali 0gr. 30′. Eâdem horâ *Galletius Avenioni* (id eſt, hora matutina 5. 42 *Londini*) cometam vidit in ♎ 8gr. ſine latitudine. Cometa autem per theoriam jam fuit in ♎ 8gr. 16′. 45″ cum latitudine auſtrali 0gr. 53′. 7″.

Nov. 18. horâ matutinâ 6. 30′ *Romæ* (id eſt, horâ 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* cometam vidit in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 20′ *Cellius* in ♎ 13gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. *Galletius* autem horâ matutinâ 5. 30′ *Avenioni* cometam vidit in ♎ 13gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academiâ *Flexienſi* apud *Gallos*, horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 5. 9′ *Londini*) cometam vidit in medio inter ſtellas duas parvas, quarum una media eſt trium in recta linea in virginis auſtrali manu *Bayero* ψ, & altera eſt extrema alæ *Bayero* θ. Unde cometa tunc fuit in ♎ 12gr. 46′. cum latitudine auſtrali 50′. Eodem die *Boſtoniæ* in *Novâ-Angliâ* in latitudine $42\frac{1}{2}$ graduum, horâ quintâ matutinâ, (id eſt *Londini* horâ matutinâ 9. 44′) cometa viſus eſt prope ♎ 14gr. cum latitudine auſtrali 1gr. 30′, uti à cl. *Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. $4\frac{1}{2}$ *Cantabrigiæ*, cometa (obſervante juvene quodam) diſtabat à ſpicâ ♍ quaſi 2gr. boreazephyrum verſus. Erat autem ſpica in ♎ 19gr. 23. 47″ cum lat. auſtr. 2gr. 1′. 59″. Eodem die hor. 5. mat. *Boſtoniæ* in *Novâ Angliâ*, cometa diſtabat à ſpica ♍ gradu uno, differentia latitudinum exiſtente 40′. Eodem die in Inſula *Jamaicâ*, cometa diſtabat à ſpicâ intervallo quaſi gradus unius. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Maryland*, in confinio *Virginiæ* in lat. $38\frac{1}{2}$ gr., horâ quintâ matutinâ (id eſt, horâ 10ª *Londini*) cometam vidit ſupra ſpicam ♍, & cum ſpicâ propemodum conjunctum, exiſtente diſtantiâ inter eoſdem quaſi $\frac{1}{4}$ gr. Et (f) ex his obſervationibus inter ſe collatis colligo quod hora 9.44′ *Londini* cometa erat in ♎ 18gr. 50′ cum latitudine auſtrali 1gr. 25′. circiter. Cometa autem

(f) * *Ex his obſervationibus inter ſe collatis* via cometæ inter ſtellas determinatur, & hinc colligentur cometæ longitudo & latitudo (149.) hor. 9. 44′ Londini, reductione ſcilicet factâ ad meridianum Londinenſem. 163.

DE MUNDI SYSTEMATE.

tem per theoriam jam erat in ♎ 18gr. 52′. 15″ cum latitudine australi 1gr. 26′. 54″.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, horâ sextâ matutinâ *Venetiis* (id est, horâ 5. 10′ *Londini*) cometam vidit in ♎ 23gr. cum latitudine australi 1gr. 30. Eodem die *Bostoniæ*, distabat cometa à spicâ ♍, 4gr. longitudinis in orientem, ideoque erat in ♎ 23gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ cometam observarunt in ♎ 27gr. 50′ cum latitudine australi 1gr. 16′, *Cellius* in ♎ 28gr. *Ango* horâ quintâ matutinâ in ♎ 27gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27gr. 51′. Eodem die in insulâ *Jamaicâ* cometa visus est prope principium scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum spicâ virginis, id est, 2gr. 2′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* in *Indiâ Orientali*, (id est ad horam noctis præcedentis 11. 20′ *Londini*) capta est distantia cometæ à spicâ ♍ 7gr. 35′ in orientem. In lineâ rectâ erat inter spicam & lancem, ideoque versabatur in ♎ 26gr. 58′ cum lat. australi 1gr. 11′ circiter; & post horas 5 & 40′ (ad horam scilicet quintam matitunam *Londini*) erat in ♎ 28gr. 12′ cum lat. austr. 1gr. 16. Per theoriam vero cometa jam erat in ♎ 28gr. 10′. 36″, cum latitudine australi 1gr. 53′. 35″.

Nov. 22. Cometa visus est à *Montenaro* in ♍ 2gr. 33′. *Bostoniæ* autem in *Novâ-Angliâ* apparuit in ♍ 3gr. circiter, eâdem ferè cum latitudine ac prius, id est, 1gr. 30′. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♍ 1gr. 50′; ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* cometa erat in ♍ 3gr. 5′ circiter. Eodem die *Londini* hora mat. 6½ *Hookius* noster cometam vidit in ♍ 3gr. 30′ circiter, idque in lineâ rectâ quæ transit per spicam virginis & cor leonis non exactè quidem, sed à lineâ illâ paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea à cometâ per spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus cordis leonis interposito perparvo intervallo inter cor leonis & hanc lineam. Linea recta per cor leonis & spicam virginis transiens, eclipticam secuit in ♍ 3gr. 46′; in angulo 2gr. 51′.

Et

Et si cometa locatus fuisset in hâc lineâ in ♍ 3gr. ejus latitudo fuisset 2gr 26′. Sed cum cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hâc lineâ boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem spicæ ♍, eratque 1gr. 30′ circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro* & *Angone* perpetuò augebatur, ideoque jam sensibiliter major erat quam 1gr. 30′. Inter limites autem jam constitutos 2gr. 26′ & 1gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1gr. 58′ circiter. Cauda cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad spicam ♍, declinans aliquantulum à stellâ istâ, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & cauda æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione solis boream versus.

Nov. 23. st. vet. horâ quintâ matutinâ *Noriburgi* (id est hora $4\frac{1}{2}$ *Londini*) D. *Zimmerman* cometam vidit in ♍ 8gr. 8′, cum latitudine australi 2gr. 31′, captis scilicet ejus distantiis à stellis fixis.

Nov. 24. Ante ortum solis cometa visus est à *Montenaro* in ♍ 12gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per cor leonis & spicam virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuò augebatur; ideoque jam paulò major erat quam 1gr. 58′; & magnitudine mediocri, sine notabili errore, statui potest 2gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam & decreviisse volunt, & *Cellius* & observator in *Novâ-Angliâ* eandem ferè magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, ex præsertim quæ per azimuthos & altitudines capiebantur, ut & ex *Galletii*: meliores sunt ex quæ per positiones cometæ ad fixas à *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & observatore in *Novâ-Angliâ*, & nonnunquam à *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ. Eodem die ad horam quintam matutinam *Ballasoræ* cometa observabatur in ♍ 11gr. 45′;

DE MUNDI SYSTEMATE.

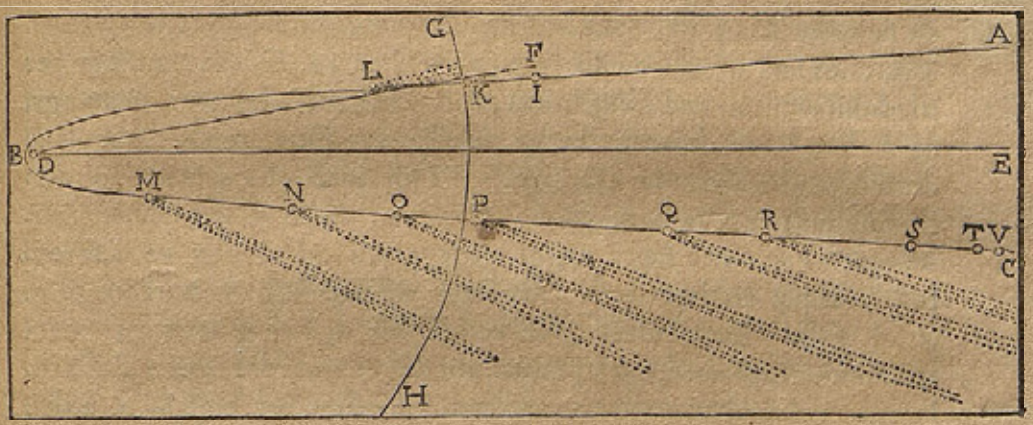
ideoque ad horam quintam matutinam *Londini* erat in ♑ 13gr. circiter. Per theoriam vero cometa jam erat in ♑ 13gr. 22′. 42″.

Nov. 25. Ante ortum solis *Montenarus* cometam observavit in ♑ 17¾gr. circiter. Et *Cellius* observavit eodem tempore quod cometa erat in linea recta inter stellam lucidam in dextro femore virginis & lancem australem libræ, & hæc recta secat viam cometæ in ♑ 18gr. 36′. Per theoriam verò cometa jam erat in ♑ 18⅓gr. circiter.

Congruunt igitur hæ observationes cum theoriâ quâtenus congruunt inter se, & congruendo probant unum & eundem fuisse cometam, qui toto tempore à quarto die *Novembris* ad usque nonum *Martii* apparuit. Trajectoria cometæ hujus bis (g) secuit planum ecliptícæ, & propterea non fuit rectilinea. Ecliptícam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine virginis & principio capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus cometæ plurimum deflectebatur à circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab ecliptícâ in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab ecliptícâ in septentrionem partibus duabus orbitæ, in quibus cometa tendebat in solem & redibat à sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic cometa per signa novem, à leonis scilicet ultimo gradu ad principium geminorum, præter signum leonis, per quod pergebat antequam videri cœpit; & nulla alia extat theoria, quâ cometa tantam cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maximè inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris* descripsit gradus circiter quinque singulis diebus: dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea vero motu iterum accelerato, descripsit gradus ferè quinque singulis die-

263. (g) * *Bis secuit planum Ecliptícæ.* veniri potest per num. 145. & 154. Tempus quo cometa secat Ecliptícam in-

diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et theoria, quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probè respondet, quæque easdem observat leges cum theoriâ planetarum, & cum accuratis observationibus astronomicis accuratè congruit, non potest non esse vera.



Cæterùm trajectoriam quam cometa descripsit, & caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano trajectoriæ delineatas exhibere: ubi *A B C* denotat trajectoriam cometæ, *D* solem, *D E* trajectoriæ axem, *D F* lineam nodorum, *G H* intersectionem sphæræ orbis magni cum plano trajectoriæ, *I* locum cometæ *Nov.* 4. *Ann.* 1680, *K* locum ejusdem *Nov.* 11, *L* locum *Nov.* 19, *M* locum *Dec.* 12, *N* locum *Dec.* 21, *O* locum *Decemb* 29, *P* locum *Jan.* 5. *sequent.* *Q* locum *Jan.* 25, *R* locum *Feb.* 5, *S* locum *Feb.* 25, *T* locum *Mar.* 5, & *V* locum *Mar.* 9. Observationes vero sequentes in caudâ definiendâ adhibui.

Nov. 4. & 6. Cauda nondum apparuit. *Nov.* 11. Cauda jam cœpta non nisi semissem gradus unius longa tubo decempedali visa fuit. *Nov.* 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30gr. longa, solique directè

DE MUNDI SYSTEMATE.

oppositа in *Novâ-Angliâ* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam ♂, quæ tunc erat in ♍ 9gr. 54′. *Nov.* 19. In *Mary-land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (observante *Flamsteadio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in aquilæ australi alâ, & desinebat prope stellas *A*, ω, *b* in tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♈ 19½gr. cum latitudine boreali circiter. *Dec.* 11. Cauda surgebat ad usque caput sagittæ (*Bayero* α, β,) desinens in ♈ 26gr. 43′, cum latitudine boreali 38gr. 34′. *Dec.* 12. Cauda transibat per medium sagittæ, nec longè ultra protendebatur, desinens in ♒ 4gr. cum latitudine boreali 42½gr. circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec.* 12, hora 5. 40′ *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra cygni uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hac stellâ ejus latus ad occasum & boream min. 45 destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat à stellâ illâ 2gr. 15′ austrum versus, & terminus superior erat in ♐ 22gr. cum latitudine boreali 61gr. Et hinc longa erat cauda 70gr. circiter. *Dec.* 21. Eadem surgebat fere ad cathedram *Cassiepeiæ*, æqualiter distans à β & *Schedir*, & distantiam ab utrâque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, ideoque desinens in ♈ 24gr. cum latitudine 47½gr. *Dec.* 29. Cauda tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accuratè complebat, & longa erat 54gr; ideoque desinebat in ♉ 19gr. cum latitudine 35gr. *Jan.* 5. Cauda tetigit stellam π in pectore *Andromedæ* ad latus ejus dextrum, & stellam μ in ejus cingulo ad latus sinistrum; & (juxta observationes nostras) longa erat 40gr.; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per solem & caput cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum octo. *Jan.* 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & lu-

ce

ce tenuissimâ desinebat è regione stellæ " in latere *Persei*. Distantia termini caudæ à circulo solem & cometam jungente erat 3gr. 50′, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}$gr. *Jan.* 25 & 26. Cauda luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & nocte unâ & alterâ sequente ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissimâ & ægerrimè sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulò ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad lucidam in humero orientali aurigæ accuratè, ideoque declinabat ab oppositione solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Ponthæus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit. *Feb.* 25. & deinceps cometa sine caudâ apparuit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua cometæ hujus phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit, quod corpora cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes terræ, solis & planetarum, cometa hicce in transitu suo per viciniam solis statim dissipari debuisset. Est enim calor solis ut radiorum densitas, hoc est, reciprocè ut quadratum distantiæ locorum à sole. Ideoque cum distantiâ cometæ à centro solis *Decemb.* 8. ubi in perihelio versabatur, esset ad distantiam terræ à centro solis ut 6 ad 1000 circiter, calor solis apud cometam eo tempore erat ad calorem solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si (i) recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quàm calor

(i) * *Si rectè conjector.* Hanc Newtoni conjecturam experimenta confirmant. In transact. philosoph num. 270. describitur tabula caloris gradus exhibens. (Hujus tabulæ constructionem jam exposuimus in not. ad cor. 4 prop. 8. lib. 3.). Ex relatis ab autore experimentis colligitur calorem ferri, quantum leviori ignis auxilio fieri potuit, candefacti, circiter fuisse $2\frac{1}{2}$ majorem quam calor aquæ ebullientis. Hinc ignis vehementioris ope aucto calore ferri candentis, rectè conjectatur Newtonus calorem hujus ferri quasi triplo vel quadruplo majorem fieri quam calor aquæ ebullientis. 163

calor aquæ ebullientis; ideoque calor, quem terra arida apud cometam in perihelio versantem ex radiis solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in perihelio suo calorem immensum ad solem concepit, & calorem illum diutissimè conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aëre consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutiùs conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aëris ambientis refrigeratur) in illâ ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic terræ æqualis, id est, pedes plùs minùs 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: (k) & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porrò notandum est quod cometa mense *Decembri*, ubi ad solem modò incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea mense *Novembri*, ubi perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ è cometis oriuntur statim post transitum eorum per regionem solis. Conducit igitur calefactio cometæ ad magnitudinem caudæ. (l) Et indè colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus cometæ per calorem suum emittit. Cæ-

183. (k) * *Et optarim rationem veram.* Clariss. Hermannus Boerhaave in elementis Chemiæ, diligentissimis experimentis se invenisse refert eò diutiùs calorem in corporibus retineri quo majora sunt, cæteris paribus. Si autem corpora ejusdem diametri ejusdemque caloris, diversæ sint densitatis, quæ densiora sunt, caloris quoque sunt tenaciora; densitas enim ignem coerceat, illiusque egressum ex intimis partibus retardat. Quia verò intimæ corporum partes innumeris modis variari atque inter se permisceri possunt, hinc patet in ipsâ caloris conservatione non leves varietates oriri posse. Hæ sunt fortasse latentes causæ quæ Newtonum in eam suspicionem induxerunt durationem scilicet caloris augeri in minori ratione quam eâ diametri.

(l) * *Et indè colligere videor.* Hanc sententiam pluribus argumentis deinceps confirmat Newtonus.

SCD LYON 1

Cæterùm de cometarum caudis triplex eſt opinio; eas vel jubar eſſe ſolis per tranſlucida cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite cometæ in terram, vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes à ſole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientiâ rerum opticarum. Nam jubar ſolis in cubiculo tenebroſo non cernitur, niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aërem ſemper volitantibus: ideoque in aëre fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortiùs ferit; in aëre clariore tenuius eſt & ægriùs ſentitur: in cœlis autem ſine materiâ reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quâtenus in jubare eſt, ſed quâtenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce ſolis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux fixarum & planetarum diſtinctè ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nullâ vi refractivâ pollere. Nam quod dicitur fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id, quoniam rariſſimè contingit, adſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum oculorum tum aëris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo teleſcopiis evaneſcunt. Aëris & aſcendentium vaporum tremore fit, ut radii facilè de anguſto pupillæ ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi aperturâ neutiquam. Inde eſt quòd ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem tranſmiſſionem lucis per cœlos ſine omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in cometis, cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni:

DE MUNDI SYSTEMATE.

(m) sciendum est quod lux fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ verò nullæ: cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa. Sic enim cometa anni 1680, mense *Decembri*, quo tempore caput luce suâ vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 vel 70 longitudinis & ultrà: postea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda verò luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissimâ, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulò ultrà: ut supra dictum est. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur ex refractione materiæ cœlestis, & pro figurâ cœlorum deflecteretur de solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui cometa anni 1680. *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ p. m. *Londini*, versabatur in ♐ 8gr. 41′, cum latitudine boreali 28gr. 6′, sole existente in ♑ 18gr. 26′. Et cometa anni 1577. *Dec.* 29 versabatur in ♐ 8gr. 41′ cum latitudine boreali 28gr. 40′, sole etiam existente in ♑ 18gr. 26′ circiter. Utroque in casu terra versabatur in eodem loco, & cometa apparebat in eâdem cœli parte: in priori tamen casu cauda cometæ (ex meis & aliorum observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione solis aquilonem versus; in posteriore verò (ex observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiatâ cœlorum refractione, supereſt ut phænomena caudarum ex materiâ aliquâ lucem reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascen-

263. (m) * *Sciendum est* Ut notum est ex telescopiorum theoriâ apud omnes passim rerum opticarum & catoptricarum scriptores. Sed eâ potissimum legi merentur quæ de lucis intensitate, visionis distinctione & telescopiorum beneficiis dedit Clariss. Vir Robert Smith in eximio opere optico.

SCD LYON 1

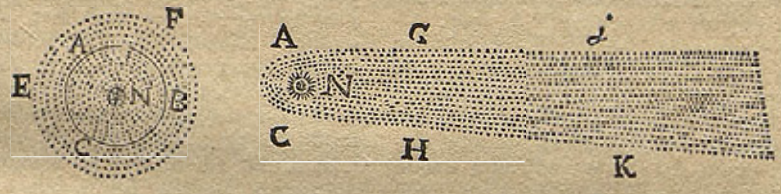
ascendere confirmatur ex (a) legibus quas observant. Ut quòd in planis orbium cometarum per solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione solis in eas semper partes, quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quòd spectatori in his planis constituto apparent in partibus à sole directè aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quòd deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad orbem cometæ, ut & ubi caput cometæ ad solem propiùs accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput cometæ: Præterea

(a) 164. * *Ex legibus quas observant.* Leges illæ quas observant cometarum caudæ cum prædictâ Newtoni sententiâ apprime congruunt. Cauda à cometæ capite vaporis instar in altum, id est, in partes à sole aversas assurgens in plano orbis cometæ per solem transeunte jacere debet; in æthere enim quieto nulla est ratio cur ad hanc potius quam ad illam partem deflectat. Quia autem vapor à capite exiens duos motus simul componit, alterum scilicet ascensus recti à sole, alterum verò progressus capitis, hinc fit ut cauda non directe à sole aversa sit, sed aliquantulum inde deviet in eas partes quas cometæ caput in orbe suo progrediens relinquit; si tamen spectator in orbis cometici plano per solem transeunte constituatur, deviatio caudæ neutquam sentitur, quia tota in plano isto jacet. Licet vapor assurgens motum capitis participet, tamen propter aliqualem ætheris resistentiam, minus velociter quam caput ipsum progreditur, & quò altius ascendit vapor eò fit rarior, id est, quò longior est cauda eò majorem experitur resistentiam, ideóque præcedens caudæ latus quod scilicet proximus est partibus ad quas tendit cometa, convexum erit, sequens verò concavum ac proinde cauda non à sole duntaxat aversa est, sed etiam incurvatur. Hæc à sole deviatio & curvatura eò minor est quò recta solem cometamque conjungens obliquior est ad cometæ orbitam; si enim cometa directe à sole vel ad solem tenderet, cauda quoque foret recta & à sole directè aversa. Hinc 165.
patet in ipso cometæ perihelio maximam esse caudæ deviationem maximamque curvaturam; tunc enim recta solem & cometam conjungens ad orbem cometæ normalis est. Præterea ob prædictam licet admodum exiguam ætheris resistentiam, convexa caudæ facies in ætherem incurrens densior est, ac proinde lucidior & distinctius terminata apparebit quam facies concava. Hæc sunt præcipua caudarum phænomena quibus satisfacit Newtoni opinio. Hinc caudas à capitibus oriri & in regiones à sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant.

165. Descriptis opinionibus de cometarum caudis adjungenda est illa quam Clariss. D. De Mairan in eximio opere de aurorâ Boreali his tuetur rationum momentis. Cometas ad solem proximè accedere observationibus compertum est; Hinc Newtonianæ attractionis legibus consentaneum videtur ut aliquam solaris atmosphæræ materiam cometa attrahat. Cur autem materia hæc instar comæ vento agitatæ dispergatur & ad solis oppositum dirigatur ex radiorum solarium impulsione oriri potest. Plurimis enim experimentis certum est solares radios omni prorsus impulsionis vi non carere. Clariss. Hombergius varia materiæ leviss imæ filamenta radiis solaribus in vitri ustorii foco objecta notabiliter impelli observavit. Lamellam quoque elasticam ità ligneæ tabulæ affixit ut extremitas una libere penderet, collectis vitri ustorii ope solaribus radiis

De Mundi Systemate.

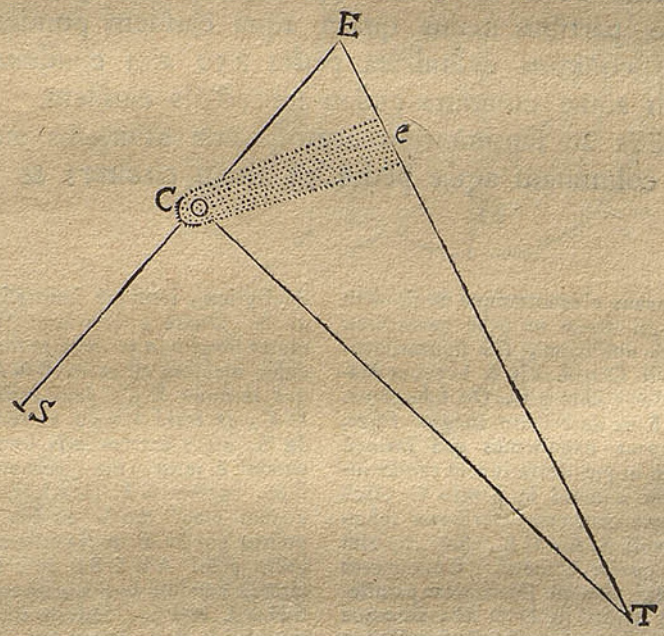
terea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægrè animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque ideo quod cauda convexo sui latere partes respicit à quibus fit deviatio, quæque in rectâ sunt lineâ à sole per caput cometæ in infinitum ductâ. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in quâ caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed à capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aëre nostro fumus corporis cujusvis igniti petit supe-



165. exposita hæc lamella instar penduli sensibiliter ibat & redibat. Quamvis autem levissima sit hic apud nos radiorum solarium impulsio, maxima tamen esse potest in spatiis liberrimis in quibus cometæ deferuntur, præsertim cum tenuissima sit materia quæ cometarum caudas componit. Jam verò concipiatur cometa N, apparenti cinctus atmosphærâ E D F, in transitu scilicet prope solem collectâ, ità ut in majori à cometæ nucleo N, distantiâ levior rariorque semper fiat hæc materia, quemadmodum in apparenti cometarum atmosphærâ solet observari. Sphæra interior A B C, ex iis ponatur constare particulis quæ radiorum solarium impulsioni possint resistere, è contrà verò orbis superior A F B D C E, leviores contineat particulas quæ huic impulsioni cedant, manifestum est radiorum solarium impulsione projici versus solis oppositionem materiæ vestigium B G H j K, quod figuram caudarum repræsentat. Ex dictis patet hanc sententiam cum Newtonianis principiis consentire; Et quidem Newtonus describens posteà Keplerì opinionem quæ eâdem ferè est, ab eâ non videtur alienus.

SCD LYON 1

superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel obliquè si corpus moveatur in latus: ita in cœlis, ubi corpora gravitant in solem, fumi & vapores ascendere debent à sole (uti jam dictum est) & superiora vel rectà petere, si corpus fumans quiescit; vel obliquè, si corpus progrediendo loca semper deserit à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in



166. Longitudo caudæ hoc modo potest inveniri. Sit S sol, C cometa cujus cauda Ce; ex cognitis solis & cometæ locis notus erit angulus TCE, dataque (per observ.) deviatione caudæ à solis oppositio, dabitur angulus ECe, ac proinde innotescet angulus TCe, quem scilicet cauda efficit cum rectâ terram & cometam jungente. Præterea (per observ.) innotescit angulus ad terram CTe, quem cauda subtendit, quare (per theoriam cometæ) datâ cometæ distantiâ à terrâ, dabitur caudæ longitudo. 166

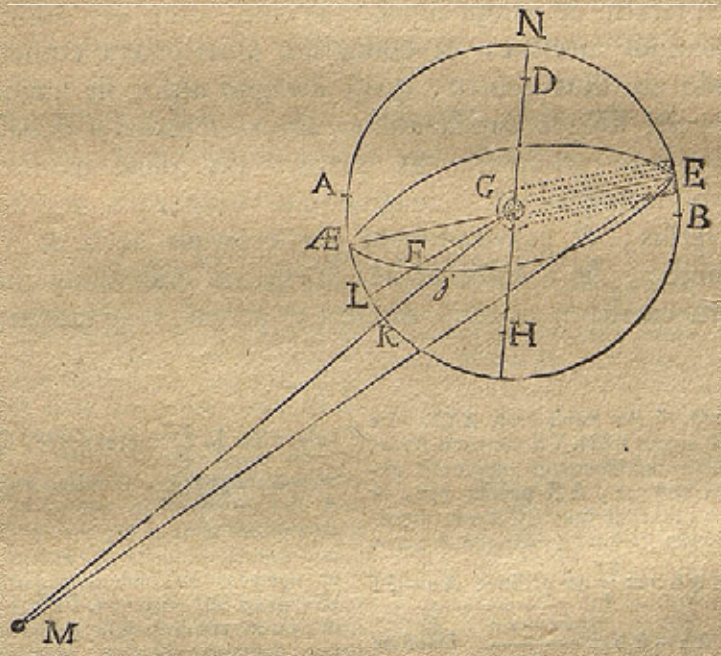
DE MUNDI SYSTEMATE.

in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto denior erit, lucemque propterea copiosiùs reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aëris nostri, & motibus nubium caudas aliquâ ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus viæ lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex cometarum atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aëris nostri. Nam aër juxta superficiem terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quàm aqua ejusdem ponderis, ideoque aëris columna cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aëris ad summitatem atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si

167. 167. Novam elegantemque methodum ad cometarum motus in orbe parabolico computandos nobiscum, suâ humanitate, communicavit Clariss. Vir & in rebus Mathematicis Versatissimus D. De Chezeaux. Methodum hanc describere longius foret, paucis duntaxat exponemus quâ ratione longitudinem atque deviationem caudæ investigat. Sit cometa in puncto G circà quod tanquam centrum describatur sphæra cujus radii GA, GE, sint æquales longitudini caudæ cometæ. Concipiatur in hac sphærâ planum Ecclipticæ parallelum habens polos in D & H, itemque concipiatur planum AKEB parallelum orbitæ veræ cometæ habens polum unum in G, sit terra in M, ejus longitudo e cometâ visa & ad planum orbitæ AKEB reducta, exprimetur per arcum KB, latitudo autem per arcum Kj. Quia verò datur (per observ.) longitudo cometæ é terrâ visa, dabitur longitudo terræ e cometâ visa; sed datur latitudo cometæ (per observ.) & (per theoriam cometæ) habetur inclinatio plani AKEB, ad planum Ecclipticæ, itemque innotescit locus nodi B. Quare (per trigon. sphær.) invenietur longitudo terræ respectu plani AKEB, cujus mensura est arcus BNAK, dabiturque latitudo Kj. Jam verò ductâ lineâ ME, ex terrâ M, ad extremitatem caudæ E, cujus extremitatis longitudo & latitudo é terra visæ (per observ.) notæ sunt, agatur GF parallela rectæ EM, eodem plane modo ac suprà innotescet positio puncti F in superficie sphæræ respectu plani AKEB, descriptoque arcu circuli maximi GFL, invenientur arcus BNAL & FL. Sed in triangulo sphærico GjF, datis latere Gj, complemento scilicet ad jK, & latere GF, complemento ad FL, atque latere Fj, mensurâ anguli FGj, qui æqualis est angulo GME, invenietur angulus GFj. Tandem concipiatur planum circuli maximi transiens per puncta F, j, per centrum G, commune sphæræ & cometæ atque per extremitatem caudæ E, cujusque sectio cum plano ANB, sit recta EGÆ, formabitur alterum triangulum sphæricum ÆFL, cujus

ſi columnæ totius aëreæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua ſuperior æquabit pondere ſuo columnam aquæ altam pedes 32. Indè verò (per regulam (b) multis experimentis confirmatam, quod compreſſio aëris ſit ut pondus atmoſphæræ incumbentis, quodque gravitas ſit reciprocè ut quadratum



jus jam innoteſcunt angulus ÆFL & latus FL, quare dabitur latus ÆL, ac proindè etiam dabitur arcus BAÆ, ob datum arcum BAL; innoteſcet præterea arcus BE, atque obtinebitur arcus ÆF, qui additus arcui Fj, dabit arcum Æj, ideóque dabitur arcus Ej, menſura anguli rectilinei jGE, vel MGE. Datis autem in triangulo rectilineo MGE, angulis MGE, GME & latere GM, dabitur latus GE, hoc eſt, longitudo caudæ. Si itaque habeatur diſtantia cometæ à terrâ in partibus mediocris diſtantiæ terræ à ſole expreſſa, in iiſdem quoque partibus obtinebitur longitudo caudæ. Quoniam verò (ex theoriâ cometæ) datur diſtantia cometæ à nodo ex ſole viſa, ſi ex hâc diſtantiâ ſubtrahatur arcus BE, habebitur angulus quem recta per ſolem & cometam ducta comprehendit cum caudâ GE, hoc eſt, deviatio cometæ a ſole. 167.

(b) * *Multis experimentis confirmatam.* Experimenta illa referunt paſſim rerum Phyſicarum ſcriptores, ſed prætertim Clariſſ. Muskembroek in Phyſicâ. Videantur etiam tranſactiones Philoſophicæ an. 1671. num. 73.

DE MUNDI SYSTEMATE.

dratum distantiæ locorum à centro terræ) computationem (c) per corol. prop. XXII. lib. II. ineundo, inveni quod aër, si ascendatur à superficie terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longè majori, quam spatii omnis infra orbem saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aëris nostri digitum unum latus, eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes planetarum regiones usque ad sphæram saturni & longè ultrà. Proindè cum aër adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu atmosphæra cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quàm rarissima. Et quamvis ob longè crassiorem cometarum atmosphæram, magnamque corporum gravitationem solem versus, & gravitationem particularum aëris & vaporum in se mutuò, fieri possit ut aër in spatiis cœlestibus inque cometarum caudis non adeò rarescat; perexiguam tamen quantitatem

168. (c) 168. * *Per corol. prop. XXII.* Sit (in figurâ prop. XXII.) S centrum terræ, S A ejusdem semidiameter mediocris pedum $19615800 = r$, A B pedum 850, & ideò S P $= 19616650 = a$, S F $= 2r$, dignitas hyperbolæ $fah = rr$, ideóque A a $= r$, F f $= \frac{1}{2}r$, & B b $= \frac{rr}{a}$ ac proindè A a $-$ F f $= \frac{1}{2}r$ & A a $-$ B b $= \frac{ar - rr}{a}$. Densitas A H seu S t $= m = 33$, densitas B j, seu S u $= n = 32$, & densitas F N, sive S Z $= d$. His positis, (ex naturâ hyperbolæ per theor. 4. de hyperbolâ), erit area t h n z, ad aream t h i u, ut L. $\frac{m}{d}$ ad L. $\frac{m}{n}$, & (per Cor. Prop. XXII. lib. 2.) erit L. $\frac{m}{d}$: L. $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar - rr}{a} = a : 2a - 2r$, ideóque L. $\frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \times$ L. $\frac{33}{32}$. Est autem $\frac{a}{2a - 2r} = \frac{19616650}{170}$, & ex tabulis vulgaribus L. $\frac{33}{32} = 0.0133639$. Quarè L. $\frac{m}{d} = 154.20879349$. Densitas ergò aeris in A seu in superficie telluris se habet ad densitatem aeris in F, seu in distantiâ semidiametri telluris ab eâdem superficie ut numerus respondens logarithmo 154.20879349 ad unitatem. Porrò logarithmo 3.2087100 in tabulis vulgaribus respondet numerus 1617 & ideò logarithmo 3.20879349 respondere debet numerus unitate fere integrâ major quam 1617. Logarithmo igitur invento 154.20879349 respondet numerus major quam 1617 cum 151 zeris adscriptis. Jam verò semidiameter terræ sit ut prius 19615800 pedum. Parallaxis solis ponatur $10''$ cujus sinus rectus est partium 485 posito radio partium 10000000. Quoniam semidiameter orbis magni est ad semidiametrum terræ ut radius ad sinum parallaxis solis (30. lib. 3.) erit semidiameter orbis magni pedum circiter 5000000000000. Sed semidiameter orbis Saturni circiter decuplo major est (phæn. 4.) erit igitur hæc semidiameter

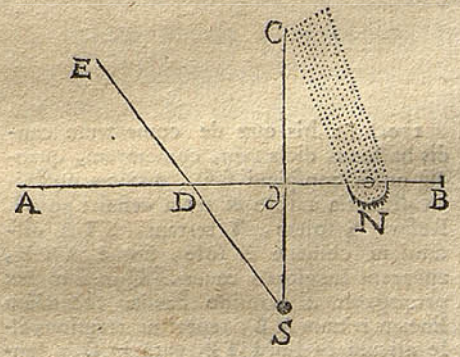
pedum

tatem aëris & vaporum ad omnia illa caudarum phænomena abundè sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce solis splendens, crassitudine suâ paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam verò caudarum crassitudinem, luce pariter solari illustratam, astra minima sine claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aëris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve lucem solis in jubare reflectentis.

Quo temporis spatio vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, (d) cognosci ferè potest ducendo rectam à termino caudæ

pedum 5000000000000, ideóque diameter ped. 10000000000000, sive digitorum 120000000000000. Est igitur sphæra Saturni ad globum cujus diameter est digitus unus ut præcedentis numeri cubus sive 1728 cum annexis 39 cyphris ad unitatem; sed ratio illa multò minor est ratione densitatum modò inventâ; Quarè globus aëris nostri digitum unum latus eâ cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris impleret omnes planetarum regiones usquè ad sphæram Saturni & longè ultrà.

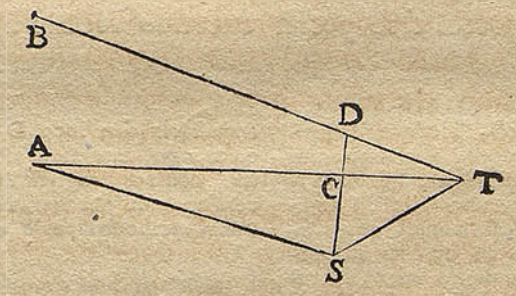
(d) 169. * *Cognosci ferè potest.* Referat S solem, AB trajectoriæ cometicæ portionem. Sit N cometæ nucleus ab A versus B progrediens, C terminus caudæ. Ducatur recta à termino illo C ad solem, punctum d, ubi recta trajectoriam secat, designabit locum ex quo vapor in termino caudæ ascendere cæpit à capite, si vapor ille rectà ascendat à sole. Quia autem vapor non rectà ascendit à sole sed vergit versus partes A, quas cometa reliquit (164.) agatur recta SE, parallela longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum cometæ) recta illa à lineâ caudæ divergat, atquè trajectoriam cometæ alicubi intersecet putà in D, vapor qui nunc terminum caudæ constituit à nucleo cœpit ascendere dum cometa in trajectoriæ suæ loco D versabatur; hic enim vapor cum motu ascensûs à sole, motum cometæ progressivum quem antè ascensum suum habebat, componit. Sed per varias methodos paulò ante explicatas in- 168.



veniri potest tempus quo cometa locum D occupavit & potest definiri quanto temporis spatio opus sit ut cometa trajectoriæ portionem DN, longitudine datam, percurrat, ideóque habebitur proximè tempus quo vapor ad terminum caudæ ascendit. Simili modo determinari potest temporis spatium quo vapor ascendit ad datum caudæ punctum.

DE MUNDI SYSTEMATE.

dæ ad solem, & notando locum ubi recta illa trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat à sole, ascendere cœpit à capite, quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit à sole, sed motum cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit obliquè. Unde verior erit problematis solutio, ut recta illa, quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potiùs (ob motum cur-



170. 170. Ex his quæ de cometarum caudis hactenus dicta sunt, cometarum, quandiù nobis conspicui sunt, maxima possibilis distantia a sole & terrâ definiri potest. Referat S solem, T terram, S T A distantiam cometæ à sole, sitque A T B, apparens longitudo caudæ. Quoniam lux propagatur à termino caudæ secundùm lineam rectam T B, reperitur terminus ille alicubi in lineâ T B, putà in D. Jungatur D S, secans lineam T A in C, & quia cauda semper opponitur soli quam proxime, ideóque sol, caput cometæ & terminus caudæ jacent in directum, reperitur caput cometæ in C. Rectæ T B, agatur parallela S A, occurrens lineæ TA, in A, caput cometæ C necessariò reperietur inter T & A, nam terminus caudæ reperitur alicubi in lineâ infinitâ T B, & lineæ omnes ut S D, quæ ab S ad lineam T B duci possunt, secant lineam T A, alicubi inter T & A. Quarè cometa non potest longius abesse à terrâ quam intervallo T A, nec à sole quam intervallo S A ultrà solem, vel ST, citrà. Exemplo sit cometa an 1680. cometa ille die 11. Dec. distabat 9°. à sole & longitudo caudæ erat 35°. Quarè construatur triangulum TSA, cujus angulus T æqualis sit distantiæ 9°. & angulus A seu angulus A T B æqualis sit longitudini caudæ 35°., erit S A ad ST, id est, limes maximæ possibilis distantiæ cometæ à sole ad semidiametrum orbis magni ut sinus anguli T, ad sinum anguli A, hoc est, ut 3. ad 11. circiter. Quarè cometa eo tempore minùs distabat à sole quam $\frac{3}{11}$ partibus distantiæ terræ à sole, & propterea versabatur aut intrà orbem

curvilineum cometæ) ut eadem à linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor, qui erat in termino caudæ *Jan.* 25 ascendere cœperat à capite ante *Dec.* 11. ideóque ascensu suo toto, dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10 apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in viciniâ solis celerrimè ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem, quamdiù apparuit, ex vapore ferè omni constabat, qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non priùs evanuit quam ob nimiam suam tam à sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ cometarum aliorum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuò à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos unà cum capitibus moveri pergunt. Et (e) hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida planetarum & cometarum corpora, sed etiam rariſſimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrimè peragunt ac diutissimè conservant.

LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROB. XXI.

As-

bem Mercurii aut inter orbem illum & terram. Rursus die 21. Decembr. distantia cometæ à sole erat $32^{\circ}\frac{2}{5}$. & longitudo caudæ 70°. ergò ut sinus $32^{\circ}\frac{2}{5}$. ad sinum 70°, hoc est, ut 4 ad 7, ità erat limes intervalli inter cometam & solem ad distantiam terræ à sole & propterea nondum cometa excesserat ex orbe veneris. Die 28. Decembr. distantia cometæ à sole erat 55°. & longitudo caudæ 56°. Quare, iisdem calculi vestigiis insistendo, limes intervalli inter cometam & solem, nondum æquabat distantiam terræ à sole & propterea cometa nondum excesserat ex orbe telluris. Hâc methodo quam ex Newtoni opusculo de mundi systemate descripsimus, aliorum cometarum distantias limitando inventum est cometas omnes, quandiù se nobis ostendunt, versari intrà spatium sphæricum centro sole & intervallo solis ac terræ vel duplicato vel ad summum triplicato descriptum. 170.

(e) * *Et hinc rursùs colligitur.* Legantur quæ dicta sunt in scholio prop. XI. lib. 2.

De Mundi Systemate.

Aſcenſum caudarum ex atmoſphæris capitum & progreſſum in partes à ſole averſas *Keplerus* aſcribit actioni radiorum lucis materiam caudæ ſecum rapientium. Et auram longè tenuiſſimam in ſpatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non eſt à (f) ratione prorſus alienum, non obſtante quod ſubſtantiæ craſſæ impeditiſſimis in regionibus noſtris à radiis ſolis ſenſibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari poſſe exiſtimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem ſuam à ſole aſcendere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideóque ſervatâ quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potiùs oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu aëris cui innatat. Aër ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda cometæ ad eundem modum aſcenderit à ſole? Nam radii ſolares non agitant media, quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes eâ actione calefactæ calefacient auram ætheream cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam eâ ratitate gravitatem ſuam ſpecificam, quâ priùs tendebat in ſolem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam, quod hi gyrantur circa ſolem & eâ actione conantur à ſole recedere, at ſolis atmoſphæra & materia cœlorum vel planè quieſcit, vel motu ſolo quem à ſolis rotatione acceperit, tardiùs gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in viciniâ ſolis, ubi orbes curviores ſunt, & cometæ intra denſiorem & eâ ratione graviorem ſolis atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quàm longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ, quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus ſolem gravitando, movebuntur circa ſolem in ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrimè adhærebunt. Gravitas enim vaporum in

170. (f) * *Non eſt a ratione prorſus alienum* (165.).

in ſolem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant à capitibus ſolem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit, ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel ſimul in ſolem cadent, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; ideoque gravitas illa non impedit, quò minùs caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem à cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque facillimè accipiant & poſtea liberrimè ſervent. LIBER TERTIUS. PROP. XLI. PROBL. XXI.

Caudæ igitur, quæ in cometarum periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel indè poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potiùs ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad ſolem caudæ novæ breviuſculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & ſubindè in periheliis cometarum illorum, qui ad uſque atmoſphæram ſolis deſcendent, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuò rareſcit ac dilatatur. Quâ ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem latior ſit quam juxta caput cometæ. Eâ autem rarefactione vaporem perpetuò dilatatum diffundi tandem & ſpargi per cœlos univerſos, deindè paulatim in planetas per gravitatem ſuam attrahi, & cum eorum atmoſphæris miſceri rationi conſentaneum videtur. Nam quemadmodum maria ad conſtitutionem terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem ſolis vapores copioſè ſatis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condenſati (ut (g) aliqui cum ratione philoſophantur) decurrant in fontes & flumina: ſic ad conſervationem marium & humorum in planetis requiri videntur cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condenſatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem conſumitur & in terram aridam convertitur, continuò ſuppleri & refici poſſit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omninò creſcunt, dein magnâ ex

(g) * *Ut aliqui cum ratione philoſophantur.* Horumce philoſophorum rationes videre eſt paſſim apud omnes cultiores phyſicos. Legantur tranſact. philoſop. an. 1687. 1694. 1729 & monum. Acad. Pariſ. an. 1703. 170

DE MUNDI SYSTEMATE.

ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuò decidit. Hinc moles terræ aridæ in dies augetur, & liquores, nisi aliundè augmentum sumerent, perpetuò decrescere deberent, ac tandem deficere. Porrò suspicor spiritum illum, qui aëris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex cometis præcipuè venire.

Atmosphæræ cometarum in descensu eorum in solem excurrendo in caudas, diminuuntur, & (eâ certè in parte quæ solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à sole, ubi jam minùs excurrunt in caudas, ampliantur; si modo phænomena eorum *Hevelius* rectè notavit. Minimæ autem apparent, ubi capita jam modo ad solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput cometæ, de quo egimus, in æqualibus à sole ac terrâ distantiis obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt cometam priorem. Nam juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novem.* 19. cometa hicce luce suâ quantumvis plumbeâ & obtusâ, æquabat spicam virginis, & clarius micabat quam postea. Et *Montenaro Nov.* 20, st. vet. cometa apparebat major stellis primæ magnitudinis, existente caudâ duorum graduum longitudinis. Et *D. Storer* literis, quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longè cedere cometæ, qui mense *Novembri* ante solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur, quod capita cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobs-

obscura & exigua. Nam anno 1668. *Mart.* 5. st. nov. horâ septimâ vespertinâ *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, cometam vidit horizonti proximum ad occasum solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, caudâ verò suprà modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam facilè cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & horizonti ferè parallela. Tantus autem splendor tres solùm dies durabat, subindè notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Undè etiam in *Lusitaniâ* quartam ferè cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infrà horizontem deliteſcente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est, quod caput à sole recessit, eique proximum fuit initio, pro more cometæ anni 1680. Et in chronico *Saxonico* similis legitur cometa anni 1106. *cujus stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & aquilonem tendebat*, ut habet etiam *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio mensis *Februarii*, ac deinceps circa vesperam, ad occasum solis brumalem. Indè verò & ex situ caudæ colligitur caput fuisse soli vicinum. *A sole*, inquit *Matthæus Parisiensis*, *distabat quasi cubito uno*, *ab horâ tertiâ* (rectius sextâ) *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille cometa ab *Aristotele* descriptus lib. 1. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* (caudæ scilicet) *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* (cauda) *jam minus flagraret*, *reddita est* (capiti) *cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* (id est, ad 60gr.) *extendit. Apparuit autem tempore hyberno* (an. 4. olymp. 101.) *& ascendens*

dens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere cometæ non pauci, qui caudas brevio es habuere. Horum aliqui jovem, alii venerem vel etiam lunam æquasse traduntur.

(h) Diximus cometas esse genus planetarum in orbibus valde eccentricis circa solem revolventium. Et quemamodum è planetis non caudatis minores esse solent, qui in orbibus minoribus & soli propioribus gyrantur, sic etiam cometas, qui in perihelis suis ad solem propiùs accedunt, ut plurimum minores esse, ne solem attractione suâ nimis agitent, rationi consentaneum videtur. (i) Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio propositio sequens lumen accendere potest.

PRO-

171. (h) 171. * *Diximus cometas esse genus planetarum*, idque gravissimis rationibus confirmatur. Hâc enim factâ hypothesi, computatisque per methodos præcedentes cometarum trajectoriis, hujusmodi trajectoriæ semper cum phænomenis congruunt quamproximè. Clariss. Halleius suspicatur cometam an. 1531. ab Appiano observatum, eundem fuisse cum illo qui anno 1607 descriptus est à Keplero & Longomontano & quem Halleius ipse redeuntem observavit an. 1682. quadrabant enim elementa omnia, solaque periodorum inæqualitas adversari videbatur. Verum tanta non fuit inæqualitas illa ut causis physicis adscribi non possit. Saturni enim motus à cæteris planetis & præsertim à jove ità perturbatur ut per aliquot dies integros incertum sit hujus planetæ tempus periodicum. Rectè etiam animadvertit Clariss. Cassinus in Mon. Paris. 1699. cometam diversis temporibus observatum ideóque pro duobus cometis usurpatum, unum eundemque esse posse, licet non conveniant inter se omnia motuum elementa; fieri scilicet potest ut unus idemque cometa bis observatus non secet Ecclipticam sub eodem angulo & in iisdem locis, ut cometæ hujus velocitas in perigæo non sit eadem. Talibus enim erroribus aliisque plurimis Luna est obnoxia. Cæterum Clariss. Halleius diligenter perpensis motibus cometæ an. 1682. hujus cometæ reditum anno 1758. futurum esse prædixit.

(i) * *Orbium verò transversas diametros & revolutionum tempora periodica.* Hæc duo obtineri possunt per methodum num 160. expositam.

SCD LYON 1

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Inventam cometæ trajectoriam corrigere.

Operatio 1. Assumatur positio plani trajectoriæ, per propositionem superiorem inventa; & seligantur tria loca cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quàmmaximè distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo (k) in perigæo versari convenit, vel saltem non longè à perigæo abesse. (l) Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes trigonometricas, loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ. Deindè per loca illa inventa, circa centrum solis ceu umbilicum, per operationes arithmeticas, ope prop. XXI lib. 1. institutas, describatur sectio conica: (m) & ejus areæ, radiis à sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem pri-

(k) * *In perigæo versari convenit.* Versante enim cometa in perigæo vel saltem non longe à perigæo, illius motus magis accurate definitur.

(l) * *Ex his locis apparentibus.* Inveniantur per operationes trigonometricas (ut in prop. præced.) loca tria vera cometæ in assumpto illo plano trajectoriæ tanquam accurato, hoc est, inveniantur tria prius definiti plani puncta in quibus cometa eandem longitudinem ac latitudinem obtineret quam revera habere observatur.

(m) * *Ejus areæ.* Ex datâ cometæ semitâ ejusque partium magnitudine respectu semitæ telluris ejusque partium, dabitur velocitas quâ cometa illam describit ideóque dabitur tempus quo cometa areas duas jam inventas percurrit. Tempus illud totum dicatur T, capiaturque numerus C, qui sit ad 1, ut tempus inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam, hoc est, ut A ad B. Sumatur præterea G ad 1, ut areæ inter observationem primam & secundam ad aream inter observationem secundam & tertiam, id est, ut D ad E; eadem quoque erit ratio inter tempora quibus areæ illæ radiis ad solem ductis describentur. Sit S, tempus verum inter observationem primam & tertiam. Si reperiatur T = S, & G = C, inventa plani trajectoriæ positio vera erit & accurata, nullâ indigens correctione. Sin aliter erit T — S, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam ortus nimirum ex positione plani trajectoriæ minus accuratâ, & G — C, erit error ex eâdem causâ ortus in ratione temporis inter observationem primam & secundam, ad tempus inter observationem secundam & tertiam, ut patet; nam in utroque casu unitas usurpatur pro consequente rationis inter bina tempora. 571

DE MUNDI SYSTEMATE.

primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum, quo area tota D+E velocitate cometæ per prop. XVI. lib. I. inventa describi debet.

Oper. 2. (n) Augeatur longitudo nodorum plani trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum eclipticæ. Deinde ex prædictis tribus cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, ut suprà: deinde etiam orbis per loca illa transiens, & (o) ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint *d* & *e*, nec non tempus totum *t*, quo area tota *d*+*e* describi debeat.

Oper. 3. Servetur longitudo nodorum in operatione primâ, & augeatur inclinatio plani trajectoriæ ad planum eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus cometæ locis apparentibus inveniantur in hoc novo plano loca tria vera, orbisque per loca illa transiens, (p) ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ε, & tempus totum τ, quo area tota δ+ε describi debeat.

(q) Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & *g* ad 1 ut *d* ad *e*, & γ ad 1 ut δ ad ε; sitque S tempus verum inter

171. (n) * *Longitudo nodorum*, per num. 145. inventa

(o) * *Et ejusdem areæ duæ.* Harumce arearum inter tres observationes radiis ad solem ductis descriptarum ratio sit ut g, ad 1; sitque t, tempus totum quo cometa utramque aream describeret. Si deprehendatur t=S & g=C, assumpta plani positio vera erit & accurata. Sin aliter, erit, ut suprà in operatione 1ª, t−S, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam, & g−C error in ratione temporis inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam. Uterque hic error oritur ex positione non satis accuratâ plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ.

(p) * *Ut & ejusdem areæ duæ.* Sint areæ illæ ut γ ad 1, sitque τ tempus totum quo area tota δ+ε, describi debeat. Si fuerit τ=S & γ=C, assumpta plani trajectoriæ positio vera est & accurata. Sin contrà, erit τ−S, error in tempore toto inter observationem primam & tertiam, & γ−C, error in ratione temporis inter observationem primam & secundam ad tempus inter observationem secundam & tertiam.

(q) * *Jam sit C ad* 1. Iisdem servatis denominationibus quas adhibet Newtonus, instituatur operatio per regulam falsæ positionis. Ad inveniendum errorem ortum ex assumptâ inclinatione plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ, fiat juxta prædictam regulam, ut differentia errorum T−τ ad differentiam positionum T−S, ita

ter observationem primam ac tertiam; & signis + & − probè observatis quærantur numeri m & n, eâ lege, ut sit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si in operatione primâ I designet inclinationem plani trajectoriæ ad planum ecliptícæ & K longitudinem nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum ecliptícæ, & $K+mP$ vera longitudo nodi. (r) Ac denique si in operatione primâ, secundâ ac tertiâ, quantitates R, r & ϱ designent latera recta trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem latera transversa respectivè: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum

stà error Q, ad quartam quantitatem, erit hæc ipsa quantitas $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, error inclinationis plani in toto scilicet tempore inter observationem primam & tertiam. Simili modo dicatur, $G-\gamma : G-C = Q : \frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$, erit quantitas $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ error ejusdem inclinationis in ratione inter bina trium observationum tempora. Similiter error longitudinis nodi in toto tempore inter observationem primam & tertiam invenitur $\frac{T-S}{T-t}\times P$, error verò in ratione inter bina tempora est $\frac{G-C}{G-g}\times P$. Est itaque vera & correcta inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ $I+\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$, sive $I+\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$; & vera longitudo nodi est $K+\frac{T-S}{T-t}\times P$ vel $K+\frac{G-C}{G-g}\times P$. Jam verò quoniam corrigendus est error uterque tam in toto tempore quam in ratione inter bina tempora, ponamus $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{C-g}\times P$, separatim æquari $m\times P$ hoc est $\frac{T-S}{T-t}=m$ & $\frac{G-C}{G-g}=m$.

Ponamus quoque $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{G-\gamma}\times Q$ 171.
$=n\times Q$, id est $\frac{T-S}{T-\tau}=n$, & $\frac{G-C}{G-\gamma}=n$. Hinc proveniet $mT-mt=T-S$ & $mG-mg=G-C$; item $nT-n\tau=T-S$, & $nG-ng=G-C$, undè fit $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, & $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$. Quarè si tales quærantur numeri m & n, ut sit $2G-2C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2T-2S=mT-mt+nT-n\tau$, erit $\frac{T-S}{T-\tau}\times Q$ & $\frac{G-C}{T-\tau}\times Q=n\times Q$. Similiter fiet $\frac{T-S}{T-t}\times P$ & $\frac{G-C}{G-g}\times P=mP$, ac proindè error inclinationis plani trajectoriæ erit nQ & error longitudinis nodi mP. Quarè vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ erit $I+nQ$, & $K+mP$ vera longitudo nodi. Hæc omnia patent ex notis in tres operationes præcedentes.

(r) * *Ac denique*. Nota sint latera recta trium trajectoriarum in operatione primâ, secundâ & tertiâ descriptarum. Designet R, latus rectum primæ trajectoriæ, r secundæ, ϱ tertiæ, & trajectoriæ quam cometa describit desideretur verum latus rectum; per regulam falsæ positionis eâdem plane methodo quam modò ad-

DE MUNDI SYSTEMATE.

verum latus rectum, & $\frac{1}{L+m\,\text{.}-mL+n\lambda-nL}$ verum latus transversum trajectoriæ quam cometa describit. (f) Dato autem latere transverso datur etiam tempus periodicum cometæ. *Q. E. I.*

Cæterùm cometarum revolventium tempora periodica, & orbium latera transversa, haud satis accuratè determinabuntur, nisi per collationem cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem cometam, in eodem orbe revolventem. (t) Et tum demum ex revolutionum temporibus dabuntur orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur orbes elliptici.

In hunc finem computandæ sunt igitur cometarum plurium trajectoriæ, ex hypothesi quod sint parabolicæ. Nam hujusmodi trajectoriæ cum phænomenis semper congruent quamproximè. Id liquet, non tantùm ex trajectoriâ parabolicâ cometæ anni 1680, quam cum observationibus suprà contuli, sed etiam ex eâ

172. hibuimus poterit inveniri. Ut obtineatur vera longitudo nodi, additur ejus longitudini in primo plano excessus longitudinis assumptæ in plano secundo supra præcedentem ductus in m, & ut habeatur vera inclinatio plani trajectoriæ ad planum Ecclipticæ, additur inclinationi plani primi, excessus inclinationis assumptæ in plano tertio suprà inclinationem præcedentem ductus in n. Sed trajectoria cometæ ejusque latus rectum corrigi debent tum ob correctam longitudinem nodi, tum ob correctam inclinationem plani ad planum Ecclipticæ, quare lateri recto trajectoriæ in primo plano descriptæ sive ipsi R, addi debet $mr-mR$, excessus scilicet lateris recti in plano secundo suprà latus rectum in plano primo ductus in m. Addere insuper oportet $n\varrho-nR$, qui est excessus lateris recti in plano tertio suprà latus rectum in primo ductus in n, ideóque erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$, verum latus rectum. Simili modo patet datis lateribus transversis in operatione primâ, secundâ & tertiâ respectivè $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, esse verum latus transversum trajectoriæ $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$.

(f) 172. * *Dato autem latere transverso.* Accuratè descriptâ cometæ trajectoriâ (per methodos præced.) si deprehendatur ellipsim solis centro tanquam umbilico descriptam, non verò parabolam per determinata trajectoriæ puncta transire, cometa in orbem redibit & dato latere transverso trajectoriæ hujus, dabitur tempus periodicum; erit scilicet, quadratum temporis periodici cometæ ad quadratum temporis periodici telluris circà solem ut cubus majoris axis orbitæ cometicæ ad cubum majoris axis orbitæ terrestris (160).

(t) * *Et tum demum* (160).

eâ cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus cometæ computavit, sed minùs accuratè. Ex iisdem observationibus *Halleius* noster (u) loca cometæ hujus denuò computavit, & tum demum ex locis sic inventis trajectoriam cometæ determinavit. Invenit autem ejus nodum ascendentem in ♊ 21gr. 13′. 55″., inclinationem orbitæ ad planum ecliptica 21gr. 18′. 40″, distantiam perihelii à nodo in orbitâ 49gr. 27″. 30″. Perihelium in ♌ 8gr. 40′. 30″ cum latitudine australi heliocentricâ 16gr. 1′. 45″. Cometam in perihelio *Novemb.* 24d. 11h. 52′. p. m. tempore æquato *Londini*, vel 13h. 8′ *Gedani*, stylo veteri, & latus rectum parabolæ 410286, existente mediocri terræ à sole distantiâ 100000. Quam probe loca cometæ in hoc orbe computata congruunt cum observationibus, patebit ex tabulâ sequente ab *Halleio* supputatâ. LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROBL. XXII.

(u) * *Loca cometæ hujus denuò computavit.* Varias computi hujus ineundi methodos suprà tradidimus. 1722

DE MUNDI SYSTEMATE.

Temp. Appar. Gedani, st. vet.	Observatæ Cometæ distantiæ.		Loca observata.	Loca computata in Orbe.
Decemb.		gr. ″ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
3d. 18h. 29½	à Corde Leonis	46 . 24 . 20	Long. ♎ 7. 1. 0	♎ 7 . 1 . 29
	a Spica Virginis	22 . 52 . 10	Lat. aust. 21.39. 0	21 . 38 . 50
4 . 18 . 1½	à Corde Leonis	46 . 2 . 45	Long ♎ 16.15. 0	♎ 6 . 16 . 5
	a Spica Virginis	23 . 52 . 40	Lat. aust. 22.24. 0	22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	à Corde Leonis	44 . 48 . 0	Long ♎ 3. 0. 0	♎ 3 . 7 . 33
	à Spica Virginis	27 . 56 . 40	Lat. aust 25 . 22 0	25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	à Corde Leonis	53 . 15 . 15	Long ♏ 2.56. 0	♏ 2 . 56 . 0
	ab Hum. Orionis dext.	45 . 43 . 30	Lat. aust. 49 25. 0	49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	à Procyone	35 . 13 . 50	Long. ♓ 28.40 30	♓ 28 . 43 . 0
	à Lucid Mandib. Ceti	52 . 56 . 0	Lat. aust. 46.48 0	45 . 46 . 0
20 . 9 . 53½	à Procyone	40 . 49 . 0	Long. ♓ 13 3. 0	♓ 13 . 5 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	40 . 4 . 0	Lat. aust. 39.54. 0	39 . 53 . 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis	26 . 21 . 25	Long ♓ 2.16 0	♓ 2 . 18 . 30
	à Lucid. Mandib. Ceti	29 . 28 . 0	Lat. aust. 33.41. 0	33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis	29 . 47 . 0	Long. ♉ 24 24. 0	♉ 24 . 27 . 0
	à Lucid. Mandib. Ceti	20 . 29 . 30	Lat. aust. 27.45. 0	27 . 46 0
26 . 7 . 58	à Lucida Arietis	23 . 20 . 0	Long. ♉ 9. 0. 0	♉ 9 . 2 . 28
	ab Aldebaran	26 . 44 . 0	Lat. aust. 12.26. 0	12 . 34 . 13
27 . 6 . 45	à Lucida Arietis	20 . 45 . 0	Long. ♉ 7. 5.40	♉ 7 . 8 . 45
	ab Aldebaran	28 . 10 . 0	Lat. aust. 10.27. 0	10 . 22 . 13
28 . 7 . 39	à Lucida Arietis	18 . 29 . 0	Long. ♉ 5.24 45	♉ 5 . 27 . 12
	à Palilicio	29 . 37 . 0	Lat. aust. 8.22.50	8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	à Cing. Androm.	30 . 48 . 10	Long. ♉ 2. 7.40	♉ 2 . 8 . 20
	à Palilicio	32 . 53 . 30	Lat. aust. 4.13. 0	4 16 . 25
Jan. 1665.	à Cing Androm.	25 . 11 . 0	Long. ♈ 28.24.47	♈ 28 24. 0
7 . 7 . 37½	à Palilicio	37 . 12 . 25	Lat. bor. 0.54. 0	0.53 . 0
13 . 7 . 0	a capite Androm.	28 . 7 . 10	Long. ♈ 27. 6.54	♈ 27 . 6 . 39
	à Palilicio	38 . 55 . 20	Lat. bor. 3. 6.50	3 . 7 . 40
24 . 7 . 29	à Cin. Androm.	20 . 32 . 15	Long. ♈ 26.29.15	♈ 26 . 28 . 50
	à Palilicio	40 . 5 . 0	Lat. bor. 5.25.50	5 . 26 . 0
Feb.			Long. ♈ 27.24.46	♈ 27 . 24 . 55
7 . 8 . 37			Lat. bor. 7. 3.26	7 . 2 15
22 . 8 . 46			Long. ♈ 28.29.46	♈ 28 . 29 . 58
			Lat. bor. 8 12 36	8 10 25
Mar.			Long. ♈ 29.18.15	♈ 29 . 18 . 20
1 . 8 . 16			Lat. bor. 8.26.26	8 . 36 . 12
7 . 8 . 37			Long. ♈ 0. 2.48	♉ 0 . 2 . 42
			Lat. bor. 8.56.30	8 . 56 . 56

Menſe *Februario* anni ineuntis 1665, ſtella prima arietis quam in ſequentibus vocabo γ, erat in ♈ 28gr. 30′. 15″ cum latitudine boreali 7gr. 8′. 58″. eScunda arietis erat in ♈ 29gr. 17′.

$17^{l}. 18^{ll}$ cum latitudine boreali 8gr. $28^{l}. 16^{ll}$. Et ſtella quædam alia ſeptimæ magnitudinis, quam vocabo *A*, erat in ♈ 28gr. $24^{l}. 45^{ll}$ cum latitudine boreali 8gr. $28^{l}. 33^{ll}$. Cometa vero *Feb.* $7^{d}. 7^{l}. 30^{ll}$ *Pariſiis* (id eſt *Feb.* $7^{d}. 8^{l}. 37^{ll}$ *Gedani*) ſt. vet. triangulum conſtituebat cum ſtellis illis γ & *A* rectangulum ad γ. Et diſtantia cometæ à ſtella γ æqualis erat diſtantiæ ſtellarum γ & *A*, id eſt 1gr. $19^{l}. 46^{ll}$ in circulo magno, atque ideo ea erat 1gr. $20^{l}. 26^{ll}$ in parallelo latitudinis ſtellæ γ. Quare ſi de longitudine ſtellæ γ detrahatur longitudo 1gr. $20^{l}. 26^{ll}$, manebit longitudo cometæ ♈ 27gr. $9^{l}. 49^{ll}$. *Auzoutius* ex hâc ſuâ obſervatione cometam poſuit in ♈ 27gr. 0^{l} circiter. Et ex ſchemate, quo *Hookius* motum ejus delineavit, is jam erat in ♈ 26gr. $59^{l}\ 24^{ll}$. Ratione mediocri poſui eundem in ♈ 27gr. $4^{l}. 46^{ll}$. Ex eâdem obſervatione *Auzoutius* latitudinem cometæ jam poſuit 7gr. & 4^{l} vel 5^{l} boream verſus. Eandem rectius poſuiſſet 7gr. $3^{l}. 29^{ll}$, exiſtente ſcilicet differentia latitudinum cometæ & ſtellæ γ æquali differentiæ longitudinum ſtellarum γ & *A*.

Feb. $22^{d}. 7^{h}. 30^{l}$ *Londini*, id eſt *Feb.* $22^{d}. 8^{h}. 46^{l}$ *Gedani*, diſtantia cometæ à ſtella *A*, juxta obſervationem *Hookii* à ſeipſo in ſchemate delineatam, ut & juxta obſervationes *Auzoutii* à *Petito* in ſchemate delineatas, erat pars quinta diſtantiæ inter ſtellam *A* & primam arietis, ſeu $15^{l}. 57^{ll}$. Et diſtantia cometæ à linea jungente ſtellam *A* & primam arietis erat pars quarta ejuſdem partis quintæ, id eſt 4^{l}. Ideoque cometa erat in ♈ 28gr. $29^{l}. 46^{ll}$, cum lat. bor. 8gr. $12^{l}. 36^{ll}$.

Mart. $1^{d}. 7^{h}. 0^{l}$ *Londini*, id eſt *Mart.* $1^{d}. 8^{h}. 16^{l}$ *Gedani*, cometa obſervatus fuit prope ſecundam arietis, exiſtente diſtantia inter eoſdem ad diſtantiam inter primam & ſecundam arietis, hoc eſt ad $1gr. 33^{l}$, ut 4 ad 45 ſecundum *Hookium*, vel ut 2 ad 23 ſecundum *Gottignies*. Unde diſtantia cometæ à ſecunda arietis erat $8^{l}. 16^{ll}$ ſecundum *Hookium*, vel $8^{l}. 5^{ll}$ ſecundum *Gottignies*, vel ratione mediocri $8^{l}. 10^{ll}$. Cometa vero ſecundum *Gottignies* jam modo prætergreſſus fuerat ſecundam arietis quaſi ſpatio quartæ vel quintæ partis itineris uno die confecti,

DE MUNDI SYSTEMATE.

fecti, id est 1. 35″ circiter (quocum satis consentit *Auzoutius*) vel paulo minorem secundum *Hookium*, puta 1′. Quare si ad longitudinem primæ arietis addatur 1′, & ad latitudinem ejus 8′. 10″, habebitur longitudo cometæ ♈ 29gr. 18′, & latitudo borealis 8gr. 36′. 26″.

Mart. 7ᵈ. 7ʰ. 30 *Parisius* (id est *Mart.* 7ᵈ. 8ʰ. 37′ *Gedani*) ex observationibus *Auzoutii* distantiâ cometæ à secundâ arietis æqualis erat distantiæ secundæ arietis à stellâ *A*, id est 52′. 29″. Et differentia longitudinum cometæ & secundæ arietis erat 45′ vel 46, vel ratione mediocri 45. 30″. Ideoque cometa erat in ♉ ogr. 2′. 48″. Ex schemate observationum *Auzoutii*, quod *Petitus* construxit, *Hevelius* deduxit latitudinem cometæ 8gr. 54. Sed sculptor viam cometæ sub finem motus ejus irregulariter incurvavit, & *Hevelius* in schemate observationum *Auzoutii* à se constructo incurvationem irregularem correxit, & sic latitudinem cometæ fecit esse 8gr. 55′. 30″. Et irregularitatem paulo magis corrigendo, latitudo evadere potest 8gr. 56′, vel 8gr. 57′.

Visus etiam fuit hic cometa *Martii* die 9, & tunc locari debuit in ♉ ogr. 18′, cum lat. bor. 9gr. 3½ circiter.

Apparuit hic cometa menses tres, signaque ferè sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus à circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, theoriâ à principio ad finem cum observationibus non minus accuratè congruit, quam theoriæ planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter nodum ascendentem & perihelium, seu constituendo (ˣ) angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) paral-

172. (ˣ) * *Angulum illum* inter nodum ascendentem & perihelium invenerat Halleius 49°. 27′. 30″, constituto autem angulo illo 49°. 27′. 18″, computationibusque repetitis, subducta inveniuntur duo minuta prima circiter, ut oportet, & theoriâ à prin-

parallaxis annua insignis fuit, & (y) indè demonstratur motus annuus terræ in orbe magno.

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ, qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in orbe, cujus planum cum plano eclipticæ angulum ferè rectum continebat. Hujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; inclinatio orbitæ ad ecliptican 83gr. 11′; perihelium in ♐ 25gr. 29′. 30″; distantia perihelia à sole 56020, existente radio orbis magni 100000, & tempore perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem cometæ in hoc orbe ab *Halleio* computata, & cum locis à *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1683 Temp. Æquat	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ Lat
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.5 .12	11.37.4	29.34. 0	11 39 43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45 45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8 40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31 9.42	18. 9 22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	−0.39	−0.27
31.14 55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25 29.32	25.16.19	25.28.46	25 17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20 40 32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15.10	3.48. 2	0 43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♌ 24.52.53	5.11.15 Austr	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Austr.	−3.48	−2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.58	11. 7.12	5.16.58	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.28
26 16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16 38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam theoria per motum cometæ retrogradi, qui apparuit anno 1682. Hujus nodus ascendens (computante *Hal-*

principio ad finem cum observationibus congruit. Corrigendam esse theoriam duobus minutis primis circiter ex observatione cometæ, ubi motus ejus velocissimus fuit, colligitur.

(y) * *Et indè demonstratur.* † Quâ ratione annua cometarum parallaxis cum telluris quiete conciliari possit legatur apud Ricciolium in almagesto, Tacquetum in Astronomiâ aliosque passim, ubi de Planetarum retrogradationibus agunt. 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

Halleio) erat in ♉ 21gr. 16′. 30″. Inclinatio orbitæ ad planum ecliptiæ 17gr. 56′. 0″. Perihelium in ♒ 2gr 52′. 50″. Distantia perihelia à sole 58328, existente radio orbis magni 100000. Et tempus æquatum perihelii *Sept.* 4ᵈ. 7ʰ. 39′. Loca verò ex observationibus *Flamsteedii* computata, & cum locis per theoriam computatis collata, exhibentur in tabulâ sequente.

1682. Temp. Appar.	Locus Solis	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obs.	Lat. Bor. Obser.	Differ. Long.	Differ. Lat
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18. 4.40	25.49.55	− 0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29 38. 2	26.17.37	− 0 47	+2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	− 0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12 37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19. 6. 9	20 30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22. 1.28	25.42. 0	12.23.48	25 40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26 59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29 58.45	9.26.43	− 0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0 44.10	8 49.10	♏ 0 44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

Confirmatur etiam theoria per motum retrogradum cometæ, qui apparuit anno 1723. Hujus nodus ascendens (computante D. *Bradleo*, astronomiæ apud *Oxonienses* professore *Saviliano*) erat in ♈ 14gr. 16′. Inclinatio orbitæ ad planum ecliptiæ 49gr. 59′. Perihelium in ♉ 12gr. 15′. 20″. Distantia perihelia à sole 998651, existente radio orbis magni 1000000, & tempore æquato perihelii *Septem.* 16ᵈ. 16ʰ. 10′. Loca verò cometæ in hoc orbe à *Bradleo* computata, & cum locis à seipso & patruo suo D. *Poundio*, & à D. *Halleio* observatis collata exhibentur in tabulâ sequente.

1723.

1723. Temp. Æquat.	Comet. Long. Observat	Lat Bor. Observat.	Comet. Long. Comput.	Lat. Bor. Comput.	Differ. Long	Differ. Latit.
d. h.	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Octob. 9. 8. 5	♒ 7. 22. 15	5. 2. 0	♒ 7. 21. 26	5. 2. 47	+ 49	− 47
10. 6. 21	6. 41. 2	7. 44. 13	6. 41. 42	7. 43. 18	− 50	+ 55
12. 7. 22	5. 39. 58	11. 55. 0	5. 40. 19	11. 54. 55	− 21	+ 5
14. 8. 57	4. 59. 49	14. 43. 50	5. 0. 37	14. 44. 1	− 48	− 11
15. 6. 35	4. 47. 41	15. 40. 51	4. 47. 45	15. 40. 55	− 4	− 4
21. 6. 22	4. 2. 32	19. 41. 49	4. 2. 21	10. 42. 3	+ 11	− 14
22. 6. 24	3. 59. 2	20. 8. 12	3. 59. 10	20. 8. 17	− 8	− 5
24. 8. 2	3. 55. 29	20. 55. 18	3. 55. 11	20. 55. 9	+ 18	+ 9
29. 8. 56	3. 56. 17	22. 20. 27	3. 56. 42	22. 20. 10	− 25	+ 17
30. 6. 20	3. 58. 9	22. 32. 28	3. 58. 17	22. 32. 12	− 8	+ 16
Nov. 5. 5. 53	4. 16. 30	23. 38. 33	4. 16. 23	23. 38. 7	+ 7	+ 26
8. 7. 6	4. 29. 36	24. 4. 30	4. 29. 54	24. 4. 40	− 18	− 10
14. 6. 20	5. 2. 16	24. 48. 46	5. 2. 51	24. 48. 6	− 35	+ 30
20. 7. 45	5. 42. 20	25. 24. 45	5. 43. 13	25. 25. 17	− 53	− 32
Dec. 7. 6. 45	8. 4. 13	26. 54. 18	8. 3. 55	26. 53. 42	+ 18	+ 36

His exemplis abundè satis manifestum est, quod motus cometarum per theoriam à nobis expositam non minus accuratè exhibentur, quam solent motus planetarum per eorum theorias. (z) Et propterea orbes cometarum per hanc theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum cometæ in quolibet orbe revolventis tandem sciri, & tum demum orbium ellipticorum latera transversa & apheliorum altitudines innotescent.

Cometa retrogradus, qui apparuit anno 1607, descripsit orbem, cujus nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20gr. 21′; inclinatio plani orbis ad planum eclipticæ erat 17gr. 2′; perihelium erat in ♒ 2gr. 16′; & distantia perihelia à sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000. Et cometa erat in perihelio *Octob.* 16d. 3h. 50′. Congruit hic orbis quamproximè cum orbe cometæ, qui apparuit anno 1682. Si cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic cometa spatio annorum 75, & (a) axis major orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni, ut $\sqrt{c}$: 75 × 75 ad 1, seu 1778 ad

(z) * *Et propterea.* Quomodò hæc omnia fieri possint variis methodis suprà exposuimus.

(a) * *Et axis major* orbis ejus erit ad axem majorem orbis magni ut radix cubica numeri 75 × 75 ad 1 (172). 172.

DE MUNDI SYSTEMATE.

ad 100 circiter. Et (b) distantia aphelia cometæ hujus à sole, erit ad distantiam mediocrem terræ à sole, ut 35 ad 1 circiter. (c) Quibus cognitis, haud difficile fuerit orbem ellipticum cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt, si cometa, spatio annorum septuaginta quinque, in hoc orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altiùs ascendere.

Cæterum cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam apheliorum à sole distantiam, & longam moram in apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proindè non est expectandum ut cometa idem in eodem orbe, & iisdem temporibus periodicis accuratè redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ à causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur, (d) cur cometæ non comprehendantur zodiaco more planetarum, sed indè migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in apheliis suis, ubi tardissimè moventur, quamlongissimè distent ab invicem, & se mutuò quam minime trahant. Quâ de causâ cometæ, qui altiùs descendunt, ideoque tardissimè moventur in apheliis, debent altiùs ascendere.

Co-

173. (b) * *Et distantia aphelia.* Quoniam distantia perihelia cometæ à sole erat 58680, existente radio orbis magni 100000 erit eadem distantia perihelia 29, circiter existente radio orbis magni 100, ac proindè distantia aphelia quæ est differentia inter axem majorem orbitæ cometicæ 1758 & distantiam perihelium 29, erit earumdem partium 1749, ideóque distantia aphelia cometæ hujus à sole erit ad distantiam mediocrem terræ à sole ut 1749 ad 29, hoc est, ut 35 ad 1 circiter.

(c) * *Quibus cognitis.* (Per prop. 20. lib. 1.).

(d) 173. * *Cur cometæ non comprehendantur Zodiaco.* Ex observato sæpè sæpius cometarum cursu retrogrado deduxit Newtonus cometas non comprehendi Zodiaco more planetarum, sed indè migrare & motibus variis in omnes cœlorum regiones excurrere. Attamen Clariss. Cassinus in monum. Paris. an. 1731. retrogrados cometarum motus ad directos reduxit. Verum eo artificio utitur Vir Doctissimus ut distantiam cometæ à terrâ vel sole pro arbitrio assumat, & modò tellurem inter solem & cometam, modò cometam inter solem & telluram ac denique solem inter cometam & tellurem, pro necessitate, collocet. Quâ ratione id fieri possit non satis intelligitur, nisi ignota omninò fingatur cometarum theoria; concesso enim aliquo cometarum systemate, distantias illas pro lubitu usurpare non licet, sed ex datis motuum elementis, cometarum distantia totaque trajectoria determi-

Cometa, qui anno 1680 apparuit, minus distabat à sole in perihelio suo quam parte sextâ diametri solis; & propter summam velocitatem in viciniâ illâ, & densitatem aliquam atmosphæræ solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari, & propiùs ad solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad solem, incidet is tandem in corpus solis. Sed & in aphelio ubi tardissimè movetur, aliquando per attractionem aliorum cometarum retardari potest, & subindè in solem

terminantur. Sic Halleïus definivit trajectoriam cometæ qui annis 1664. & 1665. apparuit. Ut autem retrogradum hujus cometæ motum ad directum reducat Clariss. Cassinus talem huic cometæ motum tribuit qui cum Halleii computo nequaquam convenit. Quam probe tamen cum observationibus theoria congruat ostendit tabula paulò antè exhibita. Quamvis itaque retrogrados cometarum motus ad directos ingeniosâ arte reduxerit Cassinus, non id tamen satis esse arbitramur ut eam rejiciamus cometarum theoriam quæ phænomenis apprimè respondet, atque incerti sinè ullâ theoriâ erremus. Prætereà talem orbitam prædicto cometæ assignat Cassinus ut extrà orbem annuum fere non excurrat; Quod si res ità se haberet, hic cometa in conspectum citò rediisset, cometas enim ad maximam quoque distantiam conspicuos esse constat ex defectu parallaxeos. Nec feliciori successu ad motum directum reduci posse videtur motus retrogradus cometæ an. 1680. Nam præterquam quod omnem cometarum theoriam fictis ad arbitrium hypothesibus everti necesse sit, in explicatione Cassini gravissima occurrit difficultas cujus vim totam sensit Clariss. Vir. Oporteret scilicet ut cometa ille paulò ante 27am. diem Novembris per nodum descendentem transierit & versus diem 17m. Decembris ad nodum ascendentem pervenerit, ideóque cometa breviori quam unius mensis intervallo, totum spatium quod est infrà planum Ecclipticæ trajeciisset. Porrò tanta velocitas caret verisimilitudine, nec conciliari posse videtur cum observatis longo temporis spatio hujus cometæ motibus; hic enim Astronomorum oculis citò sese subduxisset. Singulas explicationes quæ in loco cit. monum. Paris. leguntur percurrere longiùs foret, satis erit addere eas hoc potissimum fine excogitatas fuisse ut nempe servaretur & à gravissimâ objectione liberaretur vorticum hypothesis. Verum his explicationibus cæteroquin ingeniosissimis nondum tamen propositus finis obtineri videtur; hanc enim difficultatem effugientes vorticum patroni, in aliam incurrunt. Oporteret siquidem ut cometarum vortices ipsum saltem telluris vorticem intersecarent, quod sine vorticum perturbatione ac tandem destructione fieri posse non intelligitur. Alias hypotheses finxerunt alii. Quidam cometas habuerunt tanquam planetas non circà solem nostrum, sed circa alium velut centrum revolventes. Nonnulli eos habuerunt velut satellites planetæ cujusdam primarii in nostro vortice constituti, qui tamen ob maximam illius à nobis distantiam conspici non potest, ità ut cometæ seu satellites sese nobis duntaxat conspicuos præbeant, dum in inferiori & telluris proximiori orbitarum suarum parte versantur. Sed à Newtonianâ cometarum theoriâ quæ phænomenis consentanea est nequaquam nos removere debent hypotheses illæ quæ eam duntaxat ob causam subtiliter inventæ sunt ut servaretur vorticum hypothesis quam aliis multis difficultatibus premi passim ostendimus. Cæterum quidquid de hâc materiâ diximus & ipsa, prout nobis visum est, rei veritas & commentatorum officium à nobis postulabant.

173.

DE MUNDI SYSTEMATE.

solem incidere. (e) Sic etiam stellæ fixæ, quæ paulatim expirant in lucem & vapores, cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro stellis novis haberi. Hujus generis sunt stellæ fixæ, quæ subito apparent, & sub initio quam maximè splendent, & subindè paulatim evanescunt. Talis fuit stella in cathedrâ Cassiopeiæ quam *Cornelius Gemma* octavo *Novembris* 1572, lustrando illam cœli partem nocte serena minimè vidit; at nocte proximâ (*Novem.* 9.) vidit fixis omnibus splendidiorem, & luce suâ vix cedentem veneri. Hanc *Tycho Brahæus* vidit undecimo ejusdem mensis ubi maximè splenduit; & ex eo tempore paulatim decrescentem & spatio mensium sexdecim evanescentem observavit. Mense *Novembri*, ubi primùm apparuit, venerem luce suâ æquabat. Mense *Decembri*

174. (e) 174. * *Sic etiam stellæ fixæ.* De stellarum variationibus nonnulla hic afferemus quæ habet Clariss. D. De Maupertuis in eximio opusculo de figuris astrorum & in mon. Paris. an. 1734. Fixas, quæ sunt totidem soles, variis donatas esse figuris & ex iis aliquas ad figuram planam vel planitiem accedere non repugnat. Nam à sphæroide propemodum sphærico per innumeros gradus depressionis versus polos tandem devenitur ad planum circulare, si continuò varietur ratio vis centrifugæ ad gravitatem, ut patet ex num. 56. His positis, ratio reddi poterit cur fixæ quædam nunc appareant, nunc evanescant, cur mutetur apparens stellarum quarumdam magnitudo, nec non etiam cur stellæ aliquæ quasi recens accensæ oriri visæ sint, quædam verò quasi extinctæ videri desierint. Si in stellarum numero reperiantur aliquæ ad figuram planam accedentes, illæ dum faciem suam nobis obvertunt, sphærarum instar apparebunt. Si autem respectu nostri situm suum mutent, magis vel minus stellarum illarum splendor decrescet, prout hoc vel illo modo sese nobis ostendent, ac tandem exiguæ crassitiei latus exhibeant & satis longe à nobis distent, conspectui nostro sese omninò subducent. Quomòdò autem fixæ respectu nostri positionem suam mutent explicari potest, si ponamus circà stellam compressam revolvere planetam aliquam ingentis molis aut cometam in orbitâ valde excentricâ & ad æquatorem stellæ inclinata; in hâc enim hypothesi, planeta ad perihelium suum accedens juxtà attractionis leges inclinationem fixæ planæ perturbabit, & hinc fieri poterit ut partem lucidam disci nobis obversam conspiciamus quæ ob exiguam lateris compressi crassitiem oculos nostros anteà effugiebat. Ex his quoque intelligitur fieri posse ut circà planetam congregetur annulus saturni annulo similis, si nempe cometa cujus cauda ex vaporibus tenuissimis æstu solis in perihelio elevatis componitur, ad planetam aliquem maximè potentem proximè accederet. Hic enim vaporum torrens attractionis vi ad revolvendum circà planetam annuli instar posset detorqueri; imò impossibile non foret ipsum quoque corpus cometæ circà planetam rapi & sic planeta satellitem acquireret. Haberet autem planeta satellitem sine annulo, si cometa destitueretur caudâ, sed adjiceretur etiam annulus, si cometa caudam habuerit, atque annulus aderit sine satellite, si cauda duntaxat à planeta attrahatur. Hæc sunt quæ ad hunc Newtoni locum præcipuè referuntur; cæterùm in laudatis opusculis elegantissima sunt problemata quæ consulat Lector.

SCD LYON 1

bri nonnihil diminuta jovem æquare videbatur. Anno 1573, mense *Januario* minor erat jove & major Sirio, cui in fine *Februarii* & *Martii* initio evasit æqualis. Mense *Aprili* & *Maio* stellis secundæ magnitudinis, *Junio*, *Julio* & *Augusto* stellis tertiæ magnitudinis, *Septembri*, *Octobri* & *Novembri* stellis quartæ, *Decembri* & anni 1574, mense *Januario* stellis quintæ, & mense *Februario* stellis sextæ magnitudinis æqualis videbatur, & mense *Martio* ex oculis evanuit. Color illi ab initio clarus, albicans ac splendidus, postea flavus, & anni 1573 mense *Martio* rutilans instar martis aut stellæ aldebaran, *Maio* autem albitudinem sublividam induxit, qualem in saturno cernimus, quem colorem usque in finem servavit, semper tamen obscurior facta. Talis etiam fuit stella in dextro pede serpentarii, quam *Keplerii* discipuli anno 1604, die 30 *Septembris* st. vet. apparere cœpisse observarunt, & luce suâ stellam jovis superasse, cum nocte præcedente minimè apparuisset. Ab eo verò tempore paulatim decrevit, & spatio mensium quindecim vel sexdecim ex oculis evanuit. Tali etiam stellâ novâ supra modum splendente *Hipparchus* ad fixas observandas & in catalogum referendas excitatus fuisse dicitur. Sed fixæ, quæ per vices apparent & evanescunt, quæque paulatim crescunt, & luce sua fixas tertiæ magnitudinis vix unquam superant, videntur esse generis alterius, & revolvendo partem lucidam & partem obscuram per vices ostendere. Vapores autem, qui ex sole & stellis fixis & caudis cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in atmosphæras planetarum & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subindè per lentum calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare.

SCHO-

DE MUNDI SYSTEMATE.

SCHOLIUM GENERALE.

(f) Hypotheſis vorticum multis premitur difficultatibus. Ut planeta unuſquiſque radio ad ſolem ducto areas deſcribat tempori proportionales, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in duplicatâ ratione diſtantiarum à ſole. Ut periodica planetarum tempora ſint in proportione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à ſole, tempora periodica partium vorticis deberent eſſe in ſeſquiplicatâ diſtantiarum proportione. Ut vortices minores circum ſaturnum, jovem & alios planetas gyrati conſerventur & tranquillè natent in vortice ſolis, tempora periodica partium vorticis ſolaris deberent eſſe æqualia. Revolutiones ſolis & planetarum circum axes ſuos, quæ cum motibus vorticum congruere deberent, ab omnibus hiſce proportionibus diſcrepant. Motus cometarum ſunt ſummè regulares, & eaſdem leges cum planetarum motibus obſervant, & per vortices explicari nequeunt. Feruntur cometæ motibus valdè eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non poteſt, niſi vortices tollantur.

Projectilia, in aëre noſtro, ſolam aëris reſiſtentiam ſentiunt. Sublato aëre, ut fit in vacuo *Boyliano*, reſiſtentia ceſſat, ſiquidem pluma tenuis & aurum ſolidum æquali cum velocitate in hoc vacuo cadunt. Et par eſt ratio ſpatiorum cœleſtium, quæ ſunt ſuprà atmoſphæram terræ. Corpora omnia in iſtis ſpatiis liberrimè moveri debent; & propterea planetæ & cometæ in orbibus ſpecie & poſitione datis ſecundum leges ſuprà expoſitas perpetuò revolvi. Perſeverabunt quidem in orbibus ſuis per leges gravitatis, ſed regularem orbium ſitum primitùs acquirere per leges haſce minimè potuerunt.

Planetæ ſex principales revolvuntur circum ſolem in circulis ſoli concentricis, eâdem motus directione, in eodem plano quamproximè. Lunæ decem revolvuntur circum terram, jovem & ſaturnum in circulis concentricis, eâdem motus directio-

174. (f) * *Hypotheſis vorticum.* (Prop. 52. lib. 2. cum coroll. ſchol. prop. 40. lib. 2. & not. 173. lib. huj.).

tione, in planis orbium planetarum quamproximè. (g) Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis mechanicis; siquidem cometæ in orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes liberè feruntur. Quo motus genere cometæ per orbes planetarum celerrimè & facillimè transeunt, & in apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur; quàm longissimè distant ab invicem, ut se mutuò quam minimè trahant. Elegantissima hæcce solis, planetarum & cometarum compages non nisi consilio & dominio entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si stellæ fixæ sint centra similium systematum, hæc omnia simili consilio constructa suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux fixarum sit ejusdem naturæ ac lux solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant. Et ne fixarum systemata per gravitatem suam in se mutuò cadant, hic eadem immensam ab invicem distantiam posuerit.

Hic omnia regit non ut anima mundi, sed ut universorum dominus. Et propter dominium suum, dominus deus (*) παντοκράτωρ dici solet. Nam deus est vox relativa & ad servos refertur: & deitas est dominatio Dei, non in corpus proprium, uti sentiunt quibus deus est anima mundi, sed in servos. Deus summus est ens æternum, infinitum, absolutè perfectum: sed ens utcunque perfectum sine dominio non est dominus deus. Dicimus enim deus meus, deus vester, deus *Israelis*, deus deorum, & dominus dominorum: sed non dicimus æternus meus, æter-

(g) * *Et hi omnes motus regulares.* Celeberrimi Viri Joannes & Daniel Bernoullius, prior in physicâ cœlesti, posterior in disquisitionibus Physico Astronomicis mechanicam horumce motuum causam ex vorticibus repetunt. Sed cum mechanicæ explicationes illæ omnibus obnoxiæ sint difficultatibus quibus vorticum hypothesim premi jam ostendimus, huic rei diutiùs non immorabimur. Satis erit describere verba quæ habet Johan. Bernoullius mentionem faciens de hoc ipso Newtoni loco. (Si causæ illæ non sunt mechanicæ, erunt prærernaturales & miraculo tribuendæ; sed magnum Philosophum non decet ad miraculum recurrere, ubi alicujus phænomeni quæritur explicatio.). Numquid pari jure cartesianum Philosophum possumus interrogare quânam causâ mechanicâ vortices secundum varias directiones ferantur, cur planetarum circumsolarium vortices ab occidente in orientem moveantur? ubi phænomenon aliquod ad primam causam deductum est, hic hærere causamque mechanicam ulteriùs non quærere, magnum Philosophum non dedecet. 1743

(*) Id est Imperator universalis.

DE MUNDI SYSTEMATE.

æternus veſter, æternus *Iſraelis*, æternus deorum; non dicimus infinitus meus, vel perfectus meus. Hæ appellationes relationem non habent ad ſervos. Vox deus paſſim (†) ſignificat dominum: ſed omnis dominus non eſt deus. Dominatio entis ſpiritualis deum conſtituit, vera verum, ſumma ſummum, ficta fictum. Et ex dominatione verâ ſequitur deum verum eſſe vivum, intelligentem & potentem: ex reliquis perfectionibus ſummum eſſe, vel ſummè perfectum. Æternus eſt & infinitus, omnipotens & omniſciens, id eſt, durat ab æterno in æternum, & adeſt ab infinito in infinitum: omnia regit; & omnia cognoſcit, quæ fiunt aut fieri poſſunt. Non eſt æternitas & infinitas, ſed æternus & infinitus; non eſt duratio & ſpatium, ſed durat & adeſt. Durat ſemper, & adeſt ubique, & exiſtendo ſemper & ubique, durationem & ſpatium conſtituit. Cum unaquæque ſpatii particula ſit *ſemper*, & unumquodque durationis indiviſibile momentum *ubique*, certè rerum omnium fabricator ac dominus non erit *nunquam*, *nuſquam*. Omnis anima ſentiens diverſis temporibus, & in diverſis ſenſuum, & motuum organis eadem eſt perſona indiviſibilis. Partes dantur ſucceſſivæ in duratione, coexiſtentes in ſpatio, neutræ in perſona hominis ſeu principio ejus cogitante; & multò minùs in ſubſtantia cogitante dei. Omnis homo, quatenus res ſentiens, eſt unus & idem homo durante vitâ ſuâ in omnibus & ſingulis ſenſuum organis. Deus eſt unus & idem deus ſemper & ubique. Omnipræſens eſt non per *virtutem* ſolam, ſed etiam per *ſubſtantiam*: nam virtus ſine ſubſtantia ſubſiſtere non poteſt. In ipſo (‡) continentur & moventur univerſa, ſed ſine mutuâ paſſione. Deus nihil

(†) *Pocokius* noſter vocem *dei* deducit à voce *Arabicâ du*, (& in caſu aliquo *di*,) quæ dominum ſignificat. Et hoc ſenſu principes vocantur dii, *Pſal.* lxxxiv. 6 & *Joan.* x. 45. Et *Moſes* dicitur *deus* fratris *Aaron*, & *deus* regis *Pharaoh* (*Exod.* iv. 16. & vii. 1.) Et eodem ſenſu animæ principum mortuorum olim à gentibus vocabantur dii, ſed falſo propter defectum dominii. (*Nota Autoris*).

(‡) Ita ſentiebant veteres, ut *Pythagoras* apud *Ciceronem*, de Naturâ deorum, *lib.* 1. *Thales*, *Anaxagoras*, *Virgilius*, Georgic. *lib.* iv. *v.* 220. & Æneid. *lib.* 6. *v.* 721. *Philo* Allegor. *lib.* 1. ſub initio *Aratus* in Phænom. ſub initio. Ita etiam ſcriptores ſacri ut *Paulus* in Act. xvii. 27. 28. *Johannes* in Evang. xiv. 2. *Moſes* in Deut. iv. 39. & x. 14. *David* Pſal. cxxxix. 7. 8. 9. *Salmon* 1. Reg. viii. 27. *Job* xxii. 12.

13.

nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentiâ dei. Deum summum necessariò existere in confesso est: Et eâdem necessitate *semper* est & *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi, & agendi, sed more minimè humano, more minimè corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus non habet ideam colorum, sic nos ideam non habemus modorum, quibus deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figurâ corporeâ prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus substantia minimè cognoscimus. Videmus tantùm corporum figuras & colores, audimus tantùm sonos, tangimus tantùm superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapores: intimas substantias nullo sensu, nullâ actione reflexâ cognoscimus; & multò minùs ideam habemus substantiæ dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates ejus & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras & causas finales, & admiramur ob perfectiones; veneramur autem & colimus ob dominium. Colimus enim ut servi, & deus sine dominio, providentiâ, & causis finalibus nihil aliud est quam fatum & natura. A cæcâ necessitate metaphysicâ, quæ utique eadem est semper & ubique, nulla oritur rerum variatio. Tota rerum conditarum pro locis ac temporibus diversitas, ab ideis & voluntate entis necessariò existentis solummodo oriri potuit. Dicitur autem deus per allegoriam videre, audire, loqui, ridere, amare, odio habere, cupere, dare, accipere, gaudere, irasci, pugnare, fabricare, condere, construere. Nam sermo omnis de deo à rebus humanis per similitudinem aliquam desumitur, non perfectam quidem, sed aliqualem tamen. Et hæc de deo, de

23. 14. *Jeremias* xxiii. 23. 24. Fingebant autem idololatræ solem, lunam, & astra, animas hominum & alias mundi partes esse partes dei summi & ideò colendas sed falsò. (*Nota Autoris*).

DE MUNDI SYSTEMATE.

de quo utique ex phænomenis disserere, ad philosophiam naturalem pertinet.

Hactenus phænomena cælorum & maris nostri per vim gravitatis exposui, sed causam gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc vis à causâ aliquâ, quæ penetrat ad usque centra solis & planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum, in quas agit (ut solent causæ mechanicæ) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicatâ ratione distantiarum. Gravitas in solem componitur ex gravitatibus in singulas solis particulas, & recedendo à sole decrescit accuratè in duplicatâ ratione distantiarum ad usque orbem saturni, (h) ut ex quiete apheliorum planetarum manifestum est, & ad usque ultima cometarum aphelia, si modo aphelia illa quiescant. Rationem verò harum gravitatis proprietatum ex phænomenis nondum potui deducere, & hypotheses non fingo. Quicquid enim ex phænomenis non deducitur, *hypothesis* vocanda est; & hypotheses seu metaphysicæ, seu physicæ, seu qualitatum occultarum, seu mechanicæ, in *philosophiâ experimentali* locum non habent. In hâc philosophiâ propositiones deducuntur ex phænomenis, & reddutur generales per inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod gravitas reverà existat, & agat secundum leges à nobis expositas, & ad corporum cælestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente; cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuò attrahunt, & contiguæ factæ cohærent: & corpora electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & sensatio omnis excitatur, & membra ani-

174. (h) * *Ut ex quiete apheliorum.* (Prop. 2. lib. huj.).

animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum & a cerebro in musculos propagatis. (i) Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia experimentorum, quibus leges actionum hujus spiritus accuratè determinari & monstrari debent.

LIBER TERTIUS. PROP. XLII. PROB. XXII.

(i) * *Sed hæc paucis exponi non possunt.* De hoc subtilissimo spiritu plurimas quæstiones sibi proponit Newtonus in tractatu opticæ. 174

FINIS.

INDEX LIBRI TERTII.

REGULÆ PHILOSOPHANDI. Pag. 2.
PHOENOMENA. 6
PROPOSITIONES. 22

INDEX PROPOSITIONUM TOTIUS OPERIS.

IN TOMO PRIMO.

AXIOMATA SIVE LEGES MOTUS. LEX I. *Corpus omne perseverat in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus à viribus impressis cogitur statum illum mutare.* Pag. 20

LEX II. *Mutatio motus proportionalis est vi motrici impressæ & fit secundùm lineam rectam quâ vis illa imprimitur.* 21

LEX III. *Actioni contraria semper & æqualis est reactio: sive corporum duorum actiones in se mutuò semper sunt æquales & in contrarias partes diriguntur.* 23

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Areæ quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis, describunt, & in planis immobilibus consistunt & sunt temporibus proportionales.* 89

PROP II. THEOR. II. *Corpus omne quod movetur in lineâ aliquâ curvâ in plano descriptâ & radio ducto ad punctum vel*

vel immobile vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeturque à vi centripetâ tendente ad idem punctum. Pag. 92

PROP. III. THEOR. III. *Corpus omne quod radio ad centrum corporis alterius utcumque moti ducto describit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compositâ ex vi centripetâ tendente ad corpus illud alterum & ex vi omni acceleratrice quâ corpus illud alterum urgetur.* 94

PROP. IV. THEOR. IV. *Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorumdem circulorum tendere, & esse inter se ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.* 96

PROP. V. PROBLEMA I. *Datâ quibuscunque in locis velocitate quâ corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.* 105

PROP. VI. THEOR. V. *Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in orbe quocunque revolvatur & arcum quemvis jamjam nascente tempore quàm minimo describat & sagitta arcûs duci intelligatur quæ cordam bisecet & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcûs, ut sagitta directè & tempus bis inversè.* 106

PROP. VII. PROBL. II. *Gyretur corpus in circumferentiâ circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.* 111

PROP. VIII. PROBL. III. *Moveatur corpus in semicirculo* PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeò longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS, *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.* 114

PROP. IX. PROBL. IV. *Gyretur corpus in spirali* PQS *secante radios omnes* SP, SQ &c. *in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum spiralis.* 136

PROP. X. PROBL. V. *Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.* 137

PROP. XI. PROBL. VI. *Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.*

ſeos. Pag. 153

PROP. XII. PROBL. VII. *Moveatur corpus in Hyperbolâ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.* 156

PROP. XIII PROBL. VIII. *Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.* 160

PROP. XIV. THEOR. VI. *Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta ſit reciprocè in duplicatâ ratione diſtantiæ locorum à centro; dico quod orbium latera recta principalia ſunt in duplicatâ ratione arearum quas corpora radiis ad centrum ductis eodem tempore deſcribunt.* 163

PROP. XV. THEOR. VII. *Iiſdem poſitis, dico quod tempora periodica in ellipſibus ſunt in ratione ſeſquiplicatâ majorum axium.* 164

PROP. XVI. THEOR. VIII. *Iiſdem poſitis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant orbitas, demiſſiſque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod velocitates corporum ſunt in ratione compoſitâ ex ratione perpendiculorum inversè & ſubduplicatâ ratione laterum rectorum principalium directè.* 165

PROP. XVII. PROBL. IX. *Poſito quod vis centripeta ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro, & quod vis illius quantitas abſoluta ſit cognita, requiritur linea quam corpus deſcribit de loco dato cum datâ velocitate ſecundùm datam rectam egrediens.* 170

PROP. XVIII. PROBL. X. *Datis umbilico & axibus principalibus deſcribere trajectorias ellipticas & hyperbolicas, quæ tranſibunt per puncta data & rectas poſitione datas contingent.* 176

PROP. XIX. PROBL. XI. *Circa datum umbilicum trajectoriam parabolicam deſcribere, quæ tranſibit per puncta data, & rectas poſitione datas continget.* 176

PROP. XX. PROBL. XII. *Circa datum umbilicum trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.* 178

PROP.

SCD LYON 1

PROP. XXI. PROBL. XIII. *Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.* Pag. 185

PROP. XXII. PROBL. XIV. *Trajectoriam per data quinque puncta describere.* 207

PROP. XXIII. PROBL. XV. *Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.* 210

PROP. XXIV. PROBL. XVI. *Trajectoriam describere quæ per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.* 214

PROP. XXV. PROBL. XVII. *Trajectoriam describere, quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.* 223

PROP. XXVI. PROBL. XVIII. *Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.* 226

PROP. XXVII. PROBL. XIX. *Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.* 232

PROP. XXVIII. PROBL. XX. *Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.* 250

PROP. XXIX. PROBL. XXI. *Trajectoriam specie datam describere quæ à rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie, & proportione datas.* 256

PROP. XXX. PROBL. XXII. *Corporis in data trajectoriâ parabolicâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* 259

PROP. XXXI. PROBL. XXIII. *Corporis in datâ trajectoriâ ellipticâ moti invenire locum ad tempus assignatum.* 270

PROP. XXXII. PROBL. XXIV. *Posito quod vis centripeta sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, spatia definire quæ corpus rectà cadendo datis temporibus describit.* 292

PROP. XXXIII. THEOR. IX. *Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *circulum describentis, in subdu-*

plicatâ ratione quam AC *distantia corporis à circuli vel hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A *habet ad figuræ semidiametrum principalem* ½ AB. Pag. 294

PROP. XXXIV. THEOR. X. *Si figura* BED *parabola est, dico quod corporis cadentis velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati quâ corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *circulum uniformiter describere potest.* 297

PROP. XXXV. THEOR. XI. *Iisdem positis dico quod area figuræ* DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando eodem tempore describere potest.* 298

PROP. XXXVI. PROBL. XXV. *Corporis de loco dato* A *cadentis determinare tempora descensus.* 301

PROP. XXXVII. PROBL. XXVI. *Corporis de loco dato sursùm vel deorsùm projecti definire tempora ascensus vel descensus.* 302

PROP. XXXVIII. THEOR. XII. *Posito quod vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum à centro, dico quod cadentium tempora, velocitates & spatia descripta, sunt arcubus arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respectivè proportionalia.* 303

PROP. XXXIX. PROBL. XXVII. *Positâ cujuscunque generis vi centripetâ, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis rectà ascendentis vel descendentis tùm velocitas in locis singulis, tùm tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.* 305

PROP. XL. THEOR. XIII. *Si corpus cogente vi quâcunque centripetâ moveatur utcunque, & corpus aliud rectà ascendat vel descendat, sintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.* 312

PROP. XLI. PROBL. XXVIII. *Positâ cujuscunque generis vi centripetâ & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum tempora motuum in trajectoriis inventis.* 318

PROP.

PROP. XLII. PROBL. XXIX. *Datâ lege vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate secundùm datam rectam egressi.* Pag. 332

PROP. XLIII. PROBL. XXX. *Efficiendum est ut corpus in trajectoriâ quâcunque circa centrum virium revo vente perinde moveri possit atque corpus aliud in eâdem trajectoriâ quiescente.* 334

PROP. XLIV. THEOR. XIV. *Differentia virium quibus corpus in orbe quiescente & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possunt est in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.* 336

PROP. XLV. PROBL. XXXI. *Orbium qui sunt circulis maximè finitimi requiruntur motus apsidum.* 348

PROP. XLVI. PROBL. XXXII. *Positâ cujuscunque generis vi centripetâ datoque tum virium centro tum plano quocunque in quo corpus revolvitur, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis; requiritur motus corporis de loco dato, datâ cum velocitate, secundùm rectam in plano illo datam egressi.* 361

PROP. XLVII. THEOR. XV. *Posito quod vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis à centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent ellipses & revolutiones temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultrò citròque discurrendo singulas eundi & redeundi periodos iisdem temporibus absolvent.* 362

PROP. XLVIII. THEOR. XVI. *Si rota globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, (quodque Cycloïdem vel Epicycloïdem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcûs dimidii qui globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad semidiametrum globi.* 364

PROP. XLIX. THEOR. XVII. *Si rota globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo itineris curvilinei quod punctum quodvis in rotæ perimetro datum, ex quo globum tetigit, confecit, erit ad du-*

duplicatum ſinum verſum arcûs dimidii qui globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum globi & rotæ ad ſemidiametrum globi. Pag. 364

PROP. L. PROBL. XXXIII. *Facere ut corpus pendulum oſcilletur in Cycloïde datâ.* 370

PROP. LI. THEOR. XVIII. *Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum* C *ſit in locis ſingulis ut diſtantia loci cujuſque à centro & hâc ſolâ vi agente corpus* T *oſcilletur (modo jam deſcripto) in perimetro Cycloïdis* QRS*: dico quod oſcillationum utcunque inæqualium æqualia erunt tempora.* 374

PROP. LII. PROBL. XXXIV. *Definire & velocitates pendulorum in locis ſingulis & tempora quibus oſcillationes totæ, tum ſingulæ oſcillationum partes peraguntur.* 377

PROP. LIII. PROBL. XXXV. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, invenire vires quibus corpora in datis curvis lineis oſcillationes ſemper iſochronas peragent.* 384

PROP. LIV. PROBL. XXXVI. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis invenire tempora quibus corpora vi quâlibet centripetâ in lineis quibuſcunque curvis, in plano per centrum virium tranſeunte deſcriptis, deſcendent & aſcendent.* 390

PROP. LV. THEOR. XIX. *Si corpus movetur in ſuperficie quâcunque curvâ, cujus axis per centrum virium tranſit, & à corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem deſcribet.* 392

PROP. LVI. PROBL. XXXVII. *Conceſſis figurarum curvilinearum quadraturis, datiſque tum Lege vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum ſuperficie curvâ cujus axis per centrum illud tranſit; invenienda eſt trajectoria quam Corpus in eadem ſuperficie deſcribet, de loco dato, datâ cum velocitate, verſùm plagam in ſuperficie illâ datam egreſſum.* 396

PROP. LVII. THEOR. XX. *Corpora duo ſe invicem trahentia deſcribunt, & circùm commune centrum gravitatis, & circùm ſe mutuò figuras ſimiles.* 404

PROP. LVIII. THEOR. XXI. *Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuò*

mutuò trahunt, & interea revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quòd figuris, quas corpora sic mota describunt circùm se mutuò, potest figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, viribus iisdem describi. Pag. 406

PROP. LIX. THEOR. XXII. *Corporum duorum* S & P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium, tempus periodicum esse ad tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis, & figuris quas corpora circùm se mutuò describunt figuram similem & æqualem describentis, in subduplicatâ ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S+P. 409

PROP. LX. THEOR. XXIII. *Si corpora duo* S & P, *viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus, se mutuò trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod ellipseos quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, axis principalis erit ad axem principalem ellipseos quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S+P *ad primum duorum mediè proportionalium inter hanc summam & Corpus illud alterum* S. 410

PROP. LXI. THEOR. XXIV. *Si corpora duo viribus quibusvis se mutuò trahentia, neque aliàs agitata vel impedita quomodocunque moveantur, motus eorum perinde se habebunt, ac si non traherent se mutuò, sed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro constituto viribus iisdem traheretur: Et virium trahentium eadem erit lex respectu distantiæ corporum à centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.* 411

PROP. LXII. PROBL. XXXVIII. *Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, ac de locis datis demittuntur determinare motus.* 412

PROP. LXIII. PROBL. XXXIX. *Corporum duorum quæ viribus quadrato distantiæ suæ reciprocè proportionalibus se mutuò trahunt, deque locis datis, secundùm datas rectas, datis cum velocitatibus exeunt, determinare motus.* 412

PROP. LXIV. PROBL. XL. *Viribus quibus corpora se mutuò trahunt crescentibus in simplici ratione distantiarum à centris: re-*

quiruntur motus plurium corporum inter se. Pag. 415

PROP. LXV. THEOR. XXV. *Corpora plura quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum ab eorumdem centris, moveri posse inter se in ellipsibus & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quamproximè.* 418

PROP. LXVI. THEOR. XXVI. *Si corpora tria quorum vires decrescunt in duplicatâ ratione distantiarum, se mutuò trahent; & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciprocè ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & figuram ad formam ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quàm si maximum illud vel à minoribus non attractum quiescat, vel multò minùs vel multò magis attractum; aut multò minùs aut multò magis agitetur.* 421

PROP. LXVII. THEOR. XXVII. *Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* PT, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.* 459

PROP. LXVIII. THEOR. XXVIII. *Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius* S, *circa interiorum* P & T, *commune gravitatis centrum* O, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & orbem ad formam ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quàm si id vel non attractum quiescat, vel multò magis aut multò minùs attractum aut multò magis aut multò minùs agitetur.* 460

PROP. LXIX. THEOR. XXIX. *In systemate corporum plurium* A, B, C, D, *&c. Si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B,

B, C, D, &c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente, & corpus aliud B trahit etiam cætera A, C, D, &c. viribus quæ sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à trahente: erunt absolutæ corporum trahentium A, B vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora A, B, quorum sunt vires. Pag. 462

PROP. LXX. THEOR. XXX. Si ad sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intrà superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur. 465

PROP. LXXI. THEOR. XXXI. Iisdem positis, dico quod corpusculum extra sphæricam superficiem constitutum attrahitur ad centrum sphæræ; vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro. 466

PROP. LXXII. THEOR. XXXII. Si ad sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis; ac detur tùm sphæræ densitas, tùm ratio Diametri sphæræ ad distantiam corpusculi à centro ejus: dico quod vis quâ corpusculum attrahitur, proportionalis erit semidiatro sphæræ. 468

PROP. LXXIII. THEOR. XXXIII. Si ad sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis: dico quod corpusculum intra sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro. 470

PROP. LXXIV. THEOR. XXXIV. Iisdem positis dico quod corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro. 470

PROP. LXXV. THEOR. XXXV. Si ad sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicatâ ratione distantiarum à punctis, dico quod sphæra quævis alia similaris ab eadem attrahitur vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ centrorum. 471

PROP. LXXVI. THEOR. XXXVI. Si sphæræ in progressu à centro

tro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sunt undique similares; & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicatâ ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota, quâ hujusmodi sphæra una attrahit aliam, sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ centrorum. Pag. 474

PROP. LXXVII. THEOR. XXXVII. *Si ad singula sphærarum puncta tendant vires centripetæ proportionales distantiis punctorum à corporibus attractis: dico quòd vis composita, quâ sphæræ duæ se mutuò trahent, est ut distantia inter centra sphærarum.* 476

PROP. LXXVIII. THEOR. XXXVIII. *Si sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles, in progressu verò per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota quâ hujusmodi sphæræ duæ se mutuò trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra sphærarum.* 478

PROP. LXXIX. THEOR. XXXIX. *Si superficies ab latitudinem infinitè diminutam jamjam evanescens* EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod vis, quâ solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione compositâ ex ratione solidi* DE*q*×Ff, *& ratione vis quâ particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.* 481

PROP. LXXX. THEOR. XL. *Si ad sphæræ alicujus* ABE, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ; & ad sphæræ* AB, *in quo corpusculum aliquod* B *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE *sphæræ occurrentia in* E, *& in ipsis capiantur longitudines* DN, *quæ sint ut quantitas* $\frac{DE^q \times PS}{PE}$ *& vis, quam sphæræ particu-*

la

la sita in axe ad distantiam PE *exercet in corpusculum* P *trahitur versus sphæram, est ut area* ANB *comprehensa sub axe sphæræ* AB, *& lineâ curvâ* ANB, *quam punctum* N *perpetuò tangit.* Pag. 483

PROP. LXXXI. PROBL. XLI. *Stantibus jam positis, mensuranda est area* ANB. 486

PROP. LXXXII. THEOR. XLI. *In sphærâ centro* S, *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP, *continuè proportionales: dico quod corpusculi intra sphæram, in loco quovis* I, *attractio est ad attractionem ipsius extra sphæram, in loco* P, *in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione distantiarum à centro* IS, PS, *& subduplicatâ ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.* 496

PROP. LXXXIII. PROBL. XLII. *Invenire vim quâ corpusculum in centro sphæræ locatum ad ejus segmentum quodcunque attrahitur.* 500

PROP. LXXXIV. PROBL. XLIII. *Invenire vim, quâ corpusculum, extra centrum sphæræ in axe segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem segmento.* 502

PROP. LXXXV. THEOR. XLII. *Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longè fortior sit, quàm cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicatâ distantiarum à particulis.* 503

PROP. LXXXVI. THEOR. XLIII. *Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicatâ vel plusquam triplicatâ ratione distantiarum à particulis, attractio longè fortior erit in contactu, quàm cùm trahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.* 503

PROP. LXXXVII. THEOR. XLIV. *Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materiâ æqualiter attractivâ constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota, erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum par-*

ticulas totis proportionales, & in totis similiter positas. Pag. 504

PROP. LXXXVIII. THEOR. XLV. *Si particularum æqualium corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum à particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis, & eadem erit cum vi globi ex materiâ consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.* 506

PROP. LXXXIX. THEOR. XLVI. *Si corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum à singulis: vis ex omnium viribus composita, quâ corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis; & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in globum formarentur.* 508

PROP. XC. PROBL. XLIV. *Si ad singula circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, crescentes vel decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim, quâ corpusculum attrahitur ubivis positum in rectâ quæ plano circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.* ibid.

PROP. XCI. PROBL. XLV. *Invenire attractionem Corpusculi siti in axe solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quâcunque distantiarum ratione decrescentes.* 511

PROP. XCII. PROBL. XLVI. *Dato corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.* 520

PROP. XCIII THEOR. XLVII. *Si solidum ex unâ parte planum ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu à solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquàm quadraticæ, & vi solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie planâ, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi à plano, & index ternario minor quàm index potestatis distantiarum.* 522

PROP. XCIV. THEOR. XLVIII. *Si media duo similaria, spatio pla-*

planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum, neque ullâ aliâ vi agitetur vel impediatur; sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione datâ. Pag. 535

PROP. XCV. THEOR. XLIX. *Iisdem positis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam est ad ejus velocitatem post emergentiam, ut sinus emergentiæ ad sinum incidentiæ.* 536

PROP. XCVI THEOR. L. *Isdem positis, & quod motus ante incidentiam velocior sit quàm postea, dico quòd corpus inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.* 537

PROP. XCVII. PROBL. XLVII. *Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in datâ ratione; quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerare possit: determinare superficiem, quæ corpuscula omnia de loco dato successivè manantia convergere faciat ad alium locum datum.* 542

PROP. XCVIII. PROBL XLVIII. *Iisdem positis, & circa axem* AB *descriptâ superficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent: invenire superficiem secundam attractivam* EF *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.* 546

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI PRIMI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI SECUNDI
IN TOMO SECUNDO.

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus, est ut spatium movendo confectum.* Pag. 17

PROP. II. THEOR. II. *Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.* 18

PROP. III. PROBL. I. *Corporis cui, dùm in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.* 20

PROP. IV. PROBL. II. *Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum projectilis in eodem resistentiam velocitati proportionalem patientis.* 27

PROP. V. THEOR. III. *Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione geometricâ inveniendâ, & quòd spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.* 46

PROP. VI. THEOR. IV. *Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciprocè ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amit-*

amittunt partes velocitatum proportionales totis. Pag. 52

PROP. VII. THEOR. V. *Corpora sphærica quibus resistitur in ratione duplicatâ velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directè & resistentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.* ibid.

PROP. VIII. THEOR. VI. *Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectà ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.* 61

PROP. IX. THEOR. VII. *Positis jam demonstratis, dico quod si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.* 64

PROP. X. PROBL. III. *Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, sitque resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.* 79

PROP. XI. THEOR. VIII. *Si corpori resistitur, partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.* 121

PROP. XII. THEOR. IX. *Iisdem positis, dico quòd si spatia descripta sumantur in progressione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressione geometricâ.* 123

PROP. XIII. THEOR. X. *Posito quod corpus ab uniformi gravi-*

gravitate deorsùm attractum rectà ascendit vel descendit; & quòd eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contrà. Pag. 125

PROP. XIV. THEOR. XI. *Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.* 131

PROP. XV. THEOR. XII. *Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.* 146

PROP. XVI. THEOR. XIII. *Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in spirali quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.* 158

PROP. XVII. PROBL. IV. *Invenire & vim centripetam & medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege revolvi potest.* 160

PROP. XVIII. PROBL. V. *Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.* 161

PROP. XIX. THEOR. XIV. *Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu à pressione illâ orto permanent in locis suis.* 166

PRO-

PROP. XX. THEOR. XV. *Si fluidi sphærici & in æqualibus à centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis, partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.* Pag. 168

PROP. XXI. THEOR. XVI. *Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantiis suis à centro reciprocè proportionali deorsùm trahentur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.* 174

PROP. XXII. THEOR. XVII. *Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciprocè proportionali deorsùm trahantur: dico quod si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.* 177

PROP. XXIII. THEOR. XVIII. *Si fluidi ex particulis se mutuò fugentibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuò fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.* 186

PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum à centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione compositâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oscillationum in vacuo.* 189

PROP. XXV. THEOR. XX. *Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in Cycloïde eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.* 194

PROP. XXVI. THEOR. XXI. *Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloïde sunt Isochronæ.* 197

PROP.

PROP. XXVII. THEOR. XXII. *Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quamproximè.* Pag. 198

PROP. XXVIII. THEOR. XXIII. *Si corpori funependulo in Cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.* 202

PROP. XXIX. PROBL. VI. *Posito quod corpori in Cycloïde oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis invenire resistentiam in locis singulis.* 204

PROP. XXX. THEOR. XXIV. *Si recta* AB *æqualis sit Cycloïdis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcûs punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKa *à perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.* 212

PROP. XXXI. THEOR. XXV. *Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione, differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.* 219

PROP. XXXII. THEOR. XXVI. *Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ in altero) & si non tangant se mutuò quæ in eodem sunt systemate nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugant se mutuò, nisi viribus acceleratri-*

ratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. Pag. 250

PROP. XXXIII. THEOR. XXVII. *Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.* 254

PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII. *Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplò minor quàm resistentia cylindri.* 258

PROP. XXXV. PROBL. VII. *Si medium rarum ex particulis quàmminimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.* 275

PROP. XXXVI. PROBL. VIII. *Aquæ, de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis, definire motum.* 280

PROP. XXXVII. THEOR. XXIX. *Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundùm longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dùm quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.* 301

PROP. XXXVIII. THEOR. XXX. *Globi in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.* 312

PROP. XXXIX. THEOR. XXXI. *Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus interea dùm octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum*

hujus orificii ſupra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad exceſſum hujus orificii ſuprà circulum maximum globi, & ratione denſitatis fluidi ad denſitatem globi quamproximè. Pag. 316

PROP. XL. PROBL. IX. *Globi, in medio fluidiſſimo compreſſo progredientis invenire reſiſtentiam per phænomena.* 316

PROP. XLI. THEOR. XXXII. *Preſſio non propagatur per fluidum ſecundùm lineas rectas, niſi ubi particulæ fluidi in directum jacent.* 340

PROP. XLII. THEOR. XXXIII. *Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramte in ſpatia immota.* 342

PROP. XLIII. THEOR. XXXIV. *Corpus omne tremulum in medio elaſtico propagabit motum pulſuum undique in directum; in medio verò non elaſtico motum circularem excitabit.* 353

PROP. XLIV. THEOR. XXXV. *Si aqua in canalis cruribus erectis* KL, MN *vicibus alternis aſcendat & deſcendat, conſtruatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis æquetur ſemiſſi longitudinis aquæ in canali: dico quod aqua aſcendet iiſdem temporibus quibus pendulum oſcillatur.* 355

PROP. XLV. THEOR. XXXVI. *Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.* 357

PROP. XLVI. PROBL. X. *Invenire velocitatem undarum.* ibid.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII. *Pulſibus per fluidum propagatis, ſingulæ fluidi particulæ, motu reciproco breviſſimo euntes & redeuntes, accelerantur ſemper & retardantur pro lege oſcillantis penduli.* 360

PROP. XLVIII. THEOR. XXXVIII. *Pulſuum in fluido elaſtico propagato velocitates ſunt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ ratione vis elaſticæ directè & ſubduplicatâ ratione denſitatis inversè; ſi modo fluidi vis elaſtica ejuſdem condenſationi proportionalis eſſe ſupponatur.* 384

PROP. XLIX. PROBL. XI. *Datis medii denſitate & vi elaſticâ, invenire velocitatem pulſuum.* 387

PROP. L. PROBL. XII. *Invenire pulſuum diſtan as.* 390

PRO-

PROP. LI. THEOR. XXXIX. *Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.* Pag. 398

PROP. LII. THEOR. XL. *Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro sphæræ.* 403

PROP. LIII. THEOR. XLI. *Corpora quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eadem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.* 419

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI SECUNDI.

INDEX
PROPOSITIONUM
LIBRI TERTII
IN TOMO III. PARTE PRIMA.

PROPOSITIO I. THEOREMA I. *Vires quibus Planetæ circumjoviales perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere centrum Jovis & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum locorum ab eodem centro.* Pag. 22

PROP. II. THEOR. II. *Vires quibus Planetæ primarii perpetuò retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, reſpicere ſolem & eſſe reciprocè ut quadrata diſtantiarum ab ipſius centro.* ibid.

PROP. III. THEOR. III. *Vim quâ Luna retinetur in orbe ſuo, reſpicere Terram & eſſe reciprocè ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.* 23

PROP. IV. THEOR. IV. *Lunam gravitare in Terram & vi gravitatis retrahi ſemper à motu rectilineo & in orbe ſuo retineri.* 25

PROP. V. THEOR. V. *Planetas circumjoviales gravitare in Jovem, circum ſaturnios in Saturnum & circumſolares in Solem & vi gravitatis ſuæ retrahi ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retineri.* 31

PROP. VI. THEOR. VI. *Corpora omnia in Planetas ſingulos gravitare & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus diſtantiis à centro Planetæ proportionalia eſſe quantitati materiæ in ſingulis.* 33

PROP. VII. THEOR. VII. *Gravitatem in corpora univerſa fieri, eamque proportionalem eſſe quantitati materiæ in ſingulis.* 43

PROP. VIII. THEOR. VIII. *Si globorum duorum in ſe mutuò gravitantium materia, undique in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant, homogenea ſit: erit pondus globi alterutrius in alterum reciprocè*

ciprocè ut quadratum distantiæ inter centra. Pag. 45
PROP. IX. THEOR. IX. *Gravitatem pergendo à superficiebus planetarum deorsùm decrescere in ratione distantiarum à centro quamproximè.* 53
PROP. X. THEOR. X. *Motus Planetarum in Cœlis diutissimè conservari posse.* 53
PROP. XI. THEOR. XI. *Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiescere.* 58
PROP. XII. THEOR. XII. *Solem motu perpetuò agitari; sed nunquam longè discedere à communi gravitatis centro planetarum omnium.* 58
PROP. XIII. THEOR. XIII. *Planetæ moventur in ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.* 60
PROP. XIV. THEOR. XIV. *Orbium aphelia & nodi quiescunt.* 62
PROP. XV. PROBL. I. *Invenire orbium principales diametros.* 66
PROP. XVI. PROBL. II. *Invenire orbium excentricitates & aphelia.* 67
PROP. XVII. THEOR. XV. *Planetarum motus diurnos uniformes esse; & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.* 68
PROP. XVIII. THEOR. XVI. *Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.* 72
PROP. XIX. PROBL. III. *Invenire proportionem axis planetæ ad diametros eidem perpendiculares.* 73
PROP. XX. PROBL. IV. *Invenire & inter se comparare pondera corporum in terræ hujus regionibus diversis.* 103
PROP. XXI. THEOR. XVII. *Puncta æquinoctialia regredi, & axem terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Ecclipticam & bis redire ad positionem priorem.* 117
PROP. XXII. THEOR. XVIII. *Motus omnes lunares ex allatis principiis consequi.* 119
PROP. XXIII. PROBL. V. *Motus inæquales satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.* 120
PROP. XXIV. THEOR. XIX. *Fluxum ac refluxum maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.* 122

IN TOMO III. PARTE SECUNDA.

PROP. XXV. PROBL. VI. *Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.* Pag. 375

PROP. XXVI. PROBL. VII. *Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad terram ducto, in orbe circulari describit.* 379

PROP. XXVII. PROBL. VIII. *Ex motu horario Lunæ invenire ipsius distantiam à Terrâ.* 391

PROP. XXVIII. PROBL. IX. *Invenire Diametros orbis in quo Luna, sine excentricitate moveri deberet.* 392

PROP. XXIX. PROBL. X. *Invenire variationem Lunæ.* 400

PROP. XXX. PROBL. XI. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe circulari.* 407

PROP. XXXI. PROBL. XII. *Invenire motum horarium nodorum Lunæ in orbe elliptico.* 424

PROP. XXXII. PROBL. XIII. *Invenire motum medium nodorum Lunæ.* 435

PROP. XXXIII. PROBL. XIV. *Invenire motum verum nodorum Lunæ.* 445

PROP. XXXIV. PROBL. XV. *Invenire variationem horariam inclinationis orbis Lunaris ad planum Ecliptica.* 464

PROP. XXXV. PROBL. XVI. *Dato tempore invenire inclinationem orbis Lunaris ad planum Ecliptica.* 471

PROP. XXXVI. PROBL. XVII. *Invenire vim Solis ad Mare movendum.* 537

PROP. XXXVII. PROBL. XVIII. *Invenire vim Lunæ ad mare movendum.* 539

PROP. XXXVIII. PROBL. XIX. *Invenire figuram corporis Lunæ.* 547

PROP. XXXIX. PROBL. XX. *Invenire præcessionem Æquinoctiorum.* 560

PROP. XL. THEOR. XX. *Cometas in sectionibus conicis umbilicos*

cos in centro Solis habentibus moveri & radiis ad solem ductis areas temporibus proportionales describere. Pag. 578

PROP. XLI. PROBL. XXI. *Cometæ in Parabola moti trajectoriam ex datis tribus observationibus determinare.* 597

PROP. XLII. PROBL. XXII. *Inventam Cometæ trajectoriam corrigere.* 657

FINIS PROPOSITIONUM LIBRI TERTII,
ET TOTIUS OPERIS.

SCD LYON 1

SCD LYON 1

SCD LYON 1