TEXTUS DE SPHAERA - I.SACROBOSCO

quinque

STUDIOSO LECTORI SALUTEM, THOMAS ÆGLOLPHIDES Rhætus.

Arithmeticam theoricen praxinꜩ, numeris propè omnibus absolutam, ita nobis compegerat Siliceus, mathematicorum inferior nemine, vt nihil videretur nec assuendũ, nec dissuendum: sed tamen chalcographorum aut ignauia supiniore, vt ferè fit, aut inscitia, sic & mutilus passim & maculosus erat Siliceus, vt in reformando negocio mihi, quàm in formando illi, opus fuerit: tot loca hic illic luxata, tot conspurcata deprauatáque, quot lector non oscitabundus facile deprehendet. Quid quòd æditionis prostremæ ductu, nemo vnquam vel radicum extractionem quadratis cubisue, studio quamlibet vigilaci ad plenũ excuderit? Quæ igitur deerant, bona fide attexui, modum videlicet reducendi fractiones fractionum ad simplicem, Regulas item aliquot, quibus prolixior atque subtilior fractio, ad crassiorem breuiorémꜩ reducatur, Probationibus per 9 aut 7 fieri solitis, & à me speciatim exploratis dijudicatisꜩ, tertiam per 5 non pœnitendam, & alia propemodum inexputabilia, præter ea omnino necessaria, margini plurima inspersi, aspera edolaui quo potui leuore, ne qua tibi salebra iam remoramẽto sit futura. Quibus vero locis à Siliceo scripta de fractionibus vulgarijs planiora feci, digitos asteriscorum vice appinxi. Quòd si quas hinc inde maculas elui audire expectas, per mare quæris aquam. Parsdo maculosior Siliceus, quiduis erat verius, quàm Siliceus, vt creditu non facile sit, tot támꜩ monstrosa sordium portenta, annis non adeò multis tam alte silici impacta insedisse. In quod famæ discrimen & obliuionis ne rursus imprudens præcipitetur hominum iniuria vel temporum Siliceus: operam daturus est suo more in cõniuam Simon Colinæus, literarum puriorum vindex assertórque viuacissimus. Porrò necubi te oleũ operámque lusisse queraris, candide lector, librum priorem vix aliud quàm theoricas numerorum definitiones ex Iordano pariter ac Euclide huc corrogatas loquẽtẽ, si pede sicco prætervolaueris, aut etiam ne attigeris quidem, nisi pauca admodũ in ipso statim principio, pauca item sub finem cum duodecim demonstrationibus, nullum vt operę, ita nec disciplinę dispendiũ fuerit. Vale, & laborẽ hũc meũ ęqui consule. Parisijs idibus Augusti, anno à salute aperta mortalibus M. D X X V I.

IOANNES MARTINVS SILICEVS, DIOCESIS PACENSIS, nobilissimo domino Alfonso Manrrique, Pacēsi episcopo dignissimo, cum literarum, tum virtutis moribus fulgentissimo, salutem.

OCium: rubiginem ingenij, pariter & omnium vitiorum fomitem, atq; sentinam, non minus eleganter, quàm erudite Hieronymus ecclesiæ iubar asseuerat, præsulum clarissime. Cum enim mortale hominum genus ob primi parentis morbidam labem, & voluntatis cum appetitu sensitiuo confinium, ad scelera, q̄ ad virtutes longe sit procliuius: summa ope nitendum est, ne lethæa obliuione torpescentes, Epimenidis dormiamus somnum. inertia medius fidius succrescūt malitiæ, & mentibus humanis affatim irrepit iniquitas. Itaque grauissimus ille Cato, ciuilis honestatis quondam semita, & omnium bonarū artium splendor eminentissimus, memoriæ proditum diuinitus reliquit, non minus ocij q̄ negocij reddendam esse rationem. Eocirca, Gymnosophistas ipsos Indiæ sapientes non possum non plane dilaudare: quippe qui desidiam, ac ignauiam tanto opere detestabātur (Apulæio floridorum primo authore) vt priusquā edulijs mēsę instruerētur, adulescētes ex diuersis officijs redeūtes, soliti essent interrogare quid à lucis ortu dignū, vel didicissent, vel fecissent. qui autē nihil habebant quod expedite, promptéque responderent, impransi turpius elimi nabantur. à qua cōsuetudine Augustus ille Cæsar haud procul discedens, quos in vrbe offendebat ociantes, censorio sermone, linguâque Catoniana increpabat, abominabatur, deterrebat. & ne in lasciuā ociositate raptarentur, singulis singula decernebat officia: opus profecto imperatore dignissimū. Hæc itaq; mecum reuolutans antistitum humanissime, tantillum quod habeo ingenij honestis studijs, præsertim liberalium artium, quoad potero, & licebit, accommodare mihi persuasi. Proinde temporis ineptus ne viderer dissipator, diebus proxime lapsis theoricæ Arithmetices gregario quodam, & tumultuario sudore compilaui, practicæ Arithmeticæ addendū, vt ex quo cum altero vnum absolutius efficeretur corpus. Et quia sublimitatem tuam audiui reuerendissime pater primaria lucubrationum nostrarum monumenta hilari quodam animo, fronteq; liberali excepisse: hos nostros secundos labores amplitudini tuæ dedicare haudquaquam erubesco. quos quantulicunq; sint, vultu beneuolo, facieq; serena, perinde ac omnia soles, intuearis velim. Nec eò dementiæ rapi me credas, vt tales nugas dignas esse existimem, quæ tanto viro, tam pulchre literis & virtutum specimine candidato, voueri deberent. verum enimuero humanitas tua (à qua nemo nisi inuitus discedit) rusticitatem nostram id cōmittere monuit, instigauit, & denique compulit. Et si quæ mendis deformata reperias: id partim chalcographorū incuriæ, partim dialecticæ studio, in cuius nunc compositione versor, acceptum referas. Non me latet complus cula fuisse minus circunspecta, longe minus scrutata, ac indagata, quàm materiæ grauitas, & nominis tui sublimitas expostulet: sed quæ vel neglecta, vel indigesta fuerint, mansuetudo tua excusabit. Accipe igitur præsulum decus, accipe clientuli tui donariola: & me felicitatis tuæ amantissimum semper ames, efflagito. Vale.

IOANNIS MARTINI SILICEI, SVCCINCTA IN ARITHmeticam theoricen Præfatio.

Arithmetices inuentio. Pythagoras. Nicomachus. Euclides. Apuleius Boetius. Iordanus

ARITHMETICEN A PHOENICIBVS, QVI (TESTE Iosepho) Græcas literas inuenerunt, primo inuentam fuisse referunt authores: & primum inter Græcos inuentorem habuisse Pythagoram, ex verbis diui Seuerini Boetij, priori suæ Arithmeticę libro, facile constat. Post quem Nicomachus Aristotelis parens, longe diffusius eandem amplificauit: deinde Euclides Megarēsis. Inter Latinos autem primus extitit Apuleius: secundus vero noster memoratus Boetius, qui duos Arithmetices amplissimos, & eosdem subtilissimos ædidit libros. postmodum Iordanus, vir sane in Arithmetica facultate eruditus. Sed inter recentes, qui nostra viuunt tempestate, duos non prætereundos reperio: alterum Iacobum Fabrum Stapulensem, alterum Iudocum Clichtoueum Neoportuensem, eiusdem Fabri verum expositorem: quos debito iure omnium horarum viros esse dixerim. His enim si nostra Arithmetice, rationalis efficeretur creatura: perpetuo esset deuincta: quippe qui ex eadem existenti materia, animatum effecerunt corpus. ¶ Arithmetica, secūdum diuum Isidorum episcopum Hispalensem, suarum tertio Etymologiarum libro, numerorum disciplina nuncupatur: quæ inter Mathematicas disciplinas, primas sibi vēdicat partes. Græci autem, numerum, arithmon dicunt, à quo originem Arithmetica sumpsit. ¶ Tot nobis huius facultatis laudationes occurrunt, vt de ipsius laudibus alterum, & quidem prolixius, efficere possemus opus. Et quia sermo longus (vt inquit Apollonius) in multis peccat: ideo his omnibus prætermissis, rem ipsam tangamus oportet. ¶ Arithmeticam in duo scindi membra, alterum theoricum, alterum vero practicum, ambigit nemo. Theoricum de numeris, & ipsorum passionibus consyderat: Practicum, operandi modum ostēdit. Quare nobis congruum visum est, ipsam Arithmeticam in duos libros secandam. In quorum priori, theorice absoluetur: in altero vero praxis. ¶ Priorem igitur aggrediendo librum, ipsum in quinque tractatus diuisum esse significamus. In quorum primo de consyderato secundum se numero, dicemus. In secundo, de relato ad alterum numero, disputabimus. In tertio, de accepto secundum figuram numero, discutiemus. In quarto, de relatis numerorum habitudinibus agemus. In quinto, & vltimo, numerorum demonstratas proprietates annectemus.

Iacobus Faber. Iudocus Clichtoueus. Arithmetica quid & vnde.

Arithmetices diuisio.

Arithmetices theoricę partitio.

DE CONSYDERATO SECVNDVM SE NVMERO, tractatus primus.

Aristoteles.

Cleobolus Lydius. Solon Salaminius

IN mediocritate virtus consistit, inquit Aristoteles secundo Ethicorū. & statim pòst sequitur, Mediocritas autē, est duorum vitiorū, vnius per exuperationem, alterius per defectū. Cleobolus autem ille Lydius, vnus ex septem sapientibus, in vno suorum Apophthegmatum inquit, Mediocritas optimum quoddam est. Cui sententiæ adstipulatur Solon Salaminius, vnus etiam ex septem, quos Græcia iactat sapiētes, sic inquiens, Ne quid nimis. Mediocritatem igitur opitulante dei numine in hoc primo tractatu (qui sequentium est firmamentum) obseruare nitemur. Nam hoc ipso intellecto, facilis ad sequentes aditus apparebit: & ipso prætermisso, cæteri obscurentur oportet. Præsens igitur tractatus in octodecim diffinita scindetur: in quibus de numero secundum se consyderato, dicemus. Is autem numerus secundum se consyderatur, qui nec in comparatione ad alterum sumitur, neque vt ad geometricas figuras habet analogiam, deprehenditur.

Numerus secūdum se consyderatus.

SEQVVNTVR DIFFINITA.

¶Vnitas, est qua vnumquodq; vnum esse dicitur. 1

¶Siue enim corporea, siue incorporea fuerit res, necessum est vt vnitate dicatur vna. Nec in proposito insistẽdum est, an vnitas, qua gloriosa Christi anima dicitur esse vna, cum eadem identificetur anima, aut ab eadem realiter distinguatur: hoc autem enoda re, alterius est facultatis. ¶Vnitas autem, omnium numerorum est parens, basis'que firmissima, in quam omnes resoluuntur numeri: & ipsa vna simplici manente, nullam patitur numeralem compositionem. Vnde merito dici potest, quandam inter vnitatem, & materiam affinitatem reperiri. hanc quidem materiam, primam esse in compositionis via, vltimámque in resolutione, omnes testantur philosophi: ita in cuiuslibet numeri compositione, prima se offert vnitas, & vltima, atque vidua iacet, cum quiuis numerus in suas omneis scinditur partes.

Vnitas, numerorũ basis.

☞ Duæ istæ diffinitiones sunt Euclidis lib. 7 elementorum, ab initio. reliquę itẽ omnes, ibidẽ reperiuntur. licet alijs verbis contextæ sint.

¶Numerus, est composita ex vnitatibus multitudo. 2

¶Exempli gratia: ex vnitate & vnitate, componitur binarius, qui omnium numerorũ dicitur esse primus, & ex vnitate & binario, resultat ternarius: quemadmodum ex binario & binario, efficitur 4. In data diffinitione, diffinitum est capiendum pro numero proprie dicto, qui numerus numeratus dicitur, & non pro numero numeranti. Vnde aliud nihil numerantem numerum appellamus, quàm ipsum intellectum: qui vnitates colligendo, compositam ex illis efficit multitudinem. Illum autem numeratum dicimus numerum, qui ex collectis resultat vnitatibus. ¶Numerorum generatio ab vnitate (quæ proprie non numerus, sed initium numeri est dicenda) incipiens, per continuum vnitatis additamentum in infinitum protenditur. Eisdémque tali modo comprehensis vnitatibus, nostris placuit maioribus eas naturalem numerorum seriem nuncupare: quam præsenti elementorum combinatione poteris dignoscere.

Numer. Numerãs. Numeratus.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	&c.

¶Pars aliquota, est quæ aliquoties sumpta, suum numerum efficit atque metitur. 3

¶Vt 1, quæ omnẽ numerũ dimetitur. Vnde si bis sumatur, binariũ efficit: & si ter, ternarium: & si quater, quaternariũ: & ita consequẽter. Binarius etiam respectu quaternarij, senarij, octonarij, aliquota dicitur pars: cũ bis sumpta, quaternariũ cõponat. & si ter sumatur, senariũ efficit: & si quater, octonariũ. Inde cõstat binariũ aliquotã esse partẽ, atq; mensurã 4, 6, & 8. Id autẽ quod in præsentiarũ aliquotã dicimus partẽ, apud plærosq; antiquos, & præsertim Euclidem septimo elemẽtorũ, partẽ nominatũ reperies. Pars aliquota, terminus est relatiuus: cũ bene sequatur, Pars aliquota est, ergo numerus mẽsuratus est. ¶Pro partiũ aliquotarũ generatione, id solũ habeas documẽtũ. Q uouis tibi proposito numero, videbis quoties in ęquas resoluitur partes. Q uod si semel tantũ cõtigerit: vnitas duntaxat talis numeri est pars aliquota. Si bis accidat: præter vnitatẽ, aliquis numerus pars aliquota est dicẽdus. Si ter: oportet, præter vnitatẽ, duos diuersos numeros partes aliquotas esse. & hoc pacto cõsequẽter. Exẽplũ primi: 2 semel tantũ in partes æquales est resolubilis, scilicet in vnitatẽ, & vnitatẽ: ideo sola vnitas est pars aliquota 2. Eodẽ modo 3 & 5 semel dũtaxat in æquas resoluũtur partes: 3 quidẽ in tres vnitates, & 5 in quinq;: quapropter illorũ sola vnitas est pars aliquota. Exẽplũ secũdi: 4 bis in partes æquales diuiditur, semel in quatuor æquales vnitates, & deinde in binarios duos: quare, vltra vnitatẽ, numerus binarius est pars aliquota quaternarij. Pari modo 9 & 25, bis in partes diuidũtur æquales: 9 enim in nouẽ vnitates, & tres ternarios: & 25, in vigintiquinq; vnitates, & quinarios quinq;. igitur præter vnitatẽ, 3 est pars aliquota nouenarij: & 5, numeri 25. Exemplum tertij: habeas 6, 8, & 10, qui ter in partes æquas scindũtur. 6 in sex vnitates, tres binarios, & duos ternarios. & 8, in octo vnitates, quatuor binarios, & duos 4. 10 autem in decem 1, & quinq; 2, & duos quinarios resoluitur.

Euclides.

Partium aliquotarũ generatio.

¶Pars non aliquota, est numerus qui non aliquoties sumptus suũ numerum efficit, atq; metitur. 4

¶ Vt binarius in ternario inclusus, qui pars non aliquota dicitur, cũ non aliquoties sumptus, ternariũ efficiat. eodem modo 3, qui in quinario reperitur, respectu eiusdem pars non aliquota appellatur. Etiam quaternarius in septenario inclusus, pars non aliquota respectu eiusdẽ nuncupatur. Aduerte tamen Euclidem, & Boetium partes nuncupare, quod non aliquotã dicimus partẽ. Pars autẽ non aliquota, vti & aliquota, relatiuus est terminus. ¶ Pro quarum generatione nullo tibi alio opus est documento, q̄ quocunq; oblato numero, cõsyderabis an in ipso sit aliquis numerus, qui non aliquoties sumptus suum numerũ efficiat: & quoscũq; tales reperias numeros, scias eosdẽ in dato numero non aliquotas esse partes. Exẽpli gratia: in ternario, solus binarius est pars non aliquota. pari modo in quaternario, solus ternarius pars non aliquota dicitur. in quinario autẽ, tres non aliquotæ inueniũtur partes, scilicet 2, 3, 4. cũ nulla prædictarũ aliquoties sumpta, quinariũ procreet. & de cæteris conformiter est dicẽdũ. Solus enim binarius, inter omnes numeros à parte nõ aliquota eximitur: parte vero aliquota nullus nũerus vacat.

Euclides Boetius

Partium nõ aliquotarum generatio.

5 ¶ Numerus par, est numerus in duas partibilis medietates, totum numerum componentes.

¶ Sicut est 2, & 4, & 6, cæteri'que eo ascendentes modo. binarius nanque in duas medietates partibilis est: scilicet vnitatem, & vnitatẽ. Etiam 4 in duo æqua scindi permittit, videlicet in binariũ, & binarium. Idem de 6 & altioribus numeris cẽsendum est. Particulam illam, totũ numerũ componentes, applicatã habebis in infrapositis diffinitis. ¶ Si à naturali numerorum serie primũ numerum abstrahas, videlicet 2, & secũdo pretermisso, scilicet 3, tertiũ abstrahas, vtpote, 4: deinde quinto relicto, immediate sequentem numerum, scilicet 6 auferas, & ita consequenter consimili scalaritate procedendo: omnium numerorum parium genitam inuenies lineam. Exemplum.

Pariũ numerorũ procreatio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Linea parium numerorum		2		4		6		8		10		12		14	

Hanc parium numerorum lineam in infinitum protende per assiduam 2 additionem.

6 ¶ Numerus impar, est numerus in duas medietates impartibilis.

¶ Quemadmodum sunt 3, & 5, & 7. alij'que infiniti eo procedentes ordine. ternarius enim in duas medietates minime potest diuidi: sicut nec 5, nec 7. Et quamuis 7 in duas senarij medietates, scilicet in 3 & 3 secetur: in duas tamen medietates ipsum 7 componentes diuidi non permittit. ¶ Generatio imparium numerorum facile apprehendi potest, ijs quæ in præcedenti diffinitione dicta fuere, intellectis. Vnde si (vt ibidem dicebatur) à naturali numerorum serie linea parium numerorum abstrahatur, cæteri manentes numeri impares erunt: qui à 3 incipientes, tali ordinantur linea.

Impariũ ꝓductio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Linea imparium numerorum			3		5		7		9		11		13		15

Sic in infinitum procedant numeri impares per continuum binarij crementum.

7 ¶ Numerus pariter par, est numerus par, in æquales continuo resolubilis partes, quousq; ad impartibilem deuentum fuerit vnitatem.

¶ Vt 16 numerus, qui in 8 & 8 suas æquales partes diuiditur: deinde illæ in æquales pariter secantur partes, videlicet in 4 & 4: hæ vero in 2 & 2 æquas scinduntur partes: quæ deniq; in duas impartibiles vnitates resoluuntur, vltra quas non est amplius procedendum. pari modo 32 & 64 numeri pariter pares dicũtur. ¶ Generatio pariter parium numerorum talis est. Fiat continua numerorum duplatio, ab vnitate incipiendo, ita vt semper productus numerus dupletur: & cunctos pariter pares inuenies. Vnde si vnitatem duplaueris: primum pariter parem habebis, scilicet 2: quem si duplaueris, secundus pariter par producetur, scilicet 4: qui si duplatus fuerit, productus numerus erit 8, qui tertius pariter par dicetur. & ita in infinitum procedere potes. Horum autem lineam, tali compositione procreatam inuenies.

Pariter pariũ generatio.

Linea pariter parium numerorum	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Quæ si per continuam numerorum duplationem in infinitum crescat: omnes pariter pares numeros procreatos inuenies.

¶Numerus pariter impar, est numerus par, in duos impares, & equales partibilis numeros. 8

¶Vti est 6, qui in 3 & 3 impares numeros, & æquales partitur. Eodem modo 10 & 14, & cæteri eodẽ excessu ascendentes numeri, pariter impares nuncupantur. ¶Hæc autẽ est pariter impariũ numerorũ generatio. Dispositis seriatim numeris imparibus, si omnes duplaueris, seu per 2 multiplicaueris: cũctos pariter impares reperies. Vnde si primum imparem, videlicet 3, duplaueris: primũ pariter imparem generabis, qui 6 erit. Item si 5 secundus numerus impar in binarium ducatur: producetur 10 secundus pariter impar. Et si 7 tertius impar per binarium multiplicetur: cõsurget 14 tertius pariter impar. Et consequenter in infinitum procede. hos enim numeros pariter impares infra posita linea (si absq; statu elongetur) per duplationem superioris poterit repræsentare.

Pariter impariũ ꝑductio.

Linea imparium numerorum	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
Linea pariter imparium numerorum	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46

Et ita consequẽter sine termino protendatur per continuũ quaternarij additamentum.

¶Numerus impariter par, est numerus par, in duos æquales, paresq; secabilis numeros, qui in duas æquales continuo resolui partes ad vnitatem vsque haud permittunt. 9

¶Quemadmodũ est 12, qui etsi in 6 & 6 pares, duásq; æquales partes resoluatur, & illæ iterũ in duas æquales, scilicet in 3 & 3: hæ tamen minime in partes duas diuidi possunt æquales. Hinc deducitur numeros 20 & 24 impariter pares esse. ¶Pro impariter parium numerorũ generatione, duę accipiantur lineæ, altera impariũ numerorum, altera vero pariter pariũ, binario excepto, & eo disponantur ordine, vt imparium numerorum linea in superiori parte locetur, & pariter parium linea à 4 incipiendo, in latere sinistro ponatur: deinde sinistræ lineæ quiuis numerus per quẽlibet superioris lineæ multiplicetur, & ex tali ductu cõsurgens numerus ea locetur domo, quæ ad vtrunq; numerum, & multiplicandũ, & multiplicantem, directum habet aspectũ. quo facto, omnium impariter parium generationẽ habebis: quam facile præsens figura poterit propalare.

Impariter pariũ gñatio.

¶Longitudo lineæ imparium numerorum in infinitum protensa.

Latitudo lineæ pariter parium numerorum in infinitum protensa.	3	5	7	9	11	13	15	17	
4	12	20	28	36	44	52	60	68	
8	24	40	56	72	88	104	120	136	
16	48	80	112	144	176	208	240	272	
32	96	160	224	288	352	416	480	544	
64	192	320	448	576	704	832	960	1088	
128	384	640	896	1152	1408	1664	1920	2176	
256	768	1280	1792	2304	2816	3328	3840	4352	
512	1536	2560	3584	4608	5632	6656	7680	8704	

¶Generatio impariter parium numerorum artificiose reperta.

Hãc igitur si animaduertas figurã, reperies primũ impariter pariũ numerorũ callem generari ex multiplicatione quaternarij per omnes impares numeros: ita vt ex ductu quaternarij in 3, prima efficiatur domus, in qua 12 reperitur: ex ductu autẽ quaternarij in 5, secũda emanat domus, qua 20 habetur, qui supra 12 habet 8. Hoc pacto consequenter cæteræ eiusdẽ callis procreãtur domus, per assiduũ octonarij augmentũ. Secũdus callis ex ductu octonarij per omnes impares generatur, sic vt ex multiplicatione 3 in 8, illius callis prima domus generetur, in qua 24 reperitur. Et si 8 in 5 ducatur, secundam inuenies domum, qua 40 inuenitur, qui 24 excedit per 16. Et consequẽter eundo per cõtinuũ 16 cremẽtũ, cæteras poteris in eodẽ calle generare domos. ¶Ex quibus omnibus deducitur, quemuis numerum secũdi callis in dupla se habere proportione ad quemlibet sibi correspondentem in primo, & tali se habere proportione tertij callis numeros ad sibi correspondentes in secundo, & quarti callis numeros ad sibi correspondentes in tertio: & consequenter procedendo ita fieri necessum est.

10 ¶Numerus impariter impar, est numerus impar, in partes impares, & æquales partibilis.

Impariter imparium creatio.

¶Vt 9, qui in tres ternarios impares numeros, & æquales partitur. similiter 15 & 25, cæteriq; infiniti ascendentes, numeri impariter impares nominentur. ¶Impariter impares eo pacto generantur. Sumantur duæ lineę, quarum vtraque sit imparium numerorum, & altera supremo ponatur loco, altera sub illa ad modum diametri quadrati sic sita. Deinde diametralis linea in superiorem ducatur, sic vt illius primus numerorum imparium, videlicet 3 per omnes superioris lineæ numeros multiplicetur: & prouenientes numeri eo calle, iis'que locentur domibus, quæ ad 3 directum habent aspectum. Postmodum secundus diametralis lineę numerus, scilicet 5, per omnes superioris lineę numeros (dempto primo) multiplicetur: & consurgentes numeri eo calle, & directis domibus disponantur proportionabiliter ad primum. Consequenter tertius diametralis lineæ numerus, qui 7 est, in omnes supremæ lineæ numeros (præter duos primos) ducatur: & resultantes numeri decentibus domibus, atque calle ponantur. Et si ita in infinitum multiplicando procedas, omnes impariter impares numeros procreatos ĩuenies: quos omnes haud difficulter præsenti characterũ con textu intelligere quilibet valebit.

¶Imparium numerorum linea, ad modum costæ quadrati sita, & in infinitum protensa.

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69
3	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
	5	49	63	77	91	105	119	133	147	161
		7	81	99	117	135	153	171	189	207
			9	121	143	165	187	209	231	253
				11	169	195	221	247	273	299
					13	225	255	285	315	345
						15	289	323	357	391
							17	361	399	437
								19	441	483
									21	329
										23

¶Imparium numerorum linea, ad modũ diametri quadrati sita, & in infinitũ protensa.

¶In hac suprapoſita figura, generationem impariter imparium numerorum facile est reperire.

11 ¶Numerus primus, est numerus quem sola metitur vnitas.

Primorũ numerorum creatio.

¶Vt 2 & 3 & 5. nullum autem reperies numerum qui aliquoties sumptus, 2 vel 3 vel 5 efficiat. sola igitur vnitas est illa, quæ non modo impares numeros, verumetiam omneis & pares, & impares metitur. Primum & incompositum numerum Boetius nominauit, quem Euclides, post quem nos, primum diffinimus. ¶Horum autem primorum numerorum generationem reperies accepta imparium numerorum linea, si ab eadem impariter impares numeros abstuleris, quod hoc pacto fieri potest. Disponantur impares numeri secundũ ipsorum naturalẽ seriem: & si cũctos numeros subtrahas, qui æqua scalaritate (à 3 incipiendo) cõtinuo per tres numeros distãt, & à 5, per, quinque, & à septenario per septem, & sic consequenter, cæteri manentes, primi dicentur numeri. Verbi gratia, subtrahat 9, qui à 3 per tres numeros distat, & 15, qui à 9 per tres pariter distat, & 21, qui à 15 etiã per tres numeros distat, & sic consequenter. Deinde subtrahe 15, qui à 5, per quinq; numeros distat, & 25, qui à 15 per quinque eodẽ modo distat: & 35, qui à 25 per 5 numeros elongatur. & sic de alijs. Postmodũ 21 subtrahe, qui à 7 per septem numeros recedit: & 35, qui à 21 per 7 etiam distat: & 49, qui à 35 per septem distat numeros: & si hoc pacto deinceps procedas, genitam inuenies primorum lineam.

Sequitur exemplum.

Linea imparium numerorum		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
Linea primorum numerorum	2	3	5	7		11	13		17	19		23	25

¶Numeri adinuicem primi, sunt numeri quos communi mensura so- 12
la vnitas metitur.

¶Vt 2 & 3. etiam 3 & 4. similiter 8 & 15. Et quãuis 8 præter vnitatẽ, 2 & 4 habeat men- suras, sicut & 15 ternarium & 5: quia nulla tamen illarum cõmunicant, ideo numeri adinuicem primi dicuntur. Patet igitur ex diffinitione 8 & 15 primos adinuicem esse numeros: primi autem esse non possunt, cum neuter illorum sit primus. Et quoniam vnico documento, vnicave regula huiuscemodi numerorum adinuicem primorum generatio cõprehendi nequit: ideo in eius inquisitione longius æquo immorari refutamus.

¶Numerus compositus, est numerus qui aliquo numero metitur. 13

¶Vt 6, 8, 9. quilibet istorum, præter vnitatem, aliquem habet numerum, qui aliquoties sumptus ipsum totum efficiat. 6 enim, 2 habet, qui ter sumptus, 6 componit. & si quater accipiatur, 8 reddit. sed nouenariũ, 3 mensurat: cum ter tria, 9 generent. Hũc, quem compositum numerum significamus: Boetius, & pleriq; alij, secundum, & incompositum numerum dixerũt. ¶Horum compositorũ generatio, facile admodum comprehendi potest, intellectis quæ in 11 diffinito dicta fuere. Vnde si à data impariũ numerorum linea cunctos impariter impares numeros abstuleris, arte & modo prius signatis, & cum eisdem abstractis, cunctos etiam numeros pares (à 4 incipiendo) sumpseris: omnes numeros compositos procreatos habebis.

Composi torum generatio.

Exemplum.

Linea ipariũ nũerorũ	3		5		7		9		11		13		15		17		19		21	
Linea ipariter ipariũ							9						15						21	
Linea pariũ nũerorũ		4		6		8		10		12		14		16		18		20		22
Linea compositorũ		4		6		8	9	10		12		14	15	16		18		20	21	22

¶Numeri adinuicem compositi, sunt numeri quibus aliquis nume- 14
rus est pars aliquota, siue communis mensura.

¶Vt 4 & 6, quos 2 metitur. pari modo 6 & 8, cum ipsos 2 dimetiatur. etiam 9 & 12, quibus 3 est pars aliquota, & cõmunis mẽsura. 9 & 25. etsi cõpositi sint numeri: nõ tamen adinuicẽ sunt compositi, cũ nullus numerus cõmuni dimensione ipsos metiatur. ¶Nullam numerorum adinuicem cõpositorum assignamus generationẽ: vtpote quia per lõgas oporteret ire ambages, & adhuc nullũ inde contractũ haberetur documentũ.

¶Numerus compositus, ad alterum vero primus, est numerus compo- 15
situs alteri numero cõparatus, quibus sola vnitas est cõmunis mẽsura.

¶Vt 6 in ordine ad 7. si enim 6 secundũ se tantũ concipiatur, compositus est, cũ ipsi numerus 2 sit mensura. ipse tamen ad 7 relatus, compositus ad alterum primus dicitur, ex eo ꝙ sola vnitas ipsis est cõmunis mẽsura. Itẽ 8 ad 9 relatus, talis est numerus, sicut & 9 ad 25. ¶Eadem est numeri cõpositi, & ad alterum primi generatio, cum numeri cõpositi generatione: cũ sit ita omnem numerum compositũ, & ad alterũ primũ numerum, compositũ esse, & ediuerso: hac sola differunt ratione, ꝙ compositus simpliciter secundum se consyderatur, & numerus ad alterum primus, alteri refertur.

Compositi, & ad alterũ primi generatio.

¶Numerus abundans, est numerus cuius summã omnes in vnum ad- 16
iunctæ partes aliquotæ excedunt.

¶Vt 12, cuius 1, 2, 3, 4, 6, partes aliquotæ simul acceptæ, 16 componunt, qui 12 maior est numerus. Pari ratione dicendum est 24 & 48, numeros abundantes esse. ¶Horũ autẽ abundantiũ numerorũ propagationem nullã assignamus: quippe quæ adeo fertilis, atq; deuia est, ac hominũ caterua quæ virtutis superabundans insequitur extremũ.

¶Numerus diminutus, est numerus cuius omnes partes aliquotæ si- 17
mul collectæ, suum numerum non attingunt.

¶Vt 8, cuius partes aliquotæ, quæ sunt 1, 2, 4, dūtaxat 7 cōplet. Idem de 9 & 10 dicē-dum est. Appellatur etiā imperfectus, quē diminutū numerū diffinimus. ¶Mutilis, & diminuta diminutorū numerorū educatio reperitur. Nam cū in deficiendo, non minus q̄ in superabundādo peccatū attribuatur: sic in diminutis, perinde atque in abundantibus inordinata generatio inuenitur: quare tanquam ruinosa à nobis non est quærenda.

18 ¶Numerus perfectus, est numerus par, cuius omnes aliquotæ simul collectæ partes, suum numerum complent.

Perfectorum numerorū gñatio.

¶Vt 6, cuius omnes partes aliquotæ, videlicet 1, 2, 3, suum numerum scilicet 6, efficiunt. Etiam 28, & 496. perfecti numeri dicuntur. ¶Pro perfectorum numerorum generatione, ab vnitate incipies, cunctos pariter pares secundum ipsorum lineam disponendo, & illorum ordinata fiat additio: & quotiescunque ex tali additione numerus primus consurgat, illum per maiorem addendorum multiplicabis: & creatus ex tali ductu, numerus perfectus nuncupabitur. Exempli gratia, si 2 pariter parem addas vnitati, efficitur 3, qui numerus est primus, eo q̄ sola metitur vnitate. hunc igitur 3 si per 2 multiplices, 6 generabis: qui primus numerus perfectus est. Deinde si 1, 2, 4, simul addantur, consurget 7, numerus primus: quem si in 4 ducas, 28 generabis, qui secundus numerus perfectus dicitur. Item si 1, 2, 4, 8, addantur, 15 resultabit, qui non primus, sed compositus est numerus: ideo illo prætermisso, consequenter procedas, 1, 2, 4, 8, 16, simul colligendo: & proueniet 31 qui primus est numerus. illum igitur si per 16 multiplices: numerus 496 emanabit, qui perfectus, & tertius est in ordine. Et si cōsequenter taliter operando procedas: omnes quidem perfectos poteris generare numeros. Vt autem quæ dicta sunt, solidius intelligere valeas: præsentem numerorum respice formam.

Linea pariter parium numerorum	1	2	4	8	16	32	64
Linea perfectorum numerorum		6	28		496		8128

Corollarium.

Ex his sequitur numeros perfectos interpollata terminatione, vtpote senaria, & octonaria inueniri. Nam primus in senario finitur, quoniam ipse 6 est: & secundus in 8, cum sit 28. tertius in senario, quartus in octonario, & consequenter hoc pacto.

DE RELATO AD ALTERVM NVMERO, tractatus secundus.

Hesiod⁹.

Dæmonas

Isocrates

EX sese qui omnia nouit, optimum vocat Hesiodus poeta. Quare omnia quæ in præsenti tractatu se offerunt dicenda, optimo relinquo Deo, qui ex sese omnia nouit. oportet enim seipsum homo cognoscat, antequam philosophari incipiat. Imò tunc incipit homo philosophari, cum seipsum incipit cognoscere, vt inquit Demonas. Nam cum turpe aliquid egerit quisquam, ne putet latere posse, Isocrates dicebat. In hoc igitur secundo tractatu, quinq; & viginti erunt diffinita de relato ad alterum numero discernentia: quæ lectoribus pulchra (meo quidem iudicio) videbuntur. Q𝔷 si turpe aliquid sit reperire: eos omnes exoratos velim habere, à quibus hoc tale deprehēdetur, in dexteriorē partem interpretentur. Nec prætereundū est duos duntaxat in hac parte numeros esse capiendos: eum videlicet qui ad alterum refertur, & eum ad quem alter numerus cōparatur.

Numer⁹ ad alterū relatus.

Is enim numerus ad alterū refertur, cuius denominatio duos indifferenter primos casus sortitur: & ei numero alter numerus comparatur: cuius nuncupatio poscit accusatiuum, præpositione, ad, præcedente: vt 9 ad 3. primus nanq; numerus, puta 9, in recto, siue in genitiuo est exprimēdus: & secūdus in accusatiuo: & de cæteris pari modo. Et pro huius tractatus cōplemēto, quinq; vniuersales regulas annectemus: quibus prompte, atq; erudite primos terminos, siue primos numeros proportionales in omni proportionum genere poteris inuenire.

¶Numerus proportionalis, est numerus qui ad alterum refertur, vel ad quem alter numerus comparatur. 1

¶Verbi gratia, si 3 binario cōparetur, 3 relatus, & 2 cui refertur, numerus proportionalis appellatur. Et si 5 vnitati, & 6 octonario cōparentur, tam numeri cōparati, q̄ hi ad quos referūtur, numeri proportionales dicentur. Illa vero quæ 3 ad 2, 5 ad 1, 6 ad 8, inuenitur habitudo, proportio (seu ratio secundū Euclidē) nūcupatur. Vnde proportio, est certa duorū numerorū habitudo. Et quāuis vnitas proprie numerus nō dicatur: in proposito tamē, numeri appellationē obtinet. & per cōsequens si ad ipsam aliquis numerus comparetur, vel ad aliquem ipsa referatur: vterq; numerus proportionalis cēsebitur. ¶Generatio autē omniū proportionaliū numerorū, pariter & proportionū haberi potest: si tota naturalis numerorum series cuilibet eiusdem numero comparetur.

Euclides Proportio quid.

Proportionaliū gñatio.

¶Aequalitas, est numerus æquali numero comparatus. 2

¶Vt 2 ad 2, 3 ad 3, 4 ad 4. in datis exemplis, vterq; cōparatorum æqualitas nominatur. cum enim 2 binario refertur, 2 relatus dicitur æqualitas: & 2 cui refertur pari modo æqualitas nuncupatur. Eodem modo 3 ad 3, 4 ad 4, vterq; relatorū æqualitas exprimitur. Sed illa quæ 2 ad 2, 3 ad 3, 4 ad 4, reperitur habitudo, proportio æqualitatis appellatur. Nā proportio æqualitatis, est certa duorum numerorum æqualiū habitudo. Aduerte tamen illum numerum alteri esse æqualem, qui ex æque multis consurgit vnitatibus: inæqualē vero, qui ex pluribus, aut paucioribus. Nam si ex pluribus constet, maior numerus dicitur: quòd si ex paucioribus aggregetur, minor numerus nuncupatur. ¶Generatiō æqualitatum, siue ęqualium numerorum, pariter & proportionum ęqualitatis facile habetur: si datis lineis naturaliū numerorum secundum sub & supra dispositis, vnius omnes numeros ad sibi correspondentes in altera comparaueris.

Proportio ęqualitatis.

Æqualiū tū numerorum tū proportionū generatio.

¶Inæqualitas, est numerus inæquali numero comparatus. 3

¶Exemplum: 8 ad 4, 4 ad 2, 6 ad 7. Cū autem 8 comparatur 4: tam 8 q̄ 4 inæqualitas dicitur. Pari modo si 4 binario, & 6 septenario referātur, vterq; comparatorū inæqualitas nominabitur. Illa vero quę 8 ad 4 inuenitur habitudo, sicut & 4 ad 2, 6 ad 7, inæqualitatis proportio exprimitur. Vnde proportio inæqualitatis, est certa duorū numerorum inæqualium habitudo. ¶Pro generatione inæqualitatum, siue inæqualium numerorum, simul & proportionum inæqualitatis: accipiatur naturalis linea numerorum, & eius primo numero, videlicet vnitati, quilibet sequens comparetur, & ediuerso vnitas cuilibet sequentiū numerorum referatur: deinde eius secūdo numero, scilicet 2, quilibet sequentium numerorum comparetur. & econtra 2 cuilibet sequentium referatur: postmodum tertio eius numero quilibet sequentium comparetur, & econuerso. & si hoc pacto deinceps in infinitum fiat processus: propositum emanabit.

Proportio inæq̄litatis.

Inæqualium numerorū & proportionū generatio.

¶Maior inæqualitas, est numerus maior minori numero cōparatus. 4

¶Verbi gratia: 8 ad 4, 6 ad 3, 4 ad 1. Si autem 8 cōparetur 4: comparatus 8, maior inæqualitas dicitur. Consimili modo si 6 ad 3, & 4 ad 1 referatur, tam 6 quàm 4 maior inæqualitas exprimetur. Sed quæ 8 ad 4, 6 ad 3, 4 ad 1 reperitur habitudo, proportio maioris inæqualitatis nuncupatur. Nam proportio maioris inæqualitatis, est certa maioris numeri ad minorem habitudo. ¶Generantur maiores numeri, qui maiores inæqualitates dicuntur, similiter & proportiones maioris inæqualitatis, accepta naturali numerorum serie: si primo eius numero, videlicet 1, omnes numeros sequentes comparaueris: deinde si secundo eiusdem lineę, scilicet 2, cunctos sequentes referas: item si tertio, puta 3, omnes sequentes comparentur, & hoc pacto deinceps.

Proportio maioris inæq̄litatis & eius procreatio.

¶Minor inæqualitas, est numerus minor maiori numero cōparatus. 5

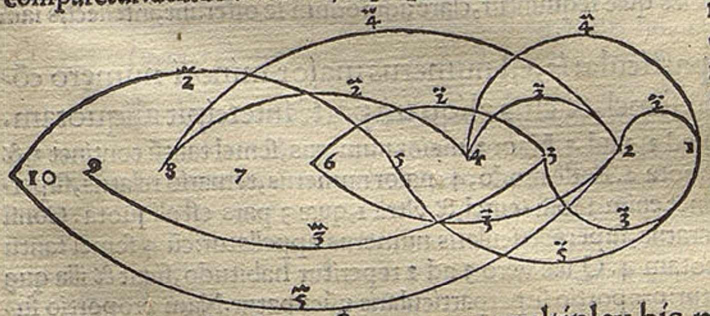
Vt 2 ad 4, 3 ad 6, 1 ad 8. Si enim 2 ad 4 referatur: 2 relatus, minor inæqualitas dicitur. Etiam si 3 ad 6, & 1 ad 8 referantur: & 3 & 1, minor inæqualitas appellatur. Quæ tamē 2 ad 4, 3 ad 6, 1 ad 8 inuenitur habitudo, proportio minoris inæqualitatis nuncupatur. Vnde proportio minoris inęqualitatis, est certa minoris numeri ad maiorem habitudo. ¶Procreantur numeri qui minores inæqualitates appellantur, pariter & pro-

Proportio minoris iæqualitatis & eius generatio.

portiones minoris inęqualitatis, natuali numerorum linea accepta: si primus numerus, scilicet vnitas, cuilibet sequentium comparetur: deinde si secundus, videlicet 2, cuilibet etiam sequẽtium referatur: postmodum si tertius cuilibet pariter sequẽtium comparetur, & hoc modo consequenter.

6 ❡Numerus multiplex, est numerus maior minori numero relatus, quem pluries continet æque.

❡Exemplum: 2 ad 1, 6 ad 2, & 12 ad 3. Nam 2 maior numerus, bis continet 1, quæ minor est numerus, & nihil aliud. Pari modo 6 maior numerus ad 2 minorem numerum comparatus, multiplex est: cum eum ter æque contineat. Sic 12 ad 3 relatus, multiplex est numerus: eum enim quater continet, & nihil aliud. Illa autem quæ 2 ad 1 reperitur habitudo, proportio multiplex nominatur. Eodem modo quæ 6 ad 2, & 12 ad 3 inuenitur habitudo, proportio multiplex est dicenda. Nam proportio multiplex, est propor-
Proportio multiplex. tio, cuius maior numerus minorẽ pluries æque continet. Numerus autem multiplex, sicut & proportio multiplex, in infinitas distribuitur species. Prima numeri multiplicis species est duplus, secunda triplus, tertia quadruplus, & hoc pacto deinceps. Proportionis vero multiplicis, prima species est dupla, secunda tripla, tertia quadrupla, & cõsequenter eo modo. Numerus enim multiplex, similiter & proportio, peculiarem sumunt denominationem à numero vicium, quibus maior numerus minorem continet. Vnde si maior numerus minorem, cui refertur, bis solum contineat, duplus nominabitur: & inter ipsos habitudo, proportio dupla dicetur. Si numerus maior minorem ter includat, triplus dicetur: & inter eos habitudo, proportio tripla. Quòd si maior numerus minorem numerum quater contineat, quadruplus nominabitur: & inter easdem habitudo, proportio quadrupla exprimetur. Sed de his speciebus, earúmque contractis
Multiplicium, tum numerorum, tum proportionũ generatio. productionibus statim fiet sermo. ❡Producuntur omnes multiplices numeri, ac cũctę multiplices proportiones, habita naturali numerorum serie, si vnitati 2 comparetur: deinde, proximo sequenti neglecto, vtpote 3, sequẽs 4 binario referatur: postmodum 5 abiecto, 6 sequens ternario comparetur: item 7 prætermisso, qui sequitur, 8 quaternario referatur. & ita consequenter in infinitum tali intercapedine obseruata. Deinde si ad initium redeas, & vnitati ternarium compares, & duobus proxime sequentibus dimissis, sequens 6 binario referatur: postea duobus etiam proxime sequentibus neglectis, qui primus sequitur, 9 ternario comparetur, & hoc pacto deinceps, semper bina numerorum obseruata subtractione. Postmodum si iterum ad initium iuuat redire, vnitati 4 referendo, & tribus proxime sequentibus numeris relictis, sequens 8 binario comparetur: deinde tribus alijs, qui proxime sequuntur extractis, qui se offert, 12 ternario referatur: & hac arte consequenter. Nam si in infinitum initij reiteratio crescat, arte & modo prætactis, omnes multiplices, & numeros, & proportiones creatos inuenies. quos omnes facile dat intelligere quæ hic describitur figura.



7 ❡Numerus duplus, est numerus multiplex bis minorem numerum æque continens.

❡Exemplum: 2 ad 1, 4 ad 2, 6 ad 3. Nam 2, bis solum 1 continet, cui refertur: quare duplus numerus est dicendus. Eodem modo 4, bis continet 2, & 6, ternarium: dicẽdi igi-
Proportio dupla, eiusdé'q; procreatio. tur sunt ex diffinitione, numeri dupli. Illa tamen quæ 2 ad 1, 4 ad 2, 6 ad 3 inuenitur habitudo, proportio dupla nominatur. Vnde proportio dupla, est proportio multiplex, cuius numerus maior minorem bis continet æque. ❡Producũtur omnes numeri du-

pli, pariter & duplæ proportiones, accepta naturali numerorum serie: si illi supponatur naturalis numerorum parium linea, & continua fiat relatio primi paris ad primum superioris lineæ numerum, & secundi paris ad secundum suprapositum, & tertij ad tertium, & hoc pacto deinceps. Exemplum.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Linea duplorum numerorum	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28

¶Numerus triplus, est numerus multiplex ter æque minorem numerum includens. 8

¶Exemplū: 3 ad 1, & 6 ad 2, & 9 ad 3. Si enim 3 vnitati cōparetur: 3 cōparatus (postquam adæquate 1 ter cōtinet) dicendus est numerus triplus. & eodē modo si 6 binario referatur, & 9 ternario: vterq; illorum triplus numerus denominabitur. Sed quæ 3 ad 1, 6 ad 2, 9 ad 3 habitudo reperitur, proportio tripla nuncupatur. Nam proportio tripla, est proportio multiplex, cuius maior numerus minorem ter cōtinet æque. ¶Generantur omnes numeri tripli, cunctæ etiam triplæ proportiones: habita naturali numerorū serie, & hoc loco superiori, si illi supponatur linea à 3 inchoata, infinitorum numerorū se continuo ternario excedentium: cuius primus numerus primo superioris lineæ comparetur, & secūdus secundo, & tertius tertio: & consequenter hoc modo. Exemplum.

Proportio tripla, ac eiusdē productio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Linea triplorum numerorum	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

¶Numerus quadruplus, est numerus multiplex, quater æque minorē numerum intercipiens. 9

¶Exemplum: 4 ad 1, 8 ad 2, 12 ad 3. Nam si 4 vnitati referatur (postquā ipsam quater præcise continet) dicendus est quadruplus. Pari modo 8 ad 2 comparatus, quadruplus appellatur: sicut & 12 si ad 3 referatur. Quæ tamen 4 ad 1, 8 ad 2, 12 ad 3 inuenitur habitudo: proportio quadrupla est censenda. Vnde proportio quadrupla, est proportio multiplex, cuius numerus maior minorē quater continet æque. ¶Consurgunt omnes numeri quadrupli, sicut & omnes quadruplæ proportiones, accepta naturali numerorum linea: si illi subijciatur vna alia à 4 incepta, quæ infinitos cōtineat numeros, se continuo per 4 excedentes: quorum primus primo superioris lineæ referatur, & secundus secundo, tertius tertio: & consequenter eo modo. Exemplum.

Proportio quadrupla, eiusdemq; creatio.

Naturalis series numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Linea quadruplorum numerorū	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52

Cæteræ multiplices species quæ sequuntur, clare admodum se offerunt, intellectis iam tactis speciebus.

☞ Cæteras multiplices species licebit videre in tabula Pythagorica, ī qua quidē tota est proportio numerorum ad primā seriē, quota fuerit linea descendens, quæ numeros illos cōtinet. vt q secūda linea cōtinentur numeri, ad numeros superiores omnes sunt dupli: & tertia, tripli: quarta, quadrupli: quinta quintupli &c.

¶Numerus superparticularis, est numerus maior minori numero cōparatus, quem tantū semel, & eius aliquam partē intercipit aliquotam. 10

¶Exemplum: 3 ad 2, 4 ad 3, 5 ad 4. Nam 3, maior numerus, semel tantū continet 2, & vltrà, 1. quę est pars aliquota 2. Eodē modo, 4 maior numerus, ternario relatus, superparticularis dicitur: cōtinet enim 3 solū semel, & vltrà 1, quæ 3 pars est aliquota. Consimili modo, 5 ad 4 cōparatus, superparticularis numerus appellatur: cū 4 semel tantū cōtineat & 1, partē aliquotam 4. Quæ vero 3 ad 2 reperitur habitudo, sicut & illa quę 4 ad 3, & 5 ad 4 reperitur: proportio superparticularis nūcupatur. Nam proportio superparticularis, est proportio cuius maior numerus minorem tantū semel continet, cū aliqua eius parte aliquota. Numerus superparticularis, queadmodū & proportio super particularis, infinitas habet species. Prima numeri superparticularis species est sesquialter, siue sesquimedius, aut sesquisecūdus: secunda sesquitertius: tertia sesquiquartus, & hoc pacto cōsequēter. Proportionis autē superparticularis prima species est sesquialtera: secūda sesquitertia: tertia sesquiquarta: & sic deinceps. Cōtrahūt autē specialē denominationem numerus superparticularis, similiter & proportio, à parte aliquota minoris numeri in maiori numero cōtenta, adiūcta semper hac particula, sesqui. Vnde si maior nentes. Pari modo 7 numerus maior,ſemel tantum cõtinet 4, & vltrà, tres vnitates, quæ 4 ſunt partes aliquotæ, nullam tamen reſpectu eiuſdem 4 efficientes aliquotam: quare dictus 7 ſuperpartiens numerus dicetur. Eodem modo 9 ad 5 relatus, numerus ſuperpartiens eſt dicendus:cum ſemel tantum contineat 5,& vltrà,quatuor 5 partes aliquotas,nullã aliquotam reddentes in ordine ad 5.Sed quę 5 ad 3 inuenitur habitudo,ſicut & illa quæ 7,ad 4,9 ad 5 reperitur: dicenda eſt proportio ſuperpartiens.

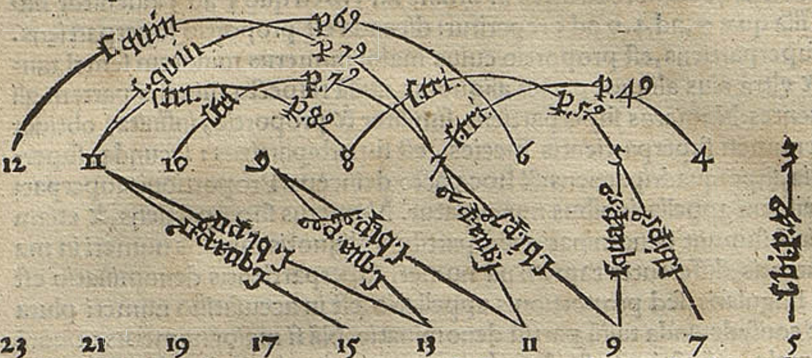
Proportio ſuperpartiens.

Nã proportio ſuperpartiens,eſt proportio cuius maior numerus minorem ſemel tantum continet,& vltrà eius aliquot partes aliquotas,nullã reſpectu minoris partem aliquotam cõponentes.Numerus ſuperpartiens,ſimiliter & proportio, infinitas obtinet ſpecies . Prima numeri ſuperpartientis ſpecies , eſt ſuperbipartiens : ſecunda, ſupertripartiens: tertia,ſuperquadripartiens:& hoc pacto deinceps.Proportionis ſuperpartientis ſpecies,eiſdem appellationibus nuncupatur. Numerus ſuperpartiens,& etiam proportio,ſpecialẽ ſumunt denominationẽ à partibus aliquotis minoris numeri in maiori numero contentis,differenter tamen: nã numeri ſuperpartientis denominatio eſt in recto numeri ſingularis,ſed proportionis appellatio,eſt in accuſatiuo numeri pluralis.Ideò ſumme conſyderanda taliũ partiũ denominatio.Nã ſi maior numerus minorẽ (cui refertur)ſemel tantũ cõtineat,& vltrà duas numeri minoris partes aliquotas,quę tertiæ denominantur:numerus ille maior ſuperbipartiens tertias dicetur:& inter ipſos numeros reperta habitudo, proportio ſuperbipartiens tertias appellabitur. Si autem maior numerus minorẽ(cui cõparatur)tantũ ſemel includat,& vltrà,duas partes aliquotas minoris,quę quintę nominãtur:numerus maior,eſt ſuperbipartiẽs quintas dicẽdus:& habitudo inter ipſos numeros reperta,proportio ſuperbipartiẽs quintas vocabitur.Qz ſi numerus maior ſemel tantũ minorẽ cõtineat, & vltrà, tres minoris numeri partes aliquotas,quæ quartæ nũcupãtur:dicetur numerus maior,ſupertripartiẽs quartas:& inter ipſos numeros inuẽta habitudo,proportio ſupertripartiẽs quartas appellabitur.Sed de his ſpeciebus ſtatim fiet ſermo.

Iſta diffinitio intelligitur de partib⁹ numeri minoris, quæ ſimul ſũptæ nõ efficiũt vnam eius partẽ aliquotã:vt duę vnitates ſimul ſũptæ nõ cõſtituũt aliquã partem ternarij,ſic tres vnitates nõ ſunt pars aliquota 7 aut 5,neq; 8 aut 4 . Vnde notandum, ſi maior contineat minorẽ, ad quẽ cõparatur,& inſuper eius aliquot partes, quę ſimul ſũptę vnã minoris partem efficiunt: numerus maior nõ ſuperpartiẽs, ſed ſuperparticularis dicẽdus eſt.atque hoc eſt inter eos diſcrimẽ ſtudioſe obſeruãdum. vt 8 ad 6 ſuperat hunc duabus vnitatibus, q̃ ſimul ſumptæ tertiã partem 6 efficiunt.vnde ſuperparticularis, epitritus,nõ ſuperpartiens dicetur 8 ad 6 relatus.

Superpartiẽtiũ gñatio.

¶Pro generatione numerorũ ſuperpartientiũ,ſimul & proportionũ,pręſupponendũ eſt hoc documentũ,quod in hac parte eſt maxime obſeruandũ:ſcilicet, Nullus numerus alteri cõparetur,inter quẽ,& ipſũ aliquis nũerus eſt pars aliquota.Nã pro regula tenendũ eſt:nullos nũeros efficere proportionẽ ſuperpartientẽ,quibus aliquis numerus eſt pars aliquota.Hoc igitur ſuppoſito:producuntur omnes numeri ſuperpartientes,pariter & proportiones,captis duabus lineis,quarũ prima ſit naturalis numerorum ſeries,à 3 incepta,& ſecunda ſit imparium numerorum linea,à 5 inchoata,& ſub priori linea ſita,ſi primus numerus inferioris lineæ,puta 5,primo ſuperioris cõparetur,ſcilicet 3:& ſecundus inferioris lineę,tertio ſuperioris referatur:& tertius inferioris,quinto ſuperioris:& conſequenter hoc pacto:ita vt numeri inferioris lineæ qui impares ſunt,imparibus ſuperioris lineę cõparentur.Deinde in ſola ſuperiori linea fiat cõparatio:& hoc ſic,cuilibet ſuperioris lineæ numero (præter q̃ primo) ille numer⁹ cõparetur,qui quartus eſt poſt ipſum. verbi gratia, 4 ſuperioris lineæ ſeptenario cõparetur,qui quartus eſt in ordine ad 4:& ad 5 octonarius referatur,qui etiã eſt quartus in ordine ad 5:ſed 9 ſenario nõ cõparetur,quãuis in ordine ſit quartus,& hoc quia numerus 3 eſt pars aliquota vtriuſq;: ipſis igitur pręter miſſis,10 ſeptenario cõparetur,qui in ordine quartus eſt: & in infinitũ creſcat iſte proceſſus.Poſtmodũ fiat cõparatio inferioris lineę ad ſuperiorẽ,à tertijs numeris incipiẽdo,puta 9 inferioris,& 5 ſuperioris,& cuncti ſequentes numeri in linea inferiori, cunctis imparibus ſequentibus in linea ſuperiori cõparentur:ita vt 9 inferioris lineæ,5 ſuperioris cõparetur,& 11 inferioris ad 7 ſuperioris referatur,& 13 ad 9.& hoc pacto cõſequenter.Deinde iterũ in ſola ſuperiori linea fiat cõparatio,à 6 quarto numero incipiendo:cui ſextus in ordine referatur, videlicet 11: poſtea ſeptenario ſextus in ordine, ſcilicet 12 cõparetur:& octonario 13.& hoc pacto deinceps.Poſtmodũ linea inferior ſuperiori cõparetur modo iã dicto:ſed cõparatio à qntis numeris incipiet, ſcilicet 13 inferioris,& 7 ſuperioris.Deinde iterũ ĩ ſola ſuperiori ſerie fiat cõparatio modo iã dicto, quę ab 8 incipiet:cui octauus nũerus in ordine puta 15 referatur:& cõſequẽter, vt ſupra dictũ eſt,fiat progreſſus.Et breuiter ſẽper quãdo in ſola ſuperiori linea fit cõparatio, ipsa incipit à numero pari, cui numerus ille debet referri, qui totus est ab illo, quota est ab vnitate denominatio illius numeri paris. Et si in infinitū tali intercapedine procedas: cunctas species numeri superpartiētis, & proportionis inuenies. Et si omnia indiuidua producta cupis habere: id facies, vtraq; lineā assignatā duplando, triplando, quadruplādo, & consequenter: si productos numeros (vt dictū est) comparaueris. Nūc autē respice (vt q̄ dicta sunt, clarius intelligere valeas) p̄setis figurę cōpositionē.



¶Ex dictis sequitur, ꝙ omnis proportio superpartiens, cuius immediata denominatio sequens ly super est par, generatur ex cōparatione inferioris lineæ ad superiorē: omnis vero proportio cuius talis denominatio est impar, producitur ex sola numerorū superioris lineæ comparatione. volo dicere omnes proportiones superbipartientes, superquadripartientes, supersextipartientes &c. ex comparatione inferioris lineæ ad superiorem (modo prius signato) produci: omnes autem proportiones supertripartientes, superquintipartientes, superseptipartientes &c. ex sola comparatione numerorum superioris lineæ modo dicto consurgunt. Corollarium.

¶Numerus superbipartiens, est numerus superpartiens semel tantum minorem continens, & duas minoris partes aliquotas, quæ nullam respectu minoris, partem aliquotam efficiunt. 15

¶Vt 5 ad 3, 7 ad 5, 9 ad 7. Nam si 5 numerus maior referatur ad 3 numerū minorem, ipse 5 relatus superbipartiens numerus dicetur: quoniam tātum semel continet minorem, & duas vltrà minoris partes aliquotas, scilicet duas vnitates: quæ nullam respectu minoris partē aliquotam efficiunt. Sed postq̄ partes illæ aliquotæ tertiæ donominantur (cum sint partes 3) ideò comparatus 5, discretiori appellatione superbipartiens tertias dicetur. Pari modo dicendum est, si 7 quinario comparetur, ipsum 7 superbipartientem numerū appellari: cum vltrà hoc ꝙ semel 5 includat, adhuc continet duas 5 partes aliquotas, nullam respectu eiusdem aliquotā efficientes. Et quia à 5 quintæ denominātur, duæ illæ partes aliquotæ: ideò termino cōtractiori numerus 7 superbipartiens quintas nominatur. Cōsimili arte est dicendū si 9 ad 7 referatur: relatū 9 numerū superbipartientē esse. Nam semel tantū 7 includit, & vltrà, duas 7 vnitates, quæ septimæ dicuntur. Quare cōparatus 9, propria nominatione superbipartiēs septimas dicetur. Quæ tamē 5 ad 3, 7 ad 5, 9 ad 7 inuenitur habitudo, proportio superbipartiens nominatur. Vnde proportio superbipartiēs, est proportio superpartiens, cuius numerus maior minorē semel tātū includit, & minoris duas partes aliquotas: nullā respectu eiusdē aliquotā efficiētes. Sed si ad discretiores appellationes recurras: inuenies ꝙ habitudo 5 ad 3, proportio superbipartiēs tertias nūcupatur: & 7 ad 5 habitudo, proportio superbipartiēs quintas dicitur: illa vero quę 9 ad 7 reperitur habitudo, proportio superbipartiēs septimas appellatur. ¶Generātur oēs numeri supbipartiētes, cūctę etiā proportiones, acceptis duabus lineis impariū numerorū: quarū vna à 3 incipiat, & superiori loco ponatur: secunda vero, 5 pro initio habeat, & sub priori locetur: si huius primus numerus, scilicet 5, primo superioris, videlicet 3, cōparetur: & secūdus secūdo, & tertius tertio &c. Deinde si vtraq; illarū linearū dupletur, & inferioris lineæ duplatæ primus numerus productus, superioris primo referatur: & secūdus secundo, & tertius tertio, & cōsequēter. Postmodū si lineę illę superiores triplētur, & producti numeri modo iā dicto cōparentur: & quadruplādo, quintuplādo, sextuplando & consequēter hoc

Proportio superbipartiēs

Superbipartiētiū gñatio.

pacto procedas:quod intendimus reperies patefactum. Exemplum.

Superbipartientes	3	5	7	9	11	13	15
	5	7	9	11	13	15	17
Superbipartientes	6	10	14	18	22	26	30
	10	14	18	22	26	30	34
Superbipartientes	9	15	21	27	33	39	45
	15	21	27	33	39	45	51
	tripli.	quinti	ſepti.	noni	vnde.	tride.	qnde.

Generale hoc documentũ habet Euclides libro 7, propoſitione 18. Si vnus numerus ĩ duos ducatur, tantus erit duorum inde productorum alter ad alterũ, quãtus duorũ multiplicatorũ alter ad alterũ. id'q; in quacũq; proportiõe ſe habeant numeri qui multiplicãtur per eundem numerũ, in eadem ſeſe habebunt qui inde producũtur.

16 Numerus ſupertripartiens, eſt numerus ſuperpartiens, qui ſemel tantum minorem includit, & tres minoris partes aliquotas, nullam reſpectu eiuſdem minoris aliquotam componentes.

Vt 7 ad 4, 8 ad 5, 10 ad 7. Nã ſi 7 quaternario cõparetur, ipſe 7 cõparatus, ſupertripartiẽs numerus dicetur: continet enim ſemel tantũ ipſum 4, & tres vltrà vnitates, partes aliquotas ipſius, quæ reſpectu 4, nullam efficiunt aliquotam: & quoniã tres illæ vnitates ſunt partes 4, ideò ab ipſo, cuius ſunt partes, quartæ denominãtur: quare numerus 7 termino magis peculiari, ſupertripartiẽs quartas eſt nominãdus. Eodẽ modo ſi 8 quinario referatur, 8 cõparatus, ſupertripartiẽs numerus dicetur: quoniã ſemel tãtũ 5 includit, & eius tres vnitates, partes aliquotas, nullã efficientes aliquotã reſpectu 5: ſed quoniã tres illę partes, quintæ appellãtur, dicendus eſt 8 nomine magis proprio ſupertripartiens quintas. Cõſimili modo dicendũ eſt ſi 10 ſeptenario cõparetur: ipſũ 10 ſupertripartientẽ numerũ eſſe: cũ 7 ſemel tantũ cõtineat, & eius tres vnitates, partes aliquotas, nullã aliquotã reſpectu 7 cõſtituentes, quæ ſeptimæ appellantur: quare numerus 10, ſupertripartiens ſeptimas, nomine diſcretiori, appellabitur. Illa vero quæ 7 ad 4, 8 ad 5, 10 ad 7 emanat habitudo, proportio ſupertripartiens exprimitur. Nam proportio ſupertripartiens, eſt proportio ſuperpartiens, cuius maior numerus minorẽ ſemel tantũ includit, & vltrà, tres minoris numeri partes aliquotas, quæ nullã reſpectu eiuſdẽ numeri aliquotã partẽ efficiũt. Et ſi magis ſingulares inquiras appellationes: inuenies q; 7 ad 4, eſt proportio ſupertripartiens quartas: & 8 ad 5, proportio ſupertripartiens quintas. 10 vero ad 7, proportio ſupertripartiens ſeptimas nuncupatur.

Proportio ſupertripartiens.

Supertripartientium generatio.

Producũtur õnes numeri ſupertripartiẽtes, ſimiliter & proportiones, acceptis duabus lineis, quarũ prima à 4 incipiat, & oẽs aſcẽdentes numeros includat: quorũ 3 nõ eſt pars aliquota: ſecũda vero linea, à 7 initietur, & infra primã ponatur, ſic vt primus ſecundæ ſub primo numero primæ locetur, & ſecundus ſub ſecũdo, & tertius ſub tertio: & hoc modo cõſequẽter: ſed qlibet inferioris lineæ nũerus ſibi correſpõdentẽ in prima dũtaxat per 3 exuperet. Et ſi hui9 ſecũdę lineę primus nũerus primo ſuperioris cõparetur, & ſecũdus ſecũdo, & tertius tertio, & cõſequẽter: deinde ſi ambę lineæ duplẽtur, & iterũ fiat cõparatio nũerorũ inferioris lineę ad nũeros ſuperioris, vt in pręcedẽti diffinito dictũ eſt: poſtmodũ ſi triplẽtur, & fiat pariter numerorũ relatio: & ſi cõſequenter quadruplando, quintuplando, ſextuplando procedas: propoſitum emanabit. Exẽplũ.

Supertripartientes	4	5	7	8	10	11	13
	7	8	10	11	13	14	16
Supertripartientes	8	10	14	16	20	22	26
	14	16	20	22	26	28	32
Supertripartientes	12	15	21	24	30	33	39
	21	24	30	33	39	42	48
	quarti	quinti.	ſepti.	octa.	deci.	vnde.	tride.

17 Numerus ſuperquadripartiens, eſt numerus ſuperpartiens, ſemel tãtum minorem includens, & quatuor minoris partes aliquotas, quę nullam reſpectu minoris partem aliquotam efficiunt.

Vt 9 ad 5, 11 ad 7, 13 ad 9. Nã ſi 9 quinario cõparetur, cõparatus 9, ſuperquadripar tiens numerus erit Nã ſemel dũtaxat 5 cõtinet,& vltrà,quatuor 5 vnitates,partes aliquotas,quæ nullã efficiũt aliquotã reſpectu 5.& illæ vnitates à 5,quintæ appellantur: quare dictus 9,ſuperquadripartiens quintas dicetur. Eadẽ via, 11 ad 7 relatus, ſuperquadripartiens numerus dicitur:cũ ipſum ſemel tantũ,& eius quatuor vnitates includat:quæ nullã reſpectu 7,partẽ aliquotã cõponunt:& quia ſeptenarij partes ſunt, ideò ſeptimę nuncupãtur:quare alia denominatione,cõparatus 11,ſuperquadripartiẽs ſeptimas dicetur. Cõſimili modo 13 ad 9 cõparatus,ſuperquadripartiẽs appellatur:complectitur autẽ ipſum ſemel tantũ,& quatuor vltrà vnitates,partes aliquotas 9,quæ nullã aliquotã reſpectu eiuſdẽ cõponũt:& nonę denominãtur à 9,cui9 partes ſunt aliquotę. quare cõparatus 13,diſcretiori appellatione ſuperquadripartiẽs nonas dicetur. Sed illa quę 9 ad 5,11 ad 7,13 ad 9 inuenitur habitudo,proportio ſuperquadripartiẽs nũcupatur. Nã proportio ſuperquadripartiẽs,eſt proportio ſuperpartiẽs: cuius maior numerus ſemel tantũ minorẽ intercipit, & quatuor minoris partes aliquotas,quæ nullã reddũt aliquotã reſpectu eiuſdẽ minoris. Q𝔷 ſi magis proprias perquiras nominationes, inuenies ꝙ habitudo 9 ad 5,proportio ſuperquadripartiẽs quintas vocatur:& habitudo 11 ad 7,proportio ſuperquadripartiẽs ſeptimas dicitur:etiã habitudo 13 ad 9 reperta,proportio ſuperquadripartiẽs nonas nominatur.

Proportio ſuperquadripartiens.

¶Profluũt cũcti numeri ſuperquadripartiẽtes,quæq; pariter proportiones,duab9 numerorũ lineis acceptis:quarũ prior à 5 inchoetur,& infinitos numeros includat,ſe cõtinua progreſſione 2 excedẽtes:ſecũda vero à 9 incipiat,& infinitos numeros etiã contineat, ſe 2 exuperãtes,ſi huius primus primo prioris cõparetur,& ſecũdus ſecundo,& tertius tertio,& cõſequẽter:deinde ſi vtraq; iſtarũ linearũ dupletur,& prouenientiũ linearũ numeri eo pacto referãtur, vt primus inferioris primo ſuperioris lineæ numero, & ſecũdus ſecũdo, & tertius tertio,& conſequenter cõparenter:poſtmodũ ſi duæ illæ priores lineæ triplẽtur,& fiat numerorũ conſimilis cõparatio:& conſequenter ſi eaſdẽ quadruplãdo,quintuplãdo,ſextuplando,& hoc pacto deinceps,procedas:propoſitũ inuenies patefactũ. Exemplum.

Superq̃partiẽtium generatio.

Superquadripartientes	5	7	9	11	13	15	17
	9	11	13	15	17	19	21
Superquadripartientes	10	14	18	22	26	30	34
	18	22	26	30	34	38	42
Superquadripartientes	15	21	27	33	39	45	51
	27	33	39	35	51	57	63
	quinti.	ſepti.	noni.	vnde.	tride.	de.qn.	d̃.ſep.

Cæteræ ſuperpartientes ſpecies,ſcilicet ſuperquintipartiẽs, ſuperſextipartiens, & quæ ſequuntur,ex præhabitis conſtant.

¶Numerus multiplex ſuperparticularis,eſt numerus maior qui ad mi- 18
norem relatus,eũ pluries continet,& aliquã minoris partem aliquotã.

¶Vt 5 ad 2,7 ad 3,10 ad 3. Nã 5,bis continet 2,& vltrà,vnitatẽ,quę 2 eſt pars aliquota,ſcilicet medietas. Pari modo 7,plus q̃ ſemel continet 3,& inſuper vnitatẽ,quę 3 eſt pars aliquota. Et 10 ad 3 relatus,ipſũ ter cõtinet:& vltrà,vnitatẽ partẽ aliquotã. Quare deducitur,quẽlibet illorũ maiorũ numerorũ multiplicem ſuperparticularẽ eſſe. Sed habitudo 5 ad 2,7 ad 3,10 ad 3 inuenta, proportio multiplex ſuperparticularis nuncupatur. Vnde proportio multiplex ſuperparticularis , eſt proportio cuius maior numerus minorem pluries continet : & vltra, aliquam minoris partem aliquotam. Numerus multiplex ſuperparticularis,ſicut & proportio multiplex ſuperparticularis,infinitas continet ſpecies. Prima numeri multiplicis ſpecies,eſt duplus ſuperparticularis: ſecunda,triplus ſuperparticularis:tertia,quadruplus ſuperparticularis,& cõſequenter. Proportionis autẽ multiplicis ſuperparticularis ſpecies, eiſdẽ fere appellationibus nominãtur:nã prima ſpecies,eſt dupla ſuperparticularis:ſecũda,tripla ſuperparticularis: & tertia,quadrupla ſuperparticularis: & hoc pacto deinceps. Numerus multiplex ſuperparticularis,ex numero multiplici,&ſuperparticulari conſurgit:ꝙ enim pluries minorem contineat,à multiplici numero habet: & inſuper ꝙ aliquam aliquotam partem

Proportio multiplex ſuperparticularis.

includat, numerus superparticularis permittit. Multiplex superparticularis numerus, & proportio superparticularis, peculiares sibi vendicāt appellationes à vicium multitudine, quibus minorem maior numerus continet, & à minoris numeri parte aliquota in maiori numero contenta, hac particula, sesqui, interserta. Nam si maior numerus minorem, cui comparatur, bis includat, & vltrà, ipsius minoris medietatem, duplus sesquialter dicetur: & reperta inter ipsos habitudo, proportio dupla sesquialtera appellabitur. Quòd si numerus maior bis minorem includat, & tertiam ipsius partem, duplus sesquitertius nominabitur: & inter ipsos inuenta habitudo, proportio dupla sesquitertia exprimetur. Si vero maior numerus minorem ter contineat, & quartam adhuc minoris partem aliquotam, triplus sesquiquartus nuncupabitur: & habitudo inter ipsos reperta, proportio tripla sesquiquarta denominabitur. De his autem multiplicium superparticularium speciebus, discretior in sequētibus fiet sermo. ¶Pro generatione omnium numerorum multiplicium superparticularium, omnium pariter proportionū, accipiatur tres lineæ: quarum prima sit naturalis numerorum series, à 2 inchoata, & supremo loco sita: secunda linea imparium sit numerorum, & à 5 incipiat, & sub priori situetur, sic vt primus numerus huius sub primo superioris, & secundus sub secundo, & tertius sub tertio, & consequenter ponantur: deinde alia linea in ordine tertia, à 5 sumat initium, & sit etiam imparium numerorum, & directe pendula in deorsum procedat, ita vt in 5 secunda, & tertia lineæ communicent, atque concurrant, & ex ambabus angulus rectus efficiatur, cuius conus in 5 inuenitur. consequenter infinitæ lineæ eo pacto ducantur, ita vt à secundo numero tertiæ lineæ incipiendo qui est 7, in dextrum omnes numeri accipiantur se ternario excedentes, scilicet 10, 13, 16, & consequenter: postmodum à tertio numero tertiæ lineæ videlicet 9, incipias, cunctos numeros accipiendo qui se quaternario vincunt, videlicet 13, 17, 21, & cæteros consequenter: deinde à quarto numero scilicet 11, ipsius tertiæ lineæ, incipies omnes numeros se quinario exuperantes, colligendo videlicet 16, 21, 26, & cæteros: & si eo pacto consequenter procedas, infinitas lineas generando, & eas omnes lineas quæ in dextrum protrahuntur, primæ superiori loco lineæ affixę comparaueris, ita vt primi illarum linearum numeri primo supremæ lineæ comparentur, & secūdi secundo, & tertij tertio, & ita de alijs: cunctas species multiplicium superparticulariū numerorū, pariter & proportionū productas inuenies. Sed vt quę dicta sunt, clarius intelligere valeas: subiectā formulā cōsyderabis.

Multiplicium superparticularium gñatio.

Et si omnia indiuidua velles producere, id facies si & supremam, & omnes inferiores lineas duplaueris, postmodū triplaueris, & quadruplaueris, & consequenter: comparando semper numeros productos inferiorū linearum, productis numeris supremæ lineæ.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
11	16	21	26	31	36	41	46	51	56
13	19	25	31	37	43	49	55	61	67
15	22	29	36	43	50	57	64	71	78
17	25	33	41	49	57	65	73	81	89
19	28	37	46	55	64	73	82	91	100

19 ¶Numerus duplus superparticularis, est numerus multiplex superparticularis, bis minorem numerum continens, & aliquam vltrà eiusdem partem aliquotam.

¶Vt 5 ad 2, 7 ad 3, 9 ad 4. Nam 5, bis includit 2, & adhuc vnitatem, 2 partem aliquotam: ideò 5, dicendus est numerus duplus superparticularis: sed quoniam vnitas illa, quam vltrà continet, est minoris numeri medietas: numerus ipse 5, termino discretiori duplus sesquimedius, siue duplus sesquialter, aut sesquisecūdus appellabitur. Eodem modo 7 ad 3 cōparatus, ipsum bis includit, & ipsius tertiam partem, quare 7, duplus superparticularis est numerus: qui propriori appellatiōe, duplus sesquitertius nū-

cupatur. Pari via 9 ad 4 relatus, ipsum bis intercipit, & ipsius vltrà quartã partẽ: dicẽ-
dus igitur est duplus superparticularis, siue duplus sesquiquartus: & hoc termino ma-
gis proprio. Sed 5 ad 2, 7 ad 3, 9 ad 4 habitudo, proportio dupla superparticularis di-
citur. Nã proportio dupla superparticularis, est proportio cuius numerus maior mino
rem bis intercipit, & minoris adhuc aliquã partem aliquotam. Discretius tamen loquẽ
do, dicas inter 5 & 2, duplam sesquialteram inueniri proportionem: inter 7 & 3, duplã
sesquitertiam: & inter 9 & 4, duplam sesquiquartam, & consequenter. ⸿Pullulant om
nes dupli superparticulares, cũctæ etiam proportiones, acceptis duabus numerorum
lineis, quarum altera sit naturalis numerorum series, à 2 inchoata, & superiori loco si-
ta: altera vero sit naturalis imparium numerorum linea, à 5 accepta, & inferiori parte
affixa, si huius cuncti numeri sibi correspondentibus in superiori comparẽtur: deinde si
illarum vtraq; dupletur, & productorum cõsimilis fiat relatio: postmodũ si tripletur, &
fiat pariter productorum comparatio: & si quadruplando, quintuplando, sextuplando,
& consequenter procedas: quod quærebas, inuenies demonstratum. Exemplum.

Propor-tio dupla superpar ticularis. Duplorũ superpar ticulariũ gñatio.

Dupli superparticulares	2	3	4	5	6	7	8
	5	7	9	11	13	15	17
Dupli superparticulares	4	6	8	10	12	14	16
	10	14	18	22	26	30	34
Dupli superparticulares	6	9	12	15	18	21	24
	15	21	27	33	39	45	51
	sesqse.	sesqter	sesqqr	sesqquin	sesqsex	sesqsep	s.q 8

⸿Numerus triplus superparticularis, est numerus multiplex super- 20
particularis, qui minorem numerum ter includit, & eius insuper ali-
quam partem aliquotam.

⸿Vt 7 ad 2, 10 ad 3, 13 ad 4. Septenarius enim ad 2 comparatus, ipsum ter includit,
& vltrà, vnitatem continet, quæ 2 est medietas: ideo ipse 7 comparatus 2, triplus su-
perparticularis dicetur, & clariori appellatione, triplus sesquialter nominabitur. Etiam
10 ad 3 relatus, triplus superparticularis pari ratione vocetur. Continet autem ter 3, &
tertiã adhuc 3 partem, puta vnitatem: quare 10 comparatus 3, termino specialiori, tri-
plus sesquitertius appellabitur. Necnon 13 qui ad 4 refertur, triplus superparticularis,
siue triplus sesquiquartus censebitur. Et habitudo 7 ad 2, 10 ad 3, 13 ad 4, proportio
tripla superparticularis exprimetur. Vnde proportio tripla superparticularis, est pro-
portio multiplex superparticularis, cuius maior numerus ter minorem includit & ali-
quam minoris partem aliquotam. Proprius tamen dicendum est 7 ad 2, triplã sesqui-
alterã inueniri proportionẽ: & 10 ad 3, triplã sesquitertiã: & 13 ad 4, triplã sesquiquartã:
& hoc pacto deinceps. ⸿Cõsurgunt omnes tripli superparticulares, & numeri, & pro-
portiones, duabus numerorum lineis apprehensis: quarũ alera sit naturalis numerorũ
series, à 2 incepta: altera vero à 7 incipiat, & infinitos intercipiat numeros, se cõtinua
progressione, ternario exuperantes: si huius cuncti numeri, cunctis superioris compa-
rentur, ita vt primus primo, secundus secundo, & tertius tertio, & consequenter: dein-
de illis duabus lineis duplatis, si producti pariter referantur: & eisdem lineis triplatis, si
producti comparentur: & si hoc pacto quadruplando, quintuplando, sextuplando, &
productos numeros cõparando procedas, propositũ inuenies declaratũ. Exemplũ.

Propor-tio tripla superpar ticularis.

Triplorũ superpar ticulariũ creatio.

Tripli superparticulares	2	3	4	5	6	7	8
	7	10	13	16	19	22	25
Tripli superparticulares	4	6	8	10	12	14	16
	14	20	26	32	38	44	50
Tripli superparticulares	6	9	12	15	18	21	24
	21	30	39	48	57	66	75
	s.quise	s.quiter	s.qquar	s.quiqn	s.quisex	s.quisep	s.qui 8

21 ¶Numerus quadruplus superparticularis, est numerus multiplex superparticularis, quater minorem numerum intercipiens, & eius aliquā partem aliquotam.

¶Vt 9 ad 2, 13 ad 3, 17 ad 4. Si autem 9 binario comparetur, relatus 9 quadruplus superparticularis nuncupatur: nam 2 quater intercipit, & vltrà, continet vnitatem, quæ 2 est medietas: quare dictus 9 proprie quadruplus sesquialter dicetur. Eodem modo si 13 ternario referatur, quadruplus superparticularis, siue quadruplus sesquitertius appellabitur: cum 3 quater includat, & vltrà, vnitatem, tertiam 3 partem. Simili arte dicendum est si 17 quaternario comparetur, quadruplum superparticularem esse, siue quadruplum sesquiquartum nuncupari. Sed quæ 9 ad 2, 13 ad 3, 17 ad 4 inuenitur habitudo, proportio quadrupla superparticularis vocetur. Nam proportio quadrupla superparticularis, est proportio multiplex superparticularis, cuius numerus maior minorem quater cōtinet, & minoris aliquā partem aliquotā. Rectius tamen loquendo dicēdum est, habitudinē inter 9 & 2, proportionē quadruplā sesquialterā esse: & 13 ad 3, quadruplā sesquitertiā: & 17 ad 4, quadruplā sesquiquartā. & consequenter. ¶Producuntur oēs numeri quadrupli superparticulares, omnes pariter proportiones, duabus numerorū lineis acceptis: quarū vna sit naturalis numerorū series, à 2 inchoata, altera à 9 sumat initiū, & infinitos numeros includat, se cōtinua progressione quaternario excedentes: si huius omnes numeri cūctis superioris lineæ numeris cōparentur, primus primo, secūdus secūdo, & tertius tertio, & cōsequenter: postmodū si ambę lineę dupletur, & productorū fiat cōsimilis cōparatio: deinde si tripletur, & producti numeri cōparentur: & si cōsequenter quadruplādo, quintuplādo, sextuplando, & modo dicto producti numeri comparentur: quod quærebamus, patefactum inueniemus. Exemplum.

Proportio quadrupla superparticularis.

Quadruplorū superparticularium gñatio.

Quadrupli superparticulares	2	3	4	5	6	7	8
	9	13	17	21	25	29	33
Quadrupli superparticulares	4	6	8	10	12	14	16
	18	26	34	42	50	58	66
Quadrupli superparticulares	6	9	12	15	18	21	24
	27	39	51	63	75	87	99
	s.qui.2	s.qui.3	s.qui.4	s.qui.5	s.qui.6	sesq.7	s.qui.8

Omnes aliæ quæ sequūtur species multiplices superparticulares, videlicet quintuplus superparticularis, sextuplus superparticularis, septuplus superparticularis, & consequenter, ex prædictis facile possunt intelligi.

22 ¶Numerus multiplex superpartiēs, est numerus maior minori numero cōparatus, quē pluries cōtinet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, nullam respectu minoris numeri partem aliquotam componētes.

¶Vt 8 ad 3, 11 ad 4, 11 ad 3. Nam 8, bis continet 3 & insuper duas vnitates, partes aliquotas 3, nullam partem aliquotam respectu 3 efficientes. Etiam 11 bis includit 4, & vltrà, tres vnitates, partes aliquotas 4, quæ nullam constituunt respectu 4 partem aliquotam. Pari modo 11, ter continet 3, & adhuc duas ternarij partes aliquotas, nullam componentes respectu 3 partem aliquotam. Sed illa quæ 8 ad 3, 11 ad 4, 11 ad 3 inuenitur habitudo, proportio multiplex superpartiens est dicenda. Nam proportio multiplex superpartiens, est proportio cuius maior numerus minorem pluries continet, & aliquot insuper minoris numeri partes aliquotas. nullam respectu eiusdē minoris partem aliquotā efficientes. ¶Numerus multiplex superpartiens, & proportio multiplex superpartiēs, infinitas species intercipiūt. Prima numeri multiplicis superpartiētis species, est duplus superpartiēs: secūda, triplus superpartiēs: tertia, quadruplus superpartiēs: & cōsequēter. Species autē proportionis multiplicis superpartiētis, eisdē nominibus appellantur, variata terminatione, us in a. Prima naq; species est dupla, superpartiēs: secūda, tripla superpartiēs: tertia, quadrupla superpartiēs: & hoc pacto deinceps.

Proportio multiplex superpartiens.

Numerus multiplex superpartiēs, ex numero multiplici, & superpartienti emanat. Nē-
pe ꝙ pluries minorem includat, à numero multiplici habet: & ꝙ vltrà, aliquot conti-
neat partes aliquotas, nullam respectu minoris aliquotam componentes, à numero su-
perpartienti consurgit. Numerus multiplex superpartiens, similiter & proportio, alias
discretiores adhuc habent nuncupationes: & hoc à vicium multitudine, quibus nu-
merus maior minorem intercipit: & à numero partium aliquotarum, quas vltrà ma-
ior numerus continet, quæ respectu minoris nullam aliquotam partem efficiunt. Nā
si numerus maior minorem bis includat, & minoris numeri duas partes aliquotas: vi-
dendum est an illæ sint tertiæ, quintæ, vel septimæ, & consequenter. Si primum detur,
dicendus est numerus ille maior, duplus superbipartiens tertias: & habitudo inter il-
los numeros reperta, proportio dupla superbipartiens tertias nuncupabitur. Si ve-
ro partes illæ aliquotæ, quintę denominantur, duplus superbipartiens quintas vocabi-
tur: & inter illos habitudo, proportio dupla superbipartiens quintas appellabitur. Qꝫ
si partes illæ aliquotæ, septimæ dicantur, duplus superbipartiens septimas denomina-
bitur: & inter tales numeros habitudo, proportio dupla superbipartiens septimas ex-
primetur. Sed de his omnibus speciebus, clarius in sequentibus fiet sermo. ¶Pro ge-
neratione multiplicium superpartientium, nō opus est longa vti ambage. Nam si triū
infrapositorum diffinitorum productiones intelligas, facile admodum ex eis vnam cō-
prehendere potes communem productionem, pro omnibus multiplicibus superpar-
tientibus numeris, & proportionibus.

¶Numerus duplus superpartiens, est numerus multiplex superparti- 23
ens, qui bis minorem numerum continet, & aliquot minoris partes ali-
quotas, nullam respectu eiusdem minoris aliquotam componentes.

¶Vt 8 ad 3, 11 ad 4, 12 ad 5. Si enim 8 ternario comparetur, duplus superpartiens ap-
pellabitur: nam 8, bis continet 3 & insuper 2, qui est duæ partes 3 aliquotæ, nullā respe-
ctu 3 partem aliquotam reddentes. Et quoniam partes illæ duæ sunt, & tertiæ denomi-
nantur: ideo discretiori appellatione numerus 8, duplus superbipartiēs tertias dicetur.
Pari modo 11 ad 4 comparatus, duplus superpartiens censebitur: nam bis 4 interci-
pit, & vltrà, tres vnitates, partes aliquotas 4 quæ nullam respectu ipsius 4 constituūt
partem aliquotam. sed quoniam tres sunt illæ partes aliquotæ, & à 4 quartę nuncupā-
tur: ideo 11 clariori nuncupatione, duplus supertripartiēs quartas vocabitur. Etiam 12
ad 5 relatus, duplus superpartiens nuncupabitur: includit enim bis 5, & adhuc duas
5 partes aliquotas, nullam efficientes aliquotam respectu 5. & quia duæ sunt, & quin-
tæ dicuntur, dicetur 12 termino magis proprio, duplus superbipartiens quintas. Habi-
tudo autē 8 ad 3, 11 ad 4, 12 ad 5 reperta, proportio dupla superpartiens exprimetur.
Vnde proportio dupla superpartiens, est proportio multiplex superpartiens, cuius nu- Proportio dupla superpartiens.
merus maior bis minorem includit, & aliquot insuper minoris numeri partes aliquo-
tas, nullam respectu eiusdem minoris aliquotam efficiētes. Et si habitudinibus datorū
numerorum discretiores petas assignari proportiones: dico ꝙ 8 ad 3 habitudo, est pro-
portio dupla superbipartiēs tertias: & 11 ad 4, dupla supertripartiēs quartas: & 12 ad 5,
dupla superbipartiens quintas. ¶Emanant omnes dupli superpartiētes, pariter & pro- Duplorū superpartientium creatio.
portiones, infinitis numerorum lineis acceptis, quarum prima à 3 incipiat, cunctos se-
quentes impares includendo: secunda linea à 4 inchoetur, & omnes sequentes nume-
ros, & pares, & impares intercipiat, quorum ternarius nō est pars aliquota: tertia linea
à 5 sumat initium, & omnes sequentes impares possideat: quarta vero linea à 6 con-
surgat, & omnes sequentes numeros, tam pares, q̄ impares contineat, quorū 5 non est
pars aliquota. Et consequēter cōsimili intercapedine: sic videlicet ꝙ prima, tertia, quin-
ta lineæ, & sequentes, quę à numero impari incipiunt, solos impares numeros cōpre-
hendant: secunda vero linea, quarta, sexta, & cæteræ, quæ à pari numero prosiliunt, o-
mnes sequentes numeros, tam pares, q̄ impares sibi vendicent. Hoc seruato documē-
to, vt prima linearum, quæ à numero pari incipit, nullum numerum includat, cuius 3
sit pars aliquota: & secunda illarū linearum nullum pariter contineat numerum, cuius

quinarius sit pars aliquota:& tertia nullũ etiam numerũ possideat, cuius 7 sit pars aliquota:& ita de alijs per numeros impares procedẽdo. Deinde accipiatur naturalis numerorũ series à 2 incepta,& deorsum in infinitũ procedẽs:sic vt primus eius numerus, scilicet 2, inter primã & secundã lineam ponatur:& secundus numerus, inter secundã & tertiam:& tertius,inter tertiam & quartam:& hoc pacto deinceps. Postmodũ quælibet illarũ infinitarum linearũ dupletur,& sub qualibet illarũ sua duplata linea ponatur: quo facto cuilibet numero lineæ duplatæ,2 primus numerus lineæ descendẽtis addatur: & cuilibet numero secundæ duplatæ lineæ,3 secundus numerus lineæ descendentis addatur:& cuilibet numero tertiæ lineæ duplatæ,4 tertius deorsum euntis lineæ addatur: & consequenter. Deinde prima linea duplata cum sua additione,primę supremæ lineæ, quæ duplabatur,comparetur:sic vt primus numerus primo,& secũdus secundo,& tertius tertio referatur:& consequenter. postea secunda linea duplata cum sua additione, secundæ lineæ quæ duplabatur, etiam cõparetur:postmodum tertia duplata, cum sua additione,tertiæ quæ duplabatur referatur:& si hoc pacto in cæteris feceris,omnes species duplorum superpartientium,& proportionum inuenies procreatas. Nam in prima linearũ comparatione,primos duplos superbipartientes reperies:primas etiam proportiones duplas superbipartiẽtes (voco primos duplos superbipartientes,illos qui in minimis numeris reperiuntur: tales etiam dicuntur primæ proportiones duplæ superbipartientes) in secunda vero linearum comparatione,primos duplos supertripartientes inuenire est,similiter & proportiones:& in tertia linearum relatione,primos duplos superquadripartientes,& primas similiter proportiones inuenies procreatas:& consequẽter de alijs. Pro quibus omnibus cognoscendis,subiectam respice formam.

Prima linea		3	5	7	9	11	13	15
Dupli superbipartientes	2	8	12	16	20	24	28	32
		tertij	quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	deci.q.
Secunda linea		4	5	7	8	10	11	13
Dupli supertripartientes	3	11	13	17	19	23	25	29
		quarti	quinti	septi.	octa.	deci.	vnde.	tride.
Tertia linea		5	7	9	11	13	15	17
Dupli superq̃dripartiẽtes	4	14	18	22	26	30	34	38
		quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de. qui.	de.sep.

Et si indiuidua omnia duplicium superpartientium cognoscere velles:opus est omnes illas lineas duples,triples,quadruples,& consequenter,semper singula singulis referendo,vt sæpe in generatione præcedentium numerorum ostensum est.

24 ¶Numerus triplus superpartiens,est numerus multiplex superpartiens,ter tantũ minorem includens,& aliquot minoris partes aliquotas, nullam respectu eiusdem minoris aliquotam efficiens.

¶Vt 11 ad 3,15 ad 4,17 ad 5. Nam si 11 ad 3 comparetur,triplus superpartiens appellatur:cum 3 ter includat,& duas vltrà,vnitates,partes aliquotas 3, nullam aliquotam respectu 3 componentes: quæ à 3, cuius partes aliquotæ sunt, tertiæ denominantur: ideo 11,alia magis propria nuncupatione,triplus superbipartiens tertias denominabitur. Eadem via 15 ad 4 relatus,triplus superpartiens dicetur:sed quoniam tres illæ vnitates, quas vltrà continet, à 4,quartæ nominantur: discretiori appellatione, datus 15,triplus supertripartiens quartas exprimetur. Dicendum est eodem modo 17 ad 5 comparatum,triplum superpartientem esse,siue triplum superbipartientem quintas, & hoc termino magis conuenienti. Sed 11 ad 3,15 ad 4,17 ad 5 inuenta habitudo,proportio tripla superpartiens nũcupabitur. Nam proportio tripla superpartiens,est proportio multiplex superpartiens,cuius numerus maior ter minorem solum intercipit, & aliquot vltrà minoris numeri partes aliquotas, nullam aliquotam respectu eiusdem minoris reddentes. Possunt autem datorum numerorum habitudinibus singulariores assignari proportiones:ita vt 11 ad 3 habitudo,est proportio tripla superbipartiẽs ter-

Proportio tripla superpartiens.

tias:& 15 ad 4 habitudo, proportio tripla supertripartiens quartas erit: etiam 17 ad 5 habitudo, proportio tripla superbipartiens quintas vocabitur. ℭGeneratio triplorum superpartientium,& proportionum, eadem est cum præcedentis diffiniti productione: hoc solo dempto, quòd numeri illi infiniti primo accepti, qui ibidem duplabantur, hic debent triplari. Sufficiat igitur præsentis elementorum contextus, pro talium numerorum educatione intelligenda.

Triplorũ superpartientium gñatio.

Prima linea		3	5	7	9	11	13	15
Tripli superbipartientes	2	11	17	23	29	35	41	47
		tertij	quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.
Secunda linea		4	5	7	8	10	11	13
Tripli supertripartientes	3	15	18	24	27	33	36	42
		quarti	quinti	septi.	octa.	deci.	vnde.	tride.
Tertia linea		5	7	9	11	13	15	17
Tripli supquadripartientes	4	19	25	31	37	43	49	55
		quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.	de.sep.

ℭNumerus quadruplus superpartiẽs, est nũerus multiplex superpartiẽs, quater dũtaxat minorẽ intercipiẽs, & aliquot insuper minoris partes aliquotas, nullã respectu eiusdẽ minoris partẽ aliquotã cõstituẽtes. 25

ℭVt 14 ad 3, 19 ad 4, 22 ad 5. Nempe si 14 ternario comparetur, quadruplus superpartiens vocabitur: cũ quater ipsum 3 possideat, & duas eiusdem 3 tertias, que nullam respectu eiusdem componunt partem aliquotam: & quoniam duæ sunt, & tertiæ nominantur: dicatur 14, nomine magis decenti quadruplus superbipartiens tertias. Consimili arte est dicendum 19 ad 4 relatum, quadruplum superpartientem: ipsum enim 4 quater continet, & vltrà, tres quartas, quæ nullam respectu 4, aliquotam partem efficiũt: quare dictus nouemdenarius, quadruplus supertripartiẽs quartas dicetur: & hoc, vocabulo conuenientiori. Eodem modo 22 ad 5 comparatus, quadruplus superpartiens nũcupatur: includit enim quater 5, & vltrà, duas quintas, partes aliquotas 5, quæ nullam respectu 5, aliquotam partem componunt: & quia duæ, & quintæ denominantur, datus 22, termino magis peculiari, quadruplus superbipartiens quintas vocatur. Habitudo autem 14 ad 3, 19 ad 4, 22 ad 5, proportio quadrupla superpartiẽs exprimitur. Nam proportio quadrupla superpartiens, est proportio multiplex superpartiens, cuius maior numerus quater minorem possidet, & aliquot vltrà minoris partes aliquotas, nullam aliquotam respectu eiusdem minoris cõstituentes. Et si habitudinibus in dictis numeris repertis, proportiones decentiores, seu speciaIiores cupis assignare: dicas 14 ad 3 habitudinem, proportionem quadruplam supertripartientem tertias esse: & 19 ad 4, quadruplam supertripartientem quartas: & 22 ad 5, quadruplam superbipartientem quintas appellari. ℭProdeunt cuncti quadrupli superpartientes, quæque pariter proportiones, eisdem arte & modo in duobus præcedentibus diffinitis signatis: hac sola via excepta, quòd infinitæ illæ numerorum lineæ, quæ per generationem duplorum superpartientiũ primo sumebantur, debent hic quadruplari, vbi illic duplabantur. Quare hanc solam subiectam formam tenebis pro eorum productione capessanda.

Proportio quadrupla superpartiens.

Quadruplorũ superpartientiũ generatio.

Prima linea		3	5	7	9	11	13	15
Quadrupli supbipartiẽtes	2	14	22	30	38	46	54	62
		tertij	quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.
Secunda linea		4	5	7	8	10	11	13
Quadrupli suptripartiẽtes	3	19	23	31	35	43	47	55
		quarti	quinti	septi.	octa.	deci.	vnde.	tride.
Tertia linea		5	7	9	11	13	15	17
Quadrupli supq̃driptiẽtes	4	24	32	40	48	56	64	72
		quinti	septi.	noni	vnde.	tride.	de.qui.	de.sep.

Cæteræ quæ sequuntur species, vtpote quintuplus superpartiens, sextuplus superpartiens, septuplus superpartiens, & cõsequenter, ex iam dictis facile constant. ¶Notandũ præterea in hac parte est, quemadmodũ maior inæqualitas in quinq; vniuersalia genera scinditur, in multiplicem, superparticularẽ, superpartientẽ, multiplicem superparticularem, multiplicem superpartientẽ (de quibus abunde discussum est à 1 diffinitio, ad 25 vsq; inclusiue) eodẽ modo minor inæqualitas in quinq; etiam genera secari potest: quæ à præcedentibus, hac sola particula, sub, differentiã sumũt: & sunt submultiplex, subsuperparticularis, subsuperpartiens, submultiplex superparticularis, submultiplex superpartiens. Nempe dictũ est binarium vnitati comparatũ, multiplicem & duplum esse: & habitudinem 2 ad 1 proportionẽ, multiplicẽ, atq; duplam nuncupari. Ita dicendum est si vnitas binario comparetur, ipsam vnitatem, submultiplicem, atq; subduplam appellari. Dicendũ est pari modo 3 binario comparatũ, superparticularem, & sesquialterum numerũ esse, & habitudinem 3 ad 2, proportionẽ superparticularem, & sesquialterã nominari. Ita asserendum est, si 2 ternario cõparetur, ipsum relatum binariũ, subsuperparticularem, & subsesquialterum numerum esse: & 2 ad 3 habitudinẽ, proportionem subsuperparticularẽ, pariter & subsesquialterã exprimi. Et de alijs hoc modo. ¶Nunc autem pro huius tractatus complemẽto, quinq; vniuersales regulas annectemus: quibus expedite primos numeros proportionales in omni genere proportionum, imò in omni proportionũ indiuiduo poteris inuenire. Voco primos terminos, siue primos numeros proportionales, eos numeros qui in tali proportione sunt minimi, vt in dupla, 2 & 1: in tripla, 3 & 1: in sesquialtera, 3 & 2: & de cæteris pari modo. Intellige semper omnia quæ in diffinitis huius artis dico, & in ipsorum declaratione, secundũ subiectã materiã. Nam in irrationabilibus proportionibus (de quibus nõ arithmeticus, sed potius geometra cõsyderat) primi numeri non sunt signãdi, cũ in numeris nulla talis proportio inueniatur.

Aduerte

Nota pro sequentibus regulis.

REGVLAE.

1 ¶Omnis proportio multiplex, inter suam denominationem pro vno termino, & monadem pro altero, inuenitur.

¶Nempe omnis mũdi proportio aliquam denominationem sortitur: quare vt multiplex omnis denominationem habeat, necessario sequitur. Nam proportio dupla, quæ inter multiplices est prima, à dualitate, seu à binario sumit appellationẽ, & tripla à ternario, & quadrupla à quaternario, & hoc pacto consequenter. Si igitur quispiam ex te petat primos dari terminos, siue primos numeros inter quos proportio dupla habeatur: id facies expedite, si pro termino priori denominationem duplæ recipias, vtpote binarium, & pro altero vnitatem: nam 2 ad 1, talis est proportio. Et si triplæ proportionis primi termini petantur: 3 pro vno termino, & monadem pro altero significabis. Si quadruplæ proportionis primi numeri postulẽtur: 4 & 1, offeres petenti. Et de reliquis pari modo. Quòd si secundi, tertij, quarti've, aut altiores termini in aliqua multiplici proportione petantur: id facies per ductionem primorum terminorum. Verbi gratia, si quærantur secundi termini, inter quos proportio dupla reperitur: eos facile significabis, si primos terminos duples: dabis igitur 4. & hoc pro vno termino, & pro altero dualitatem. Et si tertij termini petantur: primos terminos triplabis, & consurgentes inde numeros, vtpote 6 & 3, petenti significabis. Et in cęteris quadruplando, quintuplando, sextuplando, & consequenter procedere necessum est, si petantur.

2 ¶Omnis proportio superparticularis, inter numerum statim sequentem in linea naturali eius denominationem, pro vno termino, & eandem pro altero reperitur.

¶Si cognoscere velles, aut aliquis ex te petat, primos terminos inter quos proportio sesquialtera, vel sesquitertia, vel sesquiquarta, vel aliqua alia huius generis inuenitur: debes hoc pacto procedere. In primis consydera denominationẽ petitæ proportionis, hoc est numerum à quo talis proportio denominatur, vel sanius loquendo, numerũ in tali proportione facile intellectum: consyderabis deinde illum numerũ, qui statim in linea naturali eum sequitur, pro termino priori proportionis accipias, & priorē numerū pro altero posteriori termino signabis. Exēplum. In sesquialtera proportione denominatio, siue numerus facile intellectus, est binarius: & 3, est ille numerus qui statim in naturali numerorū serie 2 sequitur: dabis igitur 3 pro termino priori, & 2 pro altero posteriori: nam 3 ad 2, est proportio sesquialtera: & illi signati numeri dicuntur primi in proportione sesquialtera. Eodem modo in proportione sesquitertia est dicendum: nam numerus facile intellectus in illa, est 3, & qui statim in linea naturali eum sequitur, est 4: signabis igitur 4, priorem terminum, & ternarium posteriorem, inter quos proportio sesquitertia inuenitur. Q̄ si in proportione sesquiquarta primos terminos cupis inuenire: faciundū est eodem modo: numerus enim facile intellectus in illa proportione, est 4: & numerus qui statim in ordine naturali 4 sequitur, est 5: dabis igitur 5 & 4 primos terminos seu numeros, inter quos proportio sesquiquarta habetur: & hoc pacto deinceps.

¶Ex hac regula sequitur, nullam proportionē superparticularem posse inueniri in numeris imparibus: sed necesse est alterū terminorum parem, alterū vero imparem esse. Corollarium.

¶Omnis proportio superpartiens, inter compositum ex duabus suis denominationibus pro vno termino, & suam posteriorem denominationem pro altero consurgit. 3

¶Si ex te petat aliquis, aut tu ipse cognoscere velis primos numeros, inter quos aliqua proportio superpartiens inuenitur, colliges in primis petitæ proportionis denominationes, vel (vt melius loquar) duos in tali proportione numeros facile intellectos coniunges, & hoc pro termino priori: nam in omni proportione superpartiente, duo duntaxat facile intelliguntur numeri: deinde pro altero termino posteriore, denominationem siue numerum posterius intellectum præsentabis. Exempli gratia: vis scire primos terminos in proportione superbipartiēti tertias (in qua quidē proportione, bi, &, tertias, siue, 2 & 3, dicūtur denominationes, improprie tamen) fac vt illi numeri, qui facile in tali proportione intelliguntur, addantur: & emanabit 5, prior terminus: deinde posteriorem denominationem puta 3, pro termino posteriori sumes, & dices 5 & 3 primos esse numeros in data proportione: 5 enim ad 3, proportio superbipartiens tertias nuncupatur. Si vero proportionis superbipartiētis quintas, primos numeros inquiras, fac vt 2 & 5 simul coniungantur, & consurget 7 pro termino priori accipiendus: postmodum pro termino posteriori capies 5, posteriorem denominationē: nam 7 ad 5, proportio superbipartiens quintas denominabitur. Et si proportionis supertripartientis quartas, primos terminos cognoscere cupis: 3 & 4 numeros in data proportione facile intellectos, in vnū numerum coniunges, & prouenict 7, prior datæ proportionis terminus: deinde pro termino posteriori, 4 posteriorem denominationem signabis, & inuenies 7 & 4 primos esse numeros proportionis supertripartientis quartas: cum 7 ad 4 talis sit proportio. Et de cæteris pari arte dicendum. ¶Ex hac regula primo sequitur, in omni huius generis proportione posteriorem denominationem priori esse maiorem: quoniam opposito dato, facile sequeretur aliquam partē esse æqualem, aut maiorē suo toto: quod impossibilem ingerit ex terminis existentiā. ¶Secundo infero, q̄ cuiuslibet talis proportionis, si prior denominatio fuerit par, esse imparem posteriorē necesse est: & si posterior fuerit par, priorem esse imparem oportet: nam parem esse vtranq; possibile non est, imparē vero esse non incōuenit. Si enim huius illationis oppositum daretur: sequeretur candē esse proportionē superparticularē, & superpartientē: sed illud inconueniēs reputamus: quare. ¶Tertio infero, priorē denominationē posterioris esse partē aliquotā, impossibile esse: quare si forte ex te quispiā petat dari terminos inter quos proportio supertripartiēs nonas inuenitur: dicas id fieri nō posse. Nā 3, est 9 pars aliquota. Corollarium primum. Secūdū. Tertium

¶Omnis proportio multiplex superparticularis, inter numerum consurgentem ex ductione prioris denominationis per posteriorem, cum sibi addita vnitate pro vno termino, & suā posteriorem denominationem pro altero, habetur. 4

¶Id autem in hac parte prænotare oportet, in omni huius generis proportione duas
ſolum haberi denominationes, nec pauciores, aut plures. vtor in his regulis iſto termi
no, denominatio, improprie, & hoc pro numeris nominatis, ſeu facile intellectis in da-
tis proportionibus: nã proprie loquẽdo, in omni proportione, vnica inuenitur denomi-
natio: vel ſi plures habeantur, illæ ſunt æquiualentes, vt ſeſquitertia, & ſeſquiepitrita.
Iam regula declaretur. Si igitur primos numeros inuenire deſyderas, inter quos aliqua
proportio multiplex ſuperparticularis inuenitur: oportet in primis proportionis petitæ
ſumere denominationes, & vnam per alteram multiplicare, & cõſurgenti numero vni-
tas addatur, quo facto numerus reſultans, prior terminus talis proportionis erit: deinde
pro altero termino poſteriorem denominationem accipies: quod ſi feceris, primos nu-
meros in data proportione inuentos habebis. Exemplum: ſit proportio dupla ſeſquial-
tera, quæ præſentetur, in qua, dupla, & altera, ſunt duæ denominationes, & per quamli-
bet, 2 apprehendimus: ducatur vna illarum in alteram, hoc eſt 2 in 2, & proueniet 4: cui
vnitas addatur, & conſurget 5, pro termino priori: deinde pro termino poſteriori, poſte
rior denominatio ſumatur, videlicet 2: & reperies 5 & 2 primos eſſe numeros, inter quos
proportio data inuenitur. Pari modo ſi proportio dupla ſeſquitertia præſentetur, faciẽ-
dum eſt: nam in ipſa, dupla, & tertia, ſunt denominationes, per quarum priorem 2, &
per poſteriorem 3, facile intelligimus: multiplica igitur vnam illarum per alteram, di-
cendo bis tria, ſiue, ter 2, & conſurget 6: cui ſi vnitas addatur, proueniet 7 pro termi-
no priori: & pro termino poſteriori ſumatur 3, qui eſt datæ proportionis poſterior de-
nominatio, quo facto inuenies 7 & 3 primos eſſe terminos in data proportione. Qz ſi
in tripla ſeſquialtera primi termini poſtulentur: fac eodem modo, & inuenies 7 & 2 pri
mos eſſe datæ proportionis terminos, & hoc pacto deinceps.

5 ¶Omnis proportio multiplex ſuperpartiens, inter numerum emanan
tem ex ductione vltimæ denominationis per antepenultimam, cum ſi-
bi addita penultima denominatione pro vno termino, & ſuam vlti-
mam denominationem pro altero conſurgit.

¶In omni multiplici ſuperpartienti proportione, tres duntaxat denominationes inue
niuntur: quare ſi data aliqua tibi proportione primos numeros inuenire cupis, oportet
vt vltimam denominationem per antepenultimam multiplices, & conſurgẽti numero
penultima addatur: quo facto priorẽ terminum datæ proportionis habebis: deinde ean
dem vltimam denominationẽ pro termino poſteriori ſumes: & ita faciendo, primos nu
meros in data proportione procreatos inuenies. Exẽpli gratia. Si detur proportio du-
pla ſuperbipartiens tertias, cuius, dupla, bi, & tertias, ſunt tres denominationes: fac vt
tertia denominatio, puta 3, per antepenultimã multiplicetur, videlicet per 2, & cõſur-
get 6: cui ipſa penultima denominatio, ſcilicet 2, addatur, & emanabit 8 datę propor-
tionis prior terminus: deinde pro termino poſteriori ſumes ipſum 3, vltimam denomi-
nationẽ: quo facto, dices 8 & 3 primos eſſe numeros proportionis duplæ ſuperbipartiẽ-
tis tertias. Si autẽ detur dupla ſupertripartiẽs quartas, fac eodẽ modo, & inuenies pri-
mos numeros eſſe 11 & 4. nam 11 ad 4 talis eſt proportio. Et ſi proportionis triplæ ſu-
perbipartiẽtis quintas primi termini petantur: ſi feceris arte, & modo tactis, dabis 17 &
Primum corollarium. 5. nam 17 ad 5, talis eſt proportio. Pari modo in cæteris eſt faciendũ. ¶Ex hac regula
tria ſequuntur corollaria, illis ſimilia quæ in tertiæ regulæ declaratione inferebãtur. Pri-
mum eſt in omni huius generis proportione, vltimã denominationem, penultima eſſe
Secũdũ. maiorẽ. ¶Secũdum eſt, cuiuſlibet talis proportionis, ſi penultima denominatio fuerit
par, oportet vltimã eſſe imparem: ꝙ ſi vltima denominatio par fuerit, penultimam eſſe
imparem neceſſe eſt: nam ambæ, & penultima, & vltima pares eſſe non poſſunt: impa-
Tertiũ. res bene quidem. ¶Tertium corollarium eſt, nulla penultima denominatio poteſt vlti
mæ denominationis eſſe pars aliquota. Hæ ſunt quinq; regulæ quibus facile admodum
quiſq; (vt in capite huius tractatus promiſimus) in omni genere proportionũ primos
terminos, ſeu primos proportionales numeros poteſt inuenire. Et ſi ſecũdos terminos,

tertios,quartos've,aut aliquot altiores cupis habere: id facies per ductionem primo-
rum numerorum,vt in fine primæ regulæ deductum est. Ex his facile signari poterunt
petenti,numeri omnes proportionales,tam maiores inæqualites, q̃ minores. ¶Infero
vltimo ex dictis in hoc tractatu,in genere proportionum multiplicium, minimam pro
portionem esse duplam,quæ prima est in illo genere:maximam vero reperire non est.
in genere autem proportionum superparticularium,sesquialtera (quæ dicitur prima)
maxima censetur,minima vero signari non potest:in alijs tribus generibus proportio-
num,nec maiores,nec minores in dato sensu possunt assignari.

Corollarium non prætermittẽdũ.

DE ACCEPTO SECVNDVM FIGVRAM NVMERO, tractatus tertius.

Vperest,duobus primis tractatibus expeditis,tertium subintre
mus, in quo quatuor & viginti constituemus diffinita:quæ om
nem numerum secundum figuram consyderatũ, Laconica bre-
uitate absoluent. Id autẽ pro huius tractatus intellectione præ-
notare oportet,omnem figuram esse linearem,planam,aut so-
lidam. Linearem figuram eam esse dicimus,quæ solam dimen-
sionum obtinet longitudinem,& duobus intercipitur pũctis:vt
est linea omnis finita & mathematice consyderata. Planam figu
ram eam appellamus, in qua præter longitudinem, sola amplitudo habetur,& eædem
lineis terminatæ inueniuntur:vt est quæq; superficies,prout sic consyderatur. Solidam
vero figuram eam significamus,quæ limitatas longitudinem,amplitudinem,atq; cras-
sitiem,sibi vendicat dimensiones:vt corpus de genere quantitatis. Is igitur numerus
secundũ figuram sumitur,qui analogice aliquam aliquásve obtinet dimẽsiones. Nam,
si cuiuspiam numeri cunctæ vnitates recta via procedant, omnis talis,linearis nume-
rus dicetur:si vero in longum,atque latum porrigantur monades,profunditate negle-
cta,planus,superficialis've numerus exprimetur: quòd si eius monades in longum,la-
tum,& profundum dirigantur,solidi nuncupationem talis numerus obtinebit.

Linearis figura.

Figura plana.

Solida figura.

DIFFINITA.

¶Numerus linearis, est numerus qui suas omneis in eandem positio-
nem porrigit vnitates. 1

¶Vt 2, 3, 4. & vt clarior omnibus sit doctrina: omnes vnitates, omnésque numeros
per rotunda puncta designabimus. Nam si vnitas explicetur,id erit hoc pacto a •. si au
tem binarium velis significare, eo modo facies b ••. pari modo si ternarium linearem
numerum describas,hoc pacto per tria puncta designabis c •••. hac arte consequen-
ter procede. Quandam inter se obseruant analogiam numerus linearis in arithmeti-
ca,& linea in Geometria:ita vt quemadmodum in longum,quauis alia dimensione se-
clusa,Geometrica linea porrigitur,sic numetus linearis in solam dimensionum exten-
ditur longitudinem. ¶Harum generatio apprehenditur,si ab vnitate incœperis (quæ
principium linearis numeri appellatur) & naturalem numerorum seriem per rotunda
puncta significaueris. Exemplum.

Naturalis series numerorum linearum	•	••	•••	••••	•••••	••••••

¶Numerus planus, est numerus qui per suas vnitates descriptus, solas
longitudinem, latitudinemq; obtinet dimensiones. 2

¶Vt 3, 4, 5. Nam si ternarium instar trianguli hoc pacto disponas d:reperies illum nu
merum vtrisque dimensionibus gaudere, videlicet longitudine,atque latitudine:porri
gitur enim à sinistro in dextrum,& à deorsum in sursum, vt sensui patet. Eodem mo-
do si in longum,& latum,ad modum quadrati 4 describatur,vt e:dicendus est nume-
rus planus:aperte enim patet in signato numero duas inueniri dimensiones, longitu-
dinem scilicet, atque latitudinem. Consimiliter dicendum est de 5, qui si in altum,&

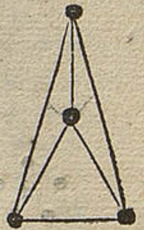
dextrum secundum suas vnitates distendatur, vt f: numeri plani nomen sortietur. Hic autem quem numerum planum diffinimus, à plærisque authoribus superficialis nume rus nuncupatur: quippe qui superficiei similis est, atque analogus. Et hic numerus pla nus, infinitas continet species: quarum prima est trigonus: secunda, tetragonus: tertia, pentagonus: & ita consequenter. Sed de his inferius fiet sermo. ¶Generatio omnium planorum incipit ab vnitate, solo binario excepto, nullum sequentium numerorũ præ termittens: qui omnes, si secundum duas prænominatas dimensiones protendantur, ipsorum propagatio omnibus reddetur aperta. Exemplum.

Linea naturalis planorũ numerorũ	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

3 ¶Numerus solidus, est numerus qui suapte natura omnem sibi vendicat dimensionem, vt puta longitudinem, latitudinem, atq; crassitiem.

¶Exemplum 4, 5, 6. Vnde si quaternarij tres vnitates admodũ trianguli disponas, cui desuper vnitas locetur tanquam cõnus, seu vertex pyramidalis figuræ, vt g: inuenies 4 omni dimensione gaudere, & per consequẽs solidus numerus erit. Eodem modo si quatuor quinarij vnitates ad modum quadrati describantur, & alia vnitas desuper tanquã vertex situetur, vt h: non minus solidus numerus dicetur. Pari ratione dicendum est de senario: nam si quinq; eius vnitates ad similitudinem pentagonalis figuræ ordinentur, & desuper tanquam conus vnitas vna ponatur, vt i: solidus numerus erit. Numerus autem solidus, & corpus de genere quantitatis, in hoc conueniunt, vt per omnem porrigantur dimensionem. ¶Solidi numeri generantur, capta naturali numerorum serie, si præter binariũ, & ternariũ, ab vnitate incipiendo, cũctos sumpseris numeros. Exẽplũ.

g



h i

Linea naturalis solidorũ numerorum	1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

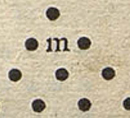
4 ¶Numerus trigonus, est numerus planus tria cõtinens latera æqualia.

¶Vt 3, 6, 10. Nam si 3 triangulari distendatur interuallo, vt hic k, trigonus numerus appellabitur: vtpote quòd tribus constet lateribus æqualibus. Simili modo si 6 in tria æqualia latera porrigatur, vt hic l, numerus trigonus dicetur: nam quodlibet ipsius latus tres continet vnitates. Etiam vbi 10 in tres costas laterales profundatur, vt hic m: trigonus erit numerus. Dicitur etiam triangularis, quem trigonum numerum diffinimus. Nec prætereas omnium planorum numerorum, trigonum esse primum: sicut in Geometria, omnium rectilinearum figurarum prima, triangulus appellatur. Duabus nanque vnitatibus, sola linearis emanat figura: plana vero, ad minus tres exigit vnitates, sicut & triangulus lineas tres: nam duabus lineis, saltem rectis, nulla geometrica intercipitur figura. ¶Generantur numeri trigoni naturali numerorum linea disposita, si prioribus proxime sequentes continuo addideris. Vnde si vnitati, quæ primus trigonus potentialiter appellatur, secundum adijcias numerum, videlicet binarium, consurget 3, secundus trigonus. Et si 1, 2, 3 simul colligas: tertius trigonus procreabitur, scilicet 6. Pari modo si 1, 2, 3, 4 simul colligantur, quartus trigonus emanabit, videlicet 10. & hoc pacto consequenter. Exemplum.

k

l

m



Naturalis linea numerorũ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120

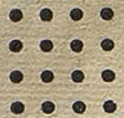
¶Hinc sequitur omnem numerum trigonum ab vnitate totum esse, quota eius lateris fuerit aliqua vnitas pars aliquota.

5 ¶Numerus tetragonus, est numerus planus, quatuor æqualibus lateribus constans.

¶Vt 4, 9, 16. Si enim 4, quatuor angulis explicetur, vt n: dicendus est numerus tetragonus. Etiam si in quatuor æqualia latera, ad modum quadrati 9 distendatur, vt o: numeri tetragoni appellationem tenebit. Est consimili arte dicendum de 16: qui si ad formam quadrati, in latera quatuor ęqualia dilatetur, vt p: non minus tetragonus nuncupabitur. Numerus autem tetragonus, alio nomine quadratus exprimitur: & hoc quia geometrico quadrato similis est, & sodalis. ¶Propagatio autem istorum numerorum habetur, si trigonalis lineæ quosvis duos numeros trigonos sibi inuicem collaterales cõ

n

o



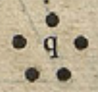
p

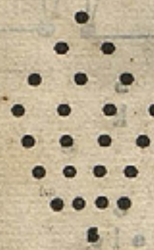
iunxeris. Nam si vnitatem primum trigonum, secundo proximo sequenti, scilicet 3, con iungas, quaternarium generabis: qui secundus tetragonus est. Et si 3, secundus trigonus, tertio trigono, videlicet senario, adijciatur: generabitur tertius tetragonus, vtpote 9. Eodem modo si 6, tertius trigonus simul cum 10, quarto trigono accipiatur, consurget quartus tetragonus, scilicet 16. Et pari modo consequeuter. Exemplum.

Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Linea tetragonalis	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121

¶Deducitur ex dictis, quemlibet tetragonum ab vnitate totum esse, quota est alicuius lateris eius monas pars aliquota. Corollarium.

¶Numerus pentagonus, est numerus planus, qui quinque æqualibus lateribus perficitur. 6





¶Vt 5, 12, 22. Nam si in quinque æquales angulos quinarius distendatur, vt q: numeri pentagoni sumet denominationem. Pariformiter dicendum est, si 12 in quinque æqualia latera porrigatur, vt r: ipsum duodenarium taliter situm, pētagonum nuncupari. Si autem 22 in quinque æqualia latera distribuatur, vt s: numerus pentagonus dicetur. Potest numerus pentagonus alia denominatione quinquangulus dici: sed nomina ad placitum significant. ¶Procreantur omnes pentagoni, acceptis linea trigona, & tetragona, à secundo tetragono incipiendo: si primum trigonum, videlicet vnitatem, secundo tetragono, scilicet 4, coniunxeris: & secundum trigonum tertio tetragono, & tertium trigonum quarto tetragono, & sic consequenter. Vnde si vnitas quæ primus trigonus est, 4, secundo tetragono addatur: consurget 5, qui secundus pentagonus est. Et si 3, secundus trigonus 9 coniungatur, qui tertius est tetragonus, profluet 12, tertius pentagonus. Eodem modo si 6, tertius trigonus, 16 quarto tetragono addatur: emanabit 22, qui quartus pentagonus in ordine appellatur: & deinceps hoc modo. Exemplum.

Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Linea tetragonalis	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Linea pentagonalis	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176

¶Sequitur ex his omnem pentagonū ab vnitate totum esse, quota est eius lateris vnitas pars aliquota. Poteris facili cura, intellectis quę dicta sunt, cæteros infinitos planos, & ipsorum generationes dignoscere: hexagonus enim, quartus est in ordine: heptagonus, quintus: & octogonus, sextus: & deinceps hoc modo. ¶Generatur autem istorū quilibet, & sequentium, ex trigono, & sibi immediate præcedenti plano: ita vt hexagonus ex trigono, & pentagono profluit: sic heptagonus ex trigono, & hexagono: & octogonus ex trigono, & heptagono: & ita consequenter. Nam sicut ex primo trigono, & secundo tetragono, pentagonus secundus generatur: ita ex primo trigono, & secundo pentagono, secundus hexagonus producitur: & ex primo trigono, & secundo hexagono, secundus heptagonus generatur: etiam ex primo trigono, & secundo heptagono, secundus octogonus profluit: & de alijs pari modo. In hac enim elementorum combinatione, omnium planorum generationes facile dantur intelligi. Exemplum.

Corollarium.

Reliquorū planorum à supradictis gñatio

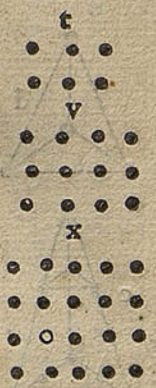
Linea naturalis numerorum	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Linea trigonalis	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
Linea tetragonalis	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Linea pentagonalis	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176
Linea hexagonalis	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231
Linea heptagonalis	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286
Linea octogonalis	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341

¶Hinc sequitur omnem numerum planum, cuius latera omnia sunt æqualia, totum in sua specie esse, quota est vnius eius lateris vnitas pars aliquota. Nec te lateat, omnem numerum planum alium à trigono, in planos esse resolubilem, quousque ad primū planū (qui trigonus est) deuentum fuerit: nam 12, qui tertius pentagonus est, in 9 tetragonum, & 3 trigonum resoluitur. & 9, qui tertius tetragonus est, in 6 & 3 trigonos nu- Corollarium.

meros resoluitur. Hi vero nullam patiuntur dissolutionē. Vt si .3. in tres vnitates resoluatur, hoc non erit inquantum trigonus, sed inquantum aliam denominationem sumit. In alijs autem planis est pari modo dicendum.

7 ¶Numerus altera parte longior, est numerus planus, cuius altera dimensionum alteram per solam vnitatem excedit.

¶Vt .6.12.20. Si autē .6. eo modo describatur, vt .t. aperte reperies longitudinem sola vnitate a latitudine differre. Etiā si .12. sic significetur vt .v. euadet notū lōgitudinē per solam vnitatē latitudinē excedere. Est eodē modo dicēdū de .20. qui si vt .x. describatur, numerus altera parte lōgior dicetur. Potest etiam alijs nominib⁹ appellari, vtpote lōgilaterus, quadrāgulus, sed hæc nomina idē significāt. ¶Hinc deducitur omnem numerū altera parte longiorem, quatuor angulis, quatuorq; inæqualibus lateribus constare: oppositis tamen costis nulla ex parte se excedentibus. ¶Horū generatio habetur, si naturalis pariū numerorū linea capiatur: & omniū talium ordinata fiat additio. Nam si .2. & 4. primi pares componātur, emanabit .6. primus altera parte longior. & si .2.4.6. simul coaceruētur, cōsurget .12. secūdus altera parte longior. Pari modo si .2.4.6.8. in vnum colligantur, profluet .20. tertius altera parte longior. Et hoc pacto deinceps. Exemplū.



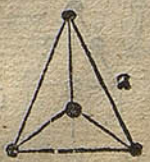
Linea naturalis parium numerorum.	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Linea naturalis longilaterorum.		6	12	20	30	42	56	72	90

Et si Boetius, & posteriores dixerint .2. numerum altera parte longiorem esse, nos tamen impossibile reputamus aliquem numerum, & linearem, & planum esse secundū vnū situ, eiusq; eandem positionem.

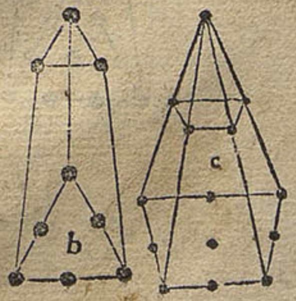
8 ¶Numerus antelōgior, est numerus planus cuius altera dimēsionum per numerum vnitate maiorem alteram exuperat.

¶Vt .8.10.15. Nam si .8. hoc pacto describatur. vt .y. differentem a latitudine, per .2. longitudinem habebit. Consimili modo si .10. sic repræsentetur, vt .z. eius longitudo alterā dimensionem per .3. exuperabit. Ita est dicendū de .15. qui si eo modo significetur, vt .&. suarum dimensionū altera per numerū vnitate maiorē alterā excedet, videlicet per .2. & per consequēs quilibet prædictorū numerus antelongior appellabitur. ¶Infertur ex his omnē antelongiorē numerum, perinde ac altera parte longiorem, angulis quatuor, quatuorve inæqualibus costis perfici: necnō illarū oppositas adinuicē æquas habere. ¶Secūdo patet eundē numerū, & altera parte longiorē, & antelongiorē esse: vt fat videre est de .12. qui si in tres æquales lineas planā figurā constituentes scindatur, altera parte longior dicetur: vbi vero in duas solum diuidetur æquas partes, numerus antelōgior exprimetur. ¶Producūtur cuncti antelongiores acceptis linea parium, & impariter impariū numerorum serie: si omnes à prima (præter tres primos videlicet. 2.4.6.) & singulos a secunda (præter tetragonos, siue quadratos) sumpseris numeros.

9 ¶Pyramis est numerus solidus, cuius basis est numerus plan⁹ æquilaterus, a cuius singulis conis in monadē, vel planum vniformi decremento latera porriguntur.



¶Vt .4.9.14. Nam si ex tribus quaternarij vnitatibus trigonus efficiatur, supra quē residua vnitas locetur, vt .a. numerus inde resultās pyramis nūcupabitur, cui⁹ trigon⁹ dicitur basis, & vnitas desuper sita vertex, siue conus nūcupatur. Pari arte dicendū est, si ex sex nouenarij monadibus trigonus tertius confletur. cui desuper .3. secūdus trigonus ponatur, vt .b. consurgentē inde numerū pyramidē nuncupari. Est cōsimili modo dicendum de .14. a quo si nouē extrahantur vnitates, tetragonū tertiū cōponētes, & hoc pro basi: & desuper .4. secundus tetragonus locetur, supra quem residua monas, tanq̄ vertex ponatur, vt .c. taliter dispositū numerū pyramidē exprimi. Continet nūerus pyramidalis species infinitas: quarū prima dicitur pyramis trigona: secūda pyramis tetragona: tertia pentagona: & hoc pacto deinceps. Et earum quælibet suam denominationem sumit a



plano numero, qui basis appellatur : ita vt si talis planus sit trigonus, pyramis trigona dicetur: si tetragonus, tetragona: & si pentagonus, pentagona : & cõsequẽter hoc pacto. sed de his infra. ℭ Nascũtur omnes pyramides capta naturali numerorum serie: si ab eadem tres primos abijcias numeros, vtpote. 1. 2. 3. Exemplum.

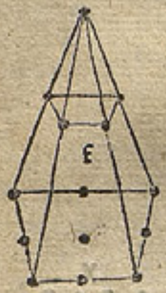
Linea pyramidalium numerorum.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

ℭ Hinc patet omnẽ pyramidẽ tot lateribus constare, quot eius basis continet conos.

ℭ Pyramis perfecta, est pyramis cuius omnia in altũ directa latera, lateribus basis æquantur. 10

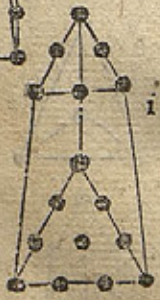
ℭ Vt. 4. 10. 14. Nã si. 4. hoc pacto describatur, vt. d. cõstat porrecta in altũ latera lateribus basis æqualia esse: dicendus igitur est pyramis perfecta. Eodem modo si. 10. lineetur, vt e non minus perfecta pyramis est nominandus. Pari ratione si decimiquarti numeri tertius tetragonus, videlicet. 9. pro basi capiatur, supra quem secundus tetragonus locetur, & supra hũc monas primus trigonus ponatur, vt est. f. numerus ille. 14. perfecta pyramis dicetur: cum eius omnia latera, quę sursum eriguntur, lateribus basis sint æqualia : nam quẽadmodũ in quolibet basis latere tres monades tantũ sunt, ita in quolibet sursum erecto latere tres dũtaxat vnitates inueniũtur : quare ex diffinitione constat perfectã pyramidem esse. ℭ Ex his deducitur in omni perfecta pyramide tot numeros planos æquilateros eiusdẽ ordinis inueniri, quot in quolibet suæ basis latere computantur vnitates. ℭ Generatio perfectarũ pyramidum eadem est cum præassumpti diffiniti generatione. Nam si a naturali numerorũ linea tres primi abijciantur numeri, cuncti sequentes perfectæ pyramides dicentur. Exemplum.

Linea perfectarum pyramidum.	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15



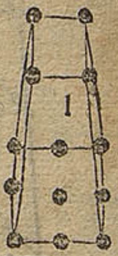
ℭ Pyramis curta, est pyramis cuius porrecta in altũ latera, lateribus basis non æquantur. 11

ℭ Vt. 9. 13. 16. Si autẽ. 9. eo pacto distendatur, vt. g. aperte reperies laterũ erectiones lateribus basis minime æquari: quoniã in quouis basis latere tres sunt vnitates, sed in õni laterum directione duæ solum monades inueniuntur, quapropter datus numerus pyramis curta nominatur. Etiam si. 13. hoc modo figuretur, vt. h. ita vt eius tertius tetragonus videlicet. 9. pro basi capiatur, supra quem secundus tetragonus, puta. 4. locetur, censendum erit signatum. 13. pyramidem curtam esse. Eodem modo dicendum est de 16. a quo si. 10. quartus trigonus pro basi sumatur, & supra ipsum. 6. tertius trigonus figatur, vt ostendit. i. non minus q̃ præassumpti numeri curtæ pyramidis appellationem tenebit. Et hæc pyramis curta (quæ iam diffinita est) alio nomine pyramis imperfecta nominatur: & sub se infinitas continet species, quarum prima est pyramis securta, secunda pyramis biscurta, tertia pyramis tricurta: & hoc pacto consequẽter. sed de his statim fiet sermo. ℭ Profluunt omnes pyramides curtæ, acceptis omnium planorum æquilaterorũ lineis naturalibus, si in cuiuslibet lineæ planis (primo ablato) ordinata, & sæpius repetita fiat additio. Nam si accepta trigonorũ serie, tertium trigonũ secundo adijcias, consurgens numerus, scilicet. 9. curta pyramis dicetur. Et si secundus, tertius, & quartus trigoni cõponantur: inde emanans numerus, videlicet. 19. pyramis curta appellabitur. Pari modo si secundus, tertius, quartus, & quintus trigoni addantur: resultans numerus vtpote. 34. curta pyramis censebitur: & consequenter hoc modo. Deinde si relictis primo, & secundo trigonis, a tertio incipias, eo ordine procedendo, sic vt tertium, & quartum simul addas: deinde tertium, quartum, & quintum: postmodũ tertium, quartum, quintum, & sextum, & ita consequenter: inuenies omnem ex aliqua tali additione prouenientem numerum, curtam pyramidem dici. Item si primo, secundo, & tertio dimissis trigonis, a quarto initium sumas, ordine iam dicto procedendo, infinitas pyramides curtas generabis. Et hoc pacto deinceps procedendum est in tetragonorum, pentagonorum, & aliorum sequentium lineis naturalibus.



12 ¶Pyramis ſecurta, eſt pyramis curta, cuius laterum erectiones ſola monade a baſis lateribus exuperantur.

¶Vt. 9. 13. 19. Nam ſi. 6. tertius trigonus pro baſi ſumatur, deinde. 3. ſecundus trigonus deſuper locetur, vt k. 9. pyramis inde reſultans ſecurta, ſiue ſemel curta denominabitur: cōſtat enim in quolibet ſignatæ pyramidis ſurſum porrecto latere duas pręciſe monades eſſe, & cum in quouis ſuæ baſis latere tres inueniantur vnitates, ſequitur laterum erectiones ſola monade a baſis lateribus exuperari, & per conſequens ex diffinitione numerus 9. pyramis ſecurta dicetur. Hac arte procedendum eſt in. 13. Vnde ſi pro baſi. 9. tertius tetragonus accipiatur, cui deſuper. 4. ſecundus tetragonus locetur, vt l. aperte inuenies leuata in altum latera a baſis lateribus ſola vnitate deficere. Numerus ergo. 13. taliter deſcriptus, pyramis ſecurta vocetur. Eſt conſimili modo dicendum de. 19. ita vt ſi. 10. quartus trigonus pro baſi capiatur, ſupra quem. 6. tertius trigonus ponatur, poſtmodum ſupra hunc. 3. ſecundus trigonus locetur, vt figura docet m. dici quidem poteſt ipſum. 19. ſecurtam pyramidem eſſe. ¶Emanant pyramides quæq; ſecurtæ captis omnium planorum æquilaterorum naturalibus lineis, a ſecundis planis incipientibus: ſi in cuiuſlibet talis lineæ planis ordinata, & ſæpius repetita fiat additio. Vnde ſi capta naturali trigonorū ſerie, & primo trigono reiecto, ſecundum tertio adijcias primam pyramidem ſecurtam generabis. Et ſi ſecundum, tertium & quartum trigonos ſimul colligas, ſecurta pyramis producetur, quæ ſecunda in ordine in trigonali linea nuncupatur. Pari modo ſi ſecundus, tertius, quartus, & quintus trigoni componantur, pyramis ſecurta in eadem linea tertia conſurget: & conſequenter iſto modo. Eſt conſimili arte procedendum in lineis tetragonorum, pentagonorum & ſequentium planorum æquilaterorum.

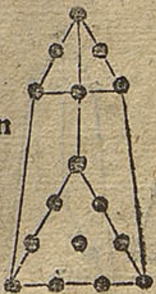


m

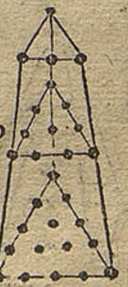
13 ¶Pyramis biſcurta, eſt pyramis curta, cuius protracta ſurſum latera a baſis lateribus per binarium excedunt.

¶Vt. 16. 25. 31. Nempe ſi. 10. quartus trigonus pro baſi habeatur cui ſuperponatur. 6. tertius trigonus, vt oſtendit n. inuenies vnumquodque baſis latus per. 2. quodlibet ſurſum protractum excedere: igitur ex diffinitione. 16. pyramis biſcurta denominabitur. Pari proceſſu dicendum eſt. 25. nam ſi pro baſi accipiatur. 16. quartus tetragonus, & ſupra ipſum. 9. tertius tetragonus ponatur, vt repræſentat o. numerus. 25. perinde ac. 16. pyramis biſcurta dicetur. Eodemmodo. 31. biſcurtę pyramidis figuram ſuſcipiet, ſi pro eius baſi. 15. quintus trigonus ſumatur, ſupra quem. 10. quartus trigonus locetur, & ſupra hūc 6. tertius trigonus emineat, vt præſens punctorū compoſitio demonſtrat p. Patet enim in quolibet ſignatæ pyramidis erecto latere tres ſolum eſſe vnitates, vbi tamen in omni ſuæ baſis latere, quinque inueniuntur: & per conſequens ex diffinitione numerus. 31. pyramis biſcurta dicetur, cum per. 2. laterū erectiones a baſis lateribus exuperentur. ¶Cōſurgunt cunctæ pyramides biſcurtæ acceptis naturalibus omnium planorum æquilaterorum lineis, ſi a tertijs planis in ſequentes ordinata fiat additio. Nam ſi in naturali trigonorum linea tertius trigonus quarto addatur, profluet. 16. prima pyramis biſcurta. Et ſi tertius, quartus, & quintus trigoni coniungantur, conſurget. 31. pyramis biſcurta quæ ſecunda eſt in ordine lineæ trigonalis. Eodem modo ſi tertius, quartus, quintus, & ſextus trigoni componantur, emanabit. 52. tertia eiuſdem lineæ pyramis biſcurta, & in reliquis conſequenter. Pari omnino proceſſu in lineis tetragonorum, pentagonorum, & ſequentium æquilaterorum planorum procedendum eſt.

n

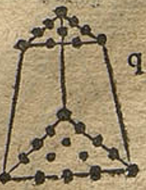


p



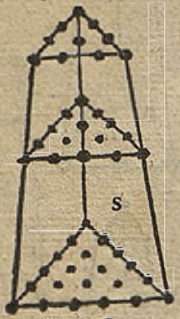
14 ¶Pyramis tricurta, eſt pyramis curta cuius aſcendentia latera per ternarium a baſis lateribus exuperantur.

¶Vt. 25. 41. 46. Vnde ſi. 15. numerus quintus trigonus loco baſis recipiatur, cui ſuperimponatur. 10. quartus trigonus, vt indicat q. cēſendū erit. 25. taliter fabricatū pyramidē tricurtam appellari: cum quodlibet baſis latus quinque monadibus cōſtet, & aſcendentia latera ſolis duabus perficiatur. Eadem arte erit dicendum numerum. 41. pyramidem tricurtam denominari, ſi pro eius baſi quintus tetragonns ſumatur, ſcilicet, 25. ſupra quem

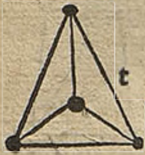


q

quartus tetragonus cõstituatur, vtpote. 16. vt declarat r. Consimili discursu potest ostẽdi numerũ. 46. tricurtæ pyramidis appellationem habere. Nam si pro eius basilico fundamento sextus trigonus habeatur, scilicet. 21. supra quem, 15. quintus trigonus figatur, & supra hunc. 10. quartus trigonus locetur, vt monstrat s. censendũ erit numerũ. 46. tricurtã pyramidẽ esse: tres enim vnitates quodlibet basis latus supra ascensa latera ponit: dicetur igitur ex diffinitione præassumptus numerus, sicuti & priores, pyramis tricurta. ¶Generantur omnes tricurtæ pyramides, cũctis naturalibus planorum æquilaterorũ lineis acceptis: si a quartis planis in sequentes planos ordinata fiat additio. Nam si habita trigonorum linea quartus trigonus, videlicet. 10. quinto trigono, scilicet. 16. addatur, cõsurget. 25. prima pyramis tricurta. Et si quartus, quintus, & sextus trigoni simul recipiãtur, producetur. 46. secunda pyramis tricurta, in linea trigonali. Eodem modo si quartus, quintus, sextus, & septimus trigoni componantur, consurget. 72. tertia tricurta pyramis lineæ trigonali: & ita consequenter ascendẽdo. Eadem arte procedendum est in naturalibus tetragonorum, pentagonorum, & sequentium lineis. Et quemadmodum deductæ sunt pyramides securtæ, biscurtæ, & tricurtæ, ita cæteræ in infinitum progredientes, videlicet quadricurtæ, quinquecurtæ, sexcurtæ, & reliquæ deduci poterunt.



¶Pyramis trigona, est pyramis cuius basis est numerus trigonus. 15

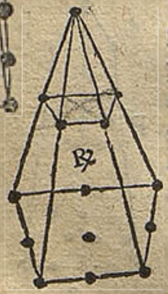


¶Vt. 4. 9. 10. Si autẽ quaternarij tres vnitates, quæ primũ trigonũ efficiũt, pro basi accipiantur, & quæ superest monas in verticis loco ponatur, vt t. recte. 4. pyramis trigona venit appellandus. Eodẽ modo si. 6. tertius trigonus pro basi capiatur, deinde secundus trigonus vtpote. 3. supra basim locetur, & nulla desuper vnitas figatur, vt v. censendum est taliter punctuatũ. 9. trigonã pyramidẽ esse. Etiã si numeri. 10. pro basi capiatur. 6. tertius trigonus supra quẽ. 3. secũdus trigonus locetur, & demũ supra ternarium vnitas primus trigonus, tanq̃ mucro, aut vertex superemineat, vt est x. dicendũ est. 10. eo pacto sitũ pyramidẽ trigonã esse. ¶Procreantur omnes pyramides trigonę accepta trigonorũ naturali linea: si ordinata, & sæpius repetita in ipsa fiat additio. Nã si primus, & secũdus trigoni cõponantur, cõsurget. 4. prima pyramis trigona. Et si primus, secũdus, & tertius trigoni addãtur, emanabit. 10. pyramis trigona. Etiã si primus, secũdus, tertius, & quartus trigoni simul adijciãtur, profluet. 20. pyramis trigona: & cõsequẽter isto modo. Deinde si primo trigono ablato, secũdus & tertius componantur, consurget. 9. pyramis trigona. Et si secundus, tertius, & quartus simul coniungantur, producetur. 19. pyramis etiam trigona. Et si secundus, tertius, quartus, & quintus trigoni addantur, habebis. 34. trigonam pyramidem. &c. Est consimili modo dicendum, si primus, & secundus trigoni abijciantur, & a tertio ordinata fiat additio, ac deductum est: & hoc pacto deinceps. Ex his facile dignoscitur trigonam pyramidem, & perfectam & curtam amplecti.

x

¶Pyramis tetragona, est pyramis cuius basis est numerus tetragonus. 16

¶Vt. 5. 13. 14. Nam si. 5. hoc pacto distendatur vt y. aperte dignoscitur illius basim tetragonum numerum esse, cum sit. 4. secundus tetragonus. Etiam si. 13. tali protractione lineetur vt. z. non minus q̃. 5. dicendus est pyramis tetragona: habet enim pro eius basi. 9. tertium tetragonum. Est pari arte dicendum. 14. tetragonam pyramidem esse, & hoc si pro eius basi. 9. tertius tetragonus capiatur, supra quem. 4. secundus tetragonus ponatur, & supra hunc monas primus tetragonus locetur, vt repræsentat dispositio ℞. ¶Emanant cunctæ pyramides tetragonæ capta tetragonorum numerorum naturali serie, si ordinata, & sæpius repetita fiat additio, ad sensum in præcedenti diffinito. ¶Constat igitur ex deductis aliquam pyramidem tetragonam, esse perfectam: aliquam vero curtam.

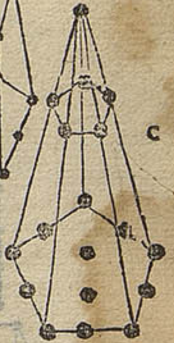


¶Pyramis pentagona: est pyramis pro eius basi pentagonum contines numerum. 17

¶Vt. 6. 17. 18. Si enim. 6. eo modo describat vt pro eius basi. 5. locetur: & si qua vnitas desuper ponatur. vt a. oportet dicere datũ numerũ pẽtagonã pyramidẽ esse. Eodẽ modo est dicẽdũ de. 17. Nã si pro eius basi accipiatur. 12. terti⁹ pẽtagonus, cui desuper. 5. secũ-

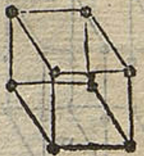
dus pentagonus detur, vt indicat b: inde emanans compositio pyramis pentagona dicetur. Etiam si 18 ea arte disponatur, vt pro ipsius basi 12 sumatur, deinde supra ipsum 5 locetur, supra quem vnitas, primus pentagonus reperiatur, secundum dispositionem c inuenies. 18 pentagonam pyramidem denominari: vtpote quòd pentagona basi constet. ℭ Consurgunt omnes pentagonæ pyramides, si naturalis pentagonorum series sumatur: & ordinata, atque sæpius repetita fiat additio: vt in 15 diffinitio deductum est. Hinc habetur aliquam pyramidem pentagonam esse perfectam: aliquam autem curtam. Et quemadmodum deductæ sunt pyramides trigonæ: cæteræq; in infinitum procedentes propalari poterunt.

b

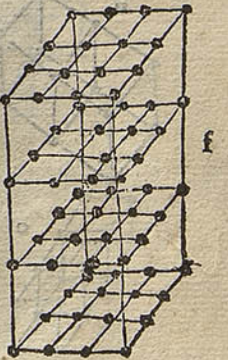

c


18 ℭ Numerus cubus, est numerus solidus sex æquis atque planis numeris contentus.

ℭ Vt 8, 27, 64. Nam si 8, ea arte describatur, vt sex æqualibus superficiebus, duodecim autem lateribus æquis constet, vt indicat d, numeri cubi appellationem tenebit. Est eodem modo dicendum de 27, qui si æqualibus sex superficiebus protrahatur, & duodecim æquis lateribus, quorum quodlibet tres contineat vnitates, vt demonstrat e: dicendus erit numerus cubus. Pari modo operandum est in numero 64. Nempe si pro vna superficie, siue pro vno eius plano accipiatur 16, quartus tetragonus, & hoc tali punctorum figuratione qualis f: consurget 64, qui numerus cubus dicetur: habebit autem superficies sex, & easdem æquas, quæ plani numeri appellantur, latera vero duodecim, eademq; æqualia, vt aperte dignoscitur ex diffinitione: igitur numerus cubus est dicendus. Solet appellari cubus alio nomine tessera: vtpote quòd tesseræ, taxilloque similis sit, atque analogus. ℭ Generãtur omnes numeri cubi accepta naturali imparium numerorũ serie à 3 incipienti si duo primi, scilicet 3 & 5 componantur: deinde tres proxime sequentes, videlicet 7, 9 & 11, addantur, postmodum quatuor sequentes scilicet 13, 15, 17 & 19 adijciantur: & consequenter hoc pacto. Exemplum.

d


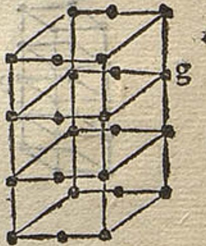

e


f

Linea naturalis imparium numerorum	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Linea naturalis cuborum numerorum		8			27				64

19 ℭ Numerus cuneus, est numerus solidus, cuius nulla dimensionum alteri est æqualis.

ℭ Vt 24, 40, 60. Nam si pro longitudine sumatur 2, pro latitudine 3, pro crassitie 4, consurget 24. quoniam bis tria efficiunt 6, & quater sex, 24 producunt. quare constat 24 nullam alteri æqualem dimensionem possidere: vt dat intelligere figura g. Eadem procedendi via dicendum est 40 esse cuneum numerum, si pro prima dimensione recipiatur 4, pro secunda 5, & pro tertia 2, facta vt prætactum est ductione, euadet 40, cuneus eo pacto describendus vt h. Consimili modo censendum est 60 esse cuneum. Nam si dimensionum primæ, 3 pro ipsius latere accommodetur, mediæ, 4: extremæ vero 5, & eorum debita fiat multiplicatio, 60 cuneus emanabit, ea arte præsentandus vt i. ℭ Prodeunt omnes cunei, acceptis omnibus inæqualium laterum planis, vtpote altera parte longioribus, & antelongioribus numeris: si cuilibet illorum tot consimiles simul superaddantur numeri, quot in eius latere maiori monades inueniuntur: & vltra hoc, si cuilibet ex tali superadditione consurgenti numero in infinitum similium planorum crescat additamentum. Nam si 6, primo altera parte longiori (cuius maius latus tres continet vnitates) tres consimiles senarij simul superaddantur, consurget 24, qui primus cuneus appellatur. Et si post hoc illi emananti 24, adhuc vnus planus altera parte longior addatur, puta 6, habebitur 30, numerus etiam cuneus. Et si iterum resultanti 30, apponatur alius planus, profluet 36, etiam cuneus, & hoc pacto consequenter. In alijs vero inæqualium laterum planis ea arte est procedendum.


g

i



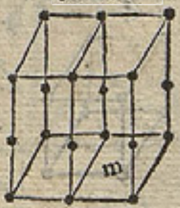
h

20 ℭ Numerus parallelepipedus, est numerus solidus, qui vnam dimensionum ab alijs æqualibus possidet dissentientem.

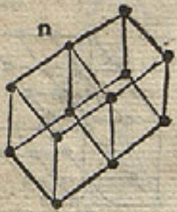

k


l

¶Vt 12,16,18. Nam si 12, eo pacto repræsentetur, vt k: reperies æquas longitudinē, atq; crassitiem: discrepantem vero ab his latitudinem. quoniam quemadmodum quodlibet longitudinis latus binario interciditur, ita & altitudinis quæuis costa: sed latitudinis omne latus ternario numero constat. Pari modo in 16 numero dicendum est: pro cuius vna superficie si sumatur 4, primus tetragonus eo modo situs, vt l: consurget 16, cuius profunditas alias duas æquas dimensiones exuperabit: dicendus est igitur ex diffinitione, parallelepipedus. Etiam si 9 tertius trigonus sic describatur, vt m: consurget 18. numerus parallelepipedus: habet enim primas duas dimensiones æquas, crassitiem autem contractiorem. ¶Horum generatio habetur, si duorum proxime sequentium diffinitorum generationes in vnū colligas. Habet se enim numerus parallelepipedus, vt genus respectu asserum, & laterculorum, in quos solum tanq̄ in species immediatas partitur.


m

¶Numerus asser, est numerus parallelepipedus, cuius vna dimensionum alias duas exuperat æquales. 21

n



o

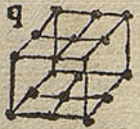

p

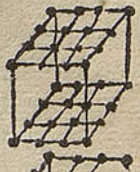
¶Vt 12,16,20. Nam si 12 eo pacto punctuetur, vt n: inuenies crassitiem, æquales longitudinem latitudinémque excedere dimensiones. 12 igitur ex diffinitione asser nuncupatur. Id iudicium in 16 habendum est: quoniam si pro eius lateribus accipiantur 2,2, 4: facta primi in secundum, & producti in tertium ductione, consurget 16, tali dispositione lineandus, vt o. Est eadem paritate in 20 procedendum: nam si pro longitudine 2 sumatur: pro latitudine etiam 2, & pro crassitie 5, inuenies, peractis ductionibus, 20 conflari: cuius vtranque dimensionum crassities exuperat, ac vincit. Id autem facile datur cognosci in hac punctorum figuratione p. Nec refert longitudinem, latitudinē, aut profunditatem alias æquales excedere dimensiones. ¶Pro omnium asserum generatione, accipiatur naturalis numerorum linea, à ternario incepta, & linea tetragonalis, à secundo tetragono incipiens, & prima desuper tanquam quadrati costa locetur: secūda lateraliter ad modum diametri quadrati sit sita: deinde diametralis linea in superiorem eo pacto ducatur, vt primus eiusdem diametralis lineæ numerus in cunctos suprapositæ numeros multiplicetur, & prouenientes numeri in primo superiori calle, & domibus correspondentibus numeris suprapositis ponantur: postmodum diametralis lineæ tetragonus, vtpote 9, in omnes à primo superioris lineæ numeros ducatur, & consurgentes numeri in secundo calle, & domibus respondentibus morentur. Consequenter tertius diametralis lineæ tetragonus in omnes à primo, & secundo superioris lineæ numeros multiplicetur, & inde emanantes numeri, calle, ac domibus proportionabiliter ad iam dicta locentur. Et si in infinitum eo pacto multiplicādo procedas, cunctos asseres productos inuenies: quos omnis præsens numerorum combinatio repræsentat.

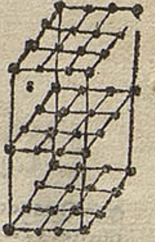
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
4	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117
	9	80	96	112	128	144	160	176	192	208
		16	150	175	200	225	250	275	300	325
			25	252	288	324	360	396	432	468
				36	392	441	490	539	588	637
					49	576	640	704	768	832
						64	810	891	972	1053
							81	1100	1200	1300
								100	1452	1573
									121	1872
										144

22 ¶Numerus laterculus, est numerus parallelepipedus, cuius vna dimẽsionum ab æqualibus alijs exuperatur.

¶Vt 18, 32, 48. si autem longitudo per 3 significetur, latitudo pariter per 3, & profunditas per 2, generabitur 18. quoniam ter tria reddunt 9, deinde bis nouem, 18 producunt: quare dicere conuenit 18 laterculum esse: habet enim longitudinem, atque latitudinem æquas: crassitiem autem possidet contractiorem: vt in contextu q, videre est. Necnon præfatus 18, laterculus est nominandus: quando pro longitudine, latitudinéve 2 sumeretur, & pro aliarum qualibet dimentionum, 3. Consimili arte procedendum est in 32. Nempe si pro vtraque primarum dimensionum 4 recipiatur, adiecto vltimæ 2, factá que eo pacto ductione, quater quater sunt 16. & bis 16, sunt 32: productus inde numerus vtpote 32, laterculus appellabitur: qui hac positione describetur, vt r. Etiam in 48, pari processu enitendum est: accipiantur igitur pro ipsius lateribus 4, 4, 3, sic vt primus 4, longitudinis latera indicet, & secundus latera latitudinis, & 3, profunditatis latera denunciet. Deinde 4 in 4 ducatur, & profluet 16: in quem 3 multiplicetur, & consurget 48 laterculus nominandus: qui eo modo figuretur, vt s. ¶Hæc est laterculorum numerorum progressio. Sumantur duæ lineæ, quarum altera sit naturalis numerorum series, à 2 inchoata: altera vero tetragonorum linea, à tertio tetragono incœpta, & hæc tanquam diametralis linea transuersaliter ponatur, illa vero ac quadrati costa superiori loco quiescat: deinde primus diametralis lineæ numerus in solum primum superioris lineæ numerum ducatur, & consurgens inde numerus, scilicet 18, in domo intermedia ponatur: postmodum secundus diametralis lineæ numerus in primum & secundum superioris lineæ numeros multiplicetur, & productos numeros calle & domibus intermedijs locabis: consequenter tertius diametralis lineæ numerus in primum, secundum & tertium superioris lineæ ducatur, & geniti inde numeri, calle, & domibus ibidem repertis, & à tertio costæ, & tertio diametralis lineæ interceptis, figantur: & cõsequenter hoc ordine in infinitũ fiat processus. Horum exemplar sit tibi præsens elementorum cõtexio.

q 

r 

s 

2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	48	100	180	294	448	648	900	1210
9	32	75	144	245	384	567	800	1089
	16	50	108	196	320	486	700	968
		25	72	147	256	405	600	847
			36	98	192	324	500	726
				49	128	243	400	605
					64	162	300	484
						81	200	363
							100	242
								121

Figura generationis numerorum laterculorum.

23 ¶Numerus circularis, est numerus planus, qui ex ductu alicuius numeri in se, vel in maiorem pro termino ipsum minorem habẽtem producitur, & in illum terminatur.

¶Vt 25, 36, 625. Nam 25, ex ductu 5 in seipsum cõsurgit. quinquies enim quinq;, cõponunt 25: est igitur ex diffinitione numerus 25 circularis, postq̃ planus est, & producitur ex ductu 5 in se, & in ipsum 5 terminatur. Eodẽ modo 36, ex multiplicatione 6 in se, generatur, cum sexies sex, efficiant 36. & quoniam planus est, & in illum numerũ finitur, qui in seipsum ducebatur: constat ex diffinitione circularem numerum esse. Cõsimili ratione dicendum erit numerum 625, circularis denominationem sortiri: producitur enim ex ductione 5 in 125. nam quinquies 125, procreant 625. etiam ex multiplicatione 25 in se, idem numerus resultat, nempe vigesies quinque 25, generant 625: planus igitur est, & constat in vtraque istarum ductione productum numerum in illum desinere, qui in alterum ducebatur: quare ex diffinitione sequitur numerum circularem esse. Dicitur autem numerus circularis analogice ad circulum in Geometria. nam quemadmodum circulus geometrice plana figura dicitur, & in punctum à quo incipit vertitur, & finitur: ita numerus circularis planus numerus appellatur, & in numerum à quo incipit regreditur, atque desinit. Et sicut numerus planus infinitas sub se continet species, ita & circularis numerus. sed de his ampliorem non licet sermonem efficere. ¶Producuntur omnes numeri circulares, facta assidua quinti, & sexti digitorum in seipsos, atque inde productos numeros ductione. Nam si 5, quintus digitus in se ducatur, consurget 25, primus numerus circularis: in quem si 5 huius digitus ducatur, emanabit 125, numerus etiam circularis: in quem si ducatur 5, profluet statim 625. & hoc pacto deinceps. Pari modo in 6, sexto digito faciundum putamus. Nam si 6 in se ducatur, producetur 36, numerus circularis: in quem si 6 multiplicetur, euadet 216, etiam circularis: in quem si 6 ducatur, profluet 1296, numerus pariter circularis: & consequenter eo modo. Horum autem circularium numerorum productionē præsens formula patefacit.

Circularium generatio.

			Sexies	6	36
Quinquies	5	25	Sexies	36	216
Quinquies	25	125	Sexies	216	1296
Quinquies	125	625	Sexies	1296	7776
Quinquies	625	3125			

¶Numerus sphæricus, est numerus solidus, qui ex ductu minoris numeri in maiorem pro termino eundem minorem habētem procreatur, & in ipsum minorem numerum finitur. 24

¶Vt 125, 216, 625. Nam 125, solidus est numerus, cum sex æquis superficiebus constet: & producitur ex ductu 5 minoris numeri in 25 numerum maiorem, qui pro termino eundem minorem habet, & in ipsum 5, minorem numerum terminatur: dicendus est igitur ex diffinitione numerus sphæricus. Pari omnino arte dicendum est de 216, qui solidus est: & producitur ex multiplicatione 6 in 36. deinde in ipsum 6 finitur: quare sphæricus numerus appellabitur. Eodem modo de 625 profitendum est. In primis solidis est numerus: & consurgit ex ductione 5 in 125, pro termino eundem 5 habentē, & in ipsum 5 minorem numerum finitur: ergo ex diffinitione sphęricus est censendus. Habet enim numerus sphæricus quandam proportionem, siue similitudinem cum sphæra in Geometria. Nam sicut hæc solidum, atque rotundum corpus nuncupatur: ita & ille numeri solidi, rotundi'q; appellationem sortitur. Habet insuper numerus sphęricus species infinitas, sicut & numerus circularis: de quibus nihil ad præsens, vtpote quòd ex prius dictis (quæ lucida sunt) facile constet. ¶Generatio sphęricorum numerorum, eadem est cum circularium numerorū productione: re autem ipsa conueniunt, sola vero vnitatum positione, differentiam sumunt: vt satis cuilibet patere est.

Quando ducitur 5 ī se, qui producetur est tetragonus circularis: in quē rursus si ducatur latus, inde natus, erit sphæricus cubus, atq; in hunc rursus si ducatur idem lat⁹, scilicet 5, producetur sphæricus solidus, non tamē cubicus: in quē & consequentes si semper ducatur latus 5, omnesquot quot producentur, erunt sphærici solidi, at non cubici. Idem sit iudiciū de senarij in se & suos, quadratū, scilicet, cubum & circulares omnes productione.

¶De numeris secundum figuram descriptis, tertij libri Finis.

DE RELATIS NVMERORVM habitudinibus, tractatus quartus.

VTendum est sapiētibus, Sodiade auctore. & cum plærosq; inueniam sapientissimos de Arithmetica disserentes, qui subtili breuitate medietates percurrerūt: mihi sanctum visum est iis esse adhærendum, potius q̄ obuiandum. Et si in hac parte perq̄ multa occurrunt dicēda, ea omnia prętermittenda ornato silentio censui. Nam multa velociter, & continuo loqui, stultitiæ signum est (inquit Nicostratus) ideo tacendi munus esse sine periculo, dicebat Athenodorus. ¶In hoc igitur quarto tractatu duodecim solum diffinita ponemus, in quibus de relatis numerorū habitudinibus pertractabimus. Nam vti numeri ad numerum comparationem assignamus: sic ad habitudinem aliqua habitudo potest referri. Per habitudinem intelligo eum modum quo vnus numerus ad alterum comparatus se habet, sic vt ei æquetur, eum ve superet, aut ab eo vincatur. Habitudo vtique ad proportionem est genus: cum omnis proportio sit habitudo, & non ediuerso. Si enim numerus ad numerum comparatur: consurget inde habitudo, quam proportionem vocamus. Sed si habitudo ad habitudinem, vel proportio ad proportionem refertur: protinus medietas, siue proportionalitas consurget.

1 ¶Medietas, est certa differentiarum proportionumve habitudo.

¶Vt. 8. 6. 4. 2. nam quemadmodum. 8. senarium per binarium excedit, ita. 6. quaternarium per binarium vincit, etiam. 4. eo pacto ad binarium se habet: quare consurgens inde habitudo medietas appellatur. Etiam in istis tribus numeris. 8. 4. 2. medietas inuenietur, & hoc si habitudo primi numeri ad secundum, habitudini secundi ad tertium cōparetur: vtraque enim habitudo proportio dupla censetur. Eodem modo in his quatuor numeris. 9. 3. 6. 2. duæ triplæ inueniuntur proportiones. Nam inter nouenarium primum numerum, & ternarium secundum numerum tripla proportio habetur: & inter senarium tertium numerum, & binarium quartum numerum tripla etiam proportio inuenitur. Si igitur hæ duæ proportiones comparentur, proueniens habitudo medietas, siue proportionalitas (& hoc termino magis cōmuni) nuncupabitur. Hoc tamen in hac parte pro documento est tenēdum, non posse in paucioribus, q̄ tribus terminis, medietatem inueniri. Et si aliqua talis in tribus solum numeris lateat, medietas simplex dicetur: si vero in pluribus terminis inueniatur, medietas composita exprimetur.

2 ¶Medietas Arithmetica, est medietas cuius inter terminos eædem differentiæ obseruantur.

¶Vt. 4. 3. 2. (per terminos intelligo numeros in medietate repertos: & per differentiam excessum quo aliquis numerus minorem numerum, cui refertur, vincit) Iam patet ꝙ in datis numeris Arihmetica medietas inueniatur. Nam excessus quo primus terminus, videlicet. 4. ternarium secundum terminum exuperat, est æqualis excessui quo. 3. binarium vincit, cum quilibet talis sit vnitas, quæ proprie in signata medietate differentia nūcupatur. Eodem modo. 8. 6. 3. 1. Arithmeticam medietatem compōnūt. Nempe eadem inter duos primos terminos, & illos qui sequuntur inuenitur differentia, & illa est. 2. Pari modo. 13. 10. 7. 4. 1. Arihmeticam medietatem efficiunt: cum. 3. sit illorum numerorum communis differentia. ¶Medietas Arithmetica duplex est. Altera continua, altera vero disiuncta. Continuam eam appellamus cuius omnis numerus medius est principium, atq; finis: hoc est quilibet talis numerus alteri comparatur, & ad eum alter numerus refertur vt. 9. 6. 3. Notum enim est in datis numeris Arithmeticam medietatem inueniri, cum 3. sit illorum differentia. quoniā. 6. numerus medius est comparationis, principium in ordine ad ternarium, cui refertur, & est finis respectu nouenarij, qui ad ipsum senarium com paratur. dicendum est inter numeros datos continuam medietatem inueniri. Etiã in istis numeris. 8.6.4.2. cõtinua medietas habetur. Nam vterq; terminus medius, videlicet. 6. &.4. est principium, atq; finis cõparationis. Vnde quemadmodũ. 8. senariũ per binarium excedit, ita. 6. quaternariũ per binariũ vincit, &. 4. binarium per binariũ superat. Eodem modo in his numeris est dicendũ. 15.12.9.6.3. ¶Disiunctã medietatẽ eam esse dicimus cuius non omnis numerus medius est principium, atq; finis in sensu prius declarato, vt 10.8.4.2. Nam denarij ad octonarium differentia est. 2. qualis est quaternarij ad binariũ: sed quoniam inter medios, puta octonarium, & quaternarium consimilis differentia non habetur: ideo medietas illa disiuncta nominatur. Pari modo in his terminis. 11.9.5.3.1. disiuncta medietas habetur. Etiam & in istis numeris. 20.17.13.10.5.2.

Disiuncta Arith. medietas.

¶Medietas geometrica: est medietas cuius inter terminos eædem proportiones habentur. 3

¶Vt. 8.4.2. Nam qualis est octonarij ad quaternariũ proportio, talis inter quaternariũ, & binariũ inuenitur: vtrobiq; eni est dupla proportio, quare inter datas proportiones habitudo medietas geometrica nominatᵹ. Similiter in his terminis. 15.5.6.2. medietas geometrica habetur. Nempe qualis inter primum, & secundum numerum inuenitur proportio: talis inter tertiũ, & quartũ pariter reperitur, vtraq; autẽ tripla proportio appellatur, Est eodẽ modo dicendũ in his numeris. 9.6.4. in quibus ordinatim sesquialtera proportio habetur. ¶Medietas geometrica est duplex, scilicet continua, & disiuncta, vt in præcedenti diffinito de Arithmetica medietate dictũ est. Exemplũ de medietate geometrica cõtinua. 4.2.1. Nã qualis est primi termini ad secundũ proportio: talis est secundi ad tertiũ, vtrobiq; enim proportio dupla inueniᵹ: quoniã medius numerus, videlicet. 2. principium est, & finis, cũ sit prioris proportionis consequens, & posterioris antecedẽs. Dicẽdum ergo est cõsurgentẽ ex illis terminis medietatẽ, continuã siue coniunctã nuncupari. Etiam in istis quatuor terminis. 27.9.3.1. continua medietas habetur. Nã quemadmodũ primi ad secundũ est tripla proportio: ita secundi ad tertiũ, & tertij ad quartũ consimilis est proportio. In istis etiã tribus numeris. 27.18.12. geometrica medietas quam coniunctam appellamus, reperitur. Primus nãq; numerus ad secundum in sesquialtera se habet proportione, & taliter secundus ad tertiũ se habet. ¶Exemplum de disiuncta & geometrica medietate. 8.4.6.3. Nam qualis inter octonariũ, & quaternariũ inuenitur proportio: talis inter senarium, & ternarium etiam consurgit: vtrobiq; enim est dupla proportio, quare inter datas proportiones habitudo geometrica medietas nominatur: & quoniam inter medios numeros, puta inter. 4. &. 6. cõsimilis proportio dupla non reperitur, ideo medietas in illis quatuor numeris habita disiuncta nominatur. In istis etiam quinq; numeris. 18,6.2,3.1. disiũcta medietas habetur. Nẽpe qualis primi numeri ad secundum est proportio, talis etiam est secundi ad tertiũ, & quarti ad quintum: sed tertij ad quartum non talis consurgit habitudo. Consimili arte in istis quatuor numeris. 6.4,3.2. disiuncta medietas inuenitur: cum primi termini ad secũdum sesquialtera sit proportio, qualis est tertij numeri ad quartum: sed non talem secundi ad tertium est inuenire proportionem.

Geo. medietas duplex.

¶Medietas harmonica: est medietas in qua talis est maximi numeri ad minimum proportio: qualis inter differentiam maximi ad medium, & medij ad minimum inuenitur. 4

¶Vt. 6.4.3. Nam qualis inter. 6. maximum numerum, &. 3. minimum habetur proportio: talis etiam inter differentiam maximi ad medium, quæ est. 2. & medij ad minimum, quæ est. 1. proportio inuenitur: vtrobiq; enim est proportio dupla. Etiã inter hos tres numeros. 6.3.2. harmonica medietas habetur: cum eadẽ sit maximi ad minimum proportio cũ proportione differentiæ maiorũ ad differẽtiam minorũ. Nã ambæ triplæ proportiones dicũtur. Eodẽ modo in his tribus numeris. 12.6.4. meditas harmonica inueniᵹ.

¶Quarta meditas, est medietas in qua eadẽ est maximi ad minimum proportio: cũ proportione differentiæ minorũ ad differentam maiorũ. 5

¶Vt.6.5.2.nẽpe qualis.6.maximi numeri ad.2.minimũ proportio reperitur, talis inter differẽtiã medij ad minimũ,quę est.3.ad differentiã maximi ad mediũ,quę est vnitas inuenitur:vtrobiq; enĩ tripla proportio habetur. Pari õnino via in his tribus terminis.6.5.3.quarta medietas reperitur.Et in istis nũeris.12.10.4.cõsimilẽ est reperire medietatẽ.

6 ¶Quinta medietas, est medietas in qua cõsimilis est proportio medij nũeri ad minimũ cũ ꝓportiõe differẽtiæ minorũ,ad maiorũ defferẽtiã.

¶Vt.5.4.2. Nã manifestũ est medij numeri,scilicet.4.ad minimũ, videlicet.2.duplam inueniri proportionẽ:& talis est differentiæ minorũ,quæ est.2.ad maiorum differentiam quæ vnitas est. Cõsimili modo in his tribus numeris.10.8.4.eadem quinta medietas inuenitur:necnon in istis numeris.11.9.3.eadem medietas habetur.

7 ¶Sexta medietas,est medietas in qua maximi ad medium proportio, est eadẽ cum proportione differẽtiæ minorum ad maiorũ differentiã.

¶Vt.6.4.1. Qualis enim senarij, maximi numeri ad.4.numerũ mediũ inuenitur, talis inter minorum terminorũ differentiã, quæ est.3.& differentiã maiorũ quæ est.2.consurgit:etenim vtrobiq; sesquialtera proportio habetur.Eodem modo in istis tribus numeris 12.8.2.sexta medietas inuenitur. In his etiam consimilis medietas habetur.60.45.25.

8 ¶Septima medietas,est medietas ĩ qua talis est maximi ad minimũ ꝓportio, qualis extremorũ differentiæ ad minorũ differentiã consurgit.

¶Vt.4.3.2.Nam qualis quaternarij maximi numeri ad.2.minimum est proportio,talis est differentiæ extremorum,quæ est.2.ad minorum differentiam,quæ est.1.In vtriusque enim numeris dupla proportio inuenitur. Etiam in his numeris.9.5.3.consimilis habetur medietas.Et talem pariter in istis numeris.9.8.6.est inuenire.

9 ¶Octaua medietas, est medietas in qua talis est differẽtiæ extremorũ ad maiorũ differẽtiã proportio, qualis maximi ad minimũ reperitur.

¶Vt.4.3.2. Qualis enim quaternarij maximi numeri ad minimũ inuenitur proportio, talis etiam inter differentiam extremorum quæ est.2.& maiorum differentiã, quæ est.1. consurgit:est enim vtrobique dupla proportio. In istis etiam numeris.9.7.3.consimilis medietas habetur.Pariter in istis.9.7.6.

10 ¶Nona medietas,est medietas in qua vt medi⁹ ad minimũ se habet in proportione, sic extremorũ differentia ad differentiã minorũ se habet.

¶Vt.3.2.1.Nam sicut numerus medius,qui est.2.ad minimũ.qui est.1.in dupla proportione se habet,sic inter.2.qui est extremorum differentia,&.1.differentiam minorum eadem proportio inuenitur.Pari modo in his numeris.7.3.1.eadem proportionalitas habetur.Etiam & in istis.7.6.4.

11 ¶Decima medietas,est medietas ĩ qua vt medi⁹ ad minimũ se habet in ꝓportiõe,sic extremorũ differẽtia ad maiorũ differẽtiã se habeat optet.

¶Vt.3.2.1.Nempe vt.2.medius numerus ad.1.in proportione dupla se habet,sic extremorũ differẽtia,quę est.2.ad differentiã maiorũ,quæ est.1. proportio dupla censetur. In his pariter tribus numeris.5.3.2.consimilis medietas inuenitur. Pariter & in istis.8.5.3.

12 ¶Vndecima medietas,est medietas in qua vt maximus ad medium se habet in proportione, sic extremorum differentia ad differẽtiam maiorum æquam seruat proportionem.

¶Vt.6.4.3. Nam vt.6.maximus numerus ad.4.mediũ in sesquialtera proportione se habet,sic extremorũ differẽtia,quæ est.3.ad differẽtiam maiorũ,quę.2.est, eandẽ seruat sesqalterã ꝓportiõnẽ.Etiã in his nũeris.12.8.6.eadẽ medietatẽ iuenies patefactã.Pariter & in istis.20.16.15. ¶Hãc vltimã medietatẽ adiecit Iordan⁹ decimo libro suorũ elemẽtorũ,supra decẽ medietates quas Boeti⁹ libro scđo suę Arithmeticæ diffuse in lucẽ emisit. Iordanus. Boetius.

¶Finis.

DE NVMERORVM DEMONSTRATIS PROPRIETATIBVS, TRACTATVS QVINTVS.

Æchylus. Thales. Pythagoras.

SImplicia sunt verba veritatis, inquit Æchilus Tragic⁹ poeta: & Thales ille Milesius interrogatus quantũ mendaciũ a veritate distaret, quãtũ (ait) oculi ab auriculis distãt: plane inferẽs oculatã fidẽ præstãtiorẽ esse aurita. Hinc Pythagoras interrogatus quidnã homines potissimũ similes dijs efficeret: cũ vera (inquit) loquũtur. Vera igitur eademq; simplicia (vt mẽdaciũ a veritate dignoscatur) in præsenti tractatu ponemus: quẽ in diffinitiões, dignitates, petitiones, atq; demõstrationes distinguimus: tria vtiq; priora sunt demõstrationũ fundamẽta.

Documẽtũ

¶Id igitur hac in parte prenotare oportet, in omni questiõe duo potissimũ esse aduertẽda, alterũ datũ, alterũ vero quæsitũ: vt si quæratur vtrũ omnẽ numerũ compositũ numerus primus metitur, numerus cõpositus dicitur datũ: & an quẽlibet talem numerus primus metitur quæritur. Nec prætereundũ est vbi demõstrationes haberi possint ex prioribus, & notioribus naturæ, vitandũ esse ne per incõuenientia demõstrentur. In huiusmodi nãq; demonstratione, quæ propter quid & potissima, nuncupatur necesse est & maioris extremitatis, quæ in cõclusione prædicatur, & minoris extremitatis, quæ in eadẽ conclusione subijcitur: causam esse medium.

¶DIFFINITIONES.

¶Naturalis numerorum series, est numerus ab vnitate inceptus, qui per assiduum vnitatis additamentum protenditur infinite. 1

¶Aequalitas, est inæqualitatis principium. 2

¶Numerus alterũ numerãs, is est qui in aliquẽ ductus eũ producit. 3

¶Differentia numerorũ, est vnitas, seu numerus quo minorem maior superat, atq; vincit. 4

¶Ii numeri ab alijs æque distare dicuntur, quorum ad alios differentiæ sunt æquales inter se. 5

¶Extremorũ differẽtia, ea est quæ ex mediorũ collectione consurgit. 6

¶Proportiõis termini, sunt numeri inter quos talis ꝓportio iuenitur. 7

¶Nũerus medius, is est qui iter duos posit⁹ est, & ab vtroq; equaliter (distat. 8

¶Medij numeri, ij dicuntur qui inter extremos siti sunt, & æquales differentias sortiuntur. 9

¶Latera numerorũ, ea sunt ex quorũ ductione ijdẽ nũeri ꝓducũtur. 10

¶Differentia proportionum, est proportio qua maior proportio minorem, cui refertur, vincit. 11

¶Similes, eædemve, siue æquales proportiones dicũtur quæ eadẽ potiũtur denominatione: & ea maior, quæ maiore: & minor quæ minore. 12

¶Dignitates.

¶Omnis numerus qualibet sua parte est maior. 1

¶Ea numeri maior dicitur pars, quẽ minorẽ denominatiõe sortitur: minor vero, quæ maiorem. 2

¶Omnis numeri monas pars aliquota est, & ab eo denominata. 3

¶Ois nũerus totus a monade est, quota ps ei⁹ monas ipsa nũcupatur. 4

¶Cuiuslibet numeri omnes partes simul collectæ suo toti æquãtur. 5

¶Ex maiorum numerorũ additione crescens numerus, eo maior est, qui ex minorum additione consurgit. 6

¶Qui æquali vnitatũ multitudine cõsurgũt: adinuicẽ sunt æquales. 7

8 ¶Ii numeri adinuicem sunt æquales, quorũ partes eiusdem denominationis sunt æquales inter se.

9 ¶Numeri eidem æquales, & inter se æquales erunt.

10 ¶Si æqualibus æquales adijciãtur nũeri, qui consurgũt æquales erũt.

11 ¶Si ab æqualibus æquales auferantur numeri, idémve communis: æquales qui relinquuntur erunt.

12 ¶Si æqualibus inæquales adiungantur numeri, inæquales qui emanant erunt.

13 ¶Si ab æqualibus inæquales numeri secentur, qui relinquuntur inæquales numeri erunt.

14 ¶Si numerus in monadem, vel in numerum monas ducatur, idem numerus semper consurget.

15 ¶Duobus inæqualibus numeris pręsentatis, si maioris differẽtia minori numero addatur, sit've à maiori numero ablata: qui relinquũtur numeri adinuicem sunt æquales.

16 ¶Si numerus in aliquẽ numerũ ducatur: numerus productus eadem proportione ad multiplicandũ se habebit qua multiplicans ad vnitatẽ.

17 ¶Si aliquem numerum numerus diuidat: diuidẽdus ad diuidentem eadem se habebit proportione, qua ad vnitatẽ idem diuidẽs se habet.

18 ¶Qui ad eundem numerum relati æquas seruant proportiones, sunt adinuicem æquales.

19 ¶Proportiones ex æqualibus proportionibus consurgentes, adinuicẽ sunt æquales.

20 ¶Omnis proportio super aliam addit proportionem, quæ cũ alia copulata primam efficit proportionem.

21 ¶Eadem est maioris numeri ad minorem proportio, quæ & partis aliquotæ ad partem aliquotam consimiliter nominatam.

22 ¶Si proportio primi numeri ad secundum, super proportionem tertij ad quartum aliquam addat proportionẽ: tũc ea erit proportio, quæ inter productũ ex ductione primi in quartũ, & secũdi in tertiũ cõsurgit.

23 ¶Si fuerint aliqui numeri cõtinue æqua progressione, aut proportione procedentes: primi ad vltimum proportio, ex omnibus intermedijs est composita.

24 ¶Si sint tres numeri continue æqua proportione se habentes: primi ad tertium proportio, est primi ad secundum duplicata: quòd si quatuor fuerint termini, primi ad quartum proportio, erit primi ad secundum triplicata, & de cæteris pari modo.

¶Petitiones.

1 ¶Numerum in infinitum crescere.

2 ¶Nullum numerum in infinitum decrescere.

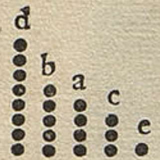
3 ¶Vnitatem pari numero adiunctam, imparem reddere.

❡Vnitatem impari adiunctam,numerum parem efficere. 4
❡Cuilibet numero infinitos dari æquales. 5
❡Maiorem numerum,minorem non numerare. 6

❡Proprietates.

❡Omnis numerus ex circum se duobus positis, & æqualiter ab eo distantibus compositi,est medietas. 1

❡Exemplum:4 habet supra se 5,& infra se 3,æqualiter à 4 distantes (nam vterq; à 4 per 1 distat) ex quibus 8 componitur,cuius 4 est medietas. Eodem modo si accipiamus 6,supra 4,qui à 4 per 2 distat, & deinde infra 4 recipiamus 2, qui æqualiter à 4 elongatur,& ex ipsis vnus numerus componatur: is erit 8, cuius 4 prius sumptus itidem est medietas. Et si supra 4 detur 7,& infra 1, qui æqualiter à 4 recedunt,efficies 8,cuius 4 est medietas:& in cæteris dic consequenter. ❡Demonstratur sic. Sit a quiuis numerus,b & c circumpositi,ęqualiterq; ab a distantes,b maior,c vero minor:& d sit cōpositus ex b & c:tunc ꝙ a sit medietas d,probatur,& ponamus differentiam cōmunem a ad c,& b ad a,esse e.Iam bene sequitur, b est maius a per e:subtracto igitur e,quod relinquitur est æquale ipsi a,per dignitatem 15. Et per eandem dignitatem sequitur,a est maius c per e:igitur addito e ipsi c,productum,ipsi a erit æquale:ergo residuum b,& productum ex e & c,adinuicem sunt æqualia,per dignitatem 9: sed residuum b,& productū ex e & c sunt omnes partes d, cū sint b & c cōponentes d:ipsum ergo d efficiunt,per dignitatem 5. Et vltra,d componitur ex b,& producto ex e & c, æqualibus:ergo quodlibet illorum est medietas ipsius d: & per consequens a,postquā cuilibet illorum est æquale, medietas d erit: quod erat demonstrandum.



❡Si numeri pares inuicē aggregētur: inde productus nūerus par erit. 2

❡Exemplum:2,4,6,8,10,12,14.Nam si 2 & 4 numeri pares componantur:producetur 6 numerus par. Etiam si 6 & 8 in vnum aggregentur:consurget 14 numerus par. Eodem modo si 10 & 12 & 14 numeri pares inuicem addantur : profluet 36 numerus par:& consequenter pari modo. ❡Demonstratur sic. Sint numeri pares a b, b c,c d, qui in vnum aggregentur, videlicet a d, tunc quòd totus numerus a d sit par, probatur:nam postquam quilibet numerorum a b,b c,c d,par est: partem dimidiam habet, per diffinitum 5,primi tractatus:productus igitur ex illis numerus, videlicet a d,dimidiam etiam partem habebit,& per consequens par erit:quod probādum sumpsimus.

❡Si par multitudo imparium numerorum in vnum numerum aggregetur:productus inde numerus par erit. 3

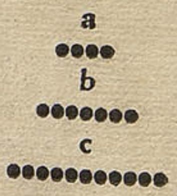
❡Exemplum 3,5:3,5,7,9:11,13.Nam si 3,& 5,par multitudo simul colligantur, efficietur 8 numerus par. Eodem modo si 3,5,7,9,qui pari multitudine sunt accepti,vtpote quaternario,simul aggregentur:proueniet 24,numerus par. Est pari arte dicendum,si 3,5,7,9,11,13 simul componantur:consurget 48,numerus par:& consequenter hoc modo. ❡Demōstratur sic. Sit par multitudo imparium numerorum a b,b c,c d, d e,qui in vnum numerum,scilicet a e aggregentur:tunc ꝙ a e numerus productus sit par,probatur: nam postꝗ quilibet numerorum a b,b c,c d,d e,est impar:si à quolibet eorum vnitas auferatur , omnis manens numerus par erit : ergo ex ipsis manentibus compositus, par etiam erit, per præcedentem proprietatē,sed ablatarū vnitatū multitudo,parem efficit numerū:qui si primo pari composito addatur, numerus inde proueniens par etiam erit,per eandem præcedentem proprietatem,& ille est a e: igitur a e productus numerus par erit: quod erat probandum.

❡Si impar multitudo imparium numerorū in vnum coaceruetur numerum:qui inde producetur numerus,impar erit. 4

❡Exemplum,3,5,7:5,7,9:11,13,15.Nempe si 3,5,7,qui impari sunt multitudine,simul accipiantur:emanans inde numerus impar erit,scilicet 15. Etiam si 5,7,9, inuicem addantur,cōsurget 21,numerus impar. Pari modo si 7,9,11,13,15,qui impari numero, puta quinario, capiuntur, in vnum numerum aggregentur: producetur 55, numerus impar, & de cæteris hoc modo. ¶Demonstratur sic. Sit impar multitudo imparium numerorũ a b, b c, c d, qui in vnum numerũ a d, coaceruentur: quòd a d, productus numerus sit impar, probatur. nam si ab ipso c d, auferatur vnitas e d, residuũ c e, numerus par erit: & cum a c, per præcedentem proprietatem sit par, sequitur per eandem præcedentem a e, numerum parem esse: cui si vnitas e d, addatur, habetur a d, qui productus est numerus, imparem numerũ esse: quod sumpsimus probandũ.

5 ¶Si numerus par, & impar componantur, impar qui consurget, erit.

¶Exemplum, si 2 numerus par, & 3 impar, simul coniũgantur: consurget 5, numerus impar. Etiam si 4 numerus par, & 5 impar, copulentur: producetur 9, numerus impar. Eodem modo si 6 numerus par, & 5 impar, in vnum numerum aggregentur: consurgens 11, numerus impar erit, & hoc modo consequenter. ¶Demonstratur sic. Sit numerus par a, & impar b, & consurgens ex a & b, sit c: tunc quòd c sit impar, probatur. Si numero a, vnitas addatur, consurget numerus impar, per tertiam petitionem: quí si numero b, addatur, producetur numerus par, per tertiã proprietatem: à quo si vnitas ipsa subtrahatur, relinquetur ipsum c, impar numerus: quod erat demonstrandũ.



6 ¶Si à numero pari impar numerus auferatur, qui relinquitur, impar erit.

¶Nam si à 6 numero pari auferatur 3 impar: reliquum erit 3 numerus impar. Si à numero 10 pari, 5 impar subtrahatur: quod relinquitur, est 5, etiam impar. Deinde si à 12 pari, 7 impar auferatur: reliquum erit impar, puta 5, & consequenter. ¶Demonstratur sic. Sit numerus par a b, à quo impar a c, auferatur: tũc quòd residuum, puta b c, sit impar, probatur: & assignetur in residuo b c, vnitas c d: tunc sic, ex illa vnitate, & numero ablato efficitur a d numerus par, per quartam petitionem: & cum ex hypothesi a b, sit par, sequitur quòd b d, etiam par erit, per præcedentem proprietatem: & vltrà, b d, est par, igitur ei addita vnitate c d, consurgens numerus, puta b c, erit impar, per tertiam petitionem: sed b c, est residuum a b: igitur residuum a b, est impar: quod erat demonstrandum.

7 ¶Si à numero pari, par numerus secetur, reliquus numerus par erit.

¶Exempli gratia, si à 4 pari, secetur 2, etiam par: reliquus par erit, puta 2. Et si à 6 pari 4 par auferatur: quod relinquitur, par erit. Etiam si ab 8 pari, 4 par subtrahatur: residuum scilicet 4, par erit: & consequenter. ¶Demonstratur sic. Sit numerus par a b, & pars ablata a c, tunc ꝙ reliquum, videlicet b c, sit par, probatur: nam si impar esset, sequitur per præcedentem proprietatem a c, imparem esse, quod est contra hypothesim: igitur b c, par est: quod erat demonstrandum.

8 ¶Ex omni numero primo, & quolibet quem non numerat, primi adinuicem numeri surgunt.

¶Exemplum: ex 2 numero primo & 3, quem 2 nõ numerat, numeri primi adinuicem emanant. Nam 2 & 3, sola 1 est communis mensura, & per consequens 2 & 3 numeri, adinuicem primi dicuntur. Etiam ex 3 numero primo, & 8 quem non numerat, primi adinuicem surgunt. Q uemadmodum ex 5 primo, & 9 quem non numerat, primi adinuicem profluunt. Sed ex 3 numero primo, & 9 quem numerat, primi adinuicem nõ consurgent: quoniam præter 1, ipsis est communis mensura idem 3. Nam omnis numerus in se ductus, & suijpsius, & producti communis mensura vocatur: 3 igitur & 9 adinuicem compositi, vel communicantes, commensurabilésve numeri vocãtur. ¶Demonstratur sic. sit numerus primus a, & is quem non numerat sit b, tunc quòd a & b sint primi adinuicem, probatur. bene sequitur: a non numerat ipsum b, per hypothesin, & est numerus primus, ergo ipsum a sola 1 metitur, per diffinitum 11 primi tractatus: sed eadem 1, ipsum b etiam metitur per tertiam dignitatem: ipsos ergo a & b, communi mensura sola 1 metietur: igitur ex 12 primi tractatus diffinito, a & b primi adinuicem sunt dicendi: quod erat demonstrandum.

¶Si numerus primus alicui numero referatur, ijdẽ relati numeri ad- 9
inuicem primi erunt.

Exemplum,2,3:3,8:5,9. Nam si 2 numerus primus,3 referatur:constat 2 & 3 numeros adinuicem primos esse. Eodem modo si 3 numerus primus,8 comparetur,& si 5 numerus primus,9 referatur:ipsi adinuicem relati,numeri adinuicem primi dicentur. ¶Demonstratur sic. Sit numerus primus a, & numerus cui refertur,b: tunc sic, aut a & b sunt adinuicem primi:& habetur propositum.aut sunt compositi adinuicem, & si sic:ergo eos aliquis numerus metitur: esto igitur c.tunc bene sequitur, c metitur a b, ergo metitur a numerum primum, quod est impossibile per 12 diffinitum primi tractatus: ipsi ergo a b compositi adinuicem non sunt: sunt ergo adinuicem primi: quod oportuit demonstrare.

a b c

¶Si duo numeri adinuicem primi fuerint, quorum alterum aliquis 10
numerus metiatur, numerus ille metiens ad alterum primus erit,hoc est metiens,& alter numerus,primi adinuicem erunt.

¶Exemplum,3,4:5,8:7,9.Nam 3 &4 numeri adinuicem primi sunt, cum sola monas sit illis communis mensura:& quoniã 4 metitur 2,sequitur 2 metientẽ & 3 esse numeros adinuicem primos. Etiam 5 & 8 eodem modo se habent: nec minus de 7 & 9, alijs'que infinitis adinuicem primis censendum est. ¶Demonstratur sic. Sint dati duo numeri adinuicem primi a & b,& alterum istorum,puta a metiatur aliquis numerus, videlicet c.tunc quòd c & b sint adinuicem primi,probatur. Nam dato opposito,scilicet ipsos c b esse non adinuicem primos:ergo eos aliquis numerus metitur, sit igitur qui eos metitur ille numerus d. tunc sic, bene sequitur, d metitur c b, igitur metitur c,& c metitur a,ergo d metitur a,& metitur etiam b:metitur ergo a b primos adinuicem existentes,quod implicat,per 12 diffinitum primi tractatus:ergo ipsi c b sunt primi adinuicem numeri,quod ostendere nitebamur.

b a c d

¶Omnem numerum compositum,numerus primus metietur. 11

¶Exemplum,4,6,8.Nam 4 numerus compositus,à binario numero primo mensuratur,& 6 compositus,à 3 numero primo metitur: etiam 8 , compositus , à 2 primo numero mensuratur : & hoc pacto deinceps. ¶Demonstratur sic. Sit datus compositus a,tunc quòd a à numero primo mensuretur,probatur. Nam bene sequitur,a est numerus compositus, ergo aliquo numero metitur, per 13 diffinitum primi tractatus: sit igitur metiens numerus b, tunc vel b est numerus primus,& inde habetur propositum,vel compositus,& sic eum aliquis metitur numerus, sit igitur c. & postquam c metitur b,& b ipsum a mensurat, sequitur quòd c ipsum a pariter mensurabit : vltrà, vel c est numerus primus,& habetur intentum,aut compositus, & sic eum aliquis numerus dimetitur: qui & b & a pariter mensurabit:& cum nec in a nec in aliquo numero possibile sit infinitos reperiri numeros inæquales:deueniendum igitur erit ad aliquẽ numerum primum , partem ipsius a, quæ & a & eius partes numeros compositos simul metiatur.Omnem igitur numerum compositum,numerus primus metitur:quod demonstrasse oportuit.

a b c

¶Omnis numerus,aut primus est,aut eum aliquis primus metitur. 12

¶Exemplum:2,3,4.Nam 2 est numerus primus,cum sola eum metiatur vnitas. Eodem modo 3,primus est. Et 4 compositus,quoniam numerus binarius eum metitur: & de alijs pari modo. ¶Demonstratur sic. Sit datus numerus a, tunc aut a est numerus primus,& habetur petitum:aut est numerus compositus,& si sic:eum aliquis numerus metietur,per 13 diffinitum primi tractatus,qui & erit primus,per præcedentẽ. Omnis igitur numerus primus est,aut eum aliquis primus metitur:quod demonstrare intendebamus.

a a

FINIS ARITHMETICAE THEORICAE.

IOANNES MARTINVS, SILICEVS, DIOCESIS PACENsis, generosissimo domino Alphonso Manrrique, Pacensi episcopo, felicitatem perpetuam.

Longe mihi præclarius semper visum est, antistitum vigilantissime, animi, quàm corporis viribus gloriam comparare: & defecatorum morũ, quàm diuitiarum cultura perpoliri. Hæc enim terrena, quæ fortunę ludibria merito appellarim, instar bullæ cito pereunt, & obliterantur: ingenij vero, & præcipue virtutis monumenta, vetustate reflorescunt, perenniorá que efficiũtur: quibus solis ad nominis immortalitatẽ patet aditus: Hinc Alexander ille magnus, gẽtium quondã terror, pertinaciter asseuerabat, longe nobilius multo esse præstantius literis antecellere, quàm imperio, atque diuitijs. Et licet cuiuis hominum ordini doctrinæ sublimitas non mediocrẽ pariat gloriam: generosos viros præsertim pastorali dignitate decoratos ipsa locupletat, & perficit maxime: quæ dos præstantissima, quod sacrosanctum munus, religiosissime præsul, haud aliter in te sobolescit, & pullulat: ac apes in hybla, odores in Arabia, & aquæ in Nilo. Nihil enim te deficit, quod classicum virum, heroá ve summum habere deceat. Vnde tuas laudes percurrere si vellem: huiusce orationis (quod de Pompeiana virtute Tullius prędicabat) difficilius esset exitum, quàm principium inuenire. tanta in primis natalium claritudine profectus es: vt nulli nobilitatis præstantia merito, optimóq; iure cedere nec possis, nec debeas: & quod longe pluris faciundum est, tali tantæque parẽtum tuorum generositati, tam integram vitæ sanctitudinem, & tantum eruditionis splẽdorem copulasti: vt plus à te speciminis acceperit episcopalis dignitas, quàm tu ab ea retuleris ornamenti. Pythagoras ille, qui primus philosophi nomen sibi vendicauit, inter non pauca quæ humano generi saluberrima documenta præcipit: in primis admonet deum religione colendum esse, animum vero disciplinis venustandum: tu tanquam Pythagorici documenti obseruator accuratissimus, ita religionis honore polles, ita doctrina fulgescis, & splendicas: vt in clarissimorum antistitum albo conscribi facile merearis: obis que sic tuas partes, vt consono ore, sacerdotum decus, & pręsulum gemmam te vocitent omnes. Tanta es diligentia in dei gregem candidissimę vitæ exemplo pascendum, vt oues palabundas, & à pascua domini segregatas, ad viam salutis, & iustitię semitam reuoces: quo bono nihil melius, quo officio nihil prælato dignius excogitari potest. Huic adde clementia Dictatorem, Cæsarem liberalitate, Cymonem elegantia, cultus victúsque splendore Lucullum, grauitate Catonem, patientia Socratem, mirabili apparatu Hortensium, facundia Demosthenem, prudentia cõsilio que Octauium Cæsarem, vel æquas vel antecellis. Inde fit vt Carolus ille Hispaniarum rex serenissimus Alexandro magno, & Hãnibali pene virtute imperatoria, simul & possessionum maiestate comparandus, te in regiam suam asciuerit, & ascitum fauorabiliter tenuerit. Hæc omnia cum mecum reuoluerem, reuerendissime in Christo pater, nullum te inueni digniorem, nullum commodiorem: cui hæc ingenioli mei xeniola, primarios q; labores nostros dedicarem: quippe qui es in omni genere dicendi absolutissimus. Non enim me latet, impensius temeritatis ne accuser, id opusculum tua paternitate multo esse inferius: sed qua in alios es mansuetudine, & beneuolentia: te in me tuum spiritualem filium vsurum non despero. Generosi sane animi est non minus exilia, quàm momentosa, & preciosa hilari fronte, manúque obuianti excipere. Has igitur nostras (quantulæcunque sint) primitias, horis succisiuis elaboratas, suscipere non dedigneris. quod à te factum si audiero, magis, ac magis enitar ingenij cultum pulchrius leuigare, & animo quàm corpori saginam suppeditare. Vale igitur ecclesiæ decus, iuris que pontificij iubar nitidissimum. Et Ioannem Martinum Siliceum, nouitium famulum, patrocinio tuo humaniter confoue.

Alexãder magnus. Pythagoras. Dictator Cæsar. Cymon. Lucullus Cato Socrates Hortẽsi⁹ Demosthenes Octauius Cæsar.

IOANNIS MARTINI SILICEI, IN ARITMETICEN Praxin præfatio.

Omnibus in ore est, lectores florentissimi, quæcunque à supremo rerum opifice emanarunt, numeri rationem habuisse. Nempe si diuinam illam substantiam contemplemur, eam monadibus tribus, eisdémque diuinis personis fulcitam inuenimus: quare ternarium numerum eidem substantiæ diuinæ coęuum ponere necessum est. Et si ad dei sublimis opera, intellectus acumen dirigamus: ea omnia, numerosa vnitatum multitudine apprehendemus In principio enim creauit deus cælum, & terram (Genesis primo) vbi per cælum, superiorem illam orbium, & planetarum machinam intelligunt expositores: per terram vero, ea quatuor sibi inuicem obuia sentiunt elementa: numerum igitur si tollamus, in nihilum cuncta redigi oportet. Hæc est illa disciplina, quæ cælorum motus, & eorum lentos incessus, subtilésque numerat, & dignoscit: qua neglecta, Claudij Ptolemæi in astronomia facile principis diuina opera, necnon subtilissimi Alphonsi Castellæ regis tabulæ perquam doctæ nequeunt deprehendi: sub hac ipsa cuncti hominum status militant, atque viuunt. Quare talem, tantámque doctrinam aggredi non modo iucundum, & vtile: verumetiam necessarium esse arbitror: quam perinde Algorithmum plęrique authores dixerũt, quia nomine vir Algus, profunde hac in doctrina eruditus, eam primus posterioribus propalauit. ❡Hunc igitur Arithmeticæ Praxis librum, in quinque tractatus diuidemus. In quorum primo, de numeris integris secundum characteras fiet sermo. In secundo, de eisdem integris secundum calculos supputatorios pertractabimus. In tertio, physicas fractiones succincta breuitate annectemus. In quarto, de numeris fractis, siue numerorum fractionibus (quas vulgares dicunt minutias) discutiemus. In quinto autem, & vltimo, regulas, siue aureas quæstiones, nõ minus vtiles, quàm ingeniosas, in lucẽ adducemus. Etsi nonnulli Arithmetici recte censuerint numerãdi per supputatorios calculos artem, illi esse præponendam, quæ per characteras, & elementa docet numerare: ab eorum tamen bene dictis noster scribendi modus (quãuis oppositus videatur) discrepat minime: ij enim ordine naturæ procedunt, nos vero in præsentiarũ doctrinæ ordinẽ insequimur.

Numerorum diuinitas.
Genesis 1
Claudius Ptolomæus.
Alphonsus rex Castellæ.
Arithmetice cur algorithmus.
Operis diuisio.

DE NVMERIS SECVNDVM CHARACTERAS, tractatus primus.

Multis placere, omnium difficillimum est, inquit Demosthenes. Ea igitur de causa plærique literatissimi, eorũ vitam quodam silentio percurrerunt: hanc grauissimam Plutarchi sententiam insequentes, Silentium non est redditurum rationem: ideò Sophocles philosophus dicebat, Multa retinet silẽtium pulchra. Etsi nobis in hac parte multis placere sit difficile: ijs præsertim rudibus, qui cum nihil intelligant, cęteros pariter nihil intelligere arbitrantur: quædam in hac arte, quæ pulchra esse videntur, scribere statuimus, nec decẽs visum est, ea esse reticenda. Agemus igitur in hoc tractatu de numeris integris secundum Arithmeticos characteras, qui sunt decem. Et quoniam sequentium tractatuum hic primus est fundamentum, certáque regula: ideò longius in ipso quàm in cæteris morabimur: & numero Pythagorico, vtpote denario, decem constituemus diffinita, quibus totus hic primus tractatus (deo duce) absoluetur.

Demosthenes.
Plutarchus.
Sophocles.

DIFFINITA.

1 ❡Numeratio, est numeri per elementum, competentia've elementa ar

tificialis expressio. Numerare vero, est numerum per elementum, competentia've elementa artificiose exprimere.

¶Nam si quispiam ex te petat nouem ducatos exprimi arithmetice: id facies hoc pacto, 9. Si vero triginta scribi petantur: hoc modo facere oportet, 30. Quòd si mille, & quinquaginta scribere libet: hac arte operandum est, 1050. & de cæteris pari modo.

Numerationis finis. ¶Finis numerationis est, quemcunque numerum propositum, decentibus elementis atque limitibus locare: & eundem, quantus sit, interroganti debite explicare.

Vtilitas. ¶Seruit numeratio in primis Astrologis: deinde Physicis, atque Calculatoribus: & breuiter perquam multis hominum conditionibus.

PRIMO NOTANDVM EST pro huius diffiniti claro processu, decem esse elementa, quibus Arithmeticus vtitur, scilicet 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Horum nouem priora significantia dicuntur: vltimum vero, videlicet 0, nihil significat, ideo nihili elementum nuncupatur, nominibúsque alijs, vt theta, circulus, cifra: cui talis inest proprietas, vt si cuipiam, quibusdám ve elementorum significantium præponatur: inde illorum quodlibet incrementum sortiatur: deposito autem, decrementum sumat, vt satis in sequentibus patebit. Horum nouem elementorum significatiuorum 1, vnum significat: 2, duo: 3, tria: 4, quatuor: 5, quinq;: 6, sex: 7, septem: 8, octo: 9, nouem. Istorum primo denominatio est vnitas: secundo, binarius: tertio, ternarius: & sic de cæteris consequenter. ¶Aduerte tamen numerum in præsentiarum ad vnitatem vsq; extendi: quæ proprie non est numerus, sed numeri basis, & principium nuncupatur: vt in theorice dicimus, de vnitate differentes: & secũdum hoc sic venit signanda numeri diffinitio.

Nũerus. Numerus, est vnitas, vel composita ex vnitatibus multitudo. Numerorum, alius est digitus, alius articulus, alius ex his compositus.

Digitus. ¶Numerus digitus, est vnitas, vel numerus quouis denario minor. Ex qua diffinitione patet quodlibet elementorum significatiuorum, & solum tale, digitum numerum esse.

Articul⁹. ¶Numerus articulus, est numerus qui totus in decem æquas partes est partibilis, absq; vnitatis fractione: vti est 10, qui in decem vnitates est partibilis. & 20, qui in binarios decem adæquate partitur. 100 pariter, & 1000, articuli nuncupantur.

Cõposit⁹. ¶Numerus compositus, est numerus ex digito, & articulo resultans: vt 11 & 12. similiter 124: & breuitati studendo, omnem numerum inter duos proximos articulos locatum, compositum significamus.

Ordo in scribẽdis elemẽtis. SECVNDO NOTANDVM EST in numeratione necessarium admodum esse elementorum ordinem, pariter & loca consyderare. Ordo quidem in scribendis elementis præposterus in hac parte est tenendus: quem nobis Arabia tulit. Arabes enim in scribendo nobis opponuntur, à dextra incipientes manu, sinistram versus procedunt.

Documẽtum. ¶Pro documento ideo tenendum est, id elemẽtorum primum appellari, quod dextra manu sibi primam vendicat sedem: id'q; secundum, quod medio obiecto, primum sequitur: id vero vltimum, vltra quod, versus læuam eundo manum, nullum ponitur elementum.

Corollarium. ¶Ex his patet quouis numero signato, in quo multa reperiuntur elementa, quod illorum locetur ante, quod retro, quod ante & retro: ad diuersa tamen relatum. Istud minus obscure in præsenti figura videri potest.

R E T R O.				
Retro.	vltimum.	Secundum.	Primum.	Ante.
Sinistrum.	3	4	5	Dextrum.
A N T E.				

¶Loca, siue elementorum limites tot reperiuntur, quot & elementa. Si autem in aliquo numero tria tantum ponantur elemẽta, totidem in eodem limites, siue loca habentur: si 4, quatuor: cuiuis enim elemento valorem tribuit locus.

Elementorum valor. Elementorum quoduis primo loco, siue numeri principio (quod idem est) situm, seipsum semel tantum valet: loco autem secundo, decies: tertio, centies: quarto, millies: quinto, decies millies: sexto, centies millies: septimo, millies millies: & sic consequenter. Ista capiuntur, nulla introeunte cifra. sed vt clarius hæc comprehendantur omnia, tale ponitur documentum.

Documẽtum. ¶Data quauis linea numerali, in qua multa reperiantur elementa, illorum quodlibet, primo dempto (quod vnitas dicitur) dena, centena, vel millena denominabitur: quamuis centum, infinita ve in eadem linea sint elementa. Dicitur ergo elementorum secundum, dena: tertium, centena: quartum, millena: quintum, dena: sextum, centena: septimum, millena: deinceps octauum, dena: nonum, centena: decimum, millena: & ita de alijs, per easdem treis denominationes continuo incedendo. Differenter tamen, quoniam quartum elementorum simplicem millenam nuncupamus: septimum vero, duplicatam, scilicet millies millenam: decimū, triplatam, videlicet millies millies millenam: & ita de reliquis pari modo ascendendo, dicendū est. Id autem de denis, & centenis contingit minime: non enim dicimus decies dena, decies decies dena, nec centies centena. Decies igitur, & centies, aut per se tantum, aut cum millenis ponamus, sic dicēdo: decies millena, decies millies millena, centies millena, centies millies millena. Hæc omnia sequenti patere possunt figura. ¶ Pro qua intelligenda aduerte ꝙ elementū, quod nullo interposito medio crucem sequitur, vnitas nuncupatur, & se tantum semel valet, 3 videlicet: aliud autem illi coniūctum, dena dicitur, seipsum decies valens, scilicet quinquaginta: aliud elementum, quod tertium est, centena nuncupatur, se centies valens: aliud quidem, quod quartū est in ordine, millena dicitur: quintum vero, decies millena: sextum, centies millena: septimum autem, millies millena, termino clariori (& eodem Castellano) quento: octauum, decies millies millena, siue decies quento dicitur: nonum, centies millies millena, siue centies quento vocatur: decimum, millies millies millena, termino magis succincto (& eodem Castellano) millon: & ita de reliquis dic cōsequēter.

Sequētis figuræ declaratio.

7	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4	4	3	3	3	2	2	2						✠
cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	cm	dm	m	c	d	v
9	3	7	8	6	4	5	3	6	4	7	8	6	3	5	1	6	8	2	9	7	4	5	3
					s						m						q						

¶ Si autem totius lineæ valorem per ducatos exprimi quæras: dico in ipsa omneis hos contineri, scilicet noningentos, triginta septem millies millies millies millies millies mil lies mille: & octingentos, sexaginta quatuor millies millies millies millies mille: & quingentos, triginta sex millies millies millies millies mille: & quadringentos, septuaginta octo millies millies millies mille: & sexcentos, triginta quinq; millies millies mille: & centum, sexaginta octo millies mille: & ducentos, nonaginta septem mille: & quadringentos quinquaginta tres ducatos. ¶ Sed quoniam in hac numeri explanatione, inutilis apparet illa millenariorum assidua repetitio: ideo longe melius, & clarius sub hac forma valorem totius lineæ explicare poteris: dicēdo, noningētas, triginta septem mille, & octingentas sexagintaquatuor summas: & quingentos, & triginta sex mille, & quadringentos, septuaginta octo millones: & sexcentos, trigintaquinque mille, & centum, sexagintaocto quentos: & ducentos, nonagintaseptem mille, & quadringentos quinquaginta tres ducatos reperiri.

Expressio valoris figuræ antecedētis.

TERTIO NOTANDVM EST, si quempiam numerorum scribere volueris, à manu dextra initiando, in sinistram procede: & videbis an ab vnitate initium sumat: quod si contingat, illam primo situabis loco, per elementum illi correspondens: vnum per 1, duo per 2, tria per 3 &c. sinautem taliter eueniat, primum occupet locum cifra. deinde consydera vtrum in tali numero simul ponatur dena, & illam per conueniens elementum, secundo limite pones, decem per 1, & viginti per 2 &c: si vero nulla talis denominetur dena, ibidem cifra locetur: sic de centenis, millenis, alijs'q; ascendentibus elementis faciendum est. ¶ Hæc omnia haud difficilibus exemplis aperiuntur. Si abs te quispiam quærat, illi per elementa, siue præhabitos characteras scribas mille, ducētos, quinquagintaseptem ducatos: illos sic scribere debes 1257. Si autem petatur scribas mille, ducentos, & quinquaginta ducatos: illos sic significabis 1250. Si autem quæratur abs te scribas mille, ducentos: taliter operaberis, 1200. Si mille, & quinquaginta scribi petantur: id facies hoc modo 1050. Tamen vnū aduertendum est, si aliquem exprimere volueris numerum, incipiendum esse ab vltimo, ad primum vsq; veniendo: vt si exprimere volueris quot ducatos hic numerus contineat, 1527, dices mille, quingen

Scribēdi in Arith. modus.

Exēpla.

Exprimēdi mod⁹.

Documẽtum.

tos,& viginti septem. ¶Tenebis tamen in hac materia hoc generale documẽtum, vt cuiusvis numeri vltimus locus nulla impleatur cifra:ibi enim superfluit. Inde sequitur, si significatiuorũ vnico elementorũ o adiungi contingat, tantũ semel locabitur, & hoc primo loco: si autem duobus addatur elementis, in duplo pluribus locis, & vltrà vno alio, vtpote tribus. At si tribus significatiuis addatur elemẽtis, duo acquiret loca: vnde plusquam tribus in locis, scilicet quinq; poterit reperiri. Si vero quatuor significatiuis adiungatur, septimum attinget locum. Et de reliquis, per assiduum binarium locorum incremento, pari modo sentiendum est. Hæc tamen subiectis innotescunt formulis.

exẽplũ primi	exẽplũ secũdi	exẽplũ tertij	exẽplũ q̃rti	exẽplũ si o quinq; addat̃ signifi.
10	1020	102030	10203040	1020304050

¶Pro huius tandẽ diffiniti cõplemẽto, linealẽ infrapositã inspicito figurã, quæ ab vnitate, ad centenariũ vsq; numerare docet numerũ. hac enim duce, modica adhibita diligẽtia, in quãtumuis magnũ (nullum inferiorẽ prætermittẽdo) poteris deuenire numerũ.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2 ¶Additio, est vnitatum, numerorúmve in vnam summam collectio. Inde addere, est vnitates, vel numeros in vnam summam colligere.

Additionis finis. Vtilitas additiõis

¶Exemplum, 1 & 1, binarium componunt: ideo illarum duarum vnitatum summa, binarius nuncupatur. Pari modo 1 & 4 & 7 simul collecti, 12 constituunt numerum: qui eorundem summa dicitur. Etiam 15 & 15 simul aggregati, 30 numerum: qui eorundem summa priorum numerorum nuncupatur. ¶Huic additioni finem assignamus, expedite vnitates, numerósq; vnica comprehendere linea: qui diuersis primitus lineis, siue limitibus concipiebantur. ¶Seruit hæc species prope infinitis hominum statibus. Primo astrologis, pro addendis minutorum, secundorum, tertiorum, & cæterorum multitudinibus. Deseruit etiam calculatoribus: & breuiter cuius hominum conditioni.

In additione cõsyderãda

PRIMO NOTANDVM EST pro additionis facili intellectu, quatuor in hac specie consyderanda esse: primum, numerus cui debet fieri additio: secundum, numerus, siue numeri addendi: tertium, linea interiecta: quartum, numerus productus. ¶Modus autem scribendi debet esse talis, primo loco superiori numerus cui debet fieri additio scribatur: deinde sub illo numerus, vel numeri addendi, sic vt vnitas sub vnitate, & dena sub dena, & ita de reliquis ponantur: postmodum directa linea interiecta sub illis numeris in longum pertracta: vt præsens ostendit figura.

Numerus cui debet fieri additio	8 7 5 3
Numerus addendus	4 2 3 6
Linea interiecta	————

Postremo sub linea numerus productus situabitur: vt in sequenti notabili docebitur.

Operãdi modus in addendo

SECVNDO NOTANDVM EST in additione operationẽ esse incipiendam à primis digitis, per medios (si qui fuerint) trãseundo, vsquedũ ad vltimos deuentum fuerit. Si enim numeri addendi in solis primis limitibus reperiatur, ab infimo incipias, versus superiorẽ eundo, & omnes simul addas: & numerũ prouenientem sub linea locabis. Exempli gratia, sint numeri dati 3,5,7,9, hi sic veniunt addendi, 3 & 5 sunt 8, & 7 sunt 15: vltimo, 9 addendo numerum: 24 pro summa omnium simul sumptorum habebis. Horũ patet exemplũ. ¶Si autem numeri addẽdi duos, tres, quatuórve, aut plures compleuerint limites: colliges primo numeros primas occupantes sedes, ab inferiori ad superiores procedendo: & videbis an numerus proueniens sit digitus, articulus, vel compositus. Si numerus ille sit digitus, per conueniens elementum sub linea

9
7
5
3
24

primo subsignetur limite. Si autem talis numerus fuerit articulus, primo limite, sub linea cifra locetur, & numerus ille seruetur in mēte, & secundū decimæ eius partis denominationem, elemētis secundorum limitū addatur: sic videlicet ꝙ si ille articulus fuerit denarius, secundū decimæ partis denominationē, quæ est vnitas, elementis secūdorum limitū addatur: si vero articulus ille fuerit vigenarius, secūdum eius decimæ partis denominationē quæ binarius est, elemētis secūdorum limitum addatur: & si contingat articulū illum esse centenariū, aut maiorē numerum queadmodum sæpe in prolixa additione cōtingit, in qua centū, vel plures numeri sunt addēdi: secūdum eius decimæ partis denominationē, quæ est denarius, elemētis secundorum limitum addatur: & sic de reliquis. Si cōtingat tertiū, scilicet illum numerū esse compositū, sub linea, limite primo, digitus illius ponatur, seruato in mēte articulo, qui secundū eius decimæ partis denominationē, elementis secūdorū limitum addatur, eo quo prius dictū est modo. Primis autem limitibus expeditis, ad secūdos deueniendū est, in quibus taliter est operādum, ac in primis: deinde eundū est ad tertios: postmodū ad quartos: & consequēter ad alios, si qui fuerint. Vno tamen seruato, videlicet quum elementa secundorum limitum, tertiorúmve, & aliorū limitum colligūtur, eadem, non vt denæ, vel cētenæ, sed vt vnitates nominentur. ℂHæc omnia familiari aperiuntur exemplo. sit numerus, cui additio debet fieri 700643. numeri autem addendi 900052, & 814. qui, vt dictum est primo notabili, & vt figura ostendit, disponantur. Deinde operaberis hoc pacto, prima elementa primorū limitum addas, ab inferiori, puta 4, incipiendo: deinde ad binarium ascendas, quem 4 addas: postmodum ternarium in primo limite superiori capias, cui addas numerum prius habitum, videlicet 6, ex quorum additione, 9 numerus prouenit, qui digitus est, & venit locandus limite eodem, primo scilicet, per conueniens elementū, sub interiecta linea. Deinde veniendum est ad secūdos limites, & dic, 1 & 5 sunt 6, & 4 sunt 10, quæ articulum componunt numerum: ideo ipso in mente seruato, sub linea limite correspondenti, 0 ponatur. Deinde digitus ille in mente retentus, elementis tertiorum limitum, secūdum eius decimæ partis denominationē, quæ vnitas est, addatur, sic 1 & 8 faciunt 9, relicta 0, (quæ vt dictum est nihil significat) ibis ad supremū elementū, quod est 6, cū quo sumptus 9, numerū 15 facit, qui quidē compositus est: pones igitur illius numeri compositi digitū, scilicet 5, sub linea limite correspondēti, retento in mente articulo, qui secūdum eius decimæ partis denominationē, quæ est vnitas, elemētis quartorū limitum addatur. Sed quoniā nullum in eisdē significatiuum reperitur elementū, eundem articulū sub linea quarto limite locabis, secundū eius decimæ partis denominationē, videlicet vnitatē. Deinde eundum est ad quintos limites in quibus nullum reperitur significatiuū elementū, sed solum cifræ: ideo sub linea limite correspondēti, 0 ponatur. Quo facto eundum est ad sextos, & vltimos limites, & dic, 9 & 7 sunt 16, pones igitur digitum, videlicet 6, sub linea, limite sexto, & articulum remanentem, secundum eius decimæ partis denominationem, quæ est vnitas, sub linea vltimo limite, videlicet septimo, pones. Quibus igitur peractis, numerus sub linea repertus, summa, siue numerus productus, ex tali additione dicetur: & sub tali forma dispositionem habebit.

		Operationis exemplum.
	7 0 0 6 4 3	
	9 0 0 0 5 2	
	8 1 4	

Numerus cui debet fieri additio	7 0 0 6 4 3
Numeri addendi	9 0 0 0 5 2
Linea interiecta	8 1 4
Numerus productus	1 6 0 1 5 0 9

4
2 2
4

ℂAduertendum tamen est, si in omnibus primis limitibus numerorum addendorum ponatur 0, ad secundos eundum est, prius tamen posita cifra sub linea, limite primo, directe respondenti primis limitibus numerorum addendorum. Si vero in aliquo primorum limitum 0 ponatur, & in aliquo non: nullus est habendus aspectus ad 0, sed solum ad significatiua elementa. Est insuper aduertendum, si in omnibus secūdis, tertijs, vel quartis &c. limitibus, cifræ ponātur: 0 pariter in summa sub linea, limite correspondenti, ponatur: & hoc si nihil remanserit in mēte, ex præhabita operatione: quòd si quid in mente repositum fuerit, id in summa, loco directe correspondenti, per conueniens elementum ponatur, hoc est secundum eius decimæ partis denominationem, & hoc si talis denominatio decimæ partis sit numerus digitus: si articulum numerum faciat, ipso in mente seruato, sub linea, limite correspondenti ponantur o: & deinde immediate sequentibus limitibus numerorum addendorum, numerus ille in mente seruatus, secundum denominationem eius decimæ partis, prioris denominationis addatur: & consequenter pari modo dicas. Si autem talis numeri in mente seruati denominatio decimæ partis numerum faciat compositum: illius numeri compositi digitus sub linea ponatur, loco correspondenti, articulo in mente retento, pro limitibus immediate sequentibus numerorum addendorum: quem quidem articulum numeris addendis, secundũ eius decimæ partis denominationem addes, secundum quod dictum est: & de cæteris consimili efficiatur modo. His claris exemplis, quæ dicta sunt possunt cognosci.

7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	o	o	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	1	3	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	o	4	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	6	o	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	1	7	1	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	5	o	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	4	o	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	2	6	2	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	8	o	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	6	o	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	o	2	4	o	o
7	o	9	8	o	o	9	9	o	1	1	o	o	o
84	1	7	6	1	o	8	108	o	8	7	4	o	o

TERTIO NOTANDVM EST pro huius diffiniti cõplemento, tres esse probationes, quibus additio (quæ prima numerationis species dicitur) probari potest. Prima est cõmunis, & nouenaria. Secunda partim latebrosa, partim vero insusitata, quam septenariam dicunt. Tertia quidem per subtractionem fieri habet. ¶Pro primæ probationis intellectu, est aduertendum plærosq; Arithmeticos additionẽ per 9, hac via probare. A numeris addendis abstrahatur 9 quotiescunq; abstrahi potest: & si quę remanet nota, siue numerus qui 9 minime attingat, ille in mente habeatur, vel, ne obliuioni detur, antepposita operationi recta linea, in capite illius locetur: deinde ad summam siue prouenientem numerum, sub linea interiecta locatum, eundum est: à quo toties 9 numerus abstrahatur, quoties abstrahi permittit: & si quis remãserit digitus, 9 numerum non attingens, ille in mente seruetur, vel in altero lineæ ponatur extremo: & videbis an duæ illæ notæ, siue numeri in extremis lineæ partibus positi sunt æquales, vel non: si primum eueniat, operatio erit valida: si autem secundũ contingat, cassa erit & nulla. ¶In hoc signato exemplo, abstrahendo à numeris addendis 9, quotiescũq; potest abstrahi, nota, siue numerus manens, est ternarius: & consimilis in summa remanet numerus, abstracto 9, quotiescunq; abstrahi potest: ideo operatio est valida, vt asserunt. Est insuper aduertendum, ꝙ sæpenumero contingit abstracto 9, à numeris addendis, quotiescunq; potest, nihil remanere pro nota: imò cum hoc euenerit, ponenda est in capite lineæ o: & ad summam accedes, videndo vtrum semoto 9 quotiescunq; potest, nihil remanserit: quod si euenerit, ita in altero lineæ extremo ponenda est o, & operatio bene valebit. infra vero dicetur, vbi illius oppositum accidat. In isto autem exemplo, à numeris addendis ter abstrahi potest adæquate 9, & nullus remanet numerus, ideo in capite lineæ, o ponebatur: à summa vero bis tantum abstrahi potest 9, pariter nihil superest, quare in pede lineæ, o ponebatur: ideo operatio est valida, quia nota vtrobiq; posita, est eadem. Contingit autem quandoq;, ꝙ nec à numeris addendis, nec à summa potest abstrahi nouenarius: ideo pro talibus sufficit digitos resultãtes esse æquales, videlicet digitum illum

Prima ꝓbatio, q̄ nouenaria.

Primę ꝓbationis exẽplum

Exemplũ.

				3
4	3	1	5	
5	o	9	3	
9	4	o	8	3

Exemplũ.

				o
3	6	o	2	
4	7	1	4	
8	3	1	6	o

1899
19815
1120 |
5000 |
5

qui ex elementis significatiuis numerorum addendorũ resultat, & illum qui in summa reperitur. Quãdoq; autẽ à numeris addendis sæpe abstrahi potest 9, vbi à summa semel tantũ abstrahi non potest, ecõuerso autẽ euenire non potest: ideo pro talibus sufficit ꝙ abstracto 9, à numeris addendis quoties poterit, numerus remanẽs nouenarium non attingẽs sit æqualis digito in summa reperto. Istorũ omniũ exempla repertu sunt facilia. Hæc quidẽ est nouenaria probatio, quã cõmuniter loquentes in hac parte afferunt: eadẽ enim probare solent additionẽ rectã, aut obliquã esse. ¶Hanc probãdi viam nullã esse, facillime declaratur. Sequeretur in hoc exemplo, operationẽ bene valere: quoniã semoto 9 à numeris addẽdis, quotiescũq; semoueri potest, nota siue numerus remanẽs, qui nouenariũ numerũ non attingit, est senarius, & talis est numerus qui in summa remanet, subtracto pariter 9, quotiescunq; ab ipsa summa abstrahi potest: sed notum est illam operationẽ nihil penitus valere. Quare cõcludo probationẽ illam nouenariã insufficientẽ, & nullam esse: per illam enim solum cõcludi potest, scilicet si additio sit bona, notæ, siue numeri remanentes, qui nouenariũ non attingunt numerum, sunt æquales, cæteris intellectis. ¶Dimissa igitur tanq̃ inualida hac nouenaria probatione, ad aliam, quæ per 7 fieri habet, accedendũ est. Pro qua intelligenda, est aduertẽdum, ꝙ à quauis numerorũ addendorum linea, pariter & à summa, capiẽda est nota, & protracta recta linea ante operationẽ, debita sede est locãda: vnde à notis numerorũ addendorũ abstrahatur 7 quotiescũq; abstrahi potest, notã remanentẽ in capite lineæ ponendo: & si nota illa remanẽs, notæ habitæ à summa, quam in altero lineæ pede ponas, sit cõsimilis: operatio erit bona, sin autẽ, nihil valebit. Aduerte tamen isto modo à quauis numerorũ addendorũ linea capiendã esse notã. Debes à duobus vltimis elementis incipere, versus priora eundo, à quibus abstrahes 7 quotiescũq; potest abstrahi, & videbis an nihil pro nota remãserit: ꝙ si ita eueniat, ad alia duo elemẽta ibis (si quæ sint) à quibus pari modo subtrahes 7 quotiescũq; poteris: & si nihil pro nota supererit, ad alia duo præcedẽtia accedes, quousq; ad primũ deueneris elemẽtum. Si autem cõtingat abstracto 7 à duobus vltimis elementis, quotiescũq; subtrahi potest, aliquis remaneat digitus 7 minor: ille digitus loco denæ, se decies valens, capietur simul cũ antepenultimo elemẽto, quod vnitas reputabitur, se semel tantũ valenti, à quibus subtrahas 7 quotiescunq; poteris, si remaneat nota, quæ sit digitus minor septenario, loco denæ accipiatur, & figurã tertiam à fine præcedat, & cum ipsa nota quartũ elementũ à fine loco vnitatis sume, à quibus duobus subtrahes 7 quotiescũq; poteris: & fiat iste discursus per totã lineã, vsq; ad primũ elementũ inclusiue, & videbis an nota remanẽs in fine sit digitus, vel 0, quæ, recta linea anteposita numeris addendis, loco directe anteposito locetur. Iste discursus debet fieri in qualibet numerorum addendorum linea, pariter & in summa: inter numeros addẽdos intelligo etiam numerũ cui additio fieri debet. ¶Sed vt clarius hæc concipiatur: omnia facili aperiuntur exemplo. In prima huius exempli numerorum addendorum linea, duo vltima sunt 3 & 4, quæ 34 valent: à quibus subtracto 7 quotiescunq; subtrahi potest, remanet 6, qui immediate post 0 ponatur, & valebit sexaginta: à quibus semoto 7 quotiescunq; semoueri potest, 4 erit residuum, locandus immediate post secundum elementum loco denæ, qui simul, & præcedẽs figura 43 faciũt: à quibus ablato 7 quoties auferri potest, vnitas remanet, ipsaq; post primum elementum locata, valet decem, & primũ elementum sex, quæ simul sumpta sedenarium componũt numerũ: à quo deposito 7 quotiescũq; deponi permittit, remanens nota est 2, qui post antepositã numeris addendis lineã, directo ponatur conspectu. In secunda vero numerorum linea remanẽs nota est 6: in tertia autẽ est 0, illæ igitur habitæ ex numeris addendis notæ, addantur, & numerũ octonariũ habebis: à quo 7 quotiescunq; permittit, abstrahe, & digitus, siue remanẽs nota est vnitas, quæ in capite lineæ posita residet: & quia habita à summa nota est etiam vnitas, sequitur operationẽ bene valere: vbi autẽ notæ illæ inæquales essent, mãca esset probatio. Hæc est septenaria probatio minus vulgata,

Exẽplũ.

	6
6452	
3067	
9213	
	6

Primę probationis reprobatio.

Secunda probatio, quæ per septẽ fit.

	1
34036	2
16407	6
40957	0
91400	
	1

Secundæ probationis exemplum.

quàm sit præcedens nouenaria: qua (vt dicunt) bonam esse additionem ostenditur, aut nihil valere. ¶Hanc tamen septenariam probationē, perinde ac alteram nouenariam, nihil omnino valere sic ostendo. Sequeretur in hoc infra posito exemplo factam operationem, siue additionem, validam esse: quod tamen à vero est longe alienum. Solum enim ex hac probatione (si ita dicenda sit) concludi potest, hanc consequētiam valere: si operatio, siue additio debite fiat, probatio septenaria, vt declarata est, valebit. sed iam peteret aliquis, Quare est, si additio recte sit disposita, probatio nouenaria, pariter & septenaria tenebūt: non tamen oportet, vbi vtraq; probationum sit debite facta (vt declaratum est) additionem bene valere? Ad istud non respondeo: tum quia facillimum, tum etiam, quia ad practicum Arithmeticum tales enodare quæstiones spectat minime.

Septenariæ probationis improbatio

	6
6 4 0 2	4
3 0 9 6	2
8 5 6 7	
	6

¶Dimissis igitur his duabus (vt dicunt) probationibus, ad tertiam probationem, quæ per subtractionem fieri habet, & in quauis additione absq; instantia tenet, properandum est. Subtrahes igitur à summa quemlibet addendorum numerorum, præter numerum cui additio fiebat: & si residuum à summa fuerit illi æquale, operatio dicetur bona. sinautē: inutilis, & mala.

Tertia probatio, certior.

¶Sed quoniā videtur ignotum per ignotius probari, & circulationem esse in modo probandi, cum (vt in sequenti capite dicetur) subtractio per additionē habet probari: ideo aliam in præsentiarū probationem tibi assignare intendo. Pro qua perfecte intelligenda, si velles facta additione cognoscere, vtrum bene operatus fueris, primo omnes addēdorum numerorum digitos simul in vnum colligere debes: & videbis an in summa consimilis correspondeat numerus, eodem limite. q̄ si æqualis reperiatur numerus, discurras, per denas numerorū addendorum, easdem in vnum colligendo numerū: ipsis'q; apprehēsis, respice an in summa consimilis denarum reperiatur aceruus, quo inuento ad centenas addendorum numerorum, illud idem faciendo ibis, & consequēter ad vlteriora loca, si quæ fuerint. & si euenerit in quouis summæ limite talem reperiri numerū, qualis in addendorum numerorum limitibus correspondentibus repertus est: operatio erit integra. Exempli gratia. Sicut in aggregato vnitatum, siue digitorum numerorū addendorum quatuor reperiūtur vnitates, totidem etiam in summa vnitates reperiuntur: & quemadmodū in numeris addendis, sex inueniuntur denæ, sex etiam in summa ponuntur: & de centenis, atq; millenis idem cōtingit: ideo bona est illa operatio.

Quarta probatio verissima

Vltimæ probationis exemplū

5 3 4 1
4 5 2 3
9 8 6 4

Est tamen aduertendū qualiter in hoc exemplo infra posito procedēdum sit. Quoniam licet primo limite nulla videatur difficultas, eo q̄ tot inueniuntur vnitates in summa, limite primo, quot reperiuntur in addendorum numerorū limitibus correspondentibus: videtur tamen, non tot denas ipsi summæ correspondere, quot in addendis numeris reperiuntur. quum ita sit decem denas in numeris addendis inueniri, vbi in eodem limite in summa, o reperitur. etiam de cētenis aliter contingit, q̄ de vnitatibus: quapropter est consyderādum in talibus operæprecium esse vicinis vicina accōmodare elementa. volo enim dicere in isto exemplo, centenas debere denis accōmodare, & millena cētenis, intellige in summa in qua vtroq; loco o ponitur, videlicet limitibus secundo, & tertio: debet igitur quartus limes ipsius summæ, in quo millenæ ponuntur, tertio limiti, qui est centenarum locus, aliquid accōmodare: deinde tertius limes secundo limiti, in quo denæ ponuntur ex accommodato etiam accommodare. Capiamus igitur à quarto limite ipsius summæ vnam millenam pro tertio limite: qua accepta, solum septem remanebunt millenę, & tertio limite millena illa cētenas decem valebit, à quibus vnam centenam pro secundo capiemus, quę in eodem decem valebit denas, & sic nouem solum limite tertio centenæ manebunt: hoc quidē discursu peracto constat manifeste operationem bene valere, quum tot reperiuntur vnitates in summa, quot in numeris addendis: etiam tot denæ, tot centenæ, pariter & millenæ, nec plures, nec pauciores. Hæc enim est probatio, quæ quāuis longa videatur, sine instantia in quauis additione tenebit, longissima vero, vbi plurimę fuerint lineæ numerorum addendorū, vnde difficillima erit, qua nemo vtatur. in paruis tamen, & facilis & certa.

4 5 3 2
3 4 7 2
8 0 0 4

305410
967802
143050
1416262

¶Subtractio, est vnitatis, vel numeri, ab vnitate, vel numero ablatio: 3
vt inde relicta appareat summa. Hinc subtrahere, est vnitatem vel numerum, ab vnitate vel numero auferre.

¶Verbi gratia à 7 remouendo 3, remanens numerus est 4. Et à 15 ablato 7, manens summa est 8. Ita à 30 semoto 17, quod relinquetur, est 13: & consequenter hoc modo. Vnde aduerte quòd non quicunq; numerus à quouis numero subtrahi potest, sed solum minor à maiori, vel æqualis ab æquali. ¶Finis subtractionis est, quibusuis duobus numeris propositis, alterum ab altero auferre: residuum (si quod fuerit) assignando. ¶Seruit autem abstractio diuersis hominum conditionibus, in primis astrologis, & calculatoribus: & denique quibuscunq; mercatoribus, thesaurarijs, atque trapezitis.

Subtractionis finis & vtilitas.

PRIMO NOTANDVM EST in hac subtractionis specie quatuor esse consyderanda. Primum, numerus à quo debet fieri subtractio. Secundum, numerus subtrahendus. Tertium, linea interiecta. Quartum, numerus manens. ¶Modus autem scribendi sit talis: primo & superiori loco numerus, à quo fieri debet subtractio, ponatur. Deinde sub eodem numerus subtrahendus, sic vt vnitas sub vnitate, dena sub dena, & ita de reliquis (si sint) locētur. Postmodū linea interiecta protrahatur, vt præsens ostēdit figura.

In subtractione cōsyderāda

Numerus à quo debet fieri subtractio	7	6	4	5	2
Numerus subtrahendus	3	6	6	4	7
Linea interiecta					

SECVNDO NOTANDVM EST in subtractione initiandam esse operationem à primis elementis, per medios eundo, quoad vltimos vsq; peruenerimus. & à primo superioris numeri limite, inferioris numeri vnitatem separabis, & si quis supererit digitus, ille sub linea sede correspondenti ponatur. si autem nihil remanserit: o sub linea pones. Qz si contingat subtrahendi numeri digitum, esse maiorem digito siue vnitate numeri, à quo subtractio fieri debet: videbis per quantū à denario distat: & id per quod distat, vnitati siue digito numeri, à quo subtractio debet fieri, addas, numerū resultantem sub linea loco vnitatis ponendo, seruata tamen in mente vnitate: quam immediate sequenti numero addas, quæ vnitas limite secundo addita, dena nuncupatur. Deinde prouenientem numerum à secūdo limite superioris lineæ (vt prius dictum est) subtrahe. Aduerte tamen an figura illo secundo limite existens (cui vnitas seruata in mēte debet addi) sit nouenaria: quod si euenerit, sub linea secūdo limite, figuram secūdi limitis superioris lineæ pone, seruata vnitate in mente, pro tertio limite numeri subtrahendi. Et pari modo etiam operandum est in cæteris limitibus. Si contingat o in numero, à quo debet fieri subtractio, reperiri: est etiam omnino eodem modo faciendum, sic videlicet, acsi primo limite ponatur, & in correspondenti limite numeri subtrahendi digitum inuenias, videbis per quantum distat talis digitus à denario numero, & distantiam sub linea limite correspondenti, per conueniens elementū pone: vnitate in mente reposita. Quòd si vtroq; primo limite tam numeri à quo debet fieri subtractio, q̄ subtrahendi o locetur, o pariter sub linea correspondēti loco signabis. Est tamen aduertendum, si in alio à primo limite numeri subtrahendi o locetur, & ex præhabita subtractione in mente reposita fuerit vnitas, ponenda est distantia per quam distat à 10, videlicet 9, sub linea limite correspondenti, dummodo o in numero, à quo debet fieri subtractio, eodem limite reperiatur: & seruabitur pro limite sequenti vnitas, vt hic.

Primus subtrahē di modus

3	o	o	8	o
1	9	o	9	o
1	o	9	9	o

Si vero in numero illo superiori limite correspondenti, significatiuum ponatur elementum: an illud sit vnitas, vel quod aliud ascendens elementum videbis: si primum eueniat, sub perpendiculari sede, o locabis: si autem secundum contingat, à tali elemento vnitatem subtrahe, & residuum sub linea pone. Est adhuc etiam consyderādum, si eueniat, facta deductione, vltimos characteras tam numeri superioris, q̄ subtrahendi esse æquales: vbi ex præhabita deductione nulla in mente reposita fuerit vnitas: nihil sub linea, vltimo ponendum est loco: quoniam si aliquid poni deberet, maxime esset o, sed notū est, quando vltimo loco o poneretur, nihil faceret.

Quæ autem dicta sunt: haud obscuro aperiũtur exemplo. Si vis subtrahere 60029471 ducatos à 81005375 ducatis, illos numeros hoc pacto locabis. Et operaberis dicendo, à 5 deposita 1, remanet 4: qui sub linea correspondenti loco ponatur, videlicet sub vnitate. Deinde dic, 7 semoto à 7, nihil remanet: locetur igitur sub linea, secundo limite o. Postmodum à 3 subtrahi 4 non potest: ideo distantiam per quam 4 distat à 10 quæ est 6, addatur 3, cum quo 9 numerum componit, qui sub linea, tertia sede ponatur: retenta in mente 1, quæ 9 numero addita, cum eodem 10 reddit numerum: qui à 5 subtrahi non potest. & quoniam 10 à 10 non distat, ideo 1 in mente seruata, sub linea, quarto limite, 5 ponatur. De cæteris autem elementis, eodem ordine procedendum est. Completa igitur operatione, numerus manens erit 20975904 ducati. Horum autem declaratorum apertissimum inspicere potes exemplum.

8	1	0	0	5	3	7	5
6	0	0	2	9	4	7	1

Numerus à quo debet fieri subtractio	8	1	0	0	5	3	7	5
Numerus subtrahendus	6	0	0	2	9	4	7	1
Linea interiecta								
Numerus manens	2	0	9	7	5	9	0	4

¶Per istud exemplum iam positum, & ea pariter quæ sequuntur: subtrahendi artem poteris adamussim callere. ¶Est adhuc alter subtrahendi modus, quem & breuiorem, & limatiorem esse affirmo, videlicet dispositis numero à quo debet fieri subtractio, & numero subtrahendo, vt iam dictũ est, videbis an primum subtrahendi numeri elementum sit æquale, minus, aut maius primo superioris numeri, à quo subtractio habet fieri: q̃ si æquale fuerit, sub linea directo loco o ponatur: & ad secundos limites ibis. Si autem id primum elemẽtum minus fuerit, excessum per quem à superiori exceditur, sub linea limite primo pone: & te ad secunda transfer elementa. Si vero tertium contingat, maius videlicet esse: ad secundum numeri superioris limitem ibis, à quo vnitatem mutua, pro primo limite eiusdem numeri capies: quæ quidem vnitas, decem primo limite valet, & resultabit numerus compositus: à quo subtrahe digitum numeri subtrahendi, & residuum sub linea limite primo per conueniens elementum pone. Nec obliuioni dabis elementum secundi limitis numeri superioris, à quo vnitatem separasti, vna minus quàm antea vnitate valere: aut nihil, si elementorum primum, scilicet vnitas fuerit. Si autem eueniat secundũ elementum numeri superioris, à quo 1 mutuari deberet, esse o, eundum est ad tertium: q̃ si tertium sit pariter o, ad quartum ibis: & deniq; ad significatiuum elementum deuenire oportet, quod primi limitis elemento, simul & sequẽtium limitum elementis non significatiuis, vnitatem mutuabit: ex qua quidẽ vnitate decem pro primo limite capiantur vnitates, & pro quouis aliorum limitum cifris signatorum, nouem monades accipiantur. Scias tamen quamlibet accommodatarum vnitatum secundo limite decem valere, & tertia sede centum, quarto verò loco mille, & sic de alijs: quo facto, subtrahes digitum numeri subtrahendi à numero composito primi limitis, & residuum sub linea pone: & postquã secundus limes numeri superioris, in quo est o, mutuo nouem vnitates recipit: ab illis subtrahe elementum secundi limitis numeri abstrahendi: & consequenter fac de reliquis. Patefient ista omnia digestissimo exemplo.

Alter subtrahendi modus.

Prior tamẽ modus diuisioni, radicũ item tam in quadratis, quàm in cubicis nũeris extractioni, posteriore multo accommodatior est & expeditior, si semel eum recte didiceris.

Operationis exemplum.

Vis autem subtractis 2018643 ducatis, à 9005273 manentem numerũ reperire: dispone primo illos numeros, sic vt numerus à quo subtractio fieri debet sit superior, & subtrahendus numerus inferior, & taliter disponantur vt sit vnitas sub vnitate, dena sub dena &c: deinde sub ambobus numeris rectam lineam pone, vt præsens figura demonstrat. Hoc igitur pacto incipies operari, dicendo, à 3 deponendo 3, nil remanet, ideo sub linea primo limite o ponatur. deinde à 7 subtrahendo 4, remanet ternarius, qui sub linea secundo loco venit locandus. postmodum à binario semoueri 6 non potest: ideo eundum est ad sequẽtem limitem, in quo est 5, à quo pro tertio limite mutuatam habebis vnitatem, quæ ibidem decem valet vnitatibus, quæ simul cum binario, numerum 12 efficiunt, qui compositus est: à quo semoto 6, remanet numerus 6, sub linea tertio limite ponendus. consequenter à quaternario remanenti in quarto limite superioris, 8 subtra-

9	0	0	5	2	7	3
2	0	1	8	6	4	3

hi non poteſt: mutuanda igitur eſt vnitas ab vltimo limite, in quo 9 ponitur, quæ decem vnitates in ſexto limite ſignat: à quibus rurſus vna mutuetur ad quintum limitem, dimiſſis illic 9, quæ centies millenas ſignificant, ac denuo hic 9 relictis, vna ad quartum limitem accommodetur, quæ cum 4 ibidem remanenti, 14 numerum efficiunt: à quo ſubtracto octonario, ſupereſt 6, qui quarto limite ſub linea locetur. Poſtmodum à 9 in quinta ſede derelicto ex aſſumpta vnitate ſubtrahatur vnitas, quæ in tertio limite numeri ſubtrahendi habetur, & manens 8 ſub linea interiecta quinta ſede ponatur. Amplius à 9 qui pariter ex mutuata vnitate in ſexto loco ponebatur, o ſubtrahitur: ideo ſub linea, ſexto limite ille 9 ponatur. Vltimo autem ab 8 remanente in ſeptimo, & vltimo limite ſuperioris numeri ſubtracto 2, reſiduum 6 erit, qui ſeptimo, & etiam vltimo limite locetur. His igitur determinatis, validam operationem reperies: quæ lucide iſto exemplo declaratur.

Numerus à quo debet fieri ſubtractio	9	0	0	5	2	7	3
Numerus ſubtrahendus	2	0	1	8	6	4	3
Linea interiecta							
Numerus remanens	6	9	8	6	6	3	0

Pro ampliori autem huius diffiniti intelligentia, hæc duo infrapoſita exempla conſyderabis.

9	7	6	5	0	0	0
4	0	0	0	9	6	9
5	7	6	4	0	3	1

3	0	0	0	5	6	4	9
2	7	8	9	0	0	0	0
	2	1	1	5	6	4	9

TERTIO NOTANDVM EST tres in ſubtractione probationes inueniri. Quarum prima eſt nouenaria. Secunda ſeptenaria. Tertia vero per additionem fieri habet. ¶Pro primæ igitur probationis expeditione eſt aduertendum, completa operatione, à numero ſuperiori, à quo ſubtractio fieri debet ſeparandum eſſe 9 quotieſcunque poteſt: & ſi aliquis digitus ſuperſit nouenario minor, facta in margine linea, capite ſuperiori ponatur: ſi nihil autem remanſerit, ibidem o locetur. Deinde à ſubtrahendo numero, ſimul & à manente, ſiue ſubtracto numero (quod idem eſt) ſubtrahe 9 quoties poteris: & remanentem notam in altero lineæ extremo pone: quo facto, videbis an notæ illæ ſint æquales, vel non: ſi primum eueniat, operatio eſt valida: ſi ſecundum, nulla erit. Exempli gratia. Prima probatio ſubtractiōis.

Subtracto 9 à ſuperiori numero quoties permittit: remanens nota eſt binarius, in capite lineæ poſitus: & ſemoto 9 à ſubtrahendo, & numero manente ſub linea poſito, quoties auferri poteſt: nota etiam manens eſt binarius, ideo operatio eſt bona. Primæ probationis exēplum

					2
6	0	3	4	7	
4	9	2	6	0	
1	1	0	8	7	
					2

¶Hæc quidem probatio nil penitus valet: quoniam ex illo probandi modo ſequeretur in hoc exemplo operationem bene valere: quod aperte eſſe falſum omnibus cōſtat. Notum enim eſt ſubtractis ſubtrahendis, vt dictum eſt, remanētes notas eſſe æquales: ſolū igitur poteſt ex illo probandi modo (ſi ita dicendū eſt) haberi hāc conſequentiā valere, hæc operatio eſt bona, ergo remanētes notæ ſunt æquales. Sed hoc non arguit illam probationem bene valere: vbi tamen econuerſo conſequentia valuiſſet, efficaciſſima eſſet probatio. Primæ probationis improbatio.

				6
4	6	0	5	
3	5	2	4	
2	3	4	1	
				6

¶Dimiſſa igitur hac probatione, ad ſeptenariam properandū eſt. Pro qua intelligenda, non eſt opus longo vti ſermone. Eſt autē eodem modo faciendum, ac in præcedenti diffiniti declaratione dictum eſt: ita videlicet, vt à numero ſuperiori nota ſumatur, hoc modo: primo ab vltimis duobus elementis ſubtrahatur 7 quoties permittit: deinde ſi nihil remanſerit, ad præcedentia duo te transfer elemēta: ſi autem ſupererit aliquis digitus, ille loco denæ accipiatur cum antepenultimo elemento, quod vnitas reputabitur: à quibus ſimul ſubtrahe 7 quoties potes: & breuitati ſtudendo, omnino eodem modo accipienda eſt nota, ac in additione dictum eſt, quam antepoſita linea recta in capite eiuſdem pones. Secunda probatio

Deinde à numero subtrahendo capiatur etiam nota, quam ante lineam aspectu directo locabis. Postmodum à numero manente notam accipies, quam pariter ante lineam sede correspondenti repones: & ab iis duabus notis separabis 7 quoties poteris, & remanẽtem numerum in inferiori lineæ extremo pone: quo facto, videbis an illæ extremales notæ sint æquales, aut non: quòd si æquales fuerint, bene operatus es: male autem, si inæquales extiterint. ¶In isto exemplo hæc comprehenduntur quæ dicta sunt.

Reprobatur secunda probatio.

Sed modus iste operandi nihil valet, quemadmodum nec prior: quoniam ex illo haberetur in hoc exemplo infraposito bene operatum esse, quod manifeste à vero est alienũ. Ex illa probandi via, solum concludi potest extremales notas remanentes esse æquales, si rite facta fuerit subtractio: sed illud (vt visum est) non sufficit.

					6
9	0	6	4		
6	8	0	3		6
2	2	6	1		0
				6	

Tertia ℘batio certior.

¶His igitur duabus probationibus prætermissis, ad tertiam (quam sine instantia in omnibus verum continere asseueramus) deueniendum est. Pro qua intelligẽda: aduerte vtendum esse additione: ita videlicet quòd numerus subtrahendus, & numerus manẽs addantur: & si summa ex illorum additione sit æqualis numero, à quo debet fieri subtractio, operatio est bona: si hoc autem non contingat, nihil valere affirmo. Ista probatio, est qua communiter arithmetici, & pariter mercatores vtuntur: quæ calumniari minime potest. Potest adhuc vna alia probatio haberi huic speciei deseruiens, conformis illi, quæ in fine tertij notabilis præcedentis diffiniti ponebatur: & est talis.

				5	
5	9	0	6		
4	0	7	3		6
1	4	1	3		6
				5	

Quarta ℘batio.

¶Videndum est an in numero subtrahendo, & numero manente tot reperiantur vnitates, quot in numero à quo subtractio fieri debet, inueniuntur: videbis insuper vtrum tot denæ, tot centenæ, & sic ascendendo, in illis duobus numeris reperiantur, quot in suprapositio numero, modo, ac arte præcedenti diffinito obseruatis. quòd si hæc omnia, vt dictum est, vniformiter inueniãtur, operatio bene valebit: & si oppositum contingat, cassa erit, & nulla.

4 ¶**Multiplicatio, est numeri procreatio, ad multiplicandum numerum proportionaliter se habentis, ac ad vnitatẽ multiplicans numerus se habet. Multiplicare autem, est numerum procreare, qui ad multiplicandũ proportionaliter se habeat, ac ad vnitatẽ multiplicãs numerus se habet.**

Multiplicationis finis & vtilitas.

¶Exempli gratia: vis multiplicare 4 per 5, dic quater 5, numerum 20 procreant: qui ad multiplicandum, videlicet 5, in eadem porportione se habet, qua multiplicans, scilicet 4 ad 1. vtrobiq; enim quadrupla proportio inuenitur. Pari modo, si 7 per 9, aut 8 per 15 ducatur: procreabitur inde numerus, in eadem proportione ad multiplicandum numerum se habens, qua ad vnitatem multiplicans ipse se habet. ¶Finis autem huius speciei, est summam, siue numerum prouenientem ex ductione vnius numeri per alterum, assignare. ¶Seruit multiplicatio multis hominum statibus. In primis astrologis, pro reductione signorum ad gradus, graduum ad minuta, minutorum ad secunda, secũdorum ad tertia, tertiorum ad quarta, & de cæteris pari modo: seruit calculatoribus, pro reductione corporum, motuum, aut qualitatum ad partes eiusdem denominationis: deseruit autem mercatoribus, pro multis talibus cognoscendis: verbi gratia, si aliquis mercator quemlibet centum equorum 17 ducatis vendiderit, ad sciendum quot ducatos ex omnium venditione recipiet, multiplicatione est opus. Si vis pariter scire, quot duodenos mille ducati contineant, hac specie intellecta, id facillime cognoscere potes. Et breuiter per hanc speciem, numerus partium cuiuslibet integri patebit.

In multiplicatione pẽsanda.

PRIMO NOTANDVM EST duos in hac specie numeros esse maxime requisitos: quorũ alter multiplicandus, alter vero multiplicans appellatur. Cõmuniter tamen in multiplicatione sex veniunt consyderanda. Primum numerus multiplicandus: secundum numerus multiplicãs: tertium linea interiecta: quartũ numeri prouenientes: quintum linea supposita, sextũ prouenientiũ numerorũ summa. ¶Scribẽdi autẽ modus talis esse debet:supremo,& capitali loco, multiplicandus numerus ponatur:sub quo immediate multiplicãs numerus locetur, ita videlicet vt vnitas sub vnitate, dena sub dena,& ita de reliquis scribatur. Et quãuis pro numero multiplicãdo indifferẽter capi potest minor,aut maior:tamen pro clariori operãdi modo, semper pro numero multiplicando capietur numerus maior,si impares ambo fuerint. Deinde sub ambobus scilicet multiplicando,& multiplicante,linea interiecta protendatur:vt pręsens figura declarat.

Numerus multiplicandus	4	3	7
Numerus multiplicans	3	2	6
Linea interiecta			

Postmodum sub linea interiecta,numeri proueniẽtes locentur:sub quibus linea supponatur. Vltimo autẽ sub linea supposita,prouenientiũ numerorũ summa ponetur. Hæc omnia in sequẽti notabili patefient. Sed,quoniam pro operationis practica,requiritur vt primo digitum per digitũ multiplicare sciamus, ideo antequã operandi modũ assignemus,duas regulas proponimus aduertendas:quibus talis multiplicatio dignosci poterit. ¶Prima regula est talis. Quibuscũq; duobus digitis acceptis,quorũ alter per alterum habet multiplicari,notabis vnitatem,vel vnitates,per quam,aut per quas maior digitus à denario numero distat,& toties minorem digitum à sua dena subtrahes, quot sunt illæ vnitates: quo facto numerus manens,erit numerus proueniẽs ex multiplicatione talium digitorum. Istud facili exemplo declaro. Vis scire quinquies 7,quantum numerum componunt:notabis ꝙ 7,à 10 distat per 3:& cum dena numeri 5,sit 50, subtrahe ter 5,videlicet 15,à numero 50:& remanens numerus, videlicet 35, erit numerus proueniens ex multiplicatione 5 per 7. ¶Secunda regula nobis ab illo Arithmeticorum principe Pythagora tradita,sequenti dignoscetur tabella.

Prima regula.

Secunda regula.

☞Vt vbiq; commodæ breuitati consuleremus,pro immensa illa multiplicationis tabula ab Orontio diligenti quidem studio laboriose aucta,triangulum sumpsimus,mira quadam breuitate,totam tabulam referẽtem,si eius vsum spectes lector humane. Is est huiusmodi,quo dicto citius cuiuslibet digiti in quemlibet alium digitum ductionẽ noueris,si digitum minorem,quẽ multiplicantem vocamus ex latere A B,in alium quemuis aut æqualem aut maiorem multiplicandum in latere C A ducas,repente in angulo communi vtrinq; cõcurrentium linearum,agnosces numerum inde resultantem. Idem eueniet,si digito multiplicando,maiorẽ digitum multiplicantem ex latere C A,in quẽuis aut minorem,aut etiam illi æqualem in latere A B contentum deducas,semper in angulo communi patebit inde resultans numerus, qui idem per omnia est,siue maior in minorem,siue vice versa,minor in maiorem ducatur. Denarius enim numerus, verbi gratia,semper resultat,siue dicas quinquies duo,siue bis quinq;:atq; idem esto iudicium in alijs quantumuis magnis aut paruis numeris inuicem multiplicandis. Sunt in triangulo hoc,præter eos numeros qui in vtroq; latere tam C A,quàm A B,naturali serie progrediuntur,numeri alij 45:quorũ omniũ maximus est 81,nouem ordinibus contenti,arithmetica progressione quiq; in suis ordinibus sese excedentes. differentia è regione ordinis in latere A B annotata. Horũ quencũq; diuidere libeat,si in alterutro laterũ diuisorem digitũ è regione anguli reperis, in altero latere,quotientem habebis: qui si æquales sint,numerus erat quadratus. Cuiusmodi omnes sunt,qui secundum lineam diagonalem locantur. vnde & nonnihil ad radicẽ quadratam pertinebit hic noster triangulus.quẽ, per diagonalem lineam secantes tabulã seu mensulam Pythagoræ in hũc modum constituimus.

Latus multiplicantium maiorum, aut æqualium.

Latus multiplicantium minorum, aut æqualium.

A	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	C
	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
	2	18	16	14	12	10	8	6	4			
	3	27	24	21	18	15	12	9				
	4	36	32	28	24	20	16					
	5	45	40	35	30	25						
	6	54	48	42	36							
	7	63	56	49								
	8	72	64									
	9	81										
B	0											

Diagonalis

☞ Q uẽcunq; numerum, quãtusquantus sit, per 10 multiplicare intendis, eum immutatum relinquẽs, vno limite per adiectionem cifræ à dextris augeto, & multiplicatum tenebis. Q uem per 100 multiplicare velis, duabus cifris augeas oportet, per 1000, tribus: per decem millia, quatuor per centenamillia, quinq;. sic'q; continuo progrediendo, multo parces labori, facili breuitati mirifice consulturus. Vt si velles multiplicare hos aut similes.

26	per	10	fiunt	260
254		100		25400
856		1000		856000
7983		10000		79830000
3456		100000		345600000

SECVNDO NOTANDVM est à dextro latere initiandam esse operationem versus sinistrum eundo, eo pacto vt dispositis multiplicando, & multiplicante (quemadmodum dictum est) primo multiplicantis numeri primum elementum) si significatiuum fuerit) per omnia elementa, siue figuras omnes multiplicandi numeri multiplicetur. à prima incipiendo leuam versus eundo manum, sic q primo per primum, & deinde per secundum, consequenter per tertium, quartum &c. Isto modo procedendo videbis an ex multiplicatione primi elementi multiplicantis numeri per primum multiplicandi proueniens numerus sit digitus, articulus aut compositus: si primũ eueniat, sub linea primo limite talis digitus ponatur, & ad alia procedes elementa: si autẽ secundum contingat, o sub linea primo limite pone, vnitate in mente seruata pro secũda operatione: si vero tertiũ accidat, digitum sub linea primo limite pones, articulo in mente seruato pro secunda operatione, quæ secundum eius decimę partis denominationem numero resultanti ex secunda multiplicatione primi multiplicantis per secundum multiplicandi elementum addes. Expedita igitur multiplicatione primi per primum: deinde secundum multiplicandi elementum per multiplicantis primum elemẽtũ multiplicetur, eo pacto ac primum: postmodum te ad tertium multiplicãdi elemẽtum transfer: & consequenter ad cætera (si quæ sint) elementa, eadem per multiplicantis primum elementum multiplicando, & rectam pronenientium numerorum sub linea positionem seruabis. Finita igitur primi elementi multiplicantis per omnes multiplicandi figuras operatione, ad secundam figuram siue elementum multiplicantis eundum est: per quod omnia multiplicandi numeri elementa multiplicentur eo ordine, & modo, quo per primum eadem multiplicantur: vno tamen obseruato, vt videlicet resultantes numeri locentur sub illo numero infra lineam posito, taliter vt prima illius numeri figura sub secunda alterius ponatur, & secunda sub tertia, & sic procedendo versus sinistrum latus. Deinde secundi elementi operatione completa ad tertium multiplicantis elementum accedendum est: cum quo operaberis ac dictum est. Et denique per omnia multiplicantis elementa multiplicandi omnia modo iam dicto multiplicentur. Hoc igitur terminato, rectam sub prouenientibus numeris lineam protrahe: sub qua consurgentem ex illorum additione summam signabis. ❡Antequam tamen hæc omnia exemplo elimentur, hæc duo considerabis documenta. ❡Primum est, si aliquod multiplicantis elementum fuerit o, tot sub linea cifras locabis, quot multiplicandi numeri sunt elementa. ❡Secundum documentum est, si multiplicandi aliquod elementum, o esse contingat: o pariter sub linea debito ponatur loco. & hoc vbi nihil ex præhabita operatione in mente aliquod tale reperiatur, id sub linea debita sede locetur. ❡Ista omnia quę dicta sunt, exemplo tibi aperiuntur. Vis autem proueniẽtem ducatorum summam cognoscere, quæ emergit ex venditione 4753 domorum, quarum quælibet, precio 1962 ducatorum venundatur: hac arte procedere oportet. Pro multiplicando numero, domorum numerum (postquam est maior) accipies: quẽ loco primo, & superiori locabis: deinde pro multiplicante, precij numerum recipies, quem sub multiplicando numero pone, vnitatem sub vnitate, & denam sub dena (vt dictũ est) disponendo: sub quibus duobus directam porrige virgulam: vt præsens figura demõstrat.

Primum documentum.

Secundũ documentum.

Operationis exemplum.

4	7	5	3
1	9	6	2

Primo ergo multiplicabis 3 per 2. dicendo, bis 3, numerum 6 componunt, qui sub linea limite primo ponatur: deinde dices, bis 5, numerum 10 procreant, seruetur igitur in mente talis numerus pro sequenti operatione, & o sub linea pone. Consequenter ad tertium multiplicandi elementum ibis, & dices, bis 7, numerū 14 componunt, cui numerus in mente repostus secūdum eius decimæ partis denominationem (quę vnitas est) addatur: & numerus 15 resultabit. qui compositus est: seruato igitur articulo in mēte, digitus sub linea tertio assignetur limite. Postremo ad quartum multiplicandi deuenies elementum, & dices, bis 4, numerum 8 efficiunt, cui habitus in mēte numerus addatur (vt dictum est) & proueniet 9 numerus, quem quarta sede sub linea locabis. Finita igitur multiplicatione omnium elementorum multiplicandi numeri, per multiplicantis primum elementum, ibis ad secundum: per quod eo ordine procedas multiplicando omnia elementa multiplicandi numeri: postmodū ad tertium: deinde ad quartū. Quibus igitur peractis, sub numeris prouenientibus rectam ducas lineam, & numeros prouenientes adde, eorundem summam sub recta linea ponendo: & talis figura resultabit.

Numerus multiplicandus	4 7 5 3
Numerus multiplicans	1 9 6 2
	9 5 0 6
	2 8 4 1 8
Numeri prouenientes	4 2 7 7 7
	4 7 5 3
Linea supposita	
Prouenientium summa	9 3 2 4 3 8 6

Sed quoniam in hoc exemplo iam habito, nulla introducebatur o: aduertes circa hęc duo infraposita exempla, per quæ poteris in quibusuis alijs (vbi o esse contingat) facili animaduersione operari.

Parces etiā labori in huiusmodi exēplis vbi cifræ fuerit à finibus multiplicātis & multiplicandi, siue alterius tātum, si in operatione oēs illas negligas, donec prouenientes, numeros addas, quorum sūmæ, eas quotquot fuerint in vtroq; numero à fine addas omnes. Quòd si ī medio multiplicātis loco cifra accidat, ea suum tantum limitē inter prouenientes numeros expleat, à quo deinceps alter exordiatur. vt patet hoc exēplo: quod vtriusque regulæ vim sentit.

5 0 4 0 3	7 0 0 3 0
4 0 2 0	1 2 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
1 0 0 8 0 6	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	1 4 0 0 6 0
2 0 1 6 1 2	7 0 0 3 0
2 0 2 6 2 0 0 6 0	8 4 0 3 6 0 0 0 0

¶Ex præhabitis infero, modica adhibita diligentia, te breuiter per hāc multiplicatio-
nis speciem, scire quot sunt passus in toto ambitu terræ, pariter & pedes, & etiā quot
digiti. Pro cuius intelligentia, aduerte ex sententia omnium astrologorum, firmamen-
tum, siue stellatum cælum imaginarie esse diuisum in duodecim partes æquales, qua-
rum quælibet signum appellatur, alio termino totum: quodlibet autē signorum in 30
æquas partes diuisum esse imaginatur, quarum quælibet dicitur gradus: quilibet vero
graduum in 60 scinditur partes eiusdem denominationis, quarum quælibet minutū
nūcupatur: quodlibet minutum in 60 pariter diuiditur partes ali-
quotas, quę secunda denominantur: & quoduis secūdum, pari mo-
do in 60 distribuitur partes, quæ tertia dicuntur: & ita consequen-
ter, per quarta, & alia huiusmodi ascendendo. Proportionabiliter
omnino de elemento terrę dicendū est, & quouis aliorum elemen-
torum: ita videlicet quòd vni gradui cæli, vnus in terra correspon-
det gradus: de alijs pari modo dicas: & quāuis omnes gradus terrę
adinuicem sint ęquales (quemadmodum & omnes gradus cæli) nō
tamen propterea sequitur gradus cæli, gradibus ipsius terræ esse æquales: sed de hoc
alibi fiet sermo. ¶Est insuper aduertendum, ex Ptolomęi sententia, cuiuis gradui ter-
ræ, 500 stadia correspondere in sua latitudine. Stadium enim, est mensura terræ conti-

Multiplicandus	2 3 4 0 0
Multiplicans	1 0 2 3 0
	7 0 2
Prouenientes	4 6 8
	2 3 4 0
Summa	2 3 9 3 8 2 0 0 0

Parerga hęc sūt oīa vsque ad probationū modos. De terrę ambitu, vide Vitruuiū lib. 1. c. 6.

nens 125 passus, Vnde pro terra mēsuranda, quasdā cōmunes mēsuras Geometrę inuenerūt:& sunt istę, leuca, milliare, stadiū, passus, cubit9, pes, palmus, digitus, granū. Hæ autē mensuræ earundē compositionē subintrant: ita videlicet ꝙ quatuor grana (vt dicūt) ordeacea latitudinaliter sumpta, digitū efficiūt: quatuor digiti, etiā latitudinaliter accepti, palmū: quatuor palmi pedē: pes autē, cum duabus tertijs cubitū cōponit: tres cubiti, siue quinq; pedes passum: passus enim ex eleuatione vnius pedis, vsq; ad eiusdē positionem resultat, quatuor mediantibus pedibus. 125 passus (vt dictum est) stadiū reddunt: 8 autem stadia, milliare, à mille nuncupatū, eo ꝙ mille continet passus: duo autē milliaria, leucam in Gallia constituunt: in Hispania, ex tribus: in Germania vero, leuca ex quatuor milliaribus consurgit. ℂHis breuiter declaratis (quæ non omnino impertinentia sunt) ad propositum accedendum est. Vis autem scire quot passus in toto terræ ambitu reperiuntur: descendas à grossioribus, semper multiplicando, quousque ad inferiora perueneris: & multiplicabis duodecim tota terræ, quæ signa in cælo dicuntur, per triginta gradus: ad quod faciundum, debes maiorem numerum, videlicet 30, pro numero multiplicando capere: & minorem, scilicet 12, pro multiplicanti, & operaberis eo modo quo prius dictum est. & reperies pro summa numerum 360 graduum, qui toti terræ correspondet. Deinde authoritate Ptolemæi supposita, videlicet 500 stadia cuilibet gradui terræ correspondere, multiplicabis 500 per 360, & pro summa reperies 180000 stadia ipsi terræ correspondere. Consequenter, postquam stadium 125 passus continet, multiplicabis numerū stadiorum, videlicet 180000, per 125 passus, & cōsurgens numerus erit 22500000 passuum. Si autem vis cognoscere quot pedes totam circumeant terram, multiplicabis numerum passuum per 5, & inuenies pro summa 112500000 pedes: notum autem est, postquam passus ex quinque resultat pedibus (vt superius dicebatur) numerum passuum debere per 5 multiplicari, ad sciendum quot reperiuntur pedes. Item etiam si vis scire numerum palmorum: hunc numerum pedum per 4 multiplicabis, & emanans summa erit 450000000 palmi. Deinde hunc numerum per 4 multiplicando, summa generabitur 1800000000 digitorum. Postremo autem hanc digitorum summam, si per 4 multiplicaueris, profluet numerus, siue summa 7200000000 granorum. Si adhuc ad minores mensuras procedere velles, poteris quidem id facillime facere, si operatus fueris cōsequenter, à prius habitis non discrepando. Habes igitur quod declarare intendebamus, pariter & corollarium illatum verum, scilicet modica adhibita diligentia, te breuiter scire per hāc multiplicationis speciem, quot sunt passus in toto ambitu terræ, pariter & quot pedes. Eadem pariter aduertentia potes cognoscere quot faciunt duodenos centum ducati: etiam quot turonos faciunt 200 duodeni. Si enim primū scire desyderas: videbis primo quot valeat duodenis vnus ducatus, & reperies quadraginta. multiplica igitur numerum 100 per 40, & proueniens summa, intentus numerus erit: id idem de secundo facies exemplo.

℘ Pes cum dimidio cubitum facit, pedes vero qnque, passum. Vitruuius li. 3. c. 1. eandem esse mensurā 4 cubitorū & 6 pedū ponit. Vnde manifestū est, cum 6 ad9 4 sit sesqalter, cubitū sesquipedalē mensurā cōtinere, hoc est, palmos 6, digitos 24.

Ptolemęus.

TERTIO NOTANDVM EST tres in hac specie probationes esse, quemadmodum & in præhabitis diffinitis. Prima est nouenaria: secūda septenaria: tertia vero per diuisionem fieri habet. ℂAccedendo igitur ad primam, aduerte quòd si vis videre an multiplicatio bene valeat, debes à numero multiplicādo semouere 9 quoties potes, & notam remanentem, facta recta linea cadenti, loco directo ante eandē pones: deinde à multiplicanti numero separabis etiam 9 quoties poteris, & notam remanētem ante lineam directa sede locabis: postmodum illas duas notas adinuicem multiplicabis, & à prouenienti numero subtrahe 9 quoties permittitur, & manentem notam in capite lineæ cadentis extremo, infimo videlicet, pone: & videbis an illæ extremales notę sint æquales, vel non. In isto exemplo quod dictum est, satis patet. ℂPotest autē hæc nouenaria probatio omnino eodem inficiari modo, ac in præcedentibus diffinitis consimiles probationes inualidæ reddebantur. Quapropter eadem prætermissa, videndum est quid veritatis

Multiplicationis prima ꝓbatio.

							2
			4	3	0	6	4
				7	2	5	5
		2	1	5	3	0	
		8	6	1	2		
3	0	1	4	2			
3	1	2	1	8	5	0	
							2

Refellit prima ꝓbatio.

Probaturus multiplicationē per 7, diuide per 7 primis multiplicādū, deinde multiplicātē: residua q̄ꝫ, si q̄ fuerint, inuicē multiplica. productū rursus per 7 diuide, ac huius residuū si quod sit, notā dabit, cui æq̄lis esse debebit nota, quæ reliquetur ex diuisiōe summæ per 7 facta. Eodē prorsus modo & ꝓ quinariā ꝓbationē licet fieri, quæ vt facilior est, ita ob multas cifras sæpius fortasse rudibus imponit.

contineat secunda probatio. ¶Probatio enim septenaria isto modo habet fieri: à multiplicando numero subtrahe 7 quoties poteris, eo modo quo secundo diffinito dictū est, & facta recta linea cadenti ante operationem, remanens nota anteponatur directo aspectu: deinde à numero multiplicanti depone etiā 7 quoties permittit, & notā remanentem lineę anteponas: & illas etiā notas multiplicabis adinuicem, à numero producto subtrahēdo 7 quoties potest, eodem modo quo subtrahis in nouenaria probatione, & remanens nota in capite lineæ locetur. Postmodum à summa semoto 7 quoties poterit semoueri, remanentem notam in lineæ pede locabis: & si æquales fuerint notæ extremales, bona erit operatio: oppositum si contingat, nulla. Exemplum. Secunda ꝓbatio.

¶Hæc autem probatio, queādmodum & præcedens, inualidari potest. Ideò his duabus probationibus omissis, ad tertiam deueniendum est. Secūdę ꝓbationis reprobatio.

								0
			5	0	4	2		2
				3	7	1		0
			5	0	4	2		
	3	5	2	9	4			
1	5	1	2	6				
1	8	7	0	5	8	2	0	

2

2 2

1

per 5

¶Pro cuius intellectu, est sciendum: si prouenientium numerorum summa per multiplicantē numerum diuidatur, & in tali diuisione numerus quotiens sit æqualis multiplicando numero, operatio est efficax: aliter si euenerit, nihil valebit. Et quamuis hic modus probandi videatur circularis, ex eo q̄ diuisio debet probari per multiplicationem: nihilominus non stando in tanto rigore logices, dico hanc probationem teneri in omnibus, sine instantia: videbitur autem in sequenti diffinito quid numerus quotiens, & qualiter diuisio fieri debet. Tertia ꝓbatio.

¶Multiplicatio autē infinitas sub se continet species: quarū prima est duplatio: secūda, triplatio: tertia, quadruplatio: & sic in infinitum ascendendo. Sed meo iudicio (saluo tamen meliori) in hac parte non est opus speciale pro duplatione componere diffinitum: quoniam duplatio nihil aliud est, quàm per 2 multiplicatio. Et si in me insurgat quispiam, authoritatem eorum qui ante me in hac arte scripserunt adducendo, à quibus duplatio in eorum codicibus posita est, tāquam arithmeticæ peculiaris species: dico, ea omnia proinde eos fecisse, vt clariorem iuuenes multiplicationis notitiā haberent: nobis autem (quoniam sufficientem multiplicationis discursum fecimus) visum est, non esse opus, post tantum discursum, nouum pro duplatione efficere diffinitum. Multiplicationis species.

7 1 2

7 9 7 6

5

4 0

3 7 6 1 3

3 1 7 0 4 0

2

p 7 3 3

5

10

¶Diuisio, est numeri procreatio, ad vnitatem proportionabiliter se habentis, ac diuidendus ad diuisorem. Diuidere, est numerum procreare, ad vnitatem proportionabiliter se habentem, ac diuidendus ad diuisorem. 5

¶Verbi gratia, vis diuidere 20 per 4: numerum 5 procreabis, qui ad vnitatem in eadem proportione se habet, qua 20 ad 4: vtrobiq; enim est proportio quintupla. Etiam si numerus 30, aut 45 per 5 diuidatur: eadem erit numeri producti ad vnitatem proportio, cum proportione diuidēdi ad diuisorem. ¶Finis diuisionis, est numerum (quē quotientem dicunt) prompte, & expedite inuenire: qui ex diuisione numeri diuidendi per diuisorem procreatur. ¶Seruit hæc species, vti & præcedens, astrologis pro reductione tertiorū ad secunda, secundorum ad minuta, minutorum ad gradus, graduū ad signa. Calculatoribus deseruit, pro reductione partiū aliquotarū, siue eiusdem denominationis ad sua tota. Pariter & mercatoribus pro talibus sciendis, si 4 9 7 0 ducatis emantur 1 0 0 equi, quorum quilibet eodem precio emitur, quanti quilibet equus emitur. Pari modo pro cognoscenda summa ducatorum, quam constituunt 3 0 9 denarij. Diuisiōis finis & cōmoditas.

PRIMO NOTANDVM EST pro hac specie intelligenda, in hac diuisione duos esse numeros potissime necessarios, scilicet diuidendum, & diuisorem. In generali autem septem sunt consyderanda: quæ sępenumero in hac specie contingunt. Primum, est numerus diuidendus. secundum, diuisor stans. tertium, linea cadens. quartum, lineæ parallelæ. quintum, diuisor currens. septimum, numerus manens. ¶Mo- In diuisione cōsyderanda.

dus autem scribendi, talis esse debet: numerus diuidendus in dextro ponatur latere, & sinistro diuisor stans, inter quos linea recta cadens mediet. sub diuidendo, duæ protrahantur lineæ parallelæ, sub quibus diuisor currẽs ponatur: sic quòd vltima diuisoris sub vltima diuidẽdi, & penultima sub penultima, & sic de alijs (si fuerint) locentur: vt pręsens figura docet.

Linea cadens.

Diuisor stans 37 | 6 3 4 2 Numerus diuidendus

Lineæ parellelæ

Diuisor currens 3 7

Deinde, inter lineas parallelas numerus quotiẽs locetur: postremo numerus remanẽs supra stantem diuisorem post cadentem lineam reponetur: apertius enim hæc omnia sequenti notabili videbuntur.

Diuidendi mod⁹.

SECVNDO NOTANDVM EST operationem initiandam esse à manu sinistra, versus dextram eundo: & quoniam multo difficilius est operari quando in diuisore sunt duæ figurę significatiuę, aut plures, q̃ si non esset nisi vnica: ideò primo docebimus diuidere, vbi vna sola reperitur figura in diuisore. Secũdo, vbi tantum vnũ elemẽtum significatiuum ponitur cum cifra, aut cifris. Demum vbi in diuisore multæ figurę significatiuæ, siue cum cifra ponantur, siue non. ¶Quantum ad primum, est aduertendũ quòd si in diuisore vnica figura reperiatur, illa debet esse significatiua (quoniam o esse non potest) & est locanda sub lineis parallelis recte sub vltima diuidendi figura: & videbis an vltima diuidendi, diuisore sit minor, ęqualis, aut maior: si minor extiterit, anterioretur, sic quòd sub penultima diuidendi ponatur. Si æqualis fuerit, inter lineas parallelas loco correspondenti, 1 pone, postquam semel tantum diuisor in vltima diuidendi reperitur: & cancellata vltima diuidendi, anterioretur diuisor: nam aliquam figuram, siue elemẽtum cancellare, nihil aliud est, q̃ idem cum virgula quadam diuidere. Si maior fuerit, videbis quoties continet diuisorem: & numerum vicium directo loco inter lineas pone, ita videlicet si semel tantum diuisorem contineat, vnitatem inter lineas pone: si autem bis, locabis 2, & de alijs pari modo: & per illum numerum multiplicabis diuisorem, & numerum prouenientem subtrahe à primo diuidendi: & si aliquid supersit (vltima diuidendi prius cancellata) desuper ponatur: si nihil, nihil locetur. Isto facto, diuisore cãcellato, per vnum limitem anterioretur, sic quòd sub penultima diuidendi ponatur, & iterum videbis, quoties contineat diuisorem penultima diuidendi figura, cum toto residuo suprapositio vltimę diuidẽdi (si quod est) quod decem valet, & hoc si fuerit 1: si 2, valebit 20, & consequenter hoc modo, & numerũ vicium inter lineas loco suprapositio diuisori pone. ¶Hoc tamen seruabis documentũ, ꝙ si pluries q̃ nouies diuisor contineat, tantum 9 inter lineas pones: & multiplicabis per illum numerum vicium (qui dicitur quotiens) diuisorem, & prouenientem numerum subtrahe à penultimo, & residuo (si ex priori habita operatione aliquod tale fuerit) & facta subtractione, si quod sit residuum, desuper ponatur: prius tamẽ cancellatis illis figuris, videlicet penultima diuidendi, & residuo prioris operationis. Deinde anteriorabitur diuisor, & procede eodẽ modo operando vsq; ad primum diuidendi. Si cõtingat in media operatione diuisorem non posse subtrahi, siue inueniri in suprapositia figura diuidendi, o inter lineas ponatur, & anterioretur diuisor. ¶Hoc quod dictum est, exemplo facili declaratur. Sit numerus diuidendus 3 7 0, diuisor vero 4. vis cognoscere numerum quotientem: disponatur vt iam declaratum est, & vt præsens ostendit figura. Et dic, 4 in 3 non potest reperiri, ideo cãcellato 4, anterioretur, & dic, 4 in 37, reperitur nouies: ideo inter lineas ponatur 9, recte supra diuisorem, & duces, siue multiplicabis diuisorem per 9, dicendo, quater 9, faciunt 36 numerũ: quem à 37 subtrahe, & manebit 1, quam supra 7 locabis, cancellatis

Vbi diuisor vnicũ habet elementum.

Documẽtum.

Operationis exemplum.

4 | 3 7 0

4

☞In specibus prius habitis, modus scribendi erat à dextris in sinistrã, obseruatis limitib⁹ vnitatũ, denarũ &c: hic nec ea limitũ obseruatiõe vtimur, sed hoc vno obseruato, ne duæ diuisoris figuræ sub vna diuidẽdi scribãt. Nec refert siue à sinistra ĩ dextrã aut cõtrà scripseris, modo diuisoris vltima quę à sinistris, sit sub vltima diuidendi maiore, aut saltem æquali &c.

☞Loco linearũ, alij commodius tali lunula (extra numerorũ seriẽ locata vtũtur, quæ nũerum quẽ quotientẽ vocãt, suscipiat. Diuisorẽ itẽ stãtem sub linea aliqua extra limites diuidẽdi disponunt, ac supra eã lineã residuũ, si quod, facta diuisione super erit, adscribunt, id'ꝗ numerator earũ partiũ, quę in diuisore sunt eius vnitatib⁹ determinatę, dicetur. vt clarius patebit, cum de his fractionibus tractatu quarto, agetur.

prius 3,& 7,& operatio manebit sub tali forma,
Deinde cancellato diuisore, idem anterioretur,& dic,4 in 10, bis tantum reperitur: ponatur igitur 2 inter lineas supra diuisorem,& ante 9, & multiplica diuisorem per 2: & numerum prouenientem, qui est 8, subtrahe à 10:& residuum videlicet 2, prius cancellatis 1 & 0, supra 0 ponatur: quo peracto, operatio cõpleta manebit. Habes igitur si inter quatuor socios 370 ducati diuiderentur, quilibet pro sua parte 92 habebit, & manebunt 2 ducati inter eos diuidendi: qui sine fractione diuidi nequeunt: ponatur igitur 2 manens, supra stantem diuisorem, interposita linea, & talis in fine habebitur figura. Sed quoniam vnico exemplo difficulter res exposita compreheditur: ideò hæc duo infra posita exempla consyderabis, per quæ lucidius quæ dicta sunt cognoscere valebis.

1
4 | 3 7 0
9
4 4

2 | 1 2
4 | 3 7 0
9 2
4 4 4

4
5 | 5 3 0 | 4
1 0 6 0
5 5 5 5

3
6 | 9 0 4 2
1 5 0 7
6 6 6 6

¶Declarato igitur modo diuidendi, vbi in diuisore vnica figura reperitur: consequenter videndum est de modo operãdi, vbi in diuisore tantum vna significatiua ponitur figura, cum 0, aut cifris. Pro cuius intellectu, est aduertendum omnino eodem modo esse operandũ, ac prius dictum est: hoc excepto, quòd videlicet operatio debet cessare, cum prima diuisoris figura sub prima diuidẽdi ponetur. Venit insuper totus diuisor anteriorandus, completa prima operatione: & ita operandum est, ac exempla hic apposita ostendunt.

2 4 | 7 7 | 2
3 0 | 5 0 5 | 4
1 6 8
3 0 0 0
3 3

5 0
4 0 0 | 3 7 0 | 5 0
8 0
4 0 0 0 0
4 0 0
4

¶Accedendo autem ad tertium diuidẽdi modum, vbi in diuisore multæ significatiuæ figuræ reperiuntur. Est aduertendum longe maiorem difficultatẽ esse in diuisione, in cuius diuisore duæ aut plures significatiuę habentur figuræ. Scribantur igitur, vt prius dictum est, diuidendi numeri, pariter & diuisoris figurę: & suppositis diuidendo duabus lineis parallelis, sub eisdem diuisor locetur, taliter, vt diuisoris vltima, sub diuidendi vltima, & penultima sub penultima, & consequenter in alijs (si quæ fuerint) operetur: & videbis, quoties vltima diuisoris in vltima diuidendi reperitur, toties diuisoris penultima in diuidendi penultima, & suprapposito (si aliquod fuerit) reperiatur: & eodem modo antepenultima diuisoris, in antepenultima numeri diuidendi, & sibi suprapposito numero habeatur: etiam de cæteris figuris (si quæ sint in diuisore) videndum est. Si autem eueniat penultimam diuisoris, vel antepenultimam, siue aliquam aliam non posse toties reperiri in figura correspondenti, & residuo (si fuerit) diuidendi numeri: capies vna vice minus diuisoris vltimam figuram: si adhuc non sufficiat, iterum vna vice minus diuisoris vltimam figuram accipies: & id facies quousque toties quæuis figura, quæ in diuisore reperitur, alia ab vltima diuisoris, in suprapposita numeri diuidendi figura, & residuo (si quod tale fuerit) reperiatur. Si enim aliqua diuisoris figura alia ab vltima, non reperiatur toties in suprapposito elemento numeri diuidendi, & residuo, quoties vltima diuisoris in vltima diuidendi reperitur (ad sensum iam habitum) diuisoris figuras anteriorabis: sic ꝙ vltima diuisoris, sub diuidendi penultima ponatur, & diuisoris penultima sub diuidendi antepenultima, & pari modo de alijs: & iterum videbis, an toties diuisoris quælibet figura alia ab vltima, in figura numeri diuidẽdi sibi suprapposita, & residuo (si sit) inueniatur, quoties vltima diuisoris in sibi suprapposita, aut supprapositis figuris reperitur. Qꝫ si adhuc id non cõtingat, iterum diuisoris figurę mutabũtur: taliter vt diuisoris vltima sub diuidẽdi antepenultima ponatur: & ita de reliquis, modo prius habito faciendum est: quo pacto, videbis an to-

☞In huiusmodi exẽplis apti⁹ egeris, si diuisoris cifrasquotquot sint sub totidẽ diuidẽdi figurissemel tãtũ apposueris ita vt prima cifra, primũ occupet limitẽ, secunda, secũdũ: & tertia, tertium &c. nec opus erit toties repetita trãspositione cifrarũ, cũ sit inanis. Cęterum, cum significatiuis figuris age, vt dictũ est. Exẽplum.

1 2
7 7 8 0
8 8 8 0
(1 2 1 $\frac{20}{60}$

ties omnes aliæ figuræ diuiſoris ab vltima in ſibi ſuprapoſitis inueniantur, quoties diuiſoris vltima in ſibi ſuprapoſitis habetur:& ſi ita eueniat, numerum vicium inter rectas lineas ſcribe, ſupra vltimam diuiſoris figuram : & per illum numerum quamlibet diuiſoris figuram multiplicabis,& prouenietem numerum à ſupraposita, vel ſupraposſitis figuris ſubtrahe:& ſi aliquid ſupererit deſuper ponatur, prius tamen alijs figuris cancellatis:deinde anteriorabis diuiſoris figuras, prioribus eiuſdem cancellatis: & iterum eodem modo operaberis, quouſque diuiſoris prima figura ſub prima diuidendi figura ponatur. Seruabis tamen in hac ſpecie iſta duo documenta. Primum eſt: ſi aliqua figura diuiſoris pluries quàm nouies in ſibi ſuprapoſita, vel ſuprapoſitis reperiatur figuris, tantum 9 pro numero quotienti accipias. Secundum documentum eſt tale. Si poſt primam operationem, contingat diuiſoris aliquam figuram, in ſibi ſuprapoſita figura non poſſe reperiri, anteriorabis diuiſorem, ponendo o pro numero quotiẽte, inter lineas parallelas. Sed vt hæc omnia clarius intelligantur, exemplo, facili aperiuntur. Si ex te aliquis petat numerum quotientem, qui ex diſtributione, ſiue diuiſione 520125 ducatorũ, per 43 homines prouenit, eſt hoc pacto operandũ: primo numerus diuidendus, & diuiſor diſponantur, vt ante dictũ eſt, ſic ꝙ inter ipſos lineã cadẽs mediabit, & ſub diuidẽdo duę protẽdãtur lineæ parallelæ, ſub quibus diuiſor ponatur, taliter ꝙ vltima diuiſoris ſub diuidẽdi vltima, & penultima ſub penultima, vti præſens oſtẽdit figura, diſponatur. Deinde, videbis quoties vltima diuiſoris cõtineatur in vltima diuidẽdi, & reperies ꝙ ſemel tantũ: pones igitur 1 inter lineas parallelas recte ſupra 3, qui eſt ante vltimam diuiſoris figurã: & multiplicabis per 1, vltimam diuiſoris, & proueniet 4 numerus, quẽ ab vltima diuidendi figura, videlicet 5, ſubtrahe, & reſiduum, ſcilicet 1, deſuper pone, prius cancellato 5: poſtmodũ prima diuiſoris per quotiẽtem, hoc eſt per vnitatẽ inter lineas locatã, multiplicetur, & proueniet 3, qui à ſibi ſuprapoſito, & reſiduo ex præhabita operatione, 12 videlicet, ſubtrahatur: & facta ſubtractione, figuræ illæ à quibus ſubtrahitur, cancellẽtur, & reſiduũ, quod eſt 9, ſupra diuidẽdi penultimam ponatur: quo terminato, diuiſor anterioretur, ſic ꝙ vltima diuiſoris ſub diuidẽdi penultima, & diuiſoris penultima ſub diuidẽdi antepenultima locetur, priori diuiſore cancellato, & operatio ſub tali forma manebit.

Primum documẽtum.

Secundũ documẽtum.

Operationis exẽplum.

```
43 | 520125
     ------
     43

     ✗ 9
43 | 5̶ 2̶ 0 1 2 5
     ----------
     1
     ----------
     4̶ 3̶ 3
       4
```

Conſequenter operaberis, aduertendo quoties vltima diuiſoris contineatur in ſibi ſuprapoſita diuidendi figura, quæ eſt 9, & inuenies ꝙ ſolũ bis continetur, & poſtq̃ toties prima diuiſoris in ſuprapoſito numero reperitur: pone igitur numerũ viciũ ſcilicet 2, pro quotiẽte inter lineas ante 1, recte ſupra diuiſoris primã figurã, & per vltimũ numerũ viciũ, ſiue per illũ quotiẽtẽ, diuiſoris vltimã multiplicabis, dicedo, bis 4, componunt 8, quem à 9 ſuprapoſito ſubtrahe, & manentẽ vnitatẽ deſuper pone: & quoniam toties diuiſoris prima in ſibi ſuprapoſita, aut ſuprapoſitis figuris reperitur, ideo multiplicetur pariter per quotientẽ, & prouenientẽ numerũ, qui eſt 6, à ſuprapoſito 10 ſubtrahe, reſiduũ, ſcilicet 4, ſupra o ponendo, prius aũt cãcellatis 1 & o. Iſto peracto, currẽtẽ diuiſorẽ anteriorabis, eodẽ modo vt prius priori loco cancellato, & diſpoſitã hũc in modũ operationẽ reperies.

```
       ✗
     ✗ 9̶ 4
43 | 5̶ 2̶ 0̶ 1 2 5
     ------------
       1 2
     ------------
     4̶ 3̶ 3̶ 3
       4̶ 4
```

Deinde procede vt prius operando, ſed quoniã vltima diuiſoris in ſibi ſuprapoſita figura tãtum ſemel reperitur, prima vero diuiſoris nulla vice in ſuprapoſita reperitur: iterum diuiſorẽ anteriorabis, priori ante cãcellato, & inter lineas parallelas ãte 2 pones o, & eo pacto diſpoſitã figurã habebis. Procede igitur hoc pacto operando conſequenter, & videbis quoties vltima diuiſoris in ſibi ſuprapoſitis reperitur figuris, & inuenies quòd decies: capies ergo pro quotiẽte 9, & videbis vtrum toties prima diuiſoris in ſibi ſuprapoſitis elementis habeatur, & inuenies ita eſſe: ideo per quotientẽ videlicet 9, ſecũdã diuiſoris figurã multiplica, & proueniet numerus 36, quem

```
       ✗
     ✗ 9̶ 4
43 | 5̶ 2̶ 0̶ 1 2 5
     ------------
       1 2 0
     ------------
     4̶ 3̶ 3̶ 3̶ 3
       4̶ 4̶ 4
```

à suprapoſito numero ſcilicet 41, ſubtrahe, reſiduum, quod eſt 5, ſupra 1 ponendo, prius autem 4 & 1 cancellatis: multiplicabis pariter diuiſoris ſecundam figuram per 9, & prouenientem numerum, qui eſt 27, à ſuprapoſito ſcilicet 52 ſubtrahe, & numerus qui ſupereſt, videlicet 25 deſuper ponatur, ſic vt 2 ſupra 5, & 5 ſupra 2, locetur, priori tamen numero cancellato, diuiſore etiam cancellato, idem diuiſor anterioretur. & operatio ſub tali diſpoſitione manebit.

```
        x     2
      x 9 4 5 5
43 |  5 7 0 x 7 5
        1 2 0 9
      4 3 3 3 3 3
        4 4 4 4
```

Vltimo autem videbis quoties vltima diuiſoris in ſibi ſuprapoſitis elementis reperitur, & inuenies quòd ſexies. 4 enim in 25 ſexies reperitur: & ſi 4 per 6 multiplicaueris, numerus 24 prouenit, quem ſi ſubtrahas à 25, ſola vnitas maneret locanda ſupra 5: ſed quoniam prima diuiſoris figura non toties inuenitur in ſibi ſuprapoſito, videlicet 25, ideo pro numero quotienti non 6, ſed 5 numerus capiatur, qui per vnam vnitatem eſt 6 minor: per illum igitur diuiſoris vltima multiplicetur, & proueniens numerus erit 20, quē à ſibi ſuprapoſito, ſcilicet 25 ſubtrahe, & reſiduo, ſcilicet 5, remanēte, cācelletur 2: poſtea diuiſoris prima per quotientē multiplicetur, & prouenietē numerū, qui erit 15, à ſibi ſuprapoſito, ſcilicet 55, ſubtrahe, & reſiduū qđ erit 40, deſuper ſcribatur, prius cācellatis duabus figuris ſcilicet 5 & 5. hoc igitur expedito, reſiduū cape, & ſuper diuiſorē ſtantē, virgula mediāte deſcribes, & cōpletā ſub tali forma operationē habebis.

```
                        x   7 | 4
Numerus manens     40 | x 9 4 5 5 | 0
Diuiſor ſtans      43 | 5 7 0 x 7 5   Numerus diuidēdus.
Lineæ parellelæ         1 2 0 9 5     Numerus quotiens.
Diuiſor currens       4 3 3 3 3 3
                        4 4 4 4
```

Tenebis tamen in hac ſpecie pro documēto, in omni diuiſione manentē numerum (ſi quis fuerit) diuiſore minorē eſſe: quoniā æqualis, aut maior eſſe non poteſt. Sed vt clariorē huius diffiniti habeas notitiā, ad hęc duo infrapoſita exempla oculū appone, quibus debite apprehēſis, in quibuſuis alijs facilis erit operatio. Documētum.

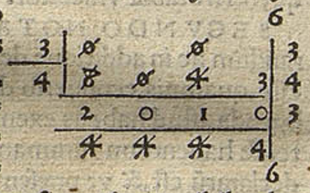
```
        7     x                 2
   0    3 4 7                   8
25    | 7 0 8 7 5               7
          2 8 2 5               2
      7 5 5 5 5
        7 7 7

                        x | 3
                        7 4
                        4 0
                      3 0 8 | 7
         378 |        4 8 7 0 | 8
         539 |  4 7 0 0 7 5
                      8 7 3
                5 3 0 0 0 9
                  5 3 3 3
                    5 5
```

Ex his omnibus, quæ in hac ſpecie dicta ſunt, poteſt facile aſtrologus cognoſcere, 600 minuta quot efficiant in cælo gradus, & multa talia. Pro quo ſciendo, eſt modicū aduertendum id quod præcedenti diffinito in calce ſecundi notabilis habetur: vbi dicitur ꝙ omne ſignum in cælo, in 30 diuiditur gradus, & quilibet gradus, in 60 diſtribuitur minuta: cape igitur pro diuidendo 600 minuta (de quibus eſt quęſtio quot gradus componunt) & pro diuiſore numerum 60 accipies, poſtq̄ quilibet gradus ex 60 reſultat minutis, & diuidendo 600 per 60, pro quotienti numero habebis 10. dices igitur, 600 minuta, 10 gradus in cælo efficere. Pari modo operandū eſt, ſi ex calculatore quęratur, quot pedalitates emanant ex 1000 quintis vnius pedalis, poſtquam quodlibet pedale ex quinq; quintis conſtat: pro numero diuidendo habendus eſt 1000 numerus, & pro diuiſore 5. ſi igitur diuidas 1000 per 5, inuenies pro numero quotienti 200, qui eſt numerus pedalium tantum, quæ ex mille quintis pedalis conſurgunt. Conſimiliter oportet dicere, ſi ex mercatore quęratur, quot vlnas panni mille ſexaginta palmi efficiunt, ſupponendo ex quatuor palmis vlnam conflari, vti & in noſtra caſtella. per 4 Corollarium.

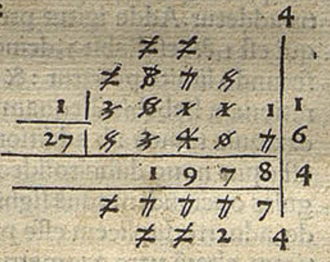
7 7
x 0 6 0
per 4
(265

igitur, numerum palmorum debes diuidere, & pro quotienti consurget 265, qui vlnarum est numerus. Est tamen consyderandum, quòd aliter in præsentiarum vtimur palmo, quàm in præcedenti diffinito: vbi dictũ est ex quatuor digitis latitudinaliter sumptis palmum componi: palmus igitur in proposito, capitur pro intercepta distantia inter extrema puncta extremorum digitorum oppositas differentias expansorum.

Prima ꝓbatio. TERTIO NOTANDVM EST tres in hac specie esse probationes: quarum prima est nouenaria, secunda septenaria, tertia vero per multiplicationem fieri habet. ¶Ad primã igitur accedendo, aduerte: si vis cognoscere an bene operatus fueris in diuisione: debes rectã lineam ante operationem protendere, & à diuidendo numero separabis 9 quoties permittit, & remanentẽ notã in capite lineæ pone: deinde accipe notam à diuisore, quam ante lineam directa sede repones, capies etiam à quotiente numero notam, deponendo 9 quotiẽs poteris deponere, quã directo loco ante lineã locabis: quo facto à numero relicto (si aliquis sit) etiam notam accipies, quam ante lineam decenti loco ponas: & multiplicabis notam diuisoris per quotientis notam, & à numero producto accipies notam separando 9 quotiẽs poteris, & illam addes notę habitę à numero manente (si sit) & à numero proueniẽte sumatur nota, quam in altero lineæ extremo pones: & si illæ extremales lineæ æquales fuerint, bene operatus es: si hoc non eueniat, male. Quòd si in diuisione nullũ fuerit residuum, facta multiplicatione diuisoris per quotiẽtis notam, à prouenienti numero notam accipe: quam in altero lineæ fine locabis: & si æquales fuerint tales extremales notæ, operatio erit bona: aliter si contingat, nihil valebit. Istud facile exemplo præsenti cognoscere potes. Et quãuis in præsenti operatione hæc probatio habeat verum: dabitur tamen aliqua operatio facillime, quæ nulla erit: & tamen modus iste probandi tenebit, quemadmodum sæpe visum est in præcedentibus diffinitis, ideo hac prætermissa probatione, ad secundam eundum est.



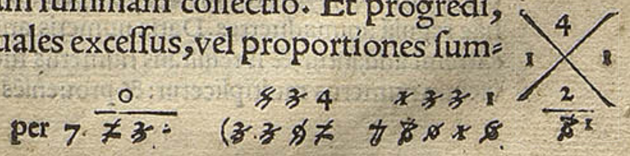
Secunda probatio ¶Pro qua secunda scienda, aduerte ꝙ omnino eodem modo fieri debet, ac præcedẽs nouenaria: hoc dempto, ꝙ notę accipiãtur eo pacto, vt diffinito secundo, notabili tertio, in declaratione secundæ probationis ostensum est, à binis elemẽtis notam accipiendo, quod clare isto aperitur exemplo. Modus pariter iste probandi, quemadmodum & pręcedẽs nihil funditus valet: potest quippe eadem via inficiari, ac alter.



Tertia ꝓbatio certior. ¶Relictis igitur his duobus probandi modis: ad tertiam accedendum est probationem, quam verissimam, & eandem efficacissimam esse asseueramus: pro qua breuissime edocenda, si cognoscere vis an bene operatus fueris, debes multiplicare diuisorem per numerum quotientem, & prouenienti summæ, residuum diuisionis (si qoud fuerit) est addendum: & si resultãs numerus fuerit numero diuidendo ęqualis, recte operatum est: si autem inæqualis extiterit, nulla est operatio. Vbi autem in diuisione nullum contingat esse residuũ, multiplicato diuisore per quotientem: si consurgens summa diuidendo numero adæquatur, integre operatus es: eueniente autem opposito, nihil operationis discursus valebit. ¶Pro huius capitis complemento est aduertendum diuisionem in infinitas distribui species. quarum prima est bipartitio, siue dimidiatio: secũda tripartitio: tertia quadripartitio: & ita consequenter. Vnde mediatio, nihil aliud est, q̃ numeri in duo æqua sectio, siue partitio: & eodem modo tripartitio, est numeri in tria æqua sectio, siue diuisio: nec opus est, vt pro dimidiatione nouum in arithmetica efficiatur diffinitum, quẽadmodum nec pro alijs infinitis eius speciebus.

6 ¶Progressio, est plurium numerorum secũdum æquales excessus, aut proportiones sumptorum, in vnam summam collectio. Et progredi, est plures numeros secundum æquales excessus, vel proportiones sumptos, in vnum colligere.

☞ Hanc secundã probationẽ nũc tandẽ rectius cognosces, vbi nũc quęlibet numerũ per 7 diuidere didiceris. diuide igit̃ hac speciẽ ꝓbãda per 7 diuisorẽ, & deinceps quotientem, resídua inuicem mͥtiplica quorũ productũ per 7 rursus diuide: ac remanẽtem numerũ 7 minorem obserua, cui ęquales erit nũerus ille q ex diuisõ numero diuidendo item per 7 relinquetur. Quòd si residuũ aliquod fuerit relictũ, id ꝙ per 7 diuidenũ est, ac nota eius notę priori addatur, q̃ si 7 excedãt auferat 7. & quod reliquetur, ęqualem sibi in bona diuisione semper habebit notã ex diuidendo sumptã. Eodẽ modo licebit & hanc speciem per 5 ꝓbare. Vnde non est ꝙ operationi diffidas, triũ ꝓbationũ cõcẽtu cõfirmatæ. fieri enim nequit vt tres illæ testes cõsonent in cõmisso errore, aut dissonent in veritate.



Exemplum,1,2,3,4,5,componunt 15. Etiã 1,2,4,8,16,faciunt 31. Et 2,4,6,8,10 collecti,numerum 30 efficiũt. In primo,& tertio istorum exemplorum,semper inter numeros eadem proportionalitas arithmetica reperitur. In secundo autem exemplo, eadẽ geometrica proportio seruatur. ¶Finis progressionis, est summam in progressionaliter se habentibus numeris,expedite assignare. ¶Seruit hæc species in primis astrologis,& calculatoribus, vti & præcedentes: multis pariter alijs hominum statibus.

Progressionis finis & vtilitas.

PRIMO NOTANDVM EST pro huius diffiniti claro processu, duo esse in hac parte admodum requisita: alterum numeri progressionales, alterum progressionalium summa. In generali vero tantum tria consyderantur, scilicet duo præhabita, & interiecta linea. ¶Modus autem scribendi est talis, primis & superioribus locis progressionales numeri scribantur, sub quibus linea interiecta in rectum protrahatur, vt præsens forma indicat. Demum sub linea progressionalium numerorum summa locetur, de qua sequenti notabili videbitur.

In ꝓgressione consyderãda

prout

6	
5	Numeri progressionales.
4	
3	
———	Linea interiecta.
18	

☞Triplicem numerorũ notã acceptionẽ. Est nanqꝫ numerus, qui secundum se cõsyderat, neqꝫ in comparatione ad alterũ, neqꝫ ad figuras geometricas applicatur. atque de hoc maxime actũ est 5 superioribus definitis. Est & numerus ad aliquid sumptᵘˢ, qui in cõparatione ad alterum cõsyderatur. Atque in hoc solo cõsistit omnis ꝓgressio & proportionalitas numerorum. Tertius est numerus secũdũ figurã cõsyderatᵘˢ, put ad figuras geometricas applicatur. In quo genere consistit & quadratᵘˢ & cubus, de quibus paulopost agetur.

SECVNDO NOTANDVM EST in progressione eodem modo esse operandum ac in additione declaratum est: cum ita sit, omnem progressionem additionẽ esse, quamuis econuerso dici nequeat: ideo sine maiori processu, pro hac specie intelligenda, istud habeas exemplum. Vis autem scire horum numerorum progressionaliter se habentium summam, scilicet 3,5,7,9,11,13? Disponantur vt declaratũ est, & vt præsens figura ostendit. deinde dic, 3 & 5 faciũt 8: & 7, componunt 15: postmodum addas 9, & 24 habebis, postea 11, & erũt 25, iterum 3 addas, & 28 procreabis, qui compositus est numerus: ponatur igitur eius digitus, scilicet octonarius sub linea primo limite, & articulus in mente seruetur, qui secundum eius decimæ partis denominationem, quæ est 2, secundorũ limitum elementis addetur. Adde igitur pro secundo operando 2 in mente repostum primo articulo, qui est 1, & resultabit 3, deinde 3 & 1 faciunt 4, qui sub linea secundo limite ponatur: & completam sub tali forma operationem habebis. Et quamuis iste operandi modus sit efficax: quia tamen ab additione non discrepat, pro qua non est opus nouo diffinito: ideo breuius, & clarius per duas regulas operandi modus significabitur. ¶Pro quo intelligendo, aduerte duplicem esse progressionem, alteram arithmeticam, alterã vero geometricã.

Operationis exẽplum.

13
11
9
7
5
3
———

13
11
9
7
5
3
———
48

¶Arithmetica progressio, est pluriũ numerorũ se eodẽ excessu exuperantiũ, in vnam summã collectio. Verbi gratia, 1,2,3,4, faciunt decẽ. Nam quemadmodũ 2 excedit 1 per 1, ita 3 excedit 2 per 1: & 4,3. ideo inter illos numeros arithmetica proportio inuenitur. Idem de his numeris est dicendum, 2,5, 8, 11. & etiam de istis 1,3,5,7,9. Vnde illi numeri in arithmetica progressione se habẽt, inter quos idem reperitur excessus: quemadmodũ in præhabitis exemplis contingit. & pro minori tres numeros esse oportet. Intellige semper inter numeros vnitatẽ numerari, quę tamẽ proprie loquẽdo numerus dici nequit. Progressio autem arithmetica est duplex: altera cõtinua, altera disiũcta, siue interscalaris. Continuã progressionẽ illã appellamus, quę naturalẽ numerorũ seriẽ post primũ numerũ seruat. Et talis adhuc est multiplex: quedã incipit ab 1, quędã à 2, quędã à 3: & ita cõsequenter ascẽdendo. Exẽplum istorũ, 1,2,3,4,5: 2,3,4,5,6: 3,4,5,6,7. Disiũctã autẽ, siue interscalarẽ progressionẽ illã dicimus, quę post primũ numerũ, aliquẽ vel aliquos numeros prætermittit, & cõsimilẽ, vel cõsimiles post secundũ, tertiũ, quartũ, & ita cõsequẽter. Et talis est multiplex, quædã ab 1, incipit, quædã à 2, quædã à 3, & ita cõsequenter. Exempla istorũ, 1,3,5,7,9: 2,5,8,11,14: 3,7,11, 15, 19. ¶Pro operandi igitur modo in arithmetica progressione hãc regulã animaduertes. Datis numeris arithmetica progressione se habẽtibus, duo extremi addantur, & si resultans numerus fuerit par, per eius medietatem, limitũ seu vicium numerus multiplicetur: & proueniẽs numerus erit summa datorũ numerorũ.

Arithmetica progressio.

Cõtinua.

Disiũcta.

Regula pro arithmetica ꝓgressiõe.

4658
5372
9064
19094

Si vero ex additione extremorum impar proueniat numerus, per medietatem locorũ multiplicetur, & reſultans numerus erit datorũ ſumma. Exemplum primi: ſint numeri dati, 1, 2, 3, 4, 5, addas 1 & 5, & excreſcet 6, qui eſt numerus par: per eius igitur medietatem, videlicet per 3, multiplica 5, qui eſt numerus limitum: & proueniens numerus erit 15, qui datorum numerorum eſt ſumma. Exemplum ſecundi: ſint dati numeri, 3, 6, 9, 12, 15, 18: adde igitur 3 & 18, & habebis 21, qui impar numerus eſt: & multiplicabis 21 per medietatem vicium, videlicet per 3, & numerus emanabit 63, qui datorum numerorum ſumma dicetur. Ex his ſequitur, ſi extremorum numerorum creſcens numerus fuerit par, neceſſum eſſe numerum limitum imparem eſſe: quod ſi talium extremorũ numerorum numerus reſultans impar extiterit, parem eſſe numerum limitũ oportet. Et hæc de arithmetica progreſſione. ¶Geometrica autem progreſſio, eſt plurium numerorum ſecundum æquales proportiones ſumptorum in vnam ſummam collectio. Exempli gratia: 1, 2, 4, 8, faciunt 15. quemadmodum enim 2, ad 1 ſe habet in proportione dupla, ita 4 ad 2, & 8 ad 4: ideo inter datos numeros geometrica progreſſio inuenitur. Idem de his eſt dicendum numeris, 1, 3, 9, 27. & pariter de iſtis, 2, 6, 18, 54. Vnde illi numeri ſe habent in geometrica progreſſione, inter quos eadem reperitur proportio: non autem idem numerorũ exceſſus, vt in præaſſumptis numeris clare cõſtat. ¶Pro operandi autẽ modo in geometrica progreſſione, hæc regula habeatur. Datis numeris geometrica proportione ſimplici multiplici ſe habentibus, multiplica maiorẽ per numerum à quo illa proportio denominatur, & à producto ſubtrahe minorem numerum, & reliquum diuides per numerum vnitate minorem numero à quo denominatur proportio: quo facto, numerus quotiẽs erit datorum numerorum ſumma. Hanc regulam facile intelliges infrapoſitis corollarijs apprehenſis. ¶Primo ſequitur, datis numeris in dupla ſe habentibus proportione, maiorem numerum eſſe duplandum, ſiue per duo multiplicãdum, quod idem eſt (dupla enim à 2 denominatur) & à producto minorem numerum eſſe ſubtrahendum: & quod remanet erit numerus intentus: quoniam 2, diuidi per numerum vnitate minorem non poteſt. Exempli gratia, ſint dati numeri 2, 4, 8, 16, 32: multiplica per 2, ſeu dupla 32, & excreſcit 64: à quo ſubtrahe 2, & manens numerus erit 62, qui numerus eſt datorum numerorum ſumma. ¶Secundo ſequitur, datis numeris in tripla ſe habẽtibus proportione, maiorem numerum eſſe triplandum, ſeu per tria multiplicandum, & à producto minorem eſſe ſubtrahendum, & remanens numerus eſt diuidendus per 2, qui ſolum per 1 eſt 3 minor: quo peracto, numerus quotiẽs erit datorũ ſumma. Exemplũ. ſint dati numeri 1, 3, 9, 27: triplabis igitur 27, & proueniet numerus 81, à quo 1 ſubtrahe, manebit 80, quem per 2 diuide, & quotiẽs numerus erit 40, qui datorum numerorum eſt ſumma. ¶Tertio ſequitur, datis numeris in quadrupla ſe habentibus proportione numerum maiorem eſſe quadruplandum, & à producto minimum ſubtrahendum, & manens numerus eſt diuidẽdus per 3, qui eſt vnitate minor 4, à quo quadrupla proportio denominatur, & quotiẽs numerus erit datorũ ſumma. Exemplum: ſint dati numeri 1, 4, 16, 64, 256: quadruplabis ergo, ſiue per 4 multiplicabis 256, & proueniet numerus 1024, à quo 1 ſubtrahe & manebit 1023, quem per 3 diuide, & quotiẽs numerus erit 341, qui ſignatorũ numerorum eſt ſumma. Eodem modo eſt operandum in numeris ſe habentibus in quintupla proportione, ſextupla, aut ſeptupla: & ſic de alijs aſcendentibus ſimplicibus multiplicibus proportionibus. Poſſunt pariter pro alijs proportionum generibus regulæ aſſignari: ſed ne longius æquo immoremur, quæ iam poſita ſunt ſufficiant.

Exempla

Corollarium.

Geometrica progreſſio.

Regula pro geometrica progreſſione.

Primũ corollariũ.

Secundũ corollarium.

Tertiũ corollariũ.

TERTIO NOTANDVM EST progreſſionem per eaſdem tres probationes debere probari, per quas additio probatur, ſcilicet per 9, per 7, & per ſubtractionẽ. Si autẽ per primã velles progreſſionẽ probare: accipe ab omnibus numeris progreſſionaliter ſe habentibus notã, deponẽdo ſemper 9, vti in additione faciebas, & protracta recta linea ante progreſſionẽ in eius capite reperta, nota ponatur. Deinde à ſumma notã pariter accipies, quã in lineę pede locabis: & ſi inuentę notæ ſint æquales, bona erit progreſſio: ſi vero inæquales extiterint, inutilis, & nulla dicatur. Exẽplũ hic literaliter habes.

5
5
4
3
2
14
5

Prima probatio.

Corollarium tale eſſe debet. Si nũeri progredientes progreſſione inquam Arithmetica ab impari nũero ordiãtur, & primus ille ĩpar vltimo addaẽ, reſultet'que ex tali additione numerus par, certũ eſt & numerũ vltimũ, & numerũ limitũ fuiſſe imparem. Cõtrà vero ſi numerus reſultet impar, limitũ numerũ fuiſſe parem. Quòd ſi ab aliquo nũero pari, progreſſio ordiatur diſtĩcta per nũeros pares, ſemper reſultabit numerus par, quãtũuis limitũ nũerus ſit impar. vnde nihil retulerit, ſiue per medietatẽ ſeriei, ſiue producti, alterutrum multiplices: periculũ facere potes, ſi tabellam Pythagorę intueris, in qua lineæ oẽs quaquerſus arithmeticam in ſe continẽt progreſſionem.

Secunda probatio

¶Si per ſecundam probationem, videlicet per 7, progreſſionem velles probare: accipe à progreſſionaliter ſe habentibus numeris, notas, eo modo quo in additione dictum eſt, quas (recta linea progreſſioni præpoſita) ante eandem limitibus proprijs locabis: poſtmodum ab illis notis, notam adhuc capies remouendo 7 quoties permittitur, & in vertice lineæ pone. Poſtremo à ſumma notam eodem modo accipies, quæ alteri lineæ extremo adhærebit: & ſi conformes extremæ notæ inueniantur, bene operatus es: ſi diſſimiles procreentur, iterum de nouo incipias operari oportet. Sed quoniã in præcedentibus diffinitis ſępe has probationes refellimus: ideò ad tertiam procedo probationem.

	2
16	2
8	1
4	4
2	2
30	
2	

Exemplum.

Tertia probatio.

¶Si igitur per tertiã probationem cupis progreſſionem probare, ſubtrahe à ſumma progreſſionales numeros, & ſi nihil ſupererit, aut defuerit, integra erit operatio: occurrente autem oppoſito, nulla erit progreſſio. Et quamuis progreſſio additionis ſit ſpecies, quia tamen duas continet regulas quæ additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & diuiſionem pro ipſarũ intelligentia præſupponunt: ideò minus inutile viſum eſt poſt diuiſionem de progreſſione nouum efficere diffinitum.

¶Reductio, eſt groſſioris numeri in ſubtiliorẽ, vel ſubtilioris in groſſiorẽ cambitio, ſeu commutatio. Reducere, eſt groſſiorem numerum in ſubtiliorem, vel ſubtiliorem in groſſiorem cambire, aut commutare. 7

Vni ſcuto, 35 duodenos etiam doctiſſimꝰ dominus Budæus i Aſſe ſuo aſſerit olim hic tributos fuiſſe.

¶Exempli gratia: vis redducere 20 ſcuta ad duodenos? pro illorum cambio ſiue commutatione, 700 duodenos habebis. Quòd ſi ad duodenos triginta franci reducantur, inuenies, facta reductione, numerum 600 francorum pro ſumma. Etiam ſi 15 duodenos in turonos commutes, numerum 180 turonorum procreabis.

Reductionis finis & cõmoditas.

¶Finis huius ſpeciei, eſt prouenientem aſſignare ſummam, ſiue numerum, qui ex reductione groſſioris numeri ad ſubtiliorem, vel econtra, prouenit. ¶Seruit auem hæc ſpecies aſtrologis, & calculatoribus, multis etiam hominum ſtatibus: quemadmodum mercatoribus, theſaurarijs, & alijs huiuſmodi hominibus

In reductiõe aduertẽda.

PRIMO NOTANDVM EST duo eſſe in hac ſpecie aduertenda, alterum numerus reducendus, alterum proueniens ex reductione ſumma. Modus autem ſcribendi talis obſeruari debet: loco ſuperiori, numerus ſeu numeri reducendi ponantur, ſub quibus in directum recta linea protrahatur, & in latere ſiniſtro denominatio numeri, ad quem fit reductio per cõueniens ſignum locetur. verbi gratia: ſi 100 ſcuta debeas reducere ad duodenos, illa ſcuta ſub tali forma diſpones poſt lineam perpẽdiculariter cadentẽ. Deinde ſub linea interiecta diſcurſus reductorius fiat: quo peracto, linea ſubijciatur, infra quam numerus ex reductione proueniẽs locabitur: iſta omnia diſcretius ſequenti notabili declarabuntur.

Duodeni. | 100 Scuta.

Triplex reductio.

SECVNDO NOTANDVM EST pro operationis contracta intelligentia triplicem eſſe reductionem. Vna eſt, qua groſſiores numeri, ad ſubtiliores reducuntur: vt ſi ducati, vel ſcuta ad duodenos, vel denarios reducãtur. Alia eſt, qua ſubtiliores numeri, ad groſſiores reducuntur: vt ſi denarios, vel duodenos ad ſcuta, vel ducatos velles reducere. Alia vero eſt reductio, qua ſimul & groſſiores, & ſubtiliores numeri ad medios reducũtur. Verbi gratia: ſi ducati, & duodeni ſimul ad francos reducantur. Inſuper cõſyderabis quamlibet iſtarũ reductionũ duplicem eſſe, videlicet ſimplicẽ, & mixtam.

Simplex Mixta.

Simplicẽ reductionem eã appellamus, cuius numerus aut numeri reducendi, ſunt eiuſdẽ denominationis. Exemplũ: ſi 1534 ducati ad duodenos reducãtur. Mixtam vero reductionẽ eam dicimus, cuius numerus aut numeri reducendi, ſunt diuerſarum denominationũ. Exemplũ: vt ſi 3542 ducati, & 2673 ſcuta ſimul ad duodenos reducãtur. De his autẽ mixtis numeris, diffuſius vltimo diffinito huius primi tractatus agetur. His declaratis, ad hæc infra poſita aduertes documẽta, per quæ huius ſpeciei notitiã habere poteris.

Primũ documẽtũ.

Primũ documentũ eſt tale. Si ſimplicẽ numerũ ad ſubtiliorẽ velles reducere, oportet primo vtriuſq; numeri ſimplicis denominationẽ cognoſcere, hoc eſt, an quilibet talis dicatur numerus ducatorum, ſcutorũ, vel aliquod aliud huiuſmodi: deinde videndum est quoties vnum singulare numeri reducendi continet, aut continetur ab vno singulari alterius numeri ad quē debet reduci. Per singulare numeri, intelligo, si numerus sit ducatorū, vnum ducatum: si scutorum, vnum scutum: & si duodenorum, duodenum vnum: & ita de alijs. Hoc igitur cognito, si numerus reducēdus sit grossior, eundem per quotientem numerum, hoc est per illum numerum significantem quoties grossior numerus subtiliorem continet, multiplicabis. quo facto, prouenien ex illa multiplicatione summa, creatus ex tali reductione numerus erit. Exempli gratia, vis duodenorum summam cognoscere, quam 1534 scuta componunt? primo videbis quot contineat duodenos scutum, & reperies 35 continere: scutorum igitur numerum, scilicet 1534 multiplicabis per quotientem, hoc est per 35, & proueniens summa erit 53690, quæ ex reductione 1534 scutorum ad duodenos prouenit. Eodem modo operandum est, si ad turonos prædictum numerum scutorum reducere velles. Debes enim in primis videre quot turonos scutū contineat, quod isto modo facies. postquam scutum 35 continet duodenos, & duodenus, 12 continet turonos, debes 35 per 12 multiplicare, & proueniens numerus, qui est 420, erit summa turonorum contentorum à scuto: multiplicabis igitur numerum scutorum, videlicet 1534 per 420, & proueniens numerus, erit 644280, qui ex reductione 1534 scutorum ad turonos prouenit.

Reductio grossiorū ad subtiliora.

¶ Si autem in simplici reductione reducendus numerus sit subtilior numero ad quem debet reduci, cognita vtriusque numeri denominatione, & cognito quoties vnum singulare numeri reducendi contineatur ab vno singulari numeri ad quem fieri habet reductio, debes numerū subtiliorem per quotientem grossioris numeri diuidere, & numerus quotiens, erit prouenies ex tali reductione summa. Verbi gratia: vis reducere 1435 duodenos ad scuta? hunc duodenorum numerum pro diuidendo numero accipies, & pro diuisore numerum 35. & diuisione facta, numerus quotiens, qui est 41, erit proueniens summa ex reductione 1435 duodenorum ad scuta. Et pari processu in quibusuis alijs reductionibus simplicibus procedendum est.

Reductio subtiliorum ad grossiora

¶ Secundum documentum est, numerus mixtus in tripla reperitur differentia in eius reductione. Primo enim contingit ad subtiliorem reduci. Secundo euenit, vt ad grossiorem numerum reducatur. Tertio vero accidit, ꝙ ad medium reducatur numerum. Exemplum primi. Si reducere velles 3456 scuta, 4567 francos, & 5678 duodenos ad turonos. Exemplum secundi, si velles reducere 1234 duodenos, 2345 francos, & 3456 scuta ad ducatos. Exemplum tertij. Si velles reducere 9876 ducatos, & 8765 scuta, & 7654 duodenos ad francos.

Secundū documen de mixtorum reductione.

¶ In primo autem exemplo est operandum hoc pacto, dispositis numeris illis, vt præsens docet figura:

Primi exempli declaratio.

Turonus	3 4 5 6	Scuta
	4 5 6 7	Franci.
	5 6 7 8	Duodeni.

Primo duodenorum numerus ad turonos reducatur, modo declarato in primo documento, & habebis pro summa 68136 turonos: deinde numerus francorum ad turonos reducatur: quod etiam facies secundum quod declaratum est in primo documento: & pro summa reperies 1096080 turonos: deinde numerum scutorū eodem modo ad turonos reducas: & pro summa inuenies 145152 0 turonos, & his tribus reductionibus cōpletis, isti tres numeri prouenientes addātur, ex quorum additione consurgēs summa erit 2615736, quæ habetur ex reductione 3456 scutorū,

6 8 1 3 6	turoni ex	duod.	5 6 7 8
1 0 9 6 0 8 0		fran.	4 5 6 7
1 4 5 1 5 2 0		scut.	3 4 5 6
2 6 1 5 7 3 6	Summa		

& 4567 francorum, & 5678 duodenorum ad turonos. Isto igitur discursu peracto, sub tali dispositione reductio manebit.

¶ In secūdo exemplo taliter est operandum, in primis disponantur numeri, vt præsens ostendit figura:

Secundi exempli enodatio

Ducatus	1 2 3 4	Duodeni
	2 3 4 5	Franci
	3 4 5 6	Scuta.

deinde reducantur tam franci, quàm scuta ad duodenos: & summæ inde prouenientes simul cum duodenorum summa addantur: & proueniens numerus erit 169094, qui per 40 diuidatur, postꝗ

Ducatus	1 2 3 4	Duodeni	
	2 3 4 5	Franci	14 duodeni
	3 4 5 6	Scuta	supersunt.
Summa	4 2 2 7	Ducatorum	

ducatus ex 40 resultat solidis, & numerus quotiens, videlicet 4227, erit summa ducatorum prouenientium ex reductione supradictorum numerorum ad ducatos: quo facto, vt est in præcedenti forma, reductio manebit.

Tertij exempli operatio.

¶In tertio exẽplo est hoc pacto operandũ, dispositis in primis illis numeris quẽadmodũ præsens forma declarat: deinde illi numeri ad numerũ duodenorũ reducantur: & pro summa habebis numerũ 709469 duodenorũ: qui per 20 diuidãtur, postquã ex 20 duodenis francus cõsurgit: & pro numero quotiẽte inuenies 35473, qui supradictorũ numerorũ summa reductoria dicitur: & sub dispositione tali reductionem habebis.

Francus	9 8 7 6	Ducati
	8 7 6 5	Scuta
	7 6 5 4	Duodeni.

Francus	9 8 7 6	Ducati
	8 7 6 5	Scuta
	7 6 5 4	Duodeni
Summa	3 5 4 7 3	Francorũ. & 9 duod.

Reductionum probationes.

TERTIO NOTANDVM EST hanc speciem reductionis tres habere probationes: sed easdem accommodatitias. Quarum prima est nouenaria. Secunda septenaria. Tertia vero per diuisionem, aut multiplicationem potest fieri. Nempe omnis reductio per multiplicationem fieri habet, aut per diuisionẽ, aut mixtim, partim per multiplicationem, partim per diuisionem. *Si* igitur reductio per solam multiplicationem fiat, probabitur per easdem tres probationes, per quas multiplicationem diffinito quarto probari dicebamus. Qꝫ si aliqua talis reductio per diuisionem fiat dũtaxat: ipsa per tres diuisionis probationes probabitur. Si vero mixta fuerit: mixtim probationes accipies. ¶Pro intelligentia igitur primæ probationis nouenariæ, aduerte ꝙ si numeri reducendi sint eiusdem denominationis, & reducantur ad subtiliorem numerum, vt si 154 scuta ad duodenos reducãtur, notæ sunt accipiendæ eo modo, quo diffinito quarto huius tractatus dictum est in prima probatione: videlicet vt à reducendis numeris, 9 abstrahatur quoties potest, & nota remanens, facta recta linea ante operationem, debito ponatur loco: deinde à numero quotiente, per quem multiplicari debet summa numerorum reducendorum, nota abstrahatur, per quam prior multiplicetur, & à producto numero sumatur nota ponenda in capite lineæ: deinde à summa reductionis, nota eodem modo accipiatur, quam in altero lineæ extremo pones: & si illæ extremales notæ sint similes, bona erit reductio: si dissimiles, nihil valebit. ¶Septenaria autem probatio habet eodem modo fieri, hoc solo dempto, vt notæ accipiantur, vt declaratum est diffinito secundo. Sed quoniã, vt sæpe dictum est, isti probandi modi nihil valent: ideo ad tertiam probationem accede: pro qua intelligenda, non est opus magno processu, quoniam per diuisionem fieri habet, vt in quarto diffinito declarauimus. Si autem vis probare reductionẽ in qua subtiliores numeri ad grossiores reducuntur: vel in qua grossiores, & subtiliores ad medios reducuntur: ex iam dictis qualiter fieri habeat, constat.

Prima probatio.

Secunda probatio

Tertia probatio.

¶Radicum extractio in quadratis, est numeri inuentio, qui ex vnico 8
in se ductu, totum numerũ, aut saltem maiorem numeri partem, quadratam efficit. Radicem enim quadratam extrahere, est numerum inuenire, qui cum in se semel ducatur, totum numerum, vel maiorem eius partem quadratam, procreet.

¶Verbi gratia. Numeri 9 radix, est 3. cum ex ductu, vel multiplicatione 3 in se, numerus 9 emanet. ter autem 3, numerum 9 componunt. Etiam 4, respectu 16, & 2, respectu 4, radix nuncupatur. ¶Hinc sequitur quod radix numeri, est numerus qui in se ductus, aliquem totum componit numerum. & ita patet quemlibet numerum posse radicem esse tam quadrati numeri, quàm cubi. In proposito autem, ad vnitatẽ vsq; numerum extendimus. Est tamen aduertendum illum numerum esse quadratum, qui ex ductu alicuius numeri in se tantum semel, constituitur. quemadmodum est numerus 4, qui ex ductu 2 in se semel, resultat: & 9, qui ex ductu 3. & 16, qui ex ductu 4 in se tantum semel, componitur. bis enim 2, numerum 4 generant: & ter 3, numerum 9, quemadmodum quater 4, numerum 16 efficiunt: ideo tam 4 quàm 9, pariter & 16, numerus

Corollarium.

Quadratus numerus.

Numerus cubus. quadratus appellatur. Aduerte insuper quòd numerus cubus est ille qui ex ductu alicu ius numeri in se bis tantum, vel semel in suum quadratum producitur: vt est numerus 8, qui ex ductu 2 in se bis, componitur. bis autem 2 bis, faciunt 8. idem dicendum est de numero 27, qui est cubus, cum ex ductu 3 bis in se solum, procreetur: notum enim est ter 3 ter, 27 componere: quoniam ter 3, faciũt 9 numerum, qui est quadratus, & ter 9, constituunt 27: vt satis cõstat. Vnde in omni numero cubo, reperitur quadratus: sed non econtra, excipiendo vnitatem, quæ potestate & quadratus & cubus est numerus.

Cubum à q̃drato segregauimus, partim q̄ cubus numerus sit solidus, quadratus vero planus. vterq; tamen secũdũ figuras geometricas cõsyderatur: partim vero, q̄ & ipse author aliud posuerit ꝓ cubo diffinitum, nempe nonũ.

Corollarium. ¶Ex his patet binarium quadrati numeri scilicet, & cubi radicem esse. Si autem binarius in se semel tantum ducatur, 4 numerum reddit, qui est quadratus: si vero bis in se ducatur, 8 efficit numerum, qui cubus est. de quadratis, simul & cubis, eorũmq; generatione, plura in libro arithmeticę speculatiuę tractatu tertio reperies. ¶His igitur tan quam procemialibus declaratis, ad propositum deuenire oportet. Est autem radicum extractio in quadratis (vt ex præhabitis facile patet) numeri inuentio, qui cum in se semel tantum ducatur, totum numerum, vel maiorem eius partem efficit quadratam: & sic patet, q̄ radicem extrahere in quadratis, est numerum inuenire, qui cum semel tantum in se ducatur, totum numerum, vel maiorem eius partem quadratam componit. Exemplum vbi totum numerum producit, 16. nam 16 tantum, 4 componit, cum quater 4, 16 efficiant. Exemplum vbi non totum numerum, sed maiorem eius partem creat, 19. nam 19 numerus non est quadratus: ideo quadratã non habet radicem, 4 tamen est radix maximæ partis illius numeri 19, videlicet 16. Vnde quamuis 16 numerus non sit simpliciter maxima pars 19, cum 17 & 18 maiores sint illius numeri partes: est tamẽ maior, siue maxima pars 16 numerus in 19, in qua reperitur radix quadrata: quatuor sunt quidem numeri partiales 19, & non plures, quorum quilibet est quadratus, & per consequens habens radicem quadratam. Primus numerus partialis quadratus, est 1: secundus 4, tertius, 9: quartus, 16. primi radix, est 1: secundi, 2: tertij, 3: & quarti, 4. inter illos numeros quadratos maior, est 16. & ita patet qualiter illa diffinitio veniat intelligenda.

Radicum extractio nis ĩ quadratis, finis. ¶Finis huius diffiniti, est multas conclusiones tam geometricas, quàm astrologicas intelligere: quas difficulter, imò nullo modo intelligere possemus, hac arte neglecta. ¶Seruit autem præsens doctrina præcipue astrologis, & calculatoribus: alijs pariter hominum conditionibus, sed raro.

In q̃dratis radicibus extrahẽdis notanda. PRIMO NOTANDVM EST duos numeros in hac parte admodum requisitos esse. Quorum prior dicitur numerus à quo radix quadrata habet extrahi: alter vero, radix quadrata nuncupatur. In generali autem sex sunt consyderanda: quæ sæpenumero in omni radicum quadrata extractione occurrunt. Primum, est numerus à quo radix quadrata habet extrahi. Secundum, radix quadrata. Tertium, lineæ parallelæ. Quartũ, puncta posita sub imparibus elementis numeri, à quo radix quadrata extrahi debet. Quintũ, radix, siue radices duplicatæ. Sextum, numerus manens. ¶Modus autẽ scribẽdi talis esse debet. loco primo & superiori, ponatur numerus à quo radix quadrata extrahi habet. sub quo (si plures q̃ duo limites reperiãtur) puncta locentur, eo pacto: vt sub primo elemento punctum ponatur, & secundo prætermisso, sub tertio etiam ponatur punctũ, & ita consequenter eundo per imparem limitum numerũ. deinde sub punctis suppositis, duæ lineæ parallelæ in rectum ducantur: vt præsens figura ostendit.

Numerus à quo radix quadrata habet extrahi	7 4 3 2
Puncta interposita	· ·
Lineæ parallelæ	———

Postmodum radix quadrata inter lineas mediabit, sub quibus radix, vel radices locabuntur. Postremo autem numerus manens, virgula obliqua significabitur: sed de his in sequenti notabili prolixius videbitur.

Modus extrahendi quadratã radicem. SECVNDO NOTANDVM EST incipiendũ esse operari ab vltimis elementis, versus prima procedendo, vti in diuisione visum est: eo q̄ radicum extractio, quædam specialis diuisio dici potest. Et videbis an vltimum elementum sit impar, siue puncto signatum, vel non. Si primum contingat, inuenias digitum, qui in se quadrate ductus, numerum illi æqualem cõstituat, vel saltem maximã illius numeri partem, quam

componere poteſt:& inuento tali digito, ducatur in ſe quadrate, & numerum reſultan-
tem ſubtrahe ab illo elemento vltimo, puncto ſignato:& ſi aliquod fuerit reſiduum, id
ſupra ſignatum elementum pone: quod ſi nihil remanſerit, ipſum cancellabis: quo facto in-
uentũ digitum inter lineas parallelas directe ſub vltimo elemento ſignato, pones. De-
inde ipſum digitum duplabis, & duplatus numerus infra illas lineas directe ſub penulti
mo elemento ſedebit:& pro ſecundo operari incipies. Sed ſi ſecundum eueniat, vide-
licet vltimum in impari limite non eſſe, nec ſignatum puncto, inueniendus eſt digitus,
qui in ſe quadrate ductus, totum numerum duorum vltimorum elementorũ compo-
nat, vel maximã quam poteſt componere partem: quo inuento, in ſe ducatur, & proue
niens numerus à ſuprapoſitis numeris ſubtrahatur, reſiduum (ſi quod fuerit) deſuper
ponendo, elemento prius cancellato, & inuentũ digitum inter lineas ſub vltimo elemen
to ſignato locabis: deinde illo digito duplato, conſurgentẽ numerũ ſub lineis correſpon
denti limite pones, ſcilicet ſub antepenultimo elemento ſuperioris numeri, & hoc ſi ta-
lis numerus ex duplatione conſurgens per vnicũ characterem ſcribatur: quod ſi duabus fi
guris ſcribi debeat, illarum prima ſub antepenultima, & ſecũda ſub penultima numeri
ſuperioris ponatur. intellige ſemper ſub parallelis lineis. Conſequẽter procede operan-
do, & iterum reperiendus eſt digitus in præcedenti charactere ſignato puncto, ſimul &
ſequenti elemento non ſignato, qui quidem digitus in duplatum numerũ ductus, de-
leat totum ſuprapoſitum reſpectu duplati, aut quantum vicinius poteſt:& poſtea in ſe
ductus, totum etiam ſuprapoſitum reſpectu ſui, aut maximam quam poteſt partem
deleat:& ille digitus inuentus inter lineas parallelas ponatur directe ſub penultima figu
ra puncto ſignata: deinde totus numerus inter lineas poſitus dupletur, & ſub duabus il
lis lineis proueniens ex duplatione numerus locabitur: ita vt duplati primum elemen-
tum ſub figura immediate præcedenti illum ſignatum characterem ponatur, & ſecun-
dum duplati, ſub ſignata puncto figura, & tertium (ſi aliquod fuerit) duplati elementũ,
ſub ſequenti figura ſedebit: quo facto, iterum reperiendus eſt digitus in præcedenti cha
ractere ſignato, ſi quod tale ſit, & eſt vt prius operandum, quouſq; ad primum deuen
tum fuerit elementum. ¶Tenenda tamen in hac parte ſunt hæc duo documẽta. quo- Primum documentum.
rum prius eſt. Nunquam digitus in ſe ducatur, niſi inter lineas ſub ſignato elemẽto po
natur. Secundum eſt. Quandocũq; in media operatione contingit non poſſe in ſigna- Secundũ documentum.
to charactere digitum inueniri, qui in duplatum ductus totum deleat ſuprapoſitũ, vel
quantum vicinius poteſt, ponenda eſt o inter lineas recte ſub elemento puncto ſignato,
in quo digitum inueniri quærebas:& cæteris intactis manentibus, numerus inter lineas
poſitus (cuius o eſt primum elementum) dupletur, & productus, ſiue duplatus nume
rus ſub lineis ponatur, ita vt o, quæ eſt duplati prima figura ſub illo charactere pona-
tur, qui immediate præcedit illud ſignatum elementũ, in quo digitus inueniri non po-
teſt:& ſecundum duplati elementum immediate ſequatur, deinde tertium, & ita conſe
quenter. Si autem in fine accidat digitum inueniri non poſſe, ponenda eſt o inter line-
as ſub primo elemento ſignato, alijs characteribus intactis ſe habentibus. Hoc igitur
terminato, ſi nihil ſupra numerum, cuius radicem quæris, remanſerit, talis numerus eſt
quadratus, cuius radix eſt numerus inter lineas repertus. Si vero aliquid ſupererit, nu
merus ille, cuius radicem quæris, non eſt quadratus:& ita dicendum eſt numerũ inter li
neas repertum, eſſe radicem maximæ partis numeri ſuprapoſiti, ſic quod non eſt reperibi
lis aliqua pars maior illo, cuius aliquis numerus ſit radix quadrata. Iſta vt clarius intel-
ligãtur claro aperiuntur exẽplo. ¶Vis autẽ cognoſcere an in iſto numero 7306259, ra- Operationis exemplum.
dix quadrata reperiri poteſt, aut non? in primis illum numerũ eo pacto deſcribas, vt te
in primo notabili docui: ita videlicet quod ſub ipſo duæ lineæ parallelæ protrahãtur, & im-
paria huius numeri elemẽta ſubſignentur punctis: vt præſens exemplum demonſtrat.
Deinde in vltimo charactere, ſcilicet 7, inueniatur digitus, qui po-
natur inter lineas directe ſub vltimo illo ſignato elemento, & du-
ctus in ſe, totum ſuperpoſitum deleat, videlicet 7, vel quantum vi-
cinius poteſt:& reſiduũ (ſi quod fuerit) deſuper pones, prius tamen cancellato 7, & ta-
lis digitus eſt 2. ducas igitur illum in ſe, dicendo, bis 2, faciunt 4. quem à 7 ſubtrahe, &

7	3	0	6	2	5	9
·		·		·		·

☞ Hic labor hoc opus eſt, optĩe lector, vbi te ita extricare potes: per inuentum digitum multiplica duplatum totũ, productũ diligenter obſerua, cui adde nũerũ, qui conſurgit ex multiplicatione digiti in ſeipſũ, ſed addito vno limite. ita vt vnitas illi[9], denã hui[9] accipiat &c. atque hunc totũ numerũ ſimul legitima ſubtractionis lege ſubduces ab oĩbus figuris quotquot ſint ante figuram puncto ſignatã incluſiue, ab ipſa ſignata figura exorſus ſubtractionẽ. In cæteris authorem ſequere.

☞ Quotieſcũq; in media operatione acciderit, vt quãtũ accipias digitũ neſcias, quod in duplatũ ducatur ad delendũ id quod ſupra & poſt ipſum eſt: debes per duplatum reſiduū,ſcilicet 3,deſuper pone,prius 7 cãcellato:poſtmodū ille digitus dupletur,& infra lineas ſub proxima præcedente figura ponatur: & operatio ſub tali forma manebit. Conſequēter ad ſecundã operationē procede,& inuenies digitū in elemento ſignato,videlicet 0,ſimul & in ſequētibus ſcilicet 3,& 3, qui quidē digitus primo in duplatū ductus,totū ſuprapoſitū reſpectu duplati deleat,vel quantum vicinius poteſt,& poſtea in ſe ductus,numerū reſpectu ſui ſuprapoſitū deleat, vel maximã partem quam poteſt:& ille digitus erit 7,quē inter lineas ſub ſignata puncto figura,ſcilicet ſub 0,pone:& per illum multiplicabis duplatū,videlicet 4,dicendo, quater 7 faciūt 28,quem à ſuprapoſito numero,ſcilicet 33,ſubtrahe: reſiduum (quod eſt 5) ſupra 3 poſteriorē ponendo,prius tamen 33,cancellato: poſtmodū digitū illum in ſe multiplica,dicēdo, ſepties 7,componūt 49:quem numerū à ſibi ſuprapoſito,videlicet 50, ſubtrahe,& vnitatem quæ eſt reſiduū,ſupra 0 locabis,prius cancellato 50, quo facto,numerū inter lineas repertū,videlicet 27,duplicabis,& numerus proueniēs erit 54:quē ſub lineis pones, ſic vt duplati prima figura ſub figura immediate præcedenti 0 ponatur,& ſecūda duplati figura ſcilicet 5,ſub 0 puncto ſignata ponatur,priori duplato numero cancellato. Quibus peractis,& eo modo diſpoſitis,vt dictum eſt, ſub tali diſpoſitione operationem reperies.

3						
~~7~~	3	0	6	2	5	9
.		.		.		.
2						
	4					

Deinde ad tertiam operationē procedas,& reperies ꝙ nullo modo poteſt reperiri digitus in præcedenti charactere ſignato puncto videlicet 2,ſimul & ſequētibus ſcilicet 6, & 1,qui digitus in duplatum ductus,numerum ſuprapoſitum reſpectu duplati deleat,vel ſaltem maiorem eius partem:quoniam ſi quis talis digitus poſſet reperiri,maxime eſſet 1: ſed notum eſt ꝙ ſi 1 in vltimam duplati figuram,quæ eſt 5 ducatur, proueniet 5,qui à ſibi ſuprapoſita vnitate ſubtrahi non poteſt:ideo loco digiti inter lineas parallelas 0 locetur directe ſub 2 ſignato puncto:& duplato numero infra lineas poſito,ſcilicet 54, cancellato, dupletur numerus inter lineas repertus, videlicet 270:& prouenientem numerum qui erit 540, ſub lineis locabis: ſic vt prima duplati figura ſub ſecunda ſuperioris numeri ponatur, ſecunda ſub tertia,& tertia ſub quarta: cæteris eodem modo ſe habentibus,& ſub tali ſignatura diſcurſum habebis.

~~3~~	~~5~~	1				
~~7~~	~~3~~	~~0~~	6	2	5	9
.		.		.		.
2		7				
	~~4~~	5	4			

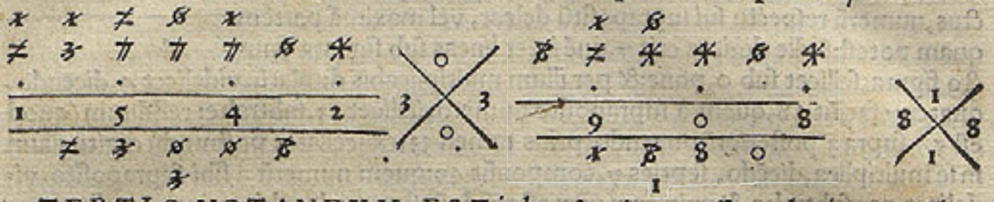
Poſtremo autem reperiēdus eſt digitus in primo charactere ſignato,qui eſt 9:ſimul & ſequentibus,ſcilicet 5,2,6,1:qui quidem digitus in duplatum ductus,totum ſuprapoſitum reſpectu duplati deleat,vel quantum vicinius poteſt:deinde in ſe ductus,totum ſuprapoſitū, vel maximam quam poteſt partem deleat:& digitus ille eſt 3,quem inter lineas pone ſub 9. Et primo per illum digitum,vltimum duplati elementum, ſcilicet 5, duces ſiue multiplicabis, dicendo ter 5,faciunt 15:ſubtrahe igitur 15 à ſuprapoſito numero,videlicet 16,& reſiduum,videlicet 1,ſupra 6 pone,prius 16 cancellato: deinde eundum eſt ad digitum, quem per penultimum duplati elementum, ſcilicet 4,multiplica ſic,ter 4 conſtituunt 12: quem numerum à ſibi ſuprapoſito ſubtrahe,videlicet 12:quo ſubtracto,nullum manebit reſiduum:cancellato igitur 12,ad aliam operationem ibis,multiplicando digitum per primum duplati elementum,quod eſt 0,& proueniet 0:& cum à numero ſuprapoſito,ſcilicet 5,ſubtrahitur 0, hoc eſt nihil,maneat 5 non cancellatus. Vltimo autem, digitus in ſe ducatur,& habebis numerum 9,quoniam ter 3,talem numerum efficiunt:quem à ſuprapoſito, videlicet 9, ſubtrahe: & cancellato prius 9,deſuper 0 pone. His igitur completis,pro reſiduo operationis, numerum 50 habebis: quem obliqua virgula ſignificabit. Iſtorum quæ dicta ſunt exemplum reſpice generale.

~~3~~	~~5~~	1				
~~7~~	~~3~~	~~0~~	6	2	5	9
.		.		.		.
2		7		0		
	~~4~~	~~5~~	~~4~~	4	0	
			5			

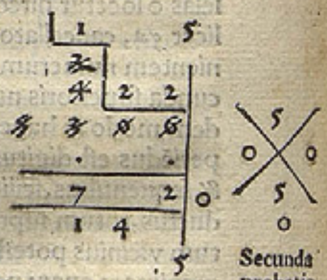
	~~3~~	~~5~~	~~1~~	~~1~~	|	5	0	Numerus manens
	~~7~~	~~3~~	~~0~~	~~6~~	~~2~~	5	~~9~~	Numerus à quo radix
Puncta ſuppoſita	.		.		.		.	quadrata habet extrahi.
Lineæ parallelæ	2		7		0		3	Radix quadrata
		~~4~~	~~5~~	~~4~~	4	0		Radices duplatæ
				5				

diuidere eum nūerū q̃ ſupra & poſt duplatū eſt,& digitus is q̃ in quotiēte habetur, plærunq; digitū accipiendū prodit, aut ſaltē vnitate,rariſſime binario minorem: nūquam autē maiorē, quinimo ſi duplat⁹ maior ſit nūero ſibi ſuprapoſito, nullū poteris capere digitū: vnde ad locum illum cifra poſita,alijs ītactis ad precedentē figurã puncto ſignatã te cōferas oportet, vbi ſimiliter p diuiſionem digitum inueſtigabis,id quod ſummū tibi tediū leuare poterit lector.

Et quoniam in operatione aliquod est residuũ, ideo numerus inter lineas repertus, qui est 2703, non est radix numeri suprapositi: est tamen radix maximæ partis illius numeri, in quo radix quadrata inueniri non potest. Et si velles cognoscere quisnam sit ille numerus cuius radix inter lineas posita, sit radix: multiplicabis illum numerum per seipsum & reperies 7306209 numerum, cuius 2703 est radix quadrata. Sed vt locupletius istud diffinitum intelligere valeas, hæc duo infra posita exempla consyderabis.

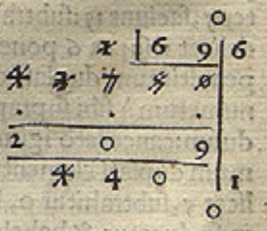


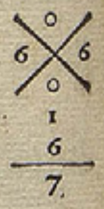
TERTIO NOTANDVM EST in hac specie tres esse probationes, quibus radicum extractio in quadratis habet probari. Quarum prima est nouenaria. Secunda septenaria. Tertia vero per multiplicationem fieri debet. ¶ Pro primæ probationis intellectu, est aduertendum, si vis radicum extractionem in quadratis per 9 probare, primo capiendam esse notam à numero à quo radix quadrata habet extrahi: quam (posita ante operationem recta linea, vti in diuisione factum est) in eiusdem capite pone: deinde à numero inter lineas posito (quem radicem vel quotientem numerum dicunt) notam accipies, quam in se multiplicabis, & à producto numero separabis 9 quoties poteris, remanentem notam ante lineæ ui directo aspectu ponendo: postmodum ab operationis residuo (si quod fuerit) notam sume, quam pariter ante lineam correspondenter è sede locabis: quo peracto residui notam, notæ radicis adde, & à consurgente numero notam accipies, quam in altero lineæ extremo, videlicet inferiore pone, & si extremales notæ æquales reperiantur, bene operatus es: sinautem, male. Vbi autem nullum sit operationis residuum, accepta superioris numeri nota in capite lineæ (vt dictũ est) locetur: deinde à quotiente notam accipies, quã per se multiplicabis, & à producto numero notam extrahes, quam in pede lineæ pones, & videbis an sint æquales vel non: si primum contingat, habitus discursus est bonus: euenienti secundo, inefficax, & malus dicetur. Exemplum sume hic appositum. Hæc probandi via facillime inficiari potest: vt in præcedentibus diffinitis tactum est. ¶ Secũda igitur probatio est examinanda. Pro qua scienda consyderabis omnino eodem modo in illa procedendum, ac in præcedenti: hoc excepto, quod notæ sunt capiendæ quemadmodum secundo diffinito huius tractatus, notabili tertio, declaratum est: ideo pro hac parte sufficiat probationis exemplum quod est tale. ¶ Hæc autem secũda probatio perinde ac præcedens inficiatur. ¶ Ipsis igitur prætermissis, ad tertiam in hac parte sustinendam probationem accedendum est: quæ hoc pacto fieri habet. Numerus quotiens, siue radix inter lineas reperta, per seipsam multiplicetur: & numero producto residuum operationis (si quod fuerit) addatur: & si numero à quo radix quadrata habet extrahi, cõsurgẽs summa sit æqualis, operatio bene valet: aliter si accidit, nulla erit. Vbi autem nullum est residuum, solum videndum est an prouenĭens ex multiplicatione quotientis in se sit æqualis suprapposito, vel non. Exemplum assignare est facile: ideo quæ dicta sunt pro præsentis diffiniti declaratione sufficiant.



Secunda probatio

Tertia probatio certa.





In secũda probatione diuide radicẽ per 7, residuũ in se duc si quod fuerit, & productũ rursus per 7 diuide, manenti notæ, æqualis erit illa quæ relinquetur ex diuisione per 7 numeri ex quo venabaris radicẽ, si totus fuit quadratus, vt ĩ duobus præcedẽtibus exẽplis licet videre. Sed si maxima ei9 pars sola sit quadrata, reliquã itẽ partẽ per 7 diuide, & residuum eius, notæ radicis adde, & si additæ notæ 7 excedant, 7 ab illis auferas, & quod manet, æquale erit in bona operatiõe notæ ex toto numero relictæ. Idem sit iudiciũ atque modus, si per 5 probare libuerit.

¶ Radicum extractio in cubis, est numeri inuentio qui ex bino in se ductu, vel vnico in suum quadratum, totũ numerum efficit, vel saltem maximam eius partem cubicam. Et ita radicem extrahere in cubis, est numerum assignare, qui cũ bis in se ducatur, vel semel in suum quadra- 9 tum, totum numerum, vel maximam eius partem cubicam componit. ¶Exempli gratia, vbi totum numerum producit 2 in se bis ductus, aut semel in suum quadratum numerũ, 8 efficit. eo ꝙ bis 2 bis, siue bis 4 (quod idem est) 8 numerũ reddunt: ideo 2, est radix cubica 8. Idem est dicendum de 3, qui respectu 27, cubica radix nuncupatur: quoniam ter 3 ter, siue ter 9, talem numerum constituunt. Exemplum facile inuenire est, vbi maximam partem cubicam componit: vnde 2, est radix maximæ partis 9. etiam 10 & breuiter 8, cuius radix est 2, est maxima pars cuiusuis numeri medij inter 8 & 27, in quo cubica radix reperiri potest. Et si scire cupis quotum numerum quilibet digitus in se cubice ductus producat: sequẽtem tabulam aspice, quæ id ostendit aperte.

Semel	1	Semel,	1
Bis	2	Bis,	8
Ter	3	Ter,	27
Quater	4	Quater,	64
Quinquies	5	Quinquies,	125
Sexies	6	Sexies,	216
Septies	7	Septies,	343
Octies	8	Octies,	512
Nonies	9	Nonies,	729

Radicum extractionis in cubis finis.

¶Finis huius diffiniti cũ præcedentis diffiniti fine idem est: videlicet multas in Geometria conclusiones, pariter in astrologia intelligere: quas ignorare oportet hac scientia neglecta. Seruit præsens diffinitum astrologis & calculatoribus: raro autem alijs hominum conditionibus.

In cubice radicis extractione consyderanda.

PRIMO NOTANDVM EST in hac specie duos esse numeros necessarios. Prior nuncupatur numerus à quo radix cubica extrahi debet. Posterior radix cubica dicitur. In communi sex sunt sæpissime occurrentia. Primum, est numerus à quo radix cubica extrahi debet. secundum, radix cubica. tertium, lineæ parallelæ. quartum, puncta locata locis millenariorum, excepto primo sub numero à quo radix cubica extrahi debet. quintum, radix siue radices triplatæ. sextum, numerus manens. ¶Modus quidem scribendi, talis est. Primo & superiori loco numerus, à quo radix cubica extrahi debet, locetur: sub quo (si plura quàm tria fuerint elementa) puncta ponantur, eo modo vt sub primo elemento vnum ponatur punctum: & duobus prætermissis immediate sequentibus, sub quarto ponatur etiam punctum, & ita consequenter, taliter ꝙ sub omnibus semotis locis millenariorum positis puncta locentur. deinde sub numero illo punctis signato, duę protrahantur lineæ parallelæ, quẽadmodũ præsens ostendit figura.

Numerus à quo radix cubica extrahi habet. 5 3 4 6 2

Puncta supposita. . .

Lineæ parallelæ.

Postmodum inter illas lineas cubica radix mediabit, & sub eisdem, radix, siue radices triplatæ ponantur. Deniq; manentem numerum obliqua virgula docebit. quæ ipsum à cancellato numero diuidet. Hæc omnia sequenti notabili clarius videbuntur.

Mod⁹ extrahendi cubicam radicem.

SECVNDO NOTANDVM EST modum operandi in hoc diffinito partim conuenire cum præhabito modo in quadratis, partim vero ab eo discrepare. Est igitur aduertendum à sinistra manu incipiẽdum esse operari, dextram versus eundo, quemadmodum & præcedenti diffinito procedere oportet. Digitum igitur inuenias sub vltimo elemẽto, puncto signato, qui in se cubice ductus, totũ deleat respectu sui suprapositũ, vel saltem illius maximã (quam potest) partẽ: quo inuento, inter lineas ponatur directe sub vltimo elemento signato. Deinde digitus ille tripletur, & consurgentem numerum sub proxima tertia figura versus dextram infra lineas parallelas locabis. Postmodũ iterum reperiendus est digitus (si quod fuerit elementũ præcedẽs signatum puncto) & est ponẽdus inter lineas sub illo signato elemento, qui quidẽ digitus simul cum priori in triplatum ductus, deinde per se ductus in productũ totum, deleat suprapositum respectu triplati, vel quantũ vicinius potest, & postea digitus ille in se cubice ductus deleat totũ suprapositũ respectu sui, vel maximã quam potest partem: quo terminato, totalem numerũ inter lineas repertum triplabis, & productum infra lineas sub proxima tertia figura versus dextrãm eundo manum ponatur, ita vt primũ elementum producti, siue tri-

☞Summa in hac operatione est difficultas inueniẽdi digiti: qua si te optime lector leuarim, gratiã Deo Optimo Max. habebis. A principio operationis per solam cubicã multiplicationẽ reperitur digitus, quare nulla ibi difficultas. At vbi progresſus fueris ad alia elementa pũctis ſignata, illic ad totam radicem loco digiti quærendi pone cifram, deinde per totam radicẽ multiplica triplatũ, pérq; productũ diuide eas figuras quæ poſt elementũ ſignatũ fuerint omnes, in quotiente apparebit digitus quæſitus, aut vnitate interdum vel etiam binario minor, quemadmodũ & ĩ quadratis accidere dixi. hũc igitur ita, num verus ſit probabis. Repone digitũ illum in locũ fictæ illius cifræ ad radicẽ. atq; per totam radicem hãc, multiplica triplatũ, ac rurſus productũ per ſolũ digitum inuentũ, tãdem'q; hunc ipſum digitũ duc cubice in ſeipſum, cubũ eius adde priori numero producto, adiecto (ſicut in q̃dratis) vno limite à dextris. demum ſi hic numerus totus ſemel ſubtrahi ab omnibus figuris, quæ poſt elementũ pũcto notatum vnà cũ ipſo ſignato elemẽto poſſit, æquus fuit digitus inuentus. Sin autem non poſſit ſubtrahi, vnitate minor quærendus eſt, aut ſaltem binario: ac rurſus operandum vt prius, ſic'q; deinceps, donec totũ negocium abſolueris.

plati ſub proxima tertia figura locetur, & ſecundum ſub ſequenti, & de aliis pari modo. Deinde iterum operaberis ac prius, vſquedum deuentum fuerit ad primũ elementum à quo radix cubica extrahi debet: & ſi nullum fuerit reſiduum, numerus ille eſt dicendus cubus, cuius radix eſt numerus inter lineas repertus: vbi vero reſiduũ contingat eſſe, numerus ille non eſt cubus, & numerus inter lineas habitus dicẽdus eſt radix maximæ partis illius numeri mixti, cuius radicem cubicam inuenire quæris. Cõſyderabis tamen vt in præhabito diffinito, hæc duo documẽta. Primũ eſt, q; ſemper digitus, quãdo in ſe cubice ducitur, debet inter lineas eſſe poſitus ſub ſignato elemẽto. Secundũ eſt, Quotieſcunq; in media operatione cõtingit digitũ inueniri non poſſe ſub aliquo ſignato charactere, qui ſimul cũ aliis numeris inter lineas poſitis in triplatum ductus, deinde per ſe in prouenientẽ, totum deleat ſuprapoſitum reſpectu triplati: & poſtea in ſe cubice ductus, totum reſpectu ſui ſuprapoſitum deleat: ponẽda eſt o inter lineas ſub ſignato charactere, & cæteris intactis manentibus totum numerũ inter lineas repertum triplabis, & ſub proxima tertia figura verſus dextram eundo manũ, triplatum infra lineas debitis locabis ſedibus, ita videlicet vt illa quæ eſt triplati prima figura diametraliter ſub proxima tertia figura ponatur, & ita de reliquis ſuo ordine procedas. Q̃ ſi in operationis fine digitum non poſſe inueniri accidat, inter lineas ſub proximo elemento ſignato, o pone: quo expedito, finẽ operationis habebis. Primum documentum. Secundũ documentum.

¶Pro regula inſuper in hac parte tenebis: reſiduum operationis quãdoq; eſſe æquale radici, quãdoq; minus, quãdoq; autem maius, tam in quadrata quàm cubica operatione. Regula.

Sed vt iſtorum practicam habeas, tale tibi pone exemplũ: 1860869, cuius ſi radicem cubicam inuenire intendis, elementa locis millenariorum poſita, pariter & primum, ſcilicet 9, & 0, & 1, punctis ſignabis: ſub quibus duas protrahas lineas parallelas, ſecundum quod præſens figura oſtendit. Deinde ſub vltimo elemento ſignato ſcilicet 1, reperies digitum inter lineas locandum ſub eodem elemento, qui in ſe cubice ductus, deleat totum ſuprapoſitũ reſpectu ſui: & ille digitus erit 1. duc igitur 1 in ſe cubice, & proueniet idem digitus ſcilicet 1. quem ſi à ſuprapoſito elemẽto ſubtrahas, nihil remanebit: cancellato igitur elemẽto ſignato, digitum triplabis, & triplatum numerum, qui erit 3, infra lineas ſub proxima tertia figura pone: & operatio ſub tali diſpoſitione manebit. Operationis exemplũ.

```
1 8 6 0 8 6 9
.     .     .
-------------
-------------
```

```
1 8 6 0 8 6 9
.     .     .
-------------
1
-------------
      3
```

Poſtmodum operari incipies, & reperies digitum ſub præcedenti elemento ſignato, ſcilicet o, ſimul & ſequentibus ſcilicet 6 & 8, qui quidem digitus, vnà cum priori inter lineas poſito ductus in triplatum, deinde per ſe in productũ ductus, totum ſuprapoſitum reſpectu triplati deleat, vel quantũ vicinius poteſt, poſtea in ſe cubice ductus, deleat totum reſpectu ſui ſuprapoſitum: & inuenies q; digitus ille eſt 2, quem inter lineas ſub o pone: ducas igitur 2 ſimul cum 1, in triplatum, ſcilicet 3, dicendo duodecies ter, ſiue ter 12, faciunt 36: deinde dicas bis 36, conſtituunt 72. quem numerum ab 86, ſubtrahe, reſiduum deſuper ponendo 1 ſupra 8, & 4 ſupra 6, cancellatis prius 8 & 6. Deinde dicas, bis 2 bis, componunt 8: quem à ſuprapoſito elemento, videlicet o, ſubtrahere non potes, ideo à præcedenti numero vnitatem accommodato habeas, & cancellato 4, deſuper 3 pone. & poſtquam vnitas accommodata valet 10 in loco cifræ vnitates, ab illis ſubtrahe 8, & reſiduum, ſcilicet 2, ſupra o ponatur, o prius cancellata: quo facto, numerum inter lineas repertum videlicet 12, triplabis, & triplatum infra lineas pone, ſic q; triplati primum elementum ſub proxima tertia figura ponatur, & aliud ſubſequenti (cancellato tamen prius priori numero triplato) & talem reperies diſpoſitionem.

```
    3
  1 4 2
1 8 6 0 8 6 9
.     .     .
-------------
1     2
-------------
    3   3 6
```

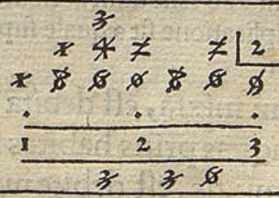
Poſtremo autem inuenias digitum ſub primo elemento ſignato, ſcilicet 9, ſimul & ſequentibus, qui vnà cum cæteris digitis inter lineas repertis, ducatur in triplatum: deinde per ſe in productum ductus totũ ſuprapoſitum reſpectu triplati deleat, vel maximam quam poteſt partem: poſtmodum in ſe cubice ductus, totum reſpectu ſui deleat, vel quantum vicinius poteſt: & digitus ille erit 3.

ducas igitur 123 in triplatum, scilicet 36,& proueniens numerus erit 4428: deinde per solum digitum, scilicet 3, præhabitum numerum multiplica,& resultans numerus erit 13284, quem à numero supra triplatum posito subtrahe, residuum (si quod fuerit) desuper ponendo, ita quòd 1 ab 1 subtrahes, & 3 à 3,& 2 à 2,& 8 ab 8,& 4 à 6, desuper ponendo 2, prius autem cancellatis 1,3,2,8,6: deinde digitus repertus in se cubice ducatur,& proueniet numerus 27, quem à suprapositio subtrahe, videlicet 2 à 2,& 7 à 9, & residuum videlicet 2, quem virgula obliqua significabit, supra 9 pone, 9 prius cancellato: quibus terminatis, talem operationem habebis.

Numerus à quo radix cubica extrahitur.

Radix cubica

Radices triplatæ

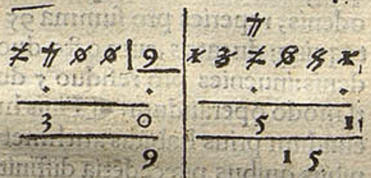


Numerus manens.

Puncta supposita.

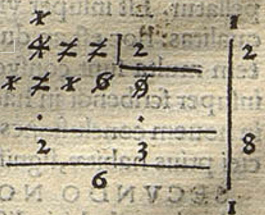
Lineæ parallelæ.

¶ Et quoniam in tali operatione aliquod est residuum: ideo numerus, cuius radicem cubicam inuenire quærebas, non est dicendus cubus: & ita numerus inter lineas repertus non est radix illius suprapositi numeri, sed solum maximæ illius partis in qua potest inueniri radix. Et si scire cupis quisnā sit ille numerus, cuius ~~ille inter~~ lineas locatus sit radix: illū numerū, videlicet 123, in se cubice multiplica,& proueniens numerus erit 1860867. cui⁹ radix est numerus inter lineas locatus, scilicet 123. Sed quoniā longe plura pro huius diffiniti enodatione requirūtur, quàm pro prius habitis, ideo opus est sis in iam dictis promptissimus, maxime in multiplicatione. Et vt plenius præsens diffinitum intelligere valeas, ad iuxta posita exempla tuum dirigas intellectum.



TERTIO NOTANDVM EST in præsenti diffinito tres esse probationes ac in præcedentibus. Quarum prima est 9. secunda 7. tertia vero per multiplicationem habet fieri. Pro intellectu primę, est aduertendum ꝙ à numero, à quo radix cubica extrahi debet, est primo accipienda nota, quam in capite lineæ antepositæ operationi pones, deinde à numero inter lineas reperto (quem quotientem, siue radicem appellant) notam pariter accipias, quam in se cubice multiplicabis,& à consurgente numero notam sumes ante lineam directa sede locādam: postmodū à residuo operationis (si quod fuerit) notam capies, ante lineam suo loco ponendam: deinde ab illis duabus notis, nota habeatur, quæ in altero lineę extremo ponatur: quo facto, videbis an extremales notæ sint similes, vel non: si primum, bene operatus es: si secundum contingat, iterum de nouo operari incipias. Vbi vero nullum operis residuum fuerit, accepta à superiori numero nota,& capite lineæ posita (vt dictū est) sumenda est nota à radice,& lineæ anteponēda, quam in se cubice multiplica,& à producto notam accipies, quam in altero virgulæ fine locabis: & videbis an extremæ illæ notæ sint æquales, vel non. Si primum detur, bona est operatio: secundo autem dato, nulla. Exemplum respicere vales. Hunc probandi modum ex præcedentibus nullum esse notum relinquo.

Prima probatio per 9.



¶ Secunda probatio, quæ septenaria dicitur, eodem modo fieri habet, ac præcedens, hoc solo dempto: vt videlicet notæ accipiantur eodem modo quo tertio notabili secundi diffiniti in probatione secunda diximus: ideo pro hac parte solum præsens exēplum sufficiat. Hæc quidem probandi via nulla est: quemadmodum nec præcedēs. Et si in me forte aliquis insurgat hoc pacto arguendo, postquā igitur duo præhabiti probandi modi nihil valentes,& cassi dicūtur: sufficiebat eos tactos fuisse secundo diffinito, nec oporteret toties probationes non valentes reiterari. Ad hoc respondeo,

Secunda probatio per 7.

☞ Idem hic probādi modus est, qui & in quadratis, nisi quòd hic residua non semel tantū in se ducūtur sed bis, seu semel in suum quadratū. id'ꝗ per omnia probationū genera obseruandū est. Cætera conueniunt cum quadratis.

☞ Notādū hoc est ī omni specierū ꝑbatione, quę vel per 9 vl' per 7 vel etiā per 5 fit, vt si notę sint dispares, falsam esse operationē, certo argumēto ostēdatur, nō tamē semper bonā quantūuis pares fuerint notę. Spei igitͤ multū, fidei parū habere debebit in quolibet probationū genere, notarū cōcordia, sed earūdē discordia totam negabit operationē. Plus fidei habebit duarū probationū (si tertia non repugnet) vnanime testimoniū. quib⁹ si & tertię ꝑbationis videlicet quinariæ accesserit consonātia, plærūꝗ quidē operationis veritatē conuincet, at nō semper: in causa sunt cifræ multiplices, si aliquãdo fuerint neglectæ, errorẽ nõ mediocrẽ faciũt, is tamẽ ꝓbationũ non omni genere semper sentitur. Vnde id ꝓbationũ certissimũ genus est, quod per cõtrarias species fieri consueuit, quo indubie additio subtractionẽ, multiplicatio diuisionẽ, duplatio dimidiationẽ & è cõtrario ꝓbant sese binę mutuo. Radicũ item extractionẽ tam ĩ quadratis q̃ in cubis, cũ diuisionis quoddã genus sit, multiplicatio probare cõsueuit: at non contrà, extractio radicum, multiplicationem probare potest.

☞ Hoc 10 diffinitũ sub reductionis modo potuisset concludi, nisi author nos exercere magis q̃ docere voluisset. Paucissimos noui, qui alias species norint, & hanc ignorarẽt praxin, quæ nec speciei neq; diffiniti nomen meretur, nulla arte, sed solo vsu & exercitio contenta.

dato illos probandi modos esse nullos (vti visum est) quia tamen iuuenes incipientes facilius multo cum illis operantur: ideo mihi congruum visum est non omnino omittendos esse. Insuper multa falsa scribere sæpenumero licet, vt quæ vera sunt, apertiora & oculatiora videantur. ¶Ad tertiam probationem accede, quæ instantiam nullam patitur, & aduerte, quòd si vis cognoscere an bene operatus fueris, debes numerum inter lineas repertum cubice multiplicare, & producto residuum operationis (si quod fuerit) addatur: quo facto, videbis an numerus resultans sit æqualis numero cuius radicem quæris: quod si contingat, bene operatus es, si autem oppositum occurrat, nihil operatio valebit: vbi vero nullum esse residuum accidat, duntaxat videbis vtrum proueniens ex cubica radicis multiplicatione sit æquale supposito, vel non: primo dato, bona erit: secundo reperto, nulla.

Tertia ꝓbatio, verior reliquis.

¶Operatio numerorum mixta, est debita mixtorum numerorum secũdum aliquam, aut aliquas prius habitas species repræsentatio. Operari vero cum numeris mixtis, est debite numeros mixtos secũdum aliquam, aut aliquas prius habitas species repræsentare. 10

Exempli gratia, vis significare, seu per characteras repræsentare centum ducatos, cum quindecim duodenis, hoc pacto facies. 100 ducati, 15 duodeni. Item si vis addere quinquaginta ducatos, & septem duodenos, quadragintaquinque ducatis, cum nouem duodenis, reperies pro summa 95 ducatos, 16 duodenos. Si vis etiam abstrahere trigintaquinq; ducatos, cum octo duodenis, à quadraginta ducatis, cum nouemdecim duodenis: inuenies pro residuo 5 ducatos cum 21 duodenis, & in cæteris speciebus est pari modo operandum. ¶Finis huius diffiniti, est debita in mixtis numeris operatio, secundum prius habitas arithmeticæ species. ¶Seruit autem præsens diffinitum ijs omnibus quibus præcedẽtia diffinita deseruiunt, videlicet astrologis, physicis, calculatoribus, mercatoribus, trapezitis: & breuiter quibusuis hominũ statibus, ac conditionibus.

Operationis in mixtis finis.

PRIMO NOTANDVM EST duos in hac parte numeros esse aduertendos: quorum alter simplex nuncupatur, alter vero mixtus dicitur. Nam eum numerum simplicem appellamus cui vnica est denominatio. Exempli gratia, numerus 1435 ducatorum dicitur simplex, cum solum vnam habeat denominationem, videlicet ducatorum: idem esset dicendum vbi scutorum, francorum, vel duodenorum diceretur. Eum vero numerum mixtum dicimus, cui plures partiales insunt denominationes, quemadmodum est numerus 1354 ducatorum cum 326 francis: aggregatum istorum duorum numerorum mixtus numerus nuncupatur, ex eo quòd in ipso plures sunt denominationes partiales: altera eius pars ducatorum dicitur, altera enim francorum appellatur. Est insuper vnum in hac parte potissime aduertendum, & est numeri mixti qualitas: hoc est an duarum sit denominationum, trium, aut plurium. In speciali autem multa sunt considerãda: quæ inferius in conclusionibus videbuntur. ¶Modus insuper scribendi in hac parte, pariter & operandi, sequenti notabili declarabitur: quod in nouem conclusiones erit diuisum: in quarum qualibet, modus operandi alicuius speciei prius habitæ, significabitur.

In mixtorũ operationibus aduertenda.

Numerus Simplex. Mixtus.

SECVNDO NOTANDVM EST longe aliter in hac parte esse operandum, quàm in præhabitis diffinitis. Pro cuius clara intelligentia sit prima conclusio pro numeratione. ¶Si numerus mixtus sit solum duarum denominationum, eo pacto scribatur, vt eius pars minoris denominationis ante scribatur, altera vero pars, cuius denominatio est maior, retro locetur: capio ante & retro, vti in primo diffinito declaratum est. Si autem numerus mixtus trium, aut plurium sit denominationum (postquam æquales esse nequeunt) secundum ipsarum ascensus scribantur, sic ꝙ minimæ denominationis numerus primo loco scribatur, & maximæ denominationis numerus vltimo ponatur fine, mediarum vero denominationum numeri, secundum ipsorum qualitates locabuntur. Verbi gratia. Vis scribere mille ducatos, cum quindecim duodenis: illos taliter dispones, 1000 ducati, 15 duodeni. Si quingentos quadragintaquinq; ducatos, cum octo-

Prima cõclusio pro numeratione mixtorum.

decim duodenis,& nouem turonis scribere velles:est hoc modo faciundum,545 ducati.18,duodeni.9 turoni:& de ascendẽtibus pariter dicendum est. Si enim alicuius mixti numeri valorem exprimere velles,ab illa parte incipere debes cuius denominatio est maior,versus numeros minoris denominationis procedendo. In his facile est exemplũ assignare.

Secunda conclusio pro additione.

¶Secunda conclusio pro additione. Si numeros mixtos vis addere,illos eodem modo disponas,vt maioris denominationis numerus loco supremo ponatur (quãuis non sit necessarium) deinde cæteri supponantur,sic quòd in aliquibus communicẽt denominationibus, illis limites siue loca respondeant eadem, secundum ipsorum exigentiam: & incipias operari à minoribus versus maiores eundo numeros. Verbi gratia.vis cognoscere summã quæ ex his numeris mixtis emergit, scilicet 945 scuta, 412 franci,356 duodeni,& 687 scuta,403 franci,730 duodeni,& 430 scuta, 700 franci,532 duodeni:illos numeros tali ordine locabis,sub quibus directa protẽdatur linea:vt præsens figura ostendit.

9 4 5	scuta.	4 1 2	franci.	3 5 6	duodeni.
6 8 7	scuta.	4 0 3	franci.	7 3 0	duodeni.
4 3 0	scuta.	7 0 0	franci.	5 3 2	duodeni.

Nempe duplici modo potest datorum numerorum summa haberi:vno modo per reductionem ipsorum ad scuta:alio modo per reductionem partialium numerorũ eiusdem denominationis. Si autem primo modo illorum summam assignari quæras:id facies iuuamine septimi diffiniti, in quo de reductione sufficienter declaratum est: & pro eorum summa habebis 2973 scuta,1 francum,13 duodenos. Si autem secundo modo summam quæras dari, reperies 2062 scuta,1515 francos, 1618 duodenos. Pones igitur sub linea summam in ordine, sic vt duodeni sub duodenis, franci sub francis,scuta sub scutis ponantur,limitibus correspondentibus: & operationem completam habebis.

Tertia cõclusio pro subtractione.

¶Tertia conclusio pro subtractione. Triplici contingit differentia subtractionem in mixtis numeris reperiri. Primo modo,si à simplici numero mixtus subtrahatur numerus: vt si à 1543 scutis, subtrahere velles 978 scuta,126 francos,18 duodenos. Secũdo modo,si à numero mixto,simplicem subtrahas numerum: vt si à 4530 scutis,9210 francis,15 duodenis,subtrahantur 5608 scuta. Tertio modo, si à mixto mixtus subtrahatur numerus:vt si à 3456 scutis,8234 francis,17 duodenis, subtrahantur 936 scuta, 89300 franci, 19 duodeni. In qualibet harum differentiarum opus est reductione. Si vis in primo exemplo operari,dispone numeros quemadmodum præsens figura ostendit.

	1 5 4 3	scuta.	Numerus à quo habet fieri subtractio.			
Subtrahendus	9 7 8	scuta.	1 2 6	franci.	1 8	duodeni.

Deinde vterque numerus tam simplex,quàm mixtus ad duodenos reducatur:quo facto,proueniens duodenorum summa numeri subtrahendi , subtrahatur à proueniẽti duodenorũ summa,quæ ex numero à quo habet fieri subtractio,resultat:& completam operationẽ habebis. Et si velles scire quot supersunt scuta:residuum duodenorum per 35 diuide (postquam scutum 35 valet duodenis) & numerus quotiens, remanentium scutorum numerum propalabit. Eodem modo operandum est in secunda subtractionis differentia, pariter & in tertia:nec opus est maiori vti discursu pro his omnibus cognoscendis.

Quarta conclusio pro multiplicatione.

¶Quarta cõclusio pro multiplicatione. In mixtis,triplici differentia cõtingit multiplicationem fieri. Primo contingit numerum multiplicandum esse simplicem, multiplicanti existente numero mixto: vt si per 4567 scuta, 5678 franci, 19 duodeni, & 11 turoni multiplicentur. Secũdo modo euenit per numerum mixtũ,simplicem multiplicari: vt si per 5678 scuta, 3459 francos,7 duodenos, 4987 scuta multiplicentur. Tertio modo accidit vt, per mixtũ mixtus multiplicetur numerus:vt si per 7894 scuta, 6789 francos, 13 duodenos,5679 scuta, 9875 franci, 16 duodeni multiplicentur. In quolibet istorum exemplorum vtendum est reductione. ¶Si circa primum istorum velles operari:oportet tam numerum multiplicandum,quàm multiplicantem ad minimæ denominationis numerũ, videlicet ad duodenos reduci:deinde per maiorẽ numerũ,minor multiplicetur:& facta multiplicatione, si cognoscere velles quot proueniunt scuta,illam duodenorum prouenientem summam per 35 diuides,& numerus quotiẽs illud significabit. Eodem modo in secũda multiplicationis differentia procedendũ est, pariter & in tertia. Exẽpla perinde sunt clara, vt non sit opus longius euagari. ¶Quinta conclusio pro diuisione. Duplex in diuisione reducendi modus habetur. Quorũ prior est reductorius, & hoc modo fieri habet. In primis numerus diuidendus ad minorẽ eius denominationẽ reducatur: deinde per diuisorem, productus numerus diuidatur. ¶Nam pro documẽto tenendum est, nullum numerum mixtum posse esse diuisorem, sed duntaxat simplicem: diuidendus tamen numerus potest bene mixtus esse numerus. Vnde satis conuenienter hic numerus videlicet 3456 scuta, 4567 franci, 17 duodeni, inter 13 homines distribui, seu diuidi potest: quod facies facillime, si prius totum numerum ad duodenos reducas, & inde summa proueniens per diuisorem iam dictum diuidatur, scilicet per 13. Et si deinde velles cognoscere quot scuta quilibet illorum hominum pro sua parte habebit, numerum quotientem per 35 diuides: qua peracta diuisione, quotiens numerus, quod cognoscere petebas, ostendet. Posterior diuidendi modus est sine reductione, & hoc diuidendo quemlibet numerum determinatæ denominationis per diuisorem: quod facile est facere in præassumpto exemplo. ¶Sexta cõclusio pro progressione. In vtraque progressione videlicet arithmetica, & geometrica cum numeris mixtis possumus eo pacto procedere, ac in præcedentibus, cum simplicibus operatũ est: & pro hac parte non est opus nouis vti regulis, & documentis: postquam ex prius habitis omnia saluare possumus. Veniunt autem proportionabiles numeri eo ordine scribendi, ac præsentes formulæ indicant.

Quĩta cõclusio pro diuisione

Sexta cõclusio pro progressione.

Prima formula.				Secunda formula.			
8		4		8		27	
6	scuta.	3	franci.	4	scuta.	9	franci.
4		2		2		3	
2		1		1		1	

In prima istarum arithmetica procedimus medietate: in secunda geometricam medietatẽ notificamus. In arithmetica progressione huius primæ formulæ, duplicem discursum facies: primus erit francorum, secundus scutorũ. quibus factis, secundum primam regulam sexti diffiniti, summę prouenientes, vnum mixtum numerum component qui talis erit, videlicet 20 scuta, 10 franci. Consimili modo operaberis in secundo exemplo, prout secũda regula sexti diffiniti docet, duas geometricas progressiones faciẽdo, quarum summæ simul acceptæ componunt numerũ, videlicet 15 scuta, 40 franci, isto modo in cæteris progressionibus, quas mixtas appellamus, procedamus. ¶Septima conclusio pro reductione. In reductione mixtorum numerorum, diffinito septimo sufficienter admodũ est declaratum: ideo non opus est impræsentiarũ iterum quæ acta sunt reiterare. Ad alia igitur sine mora est pertranseundũ. ¶Octaua conclusio, pro radicum in quadratis extractione. Est autem aduertendum in quadrata radicum extractione duplicem in mixtis operandi modum inueniri. Alter est reductorius, qui eo habet fieri modo, ac in quinta conclusione dictum est: ita videlicet ꝙ si mixtus proponatur numerus, cuius radicem inuenire quæris, ad eius minimam reducendus est denominationem: ita vt si turonorũ infima sit denominatio, ad turonos reducatur: deinde in turonorũ summa, radix quadrata inueniatur, vel saltem radix maximæ turonorum partis in qua inueniri potest: qua inuenta, operatio facta manebit. Alter est operandi modus in quadrata radicum extractione, qui nullã præsupponit reductionem, sed immediate operatum est perinde ac in simplicibus fiebat numeris, & est talis. Dato numero mixto: videbis an duarum, triũmve sit denominationum: deinde à maiore incipiendo denominatione, in eadem radicem inuenias quadratam, quæ sit eiusdẽ denominationis, vel saltem maximæ illius partis: deinde consequenter ad cæteras ibis denominationes ad vltimam vsque inclusiue, id idem faciendo, & radicem mixtam procreabis, quam inter lineas parallelas debitis locis siue limitibus locabis. Verbi gratia. Huius numeri 441 scuta, 1024 franci, 16 duodeni, radix reperiatur mixta: quæ ex tribus simplicibus componatur numeris, postquam tres in numero mixto reperiũtur denominationes: & inuenies radicem esse 21 scuta, 32 franci, 4 duodeni. & sub tali dispositione operatio manebit.

Septima conclusio pro reductione.

Octaua conclusio pro radicũ in quadratis extractione scuta franci duodeni

2	1	scuta	3	2	franci	4	duodeni
4			6				

Nona cõclusio pro radicũ ex tractione in cubis.

¶Nona conclusio pro radicũ in cubis extractione. Si in mixtis numeris cubam velles extrahere radicẽ, id duplici via fieri potest, queadmodum in præcedenti conclusione dictum est. Primo numerum mixtum ad minorem eius denominationem reducendo: deinde ipso reducto numero, operando ac in simplicibus dictũ est: secuudo sine mixti numeri reductione potest cubica radix haberi: ita vt videlicet tot partiales radices extrahantur quot in mixto numero existunt denominationes, siue simplices numeri: & hoc dummodo numeri sint capaces: & illud facies modo assignato in præcedenti conclusione: & vt pręsens demonstrat figura.

scuta franci duodeni.

1	1	scuta	2	1	franci	2	duodeni.
3			6				

Mixtorũ operationum probationes.

TERTIO NOTANDVM EST in numeris mixtis easdem inueniri probationes, quę in simplicibus numeris habebãtur. Additio enim in mixtis per 9, per 7, & per subtractionẽ probari potest: queadmodum subtractio per 9, per 7, & per additionem fieri habet: & de aliis speciebus est pari modo dicendum. Qua de re in assignandis cuiuslibet speciei peculiaribus probationibus, diutius esse immorandum, minus vtile reputamus. Hæc igitur de primo huius libri tractatu dicta sufficiant.

PRIMI PRACTICAE TRACTATVS FINIS.

DE NVMERIS INTEGRIS SECVNDVM CALCVLOS SVPputatorios, tractatus secundus.

Isidorus. Pollux. Plinius.

A Nummo numerus sumpsit nomen, vt refert Isidorus tertio etymologiarum libro. Nummus enim, pro tertia talenti parte computabatur, vt author est Pollux. loquor de nummo aureo: sed Plinij authoritate, nummum drachmam esse, hoc est denarium, constat. Ex his igitur verbis facile comprehendi potest hãc supputatoriam artem altera esse priorem, quæ per characteras operari ostendit. Et si posteriorem illam faciamus, non inde venimus taxandi: quoniam (vt in fine proœmij, præhabiti tractatus enucleauimus) doctrinæ ordinẽ in præsenti libro insequimur, pro ijs præsertim erudiendis scholasticis, qui nostræ artium facultati student. Est autem præsens tractatus, in quo de numeris tam simplicibus, q̃ mixtis per supputatorios nummos pertractare intendimus, vtilis admodum ijs omnibus, quibus characterũ cognitio deficit: vt sunt plęriq; mercatores, trapezitæ, caupones, & alij quãplurimi paruæ conditionis viri. Erit igitur præsens tractatus in quinque solum diffinita diuisus, in quibus modus operandi in quinq; arithmeticæ speciebus secundum calculos significabitur.

DIFFINITA.

1 ¶Numeratio supputatoria, est numeri per nummum, aut competentes nummos artificialis expressio. Numerare supputatorie, est numerum per nummum, vel nummos competentes declarare.

Numerationis supputatorię finis.

¶Finis numerationis, est quecunq; numerum propositum nummis conuenientibus, siue locis proprijs locare, & quantus sit, quærenti debite declarare. ¶Seruit hæc species ijs omnibus, qui eorum negligentia, vel ingenij tarditate literas ediscere non potuerunt: quemadmodum multis hominum conditionibus contingit.

PRIMO NOTANDVM EST quādam inter nummos supputatorios, & caracteras similitudinē reperiri: quemadmodū enim character primo limine positus, dicitur vnitas, & si secundo limite ponatur, dena: tertio cētena, & ita ascendendo: calculus autē prima domo positus in quintuplo valet magis q̄ ille qui prima ponitur linea, & in duplo minus illo qui secūda linea ponitur, videlicet 5. Eodem modo calculus secunda domo positus, in quintuplo valet magis illo qui secunda linea ponitur: & in duplo minus calculo tertiæ affixo lineæ, videlicet 50. & de ascendentibus dic consequenter. Vnde pro intelligētia nummorum, siue calculorum dispositione, aliquas lineas parallelas in latera opposita transeuntes protrahere oportet: quandoq; plures, quandoq; pauciores, secundum quòd numerus est magnus.

Lineam inferiorem primam dicimus, secundam illam appellamus quæ statim ascendendo reperitur hoc pacto cōsequenter. Spaciū autē inter duas primas lineas medians, prima domus appellatur: & id quod inter tertiā, & secūdā habetur, domus secūda dicitur: & sic de reliquis pari modo. Exempli gratia.

Quarta linea.
Tertia domus.
Tertia linea.
Secunda domus
Secunda linea.
Prima domus.
Prima linea.

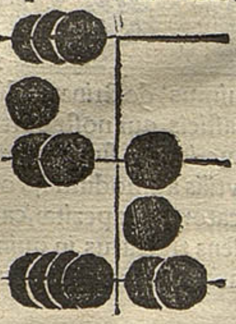
SECVNDO NOTANDVM EST tria in hac parte esse documēta, quæ huic arti deseruiunt. ¶Primum est, super nullam lineā plures q̄ quatuor calculi ponātur: & in nulla domo duo, aut plures calculi reperiantur: sed si calculus habeatur, tantum sit vnus: postq̄ in prima domo vnus calculus valet quinq;, eorum qui prima ponūtur linea, & vnus in secūda linea duobus videlicet in prima domo. & sic consequenter progrediendo. Frustra enī per plura fierēt, quæ possent fieri per pauciora. ¶Secundū documentū est. Si quempiā numerum ponere velles, ab inferioribus incipias lineis, ad superiores procedendo: ecōuerso autem est faciendū, si quē numerū velles explicare. ¶Tertiū documētum. Postq̄ in hac parte nullā habemus figurā, aut calculū qui cifrę habeat virtutē, loco cifrę linea maneat absq; calculi positione. ¶Vt autē quę dicta sunt melius intelligere queas, ad pręsens aduertas exemplū. Vis enim scire qualiter 1357 ducati veniant disponendi: protractis quatuor lineis parallelis, supra primā duos calculos pone: & in prima domo vnum calculū locabis: deinde in secunda domo vnum etiam calculum pones: & in tertia linea tres: postremo in quarta & vltima linea vnus calculus ponatur: & talē calculorum dispositionē habebis.

Primum documētum.

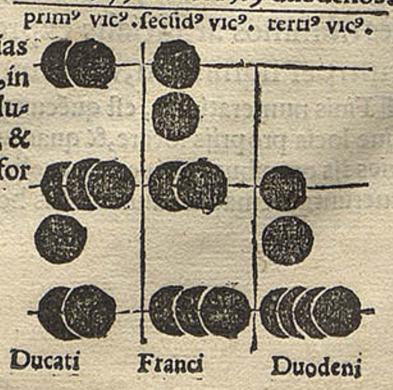
Secundū documētum.

Tertium documentum.

TERTIO NOTANDVM EST sæpenumero vsu venire lineas parallelas in binas partes secari à linea ortogonaliter cadente, quandoque à duabus lineis, & quandoque à tribus, & ita ascendendo: & hoc ideo fit, quia multę, & varię sunt monetarum appellationes, multi pariter numeri mixti, qui ex diuersis denominationibus consurgunt. Si enim à te petatur qualiter per calculos hic numerus mixtus veniat disponendus, videlicet 374 ducati, 17 duodeni: protractis tribus lineis parallelis, à linea perpēdiculariter cadente in duas æquas partes secentur, & in latere sinistro ducatorum numerus ponatur: in dextro vero duodenorum locetur numerus: vt præsens ostendit figura.



Si aūt ex te quęratur, disponas per calculos 237 ducatos, 173 francos, 19 duodenos: dispositis tribus lineis parallelis, duę ortogonaliter descendent etiā parallelæ, quæ alias tres, in tres tertias diuidant: quo facto, tres reperies ascendentes vicos, in quorum quolibet duę reperiuntur dom9: in primo ducatorum numerus ponatur, in secundo francorum, & in tertio duodenorum numerus locetur: vt præsens forma ostendit.



2 ¶Additio supputatoria, est vnitatum, vel numerorum in vnam summam facta per calculos collectio. Hinc addere supputatorie, est vnitates, vel numeros vnico colligere per calculos numero.

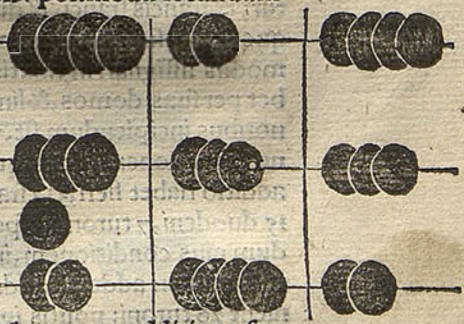
¶Finis additionis in hac parte, est per supputatorios calculos numeros expedite cōprehendere: qui diuersis primitus lineis concipiebantur. Seruit additio calcularis præ ceteris, trapezitis, mercatoribus, & cauponibus seu tabernarijs, & omnibus infimę cōditionis homninibus.

Duplex calcularis additio.

PRIMO NOTANDVM EST duplicē esse additionē supputatoriā: alteram simplicē, alterā vero mixtā. Simplicē eam dicimus: cuius omnes numeri, vnicā monetarū speciem intercipiunt, vti esset illa quæ ex his duobus numeris resultaret, videlicet 235 ducatis, & 742 ducatis. Nā quoniā duo illi numeri sunt ducatorum, ideo facta ex ipsis additio simplex nominatur: idem etiam esset vbi quilibet illorū esset francorū, vel duodenorū numerus. Mixtā vero additionē eā esse significamus, cuius numerus, vel numeri diuersas monetarū species cōtinent: & illa adhuc est multiplex, secundum quod monetarū multiplex est vsus. Q uædā est duplata: quædā triplata: & ita ascenden do. Duplatā additionē eā vocamus, cuius numerus, vel numeri duas monetarū cōtinēt species. Triplatā autē, cuius numerus, vel numeri tres diuersarū monetarū cōtinēt species: & de alijs ascendētibus pari modo est dicendū. dare in his exēplū, est facillimū.

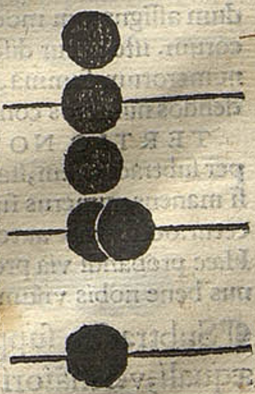
Addendi per calculos mod⁹

SECVNDO NOTANDO EST in additione calculari tam simplici q̃ mixta, operationē incipiendā esse ab infimis lineis, & domibus versus superiores eūdo. Cōsyderabis igitur an tā numerus cui additio fieri debet q̃ numeri addendi sint simplices, vel mixti. Si simplices extiterint, isto modo operaberis: in primis disponātur lineæ parallelæ (vt declaratū est diffinito præcedēti) & ponatur numerus cui additio habet fieri in lineis, & domibus secundū eius exigentiā: deinde primū addendorū numerorum addas, & ab inferioribus lineis incipiendo versus superiores ibis: postmodū secundum numerum addendum (si quis talis fuerit) addas resultanti ex prima additione numero: & de ceteris (si fuerint) numeris eo dem modo facere licet. quo facto, ea erit omniū numerorū summa, quæ in operationis fine manebit. Obseruabis tamen inter operandū tria illa documenta, quæ in prehabito diffini to posita fuerūt. Declarātur ista omnia familiari exēplo. Sit

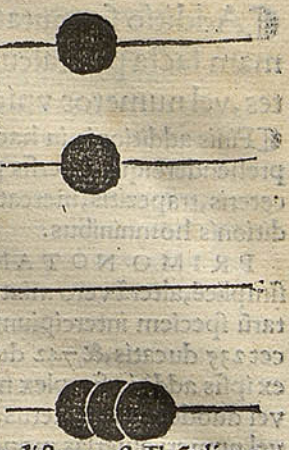


Operationis exemplum.

numerus cui additio habet fieri 437 ducati: primus numerus addendus, 234: secundus autē numerus sit 432 ducati: dispo natur numerus cui additio fieri habet vt prēsens figura ostēdit. Deinde primū numerū addendū eo modo adijcias: in pri mis quatuor vnitates duabus in prima linea existētibus addēdo: ex qua additione sex proueniēt vnitates. Sed cū dictū sit primo documēto præcedētis diffiniti nō posse plu res calculos reperiri supra lineā q̃ quatuor: ideo ab illis sex vnitatib⁹, vel calculis, quiq; remoueas, solo vno calculo manente supra primam lineam, & lo co illorū quinq; ablatorū, vnū in prima domo locabis: in qua valet quinq;: sed quoniā in eadē prima domo vnus calculus reperitur, & per primū documentū esse nō possunt plures, q̃ duo: ideo illo ablato, pro secūda linea vnus calculus seruetur, qui ibidē dena dicitur: copuletur igitur idē calculus tribus denis numeri addēdi, & inde quatuor denæ cōsurgent, quæ tribus calculis in secūda linea existentibus addantur, & prouenient septē, à quibus quinque semoueas, loco quorum in secunda domo vnus calculus ponatur. Deinde duæ denæ numeri addendi per duos calculos addātur quatuor suprapositis calculis, & proueniet calculorum numerus 6. depone igitur quinq;, quorum loco vnus calculus (supposita vna linea parallela) in tertia domo ponatur: quo peracto, talis resultabit summa atque calculorum dipositio.



437
234
432
1103



Deinde ſecundum numerum addendum illi producto numero addas, procedēdo eo modo iā declarato, & pro ſumma omnium illorū triū numerorū, 1103 ducatos habebis: & ſub tali cōpoſitione illorum ſumma per ſupputatorios calculos apparebit. Patet igitur operādi modus in numeris ſimplicibus. ¶ Si autē in mixtis numeris velles operari, debes primo eorū qualitates cōſyderare, hoc eſt an duarū pluriúmve ſint denominationū: ſi ſolum ſint duarum, per duos vicos operaberis, factis lineis in domibus conuenientibus: ſi trium, per tres, & de alijs huiuſmodi eſt pari modo dicendum. ¶ Potes igitur duplici via mixtos addere numeros: primo modo per reductionē eorum ad infimam eorū denominationē, ita videlicet vt omnes numeri mixti addendi reducantur ad turonos (ſi infima eorū denominatio ſit turonorum) deinde eiſdem reductis, numeri prouenientes addētur, & poſtq̄ erunt ſimplices, debent addi ac dictum eſt. Exēpli gratia. Sint dati mixti numeri 1234 ducati, 345 frāci, 19 duodeni. & 2345 ducati, 589 franci, 17 duodeni: ſi ipſos vis addere, prius quemlibet ipſorum ad duodenos reducas: deinde numeros prouenientes addas: & proueniens numerus, erit ſumma datorum numerorum. Et ſi vis cognoſcere quot ducatos habeas in illa ſumma, aut quot francos: vtendum eſt diuiſione, vti vltimo diffinito præcedentis tractatus viſum eſt. Sed quoniam in hac parte non eſt adhuc datus modus diuidendi, nec multiplicandi, qui requiruntur pro reductionibus faciundis: ideo ad alium operandi modum eſt pertranſeundum.

Mixtorū additio p calculos.

¶ Secundo modo, & clariori poteris illos duos numeros addere ſic, vt diſpoſitis vicis tribus, cum cōpetentibus lineis, & domibus: numerus cui additio fieri debet, primo ponatur ſecundum q̄ primo diffinito declaratum eſt: deinde ducatis ducati addātur, & francis franci, & duodenis duodeni: ſic q̄ tres partiales additiones compones: quo facto, ſummam numerorum procreatam reperies.

Operationis exemplum.

¶ Poteſt inſuper alius operādi modus aſſignari in mixtis numeris, qui talis eſt. Diſpoſito numero cui additio fieri debet per ſuas domos, & lineas: cæteri numeri mixti eo veniunt addendi modo, vt à minoribus incipiendum ſit, verſus maiores procedendo numeros, & ſimul cum additione reductionem facies, quemadmodum præſens exemplum indicat. Sit numerus cui additio habet fieri, 323 franci, 19 duodeni, 19 turoni: numerus addendus ſit 234 franci, 15 duodeni, 7 turoni. diſpoſito igitur per calculos numero cui additio fieri habet ſecūdum eius conditionem, incipias additionem facere à turonorum vico, ſic q̄ ſeptē turoni numeri addendi addantur illis 19 turonis numeri cui additio fieri habet, & prouenient 26 turoni: poſitis igitur duobus turonis ſupra primam lineam eiuſdem vici, alios 24 pro duobus computabis duodenis, qui ſimul cum duodenis numeri addendi (ſcilicet 15) addantur duodenis ſecundo vico exiſtentibus: ex qua additione 19 emanabunt duodeni: relictis igitur in illo duodenorum vico 16 duodenis, 20 alij componentes francū, loco vnitatis cum cæteris francis numeri addendi computentur, qui ſecundum aſſignatum modum francis ſecundi vici addantur: & creabitur numerus 558 frācorum. iſto igitur diſcurſu peracto, reperies pro illorum duorum prius aſſignatorum numerorum ſumma, 558 frācos, 16 duodenos, 2 turonos. Vbi autem multos eſſe addendos numeros contingat, eſt conſimili proceſſu operandum.

TERTIO NOTANDVM EST ſupputatoriam additionem probādam eſſe per ſubtractionem, ita ſcilicet vt prouenienti ſumma addendi numeri ſubtrahantur: & ſi manens numerus fuerit æqualis numero cui additio fieri habet, operatio integra dicetur: occurrente autem oppoſito, additionis diſcurſus inefficax & nullus reputabitur. Hæc probandi via pro hac ſupputatoria ſpecie ſufficit: ideo probationum copiam minus bene nobis viſum eſt impræſentiarum eſſe adducendam.

¶ Subtractio ſupputatoria, eſt debita minoris, aut æqualis numeri, ab 3
æquali, vel maiori calcularis ablatio. Inde ſequitur ſubtrahere ſuppu-

tatorie, esse minorem, aut æqualem numerum ab æquali vel maiori calculatorie auferre

Subtractionis supputatorię finis.

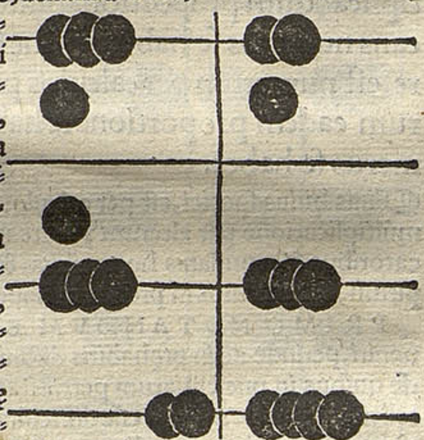
¶Finis huius speciei, est propositis duobus numeris, alterũ ab altero auferre: residuũ (si esse contingat) per calculos ostendendo. ¶Seruit hæc species ijs omnibus quibus & pręcedens diffinitum seruiebat.

Duplex subtractio calculatoria.

PRIMO NOTANDVM EST duplicem esse subtractionem supputatoriam: alteram simplicem, alteram vero mixtã. Mixta etiam subtractio multiplex est, secundũ ꝗ in ipsa multiplices numerorum denominationes ponuntur, vt primo notabili præsentis diffiniti visum est. Sũt igitur in hac specie consyderãda, numerus à quo fieri habet subtractio: numerus subtrahendus: & numerus relictus, qui in fine operationis domibus ac lineis decentibus secundum supputatorios calculos dispositus appareat.

Modus subtrahẽdi per calculos.

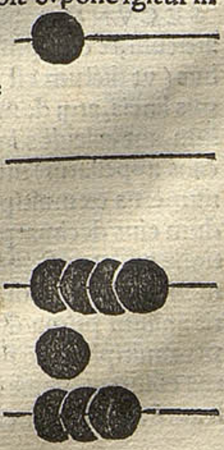
SECVNDO NOTANDVM EST in vtraq; calculari subtractione operandi modum inchoandum esse ab infimis lineis, & domibus ad superiores progrediendo: & in primis consyderare oportet an numerus à quo habet fieri subtractio sit simplex aut mixtus, pariter & numerus subtrahendus, vel quilibet illorum mixtus reperiatur, aut eo habeatur modo, vt alter simplex, alter vero mixtus inueniatur. Si enim primũ detur, eo pacto operaberis: disposito prius numero à quo subtractio fieri habet, secũdum quod permittit, vnitatẽ ab vnitate subtrahe, denam à dena, & à cẽtena centenã, vniformiter ascendendo: ꝗ si euenerit subtrahendi numeri vnitatẽ ab vnitate numeri, à quo fieri debet subtractio, subtrahi nõ posse, habebis accõmodato à numero subtrahendo vnum calculum, qui dena nuncupatur: idem faciũdum est, si subtrahendi dena à locati numeri dena subtrahi nõ posset, ita vt mutuãdus seu accõmodandus sit calculus à tertia, vel à quarta linea (si nullum in tertia esse contingat) & sic consequẽter. potest etiã quãdoq; calculus in domo repostus, qui quinq; valet, in inferioris lineæ calculis inferioribus accommodari. Exempli gratia sit numerus à quo habet fieri subtractio 3582, qui eo modo disponatur ac præsens forma indicat.



3582 0/5
2534 1/0
1048

Operationis exemplum.

Numerus autem subtrahẽdus sit 2534, à digitis autem inferioris lineæ, videlicet à duabus illis vnitatibus per duos calculos signatis, digitus subtrahẽdi numeri (qui est 4) subtrahi non potest: ideo à secunda linea, in qua tres calculi locantur, vnum pro prima linea accommodato habebis calculum, qui decem in ipsa vnitatibus valebit: & ita 12 numerum complent calculi existentes in prima linea, & calculus accommodatus, qui virtualiter decem valet vnitatibus: subtrahe igitur 4 ab illo duodenario numero, & manebit 8. pone igitur in prima linea vnum calculum qui cum duobus existentibus 3 efficiat numerum, & prima domo vnum etiam calculum locabis: deinde calculis manentibus in secunda linea (qui duo sunt) tres denæ subtrahendi numeri subtrahi non possunt: ideo calculus secundæ domus sit accommodus secundæ lineæ calculis, cum quibus 7 numerum componit, à quo 3 optime potest subtrahi, 4 in eadem secunda linea remanenti: hoc igitur facto, subtrahe à 5 centenarum tertia domo existenti, 5 numeri subtrahendi, quod facies per solam calculi ablationem: postremo autem à tribus calculis tribus millenis valentibus in quarta linea, duos subtrahe calculos, siue duas millenas (quod idem est) & vnicus manebit in quarta linea calculus: hoc igitur terminato, operationis finem sub sequenti dispositione reperies. Et eodem modo in alijs numeris simplicibus operandum. ¶Si autem vterque numerus mixtus fuerit, vel alter so-



lum mixtus extiterit, altero simplici existẽte, anteq̃ subtractio fiat, numeri tales reducantur ad eorundem infimã denominationem: deinde subtractio fiat. Nec opus est, vt in præsentiarũ longior fiat processus pro reductionis declaratione: quoniam intellectis duobus sequentibus diffinitis, & ijs quæ in priori tractatu dicta sunt, facile constat reductio. Iste modus subtrahendi in mixtis videtur mihi clarior quouis alio subtrahendi modo. Notum est enim, si numerus à quo subtractio fieri debet, esset iste, 987 ducati, 654 franci, 527 turoni: id melius fieri non posset, q̃ ꝙ primum vterq; numerorũ ad turonos reducatur, vel ad aliquam aliam summam: ideo opus est tam in hac supputatoria arte, q̃ in præcedenti (quæ per characteras docet operari) quemlibet arithmeticum promptissimũ esse in reducendo: imò maxime requiritur reductorius modus pro quolibet huius libri tractatu intelligendo: quoniam (vt videre potes) impossibile videtur quartum tractatum, in quo fractiones declarãtur perfecte intelligi, si reducẽdi modus obliuioni detur: quapropter inter arithmeticæ species nõ indigne venit numernadus.

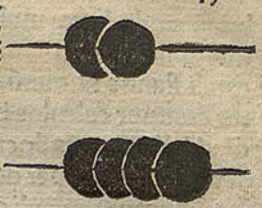
TERTIO NOTANDVM EST hãc subtractionis speciẽ esse probãdam per additionem, eo modo vt numerus subtrahendus, & numerus ex subtractione manens simul addantur: & si cõsurgens numerus ex tali additione fuerit æqualis numero à quo subtractio debet fieri, operatio firma erit: aliter si accidat, infirma & cassa dicetur. Probatio subtractionis.

¶Multiplicatio supputatoria, est numeri calcularis procreatio ad multiplicandum proportionabiliter se habentis, ac ad vnitatem multiplicans numerus se habet. Hinc facile constat, ꝙ supputatorie multiplicare, est numerum per calculos procreare, qui ad multiplicandum numerum eadem proportione se habeat, qua ad vnitatem multiplicans numerus se habet. 4

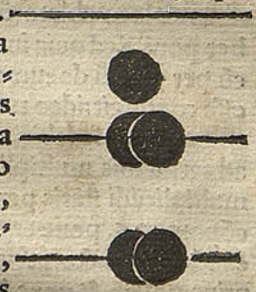
¶Finis huius speciei, est per calculos summam prompte assignare, quæ vnius numeri multiplicatione per alterum procreatur. ¶Seruit autẽ hæc species supputatoria mercatoribus & mundanis hominibus, & sæpenumero astrologis, vbi accidit eos nec papirum, nec calamos in promptu habere. Multiplicationis supputatoriæ finis.

PRIMO NOTANDVM EST duplicem in hac parte multiplicationem inueniri, perinde ac in prehabitis diffinitis declaratum est, scilicet simplicem, & mixtam: de quibus in præsentiarum pertractare intendimus, & primo de simplici. Pro cuius intellectu, aduerte nullam esse difficultatem in supputatoria multiplicatione vnius digiti per alterũ: etiam grandis non est difficultas per aliquem digitum numerum, articulum vel compositum multiplicare. Difficultas igitur in hac specie solũ consistit in multiplicatione articuli, seu compositi numeri, per articulum, vel compositum. Vt tamen locupletius supputatoriam intelligere valeas multiplicationem: primo docebimus per digitum numerum, articulum seu compositum multiplicare: deinde articulum & compositum, per articulum & compositum calculatorie multiplicabimus.

SECVNDO NOTANDVM EST pro huius diffiniti clara intelligẽtia, digitũ articulũ, & compositũ numerũ disponendũ esse per calculos, lineis, & domibus decẽtibus (vt dictum est diffinito primo) & ipsis dispositis, incipiendum est operari ab infimis lineis, atq; domibus versus superiores eundo: & si contingat in prima linea calculum, aut calculos inueniri, simul & in prima domo: numerus ille digitus (qui multiplicans appellatur) multiplicet totum numerũ, scilicet primæ lineæ, & primæ domus, & numerus ex multiplicatione proueniẽs, si articulus fuerit, in mente seruetur, qui secũdum eius decimæ partis denominationem numero prouenienti ex secunda multiplicatione addetur: si autem talis numerus cõpositus fuerit, eius digitus addatur digito numeri multiplicandi, articulo in mente seruato pro secunda operatione. Si vero euenerit nullum prima domo calculũ reperiri (aliquo prima linea reperto) illũ multiplicabis per multiplicantẽ numerum qui digitus est: ex cuius multiplicatione si digitus numerus cõsurgat, venit locãdus seu addendus numero multiplicãdo secundũ quod exigit: si autẽ articulus fuerit, seruãdus est in mente pro secũda operatione: ꝙ si cõpositus cõ- Multiplicandi per calculos ars.

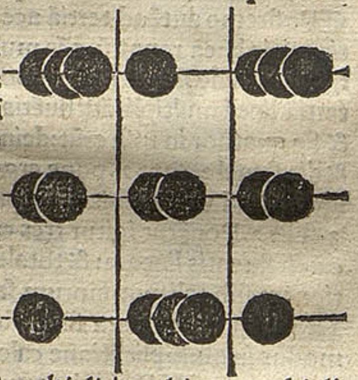


surgat numerus, eius digitus locetur secūdum quòd permittit, articulo in mente seruato. quo facto, ad secundam operationē ibis: eodem modo operādo. Istud exemplo facili declaratur. Sit numerus multiplicandus 24, & multiplicans sit 3. numerum igitur multiplicantē (postquam digitus est) in mente tenebis: multiplicandum vero numerum in proprijs lineis pone, secundum quod præsens forma ostendit.

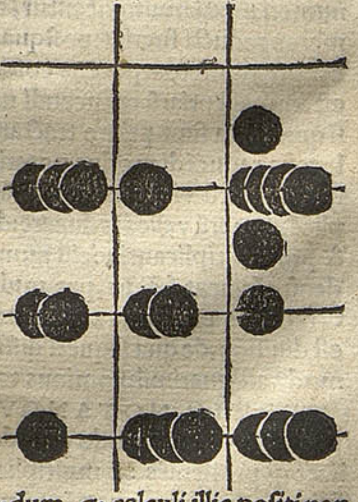


¶ Deinde numerū 4 positū in prima linea per multiplicantē numerū, videlicet 3 (quē in mente conseruas) multiplicabis, dicendo ter 4 componunt 12. tolle igitur à prima linea duos calculos, sic quòd nō plures in illa maneāt q̄ duo, & articulū in mēte seruabis pro secūda operatione, qui secūdum eius decimæ partis denominationē (quę vnitas est) calculis secūdæ lineæ addatur: multiplica igitur pro secunda operatione, binariū calculorū positū in secūda linea per 3, dicēdo ter 2 faciūt 6. huic numero addēdus est nūerus in mēte seruatus, & proueniet 7, qui eo modo venit locandus, vt duo calculi dūtaxat supra secūdā lineā reperiātur, & vnus secūda domo ponetur, & in fine talē reperies operationē. ¶ Patet igitur operādi modus in multiplicatione, qua per digitū compositus numerus multiplicatur: pari processu procedendū est in multiplicatione, qua per digitum numerus articulus multiplicatur.

¶ Sed pro intellectu multiplicationis supputatoriæ, cuius tā numerus multiplicādus q̄ multiplicans sunt compositi numeri, est aduertendū numeros illos eo pacto esse disponēdos: dispositis lineis parallelis secundum numerorum quantitatē, à duabus ortogonaliter cadētibus lineis etiā parallelis cæterę diuidantur, sic q̄ ex tali linearū sectione, tres proueniant vici, in quorū primo multiplicādus numerus (qui stās appellatur) locabitur: in secūdo & medio, multiplicans numerus ponetur: in tertio & vltimo, multiplicādus numerus (quem immanentē appellamus) cubiculū suum habebit. ¶ Hæc ōnia vt clarius intelligere valeas, claro tibi aperiūtur operatōis exēplo. Sit numerus multiplicā dus 321. multiplicās 123. illos sub tali dispositiōe locabis.



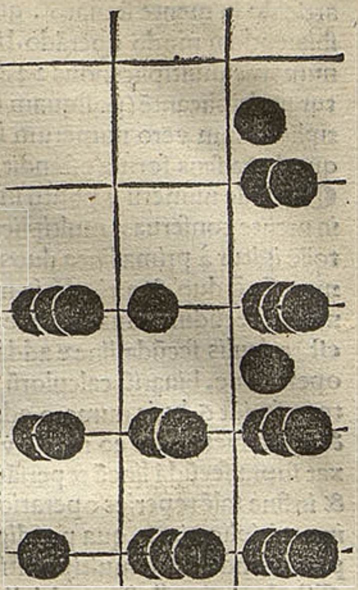
Et incipies operari multiplicādo omnes numeros multiplicādi fluentis per omnes multiplicātis numeros, ita vt per vnitates multiplicantis primum multiplicentur. deinde per denas, & consequēter sic eūdo, quod facies hoc modo. ter 1, sunt 3. ponantur igitur in prima linea multiplicādi fluētis duo calculi, qui cū existēti tres vnitates componunt: deinde dic, ter 2, componunt 6. auferatur igitur à secunda linea multiplicandi fluentis vnus calculus altero manente, & ponatur in domo secunda: deinde multiplicabis centenas, dicendo ter 3, cōponunt 9. ponatur igitur cum illis tribus adhuc vnus calculus in tertia illa linea, & vltrà vnū ī tertia domo locabis: & facta prima multiplicatiōe, sub tali forma operatio apparebit.



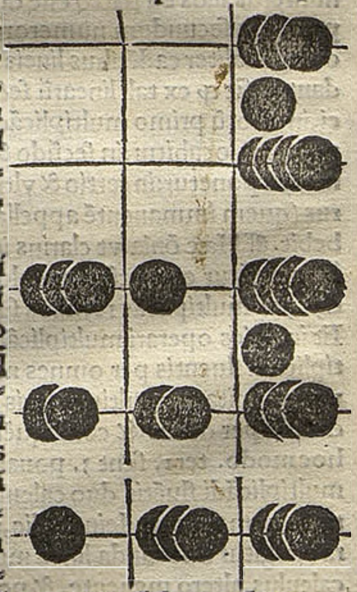
¶ Deinde ad secūdā procedes multiplicationē, multiplicādo omnes numeros multiplicādi stantis, per secūdū multiplicātis numerū, videlicet 2, sic dicendo, bis 1, sunt 2. pones igitur duos calculos in secunda linea multiplicandi fluentis, in qua vnus reperitur calculus, & sic in illa, 3 remanebunt calculi: & hoc est summe aduertendum, q̄ calculi illic positi non adduntur calculis primæ lineæ, sed duntaxat secundæ, & hoc ideo est, quia per calcu-

0
3 2 1 | 6
1 2 3 | 6
9 6 3
6 4 2
3 2 1
3 9 4 8 3
0

los secundæ lineæ multiplicantis, stans multiplicandus multiplicatur. Deinde ducas multiplicãtis numerum secundum in secundũ multiplicandi stantis numerũ, dicendo bis 2, faciunt 4. hos igitur quatuor calculos in ascendẽti linea fluẽtis multiplicãdi videlicet tertia, locabis. Sed quoniã in illa etiã quatuor reperiũtur, & per documẽtũ primũ primi diffiniti, plures q̃ quatuor calculi esse nequeunt in aliqua linea: ideo illorũ octo calculorũ, quinq; auferãtur, solis tribus manẽtibus, & loco ablatorũ vnus calculus in domo tertia debet poni. Sed quia in eadem vnus calculus reperitur, & cũ per primũ documentũ in nulla domo duos calculos esse contingit: ideo ratione amborũ calculorum vnus in quarta linea sedebit, nulla tertia domo manenti: deinde ad tertiã ibis multiplicationẽ, & multiplicabis centenas multiplicãdi stãtis per denas multiplicãtis, dicẽdo bis 3, cõponunt 6. pone ergo sex calculos in fluenti multiplicando, eo pacto vt vnus ponatur in quarta linea cum prius posito, & vnus in domo quarta ascẽdenti locetur: qui (vt primo diffinito dictum est) quinque calculorum lineæ immediate inferioris valorem continet: quo peracto, talem calculorum compositionem habebis.



¶Postremo autẽ ad tertiã accedas multiplicationẽ, qua per vnum calculũ multiplicãtis tertia linea repostũ, oẽs multiplicãdi stãtis calculos vicissim multiplicabis: incipias igitur, dicẽdo semel 1, est 1, pones ideo vnũ calculũ supra tertiã lineã multiplicãdi fluẽtis, in qua tres inueniuntur, & sic quatuor in ipsa erũt: deinde ascẽde multiplicando, & dic semel 2, sunt 2. pone ergo duos calculos in quarta linea, & ad vltimã ibis multiplicationem: dicendo semel 3, sunt 3. Ponãtur igitur tres calculi supra quintã multiplicandi fluentis lineam: & totalem supputatoriam operationem sub tali nummorum fabricatione reperies.



Ex his quæ declarata sunt, sufficienter patet operandi modus in multiplicatione calculatoria secundum simplices numeros. ¶Pro mixtorum numerorum supputatoria multiplicatione, id solum teneas documẽtum. Nunq̃ numeri mixti multiplicentur, nisi prius ad simplices numeros reducti fuerint: postquam vero ad simplices reducentur numeros, poteris eosdẽ multiplicare. Nec opus est impræsentiarũ reducendi modum assignare: quoniã si quæ dicta sunt primo tractatu recte intelligantur, facile talis reducẽdi modus poterit inueniri. Vnde si hũc numerũ mixtũ videlicet, 123 frãcos, 234 duodenos ad simplicẽ numerũ velles reducere: debes pro multiplicãdo nũero, numerũ francorũ capere, & pro multiplicanti viciũ numerũ quot frãcus duodenos continet: & cũ vigesies duodenũ cõtineat frãcus, pro multiplicãti, 20 sumes: & operaberis modo prius assignato, & reperies pro sũma 2460 duodenos: & si cognoscere velles quot faciũt frãcos, opus est diuisiõe, de qua sequẽti diffinito dicet. Et quis ali⁹ posset ĩ mixtorũ multiplicatiõe mod⁹ assignari: nihilominus tamẽ visũ est nobis hũc iã assignatũ ꝑ hac pte sufficere.

TERTIO NOTANDVM EST supputatoriã multiplicationẽ probandã esse per diuisionẽ, eo modo quo dictũ est quarto diffinito præcedentis tractatus: ita videlicet ꝙ proueniẽs ex multiplicatione summa per multiplicantẽ numerũ diuidatur, & si in tali diuisiõne quotiẽs numerus fuerit ęqualis multiplicãdo, bene valebit calcularis multiplicatio: si vero aliter cõtingat, oportet iterum de nouo operationẽ incipere. Multiplicationis ꝓbatio.

5 ¶Diuisio supputatoria, est numeri per calculos inuentio, qui ad vnitatem in eadem se habet proportione, qua ad diuisorem diuidēdus numerus se habet. Constat ex diffinitione quòd supputatorie diuidere, nihil aliud est, quàm numerum per proiectiles calculos procreare, qui ad vnitatem æque proportionabiliter se habeat, ac diuidendus numerus ad diuisorem.

Diuisiōis supputatoriæ finis.

¶Finis huius speciei, est expedite numerum quotientem per calculos supputatorios inuenire, qui ex diuisione numeri diuidendi per diuisorem potest procreari. ¶Seruit hæc species in primis argentarijs, trapezitis, atq; mercatoribus, & ijs omnibus quibus & præhabitæ deseruiebant.

PRIMO NOTANDVM EST supputatoriam diuisionē duplicem esse, simplicem videlicet, & mixtam, vti de multiplicatione declaratū est. Tractabimus in primis de simplici: deinde transeunter aliquid de mixta dicemus.

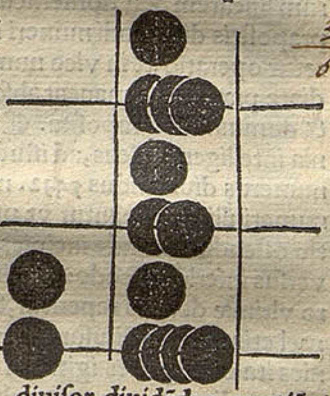
Diuidēdi mod⁹ per calculos.

SECVNDO NOTANDVM EST in supputatoria diuisione incipiēdum esse operari à superioribus lineis, & domibus versus inferiores descendendo. Et quoniam (vt 5 diffinito præhabiti tractatus diximus) longe difficilius in diuisione est operandū, vbi pro diuisore capitur numerus duorum, aut plurium elementorū significatiuorū, q̄ vbi vnica reperitur significatiua figura, siue per se, siue cifris aut cifra adiūcta: ideo vt plenius hæc species intelligatur, primo operandi viā aperiemus, vbi solum digitus pro diuisore accipietur: deinde ad alteram partem accedemus.

3 | 2 3 3
6 | 8 7 9 (146
6 6 6

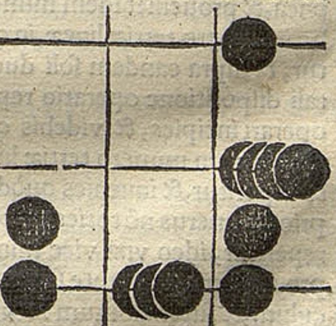
Operationis exemplum.

¶Pro primi igitur expeditione, est aduertendum tres vicos pro quauis diuisione constituendos esse: in quorum primo, diuisor numerus ponatur: in secūdo numerus diuidēdus: in tertio quotiēs numerus apparebit. Exempli gratia. Sit numerus diuidendus 879. diuisor sit 6. illos numeros (vt præsens forma indicat) locabis. Et operaberis eo pacto: primo videbis quoties diuisor in suprema linea, & domo calculis occupata reperiatur, & inuenies esse tantum semel. 6 enim



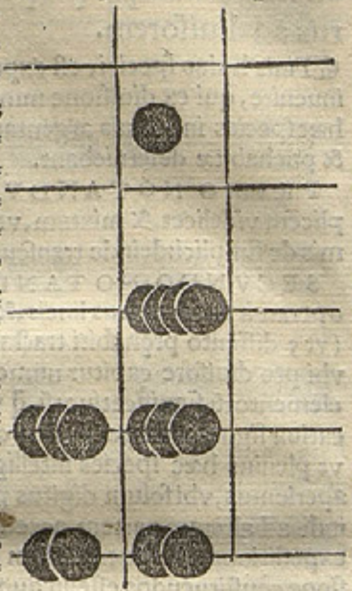
diuisor. diuidēdus. quotiēs.

(qui diuisor appellatur) in suprapositio 8 tantū semel reperitur: ideo ponēdus est vnus calculus supra tertiam lineam vltimi vici: multiplicabis igitur diuisorē per numerū vicium: videlicet per vnitatem, & idem diuisor scilicet 6, proueniet, qui subtrahendus est à supremo numero, videlicet ab 8, & residuū scilicet 2, tertia linea manebit: deinde ad secundam lineam descende, & iterum videbis quoties 6, qui est diuisor, in numero eiusdem secundæ lineæ, simul & ascendenti inuenitur: & reperies diuisorem quater inueniri: pone igitur supra secundam lineam secūdi vici 4 calculos, & multiplicabis diuisorem per numerum vicium. dicendo quater 6, efficiunt 24. quem numerū subtrahe à numero diuidendo posito in secunda linea simul & suprapositis, sed cum numerus in secunda linea repertus, & suprapositus simul 27 componunt, ab illo subtrahatur 24, residuum scilicet 3 supra illam secundam lineam diuidendi ponendo: deinde ad vltimam accedas operationem &



videbebis quoties diuisor in numero supra primam lineam diuidendi posito, simul & ascendentibus inueniatur, & reperies quòd vicium numerus est 6, quem in vltimo vico pone, supra primā lineam vnum calculū ponēdo: & in prima domo vnum alterum: & per illū 6 multiplicabis diuisorem, & prouenientem numerum, qui est 36, à numero deuidēdo prima linea existēti, simul & superpositis subtrahe: quo facto, tres calculi tantū manebunt supra primā lineā secundi vici: & operatio eo pacto disposita inuenietur.

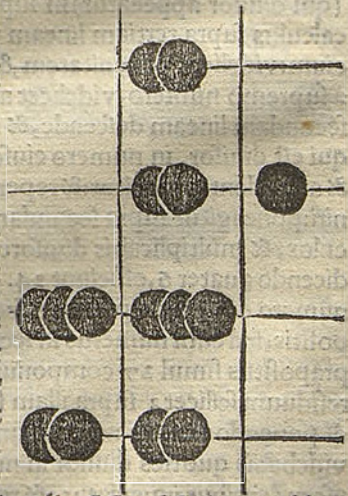
Patet igitur si numerus 879 per 6 diuidatur, pro numero quotiente generabitur 146. & residuum, numerus 3 erit, qui per 6 diuidi sine fractione non potest. ¶Si autem in diuisione pro diuisore accipiatur sola vna figura significatiua, cum cifra aut cifris: omnino eodem modo est operandum, ac dictum est: hoc solo dempto, vt scilicet operatio cesset cum primum cifra diuisoris ponetur in conspectu primæ lineæ diuidendi. voco impræsentiarum cifram lineam, siue domum & lineam simul, in quibus nullus ponitur calculus, & hoc quando in aliqua linea calculus reperitur. ¶Sed quoniam (vt dictum est) longe maior est difficultas in diuisione cuius diuisor est duarum, aut plurium figurarum significatiuarum: ideo pro operationis intellectu hæc duo documenta consyderabis, quæ posita fuere diffinito 5 præcedentis tractatus. ¶Prius documentum est. Si diuisoris aliquis linearis numerus, siue linearis & domesticus, pluries q̃ nouies in sibi suprapositis nummis inueniatur, tãtum 9 pro quotiente numero accipiatur. ¶Secundum documẽtum est. Si post primam operationem eueniat aliquem diuisoris numerum linearem, seu domesticũ in sibi supraposito vel suprapositis diuidendi numeri inueniri non posse, anterioretur operatio, & in vico numeri quotientis, linea immediate præcedens maneat absq; calculi positione, pariter & domus illi suprapposita. ¶Vt autem melius hæc omnia intelligere valeas, ad istud aduertas exemplum. Sit numerus diuidendus 5432. numerus autem diuisor 32, numeri illi disponantur vt præsens calculorum dispositio ostendit. Deinde incipies operari à suprema domo versus inferiores eũdo: & primo videbis quoties posterior diuisoris numerus in numero vltimæ domus reperitur, & inuenies quòd semel tantum: videbis igitur, vtrum semel etiam prior diuisoris in numero diuidendi immediate inferiori reperiatur, & inuenies ita esse: pones igitur in tertio vico pro numero quotiente vnum calculum supra tertiam lineam, per quẽ multiplicabis diuisoris secundũ numerum, & proueniet idem, videlicet 3, quem à numero in quarta domo diuidendi existẽte subtrahe, & residuum videlicet 2, supra quartã lineam per duos calculos pone, deposito prius calculo quartæ domus: deinde diuisoris priorem numerum per quotientem numerum multiplica, & proueniet idem numerus scilicet 2, quẽ subtrahe à numero tertiæ lineæ, in qua quatuor calculi ponuntur, & supra eandem soli duo calculi manebunt, & sub tali dispositione operatio reperta erit. Deinde iterum operari incipies, & videbis quoties posterior diuisoris numerus in numero tertiæ lineæ diuidendi, & suprapposito reperitur, & inuenies quòd septies: sed quia diuisoris prior numerus nõ toties in secunda linea, & suprapositis reperitur, ideo vna vice minus accipiatur: pone igitur pro numero quotiente supra secundã lineam vnum calculum, & supra domum secundam vnum etiam, & hoc in tertio vico: deinde multiplica diuisoris posteriorem numerũ per quotientẽ, videlicet per 6, & proueniet numerus 18: quẽ subtrahe à numero diuidendo supra tertiam lineã simul & sequenti (residuũ secundũ eius qualitatem disponendo) facies igitur, vt in tertia linea quatuor sint calculi, & depone duos calculos à quarta linea, qui 20 valebãt. postmodũ multiplicabis per quotiẽtem priorem diuisoris numerũ, & proueniet numerus 12: quẽ à numero secũdæ lineę diuidẽdi, simul & sequẽtis subtrahe: quo facto, operationẽ taliter dispositã



Prius documentũ

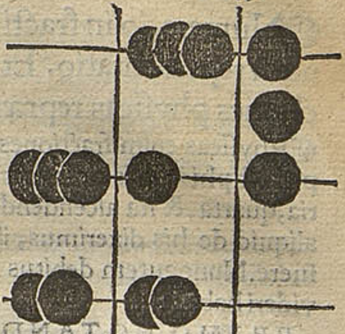
Secundũ documentum.

Operationis exemplum.

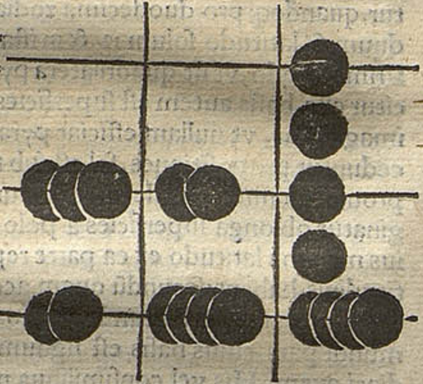


3 2
4 4
2 1 1
1 3 2 (169 21/32
2 2 2
3 3

reperies. Cõsequẽter operaberis, & videbis quoties diuisoris prior numerus in numero diuidendo posito in secũda linea, simul & suprapposito inuenitur, & inuenies ꝙ decies reperitur: sed per prius documentũ non potest vltrà nouies sumi, & diuisoris secundus numerus nouies etiam reperitur: ideo pro quotiẽte numerus 9 habeatur, qui tertio vico locabitur, eo pacto vt 4 calculi supra primam lineam ponatur, & vnus prima locetur domo: deinde mulmultiplica diuisoris posteriorem numerum per quotientem, videlicet 9, & proueniet 27: quem subtrahe à numero diuidendo, videlicet ab illo qui ponitur secunda linea simul & à supraposito. capies igitur tres calculos existentes tertia diuidẽdi linea, quos supra secundam pone: postea multiplicabis diuisoris priorem numerum per quotientem, & proueniet 18: quem à numero existenti in prima linea diuidendi, & suprapposito simul subtrahe, & pro residuo operationis manebit numerus 24: qui sine fractione per 32 diuidi non potest: hoc igitur discursu peracto, operatio completa sub tali calculorũ compositione manebit. ℂ Completo igitur diuidẽdi modo in simplicibus numeris, aliquid transeunter de mixtis operæprecium est dicamus. Pro quorum intelligentia est aduertendum, & pro documento obseruãdum, nullum numerum diuidendum esse, prius q̃ ad simplicem numerũ reducatur, ipso autem reducto, eum diuidere potes, quemadmodũ declaratum est de simplicibus. Nolo enim negare: imò mihi exploratissimum est, absq; reductione, & numerorũ fractione multos numeros mixtos posse diuidi: sed quoniã prolixa, & valde cõfusa taliũ esset diuisio: ideo nõ est opus in cõfusis, & admodũ prolixis operationibus immorari.



Mixtorũ partitio.



TERTIO NOTANDVM EST diuisionem per multiplicationem esse probandam modo declarato quinto diffinito præcedentis tractatus: sic videlicet, vt multiplicato numero quotiente per diuisorem, & summę prouenienti addito operationis residuo (si quod fuerit) videbis an proueniẽs numerus sit æqualis numero diuidendo, vel nõ: si ęqualis extiterit, bene operatus es: si vero inęqualis reperiatur, nihil operatio valebit. Et quamuis per supputatorios calculos possemus in progressione, & radicum extractione operari, & noua efficere diffinita: quia tamen ab omnibus ante me scriptoribus omissa fuere, & tenuis inde cõmoditas sequitur, esse omittenda nobis visum est.

Diuisiõis calculatorię probatio.

DE FRACTIONIBVS PHYSICIS, SEV ASTRONOMIcis, tractatus tertius.

Euripides.

Seneca.

Plato.

RES vera, simplex sermo est, inquit Euripides. sermone igitur simplici, quid veritatis physicæ fractiones intercipiant edocebimus. & si qua ex parte difficiles videantur, eas vtique claras, & digestas reddere nitemur. Nam plura sunt quæ nos terrent, quàm quæ premunt, ait Seneca. Veritatem igitur insequendo, quæ secundum Platonem dulcissimum est auditorium, in septem diffinita hunc tractatum diuidemus. In quibus operandi modus cum fractionibus significabitur.

Finis calcu. fract. physi. vel astro.

ℂ Finis huius tractatus, est perfecta in astronomicis atque physicis computationibus operatio. Seruit hæc doctrina apprime astrologis, medicis, naturalibus, ijs que omnibus hominibus qui corruptibilia relinquentes, incorruptibilia & cælestia corpora, ipsorúmque independentem causam rimantur.

¶Numeratio in fractionibus physicis, est debita physicalium fractionum repræsentatio. Et physice in fractionibus numerare, est debite fractiones physicas repræsentare. 1

¶Physicas enim fractiones eas appellamus, quibus physici, astronomi, & naturales philosophi in suis operationibus vtuntur, quemadmodum sunt minuta, secunda, tertia, quarta, & ita ascendendo. Et quamuis quarto, & quinto diffinitis primi tractatus aliquid de his dixerimus, illa duntaxat transeunter, non tamen impertinenter dicta fuere. Nunc autem debitus se offert locus, atque dispositio vbi ad amussim illa omnia videri habent. Physicæ fractiões

PRIMO NOTANDVM EST astrologos, & naturales quibusdã totis, & fractionibus vti. Tota, apud eos, duodecim cęli signa dicuntur, quibus duodecim in quouis simplicium elementorum correspondẽt tota. Vnde totũ in ista acceptione, duodecima firmamenti pars appellatur, siue duodecima simplicis elemẽti portio. Hæc autẽ tota altero discretiori termino, signa dicuntur. ¶Signũ autem multipharium accipitur. quandoq; pro duodecima zodiaci parte quadrangulari, cuius longitudo est 30 graduum: & latitudo solum 12. & in ista acceptione, dupliciter contingit signũ imaginari. Primo modo, vt sit quadrilatera pyramis, cuius acuties seu vertex, in centro terræ dicitur esse, basis autem est superficies ad quam tale signum terminatur. Secundo modo imaginatur, vt nullam efficiat pyramidalem figuram, & in hac acceptione tales conceduntur propositiones, sol est sub tauro, luna est sub libra. Alio modo accipitur signũ prout firmamẽti duodecima dicitur pars, & adhuc duplici acceptione. Primo, vt imaginatur oblonga superficies à polo vno zodiaci incipiens in oppositum terminata, cuius maxima latitudo ex ea parte reperitur qua ab eclyptica interscinditur, 30 gradus latitudinis habens: secundũ quam acceptionem, quicquid in his inferioribus est, sub aliquo signo manet. Secundo modo imaginatur oblonga pyramis, quæ est duodecima mundi pars, cuius basis est signum proximo modo captum, vertex autem supra zodiaci axem. His vel consimilibus modis quodlibet simplicium elementorum, 12 in se continet tota. Quodlibet autem signorum in quauis illarum acceptione, 30 continet gradus, qui integra dicuntur: & quilibet, 60 fractiones, seu minuta: quoduis minutũ in 60 scinditur partes, quarum quęlibet secundum appellatur: & de secũdis in tertia: & de tertijs in quarta: & sic consequenter est procedendũ secundũ sexagenariã diuisionem. Totum. Multiplex signi acceptio.

SECVNDO NOTANDVM EST easdẽ in tẽpore reperiri fractiones, vel saltem his cõsimiles, quæ & in cælestibus inueniũtur corporibus. Vnde queadmodum firmamentũ in 12 diuiditur partes, ita annus in 12 scindicur menses: quilibet mensis, proportionabiliter ad prius dicta, totũ appellari potest: deinde quilibet mensis in 30 aut 31 diuiditur dies, vnico duntaxat excepto, qui vigintiocto residet contentus diebus: & quilibet dies in 24 secatur horas: quælibet hora ĩ 60 minuta distribuitur: deinde quoduis minutum in 60 secunda profunditur: & de reliquis dic pari modo, sexagenariam vbique diuisionem obseruando. Possent consimiles haberi fractiones in monetis, atq; mensuris, quibus pharmacopolæ, & plærique alij vtuntur. Temporis fragmenta.

TERTIO NOTANDVM EST modũ scribendi in hac parte talẽ debere esse: à manu sinistra incipiendũ est, versus dextrã eundo: & primo tota ponãtur, deinde gradus, postmodũ minuta, consequenter secunda: & de cæteris pari modo. Eandẽ positionem in tempore obseruabis: ita vt primo loco menses locentur, deinde dies, tertio horæ, quarto minuta, & sic consequenter. Hæc omnia infra positæ formulæ ostendunt. Scribendi ordo in fractionib⁹ physicis.

2	4	5	6	3	
Signa.	Gradus.	Minuta.	Secunda.	Tertia.	Fractiones zodiaci.
2	4	5	6	3	
Menses.	Dies.	Horæ.	Minuta.	Secunda.	Fractiones temporis.

Quamuis in hac parte duplicem possemus fractionem assignare, alteram simplicẽ, alteram mixtam: quia tamen primo tractatu sufficiẽter de numero mixto discussum est, & sequenti pariter aliquid etiam dicetur, ideo pertranseo.

2 ¶Reductio aſtronomica, eſt integri ſiue groſsioris fractionis in ſubtiliorem, vel ſubtilioris in integrum, aut groſsiorem fractionem commutatio. Hinc phyſice ſeu aſtronomice reducere: eſt integrum, ſeu groſsiorem fractionem, in ſubtiliorem, vel ſubtiliores in integrum, aut groſsiorem fractionem commutare.

¶Nempe tota huius tractatus difficultas, in reductione fractionum conſiſtit. Ideo pro reductionis clara intelligentia, quatuor documenta ponemus, per quæ clare modus reducendi phyſicas ſeu aſtronomicas fractiones ſignificabitur.

Primum documentum.

PRIMO NOTANDVM EST, & pro primo documento tenendum. Si volueris gradus, quos integra dicunt, ad fractiones reducere: debes numerũ graduum toties, ſiue tot vicibus per ſexagenarium numerũ multiplicare, quoties, ſeu quot vicibus numerus à quo fractio denominatur, vnitatem continet: & proueniens numerus erit talium fractionum ſumma, ex reductione graduum ad fractiones reſultans. Iſtud declaratur facillimo exemplo. Vis ſcire tres gradus, quot efficiunt quarta? multiplicabis numerum graduum, videlicet 3, per 60 quater, & numerus proueniens, erit 38880000. Eſt tamen vnum aduertendum non eſſe intelligendum vt litera ſonat: ſed iſto pacto, vt videlicet 3, qui eſt numerus graduũ multiplicetur quater per 60: taliter ꝙ ex prima multiplicatione proueniens numerus qui eſt 180, multiplicetur per 60: deinde numerum ex ſecunda multiplicatione prouenientem, qui eſt 10800, per 60 multiplices, & producetur 648000: poſtmodum hunc numerum productum ex tertia multiplicatione per 60 multiplices, & habebis 38880000, qui eſt ſumma proueniens ex reductione trium graduum ad quarta. In cæteris eodem modo eſt operandum. ¶Ex quo infero, ſi 5 gradus ad quinta reducantur, proueniens ſumma erit 3888000000 quintorum.

Operationis exemplum.

3	g
180	m
10800	2
648000	3
38880000	4
per 60	

Secundũ documentum.

SECVNDO NOTANDVM EST, & pro ſecundo documento tenendum. Si velles groſsiores fractiones ad ſubtiliores reducere, videbis per quot vnitates denominatio ſubtilioris fractionis à denominatione groſsioris diſtat, & toties numerum groſsioris fractionis per 60 multiplicabis: quo facto, proueniens numerus, reductionis ſummam oſtendet. Exempli gratia. Vis reducere 5 minuta ad quarta? poſtquam minutum ab vnitate denominatur, quarta vero à 4, qui per tres vnitates ab 1 diſtat: ter igitur multiplicabis numerum minutorum, videlicet 5 per 60, ad ſenſum in primo documẽto declaratum, ſic videlicet, vt 5 primo per 60 multiplicetur: deinde ex tali multiplicatione prouenies numerus qui eſt 300, per 60 multiplicetur: & proueniet 18000: poſtremo autem hunc numerum per 60 multiplicabis: & proueniet numerus 1080000, qui proueniens ſumma nuncupatur ex reductione 5 minutorum ad quarta. ¶Ex quo facile ſequitur, ſi ad ſexta, 7 tertia reducantur, numerus proueniens erit 1512000. Et ſi ex te quiſpiam petat, qualiter 5 minuta, 3 ſecunda, & 4 tertia ſimul ad quinta reducantur: debes primo minuta ad quinta reducere: deinde ſecunda ad quinta: poſtmodũ tertia ad quinta reducantur: & numeri prouenientes ſimul addantur: ex quorum additione proueniens numerus erit datarum fractionum reductiora ſumma 65462400 quintorum.

Operationis exemplum.

5	m
300	2
18000	3
1080000	4
per 60	

7	3
420	4
25200	5
1512000	6
per 60	

TERTIO NOTANDVM EST duos eſſe reducendi modos his primis oppoſitos: & hoc pro reducendis fractionibus ad integra, & ſubtilioribus ad groſsiores fractiones. Pro primi intelligentia tale teneas documentum, quod tertium in ordine erit.

Tertium documentum.

Operationis exemplum.

Si fractiones ad integra reducere velles: debes in primis cognoſcere numerum à quo denominantur tales fractiones, & toties illarum numerus per 60 diuidatur, quoties vnitatem talium fractionũ denominatio continet. Exempli gratia. vis reducere 57980463 tertia ad integra, ſcilicet ad gradus? ter diuides illum numerum per 60, eo pacto vt facta prima diuiſione numerus quotiens, qui numerus eſt ſecũdorum, per 60 diuidatur: deinde ſecundæ diuiſionis quotiens, qui minutorum eſt numerus, per 60 etiam diuidatur: quo facto, tertiæ diuiſionis quotiẽs, graduum numerum manifeſtabit. Et ſi in qualibet illarum trium diuiſionum aliquod ſit reſiduum: illud in prima diuiſione denominationem tertij capiet: & in ſecunda denominationem ſecundi: in tertia vero minuti de-

☞Tot⁹ reducẽdi modus in hoc cõſiſtit, vt ſi groſsiores fractiões ad ſubtiliores reducere velis, ita multiplicatione vtaris, ne denominationes vtrarunq; trãſgrediaris. Cõtrà vero ſi ſubtiliores ad groſsiores reducas, toties viciſsim diuiſione ſexagenaria opus erit, quota fuerit denominatio groſsioris à ſubtiliori.

nominationem suscipiet. Si igitur datum numerũ ad integra reducas: facta prima diuisione per 60, pro quotiente habebis 966341, & supersunt 3 tertia. Deinde illo quotiente numero per 60 diuiso, numerum quotientem ipsius habebis 16105. & residuum erit 41 secunda. Postmodum si hunc quotientem numerum per 60. diuidas, talis procreabitur numerus quotiens 268, qui numerus graduum erit, & residuum erit 25 minuta. Habes igitur si 57980463 tertia ad gradus reducantur, prouenient 268 gradus, cum 25 minutis, 41 secundis, & tribus tertijs. ¶Ex isto deducitur, si 987654321 quinta ad integra, videlicet ad gradus, reducantur, emanabit 1 integrum cum 16 minutis, 12 secundis, 28 tertijs, 25 quartis, & 21 quintis. Poteris hoc reducendi processu quasuis fractiones alias ad integra reducere. Sed quoniam contingit sæpenumero subtiliores fractiones ad grossiores reduci: ideo pro talium reductione, istud aduertes documentum. Si aliquas subtiles reducere velles fractiones ad grossiores, animaduertas in primis denominationem illarum subtilium fractionum, & videbis per quot vnitates, subtilioris fractionis denominatio, grossioris fractionis denominationem excedit, & toties diuides numerum illarum subtilium denominationum per 60: quo peracto, quotiens numerus vltimo habitus, propositũ ostẽdet. Hoc declaratur facili exẽplo. Vis 89786754 sexta ad tertia reducere: tres diuisiones sunt faciendæ, modo in præcedenti documento declarato: & reperies pro summa tertiorum 415 tertia, cum 40 quartis, & 45 quintis, & 54 sextis. Ex hoc habetur, si 9073605 quinta ad secundã reducantur, consurget 42 secunda, cum 26 quartis, & 45 quintis.

Quartũ documentum.

Operatio nis exemplum.

¶Additio astronomica, est physicalium fractionum in vnam summã collectio. Et addere astronomice, est fractiones physicales in vnã summam colligere. 3

¶Difficultatem impræsentiarum pro additione faciunda, nullam fere habemus. Est autem aduertendum, & pro documento obseruandum, nullas fractiones diuersarum denominationum esse addendas, nisi prius ad fractiones vnius denominationis reducantur. Intendo enim dicere gradus non esse addendos minutis, nec minuta secundis, nec secũda tertijs, antequam reducantur ad consimilis denominationis fractiones: ipsis autem reductis secundum quod præcedentis diffiniti documenta indicant, addi poterunt; vnde

Fractionũ physicaliũ additio.

PRIMO NOTANDVM EST pro talium fractionum additione, fractiones dissimiles, locis dissimilibus locandas esse, ita ꝙ disponendæ veniunt secundum quod primo diffinito diximus. Primo gradus (si fuerint) ponantur: deinde minus grossæ fractiones: vltimo subtiliores locentur. Si aliquas fractiones addere velles, illas debes eo pacto disponere, vt mutuo correspondeant quæ earundem sunt denominationum: ita videlicet vt gradibus gradus supponantur: minutis minuta: secundis secũda, & ita consequenter. Vnum tamen est aduertendum, vtendum esse vnitatibus in hac parte, perinde ac in primo tractatu vtebamur: & vnitatibus vnitates addantur, denis denæ, centenis centenæ: & sic de singulis: cum autem ad sexaginta deuentum fuerit vnitates, illas in mente tenebis, pro vnitate addenda sequentibus fractionibus diuersarum denominationum: & semper incipiendum est operari a subtilioribus fractionibus versus grossiores eundo. ¶Vt autem clarius hæc omnia intelligere valeas, ad præsens respice exemplum. Numerus cui additio fieri habet sit 4 signa, 28 gradus, 45 minuta, 28 secunda. Primus numerus addendus sit 2 signa, 20 gradus, 15 minuta, 13 secunda. Secundus numerus addendus sit 1 signum, 15 gradus, 20 secunda. Tertius numerus addendus sit 1 signum, 12 gadus, 14 minuta, 24 secunda. Disponantur illi numeri secundum quod sequens elementorum combinatio ostendit.

4	Signa.	28	Gradus.	45	Minuta.	28	Secunda.
2	Signa.	20	Gradus.	15	Minuta.	13	Secunda.
1	Signum.	15	Gradus.			20	Secunda.
1	Signum.	12	Gradus.	14	Minuta.	24	Secunda.

Operaberis incipiendo à secundis, ipsa simul addendo, eo pacto vt ipsorum vnitates addantur: deinde denæ. Postmodum ad minuta ibis eodem modo operando: consequenter ad gradus: & demum ad signa: & totali discursu completo, sub tali compositione operationem reperies.

4	Signa.	28	Gradus.	45	Minuta.	28	Secunda.
2	Signa.	20	Gradus.	15	Minuta.	13	Secunda.
1	Signum.	15	Gradus.			20	Secunda.
1	Signum.	12	Gradus.	14	Minuta.	24	Secunda.
10	Signa.	16	Gradus.	15	Minuta.	25	Secunda.

SECVNDO NOTANDVM EST, si velles cognoscere summam signorum, aut graduum, vel minutorum, siue alicuius alterius fractionis, quam omnes illi quatuor numeri suprapositi efficiunt: opus est reductione. Vnde si ad signa reducantur, oportet id fiat secundum tertium documentum, in quo declaratus est modus reducendi fractiones ad integra. Si autem ad gradus, vel ad minuta reducantur, aliis documentis adiutus id facillime facere poteris. Et quamuis posset alius addendi modus assignari in hac parte: datus modus, postquam & succinctus & bonus est, sufficit.

TERTIO NOTANDVM EST consimili procedendi modo esse operandum in fractionibus temporum, & monetarum, & consimilibus aliis. Vnde si in temporis fractionibus operari libuerit, secundum hanc speciem, ad istud aduertas exemplum.

4	Menses.	25	Dies.	23	Horæ.	52	Minuta.
2	Menses.	17	Dies.			36	Minuta.
1	Mensis.			19	Horæ.	56	Minuta.
3	Menses.	19	Dies.	22	Horæ.	47	Minuta.
12	Menses.	3	Dies.	19	Horæ.	11	Minuta.

¶Potest hæc species probari per subtractionem, vt sequens diffinitum docebit: nam si facta additione, omnes numeros addendos abstuleris à summa, & residuum sit æquale numero cui additio fieri habet, bene operatus es: aliter si euenerit, iterum incipias operari oportet.

4 ¶Subtractio astronomica, est fractionũ physicaliũ à physicalibus fractionibus ablatio, vt inde relicta summa deprehẽdatur. Subtrahere vero astronomice, est physicas fractiones à physicis fractionibus auferre.

¶Quandam inter se similitudinem obseruant subtractio in fractionibus, & subtractio prius habita in integris: ita videlicet vt quemadmodum tertio diffinito primi tractatus dictum est, operationẽ initiandam esse ab vnitatibus, ita impræsentiarũ incipiẽdum est operari ab vnitatibus subtilium fractionum versus denas, & cætera (si fuerint) eundo.

PRIMO NOTANDVM EST pro huius diffiniti vero intellectu, operationẽ eo pacto esse faciendam: dispositis numero à quo fieri habet subtractio, & subtrahendo secundum quod dictum est, subtrahes fractiones à fractionibus eiusdem denominationis: quòd si tales non reperiantur, subtrahes minores fractiones à maioribus: ita videlicet quòd à maioribus habebis accommodato vnam fractionem, quæ 60 valet pro immediate præcedenti fractione. Sed vt melius hæc omnia intelligantur, ad istud respice exemplum. Sit numerus à quo subtractio fieri habet 26 gradus, 35 minuta, 48 secunda: numerus subtrahendus sit 24 gradus, 26 minuta, 55 secunda: disponantur vt præsens forma significat. Deinde incipe operari à secundis, & dic ab 8 deponendo 5, remanet 3, quem sub linea directo loco ponas: postmodum à 4 non potest 5 deponi, ideo opus est vt habeas accõmodato vnum minutum quod 60 valet secunda in primo secundorum limite: & in secundo valet 6 denas, quæ simul cum 4 ibidem existentibus, 10 componunt, à quibus poteris bene 5 subtrahere, residuum scilicet 5, sub linea directa sede ponendo: postmodum ad minuta ibis: & quia à 4 manẽtibus propter ablationem vnius minuti separari non potest 6: igitur habebis vnam vnitatem accommodato à 3 sequentibus, quæ 10 valet minuta, & sic à 14 separabis 6, residuum in-

Operationis exemplum.

26	Gradus.	35	Minuta.	48	Secunda.
24	Gradus.	26	Minuta.	55	Secunda.

☞ Alter est in physicis fractionibus subtrahendi modus, & (meo quidẽ iudicio) vsui accõmodatior illo, quem author hic ponit. Est'que huiusmodi. Quemadmodũ in primis quibusq; limitibus, à denario numero maioris digiti subtrahẽdi differẽtiã sumis (iuxta alterũ modũ subtractionis tertij definiti, primi tractatus praxeos arithmeticæ) quã superiori minori additam, aut solam si cifra superius sit, sub lineã scribis, atq; deinde secũdo limite vnitatẽ addis numeris subtrahẽdis simul cũ eis auferẽdam: sic quoq; in quibuslibet secũdis limitibus physicis inq̃, subtrahendi ma ioris differentiam à senario, superiori adijce, productúmq; substitue, atq; vnitatē ad proxime crassiorē fractionem trāsfer: vbi subtrahas illam. id'q; per omnes physicas fractiones, quæ sexagenæ fuerint (quales & apud Alphōsum signorum sunt) te obseruasse non pœnitebit, quisquis es studiorū amator

fra lineam ponendo, videlicet 8: deinde quia à 2 manenti, 2 subtrahendus est æqualis, ideo ad gradus eundum est: & operaberis consequenter vt dictum est. & hoc peracto, talem, qualis sequitur, completam reperies operationem.

26	Gradus.	35	Minuta.	48	Secunda.
24	Gradus.	26	Minuta.	55	Secunda.
2	Gradus.	8	Minuta.	53	Secunda.

SECVNDO NOTANDVM EST alterum posse assignari subtrahendi modum, qui videtur in parte clarior. Et est, dispositis numero à quo fieri subtractio habet, & numero subtrahendo, reducantur ad subtiliorem fractionem in ipsis repertam: quibus reductis, secundum documenta secundi diffiniti, facillima erit subtractio. Alius modus subtrahēdi.

TERTIO NOTANDVM EST eadem omnino via esse operandum in fractionibus temporis, monetarum, & aliorum huiusmodi, ac in astronomicis fractionibus dictum est. Probari autem potest hæc species per additionem: vnde si subtrahendi numeri, & subtracti prouenienș summa extiterit æqualis numero à quo subtractio fieri habet, bona erit operatio: si autem oppositum contingat, opus est vt iterum operandi sumas laborem. Probatio subtractionis.

¶Multiplicatio astronomica, est procreatio numeri compositam denominationem multiplicātis & multiplicādi habentis, qui ad multiplicandum extrinseca appellatione in eadem proportione se habet, qua multiplicans etiam extrinseca denominatione ad vnitatem se habet. Hinc facile constat quid sit astronomice multiplicare. 5

¶Si enim per quatuor tertia, tria secunda multiplices: procreabis duodecim quinta. Nam ter quatuor, duodenarium constituunt: denominatio multiplicandi intrinseca, est ternarius, extrinseca vero est quaternarius: & multiplicantis numeri extrinseca denominatio est ternarius, & intrinseca binarius. Collectis igitur duabus intrinsecis denominationibus, reperies quinarium: quare numerus prouenienș ex talium fractionum multiplicatione, quinti nuncupationem habebit: denominabitur igitur numerus duodenarius, qui ex multiplicatione cōsurgit, duodecim quintæ: cuius numeri intrinseca denominatio est quinarius, extrinseca vero duodenarius, quæ si ad extrinsecam multiplicandi denominationem referatur, triplam proportionem generabis. & consimilis habetur proportio, si multiplicantis extrinseca denominatio ad vnitatem comparetur.

PRIMO NOTANDVM EST triplicem in hac specie multiplicandi modum inueniri. Primo modo contingit vt tota, quæ signa dicuntur, per gradus, qui integra appellantur, multiplicentur, aut per fractiones. secundo modo, gradus per fractiones possunt multiplicari. tertio autem modo, fractiones per fractiones multiplicantur. Si igitur primo modo fiat multiplicatio, numerus prouenieš sumet denominationem gradus aut fractionis. Verbi gratia: si decem signa, per viginti gradus multiplicentur, prouenienș numerus erit ducentorum graduum: q; si decem signa, per viginti minuta multiplicentur, crescens numerus erit ducentorum minutorum. etiam si quindecim tota per triginta tertia multiplicentur, numerus consurgens erit 450 tertiorum. & de cæteris pari modo. Triplex multiplicandi modus.

☞ In physica multiplicatione notabis, si gradus per gradus multiplices, prouenietē numerū esse graduū. si gradus per minuta, proueniūt minuta. si gradus per secūda, proueniunt 2. si gradus per tertia, proueniunt 3 &c. Si vero minuta per minuta, proueniūt 2. si minuta per secūda, pueniūt 3. si minuta per tertia, proueniūt 4. Itē si 2 per 2, proueniūt 4. & sic cōsequēter vtrarūq; denominationū numeris additis ad denominatorē producti. Quòd si milliaria per gradus, proueniūt milliaria. si milliaria per minuta gradus, pueniūt mi. milliariū. si mi. milliariū per grad⁹, pueniūt mi. milliariū, & si mi. milliariū per mi. gradus multiplicaueris, pueniēs numerus erit secundorum milliaris.

SECVNDO NOTANDVM EST si gradus per fractiones multiplicentur, numerum prouenientem appellationem fractionis habere. Exempli gratia. Si cētum gradus, per triginta minuta multiplicentur, consurgens numerus erit 3000 minutorum. Et si quadragintaquinque gradus, per quinquagintasex secunda multiplicentur, prouenienș numerus erit 2520 secundorum. Quòd si centum & viginti gradus, in quadraginta tertia ducantur, profluens numerus erit 4800 tertiorum: & in cæteris consimili modo est dicendum.

TERTIO NOTANDVM EST. Si fractiones per fractiones multiplicentur, numerum consurgentem appellationem ambarum fractionum obtinere. Exempli gratia. Si per quindecim minuta, quindecim secunda multiplicentur, consurget numerus

225 tertiorum. Nam minuti appellatio est vnitas, & denominatio secundi est binarius, & amborum simul ternarius: imò proueniens numerus compositam multiplicantis, & multiplicãdi denominationem sumit. Pari modo si viginti minuta per quindecim tertia multiplicentur, proueniet numerus 300 quartorum. Et si viginti tertia per triginta quinq; tertia multiplicentur, proueniet numerus 700 sextorum, & hoc pacto deinceps. Et secundum hunc tertium multiplicandi modum, diffinitum venit intelligendum.

6 ¶ Diuisio astronomica, est procreatio numeri eam denominationem habentis, quæ relinquitur ex subtractione denominationis minoris fractionis à denominatione maioris, qui eadem proportione extrinseca nuncupatione ad vnitatem se habet, qua diuidendus etiam extrinseca denominatione ad diuisorem. Hinc facile potest deduci quid sit astronomice diuidere.

¶ Nam si octo tertia, per duo minuta diuidantur, procreabuntur quatuor secunda: eo quòd subtracta minoris fractionis denominatione, quæ est vnitas, à maioris denominatione, quæ est ternarius, relinquitur binarius, à quo fractio (quæ dicitur quotiẽs) sumit appellationem: & in eadem se habet proportione numerus quotiens ad vnitatem extrinseca denominatione, qua diuidendus ad diuisorem extrinseca etiam denominatione: vtrobique enim quadrupla proportio inuenitur.

Triplex diuidẽdi modus physicales fractiones.

PRIMO NOTANDVM EST triplicem in hac parte diuidendi modum inueniri. Primo modo contingit signa per gradus, aut per fractiones diuidi, & ediuerso gradus per signa, etiam & fractiones. Secundo modo gradus per fractiones diuidũtur, & ediuerso. Tertio autem modo, fractiones per fractiones diuiduntur. ¶ Si igitur primo modo libet operari, pro numero diuidẽdo accipiatur is numerus cui extrinseca denominatio est maior, pro diuisore vero is cui minor est denominatio habeatur: & facta diuisione, modo assignato in quinto diffinito primi tractatus, numerus quotiẽs sumet denominationem integri, aut fractionis. Exempli gratia. Si duodecim signa per quatuor gradus diuidantur, prouenient tres gradus pro numero quotienti: etiam si duodecim gradus per quatuor signa diuidantur, numerus quotiens erit tres gradus. Quòd si duodecim signa per quatuor minuta diuidantur, numerus quotiens erit trium minutorum: ediuerso etiam si duodecim minuta per quatuor signa diuidantur, tria minuta producentur pro quotienti. Et pari modo in reliquis operandum est.

Secũdus modus.

SECVNDO NOTANDVM EST, si gradus per fractiones, vel ediuerso fractiones per gradus velles diuidere, numerus quotiẽs fractionis appellationem sumet. Exempli gratia. Si viginti gradus per quinque secunda diuidantur, numerus quotiens erit quatuor secunda: etiam ediuerso, si viginti secunda per quinq; gradus diuidantur, consurget pro quotienti numerus quatuor secundorum. Est tamen vnũ potissime considerandum in hac specie, q̃ si facta prima diuisione contingat aliquot esse residuum, id per sexagenarium est multiplicandum, & productum per diuisorem diuidendum, & numerus quotiens secundæ diuisionis, denominationem sequentis fractionis accipiet. quòd si adhuc secunda diuisione facta aliquod inueniri residuum contingat, id per numerum sexagenarium est etiam multiplicandum, & productum per diuisorem diuidendum: quo facto huius tertiæ diuisionis numerus quotiens, sequentis denominationem suscipiet: & consequenter hoc modo. Exempli gratia. Si nouem gradus per 4 minuta diuidantur, numerus quotiens erit 2 minuta, cum 15 secundis. Et si 12 secunda per 5 gradus diuidantur, numerus quotiens erit 2 secunda, cum vigintiquatuor tertijs. Et si quindecim gradus per septem tertia diuidantur, quotiens erit 2 tertia, cum octo quartis, 34 quintis, & 17 sextis: & adhuc aliquod est residuum, quod qualitercunque multiplicetur per sexagenarium ad sensum datum, non est possibile terminari diuidendo: quoniam (vt facile est reperire) facies circulationem in infinitum protensam. Tenendum igitur est pro documento, in hac parte tunc esse cessandum diuidere, cum in aliqua sequẽtium diuisionum, residuũ est æquale denominatione extrinseca, residuo pri-

Documẽtum.

mæ diuisionis. Alterum præterea in hac parte documentum obseruandum est, videlicet. Si facta multiplicatione residui primę diuisionis per sexagenarium, proueniens numerus non potest diuidi per diuisorem, est multiplicandus totus numerus productus per sexagenarium, & proueniens numerus per diuisorem diuidatur: & numerus quotiens sumet denominationem sequentis fractionis vnica interiecta. Documē tum.

TERTIO NOTANDVM EST, si fractiones per fractiones diuidantur, hoc dupliciter euenire, aut diuiduntur fractiones per fractiones eiusdem denominationis, aut per fractiones diuersarum denominationum. Si primo modo contingat, numerus quotiens integri nuncupationem habebit: & si residuum manserit, per sexagenarium numerum multiplicetur, & productus inde numerus per diuisorem diuidatur: quo facto, numerus quotiens, minuti denominationem habebit. Et consequenter iuxta prius dicta. Exempli gratia. Si 359 tertia per 45 tertia diuidantur, numerus quotiens erit septem gradus, 48 minuta, & 40 secunda. Si vero fractiones per fractiones diuersarum denominationum diuidantur, numerus quotiens sumet appellationem à numero relicto ex subtractione minoris denominationis fractionis à maiore fractionis denominatione. Verbi gratia. Si sex tertia per tria secunda diuidantur: vel sex secunda per 3 tertia, numerus quotiens erit duo minuta, quoniam subtracta minore denominatione fractionis (quæ binarius est) à maiore fractionis denominatione (quæ est ternarius) relinquitur vnitas, à qua numerus quotiens minuti denominationem sumit. Et si nouem sexta per tria decima diuidantur, quotiēs numerus erit trium quartorum. Si vero 13 minuta per 6 tertia diuidantur, consurget pro quotienti numerus duorum secundorum, & decem tertiorum: & in isto sensu vltimo, textuale diffinitum est intelligendum. Tertius partiendi modus in minuta physi.

¶ Operatio astronomica in progressione, & duplici radicum extractione, quadrata scilicet & cubica: est debita, ac proportionata operatio ad dicta in primo tractatu, sexto, octauo & nono diffinitis. 7

¶ Peculiares diffinitiones assignare pro progressione, & radicum extractione superuacaneum esse censemus: postquam parum, aut nihil differunt ab his quæ in primo tractatu dicta fuere: sub contracta igitur breuitate in hoc septimo & huius tractatus vltimo diffinito de his tribus speciebus differemus.

PRIMO NOTANDVM EST duplicem impræsentiarum progressionem inueniri, perinde ac in integris, videlicet arithmeticam, & geometricam: in quarum vtraque operandum est per additionem, vel conformiter ad duas regulas positas diffinito sexto primi tractatus. Vno tantum documento obseruato: scilicet, nullæ fractiones progressiuo ordine se habentes, diuersarum denominationum possunt esse, sed tantum vnius: si igitur duo minuta, tria, quatuor, quinq;, sex, quæ progressiuo ordine se habent, eodēmq; arithmetico disponantur ac decet, & simul addantur, aut per primam regulam in eis operetur, consurget summa viginti minutorum. Pari modo si vnum, duo, quatuor, octo, sexdecim secunda, recto ordine disponantur, postquam geometrico ordine se habent, operandum est per additionem, vel iuxta tenorem secundæ regulæ: & pro summa habebuntur triginta, & vnum secunda. In reliquis est eo modo faciendum. De physica. mi. pgressione. Documē tum.

SECVNDO NOTANDVM EST radicum extractionem in quadratis parum admodum differre ab ea quæ habita est octauo diffinito primi tractatus. Est tamen in hac parte istud documentum potissime obseruandum. Si aliquæ proponantur fractiones à quibus quadrata radix extrahi debeat, oportet (si diuersarum sint denominationum) ad fractiones eiusdem denominationis reducantur, ad eas inquam fractiones quæ à numero pari denominantur, vt sunt secunda, quarta, sexta & consequenter. Deinde operaberis quemadmodum in integris declaratum est: radix tamē reperta, subduplam denominationem habebit ad illam qua denominatur numerus cuius radicem quæris. Et si aliquod residuum esse contingat, id denominabitur eadem denominatione qua numerus cuius radicem quæris, denominatur. Exēpli gratia. Si à 493 sextis, quadratam extrahere cupis radicem, operaberis omnino ac in integris dictum est, & reperies pro radice 22 tertia, & residuum erit 9 sexta: radix enim à ternario, denomi- De quadra. extractio. i minu. physi. Documē tum.

nantur tertia, eo ꝙ numerus à quo radix extrahi debet, à 6 sumit denominationem.

De radicũ extractione in cubis documẽtũ.

TERTIO NOTANDVM EST radicum extractionem in cubis esse eo pacto extrahendam, ac in integris dictum est: hoc seruato documento, vt numerus cuius talis radix extrahi habet, in tres æquas partes sit secabilis: ꝙ si aliqua reperiatur radix, cuius radicem quæris cubicam, quæ in tres diuidi partes æquales non potest, reducatur ad eam fractionem quæ in tres partes æquas posset diuidi: deinde ab illa fractione cubicam extrahe radicem, modo ac arte signatis nono diffinito primi tractatus. Et radix inuenta sumet denominationẽ tertiæ partis numeri, à quo talis radix extrahitur. Exempli gratia. si à 27 quartis extrahere velles radicem, illa erit tria nona: eo ꝙ tertia pars 27 quartorum, est numerus 9. Et si à 216 quintis, cubam extrahas radicem, ea erit sex septuagesima secunda. Nam tertia pars 216, est 72. in cæteris eo pacto est operandum. Quòd si in mixtis secundum has tres recitatas species operari libet (si quæ dicta sunt in hoc tractatu debite intelligantur) facile admodum id facere potes.

TERTII TRACTATVS PRACTICAE FINIS.

DE FRACTIONIBVS, SEV MINVTIIS VVLGARIBUS, tractatus quartus.

Bias. Periãder

IN labore, constantiam esse adhibendam, præcipit Bias ille Prienensis, qui vnus ex septem Græciæ sapiẽtibus fuit. Vt igitur post cõstantem laborem, quietem adipiscamur (quæ pulchra res est, vt inquit Periander) inceptum continuabimus laborem. in hoc enim quarto tractatu, fractiones (quas minutias dicũt vulgares) enucleabimus. Istæ sunt fractiones quas potissime mercatores summopere venerantur, quarum opitulamine perquam multas diuitias consequuntur. Ne igitur mercatoribus habear inuisus, eis non abscondam, quas sunt consecuturi diuitias, hac parte intellecta: ait enim Pictacus, Ne diuitias abscondas, cũ veneris in eas. aperiam ideo per septem solum diffinita (postquam debitus se offert minutiarum locus) modũ operãdi in fractionibus eisdem.

Pictacus.

¶ Finis huius tractatus, est debita secundũ fractiones vulgares operatio. ¶ Seruit magnis mercatoribus, & ijs breuiter omnibus qui diuersis mercium fragmentis vtuntur.

DIFFINITA.

1 ¶ Numeratio in minutijs vulgaribus, est recta talium minutiarum repræsentatio. Et minutim numerare, est debite vulgares minutias repræsentare.

Nũerator

Denominator.

¶ Duo numeri potissime in hac parte sunt consyderandi, quorum alter numerator, alter vero denominator appellatur. Numerator, est numerus, qui integri partem, vel partes aliquotas repræsentat: & talis numerus facta breui linea venit desuper locãdus. Denominator, est numerus partium aliquotarum, integri denominationem repræsentans: & talis sub linea semper est scribendus. Exempli gratia $\frac{5}{3}$. Numerus ibidem figuratus repræsentat quinque tertia vnius integri. 5 enim significat numerum: & 3, dat numero denominationem. Si autem vnius integri quatuor septima scribere volueris, facies hoc pacto $\frac{4}{7}$. vnde eisdem in hac parte vtimur elementis, quibus primo tractatu vtebamur. quamuis alia eorum positione, atque vsu.

Fractio simplex.

PRIMO NOTANDVM EST aliquam impræsentiarum denominari fractionẽ: aliqua vero fractionũ fractio appellatur: & vtraq; istarũ est duplex, videlicet simplex, & mixta. Fractio simplex ea dicitur, cui vnica in recto est denominatio, siue in qua vnus tantum denominator inuenitur: & eo pacto venit repræsentanda: eius numerator in superiori parte locetur, sub quo suus denominator ponatur, inter quos parua linea mediet. Exemplum. Si vis scribere vnum secundũ, & vnum pariter tertium, similiter & duo quarta:id facies hoc pacto $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{4}$. Mixta autẽ fractio (vt ad præſentem materiam ſpectat) ea eſt, cui in recto plures denominationes ſunt: quemadmodum ſunt illæ quæ in præſentibus figuris oſtenduntur $\frac{7}{2}\ \frac{8}{5}\ \frac{5}{4}$:eodem modo $\frac{145}{3}\ \frac{232}{5}$. Prior iſtarum mixtarum fractionum eſt ſeptem ſecunda, octo quinta, quinq; quarta vnius integri:& poſterior eſt centum quadraginquinq; tertia, ducenta triginta duo quinta integri. Fractio fractionis ea eſt, quæ alicuius fractionis eſt pars aliquota:vt eſt vnum tertium vnius quarti:quod ſic habet repræſentari $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$. Omnis enim fractionis fractio, duas ad minus habet denominationes:quarum prior ſolum eſt in recto:cæteræ (ſi plures fuerint) in obliquo reperiuntur. Et illæ eo modo debent repræſentari:fractio quæ eſt in recto, in ſiniſtra parte ponatur, inter cuius numeratorẽ, & denominatorẽ parua linea mediet:aliæ autem fractiones, quarũ denominationes ſunt in obliquo, verſus dextram manũ locentur, abſq; lineę interpoſitione, ſolis punctis inſertis ſi plures fuerint. Exemplũ, ſcribatur vnum tertium vnius quarti iſto modo $\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$. Simili modo ſcribãtur quatuor ſecũda duorũ tertiorum:& hoc ſic $\frac{4}{2}\ \frac{2}{3}$. Item repræſententur tria quinta vnius ſecundi duorum tertiorũ, hoc pacto $\frac{3}{5}\ \frac{1}{2}.\ \frac{2}{3}$. Et de cæteris pari modo eſt dicẽdum. ℂMixta fractionis fractio ea eſt, quæ plures fractionũ fractiones intercipit:vt eſt tria ſecũda vnius tertij, quatuor quinta duorũ tertiorũ:quæ ſic habẽt repræſentari $\frac{3}{2}\ \frac{1}{3}.\ \frac{4}{5}\ \frac{2}{3}$. Facile eſt in multis alijs exempla aſſignare.

Fractio mixta.

Fractio fractiõis.

Fractio fractiõis mixta.

SECVNDO NOTANDVM EST maximã in ſimplicibus poſſe dari fractionem:minimã vero non. Illa dicitur maxima fractio, quę integri eſt maxima pars aliquota, videlicet medietas, quæ alio termino ſecunda dicitur:& quemadmodum non eſt dabilis minima pars aliquota (ſaltẽ in continuis) ita minima factio non eſt reperibilis:eſt tamẽ inter ſimplices fractiones idem ordo, qui & inter cõtinui partes aliquotas reperitur. Poſt medietatem, tertia eſt maior: deinde quarta, & conſequẽter. In mixtis autem nec maxima, nec minima eſt reperibilis fractio. Eſt inſuper conſyderandũ in mixtis fractionibus ſcribẽdis, eam latere ſiniſtro eſſe ponendã, quæ minoris eſt denominationis, quãuis maiorem numerũ efficiat:ea vero fractio in dextro latere locetur, cui maior eſt denominatio. Exẽpli gratia. Vis ſcribere duo tertia, ſeptẽ quarta: hoc modo veniũt diſponenda $\frac{2}{3}\ \frac{7}{4}$. Quando autem econuerſo ponerẽtur, nullum eſſet inconueniẽs:quẽadmodũ ſi in integris operãdo, frãcos ſiniſtra manu poneremus, ducatis dextra ſede affixis.

☞ Quantitas cõtinua quæ vel in lineis, vel ſuperficiebus, vel etiã corporib⁹ mathematicis cõſiſtit, ob varias atq; multiplices ſuas proportiones quãdo diuiditur, exigit vt nũeris fractis vtẽdum nobis ſit, ſi modo proportionum varietatẽ cognoſcere cupiam⁹: rem i primis neceſſariã omnibus iis qui diſciplinis mathematicis, imò & mechanicis artib⁹ operam ſuam locare velint: perutilẽ & iis, quibus negociationes quæcunq; ſtudio eſſe ſolent. id quod luce clarius patebit, vbi ad tractatum qntũ te cõtuleris lector, quẽ ſane citra hui⁹ operã intelligere nequeas.

TERTIO NOTANDVM EST tria eſſe in hac ſpecie documenta pro cognitione valoris fracti numeri, ſiue fractionis. Primum documentum. Quandocunq; numerator, & denominator alicuius ſunt æquales: talis fractio integro vno duntaxat valet. Exemplum $\frac{3}{3}\ \frac{4}{4}\ \frac{5}{5}$. Quælibet iſtarum trium fractionum integro valet:& ita adinuicem ſunt æquales. ℂSecundum documentum. Quotieſcunq; numerator fuerit maior denominatore, fractio valet magis integro:& hoc in ea proportione, qua numerator ad denominatorem ſe habet, vel per tot vnitates, per quot denominatorem excedit. Exemplum $\frac{7}{5}\ \frac{8}{3}\ \frac{6}{4}$. Quælibet datarum trium fractionum valet magis integro:prima vero in proportione ſuperbipartienti quintas:& ſecunda in porportione dupla ſuperbipartienti tertias: tertia vero in proportione ſeſquialtera. ℂTertium documentum. Si denominator fractionis eſt maior numeratore eiuſdem, talis fractio minus integro valet, per tot vnitates per quot datum numeratorem excedit. Exemplum $\frac{1}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{5}{6}$. Per vnitates in propoſito, integri partes aliquotas intelligimus.

Primũ documentũ.

Secundũ documentum.

Tertiũdo cumẽtum.

ℂReductio in vulgaribus minutijs, eſt integri, aut groſſioris minutiæ 2
in minutiam ſubtiliorẽ, vel ſubtilioris in integrũ aut groſſiorem cambitio. Reducere minutim, eſt integrum, aut groſſiorem fractionẽ in ſubtiliorem, vel ſubtiliorem in integrũ aut groſſiorem fractionem cambire.

ℂReductorium in vulgaribus fractionibus modum aggrediendo, qui præſentis tractatus baſis & fundamentum nuncupari poteſt, tria ſeriatim per tria notabilia diſcutiemus. In primo notabili, modum reducendi integra ad ſimplicem fractionem tibi voluntariam, & ediuerſo fractionem ad integra oſtendemus: ſimiliter reducendi groſſiorem fractionem ad ſubtiliorem tibi pariter voluntariam:& ediuerſo ſubtiliorem, ſcilicet fractionem ad grossiorem manifestabimus. In secundo notabili, declarabimus modum reducendi simplices fractiones diuersarum denominationum, ad fractionem vnius denominationis. ostendemus pariter reducendi modum earum fractionum, quæ fractiones fractionum dicuntur, ad simplicem fractionem. In tertio notabili declarabitur modus reducendi integra & fractiones: similiter integra & fractionum fractiones ad simplicem fractionem: & in fine aliquid de mixta reductione dicetur.

Integrorũ ad fractiones reductio.

PRIMO NOTANDVM EST, si integra ad fractionem tibi voluntariam reducere velles, numerus integrorum est multiplicandus per denominatorem talis fractionis, & proueniens numerus, reductionis summam ostendet. Exempli gratia. Vis reducere vnum integrum ad tertia, multiplica vnitatem per ternarium, & producetur 3, qui est numerus habitus ex reductione integri in fractionem. vnum enim integrum est tria tertia, & ediuerso. Pari modo si tria integra, ad quinta velles reducere, multiplicabis ternarium per quinarium, & producetur 15, qui est reductoria summa. Nam tria integra, quindecim quinta efficiunt, & ediuerso. Quòd si septem integra, ad sexta reducantur, prouenient quadraginta duo sexta, & consequenter hoc pacto.

Fractionũ ad integra reductio.

¶ Si vero aliquam fractionem tibi voluntariam, ad integra velles reducere: debes numeratorem talis fractionis per denominatorem eiusdem diuidere: quo facto, numerus quotiens, intentum propalabit. Exempli gratia. Vis reducere quindecim tertia ad integra? diuide numerum quindenarium, qui est numerator, per ternarium denominatorem datæ fractionis: & generabitur 5, qui est numerus integrorum: & sic habebitur quòd ex reductione quindecim tertiorum ad integra, quinque integra consurgent. etiam si triginta quinta ad integra reducere velles, habebis pro integrorum numero, senarium. quòd si quadraginta septem quinta, ad integra reducas, nouem integra generabis: & duo quinta pro residuo manebunt. Nam quotiescunque numerator fractionis per denominatorem eiusdem sic diuiditur, quòd aliquod esse residuum oportet, illud debet denominari à denominatione datæ fractionis.

47/5 (9 2/5

Fractio. grossi. ad subtiliorẽ reductio.

¶ Si autem grossiorem fractionem ad subtiliorem tibi voluntariam velles reducere, debes numeratorem grossioris per denominatorem subtilioris multiplicare, & numerum productum per denominatorem grossioris diuidere: quo facto, numerus quotiens propositum manifestabit. Exempli gratia. efflagitas reducere decem secunda ad tertia? multiplicabis numerum denarium per ternariũ, & proueniet numerus 30, quem per binarium denominatorem grossioris diuide: & pro quotienti habebis quindecim tertia: decem igitur secunda, reductorie, quindecim tertia efficiunt. Eodem modo si octodecim tertia ad quinta reducantur, multiplicabis 18 per quinarium, & proueniet 90, quem si diuidas per denominatorem grossioris fractionis, scilicet per 3, pro quotienti habebis 30 quinta: & sic reductorie, 18 tertia, 30 quinta constituũt. Quòd si viginti tertia ad quarta velles reducere, multiplicabis vigenarium per quaternarium, & proueniet numerus 80: quem si per ternarium diuidas, pro quotienti habebis viginti sex quarta: & residuum erit duo tertia vnius quarti. Nam quandocunque in tali reductione residuum esse contingat, id tale, fractionis fractio appellatur, quæ suam denominationem in recto sumit à denominatione grossioris fractionis, & alteram in obliquo à denominatione subtilioris fractionis habet.

[10]/2 } ad { 15/3

18/3 } ad { 30/5

20/3 } ad { 26/4 2/3 1/4

Subtilioris fractionis ad grossiorẽ reductio.

¶ Si autem subtiliorem fractionem ad grossiorem tibi voluntariam velles reducere: debes numeratorem subtilioris per denominatorem grossioris multiplicare, & numerum prouenientem diuidere per denominatorem subtilioris: quo facto, numerus quotiens propositum declarabit. Exempli gratia. Si duodecim quarta ad tertia velles reducere: multiplicabis duodenarium per ternarium, & proueniet numerus 36: quem per quaternarium diuide, & pro quotienti generabis nouem tertia. duodecim igitur quarta, nouem tertia, reductorie, efficiunt. Eodem modo si duodecim sexta ad quarta reducantur: numerus duodenarius per quaternarium est multiplicandus, & prouenit 48: quem si per denominatorem subtilioris fractionis, videlicet per senarium, diuidas, pro quotienti habebis octo quarta: quare deducitur duodecim sexta, octo quarta componere. Quòd si octodecim quarta ad tertia reducantur: numerum octodenarium per ternarium multiplicabis, & producetur numerus 54: quem per quaternarium diuide, & pro quotienti consurgent

9/3 multi. 12/4 diui. 36/p4 (9

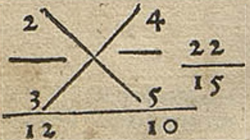
8/4 multi. 12/6 diui. 48/p6 (8

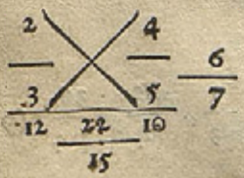
18/4 x2 54/3 13/3 2/4 1/3

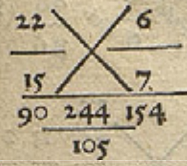
tredecim tertia, & residuum erit duo quarta vnius tertij. Nam quotiescunque in tali reductione aliquid est residuum, id fractio fractionis nuncupatur, cuius denominatio in recto sumitur à denominatione subtilioris fractionis, & denominatio in obliquo à denominatione grossioris habetur.

SECVNDO NOTANDVM EST, si duæ fractiones diuersarum denominationum, siue diuersos denominatores habentes (quod idem est) tibi proponantur, & eas ad fractionem vnius denominationis reducere velles, debes in primis denominatorem vnius per denominatorem alterius multiplicare, & numerus productus, denominator communis dicetur: deinde numeratorem prioris fractionis in denominatorem posterioris ducas, etiam numerator secundæ fractionis in denominatorem prioris ducatur: quo facto, numeri prouenientes ex ijs duabus multiplicationibus simul addantur, & proueniens numerus, numerator communis dicetur: quo terminato, datas fractiones in aliquam fractionem reductas habebis. Exempli gratia, proponantur tibi istæ duæ fractiones reducēdæ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$: in primis multiplicabis denominatorem prioris, qui est 3, per denominatorem posterioris, qui est 5, & proueniet numerus 15 pro communi denominatore. Postmodum, ad modum crucis numeratorem prioris in denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris in denominatorem prioris multiplicabis, & numeros prouenientes simul coniungas, & consurget numerus 22 pro communi numeratore. Habes igitur si $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ ad fractionem vnius denominatoris, siue vnius denominationis reducantur, ea erit $\frac{22}{15}$. Et si cognoscere velles quot sunt in vtraque datarum fractionum decimaquinta: oportet diuidas denominatorem communem in cuiuslibet fractionis denominatorem peculiarem, & numeri quotientes multiplicentur per numeratores proprios: quo facto, numeri producti intentum manifestabunt. Verbi gratia. vis cognoscere quot sunt in priori fractione decimaquinta? diuide communem denominationem videlicet 15, per 3, qui est denominator eiusdem prioris fractionis, & numerus quotiens erit 5, qui per numeratorem proprium, scilicet per 2, multiplicetur, & consurget 10. decem igitur in priori datarum fractionum dices decimaquinta inueniri. Et si in posteriori illarum fractionum velles cognoscere quot decimaquinta habentur, facies consimili modo. & reperies duodecim decimaquinta inueniri. Poteris hoc idem cognoscere longe facilius, si numeratorem prioris per denominatorem secundæ multiplices, & numeratorem secundæ per denominatorem prioris: nam si 2 numerator prioris fractionis per 5 denominatorem secundæ multiplices, prouenit 10. Et si numeratorem secundæ, puta quaternarium, per denominatorem prioris, scilicet per ternarium multiplices, duodenarium procreabis: in priori igitur fractione decem decimaquinta inuenies, & in posteriori duodecim. ¶ Si autem plures quàm duæ extiterint minutiæ, eo modo procedendum est. Dispositis in primis per ordinem fractionibus, denominatores adinuicem multiplicentur: sic vt primæ fractionis denominator per denominatorem secundæ multiplicetur: & proueniens ex multiplicatione numerus, per denominatorem tertię fractionis multiplicetur: & numerus productus in denominatorem quartæ minutiæ ducatur, & consequenter si plures fuerint fractiones: quo facto, proueniens ex talibus multiplicationibus summa, communis denominator appellabitur: deinde numeratorem communem sic produces, facta in primis duabus fractionibus operatione ac dictum est, illarum numeratorem communem per denominatorem tertiæ multiplicabis, & numerus productus per denominatorem quartæ multiplicetur: & consequenter hoc pacto: quibus terminatis numeratorem communem reperies, & ex consequenti completa erit reductio talium fractionum. Exempli gratia. Sint istæ tres fractiones $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$, quas ad vnam simplicem fractionem reducere cupis. Primo de duabus primis te expedias modo prius declarato: & habebis $\frac{22}{15}$. Deinde huius denominator in denominatorem tertiæ ducatur, & procreabitur 105, pro communi denominatorē: postmodum numerator istius fractionis in denominatorem tertiæ ducatur, & numerator tertiæ in denominatorem istius multiplicetur: deinde numeri producti simul addantur, & consurget numerus 244, qui communis numerator dicetur: habes igitur si istæ tres fractiones $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$ ad vnam simplicem fractionem reducantur, ea

Duarum fractionũ diuersarũ ad vnam reductio.







erit $\frac{144}{105}$. In cæteris consimili processu operaberis.

☞Quorundam incuria neglectus est modus reducendi fractionum fractiones, qui se ad hunc fere modum habet. Ducantur numeratores in numeratores, & denominatores in denominatores, & resultabunt fractiones vnius speciei seu simplices, ita vt ex ductu numeratorum, numeratores resultent: & ex denominatoribus, denominatores. Exemplũ, sint reducendæ istæ fractiones ad simplicem, videlicet $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$. $\frac{4}{5}$. multiplicabis bis vnum per 4, resultabit 8 numerator fractionis. Et deinceps ter quatuor per 5, habebis 60 denominatorem fractionis hac forma $\frac{8}{60}$.

☞Fractiones mixtæ, sic reducuntur ad simplices: in primis duc fractionis fractionem ad eandem ductu numeratoris in numeratorem. & (vt iam docui) denominatoris in denominatorem. deinde factis simplicibus fractionibus, eas ad vnam & eandem simplicem reducere potes per secundi notabilis doctrinam. vt $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{7}$. fiunt $\frac{2}{12}$ & $\frac{15}{35}$.

☞Generalis est & regula admodum vtilis & necessaria neglecta de abbreuiationibus fractionum. Est autem huiusmodi abbreuiatio nihil aliud, quàm paucissimis figuris repræsentare valorem fractionis alicuius, quæ multis figuris offertur, & quo pluribus, tanto fit obscurior intellectui. Difficilius enim apprehẽdet intellectus hanc fractionem $\frac{500}{1000}$, quàm si hoc modo repræsentetur $\frac{1}{2}$. cum tamen vtriusque sit æqua potestas. Vnde hanc notabis regulam. Quascunque oblatas fractiones diuide per maximum numerum, qui tam numeratorem, quàm denominatorem numeret, & quotientes faciliorem prodent fractionem. vt si datam fractionem diuidas per 500, habebis in quotiente pro numeratore vnum, & in altero quotiente pro denominatore 2, quos sic disponas $\frac{1}{2}$ id est, medietas. eodémque modo in reliquis omnibus operare. Altera item est regula, qua abbreuiari possint fractiones magnæ, nempe per dimidiationem continuam, si fuerint numeri pariter pares, aut per alterius digiti paris diuisionem, aut denarij subtractionem, aut cuiuscunque numeri diuisionem, qui modo vtrunque numeret numerum, videlicet numeratorem & denominatorem, sed hoc vno obseruato, vt numerus quotiens numeratoris pro numeratore: & denominatoris pro denominatore semper statuatur. exempla assignare facillimum est, quare transeo.

TERTIO NOTANDVM EST, si integra cum simplici fractione reperiatur, hoc pacto ad simplicem fractionem debere reduci. Numerus integrorum multiplicetur per denominatorem fractionis, & producto numero addatur fractionis numerator: & inde consurgenti numero supponatur idem denominator, virgula interposita. Exempli gratia. vis reducere 5 integra, & 4 tertia, ad simplicem fractionem? ipsa hoc pacto præsentetur 5 $\frac{4}{3}$: deinde multiplica numerum integrorum, puta 5, per denominatorem datæ fractionis, scilicet per 3, & consurget 15: cui numerator fractionis addatur, & proueniet 19, numerator communis, cui supponatur denominator illius fractionis, videlicet 3, & sub hac forma reductionem completam habebis $\frac{19}{3}$. ¶Quòd si integra, & plures simplices fractiones in vnam simplicem fractionem reducere velles: in primis de numero integrorum, & prima fractione modo iam tacto te absoluas: deinde fractionem simplicem consurgentem simul cum alijs sequentibus ad simplicem fractionem reduces, modo assignato in præcedenti notabili. ¶Si vero integra, & fractionis fractio simul reperiantur, & ea ad simplicem fractionem velles reducere, debes in primis fractionis fractionem ad simplicem fractionem (☞ modo prius neglecto, per nos reposito) reducere: postmodum operaberis vt iam dictum est. ¶Et si integra cum multis fractionum fractionibus comprehendantur: reductis ijs fractionum fractionibus ad simplices fractiones: operaberis modo iam dicto. ¶Ex omnibus his quæ dicta sunt sequitur. quibuscunq; fractionibus præsentatis, qualiter ad simplicem fractionem sunt reducendæ. Possunt enim prope infinitis modis combinationes fieri, & eisdem factis, videre qualiter ad integra sunt reducendæ, aut ad fractiones simplices, vel si simplices extiterint, qualiter ad subtiliores fractiones reducantur. De istis omnibus peculiarem sermonem efficere, minus vtile reputamus: quare ad reliqua eundum est.

3° ¶Additio in minutijs vulgaribus, est vulgarium fractionum in vnam summam collectio. Et addere minutim, est minutias vulgares in vnam summam colligere.

¶Nulla in præsenti diffinito se offert difficultas pro additione, si debite quæ in præcedenti diffinito dicta fuere, apprehendantur: nihilominus succincte aliquid de hac specie dicemus.

PRIMO NOTANDVM EST, si simplices fractiones eiusdem denominationis velles addere, sola numeratorum fiat additio, & sub numero producto, denominator talis fractionis locetur, virgula inserta siue interposita. Exempli gratia, si $\frac{5}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{3}$ vis addere, solos numeratores addas adinuicem, & producetur numerus 15, sub quo denominator, videlicet 3, ponatur hoc pacto $\frac{15}{3}$ & completam reperies additionem. ¶Si vero duæ, aut plures simplices fractiones diuersorum denominatorum proponantur addendæ, debes omnino eodem modo operari, ac declaratum est in secũdo notabili præcedentis diffiniti: sic vt denominatores earundem adinuicem multiplicentur, & prouenies numerus, communis denominator appellabitur: deinde numerator primę per denominatorem secundæ multiplicetur, & numerator secundæ per denominatorem primæ: quo facto, numeri prouenientes simul addantur, & consurget numerator communis duarum primarum fractionum: deinde consimili modo operando, in cæteras fractiones (si plures fuerint) procedendum est. Exempla dare, est facillimum.

Fractionum additio.

SECVNDO NOTANDVM EST, si plures fractionum fractiones proponantur addendæ, eas esse reducendas ad simplices fractiones, modo prius signato: deinde addantur ac dictum est. Nam si has duas fractionum fractiones velles addere: scilicet $\frac{4}{3}\frac{1}{2}$. $\frac{5}{4}\frac{2}{3}$. reducãtur prius ad has simplices fractiones $\frac{4}{6}$ $\frac{10}{12}$: deinde istæ duæ simplices fractiones simul addantur, & proueniet $\frac{108}{72}$, id est $\frac{3}{2}$, id est vnum integrum cum dimidio. Quòd si plures quàm duas fractionum fractiones addere velles: facies conformiter ad prius dicta in præcedenti diffinito.

Fractionũ fractiones quomodo addendæ.

TERTIO NOTANDVM EST, si integra & simplex fractio proponãtur addenda: debes numerum integrorum per fractionis denominatorẽ multiplicare, & productus numerus, numeratori fractionis addatur, & sic cõmunem numeratorem generabis: deinde sub eo denominator fractionis locetur: quo facto, terminatam additionem habebis, & hoc si vnica simplex fractio cum integrorum numero sumatur. ¶Quod si tres, aut plures simplices fractiones cum numero integrorum sumantur: te in primis ab integrorum numero, & prima fractione absolue: deinde genitam fractionem cæteris sequentibus modo iam dicto adijcies. Vbi autem integra, & fractionis fractio proponantur addenda: aut integra, & fractionum fractiones: vel integra, & simplex fractio cũ fractionis fractione: & consequenter mixtiones ordinando, operaberis iuxta ea quæ in præcedenti diffinito dicta fuerunt.

Integrorũ cũ fractio. additio.

¶Subtractio in minutijs vulgaribus, est debita vulgarium fractionũ à minutijs vulgaribus ablatio, vt relicta inde summa habeatur. Et subtrahere minutim, est debite vulgares minutias à fractionibus vulgaribus auferre. 4.

¶In huius diffiniti operatione certa inuenitur conuenientia cum operatione tertij diffiniti primi tractatus. Nam vt illic dictum est minorem numerum à maiore, vel ab æquali æqualem subtrahendum esse, & non maiorem à minore, impræsentiarum minor fractio à maiore, vel æqualis ab æquali subtrahi permittit: maiorem vero à minore deduci siue subtrahi, possibile nõ est. Et si petas, qualiter potest cognosci aliquam fractionem altera esse maiorem, æqualem, aut minorem: dico generaliter hac via posse dignosci. Reducantur ambæ fractiones, ad fractiones eiusdem denominationis. & tunc ea dicetur maior, cuius numerator maior est: & ea minor, cuius minor est numerator. Est insuper in hac materia pro documento obseruandum, eam fractionem maiorem esse, cui minor est denominatio, & eam minorem, cui maior, cæteris paribus. Nam vnum tertium, maius est vno quarto: & quartum, quinto: quintum, sexto: & consequenter.

Maioritas fract. penes qd attẽdẽda

☞ Cæteris paribus dicit, quod pertinet ad numeratores. si enim numerator maioris denominationis, id est subtilioris fractionis, fuerit multo maior numeratore minoris denominationis, id est grossioris (vt ante vocauit) fractionis, nullũ tum signũ esse potest illam fractionem esse minorem altera, scilicet in qua minor est denominatio. Certum enim est $\frac{7}{4}$ à $\frac{2}{3}$ non posse subtrahi, quãuis in hac grossior sit denominatio, in illa autem subtilior. Nam cum reducuntur ambæ fractiones ad sexta, videbis ex posteriore $\frac{4}{6}$, ex priore vero $\frac{10}{6}$ & $\frac{21}{46}$ prouenire. vnde id intelligendum est, vbi numeratores sunt aut æquales, aut saltem non multum excedentes.

Simpliciũ fract. subtractio.

PRIMO NOTANDVM EST, si duæ proponantur fractiones simplices, eũdem denominatorem habentes, quarum altera ab altera subtrahi debeat, hoc modo esse operandum: subtrahatur minor numerator vnius à maiore numeratore alterius (si inæquales extiterint) & residuum supra denominatorem ponatur, virgula interposita. Exempli gratia, si à $\frac{7}{3}$ subtrahas $\frac{5}{3}$, pro residuo $\frac{2}{3}$ habebis. Vbi vero numeratores & denominatores æquales extiterint, subtracta vna fractione ab altera, residuum nullũ erit. Quòd si duæ proponantur fractiones simplices, diuersos denominatores habẽtes, earum denominatores multiplicabis, & consurgens numerus, denominator communis erit: deinde ad modum crucis, prioris fractionis numerator in denominatorem posterioris ducatur, & numerator posterioris per denominatorẽ prioris multiplicetur: quo facto, si cõsurgentes numeri fuerint inæquales, minor à maiore subtrahatur, & residuũ supra communẽ denominatorem, linea intermedia, ponatur. Exempli gratia. si vis $\frac{8}{12}$ à $\frac{7}{3}$ subtrahere, multiplica in primis denominatorẽ prioris, puta 12, per denominatorẽ posterioris, videlicet per 3, & cõsurget 36 pro denominatore cõmuni: deinde multiplica prioris fractionis numeratorem, scilicet 8, per denominatorem posterioris, videlicet 3, & consurget 24. postmodum posterioris fractionis numerator, scilicet 7, per denominatorem prioris, vtpote 12, & proueniet numerus 84, qui maior est 24. ideo ab ipso numerus 24 subtrahatur, & residuum, videlicet 60, supra communem denominatorem ponatur, linea interposita, & factam subtractionem reperies.

Fractio fractionũ qualiter subtrahẽdæ.

SECVNDO NOTANDVM EST, si aliquam fractionis fractionem ab altera fractionis fractione subtrahere cupis: oportet prius ad simplices fractiones reducantur: deinde operaberis omnino ac dictum est in præcedenti notabili. Quòd si duæ fractionum fractiones proponantur, est eodem modo faciendum. Hoc dixerim propter differentiam quę reperitur inter fractionem fractionis, & fractionem fractionum. Nam proprie eam fractionem fractionis dicimus, cui vnica est denominatio in recto, & vnica in obliquo, vt est ista $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$. Eam vero fractionem fractionũ appellamus, cui in recto quidem vnica denominatio est, sed duæ, aut plures in obliquo reperiuntur. Exemplũ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. Nihilominus sæpenumero termini confunduntur, sic vt eam quæ fractionis fractio est, fractionem fractionum appellemus. Sed hac in parte de terminis contendendum non est.

Fractio fractiõis.

Fractio fractionũ

Fract. ab integris & ecõtra subtractio.

TERTIO NOTANDVM EST, si à numero integrorum aliquam simplicem fractionem subtrahere velles, vel econuerso: debet integrorum numerus per denominatorem fractionis, multiplicari. & si numerus productus fuerit maior numeratore fractionis, ab eo numerator talis fractionis subtrahatur: quòd si productus numerus minor extiterit numeratore fractionis, ab eo numeratore talis numerus subtrahatur: & semper vtroque modo residuum operis supra denominatorem ponatur, linea interposita. Eodem modo dicendum est, si ab aliquo numero integrorũ fractionis fractio subtrahi debeat, & ediuerso: facta prius reductione talis fractionis ad fractionem simplicem. Et si numerus mixtus ex integro & simplici fractione, proponatur subtrahẽdus ab aliqua simplici fractione: debes prius talem numerum mixtum in simplicem fractionem reducere, modo declarato in secundo diffinito. deinde operaberis iuxta dicta: & conformiter in cæteris operandum est, à prius dictis non discrepando.

☞ Subtractio in fractis numeris sic se habet, generaliter reducantur numeri ad eandem denominationem. tunc minor à maiori aut saltem æquali, subtrahatur. Quòd si numerus à quo fieri habet subtractio, sit integrorum & fractorum, nec possit fieri aliàs ſubtractio, accommodetur vnitas ab integris ad fractos numeros ſecundum proportionem, & tunc commoda erit ſubtractio. vt ſi quis vellet ſubducere $\frac{5}{4}$ de 13 & $\frac{5}{6}$, oportet in primis reducere fractiones ad eandẽ denominationem, fient de $\frac{5}{4}$, $\frac{15}{12}$. & de $\frac{5}{6}$, $\frac{10}{12}$. ſed quia 15 à 10 non poſſunt ſubtrahi, mutuetur vnitas de 13 integris, quæ valebit 12, quæ cum $\frac{10}{12}$ conſtituent $\frac{22}{12}$ à quibus ſubtractis $\frac{15}{12}$, manebunt 12 integra & $\frac{7}{12}$. Ex hoc facilis tibi erit & in alijs numeris qui vel integrorum tantũ, vel integrorum cũ fractionibus, & fractionibus fractionum offerantur, ſubtractio, ſi ſemper ad eandem denominationem fractiones omnes, modis ſupra notatis reduxeris.

¶Multiplicatio, eſt vnius ſimplicis fractionis procreatio: cuius nume 5
rator, & denominator ad ſuos multiplicandos denominatione extrin-
ſeca apprehenſos, in eadem ſe habent proportione, qua multiplicantes
etiam extrinſeca appellatione, ſe habent ad vnitatem.

¶Hæc diffinitio clara admodum ſe offert, intellecta diffinitione multiplicationis precedentis tractatus: & clarius longe apparebit in ſequentibus tribus notabilibus.

☞Multiplicationis huius vtilitas maxime conſiſtit in hoc, ꝙ cognoſcimus valorem fractarum fractionum: & item plurium fractionum diuerſarũ denominationum in eandem reductionẽ, vt ſecundo diffinito huius tractatus abunde viſum eſt. Nam ſi ignores quota pars vnius integri ſit hæc fractionum fractio $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$. $\frac{1}{4}$, multiplica denominatores in ſe mutuos, dicendo, ter quinque quater, ſunt 60. Et numeratores ſimiliter, dicẽdo, bis duo ſemel, ſunt 4, numerator 60 partium $\frac{4}{60}$, quę iã ſimplex fractio abbreuiata, dat $\frac{1}{15}$ id eſt vnam decimamquintã partem alicuius integri. Per hanc item multiplicationem poteris dimidiare quẽlibet numerum fractum, ſi multiplices eum per $\frac{1}{2}$: aut triſecare, ſi per $\frac{1}{3}$ & ſic conſequẽter. Aut ſi numerator ſit par, capiendo eius medietatem. ſi impar, duplando denominatorem. vt $\frac{5}{4}$ medietas eſt $\frac{5}{8}$. & $\frac{4}{5}$ medietas eſt $\frac{2}{5}$ &c.

Fractiõis ſimplicis multiplicatio.

PRIMO NOTANDVM EST, ſi vnica ſimplex fractio proponatur multiplicanda, eius duntaxat numerator eſt multiplicandus, ſub producto numero denominatorem propoſitæ fractionis ponendo. Exempli gratia, ſi $\frac{7}{3}$ proponãtur tibi duplanda: duplabis 7, numeratorem datæ fractionis, & producetur numerus 14, pro numeratore, ſub quo, 3 denominatorem pone: & talem inuenies cõſurgentem operationem $\frac{14}{3}$. Quòd ſi data illa fractio per 3 eſſet multiplicanda, prouenirent $\frac{21}{3}$. & ſi per 4 multiplicetur, conſurgerent $\frac{28}{3}$, & conſequenter hoc pacto. Si vero aliqua ſimplex fractionũ fractio proponatur multiplicanda: ſolum numerator rectus multiplicetur, & ſub numero producto, eius rectus denominator locetur, ceteris ſequẽtibus ſe habentibus ac prius. Exempli gratia. Vis duplare, ſiue per 2 multiplicare $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{4}$: duplabis 2, rectum numeratorem, & conſurget 4, ſub quo 3 rectum denominatorem pone, & quod ſequitur maneat intactum: & talis operatio manebit $\frac{4}{3}$ $\frac{1}{4}$. Vbi autem datam fractionis fractionem velles triplicare, eodem modo facere oportet: & conſurgent $\frac{6}{3}$ $\frac{1}{4}$. Et ſi quadrupletur, habebis $\frac{8}{3}$ $\frac{1}{4}$: & conſequenter hac arte procedẽdum eſt. Si autem aliqua mixta fractio, vel aliqua mixta fractionum fractio proponatur multiplicãda: fac conformiter ad iam dicta, multiplicãdo quamlibet fractionem ſimplicem incluſam in aliqua tali mixta fractione. Etiam vbi mixta fractio proponatur multiplicanda, quæ ex integro, & ſimplici fractione, & fractionis fractione componitur, eſt conformiter multiplicanda: ſic vt integrum, & fractio ſimplex, & fractionis fractio ad ſenſum datum multiplicentur. Nec opus eſt pro iſtis noua deprehendantur exempla.

Fractionum fractio quomodo mltiplicãda.

Præcedẽtium fra. in mixtis multiplicatio.

SECVNDO NOTANDVM EST, ſi duæ ſimplices fractiones eundem denominatorem habentes, proponantur multiplicandæ: numeratores earundem precíſe multiplicentur, & ſub numero producto, denominator talium fractionũ locetur. Verbi gratia, ſint iſtæ duæ ſimplices fractiones multiplicandæ $\frac{5}{3}$ $\frac{4}{3}$: multiplicabis 5 numeratorem prioris per 4, numeratorem poſterioris, & generabis numerum 20, ſub quo 3, qui vtriuſque fractionis eſt denominator, locetur: & talem habebis operationem $\frac{20}{3}$. Quòd ſi duæ fractionum fractiones, eundem denominatorem habentes præſentetur

Præcedẽtiũ eundẽ denominatorem habentiũ multiplicatio.

multiplicandæ:ſolos earundem numeratores adinuicem multiplicabis,& ſub numero producto,talium fractionum denominator locetur. Facile eſt in his exemplū aſſignare. Si vero duæ ſimplices fractiones,diuerſos denominatores habentes,proponantur multiplicandæ:fac vt prioris numerator per numeratorem poſterioris multiplicetur, & prouenïens numerus, numerator communis dicetur : deinde denominator prioris per poſterioris denominatorem multiplicetur,& conſurgens numerus, denominator communis erit. Exempli gratia, vis multiplicare $\frac{4}{3}$ per $\frac{5}{6}$,multiplica in primis dictarum

Præcedē- tiū fract. diuerſos denomi- natores habentiū multipli- catio.

fractionum numeratores,ſcilicet 4,per 5,& conſurget 20 pro communi numeratore : poſtmodum denominatores multiplicentur,videlicet 3 per 6, & proueniet numerus 18 pro denominatore communi:quo peracto,completam ſub tali forma reperies operationem $\frac{20}{18}$: & ſecundum iſtum operandi modum,diffinitum venit intelligendum. Si autem duas ſimplices minutiarū minutias,diuerſos denominatores habentes, multiplicare velles: eſt eodem modo operandum: ſic vt earundem numeratores multiplicētur,& productus inde numerus,numerator communis dicetur:poſtea earum denominatores etiam multiplicentur,& productum communis denominator erit. Exempli gratia. vis multiplicare $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{2}$: per $\frac{7}{6}$ $\frac{8}{9}$? Multiplica numeratores ipſarum,& conſurgent pro numeratore communi 1120:deinde datarum fractionum denominatores multiplicentur, & pro communi denominatore habebis 324 : quo peracto, ſub tali compoſitione reperits operationem $\frac{1120}{324}$. In cæteris huiuſmodi fractionibus pari arte operandum eſt.

Frac. per integra multipli- catio.

TERTIO NOTANDVM EST. Si aliqua ſimplex fractio proponatur multiplicanda per integra: debes per numeratorem talis fractionis, integrorum numerum multiplicare.& numerus conſurgens,numerator communis dicetur, ſub quo denominatorem fractionis locabis,& finitita erit operatio. Exempli gratia. vis multiplicare $\frac{7}{3}$ per 5 integra? multiplica 7,numeratorem fractionis per 5 numerum integrorum, & conſurget pro communi denominatore 35 ,ſub quo,3 denominator datę fractionis locetur, & completam ſub tali forma operationem inuenies $\frac{35}{3}$. Omnino eodem modo eſt operandum ſi integra per fractionem ſimplicem velles multiplicare. Si autem aliqua ſimplex fractionis fractio per numerum integrorum proponatur multiplicanda: operaberis multiplicando numeratorem fractionis per numerum integrorum, & ſub producto (qui dicitur numerator communis) productum ex multiplicatione denominatorum fractionis ponatur. Exempli gratia,ſi $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{4}$ per 9 integra multiplicentur:fac vt numerator datæ fractionis per 9 numerum integrorū multiplicetur,& proueniet pro numeratore communi 72. deindę denominatores datæ fractionis multiplicentur, & conſurget pro communi denominatore 8, ſub numeratore communi locandus: & talis in fine operatio reperietur $\frac{72}{8}$. Si autem in numeris mixtis velles operari : opus eſt

Mixtarū fract.mul tiplicatio

vtaris reductione,de qua diffuſe actum eſt diffinito ſecundo huius tractatus. Nam ſi aliquis numerus integrorum cum aliqua ſimplici fractione proponatur multiplicandus per alteram ſimplicem fractionem: opus eſt vt numerus ille integrorum ad ſimplicem fractionem reducatur:deinde operaberis vt dictum eſt. Exempli gratia. ſi 4 integra cū $\frac{4}{3}$ proponantur multiplicāda per $\frac{7}{5}$:oportet numerū integrorum,ſcilicet 4,per denominatorē fractionis prioris ipſi adiūctæ multiplicare,& producetur 12:cui numerator prioris fractionis,videlicet 4,addatur,& reſultabit numerus 16,pro numeratore communi,cui ſupponatur eiuſdem fractionis denominator,ſcilicet 3.& ſub tali forma factam reductionem habebis $\frac{16}{3}$:deinde hanc ſimplicem fractionem,quæ habita eſt ex reductione,multiplicabis per poſteriorem prius datarum fractionum,videlicet per $\frac{7}{5}$ & conſurget talis ſimplex fractio $\frac{112}{15}$. In cæteris mixtis fractionibus (ſi quæ dicta ſunt intelligantur) facile eſt operari.

☞ Nunquam integrorum numerus,cui fractiones adhærent, multiplicetur, niſi prius in ſuas fractiones reductus fuerit & additus numeratori. Sed ſi contingat nullas adeſſe fractiones numero integro multiplicando per fractionem ſimplicem,aut contrà,vt 18 per $\frac{4}{5}$,aut $\frac{4}{5}$ per 18 multiplicanda ſunt integra:integra per numeratorem fractionis, aut è conuerſo, productúmque diuidendum per denominatorem, & completam ha-

☞ Simplicē intellige eam quæ illi adhæret, & hoc fit ſi nūerus integrorū multiplicet per denominatorē, & ꝑducto addatur nūerator fractiōis. tandē ſubſcripto denoīatore, ſimplicem habebis fractionē cuiꝰ numerator per numeratorē, & denominator per denominatorē alterius multiplicent. & facta erit multiplicatio, cuiꝰ si nūeratorē per denominatorem diuiseris, ad integra reduces.

bes operationem. vt in dato exemplo dico quater 18 sunt 72, quod diuido per denominatorem 5, & habeo 14 integra & $\frac{2}{5}$.

¶ Diuisio, est vnius simplicis fractionis procreatio, cuius numerator & denominator ad suos multiplicandos denominatione extrinseca apprehensos, in eadem se habent proportione, qua multiplicantes etiam extrinseca appellatione se habent ad vnitatem. 6

¶ Hæc diffinitio nulla ex parte differt verbaliter ab ea quæ tacta est in præcedenti diffinito: nihilominus differt in modo operationis ex ea deducibili, qui ad modum crucis fieri habet. Sed hæc omnia diffusius in sequentibus notabilibus apparebunt.

Vnicę simplicis fra. partitio.

PRIMO NOTANDVM EST, si sola vna simplex fractio proponatur diuidenda: est multiplicandus solus eius denominator, & numerus productus sub numeratore propositæ fractionis locetur, & factum erit. Verbi gratia. si $\frac{5}{4}$ proponantur dimidianda, seu per 2 diuidenda: multiplicabis illius fractionis denominatorem per 2, & consurget 8, denominator communis, quem sub 5 numeratore datæ fractionis pone: & completa sub hac forma operatio manebit $\frac{5}{8}$: & si data illa fractio tripartiatur, seu per 3 diuidatur, consurget pro quotienti hæc fractio $\frac{5}{12}$. Si vero illam fractionē quadripartitam efficias, habebis pro quotienti $\frac{5}{16}$: & consequenter hoc modo. ¶ Si autem aliqua simplex fractionis fractio proponatur diuidenda: rectum denominatorem multiplicabis, & productum sub recto numeratore locetur, cæteris manentibus intactis. Verbi gratia. Vis dimidiare, vel per 2 diuidere (quod idem est) $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{5}$: dupla datæ fractionis rectum denominatorem, videlicet 2, & proueniet 4 sub numeratore recto illius fractionis ponendus, cæteris intactis manentibus: & operatio talis erit $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$. Quòd si illa fractio tripartiatur, inuenies $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{5}$. & si quadripartiatur, consurgent $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{5}$. & hoc pacto cōsequenter. ¶ Si vero aliqua mixta fractio, vel mixta fractionum fractio proponatur diuidenda: facies vniformiter ad ea quæ dicta sunt obseruando: sic vt de qualibet simplici fractione (modo iam dicto) te absoluas. Vbi autem mixta fractio offeretur diuidenda, quæ ex integro, & simplici fractione, & fractionis fractione componitur: fac cōformiter ad iam dicta: sic vt tres partiales fiant diuisiones, ex quarũ quotiētibus vnus quotiens mixtus consurgat.

Fract. fractio, quomodo partienda.

Mixtarũ frac. diuisio.

Diuersarũ fract. inter se partitio.

SECVNDO NOTANDVM EST, si duæ simplices fractiones eundem denominatorem, diuersósve habentes, proponantur diuidendæ: sic vt altera per alteram diuidatur: debes eas hoc pacto locare: fractio diuidēda in parte sinistra ponatur, & fractio per quam debet diuidi, in dextra manu locetur: deinde numerator diuidendæ fractionis in denominatorem alterius ducatur, & consurgens numerus, numerator cōmunis dicetur: postmodum denominator diuidendæ fractionis in numeratorem alterius fractionis ducatur, & proueniens numerus (qui denominator communis dicetur) sub communi numeratore ponatur, virgula interiecta: quo finito, completam operationē habebis. Exempli gratia. Vis diuidere $\frac{4}{3}$ per $\frac{5}{6}$? multiplica 4 per 6, & proueniet numerus 24, qui numerator communis appellatur: postmodum multiplica 3 per 5, & procreabis 15, communem denominatorem, quem sub communi numeratore locabis, linea interposita: quo peracto, talem operationem sub hac forma completam habebis $\frac{24}{15}$. Et in hoc sensu intelligendum est textuale diffinitum. ¶ Si autem duæ simplices fractionum fractiones eundem denominatorem, aut diuersos habentes assignentur diuidendæ: conformiter operandum est ad iam dicta, sic vt diuidenda fractio priori loco ponatur, & posteriori sede fractio, quæ diuisor appellatur, locetur, & ad modũ crucis prioris fractionis numerator in denominatorem posterioris ducatur, & numerus proueniens, numerator communis dicetur: deinde denominator prioris fractionis in numeratorem posterioris ducatur, & consurget denominator communis, locandus sub communi numeratore virgula interposita. Exempla assignare tu ipse poteris.

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{6} \qquad \frac{24}{15}$$

☞ Cōformiter ad iam dicta, intellige reducēdas esse fractionum fractiones ad simplicem & vnā, similiter & diuisoris fractionum fra-

Frac. per integra diuisio.

TERTIO NOTANDVM EST, si aliqua simplex fractio detur diuidenda per numerum integrorum: debes numeratorem talis fractionis pro communi numera tore recipere, & denominatorem eiuſdem per numerum integrorum multiplicare, & productus inde numerus ſub numeratore talis fractionis (virgula interiecta) ponatur: & facta erit operatio. Exemplum. Vis diuidere $\frac{4}{3}$ per 5 integra? fac vt 4 pro numeratore operis recipiatur: deinde multiplices 3 per 5, & conſurget 15 denominator communis, qui ſub 4 locetur, virgula interpoſita: & ſub hac forma operationem inuenies $\frac{4}{15}$. Si autem aliqua ſimplex fractionis fractio per numerum integrorum proponatur diuidēda: facies eodem modo, reductis prius fractionibus ad ſimplicem, ac dictũ eſt. Q uòd ſi detur ſimplex fractio per numerum mixtum ex integro, & ſimplici fractione diuidenda: oportet, antequam fiat diuiſio, quòd mixtus ille numerus ad ſimplicē fractionem reducatur, conformiter ad dicta in ſecundo diffinito huius tractatus: deinde operaberis vt dictum eſt. Pari modo eſt faciendum, ſi aliqua ſimplex fractionis fractio proponatur diuidēda per numerum mixtum ex integro & ſimplici fractionis fractione: & conſequenter in cæteris combinationibus mixtis, quæ fieri poſſunt, operaberis ad prius dicta reſpiciendo. Ex his omnibus quę in iſto, & in pręcedenti diffinitis dicũtur: facile comprehēditur fractiones vulgares decreſcere in multiplicatione: in diuiſione vero augmentum ſumere, quæ tamen videntur eſſe repugnantia multiplicationis, & diuiſionis naturis. Nihilominus ſi recte concipiantur, nulla inde oritur repugnanda.

ctiões ad eandem: deinde operare iuxta regulam.

Corollarium.

7 ¶Operatio vulgarium fractionum in progreſſione, & quadrata atq; cubica radicum extractione: eſt debita, ac proportionata operatio iis tribus operationibus, quæ ſexto, octauo, & nono diffinitis primi tractatus tactæ fuerunt.

¶Nullam impræſentiarum diſcretam diffinitionem aſſignamus pro progreſſione, aut pro radicum extractione, quemadmodum etiam in præcedenti tractatu fecimus: & ideo eſt, quia parum differunt operationes harum trium ſpecierum ab iis quæ in primo tractatu ponebantur: ideo ſub breuitate his tribus notabilibus abſoluentur.

De progreſſione fract.

PRIMO NOTANDVM EST duplicem in hac parte progreſſionem inueniri, ſcilicet arithmeticam, & geometricam. & in vtraq; earum operandum eſt per additionem, aut conformiter ad duas regulas tactas ſexto diffinito primi tractatus. Seruabis tamen in hac parte iſtud documentum. Omnes fractiones progreſſiuo ordine ſe habentes, in eodem denominatore communicant. Si igitur iſtæ fractiones proponantur, quæ arithmetica progreſſione ſe habent, videlicet $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{3}$: debes ipſas addere modo declarato tertio diffinito huius tractatus: & conſurgent $\frac{15}{3}$ pro ſumma. Et ſi iuxta tenorem prioris regulæ habitæ in primo tractatu ſexto diffinito velles operari: omnino eandem ſummam generabis. Q uòd ſi iſtæ fractiones proponantur, quæ geometrica progreſſione ſe habent, ſcilicet $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{8}{3}$ $\frac{16}{3}$, in ipſis operaberis per additionem modo iam declarato, & producetur ſumma $\frac{31}{3}$. & eadem habebitur, vbi iuxta ſecundę regulæ tenorem poſitæ in primo tractatu, velles operari.

Radicum extractio in quadratis. Documentum.

SECVNDO NOTANDVM EST, parum aut nihil radicum extractionem in quadratis in hac parte differre ab ea quæ viſa eſt octauo diffinito primi tractatus. Eſt tamen iſtud documentum potiſſime obſeruandũ, ſcilicet. Si diuerſorum denominatorum aliquæ proponantur fractiones, oportet ad vnam ſimplicem reducantur: deinde in eius numeratore radix quadrata inueniatur, pariter & in denominatore, vel ſaltem radix maximæ partis numeratoris & denominatoris, ad ſenſum habitum in primo tractatu. Exempli gratia. Si huius ſimplicis fractionis $\frac{25}{16}$ quadratam radicem cupis inuenire: operabere vt dictum eſt octauo diffinito primi tractatus, & inuenies $\frac{5}{4}$ pro radice illius fractionis. Nã 5, radix eſt quadrata numeratoris: & 4, radix quadrata denominatoris: quare dicere oportet quòd $\frac{5}{4}$ quadratam efficiunt radicem $\frac{25}{16}$. Vnde eſt aduertendum ꝙ omnis radix quadrata, quæ à ſimplici fractione extrahitur, etiam ſimplex fractio dicitur, cuius numerator eſt radix quadrata numeratoris, & denominator radix denominatoris: quare quotieſcũque proponetur aliqua ſimplex fractio, in cuius numeratore vel denominatore, non poteſt inueniri radix quadrata, ceſſandum eſt ab operatione. Si vero hæc simplex fractio $\frac{18}{13}$ præsentetur, ab ea radicem quadratã subtrahere non potes: ideo radix quadrata maximæ partis in qua potest inueniri, subtrahatur, & ea erit $\frac{4}{3}$: & pro residuo $\frac{2}{4}$ manebunt. dic in cæteris consimili modo.

Cubicæ radicis in fract. extractio.

TERTIO NOTANDVM EST eodem modo esse operandum in cubica radicum extractione, ac in primo tractatu dictũ est. nam si tibi proponatur hæc simplex fractio $\frac{67}{13}$, in qua radicem cubicam vis reperire: abstrahe in primis à numeratore radicem, deine à denominatore radix cubica extrahatur, & inuenies facta operatione pro radice $\frac{4}{5}$, & pro residuo $\frac{3}{5}$. Hinc deducitur radicem non esse cubicam, postquã aliquod est residuum. Quòd si nullum esse residuum contingat: tunc cubica est censenda. vt si à $\frac{125}{27}$ cubicam extrahas radicem, ea erit $\frac{5}{3}$, & nihil pro residuo manebit. Tenebis tamen in hac parte illud documentum, quod in præcedenti notabili habetur, vt nunquam radix extrahatur à numeratore, si in denominatore non sit radix reperibilis: nec à denominatore etiam abstrahatur, si in numeratore non sit reperibilis.

DE QVAESTIONIBVS, QVAS COMMVNITER LOQUENTES AUREAS DICUNT, TRACTATUS QUINTUS.

Chilo

ALienarum rerum admodum curiosum fastidi, ait Chilo philosophus sapientissimus. Ne igitur fastidio habear, quippe qui in re aliena viro philosopho longius æquo immorer, quam potero breuissime quæ sequuntur expediam: & ad edocendam illam scientiarum illustrissimam philosophiam, nostrum calamum dirigemus. Nam Aristonymus ille Chius, eos omnes qui circulares scientias sectantes, philosophiam negligebant, procis Penolopes comparabat: qua cum minime possent potiri, ad ancillas se conuertebant. Nihilominus iuxta Epicteti sententiam, parua primũ admirari oportet, si maioribus digni cupimus videri. Ponam igitur in hoc quinto, & huius libri vltimo tractatu vnam regulam fundamentalem, quam de tri, priores nostri nuncupauerunt: deinde duodecim conditiones subijcientur: postmodum aliquot quæstiunculas mouebo: demum labores nostros quadam ioculatoria, eadémque faceta regula finiemus.

Aristonymus.

Epictetus.

REGVLA FVNDAMENTALIS.

¶Tribus numeris per ordinem dispositis, scilicet emptionis, precij, & quæstionis: numerus medius, per tertium est multiplicãdus, & proueniens numerus, per primum est diuidendus: & numerus quotiens, propositæ quæstionis numerus nuncupabitur.

¶Hæc regula est huius tractatus fundamentum, & communiter de tri nuncupatur, hoc est de tribus in ea positis numeris, quorum primus emptionis seu rei emptæ numerus dicitur: secundus numerus precij appellatur: tertius autem propositæ quæstionis numerus nũcupatur, & ij tres numeri veniunt eo pacto locandi. Numerus emptionis, seu rei emptæ primo loco est ponendus: secundo autem loco, precij numerus ponatur: & tertio, numerus quæstionis locetur. Exempli gratia. Si quatuor vlnæ panni, tribus ducatis emantur, quæritur, quanti quadraginta vlnæ consimilis panni poterunt venundari? disponantur isti tres numeri, ac dictum est, & vt sequens forma ostendit. 4, 3, 40, deinde multiplica secundum numerum, scilicet 3, per tertium, videlicet 40, & prouenient numerus 120: quem per primum numerum diuide, videlicet 4, & quotiẽs numerus erit 30: qui quæstionem soluit. Habes igitur, si 4 vlnę panni, tribus emantur ducatis, 40 vlnæ consimilis panni triginta ducatis poterunt venundari. In cæteris huiusmodi quæstionibus, est consimili arte operandum.

CONDITIONES.

¶Primus numerus qui emptionis nuncupatur, cum tertio numero 1 qui quæstionis dicitur, debet re & nomine conuenire.

¶Defectu illius conditionis, ad hanc quæstionem non est respondendum, Si quinque equi, quadraginta emantur ducatis, quanti poterũt emi boues triginta? Non enim con ueniunt re ipsa equi, & boues. Eodem modo ad quæstionem respondendum non est, Si tres libræ croci, septem venundentur francis, quanti viginti vnciæ croci poterunt venundari? Non enim conueniunt in nomine, vnciæ cum libra. Nihilominus, si ad vncias, libræ reducantur, sic vt primum & tertium numerum eiusdem denominationis efficias, ad quæstionem poteris respondere.

2 ¶Numerus secundus, & quartus qui ex operatione producitur, debent re & nomine conuenire.

¶Ex effectu huius cõditionis, male respondetur ad hanc quæstionẽ, Si tres vlnæ panni, scutis quatuor venundentur, quanti venundabuntur nouem vlnæ consimilis panni, dicendo 420 duodenis venundari, quamuis ita sit. nam duodecim scuta quibus nouem vlnæ venundabuntur, 420 duodenos efficiunt: debet igitur quartus numerus nomine & re correspondere secundo.

☞Scuto vni, vt in precedẽtibus, 35 duodenos assignat non 41 vt hoc tempore fieri solet, alioqui ꝓ 420 reponẽdi essent 492 duodeni, sexta ferè parte addita. idem emenda in cõditione quarta.

3 ¶Talis geometrica proportio debet esse inter secundum & quartum numerum, qualis inter primum & tertium habetur: & talis debet esse geometrica proportio inter tertium, & quartum numerum, qualis inter primum & secundum reperitur.

¶Exempli gratia, si quinque vlnæ panni, viginti venundentur ducatis, quanti poterunt venundari consimilis panni duodecim vlnæ? dabis igitur, si per regulam opereris, pro quarto numero 48 ducatos: talis enim est proportio secundi numeri, puta 20, ad quartum, videlicet 48, qualis inter primum, & tertium reperitur: vtrobique enim est proportio subdupla superbipartiens quintas. Etiam talis est proportio inter tertium & quartum numerum: qualis inter primum & secundum reperitur: nempe vtrobique subquadrupla proportio habetur.

4 ¶Si numerus diuidendus fuerit diuisore minor, in tot partes resoluatur, vt per diuisorem diuidi permittat: deinde per diuisorem diuidatur, & quotiens, quartum numerum declarabit.

¶Exempli gratia, si triginta capi, tribus scutis venundentur, quæritur, quanti quatuor capi consimilis valoris poterunt venundari? multiplicabis igitur secundum regulæ tenorem, tertium numerum, videlicet 4, per 3 secundum numerum, & proueniet 12, qui per primum, videlicet 30, diuidi non potest: ideo numerus 12, qui scutorum dicitur, in duodenos resoluatur: & procreabis numerum 420, quem per primum numerum diuide: & numerus quotiens, qui quartus nuncupatur, 14 duodenorum erit. Habes igitur si triginta capi tribus scutis venundentur, 4 consimiles capi, 14 duodenis venundabuntur. Et si dicas, id quod dictum est, secundæ conditioni obuiare, in qua diximus numerum secundum debere correspondere quarto re & nomine: dico illud intelligendum fuisse, vbi numerus productus maior numero primo seu diuisore fuisset, sic vt nullam resolutionem pateretur.

☞Ad cognoscẽdũ ánne eadẽ sit ꝓportio primi ad tertium & ad secundum quę est secũdi ad quartũ & tertij ad quartũ, accipiãtur ęque multiplices nũeri ad primũ & tertiũ, itémq; æque multiplices ad secũdũ & quartũ, fuerit'q; multiplex primi, sic se habens ad multiplicẽ secũdi, sicut multiplex tertij, ad mltiplicẽ quarti, quãtum vel ad additionẽ vel diminutionẽ aut æqualitatem attinet, erit proportio primi eorũ ad secundũ sicut tertij ad quartũ: queadmodũ habet 6 diffinitio 5 lib. elementorũ Euclidis, & Cãpanus super 16 eiusdẽ de quãtitate cõtinua. idem demonstratur in numeris lib. 7 propositione 14.

5 ¶Si facta diuisione aliquid fuerit residuum, id est resoluendum in numerum, qui per primum diuidi possit: & si ex secũda diuisione aliquid extiterit residuum: id etiam in numerum resoluatur, qui per primum diuidi permittat: & toties residui fiat resolutio, pariter & diuisio, vsquedum nullum tale deprehendatur.

¶Exempli gratia, si 4 vlnæ panni, 5 scutis venundentur, quanti 23 consimilis venundabuntur? facta igitur multiplicatione tertij numeri per ſecundũ, conſurget numerus 115, qui ſi per primum diuidatur: numerus quotiẽs erit 28. & ſuperſunt 3 ſcuta diuidẽda, quæ in duodenos reſoluantur, & procreabis 105 per 4 diuidẽdos, & numerus quotiens erit 26 duodeni, & reſiduum eſt vnus duodenus, qui in turonos reſoluatur, & 12 habebis: quos ſi per 4 diuidas, numerus quotiẽs erit 3, nullo reſiduo manente. Habes igitur, ſi 4 vlnæ panni, 5 ſcutis venundentur, 23 vlnæ conſimilis panni 28 ſcutis cum 26 duodenis, & 3 turonis venundabuntur.

¶Si ſecundus ex integro, & fractione fuerit mixtus: debet antequam 6
per regulam operetur, in aliquam ſimplicem fractionem reſolui: deinde
operatio fiat.

¶Exempli gratia, ſi tres vlnæ panni venundentur ſcutis 2 $\frac{3}{4}$, quanti ſeptem vlnæ conſimilis panni poterunt venundari? debes igitur antequam opereris ſecundum regulam fundamentalem, reſoluere ſecundum illum numerum qui componitur ex integro & fractione: quod facies ſecundum quod declarauimus in ſecundo diffinito præcedentis tractatus: & inuenies $\frac{11}{4}$, deinde operari oportet iuxta tenorem regulæ, multiplicando illam ſimplicem fractionem per tertium numerum, videlicet per 7, & producetur numerus $\frac{77}{4}$, quem per primum numerum, ſcilicet 3, diuide, & numerus quotiẽs erit $\frac{77}{12}$, qui quartus numerus nuncupatur. Ex quibus omnibus patet, quod ſi tres vlnæ panni ſcutis 2 $\frac{3}{4}$ venũdentur, 7 vlnas venũdari $\frac{77}{12}$ ſcutis, quæ 6 ſcuta efficiunt, cũ $\frac{5}{12}$ vnius ſcuti.

¶Si ſecundus numerus ex integro & ſimplici fractione, & fractionum 7
fractione extiterit compoſitus: reducendus eſt ad aliquam ſimplicem
fractionem: deinde fiat operatio ſecundum fundamentalis regulæ teno
rem.

¶Exempli gratia: ſi 7 vlnæ panni venundentur ſcutis 7 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{1}{3}$ ſcuti, quanti venundabũtur 15 vlnæ eiuſdem panni? Reducatur fractionum fractio primum ad ſimplicem fractionem, multiplicando numeratores in ſe, & denominatores in ſe etiam, & creabitur talis ſimplex fractio $\frac{4}{12}$. deinde hæc fractio priori addatur, multiplicando numeratorẽ vnius per denominatorem alterius, & econuerſo, & numeri ex multiplicationibus producti ſimul addantur, & numeratorem additionis habebis: poſtmodum denominatores illarum fractionum per ſe multiplicentur, & communis denominator creabitur: quibus factis, compoſitam ſub tali forma operationem habebis $\frac{36}{36}$. Sed quoniam omnis illa fractio valet integrum, cuius numerator denominatori eſt æqualis, ideo non opus eſt alia ſeptem integra ad fractiones reducere: addatur igitur id integrum alijs 7, & creabitur integrorum, ſiue ſcutorum numerus 8, per quem tertium numerum, ſcilicet 15, multiplicabis, & proueniet 120, quem per primum numerum diuide, videlicet per 7, & numerus quotiẽs ſiue quartus numerus productus erit 17 ſcutorum cũ $\frac{1}{7}$ parte vnius ſcuti: habes igitur, ſi 7 vlnæ panni venundentur 7 ſcutis, & $\frac{2}{3}$ cum $\frac{4}{4}$ $\frac{1}{3}$ ſcuti, 15 vlnæ conſimilis panni venundabuntur 17 ſcutis cum $\frac{1}{7}$ parte vnius ſcuti.

¶Si in primo vel in tertio numero, aut in ambobus fractionem eſſe cõ 8
tingat: oportet illos numeros ad ſimplices fractiones reduci: deinde ſe-
cundum regulam poteris operari.

¶Exemplum, ſi tres vlnæ panni, cum $\frac{3}{5}$ vnius vlnæ, 4 emantur ſcutis: quanti poterunt 5 vlnæ cum $\frac{3}{4}$ venundari? Antequam reſpondeas ad quæſtionem, oportet primum numerum in fractionem ſimplicem reſoluere, videlicet in $\frac{18}{5}$ vnius vlnę: deinde tertius numerus in fractionem etiam ſimplicem reſoluatur, ſcilicet in $\frac{23}{4}$. quo facto, per 4, ſecundum numerum, tertius multiplicetur, & creabuntur $\frac{92}{4}$. quæ ſi per primum diuidantur, iuxta ea quæ docuit ſecundum notabile 6 definiti 4 tractatus, ſcilicet $\frac{18}{5}$ numerus quoties erit $\frac{460}{72}$ quæ 6 scuta efficiunt cum $\frac{28}{72}$, id est $\frac{7}{18}$ scuti, quibus 5 vlnæ cum $\frac{3}{4}$ venundabuntur. Consimili modo operandum est, vbi in primo numero ponitur fractio, non posita in tertio, etiam si in tertio habeatur, non habita in primo.

9 ¶ Si cuilibet trium numerorum fractionem addi contingat: quilibet eorum ad simplicem fractionem reducatur: postmodum per regulam opereris.

¶ Exemplum, si 6 vlnæ panni, cum $\frac{2}{3}$ venundentur 6 scutis, cum $\frac{3}{4}$: quanti venundari poterunt 15 vlnæ consimilis panni, cum $\frac{4}{5}$? Ad hoc faciundum oportet resoluantur primo illi tres numeri in simplices fractiones, & inuenies pro primo numero $\frac{20}{3}$. pro secundo $\frac{27}{4}$. pro tertio $\frac{79}{5}$. deinde multiplica secundam harum trium fractionum per tertiam, scilicet numeratores in se: & denominatores in se: & prouenient $\frac{2133}{20}$, quæ si per primam fractionem diuidantur, consurgent pro numero quotiente $\frac{6399}{400}$ quæ 15 scuta efficiunt, cum $\frac{399}{400}$ vnius scuti, quibus 15 vlnæ cum $\frac{4}{5}$ venundabuntur.

10 ¶ Si cuilibet trium numerorũ simplex fractio & fractionis fractio adesse contingat: quilibet ad simplicem reducatur fractionem. Deinde operaberis, vt dictum est in præcedenti conditione.

¶ Exempli gratia, si 3 vlnæ panni cum $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{9}$. venundentur 5 scutis cum $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$. scuti: quanti poterunt venundari 15 vlnæ consimilis panni cum $\frac{4}{5}$ & $\frac{6}{5}$ $\frac{1}{3}$? Debet quilibet illorum trium numerorum, postquam ex numero integrorum, & simplici fractione, & fractionis fractione componitur, ad simplicem fractionem reduci, secundum quod declaratum est in præcedenti tractatu diffinito secundo: & habebis pro primo $\frac{274}{72}$. pro secundo $\frac{280}{48}$. & pro tertio $\frac{753}{45}$: deinde operaberis omnino taliter, ac in præcedenti conditione operatum est: & facillime poteris quartum numerum inuenire. videlicet 25 scutorum, 22 duodenorum, & 8 turonorum cum $\frac{116}{137}$ vnius turoni.

11 ¶ Si duo primi numeri conuerso modo ponantur, ita vt numerus qui primo loco poni deberet, secundo ponitur: & econtra, qui secundo deberet poni loco, in primo reperitur: debent hoc pacto ordinari, vt primus & tertius correspondeant. Deinde per regulam positam poteris operari.

¶ Verbi gratia, si talis tibi proponatur quæstio, scilicet si 5 scutis, 4 vlnæ panni venundantur: quanti 7 vlnæ consimilis panni poterunt venundari? Notum enim est primum numerum non correspondere tertio re, & nomine: eo quòd primus est numerus precij, & tertius rei venundandæ. Antequam igitur secundum regulam opereris, hoc modo quæstionem illam formabis. si 4 vlnæ panni, 5 venundantur scutis: quanti 7 vlnæ consimilis panni poterunt venundari? Nolo tamen negare sæpenumero quæstiones debite formari, vbi tamen primus numerus est precij, & secundus emptionis, siue rei emptæ numerus appellatur. Exempli gratia, Si 8 scutis emantur 5 vlnæ panni, quæritur, quot scutis poterunt emi vlnę 7? & quamuis dictum sit in principio primum numerum esse emptionis, & secundum precij: id intelligas sic, quòd antequam fiat operatio per regulam, oportet quòd numerus primus sit emptionis, & secundus precij, tertius autem quæstionis.

12 ¶ Si loco primi numeri tertium numerum (qui dicitur quæstionis) ponas: & econtra, loco tertij primum ponas numerum: & loco secũdi, quartus numerus productus (quem quotientem appellamus) locetur, & secundum regulam opereris: habebis pro quarto numero secundum numerum datorum.

¶ Exemplum, 4 vlnæ, 6 emuntur scutis: quanti poterunt emi 10 vlnæ eiusdem panni? Si vis per regulam operari, reperies pro quotiente, siue pro quarto numero 15. fac igitur vt numeri modo dicto trāsmutentur, & talē formabis quæstionē, si 10 vlnæ panni, 15 emuntur scutis: quæritur quanti 4 vlnæ consimilis panni poterunt emi? reperies enim secundum regulam operando, pro numero quotiente, 6: qui prius secundus numerus erat. Et si hæc conditio in tuis operationibus obseruetur, poteris secure dicere operationes bene valere. Ideo pro tuarum operationum probatione hanc duodecimam cōditionem tenebis. ¶ Hæc sunt 12 conditiones, regulæ de tri pertinentes, quas si recte noueris, ad omnem fere quæstionem facili animaduersione poteris respondere. Vt tamen vberiorem in hac materia habeas notitiam, infra positas quæstiones consyderabis, quibus longe promptior in hac parte euadere possis. & quamuis plures assignari possent quæstiones, hæ tamen pro huius artis intellectione sufficiunt.

QVAESTIONES.

ANIMOSVM MILITEM, dux quidam pro seruitio vnius anni accepit, cui promisit se daturum, si per totum annum deseruiret, 100 scuta: vnum equum, & arma vni militi competentia: completis autem tribus mensibus, non amplius dux ille milite eguit. sed pro laboribus trium mensium vnum equum, & arma ei contulit: & dixit, accipe hunc equum, & hæc arma pro laboribus, & vade, & hic à duce abeundi facultatem accepit. Quæritur nunc, quanti equus, & arma valebunt? Respondetur. Videbis quot remanent menses pro vnius anni complemento, & inuenies quòd 9. in quibus miles si seruiuisset, 100 scuta haberet: dispones igitur illa secundū regulam de tri, dicendo, si 9 menses dant 100 scuta, quot dabunt tres menses? & si operaberis per regulam, reperies equum, & arma simul 33 scutis, 11 duodenis, cum 8 turonis valere. 1

MERCATORES TRES, emerunt 20 equos, 200 scutis. primus tamen dedit 80 scuta, secundus 70. tertius 50: & superlucrati sunt 60. Quæritur, quantum lucri quilibet pro sua parte secundum proportionem pecuniæ positæ habebit? Respōdetur. Tenebis pro communi diuisore, summam scutorum positorum, videlicet 200: deinde per lucrum, pecuniam positam à primo multiplicabis: & productum per diuisorem diuide, & numerus quotiens ostendet lucrum eiusdem. Idem facies de secundo, pariter & tertio. Primus igitur pro sua parte reperiet 24 scuta: secundus, 21. tertius vero, 15. 2

ADOLESCENTES TRES, in foro hora septima, eadémque matutina, reperiuntur oua vendentes: quorum primus, 8 duntaxat habet: secūdus, 17. tertius, 26. est tamen ab eorum magistris illis iniunctum, vt non maiori precio vnus vendat sua oua quàm alius, & cum hoc tantam pecuniarum summam vnus apportet ac alius, nec magis nec minus. Respondetur. Potest eo modo euenire, vt videlicet hora septima veniant mercatores empturi oua, qui pro turono quinque habebunt, sic quòd primus iuuenis, qui 8 oua habebat, 5 illorum dedit pro turono, & illi remanserūt 3: & secundus, qui 17 habebat, habuit ex 15 illorum, 3 turonos, & 2 retinuit oua: tertius autem, qui 26 tenebat, vendidit 5 turonis 25 illorū, & vnum remansit illi ouum: postmodum hora vndecima, alij venerunt mercatores vt emerent oua, qui cum pauca reperissent, pro quolibet ouorum, 2 exhibebant turonos: & sic primus iuuenis vendidit sua 3 oua quæ retinuerat, 6 turonis: & secūdus sua duo oua 4 turonis. tertius ouum quod remansit, duobus vendidit turonis: & ita patet qualiter eodem precio sua oua vendiderunt: & quilibet apportabit suo magistro septem turonos ex venditione suorum ouorum. 3

TRES socij vineam fodientes, thesaurum repererunt: sic ꝙ primus tertiam partē in amphora ferrea inuenit: secundus quintam partem in amphora lapidea reperit: tertius autē in terrea amphora residuū thesauri, quod est 1000 scuta, inuenit. Quæritur, quot erunt scuta in amphora terrea, & quot in lapidea, quot pariter in toto reperiētur thesauro? Respondetur. Multiplicabis duos primos denominatores in se, videlicet 3 in 5, & creabitur 15. à quo vtrūq; subtrahe denominatorem: & residuū scilicet 7, tuus erit diuisor: multiplicator autem erit numerus scutorū repertorū à tertio in amphora ter- 4 rea, videlicet 1000. Postea per multiplicatorē 5, qui quinta 15 pars est, multiplicabis: & proueniet 5000. quē per diuisorē diuide, scilicet per 7. & quotiēs numerus erit 714 scuta, cum 10 duodenis: quæ tertia pars thesauri reperti in amphora ferrea dicuntur. Postremo per multiplicatorem 3, qui est tertia 15 pars, ducātur: & habebis 3000. qui per diuisorem diuidantur: & numerus quotiēs erit 428 scuta, cum 20 duodenis: quæ quintam efficiunt thesauri partem in amphora lapidea à secundo socio repertam. Si igitur hos tres addideris quotientes: inuenies totum thesaurum fuisse 2142 scuta, cū 30 duodenis.

714	scut.	10	duode.
428		20	
1000			
2142		30	

5 EX NOSTRA castella quædam nauis discessit Cimbriam versus: mare autem quod est nauigationis medium, continet 992 milliaria: quorum quolibet die, 50 pertransit: & quauis nocte (tempestate occurrente) per 19 milliaria retrocedit. Quæritur per quantum tempus manebit antequam in Cimbria erit? Respondetur. Nox venit à die subtrahenda, hoc est milliaria nocturna à diurnis milliaribus subtrahantur: & numerus remanēs, qui est 31, erit operationis diuisor, & diuidendus numerus, erit 992. quem per diuisorem diuide, & pro quotiente reperies 32 dies, per quos manebit nauis antequam Cimbricis oris appulerit.

6 VNVS mercator dedit seruitori suo 994 scuta, quibus emeret equos eiusdē precij, boues etiam eiusdem valoris, & arietes similiter: ei'q; præcepit ꝙ non habeat plures equos, quàm boues, vel arietes. Quæritur quot habebit equos? Respōde. Debes primo cognoscere quanti venūdetur equus, & quanti bos, & quanti aries: deinde precia illorum simul addantur, & proueniens numerus, operis diuisor erit: per quem si 994 scuta diuidas, propositum reperies. Verbi gratia. Venundetur equus 10 scutis, & bos 3: & aries, 1. quæ si simul addantur, component 14, qui erit diuisor, per quem, 994 diuide: & quotiēs erit 71. & remanebit nihil. habebit igitur 71 equos, totidem boues, etiam arietes.

7 EX COMPOSITO quidam fur regium intrauit sacellum ducatis plenū, inuenit'q; eos sub tecto: cúmq; egredi conaretur, ab vno regis ostiario deprehenditur, cui mediam ducatorum partem obtulit, vt ab eius manibus liber efficeretur, ostiarius vero quadam pietate motus, ex pecunia recepta, 80 ei reddidit ducatos, eúmq; abire permisit: deinde paulopost à secundo regis ostiario arripitur, cui etiam eorum qui remanserant ducatorum medietatem præsentauit, quam cum ostiarius recepisset, liberalius egit cum eo, & ex accepta summa, 50 ducatos eidem furi reliquit: postremo autem à tertio regis ostiario deprehenditur, cui etiam ex relictis in sacculo ducatis medietatem contulit, ex qua ostiarius quatuor & 20 reddidit ducatos: itaq; extra regiam fur reperitur habens in sacculo ducentorum ducatorum summam. Quæritur iam, quanta fuerat ducatorum in sacculo summa reperta? Responde. A 200 ducatis manētibus furi in fine, veniunt subtrahendi quatuor & viginti, quos tertius ostiarius reddidit, & residui erunt 176, quos duplabis, & prouenient 352, à quibus 50 ducati subtrahantur, quos secundus ostiarius reddidit, & manebunt 302. quos duplabis, & consurget 604: à quibus subtrahe 80 ducatos, quos primus ostiarius reddidit, & residuum erit 524. quod duplabis, & prouenient 1048 ducati, quos in sacculo fur ille repererat.

8 SVNT IN exercitu 5000 equites, & pedites 10000: inter quos 1000 scutorum summa eo modo habet distribui, sic quòd vbi pedes 3 recipiat scuta, miles 7 habebit. Quæritur quantā scutorum summā equites recipiēt, & quantam pedites? Responde. Numerus equitū per numerū scutorū (quē quilibet respectu peditū recipere debet) multiplicetur, scilicet per 7, & proueniet 35000: deinde peditū numerus per suū numerum, videlicet per 3 multiplicetur, & creabitur numerus 30000. hos igitur numeros simul adde, & habebis 65000 pro diuisore: postmodum priorem numerum productū, scilicet 35000, per numerum distribuendæ pecuniæ, scilicet per 1000 multiplicabis, & proueniet 35000000, quem per diuisorem diuide, videlicet per 65000. & numerus quotiens 538 scuta, 16 solidi, 1 turo. cum $\frac{10}{13}$ vnius turoni erit summa pecuniarū quam equites habebunt: simili modo operandum est pro summa peditum reperienda, quæ est 461 scuta, 18 solidi cum turono & $\frac{3}{13}$.

TRES inueniuntur fluuij, quorum primus sufficit campum tria milliaria in longi- 9
tudine habentem, & totidem in latitudine in 1 die rigare: secundus in 2, & tertius in
3. Quæritur in quanto tempore omnes tres simul eundem campum rigare poterunt?
Responsio. Reperiẽdus est in primis numerus diuidendus, & diuisor hoc modo: si pri-
mus 1 die illum campum semel sufficit rigare, ergo in 6 diebus, sexies rigare potest: &
si secundus in duobus diebus semel eundem campum sufficiebat rigare, sequitur ꝙ
in sex diebus ter ipsum rigare poterit. eodem modo dicas si tertius fluuius in tribus
diebus semel illum campum rigare sufficiebat, ergo in sex diebus bis eum rigare po-
terit. 6 igitur pro numero diuidendo tenebis, & simul hos tres numeros addas, scilicet
6, 3, 2, & producentur 11, qui diuisor appellabitur. Iam operari poteris secundum regu
lã de tri: sic mouendo quęstionem. Si vndecies in 6 diebus isti tres fluuij possint rigare
campum tria milliaria continentem: quæritur in quanto tempore ijdem tres fluuij se-
mel tantum eundem campum sufficient rigare? Multiplicabis igitur secundum nume
rum, videlicet 6 per tertium: & proueniet 6, quem per primum numerum diuide, sci-
licet per 11: sed quoniam numerus diuidendus est diuisore minor, opus est secundum
quartam cõditionem in tot resoluatur partes, vt per diuisorem possit diuidi: resolua-
tur ergo in horas 144, quas per diuisorem diuide: & numerus quotiẽs erit 13 horæ,
cum $\frac{1}{11}$ vnius horæ, quæ tempus componunt in quo omnes fluuij simul illum campũ
semel rigare sufficiunt.

REX quidam in quadrata vrbe, 4 iubet erigi muros, quorum quilibet 1000 vlnas 10
in longitudine continebit, & in altitudine 50, in spissitudine seu profunditate 5. & fient
ex lapidibus, quorum quilibet in longitudine $\frac{1}{2}$ vlnæ continebit, in latitudine $\frac{1}{3}$ vnius
vlnæ, & in profunditate $\frac{1}{4}$ vlnæ habebit: & quilibet illorum lapidum dispositus, & mu-
ro affixus, emetur vno scuto. Quæritur quot tales requirantur lapides pro illis 4 mu
ris faciundis, & quanta pecuniarum exponetur summa? Respondetur. Multiplicabis
longitudinem illorum 4 murorum scilicet 1000 vlnas per latitudinem, hoc est per 50,
& prouenient 200000 vlnæ, quas per vlnas profunditatis multiplicabis, videlicet per
5, & consurgent 1000000 vlnæ pro quadrato murorũ: consimiliter lapidum dimensio-
nes multiplicabis, modo declarato quinto diffinito quarti tractat9, & inuenies $\frac{1}{24}$ vni-
us vluæ pro quadrato lapidum: postmodum quadratum murornm per lapidum qua-
dratum diuidatur, eo modo: posito quadrato lapidum in dextra manu pro diuisore, &
murorum quadrato in sinistra pro numero diuidendo, multituplicetur diuisoris deno-
minator per diuidendi numeratorem, & productum, numerator operis dicetur: deinde
diuisoris numeratorem in denominatorem diuidendi ducas, & producetur operatio-
tionis denominator: hoc igitur peracto, reperies 24000000 tales lapides, pro compo
sitione illorum 4 murorum requiri. Ex quo facile constat de veritate secundæ partis
quæstionis.

VXOREM grauidam quidam habens agonizans, cuius bona, 2000 scutis vale- 11
bant, tale condidit testamẽtum. Si vxor mea filium pariat, ille meorum bonorum tria
quinta habeat, & vxor vnum, & ecclesia residuum, scilicet vnum quintum. Si vero fi-
liam pariat, ipsa duo habebit, & vxor duo, & ecclesia reliquum. Vxor autem, aduen-
tante tempore partus, vtrunq; peperit, videlicet & filium, & filiam. Quæritur quali-
ter distribuentur bona? Respondetur. Omnes numeri in testamento formaliter positi
scribantur, scilicet 3 pro filio, 2 pro filia, 2 pro matre, & 1 pro ecclesia, quę simul addan
tur, & proueniet 8, quem pro diuisore tenebis: relicta vero scuta, videlicet 2000, mul-
tiplicator appellabuntur, per quem cuiuslibet partem siue numerum multiplicabis,
& productum per 8 diuides, & quotiẽs, propositum ostendet. Et reperies quòd filius
habebit 750 scuta: filia, 500. vxor, 500. & ecclesia, 250. Poteris consimili processu ope
rari, vbi vxor peperisset duos filios, vel duas filias, aut duos filios, & vnam filiam.

☞ Vxor videtur tria quĩ[nta] debere accipere, quot & filius de quo vnũ habet, reliqua duo de filia dãtur ei matri. vnde 9, nõ 8, pro diuisore capiendus esset.

MERCATORES tres simul composuerunt pro mercibus faciundis: quorum 12
primus posuit 80 scuta 6 mensibus, secundus 70 scuta 5 mensibus, & tertius posuit
60 scuta 4 mensibus, & de lucro habuerunt 100 scuta. Quæritur, quantum quilibet ha
bebit secundum portionem temporis, & pecunię? Responsio. Multiplicabis cuiuslibet

summam pecuniarum per numerum mensium eiusdem, & tres inde prouenientes numeros in vnam colliges summam, quam pro communi diuisore tenebis: deinde summam quæ proueniebat ex multiplicatione pecuniarum primi per numerum mensium eiusdem, multiplicetur per lucrum, & productum diuide per communem diuisorem, & numerus quotiens ostendet summam pecuniarum quam primus habebit. Idem faciendum est de alijs.

13 SANCTVM Iacobum duo preregrini petiuerunt, quorum prior per sola decem milliaria potest itinerare, secundus vero per 13. prior tamen secundum per 9 dies præcessit, in quibus 90 milliaria pertransiuit. Quæritur, in quot diebus poterit secundus priorem attingere? Responsio. Debes in primis pro numero diuidendo capere milliaria pertransita à priori antequam secundus itinerare inceperit, quæ sunt 90: deinde id pro diuisore accipies per quod in die secundus priorem excedit, videlicet 3, per quem si diuidas 90, numerus quotiens, qui erit 30, propositam quæstionem soluet.

14 IN QVODAM curru, cuius quælibet rota est trepidalis, hoc est cuiusuis rotæ diameter est tripedalis, vehūtur merces à sancto Dionysio in vrbem Parisiensem. Quæritur quoties circumuoluentur rotæ antequam intrent Parisium? Responsio. Est in primis supponendum ex geometria, peripheriam circuli ad eius diametrum in proportione tripla sesquiseptima se habere, qua 22 ad 7 se habent: secūdo videndum est quot sunt pedes à sancto Dionysio ad vrbem vsque Parisiensem, & inuenies 20000: eo quòd ambæ vrbes à seinuicē per 4 milliaria distant: deinde videbis quot correspondent pedalitates circūferentiæ rotæ cuius diameter est tripedalis: & inuenies quòd 9 cum $\frac{3}{7}$ vnius pedalis: tot igitur pertransibunt rotæ illius currus in vna circuitione: diuidatur igitur numerus pedum, scilicet 20000 per 9 $\frac{3}{7}$: & numerus quotiens propositum repræsentabit.

15 LIBRARII tres, emerunt 1250 Arithmetices libros, precio 375 francorum: primus autem pro sua parte vult quingentos habere, secundus quadringētos & quinquaginta, tertius residuum, scilicet trecentos. Quæritur, quantum soluet primus, & quantum secundus, pariter & tertius? Solutio. Accipies numerum francorum pro multiplicatore: deinde tres partes illorum in vnam summam colliges, & erit 1250, quæ pro diuisore teneatur: postmodum cuiuslibet librarij partem per multiplicatorem multiplica, & productum per diuisorem diuide, & quotiens propositum declarabit. Soluet igitur pro sua parte primus 150 francos: & secundus, 135: & tertius, 90.

16 INTER tres socios, 1000 franci sunt diuidendi, primus autem sociorum in duplo magis quàm secundus habebit, & secundus in triplo magis quàm tertius. Quæritur iam, quātum quilibet pro sua parte habebit? Solutio, debes certum numerum pro tertio accipere; verbi gratia 2. & quoniam secundus recipere debet in triplo magis quàm tertius, capies pro secundo 6: qui ad 2, in tripla se habet proportione: & postquam primus in duplo magis quàm secundus recipiet, sumes numerum 12 pro primo, qui ad 6, in dupla se habet proportione: hos igitur tres numeros (qui multiplicatores appellantur) in vnum collige, & erit 20, qui diuisor dicetur: iam multiplica numerum diuidendum, scilicet 1000 francorum per quemlibet illorum trium numerorum, & numerum prouenientem diuide per diuisorem, & quotiens propositum ostendet: quo peracto, primus pro parte sua habebit 600, & secundus 300, & tertius 100.

17 CIVIS quidam in extremis laborans, reliquit 6000 scuta eo modo distribuēda. Volo (inquit) illorum medietas detur monasterio Iacobitarum, tertia vero pars illorum conuentui diui Augustini: quarta pars cœnobio fratrum minorum: quinta pars ordini Carmelitarum. Quæritur nunc, quantum quilibet prædictorum ordinum de 6000 scutis habebit? Responde. Sunt in primis pro illis 4 ordinibus accipiēdæ partes distinctæ: sic videlicet vt pro Iacobitis medietatem 6000 scutorum, videlicet 3000: deinde pro Augustinensibus tertiam 6000 scutorum, videlicet 2000: postmodum quartam partem pro cordigeris, scilicet 1500: vltimo quintā partem pro Carmelitis, videlicet 1200. has igitur distinctas 4 partes in vnam collige summam, quæ erit 7700, & diuisor appellabitur: multiplicator autem dicetur pecunia distribuenda, videlicet 6000 scuta: multiplica igitur quamlibet distinctam partem per multiplicatorem, & productum per diui-

ſorem diuide:& numerus quotiẽs propoſitum repræſentabit. Vnde ſi primã diſtinctam Iacobitarum partem, quæ eſt 3000, per multiplicatorem multiplices, productum erit 18000000:& ſi per diuiſorem hunc productum diuidas, pro quotienti numero habebis 2337 ſcuta, cum 23 duodenis, 2 turonis, & $\frac{1400}{7700}$ vnius turoni: hæc erit igitur pars 6000 ſcutorum, quam monaſterium Iacobitarum habebit. Si autem eodem modo multiplicando, & diuidendo procedas in cæteris, facillime reperies cuiuſuis religionis partem.

EST GRANDIS ouium caterua à tribus paſtoribus poſſeſſa, quorum nullus ſcit numerum omnium earum, nec etiam ſuarum ouium propriarum. Primus tamen ſcit bene ꝙ alij duo habent 2950. & ſecundus ſcit alios à ſe habere 3500. tertius ſcit duos priores habere 3550. Quæritur quot omnes ſimul habeant, pariter & ſinguli? Solutio. Tres illæ ſummæ ab illis ſcitæ, in vnam ſummã colligantur, & ea erit 10000. quam per 2 diuide, & proueniẽt pro quotiente 5000:& hæc eſt ſumma omnium ouium. Et ſi ſcire cupis quot oues primus poſſideat, ſubtrahe ab illo quotiẽte ſummam quam primus ſciebat cæteros poſſidere, videlicet 2950: & reſiduum eſt ſumma ouium quas primus poſſidet, & ſi hoc pacto in cæteris operari libet, quæſtio ſoluta erit. Summa igitur omnium ouium erit 5000. & primus poſſidebit 2050. & ſecundus 1500. & tertius 1450. 18

VNVS paterfamiliâs aliquot operarios conduxit pro vnius diei labore, ipſi vero operarij parum citius quàm tempus expetebat, à labore ceſſarunt, & cõtentio mota eſt inter patremfamiliâs & operarios: nam operarij ſinguli ſeptem duodenos quærunt, pater vero familiâs quàmlibentiſſime daret, ſed deficiunt ei 23 duodeni, vult tamen cuilibet conferre 4, & ſuperſunt ei 7. Quæritur quot habeat operarios, pariter & duodenorum ſummam? Solutio. ſubtrahe à 7, numerum 4, & reſiduum ſcilicet 3, diuiſor dicetur: deinde adde 7 & 23, & producetur numerus 30, quem per 3 diuiſorem diuide, & quotiens erit 10, qui eſt numerus operariorum: poſtmodum multiplica 10 per 4, & ſurgent 40, quibus adde 7, & profluent 47 duodeni, componentes ſummam omnium duodenorum à patrefamiliâs poſſeſſorum. 19

MERCATORES tres eo modo conuenerunt. Primus per 8 menſes poſuit 100 ſcuta: ſecundus per 5 menſes aliquam ignotam pecuniarum ſummam: tertius per 4 menſes, etiam incertam pecuniarum ſummam:& lucrati ſunt 160 ſcuta, quæ ad æquales partes diuidunt. Quæritur quantam pecuniarum ſummã poſuit ſecundus, & quantam tertius? Reſpondetur. Poſitum à primo, videlicet 100 ſcuta, per numerum menſium eiuſdem, hoc eſt per 8, multiplicabis, & prouenientem numerum diuide per numerum menſium ſecũdi, videlicet 5, & numerus quotiens, ſummam pecuniarũ quam poſuit ſecũdus declarabit: ſi autẽ numerũ illum prouẽientem (ſcilicet 800) per numerũ menſiũ tertij, videlicet per 4, diuidas: ſummam pecuniarũ, quam tertius poſuit, numerus quotiẽs oſtẽdet. Ex quo patet ſecundũ poſuiſſe 160 ſcuta:& tertiũ impoſuiſſe 200. 20

¶Regula diuinatoria, eademq; ioculatoria atque faceta.

SI VIS vaticinari quot ſcuta ſunt in marſupio tui ſocij, hac arte procedendũ eſt. Petas ab ipſo vtrum ſciat numerũ eorũ: ꝙ ſi non ſciuerit, reſpiciat:& numerũ ſeruet in mẽte, nihil tibi dicẽdo: tu tamen dicas illi, medietatẽ illius numeri ſupra eundẽ numerũ ponat, & productũ ſeruet in mente: deinde ex illo quæras vtrum ex tali additione cõſurgat fractio, vel non: ſi primũ accidat, illam fractionẽ per additionẽ medietatis impleat: deinde toti illi numero medietatẽ addat: ſi autẽ ſecundũ eueniat, producto numero medietatem eiuſdẽ addat. & iterũ quæras vtrũ ex illa ſecunda additione cõſurgat fractio, vel non: ſi primũ, reddatur integra per additionẽ medietatis: poſtea iubeas ex producto numero extrahi 9 quotieſcũq; extrahi permittit, & tu ipſe animaduertes quotiẽs 9 ſeparat, & in mente pro quolibet 9 abſtracto retineas 4, & pro prima fractione (ſi fuerit) 1, & pro ſecũda, 2:& tandem in mẽte tua repoſitus erit numerus ſcutorũ repoſitorũ in marſupio tui ſocij. ¶Hæc regula tribus declaratur exẽplis. primũ exemplũ. Sit rei veritas ꝙ ſocius tuus 8 habeat ſcuta, quæ ipſe ſcit ſe habere, te tamẽ lateat: fac vt illis medietatem addat, & proueniẽt 12, in quibus non reperitur fractio: fac igitur vt illi prædicto numero, videlicet 12, medietatẽ addat, & proueniet 18. à quo ſolũ bis extrahi poteſt 9. & Primum exẽplum cum dictũ sit 4 esse in mẽte tenendũ pro quolibet 9, dices illi scuta sui marsupij esse 8, quod est verum. *Secundum exemplum. Sit* veritas ꝙ in marsupio amici, 5 inueniantur scuta, fac vt illorum medietatem sumat, quam illis addat, & proueniet 7 cum dimidio, in quibus est fractio: fac igitur vt integra reddatur per additionem medietatis scuti, & sic erunt 8 scuta, quæ adduc tu nescis esse: deinde iubeas toti illi summæ eiusdem medietatem addi, & prouenient 12, in quibus fractio non reperitur. separet igitur 9 quoties potest, & quia tantum semel à 12 extrahi permittit: ideo 4 pro illa vnius 9 abstractione in mente tua tenebis, & ex prima fractione, 1 est accipienda (vt dictum est) quæ simul cũ 4, efficit 5. ideo dices socio, quinq; in eius marsupio scuta fuisse. Tertiũ exemplum. *Sit* verũ ꝙ in marsupio amici 7 reperiantur scuta, te tamen lateat: fac vt illorum medietatem illis superaddat, & consurgent 10 scuta cum dimidio: nunc petes an fractio reperiatur: & si ipse dicat tibi verũ, dicet ita esse: iubeas ergo integram fieri per medietatis scuti additionẽ, & sic prouenient 11 scuta, quæ adhuc tu nescis esse: tenebis tamen in mente ratione illius primæ fractionis, 1. deinde iubeas medietatem producti numeri superponi, & habebis 16 scuta cum dimidio: quæres iterum an fractio ex tali additione consurgat, & si verum fateatur, dicet ꝙ sic: ideo iubeas integram fieri per additionem medietatis, & consurget numerus scutorum 17, tu tamen ratione huius secundæ fractionis, 2 seruabis in mente, qui cum prius habita vnitate efficit 3. Postmodum precipias extrahat 9 quoties potest. & quia solum semel extrahi permittit: ideo gratia illius 9, seruabis 4 in mente: qui simul cum 3 prius habito, 7 componunt numerum. Hoc igitur completo, illi amico significabis 7 in suo marsupio scuta fuisse. Poteris hac via omnia consimilia vaticinari: ideo placet hanc regulam diuinatoriam appellare.

☞ Si numerus minor fuerit quatuor, vt 3, 2, & 1: tunc non ex abiectione 9, quæ fieri non potest: sed ex prima & secunda fractionibus cognoscitur. Et quandocunque, facta diuisione per 9, aliquod residuum manet, non curandum est: nihil enim facit ad rem.

OPERIS PERORATIO.

SIT LAVS omnipotenti deo, eiúsque intemeratæ genitrici, & toti curiæ cælesti. Et felicitas, atque beatitudo sit tribus præceptoribus meis, Ludouico Romano, Roberto Caubraith, & Ioanni Dullart mihi semper venerando præceptori, cuius anima cælesti munere fruatur. Nempe Ludouicus in grammatica, Robertus in dialectica, & Ioannes in philosophia me vnum de eorum discipulis habuerunt. Isti enim sunt quibus eam pro eruditione eorúmq; laboribus mercedem confero, quam Thales ille Milesius à Mandraico Prienensi eius discipulo petiuit: vt videlicet prædicaret quæ sub Thalete didicerat, Thaletis fuisse, ipsum'que Thaletem repertorem talium stetisse. Prædico igitur eius quod est in me grammaticæ, Ludouicum inuentorem fuisse: eius vero quod in dialectica, Robertum: & eius quod in philosophia, Ioannem. Nunc vero benignissimi lectores, si quid minus bene dictum in hac arte sit reperire, soli mihi parcite precor. Nam preceptorem neminem in hac ipsa audiui. Valete mitissimi lectores: vobis'que valentibus, Siliceana valeat ars.

EX OFFICINA SIMONIS COLINAEI SVB SOLE AVREO, vici sancti Ioannis Bellouacensis, mense Septembri. M. D. XXVI.

X

1526

ERRATA.

Fol.	pag.	lin.	
2	1	6	lege, vt in reformando, haud scio, an minore negocio &c.
7	1	1	naturali
18	2	9	scilicet 15
18	2	12	consurget 74
18	2	46	sua basi
28	1	25	in principio lineæ post 8, pro 4 lege 5
56	2		in marginalibus additionibus, pro additio, lege multiplicatio.
61	2	30	vlnæ

ARITHMETICES AD SVI STVDIOSOS Paræneſis.

Huc ades: huc celeri confer tua pectora greſſu,
Qui cupis ingenuæ Palladis arma ſequi:
Siue paras varios cœlorum ediſcere motus:
Solis & errores, noctiuagæq; deæ.
Quæq; errant, quantum conſumant temporis aſtra,
Vt redeant, ad quem deſeruere, locum.
Ac vbi tardantur radijs ſolaribus acta:
In gemina quanta ſint ſtatione mora.
Pondera, ſeu vaſti (quæ dat Geometria) cœli,
Menſuras terræ, cæruleiq; freti.
Præſtabo faciles aditus: paruóq; labore
Ediſces, quod vix dat ſecus vlla dies.
Me duce cognoſces loca cuncta, ſitúſque locorum
Mundi, q̃ lata eſt, longáve quæq; plaga.
Aptior ad ſanctæ fueris rimanda poeſis
Abdita: doctrinæ quæ genus omne tenent.
Seu mercatorem eoos percurrere ad Indos
Te iuuat, aut vaſtum puppe ſecare fretum,
Me duce tutus eris. nunquam faciet tibi fucum,
Aut fraudem quiſquam, ſit licet ille dolus.
Ipſe pater rerum fecit numero omnia certo:
Si fas ſit docto credere Pythagoræ.
Huc ades: & tantum pacta exige munera. certe
Pollicitis nunquam deteriora feres.
Ignauis neglecta viris, quæ ſquallida putri
Marcebam carie, & contaminata ſitu:
Terſior ac antehac in lætam prodeo lucem
Erepta à mendis barbaricaq; manu.
Cuius ope exquiris? Thomæ, quem patria Rhætum
Nominat, Helueticis fœdere iuncta viris.
Hic mihi reſtituit formam, priſcumq; decorem:
Hoc ego nobilior vindice ſemper ero.
Nec tulit auxilium ingratæ. Nanq; artibus illum
Inſtructum æthereis, aurea ad aſtra tuli.
Metiri inde dedi oceanum, terrámq;, polumq;,
Aſtráq;: ſed dominæ fulta ſororis ope.
Hunc ego naturæ edocui ſecreta parentis.
Quæq; gerit pleno Philoſophia ſinu.

Authore Iacobo Rogerio Neruio.

Fin