15f

4

ELEMENS
DE
GEOMETRIE
DE MONSEIGNEUR LE DUC
DE BOURGOGNE.

[redacted] [redacted]

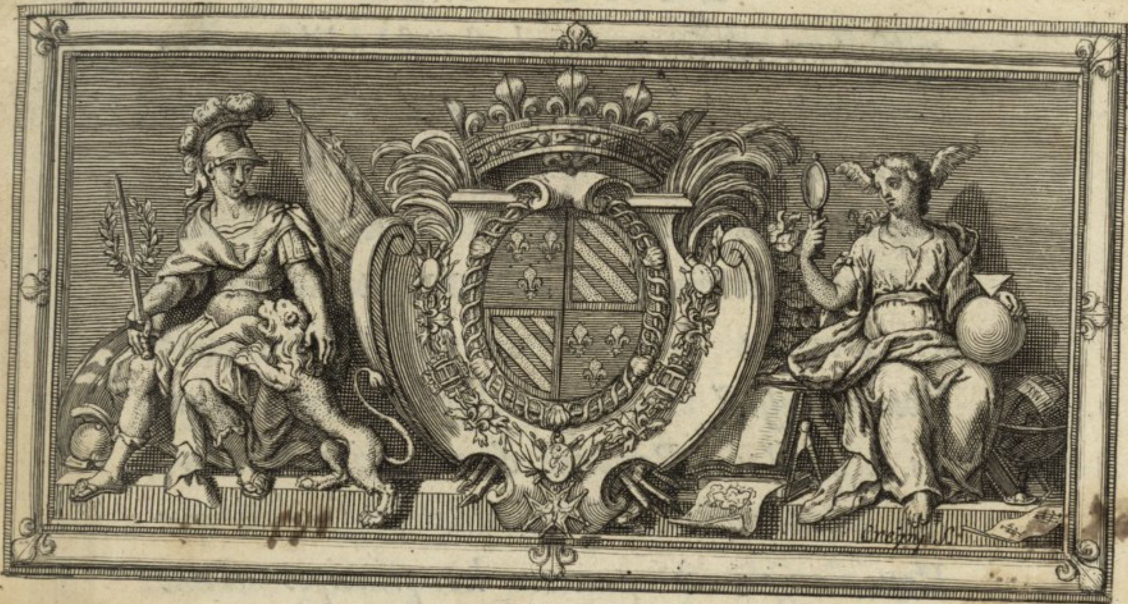
A Trevoux & se vendent,

F: De Wargny

A PARIS,

Chez JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roy, & de l'Academie Royale des Sciences, ruë Saint Jacques, au Soleil d'Or.

M. DCCV.



A MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

MONSEIGNEUR,

C'est Vôtre bien que je Vous offre, en Vous *présentant cet Ouvrage; il est juste qu'il retourne dans les mains, dont il est sorti, & il Vous appartient trop legitimement, pour qu'on puisse en disposer sans Vôtre aveu.*

Vous y reconnoîtrez, MONSEIGNEUR, *les premiers Elemens de Geometrie, que Vous dressiez dans un âge tendre, sous les yeux d'une Personne d'un merite reconnu, qui ne pouvoit assez admirer la facilité que Vous aviez à penetrer les principes d'une Science aussi abstraite que celle-là, & à en tirer les consequences: mais ce qui lui donnoit encore plus d'admiration, & ce qui en doit causer à tous les Connoißeurs, c'est la netteté & la précision avec laquelle redigeant de Vous-même ces principes & ces consequences, Vous vous en faisiez un Art & une Methode particuliere, qu'on ne craint point de proposer ici, comme un guide asseuré, à tous ceux qui voudront s'instruire dans une Science, à laquelle Vos meditations & Vos lumieres vont donner une nouvelle reputation & un nouvel éclat.*

En effet, MONSEIGNEUR, *qui ne se fera un honneur de prendre des leçons d'un Maître, qui joint à la plus auguste naissance du monde, le genie le plus heureux? Et qui ne sera ravi de pouvoir se vanter un jour, qu'il doit aux premieres instructions, que vous allez lui procurer, les progrés qu'il aura faits dans les Mathematiques?*

Si Vôtre exemple, MONSEIGNEUR, *doit être d'un grand poids pour autoriser le goût, & entretenir la vivacité, qu'on a aujourd'hui pour ces Connoißances, le soin que Vous avez bien voulu prendre d'en applanir les difficultez par une methode nouvelle, sera aussi d'un grand secours pour en faciliter l'intelligence.*

La beauté de cet Ouvrage, MONSEIGNEUR, *fera sans doute regretter, qu'on n'ait point eu pour les autres Productions, qui Vous ont échappé, la même attention, qu'a eu pour celle-ci l'illustre Monsieur de Malezieu, qui l'a vû naître & sortir de vostre plume, & qui, devenu dépositaire d'un tresor si precieux, en a trop bien connu le* *prix, pour le laißer dans l'obſcurité d'un Cabinet.*

Ce fameux Academicien, qui juge ſeurement de tout, parce qu'il eſt conſommé en toute ſorte de Litterature, a bien ſenti, MONSEIGNEUR, *qu'il y auroit de l'injuſtice à fruſtrer le Public du fruit des études d'un Prince, qui eſt né pour le bien commun de tant de Peuples; & il a crû qu'il pourroit ſatisfaire en même temps, & à la paſſion extrême qu'il a de ſe maintenir dans la poſſeſſion de ce riche dépôt, & à l'utilité de tout le cercle des Arts & des Sciences, ſi, ſans ceder le manuſcrit tracé de Vôtre propre main, qu'il veut conſerver cherement, il permettoit d'en tirer une Copie, qu'on pût rendre publique.*

C'eſt ce qu'il n'a pû refuſer aux inſtances réïterées qu'on lui en a faites, & que moi-même j'ai pris la liberté de lui en faire en mon particulier. Pouſſé du Zele, que je dois avoir pour l'embelliſſement de la Bibliotheque de Monſeigneur le Prince Souverain de Dombes, qui m'a fait l'honneur de m'en nommer Directeur, je me ſuis crû *en droit de joindre ma voix à celle de plusieurs Personnes de consideration, persuadé que je ne pouvois rien faire de plus avantageux pour la Bibliotheque dont j'ai la Charge, que de presser l'édition d'un Ouvrage, qui en doit faire le principal ornement, & donner un nouveau lustre à l'Imprimerie de Trevoux, si celebre dans toute l'Europe, par les divers & excellens Livres, dont elle enrichit tous les jours la République des Lettres.*

Quoique la qualité d'Auteur soit infiniment au dessous de vôtre rang, cependant j'ose dire, MONSEIGNEUR, *que dans la matiere, dont il s'agit, elle n'est pas indigne de Vous. Les Mathematiques ont une liaison si essentielle avec les travaux de la Guerre, qui ne se conduisent que par ses regles, qu'il n'est point méseant à un Prince d'un esprit sublime, d'un jugement profond, & d'un discernement exquis, d'en tracer les premiers Elemens, & de donner des leçons d'une Science, qui enseigne à forcer des Villes & à gagner des Batailles; sur tout,* MONSEIGNEUR, *quand on sçait passer de la Theorie à la Pratique aussi habilement que Vous ; & que de principes évidens & certains, on en tire des consequences aussi justes & aussi importantes, que Vous l'avez fait à Brisac ; dont la prise, en rendant à la France un de ses plus puissants remparts, a couronné vôtre courage & vôtre capacité d'une gloire immortelle.*

Si le détail de cette Science n'est pas toûjours d'usage pour un Prince, il est au moins vrai de dire, MONSEIGNEUR, *que l'esprit d'ordre & de précision, qu'elle inspire, & auquel elle accoûtume insensiblement, est utile en tout temps, & qu'il sert autant à diriger les vûës & les desseins du Prince Pacifique, que les projets & les exploits du Prince Guerrier.*

Vous avez déja fait voir, MONSEIGNEUR, *à la tête des Armées, des fruits de cette justesse, qui Vous faisoit prendre des mesures toûjours certaines pour le succés de vos entreprises ; nous nous en promettons à l'avenir de plus grands encore dans la Paix ; & la sagesse, avec laquelle Vous reglez toutes* *vos actions, nous fait assez concevoir ce qu'on doit attendre un jour dans le gouvernement des Peuples, que le Ciel destine à vivre sous vôtre obéïssance. Vos exemples,* MONSEIGNEUR, *sont dés-à-present un modele & une regle de conduite pour ceux qui ont l'honneur de Vous approcher: Ils trouvent dans vos actions, des leçons continuelles de moderation & de pieté, qui leur apprennent, que la jeunesse & la grandeur ne sont pas des obstacles insurmontables à la vertu; que l'Esprit & la Pratique du Christianisme sont de tout âge & de tout état, & qu'on peut en même temps remplir tous les devoirs d'un grand Prince, & ceux d'un parfait Chrêtien. Mais cet Ouvrage apprendra aussi à tout le monde, que la Science n'est pas incompatible avec les autres vertus d'un Heros, & que les lumieres de vôtre esprit Vous donnent le même avantage sur les Sçavans, que la valeur & l'intrepidité Vous donnent sur les Guerriers. C'est dans cette vûë,* MONSEIGNEUR, *que je prens la liberté de vous demander vôtre aveu, pour rendre public vôtre Traité de Geometrie: heureux d'avoir une occasion si favo-*

rable de vous donner des marques de mon zele & du trés-profond respect, avec lequel je suis,

MONSEIGNEUR,

Vôtre trés-humble, & trés obéïssant Serviteur, BOISSIERE.

TABLE
DES MATIERES
contenuës en cet Ouvrage.

ADDITION.

Cinq Problèmes d'Arithmetique, & deux de Geometrie, pour faire voir de quelle utilité est la Specieuse, & avec quelle facilité elle resout des Propositions qu'on auroit bien de la peine à démêler par les methodes ordinaires.

PRIVILEGE

DE S. A. S. MONSEIGNEUR PRINCE SOUVERAIN DE DOMBES.

LOUIS AUGUSTE PAR LA GRACE DE DIEU, PRINCE SOUVERAIN DE DOMBES. A tous ceux qui ces Presentes verront SALUT : Nôtre amé J. B. Nous a fait representer qu'ayant appris que l'Imprimerie que Pierre le Rouge avoit établi en nôtre Ville de Trevoux, en vertu de nos Lettres dattées du 20 Fevrier de l'année 1697. & enregistrées en nôtre Parlement le 18. Juillet suivant, auroit été abandonnée par ledit le Rouge & par d'autres Particuliers à qui il avoit cedé son droit, il desireroit relever ladite Imprimerie pour y faire imprimer toutes sortes de bons Livres, s'il nous plaisoit lui accorder, comme il nous en a trés-humblement fait supplier, nos Lettres de Privilege sur ce necessaires, portant revocation de celles ci-devant accordées audit le Rouge, & défenses tant à lui qu'à ceux qui pourroient avoir droit de lui & à tous autres de quelque qualité qu'ils soient, de s'ingerer en aucune maniere du fait de l'Imprimerie, Librairie & Relieure, dans toute l'étenduë de nôtre Souveraineté. A CES CAUSES, voulant favorablement traiter l'Exposant & rétablir incessamment nôtre imprimerie, pour le bien & utilité de nos Sujets en faveur du commerce & à l'avantage des Gens de lettres, & aprés le certificat de nôtre amé & feal le sieur de Montezan Premier President en nôtre Parlement l'un des Commissaires par Nous cy-devant établi pour avoir inspection sur nôtredite Imprimerie, de l'abandonnement dudit le Rouge & de ses ayans cause, qui ne se mettent pas en état de la rétablir, quoiqu'ils en ayent été plusieurs fois sollicitez. NOUS de nôtre pleine Puissance & Autorité souveraine avons revoqué & revoquons par ces Presentes le Privilege à lui cy-devant accordé, & avons établi & établissons l'Exposant pour être nôtre seul & unique Imprimeur & Libraire en nôtre Souveraineté ; lui permettant ainsi qu'à sa Veuve, Heritiers & autres à qui il pourra ceder, remettre ou faire part du present Privilege, d'avoir & tenir à l'exclusion de tous autres des Presses & Caracteres d'Imprimerie & Ouvroir de Relieure, d'imprimer, faire imprimer, vendre & relier toutes ſortes de Livres de bonne & ſaine doctrine, en tel volume, marge, caracteres & autant de fois que bon lui ſemblera, de quelque ſcience & matiere qu'ils puiſſent traiter, tant ſur les Editions anciennes & étrangeres, que ſur les Manuſcrits originaux qui pourront tomber en ſes mains, ou en celles de ſes ayans cauſe, les faire vendre, debiter & relier, en vertu des Preſentes, ſans être obligé d'obtenir de Nous ni de nos Officiers autre Privilege ou Permiſſion : Et ce durant le temps & eſpace de trente années conſecutives, à compter du jour & datte des preſentes pendant lequel tems nous faiſons trés-expreſſes inhibitions & défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & conditions qu'elles puiſſent être & nommément audit le Rouge & à ſes ayans cauſe, d'avoir aucune Preſſe & caracteres d'imprimerie, ni Ouvroir de Relieure dans toute l'étenduë de nôtre Souveraineté & de s'y ingerer en quelque maniere du fait de l'Imprimerie, Librairie ni Relieure de Livres, ſans le conſentement de l'Expoſant, ou de ſes ayans cauſe, à peine de dix mille livres d'amende applicable un tiers à l'Hôpital general de Trevoux, un tiers à l'Expoſant & l'autre tiers au Denonciateur, de confiſcation audit Expoſant ou de ſes ayans cauſe de tous les Livres imprimés ſans ſon conſentement, ainſi que de toutes les Preſſes, Caracteres & Uſtenciles, & de tous dépens dommages, & interêts. VOULONS ET ORDONNONS que nôtre amé & feal le Sieur de Montezan, Premier Preſident en nôtre Parlement, & en ſon abſence & défaut nôtre amé & feal le Sieur de Meſſimy Preſident à Mortier en nôtredit Parlement, que nous avons commis & commettons en cette partie pour veiller ſur tout ce qui ſe paſſera au ſujet des Impreſſions, Relieures, & tout ce qui aura rapport à nôtredite Imprimerie, juge & decide ſommairement des difficultés & conteſtations qui pourroient ſurvenir tant entre les Ouvriers qu'autrement ; & que les jugemens qu'il rendra à cet égard ſoient executés par proviſion, nonobſtant oppoſition ou appellation quelconque, donnant à nôtredit Commiſſaire tout pouvoir & attribution de juriſdiction à cet effet ; faiſant défenſes à tous nos autres Juges d'en connoître à peine de nullité & de répondre en leurs noms de tous dépens, dommages & interêts. Et pour prévenir toutes ſortes d'abus & empêcher qu'il ne s'imprime dans l'étenduë de nôtre Souveraineté aucuns Libelles diffamatoires ou autres ouvrages ſcandaleux, contraires aux bonnes mœurs & à l'honneur qui eſt dû à Dieu & à la Religion, l'Expoſant ſera tenu de declarer les lieux & maiſons où il entend faire travailler, tant aux Impreſſions, qu'à la Relieure, & n'en pourra changer qu'il n'en ait fait ſa declaration ſur le Regiſtre qui ſera tenu double ; ſçavoir, l'un chez l'un de noſdits Commiſſaires, & l'autre entre les mains de l'Expoſant, pour y faire inſcrire par led. Commiſſaire tous les Ouvrages qu'il aura deſſein d'imprimer, & ce avant que de les commencer. Et à l'égard des Manuſcrits originaux qu'il voudra mettre ſous la preſſe, il n'en ſera enregiſtré aucuns de Theologie ou autre matiere qui merite examen, s'il n'eſt accompagné de l'Approbation ſignée de l'un des Docteurs, Cenſeurs & Examinateurs par Nous choiſis & nommés à cet effet. Enjoignons à noſdits Commiſſaires de faire des viſites dans les lieux où l'on travaillera auſdites Impreſſions & Relieures, & de tenir la main à ce qu'il ne s'y faſſe aucune malverſation; auquel cas ils ſeront tenus de Nous en rendre un compte exact, pour par Nous ou nôtre Conſeil, à qui Nous en avons reſervé & reſervons la connoiſſance, en être ordonné ce que de raiſon. Sera tenu auſſi ledit Expoſant de faire mettre dans nôtre Bibliotheque un Exemplaire de chacun des Livres qu'il aura fait imprimer, un en celle de nôtre trés-cher & feal le Sieur de Malezieu Chancelier de nôtre Souveraineté & d'en donner un à chacun de noſdits Commiſſaires. Ce faiſant avons promis & accordé, promettons & accordons à l'Expoſant & à ſes ayans cauſe nôtre protection, & que nous ne donnerons à d'autres aucune liberté ni privilege d'imprimer, debiter & relier des Livres dans toute l'étenduë de nôtre Souveraineté. AVONS mis & mettons l'Expoſant & tous ceux qui ſeront employez de ſon ordre aux Impreſſions, debit, correction & relieure des Livres, ſous nôtre protection & ſauvegarde. MANDONS à nos amez & feaux Conſeillers, les Gens tenans nôtre Cour de Parlement, Chambre des Requêtes, & par tout ailleurs où beſoin ſera, ſur la ſeule & premiere requiſition de nôtre Procureur general & de ſes Subſtituts: & que vous faſſiez joüir pleinement & paiſiblement l'Expoſant & ſes ayans cauſe du contenu aux Preſentes, ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ni empêchement. Commandons au premier de nos Huiſſiers ou Sergens de faire pour l'execution d'icelles tous Exploits, Saiſies & autres Actes neceſſaires, nonobſtant toutes oppoſitions, appellations & lettres à ce contraires, toutes leſquelles Nous avons revoqué & revoquons d'abondant par ces Preſentes ſignées de nôtre main & ſcellées. CAR tel eſt nôtre plaiſir. Donné à Verſailles le vingt-ſixiéme jour de Juin mil ſix cens quatre-vingt-dix-neuf, & de nôtre Souveraineté le ſept.

LOUIS AUGUSTE.

Et ſur le repli.

Par Monſeigneur,

DE MALEZIEU.

Ledit sieur J. B. a cedé le present Privilege à Estienne Ganeau, pour en joüir en son lieu & place dans toute son étenduë, suivant les conventions faites entr'eux. A Paris le onziéme Aoust 1699.

EXTRAIT DES REGISTRES du Parlement.

VEU par la Cour les Lettres Patentes de Monseigneur en forme de Privilege, données à Versailles le vingt-sixiéme jour de Juin dernier presente année mil six cens quatre-vingt-dix-neuf, signées LOUIS AUGUSTE, & sur le repli, Par Monseigneur DE MALEZIEU, & scellées du grand Sceau sur cire jaune, par lesquelles & pour les causes y contenuës, Son Altesse Serenissime auroit établi J. B. pour être son seul & unique Imprimeur & Libraire en cette Souveraineté, au lieu & place de Pierre le Rouge, cy-devant pourvû dudit Privilege, que Son Altesse Serenissime auroit revoqué, avec pouvoir tant audit J. B. qu'à sa Veuve, Heritiers & autres à qui il pourroit ceder, remettre, ou faire part dudit Privilege, d'avoir & tenir à l'exclusion de tous autres, des Presses & Caracteres d'Imprimerie, & Ouvroir de Relieure; d'imprimer, faire imprimer, vendre & relier toutes sortes de Livres de bonne & saine doctrine, en tel volume, marge, caractere, & autant de fois que bon lui sembleroit, de quelque science & matiere qu'ils puisse traiter, tant sur les Editions anciennes & étrangeres, que sur les Manuscrits originaux qui pourroient tomber en ses mains ou en celles de ses ayans cause, les faire vendre, debiter, & relier, en vertu desdites Lettres de Privilege; sans être obligé d'obtenir de Son Altesse Serenissime, ni de ses Officiers autre Privilege ou Permission, & ce durant le tems & espace de trente années consecutives, à compter du jour & datte desdites Lettres. Pendant lequel tems Sadite Altesse Serenissime auroit fait trés-expresses inhibitions & défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles puissent être, & nommément audit le Rouge & à ses ayans cause, d'avoir aucune Presse & Caracteres d'Imprimerie, ni Ouvroir de Relieure dans toute l'étenduë de cette Souveraineté, & de s'ingerer en aucune maniere du fait de l'Imprimerie, Librairie, ni Relieure de livres sans le consentement dud. J. B. ou de ses ayans cause, à peine de dix mille liv. d'amende applicable un tiers à l'hôpital general de Trevoux, un tiers audit J. B. & l'autre tiers au Dénonciateur; de confiscation au profit dudit J. B. ou de ses ayans cause, de tous les Livres imprimés sans son consentement, ainsi que de toutes les Presses, Caracteres, & Ustenciles,

& de tous dépens, dommages & interêts; ainsi qu'il est plus au long porté par lesdites Lettres, au dos desquelles est la cession faite dudit Privilege par ledit J. B. à Estienne Ganeau, pour en joüir en son lieu & place, le onziéme jour d'Août dernier; Requête presentée à la Cour par ledit Estienne Ganeau Marchand Libraire à Paris, ayant droit dudit J. B. tendante à l'enregistrement desdites Lettres Patentes; Conclusions du Procureur general de Son Altesse Serenissime; Oüi le rapport de Me Pierre François Maugas Conseiller Doyen, Commissaire en cette partie, tout consideré: LA COUR a ordonné & ordonne que lesdites Lettres Patentes en forme de Privilege seront registrées és Registres du Greffe pour être executées selon leur forme & teneur, & joüir par ledit Ganeau du benefice desdites Lettres suivant & conformément à icelles. Fait en Parlement à Trevoux le premier jour de Septembre mil six cens quatre-vingt-dix-neuf. *Collationné.* GALLIARD.

Registrées és Registres de la Cour, (oüi & consentant le Procureur general de Son Altesse Serenissime) pour être executées selon leur forme & teneur, & joüir par ledit Estienne Ganeau ayant droit dudit J. B. du benefice desdites Lettres suivant & conformément à icelles, suivant l'Arrêt de ce jourd'hui. En Parlement à Trevoux le premier jour de Septembre mil six cens quatre-vingt-dix-neuf.

GALLIARD.

ELEMENS

PRÉFACE.

L'ORIGINAL de ces Elemens de Geometrie eſt écrit de la propre main de Monſeigneur le Duc de Bourgogne, & même l'on peut dire que l'Ouvrage eſt de ſa compoſition.

Au mois de Novembre 1696. le Roi choiſit M. de Malezieu, Chancelier de Dombes, pour enſeigner les Mathematiques à ce Prince, qui avoit pour lors environ quatorze ans.

M. de Malezieu étoit depuis pluſieurs années chargé des affaires & de tout le détail de la maiſon de Monſeigneur nôtre Auguſte Souverain, qu'il avoit eu l'honneur d'élever. Malgré ces grandes occupations, Sa Majeſté voulut abſolument qu'il ſe chargeât encore d'enſeigner Monſeigneur le Duc de Bourgogne, & fit l'honneur à M. de Malezieu de lui dire ; que la pénetration du Prince & ſa curioſité naturelle pour les Sciences, jointe à un caractere d'eſprit porté de lui-même aux plus hautes méditations, demandoit, pour ſon inſtruction, un homme qui fût ſuperieur à la matiere dont il étoit queſtion, & que ſi l'on eût connu quelqu'un plus propre à ménager un pareil Eſprit, on ne ſe ſeroit pas aviſé d'aller chercher pour cela un homme occupé de tant de grandes affaires.

Pour obéïr aux Ordres du Roi, M. de Malezieu commença ſes leçons les premiers jours de Decembre. Il connut en peu de jours à qui il avoit à faire. Il trouva un Eſprit qui devoroit les difficultés, & qui voïoit ſouvent, d'un coup d'œil, au delà de ce qui lui étoit propoſé ; mais qui par la facilité qu'il avoit à les ſurmonter ordinairement, tomboit quelquefois dans l'inconvenient de vouloir paſſer à côté quand il ne les emportoit pas d'abord. Cela détermina M. de Malezieu à propoſer au Prince d'écrire de ſa main, au commencement d'une leçon, ce qui lui avoit été enſeigné la veille ; afin que ſe dictant à lui-même ce qu'il avoit appris, & repaſſant par ordre & à loiſir l'enchaînement des veritez Geometriques, il s'accoûtumât à aller moins vîte & plus ſûrement. Tout réüſſit comme on l'avoit prévû. En moins de ſix mois le jeune Prince acquit une étenduë d'eſprit ſurprenante, & une facilité merveilleuſe à raiſonner ſur les matieres les plus difficiles.

Il eſt aiſé de juger, par la lecture de cet Ouvrage, qu'il a été compoſé ſur le champ. Il y a pluſieurs négligences dans le ſtile ; & d'ailleurs, comme le Prince écrivoit pour lui-même, on remarque ſouvent dans les Demonſtrations une certaine brieveté & une certaine préciſion qui ſemble d'abord n'être pas ſuffiſante pour y faire entrer les autres : mais outre qu'elles n'avoient pas été faites dans le deſſein d'être publiées, on connoît par experience que tout ce qui dépend du raiſonnement ne ſçauroit être propoſé trop préciſément ; & même que plus les choſes ſont difficiles à concevoir, plus il faut tâcher d'en abreger les preuves.

Nous avons appris de M. de Malezieu, qu'il a eu pendant quatre années la ſatisfaction de voir tous les jours Monſeigneur le Duc de Bourgogne ſortir de l'étude avec regret, & attendre avec impatience le moment de re-commencer. Il y a tout lieu d'eſperer que la juſteſſe de ſa raiſon paroîtra quelque jour avec ſuccés dans quelque choſe de bien plus important que les Mathematiques, & qu'il la fera ſervir au bonheur des hommes dans le Gouvernement de la grande Monarchie que la Providence lui a deſtinée.

Le fonds de ces Elemens n'eſt pas fort different des Elemens de M. Arnaud. Aprés un ſerieux examen de tous ceux qui ont parû juſqu'à preſent, M. de Malezieu a crû devoir s'arrêter à ceux-cy, dont l'ordre eſt ſans comparaiſon plus naturel. Quand on prendra la peine de les examiner, auſſi ſoigneuſement qu'il a fait, on reconnoîtra avec lui, qu'ils ſont beaucoup plus féconds que les Elemens d'Euclide, plus aiſez à comprendre, & incomparablement plus aiſez à retenir. Ce n'eſt pas hazarder beaucoup que de tenter cet examen ſur la parole de M. de Malezieu. Le public ſçait à quel point il poſſede les Mathematiques, & les plus habiles en cette Science ſont accoûtumés, depuis long-tems, à le conſulter ſur tout ce qu'elle a de plus relevé. Ainſi quand un homme, auſſi pénetrant qu'il l'eſt dans cette matiere, s'eſt déterminé au choix de ces Elemens, pour les enſeigner à l'heritier du premier Royaume de l'Univers ; les perſonnes, qui veulent s'adonner à cette étude, n'ont rien de mieux à faire que de ſuivre le même chemin.

On a retranché des Elemens de M. Arnaud quelques propoſitions qui ne paroiſſoient pas de grand uſage : on y en a ajoûté pluſieurs autres qui ont parû de grande utilité. On a expliqué en peu de propoſitions les Elemens des *Solides*, on a même paſſé juſqu'à la *Trigonometrie*, & aux principes de la conſtruction des *Tables de Sinus*, qui doivent en effet être regardées comme faiſant partie des Elemens. Enfin on a tâché de ne rien omettre de tout ce qu'on a jugé neceſſaire pour ouvrir l'entrée de ces grandes veritez, qui ſont le dernier effort de l'eſprit humain, qui en font ſi bien connoître l'excellence, & qui ſervent de fondement aux Sciences & aux Arts les plus neceſſaires à la vie.

Definitions et Demandes.

La Science des Mathematiques a pour objet la *quantité* en general, l'*étenduë*, les *nombres*, les *mouvemens*.

La *Geometrie* considere l'*étenduë* en particulier.

L'*étenduë* a trois dimensions : *longueur*, *largeur*, *profondeur*.

La *longueur* considerée sans *largeur* & sans *profondeur*, se nomme *ligne*.

La *longueur* & la *largeur* considerées ensemble indépendemment de la *profondeur*, se nomment *surface*.

La *longueur*, la *largeur* & la *profondeur* considerées ensemble, se nomment *corps* ou *solide*.

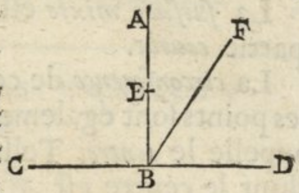
La *ligne* est de trois sortes, *droite*, *courbe*, *mixte*.

La *ligne droite* est la plus courte mesure entre deux points. Telle est la ligne *AB*. *A*·————·*B*.

Le *point* est l'extremité d'une *ligne*, & l'on le considere comme n'aïant ni *longueur*, ni *largeur*, ni *profondeur*. En effet, il ne peut avoir de *largeur*, puisque la *ligne* même n'en a point ; & il ne peut avoir de *longueur*, puisqu'il deviendroit lui-même une *ligne*, & n'en seroit pas seulement l'extremité.

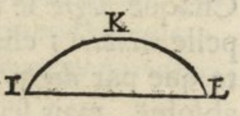
La position d'une *ligne droite* ne dépend que de deux *points* donnés. Car supposant que l'un coule directement vers l'autre, il décrira une *ligne droite* qui peut être continuée à l'infini en faisant toûjours couler ce *point* directement, c'est à dire, sans détour ou autrement sans changer la direction vers le *point* où le premier a commencé à se mouvoir : ainsi quiconque a deux *points* d'une *ligne droite*, a la ligne toute entiere.

Une *ligne droite* est dite *perpendiculaire* à l'égard d'une autre ligne droite, quand deux des points de la premiere sont posés directement sur un même point de la ligne à laquelle elle est dite perpendiculaire. Par exemple, la ligne *AB* eſt dite perpendiculaire à la ligne *CBD*, parceque deux de ſes points comme *A*, *E*, ſont poſés directement ſur le point *B*. Enſorte que le point *A*, coulant directement vers *E*, & décrivant la



ligne *AE*, rencontre le point *B*, s'il continuë à ſe mouvoir directement, & que toute la ligne *AEB* ſera tellement ſituée à l'égard de la ligne *CBD* que tous les points de la premiere ſeront poſés directement ſur le point *B* qui eſt commun aux deux lignes, & par conſequent que la ligne *AEB* n'inclinera pas plus d'un côté que d'autre à l'égard de la ligne *CBD*. On eſt donc aſſuré que cela eſt, quand deux points, comme *A*, *E*, ſont poſés directement ſur le point commun *B*; parceque ces deux points déterminent la poſition de la ligne; au lieu que la ligne *BF*, en cet exemple, eſt dite *oblique* à l'égard de la ligne *CBD*, parcequ'elle incline plus d'un côté que de l'autre.

La *ligne courbe* eſt celle qui s'écarte de la droite, & qui n'eſt pas la plus courte meſure entre deux points donnés, comme par exemple, la ligne *IKL* qui s'écarte de la droite *IL*.



La *ligne mixte* eſt celle qui eſt en partie droite, en partie courbe.

Deux *lignes droites* ne ſe peuvent couper qu'en un point, qui ſe nomme point d'interſection.

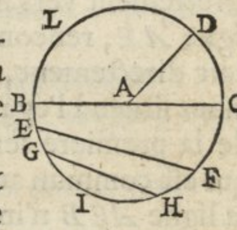
Il y a auſſi trois ſortes de *ſurfaces*: des *planes*, des *courbes*, des *mixtes*.

La *ſurface plane*, qu'on appelle auſſi *plan*, eſt celle qui eſt ſi également compriſe entre ſes extremités, qu'aucun point de toute ſon étenduë n'eſt ni plus élevé, ni plus enfoncé que l'autre, telle qu'eſt à peu prés la ſurface de nos miroirs ordinaires.

La *ſurface courbe* eſt celle qui a tous ſes points inégalement poſés entre les extremités qui la terminent, telle qu'eſt la ſurface d'une boule ou d'un œuf.

La *surface mixte* eſt celle qui eſt en partie *plane*, en partie *courbe*.

La *circonference* de cercle eſt une *ligne courbe*, dont tous les points ſont également éloignés d'un même point qu'on appelle le *centre*. Telle eſt la courbe *LBEGIHFCD* dont le centre eſt *A*.



Une *ligne droite* qui paſſant par le *centre A*, ſe termine de part & d'autre à la *circonference*, comme la ligne *BAC*, ſe nomme *diametre*.

Toute *ligne droite* partant du *centre* & terminée par la *circonference*, ſe nomme *raïon*. Telle eſt *AD*, *AC*, *AB*.

Toute *ligne droite* qui ne paſſe point par le *centre*, & qui ſe termine de part & d'autre à la *circonference*, ſe nomme *corde*. Telle eſt la ligne *EF* ou *GH*.

La portion de la *circonference* déterminée par une *corde*, ſe nomme *arc*. Ainſi la portion *EGIF* eſt l'*arc* de la *corde EF*, comme la portion *GIH* eſt l'*arc* de la *corde GH*.

L'uſage a voulu que les Geometres diviſaſſent la *circonference* en 360 parties égales, qui ſe nomment *degrés*. Chaque *degré* ſe diviſe en 60 parties égales, qu'on appelle *minutes*; chaque *minute* en 60 *ſecondes*, &c. De ſorte que par *degré* il ne faut pas entendre une grandeur abſoluë, mais ſeulement la 360me partie de quelque *circonference* que ce ſoit, grande ou petite. Ainſi la plus petite *circonference* a autant de *degrés* que la plus grande; mais elle les a plus petits à proportion.

La *ſurface plane* terminée par la *circonference*, ſe nomme *cercle*.

Tous les *raïons* du même *cercle* ſont égaux.

Les *cercles* égaux ont le *raïon* égal.

Dans le même *cercle* ou dans les *cercles* égaux les *cordes* égales ſoûtiennent des *arcs* égaux, & les *arcs* égaux ſont ſoûtenus par des *cordes* égales.

Les *cordes* égales dans le même *cercle* ſont également éloignées du *centre*.

Axiomes ou Verite's connues d'elles-mêmes.

Le tout eſt plus grand que ſa partie.

Le contenant eſt plus grand que le contenu.

Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

Deux choſes égales à une même choſe, ſont égales entr'elles.

Si à choſes égales l'on ajoûte choſes égales, les ſommes ſeront égales.

Si de choſes égales l'on retranche choſes égales, les reſtes ſeront égaux.

C'eſt la même choſe de multiplier 12 *par* 8, *ou de multiplier* 8 *par* 12.

C'eſt la même choſe de multiplier 12 *par* 8, *ou de multiplier* 12 *par pluſieurs parties, qui toutes enſembles ſoient égales à* 8. *Par exemple,* 2. 4. 1. 1. *valent* 8. *Si je multiplie* 12 *par* 2, 12 *par* 4, 12 *par* 1, 12 *par* 1, *viendra* 24. 48. 12. 12. *ces quatre nombres ſont enſemble* 96, *& j'aurois eu de même* 96, *ſi j'avois tout d'un coup muliplié* 12 *par* 8. *En un mot, c'eſt la même choſe de multiplier une grandeur par un tout, ou de multiplier cette grandeur par toutes les parties de ce tout.*

Deux grandeurs qui ſont même partie d'une même grandeur, ſont égales.

Si deux grandeurs égales ſont multipliées par la même, les produits ſont égaux.

Si deux grandeurs égales ſont diviſées par une même grandeur, les quotiens, c'eſt à dire, les grandeurs qui reſultent de la diviſion ſeront égales.

On ſuppoſe que l'on ſçache l'Arithmetique, & même l'extraction de la racine quarrée.

Il ſeroit fort à deſirer que ceux qui commencent vouluſſent bien ſe donner la peine de lire attentivement le petit Traité d'*Arithmetique par lettres* que voici. La matiere paroît plus difficile qu'elle ne l'eſt en effet. En tout cas ils ſeront bien récompenſés de leur peine, par le plaiſir qu'ils auront de voir dans la ſuite l'utilité & la fécondité de cet abregé. Si cependant l'on ne ſe trouve pas encore aſſez d'habitude pour s'y appliquer, on peut abſolument le paſſer, à condition d'y revenir quand l'exercice qu'on aura fait de ſa raiſon dans les premiers Livres des Elemens, aura accoûtumé l'eſprit à une attention plus ſuivie.

ABREGE' DE L'ARITHMETIQUE PAR LETTRES,

Qu'on nomme ordinairement ſpecieuſe. ou ALGEBRE.

CEtte eſpece d'Arithmetique convient à toutes ſortes de grandeurs, ſoit nombres, lignes, ou mouvemens.

Ainſi *A*, & *B*, ſignifient quelquefois deux nombres, comme 3, 10. Quelquefois deux lignes — ——— enſorte que *A* plus *B* veut quelquefois dire 3, plus 10; & quelquefois une ligne ajoûtée à une autre, ſuivant que celui qui opere l'a voulu.

On a inventé des ſignes pour abreger les operations. $+$ ſignifie *plus.*, $-$ ſignifie *moins.*, $=$ ſignifie *égal*; enſorte que $A+B$, ſignifie, la grandeur *A* jointe à la grandeur *B*. $B-A$, ſignifie la grandeur *B* *moins* la grandeur *A*. $B-A=C+D$, ſignifie que la grandeur *B* *moins* la grandeur *A* eſt égale à la grandeur *C* *plus* la grandeur *D*.

Deux lettres comme *AD* miſes l'une prés de l'autre, ſignifient la grandeur *A* multipliée par la grandeur *D*, ou le produit de l'une par l'autre.

ADC par la même raiſon ſignifie le produit de *A* par *D* multiplié par la grandeur *C*. Si donc *A* ſignifie 3, que *D* ſignifie 4, & que *C* ſignifie 5; *AD* ſignifiera 12, qui eſt le produit de 3 par 4, & *ADC* ſignifiera 12 multiplié par 5, c'eſt à dire 60.

Par conſequent *AA* ou *BB* veut dire le quarré de la grandeur *A* ou le quarré de la grandeur *B*, puiſqu'un quarré

quarré n'eſt autre choſe qu'une grandeur multipliée par elle-même. Ainſi ſi A ſignifie 6, AA ſera 36. De même AAA veut dire le cube de la grandeur A.

Il s'enſuit encore qu'il n'y a point de difference entre ABC, ACB, CAB; parceque ſi A ſignifie 2, que B ſignifie 3, & C 4: deux fois trois multiplié par 4 n'eſt pas different de deux fois quatre multiplié par 3, ni de trois fois 4 multiplié par 2.

Il ſuit delà ſans autre démonſtration, que ſi un produit eſt composé d'un nombre de lettres pairement pair, c'eſt à dire, d'un nombre pair diviſible par un nombre pair, comme par exemple $ABBA$, & qu'il y ait autant de fois A que de fois B; ce produit eſt neceſſairement un quarré, puiſque c'eſt AB multiplié par AB. D'où s'enſuit encore que le produit d'un quarré par un autre quarré, eſt toûjours un quarré. Par exemple $AABB$ eſt le produit de la grandeur AB par elle-même, & par conſequent un quarré.

$\frac{AB}{C}$ ſignifie que le produit de la grandeur A par la grandeur B eſt diviſé par la grandeur C; enſorte que ſi A eſt 2, que B ſoit 6, & que C ſoit 3, $\frac{AB}{C}$ ſignifie que le produit de 2 par 6, qui eſt 12, eſt diviſé par 3. Or 12 diviſé par 3 donne 4.

Addition.

Pour ajoûter pluſieurs grandeurs enſemble, il n'y a qu'à les joindre par le ſigne *plus*, obſervant que le ſigne $+$ doit être ſous-entendu où il n'y a point de ſigne. Par exemple B, c'eſt comme s'il y avoit $+B$; ainſi pour ajoûter enſemble les grandeurs que j'appele A, B, C, D, j'écris $A+B+C+D$.

Si une même grandeur eſt pluſieurs fois dans l'addition, je la mets autant de fois: Par exemple, je veux ajoûter enſemble les grandeurs A, B, A, A, D, au lieu de $A+B+A+A+D$, je mets pour abreger $3A+B+D$.

Que ſi je veux ajoûter la grandeur $A+B$ avec la grandeur $C+D-E$, je mets ſimplement $A+B+C+D-E$, laiſſant les ſignes $+$ & $-$ tels qu'ils ſont.

De même pour ajoûter le produit AB au produit CD, j'écris $AB+CD$.

Souſtraction.

a2b+3c. −a+3b−2c
a−2b+3c+a−3b+2c
ou 2a−5b+5c.

Si je veux ſouſtraire la grandeur $2A$ de la grandeur $4A$, je vois bien que le reſte eſt $2A$.

Pour ſouſtraire la grandeur B de la grandeur A, je n'ai qu'à écrire $A-B$.

Mais ſi de la grandeur A, je voulois ſouſtraire la grandeur $B-C$, il faudroit changer les ſignes de la grandeur $B-C$, & écrire ainſi $A-B+C$. En voici la raiſon.

Quand de la grandeur A, je ſouſtraits $B-C$, je ſouſtraits une grandeur moindre que B; ainſi ſi j'écrivois $A-B$ ſimplement; j'aurois trop ſouſtrait; & de combien trop? de la quantité C. Il faut donc l'ajoûter à $A-B$ pour faire la ſouſtraction juſte, c'eſt à dire, qu'il faut écrire $A-B+C$. Cela eſt évident en nombre.

De la grandeur 15 je veux ſouſtraire $7-3$, c'eſt à dire 4. Si j'écrivois $15-7$, je ſouſtrairois trop. Il faut donc pour ſouſtraire juſte écrire $15-7+3$, c'eſt à dire 11.

En un mot pour ſouſtraire une grandeur ou pluſieurs grandeurs d'une autre grandeur, il faut changer tous les ſignes des grandeurs à ſouſtraire, & les joindre ainſi à la grandeur dont on ſouſtrait

De la grandeur A, je veux ſouſtraire $B-C+D-E$, j'écris $A-B+C-D+E$, & l'operation eſt faite.

Multiplication.

Cette operation eſt la plus difficile. On la comprendra cependant avec un peu d'attention.

Si je veux multiplier la grandeur A, par la grandeur B, je ſçai déja qu'il faut écrire ſimplement AB.

Si je voulois multiplier 3 *A*, par 4 *B*, je devrois par la même raiſon écrire 12 *AB*.

Mais pour comprendre les operations ſuivantes, il faut ſe ſouvenir des axiomes poſez ci-devant.

Un tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

C'eſt la même choſe de multiplier un tout par lui-même, ou de le multiplier par chacune de ſes parties, & de prendre la ſomme de tous ces produits. Cela poſé,

Je veux multiplier la grandeur $A+B$ par la grandeur C; je conſidere que la grandeur $A+B$ a deux parties, ſçavoir A & B. Donc je dois multiplier A par C, & B par C, pour avoir le produit de la grandeur $A+B$ par C, c'eſt à dire que je dois écrire $AC+BC$.

Par la même raiſon, ſi je veux multiplier la grandeur $A+B$, par la grandeur $C+D$, je dois d'abord multiplier $A+B$ par C, c'eſt à dire que je dois mettre comme ci-deſſus $AC+BC$. Mais il faut encore multiplier $A+B$ par D, c'eſt à dire que je dois mettre $AD+BD$. Donc la multiplication totale eſt $AC+BC+AD+BD$.

2a 3b par
4a + 5b
$8a^2 - 12ab$
$+10ab - 15b^2$
ou $8a2 - 2ab - 15b^2$

En nombres je veux multiplier $2+3$ par $4+5$, c'eſt à dire 5 par 9, ce qui produit 45. Je multiplie 2 par 4, 2 par 5, 3 par 4, 3 par 5, viennent les produits 8, 10, 12, 15, dont la ſomme eſt 45.

En un mot, il faut faire autant de multiplications partiales, qu'il y a de caracteres differens dans le multipliant, & dans la grandeur à multiplier.

Que ſi j'avois à multiplier $A+B$ par $C-D$, j'écrirois ainſi le produit $AC+BC-AD-BD$, me ſouvenant toûjours que quand je multiplie le ſigne $+$ par le ſigne $-$, le produit eſt moins. C'eſt la même raiſon que dans la ſouſtraction. La choſe eſt évidente dans les nombres. Car ſi A eſt 6, que B ſoit 5, C ſoit 4, & que D ſoit 3, il s'agit de multiplier $6+5$ par $4-3$. Je multiplie $+6$ par $+4$ vient plus 24, je multiplie 5 par 4 vient $+20$, je multiplie $+6$ par -3 vient -18, je multiplie $+5$ par -3 vient -15. Ces quatre produits enſemble font 24 + 20 − 18 − 15, c'eſt à dire 11. Ce qui doit venir en effet au produit, puiſque multiplier 6 + 5 par 4 − 3, c'eſt multiplier 11 par 1.

Mais il y a une autre obſervation importante à faire, qui eſt, que lorſque je multiplie le ſigne − par le ſigne −, le produit doit avoir le ſigne +.

Par exemple, je multiplie $A - B$ par $C - D$; je dois écrire au produit $AC - BC - AD + BD$.

J'écris $+ AC$, parceque c'eſt $+ A$, multiplié par $+ C$. J'écris $- BC$, parceque c'eſt $- B$ multiplié par $+ C$. J'écris $- AD$, parceque c'eſt $+ A$ multiplié par $- D$. J'écris $+ BD$, parceque c'eſt $- B$ multiplié par $- D$.

Pour en comprendre clairement la raiſon; que A vaille 8, B ſoit 2, C ſoit 6, D ſoit 1. J'ai à multiplier $A - B$ par $C - D$, c'eſt à dire + 8 − 2 par + 6 − 1 ou 6 par 5, il doit venir 30 au produit.

Je multiplie + 8 par + 6, vient + 48. Je multiplie − 2 par + 6, vient − 12. Je multiplie + 8 par − 1, vient − 8. Je multiplie − 2 par − 1, vient + 2. Tous ces produits ajoûtez enſemble font 48 − 12 − 8 + 2, c'eſt à dire 30, comme il devoit arriver.

En voici la raiſon. Lorſque je fais la multiplication partiale de 8 par 6, elle eſt trop grande; & de combien? de 8 fois 1, parceque 8 ne devoit être multiplié réellement que par 6 − 1, c'eſt à dire par 5, il faudra donc déja diminuer 8; ainſi j'aurai à mettre − 8 dans la multiplication totale. Puis quand je viens à multiplier − 2 par + 6, il me vient − 12: mais ce − 12 ôte trop, parceque je devois réellement multiplier − 2 par 6 − 1, c'eſt à dire par 5, & le produit n'eût été que − 10. Ayant donc ôté 2 de trop, je dois les remettre dans l'addition des multiplications partiales, & c'eſt auſſi ce que je fais en écrivant + 2 pour le produit de − 1 par − 2. Ce raiſonnement eſt clair, mais il demande de l'attention.

Division.

L'operation eſt fort courte ; il n'y a qu'à ſéparer par une petite barre la grandeur qu'on diviſe, & la grandeur qui doit diviſer ; enſorte que la grandeur qu'on diviſe ſoit au deſſus, & l'autre deſſous. Ainſi pour diviſer A, par B, j'écris $\frac{A}{B}$. Pour diviſer BC par X, j'écris $\frac{BC}{X}$. Pour diviſer BCD par G, j'écris $\frac{BCD}{G}$.

Il y a ſeulement une obſervation à faire, qui eſt, que s'il ſe trouve la même ou les mêmes lettres au deſſus & au deſſous de la barre, il n'y a qu'à les effacer. L'expreſſion demeure la même, mais plus ſimple. Ainſi ayant $\frac{ABCD}{ABX}$, j'écris ſimplement $\frac{CD}{X}$.

La raiſon de cela eſt, que pour multiplier la grandeur $\frac{CD}{X}$ par AB, je dois écrire $\frac{CDAB}{X}$; & diviſant ce produit par AB, je n'ai qu'à écrire AB au deſſous ainſi $\frac{CDAB}{XAB}$. Or multiplier une grandeur par une grandeur, puis diviſer le produit par la même grandeur, c'eſt ne la pas changer. Par exemple, multiplier 5 par 4, vient au produit 20. Diviſer 20 par 4, revient le premier nombre 5.

Si j'avois $\frac{12ABC}{4AC}$, cela voudroit dire ſimplement $3B$. Car diviſant le numerateur & le dénominateur par 4, viendra $\frac{3ABC}{AC}$, c'eſt à dire $3B$; puiſque $3B$, multipliez par AC, puis diviſez par AC, c'eſt toûjours $3B$.

En voilà aſſez pour aller fort avant dans les plus importantes démonſtrations.

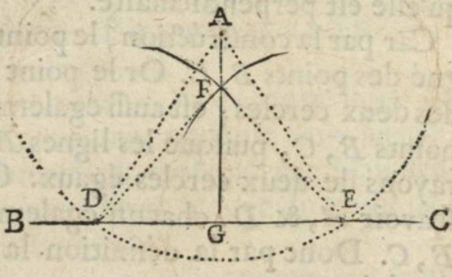
ELEMENS
DE
GEOMETRIE.

PREMIER LIVRE.

Des Perpendiculaires & des Obliques.

PREMIERE PROPOSITION.

D'UN point donné comme *A*, faire tomber une perpendiculaire sur une ligne donnée comme *BC*.

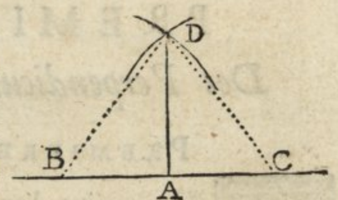


Du point *A*, pris pour centre, soit décrit un cercle quelconque, coupant la ligne donnée en deux points, comme *DE*. Des deux points *DE*, pris pour centres, soient décrits deux cercles égaux entr'eux, mais dont le rayon soit plus grand ou plus petit que le rayon du premier cercle, & qui s'entre-coupent en un point, comme *F*. Par le point donné *A*, & par le point d'interſection *F* ſoit menée la ligne droite *AFG*; je dis qu'elle eſt perpendiculaire à la ligne donnée *BC*.

Car par la conſtruction, les deux lignes *AD*, *AE*, ſont égales, puiſqu'elles ſont rayons du même cercle; les deux lignes *FD*, *FE*, ſont égales, puiſqu'elles ſont rayons de deux cercles égaux : Donc l'on a deux points, comme *A*, *F*, qui ſont chacun également éloignez des deux points *D*, *E*. Donc tous les points de la ligne *AFG* ſont chacun également éloignez des deux points *D*, *E*, puiſque deux points déterminent la poſition d'une ligne. Donc cette ligne *AFG*, n'incline ni d'un côté ni d'autre. Ce que l'on appelle être perpendiculaire.

SECONDE PROPOSITION.

D'un point comme *A*, donné dans la ligne *BAC*, élever une perpendiculaire.



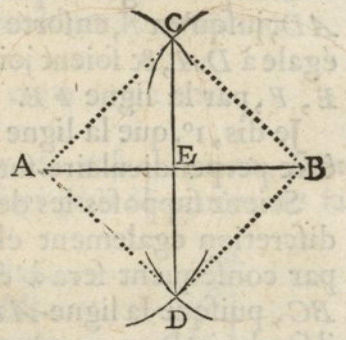
Soient pris deux points comme *B*, *C*, également éloignez du point *A*; des points *B*, *C*, pris pour centre ſoient décrits deux cercles égaux, qui ſe coupent en un point, comme *D*, par lequel & par le point donné *A*, ſoit menée la ligne *AD*; je dis qu'elle eſt perpendiculaire.

Car par la conſtruction, le point *A*, eſt également éloigné des points *B*, *C*. Or le point *D*, point d'interſection des deux cercles, eſt auſſi également éloigné des mêmes points *B*, *C*, puiſque les lignes *BD*, *CD*, ſont ſuppoſées rayons de deux cercles égaux. On a donc deux points, ſçavoir *A*, & *D*, chacun également éloigné des points *B*, *C*. Donc par la définition la ligne *AD*, eſt perpendiculaire.

TROISIE'ME

TROISIE'ME PROPOSITION.

Diviser une ligne donnée, comme AB, en deux parties égales.



Des deux points A, B, extremités de la ligne donnée, pris pour centres, soient décrits deux cercles égaux qui se coupent en deux points, comme C, D. Par les deux points d'intersection soit menée la ligne CD, je dis qu'elle coupe la ligne donnée au point E, en deux parties égales.

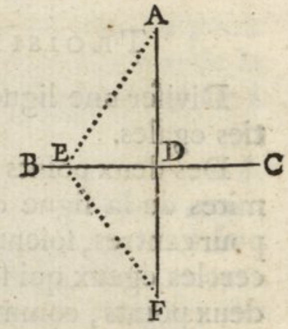
Car les deux cercles, étant égaux, les quatre lignes CA, CB, DA, DB, qui en sont rayons, doivent être égales, & par conséquent les points C, D, également éloignés des points A, B. Donc tout autre point de la ligne CD, doit être également éloigné des points A, B: Donc le point E, lui-même est également éloigné des points A, B, extremités de la ligne, & par conséquent la divise en deux parties égales.

On ne sçauroit s'imprimer trop fortement dans l'esprit, que ces trois Propositions sont principalement fondées sur la notion de la ligne droite, dont la position est totalement déterminée par deux points.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

D'un point donné comme A, hors d'une ligne comme BC, on ne peut faire tomber qu'une seule perpendiculaire sur la ligne donnée, & cette perpendiculaire est plus courte que toute autre ligne menée du point A, & terminée par la ligne donnée BC.

Soit la perpendiculaire AD, & soit menée du point A à quelque point comme E, de la ligne donnée la ligne AE; je dis que la ligne AD peut seule être perpendi-



culaire, & qu'elle eſt neceſſairement plus courte que la ligne *A E* qui eſt oblique.

Soit prolongée la perpendiculaire *AD*, juſqu'en *F*, enſorte que *DF*, ſoit égale à *DA*, & ſoient joints les points *E*, *F*, par la ligne *FE*.

Je dis, 1°. que la ligne *AE*, ne peut être perpendiculaire ſur la ligne *BC*.

Soient ſuppoſés les deux points *B C*, ou deux autres à diſcretion également éloignés du point *A*; le point *D* par conſéquent ſera à égale diſtance des mêmes points *BC*, puiſque la ligne *AD*, eſt ſuppoſée perpendiculaire, il faudroit donc, pour que la ligne *AE*, fût auſſi perpendiculaire que ſon point *A*, étant également éloigné des points *B*,*C*, ſon point *E*, fût auſſi à égale diſtance des points *B*, *C*; ce qui eſt manifeſtement impoſſible, puiſqu'il eſt entre *B* & *D*, & que le point *D*, a été ſuppoſé lui-même également éloigné des points *B*, *C*.

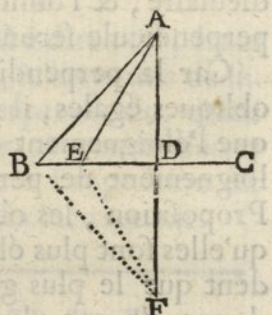
Je dis, 2°. que la ligne *AD*, eſt plus courte que la ligne *A E*. Car puiſque la ligne *AD*, eſt perpendiculaire ſur *B C*, la ligne *BD*, ſera auſſi perpendiculaire ſur la ligne *A F*. Or par la conſtruction le point *D*, eſt également éloigné des points *A* & *F*. Donc le point *E*, point de la perpendiculaire, eſt auſſi à égale diſtance des mêmes points *A*, *F*. C'eſt à dire que la ligne *AE*, eſt égale à la ligne *E F*. Or les lignes *A E*, *E F*, priſes enſemble, ſont plus longues que *A D*, *D F*, priſes enſemble, puiſque *AF*, eſt une ligne droite, c'eſt à dire, la plus courte meſure entre les points *A*, *F*, donc *AD*, moitié de *AF*, eſt plus courte que *AE*, moitié de *A E F*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE, *ou conſéquence évidente de cette Propoſition.*

Il s'enſuit de cette Propoſition que deux lignes droites, perpendiculaires ſur une même ligne, ne peuvent jamais ſe rencontrer, quoique prolongées à l'infini; car ſi elles ſe rencontroient en un point, il ſeroit vrai de dire que de ce point de rencontre partiroient deux perpendiculaires à une même ligne. Ce que nous venons de démontrer impoſſible dans la précedente Propoſition.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Les lignes obliques, partant du même point, ſont d'autant plus longues qu'elles ſont plus éloignées de la perpendiculaire.



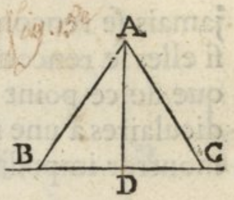
Soit la ligne *AD*, perpendiculaire ſur la ligne *BC*. Soient les obliques *AE*, *AB*, menées du point *A*, je dis que la ligne *AB*, eſt plus longue que la ligne *AE*. Soit prolongée *AD*, juſqu'en *F*, enſorte que *DF* ſoit égale à *DA*, & ſoient menées les lignes *EF*, *BF*.

Puiſque *AD*, eſt perpendiculaire ſur *BC*, il faut que *BD*, ſoit perpendiculaire ſur *AF*; cela étant, comme le point *D*, eſt ſuppoſé également éloigné des points *A*, *F*, tout autre point de la perpendiculaire *BD*, ſera à égale diſtance des mêmes points *A*, *F*; donc *BA*, eſt égale à *BF*, comme *EA*, eſt égale à *EF*. Or *ABF*, contenant *AEF*, eſt plus grand que *AEF*, donc *AB*, moitié de *ABF*, eſt plus grande que *AE*, moitié de *AEF*.

SIXIE'ME PROPOSITION.

De trois choſes qu'on peut comparer, ſçavoir la perpendiculaire, l'oblique, & l'éloignement de perpendicule; ſi deux ſont égales, il s'enſuit que la troiſiéme l'eſt auſſi.

Premier cas. Soit la perpendiculaire *AD*, égale à elle-même; *BD*, éloignement de perpendicule égale à *DC*,



autre éloignement de perpendicule; je dis que l'oblique *AB*, eſt égale à l'oblique *AC*. Car la ligne *AD*, étant perpendiculaire ſur la ligne *BC*, & le point *D*, étant ſuppoſé également éloigné des points *B*, *C*, tout autre point de la perpendiculaire, comme *A*, ſera auſſi à égale diſtance des mêmes points *B*, *C*. Donc les deux obliques *AB*, *AC*, qui meſurent cette diſtance, ſeront égales.

Second cas. Si la perpendiculaire eſt égale à la perpendiculaire, & l'oblique à l'oblique, les éloignemens de perpendicule ſeront égaux.

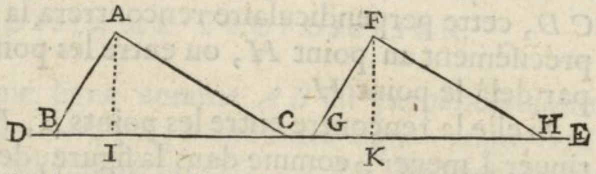
Car la perpendiculaire étant la même, & les deux obliques égales, il s'enſuit par la cinquiéme Propoſition que l'éloignement de perpendicule *DB*, eſt égal à l'éloignement de perpendicule *DC*; puiſque, par cette Propoſition, les obliques ſont d'autant plus longues, qu'elles ſont plus éloignées du perpendicule, étant évident que le plus grand éloignement de perpendicule donneroit une plus longue oblique, ſi ces éloignemens n'étoient pas égaux.

Troiſiéme cas. Si l'oblique eſt égale à l'oblique, & l'éloignement de perpendicule égal à l'éloignement de perpendicule, la perpendiculaire ſera égale à la perpendiculaire.

C'eſt la même preuve que celle du cas précedent. Il ne faut que conſiderer *BD*, *DC*, comme perpendiculaires, & *AD*, comme éloignement de perpendicule. Il eſt évident que *BD*, étant égale à *DC*, *BA*, égale à *CA*, il faut que *AD*, ſoit égale à *DA*, c'eſt à dire, à elle-même.

SEPTIÉME PROPOSITION.

Deux lignes obliques, inégales entr'elles & inclinées de different côté, comme la ligne *AB*, *AC*, étant menées du point *A*, ſur la ligne *DC*: Et deux autres lignes, inégales entr'elles, mais dont chacune eſt égale à chacune des deux premieres, comme les lignes *FG*, *FH*, étant menées du point *F* ſur la même ligne *GE*; ſi *BC*, diſtance des points de ſection des deux premieres, eſt égale à *GH*, diſtance des points de ſection des deux dernieres, les deux points *A*, *F*, d'où elles partent, ſont également diſtants de la ligne à laquelle elles ſont menées.



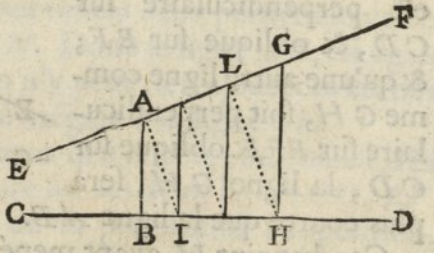
Car par le dernier cas de la Propoſition précedente, les obliques étant égales aux obliques, c'eſt à dire *AB*, étant égale à *FG*, *AC*, étant égale à *FH*, & les points de ſection *BC*, *GH*, éloignemens de perpendicule, étant ſuppoſés égaux, il faut bien que les perpendiculaires *AI*, *FK*, ſoient égales. Cette derniere Propoſition eſt de grand uſage, & il eſt important de la bien retenir.

SECOND LIVRE.

Des Paralleles.

APrés avoir conſideré, dans le premier Livre, une proprieté des lignes droites, qui eſt de ſe rencontrer perpendiculairement ou obliquement, nous conſidererons dans celui-cy une proprieté oppoſée, qui eſt de ne ſe rencontrer jamais.

PREMIERE PROPOSITION.



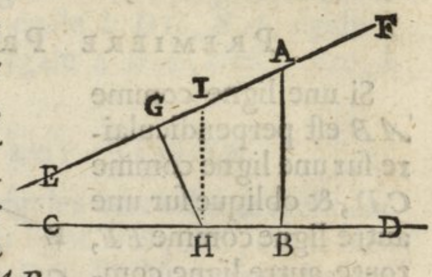
Si une ligne comme *AB* eſt perpendiculaire ſur une ligne comme *CD*, & oblique ſur une autre ligne comme *EF*, toute autre ligne comme *GH*, qui ſera perpendiculaire ſur *C D*, ſera neceſſairement oblique ſur *E F*, & la plus courte de toutes ſera celle qui ſera la plus proche de l'inclinaiſon des lignes *C D*, *E F*, c'eſt à dire, la plus proche du point où ces deux lignes prolongées ſe rencontreroient.

Car ayant mené du point *A*, une perpendiculaire ſur *C D*, cette perpendiculaire rencontrera la ligne *C D*, ou préciſément au point *H*, ou entre les points *B*, *H*, ou par delà le point *H*.

Si elle la rencontre entre les points *B*, *H*, il faut continuer à mener, comme dans la figure, des perpendiculaires & des obliques, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu, ou qu'on ait paſſé le point *H*. Et en tous ces cas, on démontrera que la ligne *G H*, eſt perpendiculaire ſur l'une, & oblique ſur l'autre. Par exemple, puiſque *A B*, eſt perpendiculaire ſur *C D*, *A I*, ſera oblique ſur *C D*, & par conſéquent *A I* ſera plus longue que *A B* par la quatriéme Propoſition du premier Livre. On démontrera en comparant toutes les lignes qui ſe ſuivent, que la ligne *L H*, eſt plus longue qu'aucune des précedentes, mais plus courte que la ligne *G H*, par la même Propoſition, & que *GH*, ſera oblique ſur *EF*, puiſque *HL*, y eſt perpendiculaire. Si la ligne *A I*, rencontre d'abord le point *H*, ce ſera la même démonſtration. Que ſi la ligne *A I* paſſe le point *H*, on démontrera la même choſe, en élevant au point *I*, une perpendiculaire ſur *C D*.

SECONDE PROPOSITION.

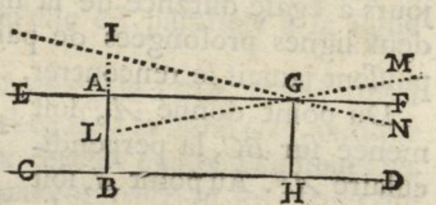
Si une ligne comme *AB* eſt perpendiculaire ſur *C D*, & oblique ſur *E F*; & qu'une autre ligne comme *G H*, ſoit perpendiculaire ſur *EF*, & oblique ſur *C D*, la ligne *G H*, ſera plus courte que la ligne *A B*.



Car du point *H*, ayant mené ſur *EF*, l'oblique *HI*, perpendiculaire ſur *CD*, elle ſera, par la précedente Propoſition, plus courte que la ligne *AB*, & en même-temps plus longue que la ligne *GH*, par la quatriéme Propoſition du premier Livre, à plus forte raiſon la ligne *GH*, ſera-t-elle plus courte que la ligne *AB*.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Si une même ligne comme *AB* eſt perpendiculaire aux deux lignes *CD*, *EF*; toute autre ligne comme *GH* qui ſera perpendiculaire ſur *CD*, ou *EF*, ſera perpendiculaire ſur l'autre, & de plus ſera égale à la perpendiculaire *AB*.

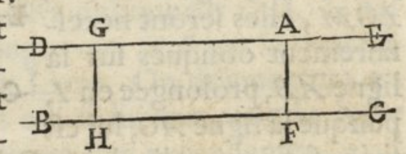


Car ayant mené par le point *G*, les lignes *IGN*, *LGM*, elles ſeront neceſſairement obliques ſur la ligne *AB*, prolongée en *I*, puiſque la ligne *AG*, lui eſt ſuppoſée perpendiculaire. Cela étant, il s'enſuit, 1°. par la premiere Propoſition de ce Livre, que la ligne *GH*, eſt égale à la ligne perpendiculaire *AB*. Car ſi l'on ajoûte la moindre portion à la ligne *AB*, ou ſi on en retranche la moindre partie, les lignes *AB*, *GH*, deviendront inégales. Si, par exemple, l'on ſuppoſe que la ligne *MGL*, en ait retranché la portion *AL*, le reſte *LB*, ſera plus petit que *GH*, par la premiere Propoſition; & ſi l'on ſuppoſe au contraire que la ligne *IGN*, y ait ajoûté la ligne *IA*, par la même Propoſition, *IAB*, ſera plus longue que *GH*: puiſque *IB*, *GH*, ſont toutes deux perpendiculaires ſur *CD*, & obliques ſur *IN*. Donc la ligne *AB*, eſt égale à la ligne *GH*, puiſqu'on n'y peut rien ajoûter ni en rien retrancher ſans la rendre inégale à la ligne *GH*.

Pour prouver maintenant que la perpendiculaire *GH* eſt en effet perpendiculaire ſur les deux lignes *CD*, *EF*, il n'y a qu'à ſe ſouvenir de la précedente Propoſition, où l'on a démontré que ſi une ſeule ligne eſt perpendiculaire ſur *CD*, & oblique ſur *EF*, toute autre ligne qui ſera perpendiculaire ſur *CD*, ſera oblique ſur *EF*. Donc ſi *GH*, étant perpendiculaire ſur *CD*, étoit oblique ſur *EF*, il s'enſuivroit que *AB*, qui eſt perpendiculaire ſur *CD*, ſeroit oblique ſur *EF*. Ce qui eſt contre la ſuppoſition.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Par un point donné comme *A*, faire paſſer une parallele à une ligne donnée comme *BC*, c'eſt à dire, tirer par le point *A*, une ligne dont tous les points ſoient toûjours à égale diſtance de la ligne *BC*, enſorte que ces deux lignes prolongées de part & d'autre à l'infini ne puiſſent jamais ſe rencontrer.



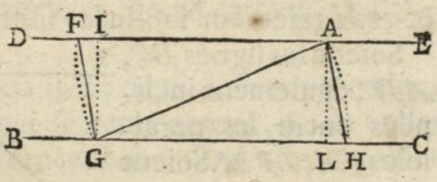
Du point donné *A*, ſoit menée ſur *BC*, la perpendiculaire *AF*. Au point *A*, ſoit menée ſur *AF*, la perpendiculaire *EA*, prolongée ſi l'on veut en *D*; je dis que la ligne *DGAE*, eſt parallele à la ligne donnée *BC*.

Car par la conſtruction, la ligne *AF* étant perpendiculaire aux deux lignes *DE*, *BC*, il s'enſuit, par la precedente Propoſition, que toute autre perpendiculaire, ſur une de ces lignes comme *GH*, ſera perpendiculaire ſur les deux, & égale à la perpendiculaire *AB*; donc les points *G*, *A*, ſeront chacun également éloignés de la ligne donnée *BC*; car la diſtance d'un point à une ligne, eſt meſurée par la perpendiculaire qui eſt la plus courte de toutes. Donc tout autre point de la ligne *DE*, ſera également éloigné de la ligne *BC* : Donc toute la ligne *DE*, ſera toûjours à égale diſtance de la ligne *BC*, en quoy conſiſte le paralleliſme.

Il s'enſuit de cette conſtruction, qu'étant donnée la ligne *BC*, & le point *A*, ſi l'on mene la perpendiculaire *AF*, & une autre perpendiculaire comme *HG*, égale à la premiere,

premiere, la ligne qui joindra les points *A*, *G*, sera la parallele demandée.

AUTRE CONSTRUCTION.

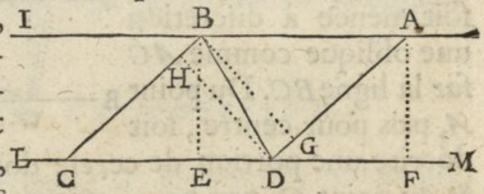


Par le point donné *A*, soit menée à discretion une oblique comme *AG* sur la ligne *BC*. Du point *A*, pris pour centre, soit décrite une portion de cercle dont le raïon soit *AG*, & du point *G*, pris pour centre, soit décrit l'arc *AH* dont le raïon soit *GA*. Soit pris l'arc *GF* égal, à l'arc *AH*. Par le point *F*, & le point donné *A*, soit menée la ligne *DFIAE*. Je dis qu'elle est parallele à la ligne *BC*.

Car la ligne oblique *AG*, est égale à *GA*, c'est à dire à elle-même: la ligne *FA*, est égale à la ligne *GH*, puisque ce sont deux raïons de deux cercles égaux. D'ailleurs les arcs *FG*, *AH*, étant égaux par construction, les cordes qui les soûtiennent seront égales, c'est à dire les lignes droites *FG*, *AH*. On peut donc considerer les deux lignes droites *GF*, *GA*, comme deux obliques inégales entre elles, & inclinées de different côté, menées du point *G*, sur la ligne *DE*. On peut aussi considerer les deux lignes droites *AH*, *AG* comme deux autres obliques inégales entre elles & inclinées de different côté, menées du point *A*, sur la ligne *BC*. Mais ces deux dernieres obliques inégales entre elles, sont chacune égale à chacune des deux premieres, c'est à dire, la ligne droite *GF*, égale à la droite *AH*; *GA*, égale à *AG*; & de plus *FA*, distance des points de section des deux premieres obliques, est égale à *GH*, distance des points de section des deux dernieres. Donc par la 7. Proposition du 1. Livre, les deux points *A*, *G*, d'où partent les obliques, sont chacun également distans de la ligne sur laquelle elles sont menées. Donc les deux perpendiculaires *AL*, *GI* sont égales, donc la ligne qui les renferme est parallele à la donnée.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Les également inclinées entre paralleles ſont égales, les portions des paralleles qu'elles coupent ſont égales ; & ces également inclinées ſont paralleles elles-mêmes.



Soient les lignes *BC*, *AD*, également inclinées entre les paralleles *IA*, *LFM*. Soient menées des points *B*, *A*, les perpendiculaires *BE*, *AF*. Des points *D*, *B*, ſoient menées les perpendiculaires *DH*, *BG* : & ſoient joints les points *B*, *D*, par la ligne *BD*.

Puiſqu'on ſuppoſe les obliques *BC*, *AD*, également inclinées, il faut que leurs éloignements de perpendicule *CE*, *DF*, ſoient égaux. Or leurs perpendiculaires *BE*, *AF* ſont égales, puiſqu'elles ſont entre paralleles, donc par le premier cas de la 6. Propoſition du 1. Livre, les obliques *BC*, *AD*, ſont égales.

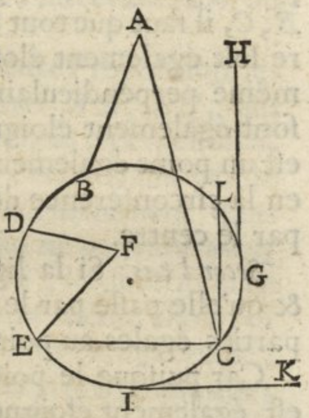
2°. Les portions des paralleles *BA*, *CD*, ſont égales. Car *BA* eſt égale à *FE*, puiſque les lignes *BA*, *FE*, ſont toutes deux perpendiculaires entre les lignes *BE*, *AF*, Or *CD*, eſt égale à *FE*, parceque *CE*, étant égale à *DF*, la grandeur *ED*, qui leur eſt commune, étant jointe à l'une & à l'autre, doit faire deux grandeurs égales. Donc *CD*, eſt égale à *BA*, qui eſt égale à *FE*.

3°. Les lignes *BC*, *AD*, également inclinées, ſont paralleles elles-mêmes ; car les trois lignes *BD*, *DA*, *AB*, ſont égales aux trois lignes *BD*, *BC*, *CD* chacune à chacune. Donc par la 7. Propoſition du 1. Livre, les perpendiculaires *DH*, *BG*, ſont égales. Donc elles ſont entre paralleles.

TROISIE'ME LIVRE.

Des lignes droites terminées à une circonference.

APRE'S avoir parlé dans les deux Livres précedens des lignes droites qui ſe rencontrent, & de celles qui ne peuvent jamais ſe rencontrer, nous allons parler dans celui-cy des lignes droites terminées à la circonference d'un cercle.



Ces lignes peuvent ou partir de dehors le cercle & le couper, en ce cas on les appelle ſécantes exterieures, telles ſont les lignes *AB*, *AC*.

Ou partir d'un point en dedans de la circonference, comme les lignes *FD*, *FE*, en ce cas on les nomme ſécantes interieures.

Ou partir d'un point hors du cercle, & toucher la circonference ſans la couper, quoique prolongées comme les lignes *GH*, *IK*, en ce cas on les nomme tangentes.

Ou partir d'un point de la circonference même, & aboutir à un autre point, comme les lignes *EC*, *LC*. Celles-cy s'appellent cordes.

Ainſi nous traiterons dans ce Livre ; des cordes ; des ſécantes interieures & exterieures ; & des tangentes.

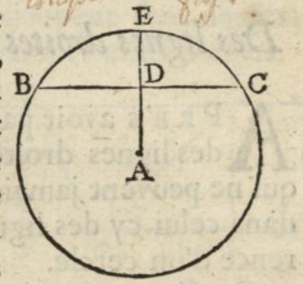
DES CORDES.

PREMIERE PROPOSITION.

La ligne droite qui couppe une corde, peut avoir trois conditions. Coupper la corde perpendiculairement.

Coupper la corde par la moitié. Passer par le centre du cercle. Deux de ces conditions données, donnent la troisiéme.

Premier cas. Si la ligne droite *EA*, perpendiculaire à la corde *BC*, la couppe en deux parties égales au point *D*, elle passe necessairement par le centre. Car puisque la ligne *EA*, est perpendiculaire, & que le point *D*, l'un de ses points est supposé également éloigné des points *B*, *C*, il faut que tout autre point de cette perpendiculaire soit également éloigné des points *B*, *C*, & que cette même perpendiculaire comprenne tous les points qui sont également éloignés des points *B*, *C*; or le centre est un point également éloigné des points *B*, *C*, qui sont en la circonference dont la perpendiculaire *E A*, passera par le centre.



Second cas. Si la ligne est perpendiculaire à la corde, & qu'elle passe par le centre *A*; elle la couppe en deux parties égales au point *D*.

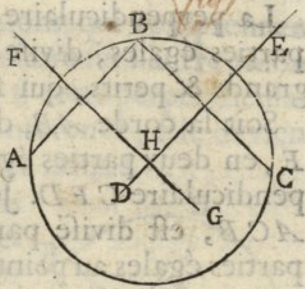
Car puisque le point *A*, qu'on suppose être le centre, est également éloigné des points *B*, *C*, & que la ligne *EA*, est perpendiculaire, il faut que tout autre point de cette même perpendiculaire soit également éloigné des points *B C*. Or le point *D*, est un point de cette perpendiculaire, donc il est également éloigné des points *B*, *C*. Donc la corde est divisée en deux parties égales.

Troisiéme cas. Si la ligne *E A*, passe par le centre, & qu'elle couppe la corde par la moitié; elle est perpendiculaire à la corde.

Car le centre & le point *D*, étant chacun à égale distance des points *B*, *C*, la ligne *A E*, sera perpendiculaire par la définition.

SECONDE PROPOSITION.

Par trois points quelconques, comme *A*, *B*, *C*, pour-veu qu'ils ne ſoient point dans une même ligne droite, faire paſſer une circonference.



Soient joints par une ligne droite les points *A, B*; & par une autre ligne droite, les points *B, C*. Soient diviſées perpendiculairement & par la moitié, les lignes *AB, BC*, par les lignes *FG, ED*. Le point *H*, interſection des deux perpendiculaires, ſera le centre de la circonference que l'on décrira de l'intervale *HA*, ou *HB*, ou *HC*.

Car par le premier cas de la précedente Propoſition, les lignes *FG*, *ED*, couppant les lignes *AB*, *BC*, qui doivent être des cordes du cercle requis, perpendiculairement & par la moitié; l'une & l'autre paſſe par le centre. Donc le centre doit être neceſſairement dans l'une & l'autre de ces deux lignes, qui ne pouvant avoir qu'un ſeul point commun, comme *H*, le déterminent à être le centre du cercle. On feroit la même choſe, ſi l'on propoſoit de trouver le centre d'un cercle donné, il n'y auroit qu'à marquer à diſcretion, trois points dans ſa circonference & faire comme cy-deſſus.

COROLLAIRE.

Quand on a trois points d'une circonference, on a toute la circonference: Car ayant trois points, on a le centre par la précedente Propoſition, & le centre avec un des points donnés déterminent le raïon.

COROLLAIRE II.

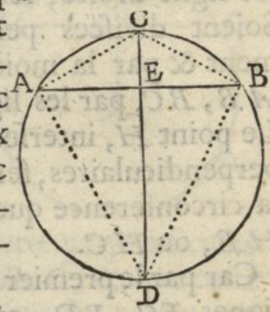
Si deux circonferences ont trois points communs, elles les ont tous, c'eſt à dire, que c'eſt la même circonference.

COROLLAIRE III.

Il eſt impoſſible que deux circonferences ſe couppent en plus de deux points.

TROISIE'ME PROPOSITION.

La perpendiculaire qui couppe une corde en deux parties égales, divise en deux parties égales, les arcs grands & petits, qui sont soûtenus par cette corde.



Soit la corde *AB*, divisée au point *E*, en deux parties égales par la perpendiculaire *CED*. Je dis que l'arc *ACB*, est divisé par elle en deux parties égales au point *C*, & que l'arc *ADB* est divisé en deux parties égales au point *D*. Soient menées les cordes *AC*, *CB*, *AD*, *DB*.

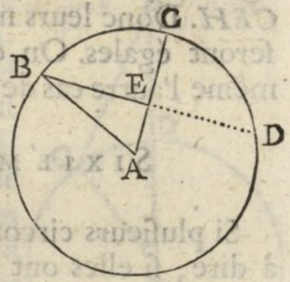
Si la corde *AC*, est égale à la corde *CB*, & que la corde *AD* soit égale à la corde *DB*, les arcs *AC*, *CB*, seront égaux entre eux, & les arcs *AD*, *DB*, pareillement; puisque suivant les Axiomes que nous avons supposés, dans le même cercle ou dans les cercles égaux, les cordes égales soûtiennent des arcs égaux. Or l'égalité des cordes *AC*, *CB*, est manifeste, aussi-bien que celle des cordes *AD*, *DB*. Car la ligne *CED*, étant perpendiculaire à la corde *AB*, & le point *E*, étant supposé également éloigné des extremités *AB*. Tout autre point de cette perpendiculaire, comme les points *C*, *D*, sera également éloigné des extremités *AB*, donc la ligne *AC*, qui mesure la distance des points *A*,*C*, est égale à la ligne *CB*, qui mesure la distance des points *C*, *B*, & la ligne *AD*, égale à la ligne *DB*; donc l'arc *AC*, égal à l'arc *CB*; & l'arc *AD* égal, à l'arc *DB*.

COROLLAIRE.

Tout raïon perpendiculaire sur le diametre, partage la demi circonference en deux parties égales: car le diametre est pour lors consideré comme une corde qui soûtient la demi circonference.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si de l'extremité de l'un des raïons qui comprennent un arc, l'on meine une perpendiculaire ſur l'autre raïon, elle s'appelle le Sinus de l'arc, & ſi cette perpendiculaire eſt prolongée juſqu'à la circonference, elle deviendra corde d'un arc double de l'arc donné.



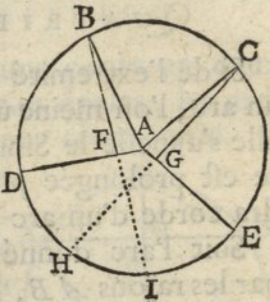
Soit l'arc donné *BC*, compris par les raïons *AB*, *AC*. de l'extremité de l'un des raïons, comme *B*: ſoit menée ſur un point de l'autre raïon, la perpendiculaire *BE*, elle ſera par la définition le Sinus de l'arc *BC*. Soit à preſent prolongé ce Sinus *BE*, juſqu'au point *D*. Je dis que l'arc *BCD*, ſoûtenu par la corde *BED*, eſt double de l'arc *BC*.

Car la ligne *CA*, paſſant par le centre, & étant par la conſtruction, perpendiculaire ſur la ligne *BD*, il s'enſuit par les précedentes Propoſitions, que non-ſeulement elle couppe cette ligne ou corde *BD*, en deux parties égales au point *E*, mais qu'elle coupe auſſi l'arc *BCD* en deux parties égales au point *C*. D'où s'enſuit que l'arc *BCD*, eſt double de l'arc donné *BC*, & que la corde *BD*, eſt double du Sinus *BE*. Ainſi l'on peut encore donner cette autre définition du Sinus.

Le Sinus d'un arc, eſt la moitié de la corde qui ſoûtient le double de l'arc dont il eſt Sinus. Ces Propoſitions & définitions ſont d'une extrême conſequence pour la ſuite.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

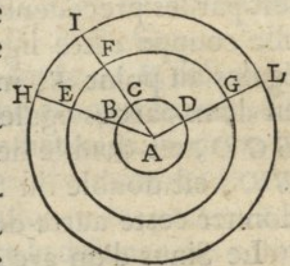
Dans le même cercle, ou dans les cercles égaux, les Sinus égaux donnent des arcs égaux, & les arcs égaux donnent des Sinus égaux.



Car BF, Sinus de l'arc BD, étant égal à CG, Sinus de l'arc CE, BI double du premier Sinus, sera égale à CH, double du second Sinus. Or les deux cordes BI, CH, étant égales, elles soûtiennent des arcs égaux ; sçavoir, l'arc IDB, & l'arc CEH. Donc leurs moitiés DB, CE, seront égales. On démontrera de même l'autre cas de la Proposition.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Si plusieurs circonferences sont concentriques, c'est à dire, si elles ont le même centre, & que l'on tire du centre des raïons terminés à la grande circonference, ces raïons coupperont dans les autres circonferences des arcs qui auront chacun même rapport à leur circonference, que l'arc de la grande aura à la sienne.



Car si l'on considere la ligne AL, tournant de telle sorte, que son point A, tournant en lui-même son extremité L, décrive la grande circonference, il est évident que chacun des points intermediaires, comme GD, décrira une circonference concentrique : & que lorsque le raïon AL sera parvenu au point I, le point D, sera parvenu en C, & le point G, en F, en sorte que si LI, est par exemple, la cinquiéme partie de la grande circonference, GF, sera la cinquiéme partie de la moyenne, & CD, de la petite. De même quand le point L, sera arrivé en H, les points G, D, seront arrivés aux points EB, & ainsi du reste.

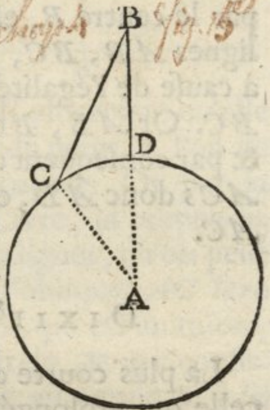
DES

DES SECANTES EXTERIEURES.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

De toutes les Secantes exterieures, la plus courte eſt celle qui étant prolongée, paſſeroit par le centre.

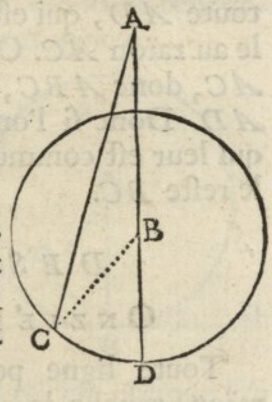
chap. 4 fig. 15



Car ſi *B D* Secante eſt ſuppoſée paſſer par le centre *A*, en la prolongeant ; du même centre *A*, ſoit tiré le raïon *C A* au point *C*, où aboutit toute autre ſecante, comme *BC*. Il eſt évident que *ACB* pris enſemble enferme *AB*, donc *ACB* eſt plus long que *AB*. Si donc de ces deux quantités inégales, on retranche les raïons *AC*, *AD*, qui ſont égaux, le reſte *BC* ſera plus grand que le reſte *BD*.

HUITIE'ME PROPOSITION.

De toutes les Secantes exterieures, la plus longue eſt celle qui paſſe par le centre.

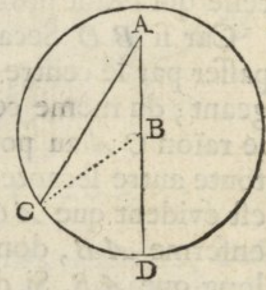


Je dis, par exemple, que la Secante *AD* qui paſſe par le centre *B*, eſt plus longue que la Secante *AC*. Soit tiré le raïon *BC*. La Secante *AD* eſt égale aux deux lignes *AB*, *BC*, puiſque c'eſt une même quantité ; ſçavoir, *BD*, *BC*, ajoûtée à la quantité *AB*. Or *AB*, *BC*, eſt plus grand que la ligne *AC* qu'il enferme, donc *AD* eſt plus grand que *AC*.

DES SECANTES INTERIEURES.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

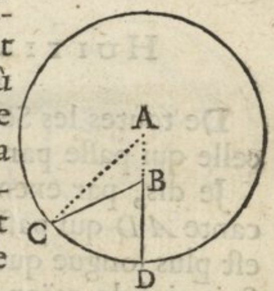
La plus longue de toutes les Secantes interieures, eſt celle qui paſſe par le centre.



Car la Secante *ABD*, qui paſſe par le centre *B*, eſt égale aux deux lignes *AB*, *BC*, priſes enſemble, à cauſe de l'égalité des raïons *BD*, *BC*. Or *AB*, *BC*, contient *AC*, & par conſequent eſt plus grand que *AC*; donc *AD*, eſt plus grand que *AC*.

DIXIE'ME PROPOSITION.

La plus courte de toutes les Secantes interieures, eſt celle qui prolongée, paſſeroit par le centre.



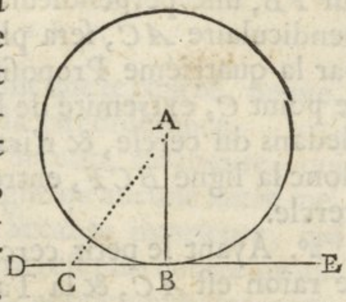
Soit la Secante *BD*, prolongée juſqu'au centre *A*, & du centre *A*, ſoit mené le raïon *AC* au point *C*, où aboutit la Secante *BC*; je dis, que *BD*, eſt plus courte que *BC*; car la toute *AD*, qui eſt un raïon, eſt égale au raïon *AC*. Or *ABC*, contient *AC*, donc *ABC*, eſt plus grand que *AD*. Donc ſi l'on retranche *AB*, qui leur eſt commun, le reſte *BD*, ſera plus court que le reſte *BC*.

DES TANGENTES.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Toute ligne perpendiculaire ſur l'extremité d'un raïon, touche le cercle, & ne le touche qu'en un ſeul point.

Sur le point *B*, extremité du raïon *AB*, ſoit menée la ligne *DBE*, perpendiculaire. Il eſt déja bien certain qu'elle touche le cercle, puiſque le point *B* eſt commun à ſon raïon *AB*, & à la ligne *DBE*. Pour prouver qu'elle ne le peut toucher en aucun autre point comme *C*.

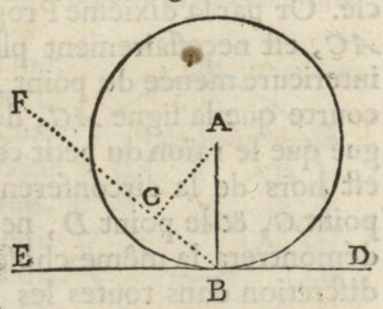


Soit menée du centre *A*, la ligne *AC*. Il eſt certain qu'elle ſera oblique ſur la Tangente, puiſque du point *A*, l'on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire. Or par la quatriéme Propoſition du premier Livre, la perpendiculaire eſt la plus courte de toutes les lignes, qu'on peut mener ſur la Tangente *DE*; donc l'oblique *AC* ſera plus longue que la perpendiculaire *AB*, qui eſt un raïon; donc ſon extremité *C*, eſt hors du cercle, & par conſequent le point *C* n'eſt pas commun au cercle & à la Tangente.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

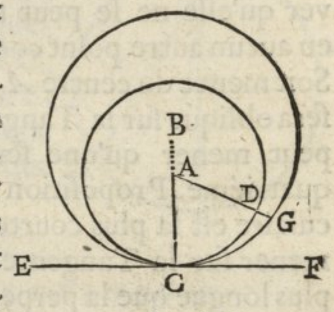
Il eſt impoſſible de faire paſſer une ſeule ligne droite entre la Tangente & le cercle, quoyqu'on y en puiſſe faire paſſer une infinité de circulaires, qui ne ſe rencontreront toutes qu'au ſeul point de contingence.

1°. Ayant mené la Tangente *DBF*. Si vous dites qu'on puiſſe faire paſſer entre elle & le cercle, la ligne *BF*, ſans qu'elle coupe le cercle; voicy comme je démontre l'impoſſibilité du cas.



La ligne Tangente *ED* eſt perpendiculaire ſur l'extremité du raïon *AB*, donc la ligne *FB*, eſt oblique ſur le raïon *AB*; & réciproquement le raïon *AB*, eſt oblique ſur la ligne *FB*. On peut donc du centre *A*, mener ſur *FB*, une perpendiculaire, comme *AC*. Cette perpendiculaire *AC*, ſera plus courte que le raïon *AB*, par la quatriéme Propoſition du premier Livre; donc le point *C*, extremité de la perpendiculaire *AC*, ſera au dedans du cercle, & n'ira pas juſqu'à la circonference; donc la ligne *BCF*, entre neceſſairement au dedans du cercle.

2°. Ayant le petit cercle dont le raïon eſt *AC*, & la Tangente *ECF*. Si le raïon *AC* eſt prolongé à l'infini, & que dans ce raïon prolongé, l'on choiſiſſe une infinité de points, comme *B*, pour ſervir de centre à de nouvelles circonferences, dont le raïon ſoit *BC*. Je dis que toutes ces circonferences n'ont aucun point commun, que le ſeul point *C*, point de contingence. Car par exemple, ſi l'on dit que le point *G* eſt commun aux deux circonferences de la figure, du point *A*, centre du petit cercle, ſoit mené au point *G* la ligne *AG*.



La ligne *AC* eſt raïon du petit cercle; elle eſt Secante interieure à l'égard du grand cercle, & paſſeroit par ſon centre *B*, ſi elle étoit continuée. La ligne *AG* eſt encore une Secante interieure à l'égard du grand cercle. Or par la dixiéme Propoſition de ce Livre, la ligne *AC*, eſt neceſſairement plus courte qu'aucune Secante interieure menée du point *A*; donc la ligne *AC*, eſt plus courte que la ligne *AG*; donc la ligne *AG*, eſt plus longue que le raïon du petit cercle. Donc ſon extremité *G*, eſt hors de la circonference du petit cercle; donc le point *G*, & le point *D*, ne ſont pas le même point. On démontrera la même choſe de tout autre point choiſi à diſcretion dans toutes les circonferences poſſibles, qui auront leur centre dans la ligne *CB*, prolongé à l'infini, & la ligne *ECF*, par tangente.

COROLLAIRE.

Il eſt impoſſible d'un autre point que le centre, de mener trois lignes égales, juſqu'à la circonference.

Car on a démontré que la Secante interieure, qui paſſe par le centre, eſt plus longue qu'aucune autre menée du même point, & que la Secante interieure, qui continuée, paſſeroit par le centre, eſt plus courte qu'aucune autre. D'où ſuit manifeſtement que toutes les intermediaires ſont inégales, & par conſequent qu'on peut avoir tout au plus deux Secantes interieures égales entre elles, dont l'une ſera d'un côté, & l'autre ſera de l'autre côté, à l'égard de celle qui paſſe par le centre.

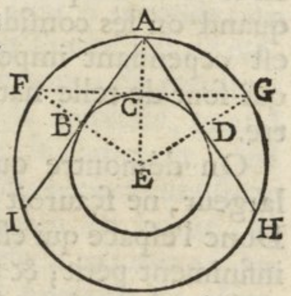
II. COROLLAIRE.

Le point d'où l'on peut mener juſques à la circonference, trois lignes égales eſt neceſſairement le centre du cercle.

TREIZIE'ME PROPOSITION.

D'un point donné comme *A*, hors du cercle *BCD*, tirer deux Tangentes à ce cercle, & démontrer qu'elles ſont égales.

Du point *E*, centre du cercle, ſoit tirée juſqu'au point donné *A*, la ligne *EA*.



Du centre *E*, intervale *EA*, ſoit décrit le cercle *IAH*. Au point *C* où le raïon *EA* couppe le petit cercle, ſoit menée la perpendiculaire *FCG*, terminé par la circonference aux points *FG*, cette perpendiculaire ſera Tangente à l'égard du petit cercle, & corde à l'égard du grand. Soit priſe avec le compas, la longueur *FG*, qui ſoit portée du point donné *A*, juſques aux points de la grande circonference *IH*. Soient menées les lignes *AI*, *AH*. Je dis qu'elles ſont Tangentes à l'égard du petit cercle.

Par la conſtruction *FG*, eſt Tangente ; *FG*, *AI*, *AH*, ſont cordes égales auſſi par la conſtruction. Donc elles ſont également éloignées du centre *E*. Or la diſtance du centre *E*, juſques à la corde *FG*, eſt meſurée par le raïon *EC*, qui lui eſt perpendiculaire ; donc la diſtance des deux autres cordes *AI*, *AH*, également éloignées de ce centre, ſera meſurée par les raïons *EB*, *ED*. Donc ces deux raïons leur ſont perpendiculaires, autrement ils n'en meſureroient pas la diſtance à l'égard du centre. Donc les deux cordes, *AI*, *AH*, ſont elles-mêmes perpendiculaires chacune à leur raïon. Donc par la onziéme Propoſition de ce Livre, elles touchent le cercle aux points *DB*.

Il s'enſuit de la même démonſtration, que les deux Tangentes priſes du point donné, juſqu'aux points de contingence, ſont égales, puiſqu'elles ſont moitié de cordes égales par la premiere Propoſition de ce Livre.

AVERTISSEMENT.

Avant que de paſſer à autre choſe, il ne ſera pas inutile de faire quelques reflexions ſur la douziéme Propoſition de ce Livre. Elle eſt trés propre à humilier l'eſprit humain, en le convainquant qu'il y a des verités trés claires, quand on les conſidere chacune en particulier, dont il eſt cependant impoſſible de concevoir la liaiſon, & qui ſont de telle nature, que l'une ſemble détruire l'autre.

On démontre qu'une ligne droite, qui n'a aucune largeur, ne ſçauroit paſſer entre la Tangente & le cercle. Donc l'eſpace qui eſt entre la Tangente & le cercle, eſt infiniment petit ; & toutefois cet eſpace infiniment petit en lui-même, peut être diviſé en une infinité d'autres plus petits, puiſqu'on peut faire paſſer entre le cercle & la Tangente, une infinité de circonferences, qui ne ſe rencontrent qu'au ſeul point de contingence. Voilà donc bien certainement un infiniment petit, diviſé en une infinité d'autres. Cela eſt démontré ; mais cela ſe conçoit il bien clairement ?

Pour aider l'imagination, repreſentés-vous une boule parfaite, poſée ſur un plan. Cette boule porte ſur un ſeul point qui n'a aucune étenduë. Autrement la Tangente & le cercle auroient plus d'un point commun.

Repreſentés-vous maintenant une boule beaucoup plus groſſe que la premiere, poſée ſur le même plan. Cette groſſe boule porte comme la premiere ſur un ſeul point, & cependant, il eſt trés-certain que la courbure de la groſſe boule, eſt moindre que la courbure de ſa petite, & par conſequent, qu'à compter du point de contingence, la circonference de la groſſe boule, s'éloigne moins de la Tangente, que la circonference de la petite ne s'éloigne de la ſienne ; quoiqu'il ſoit démontré que l'eſpace qui eſt entre la circonference de la petite boule & ſa Tangente, eſt ſi petit, qu'une grandeur infiniment petite en largeur, telle qu'eſt une ligne droite n'y ſçauroit paſſer. C'eſt à dire que cet eſpace eſt infiniment petit, & que cependant il en renferme une infinité d'autres.

Tout ce qui ſe démontre dans les hautes ſpeculations de Geometrie ſur les aſymptotes, les eſpaces aſymptotiques, les infiniment Petits de Meſſieurs de Leibnitz & de l'Hoſpital, dont les principes ſont ſi feconds ; en un mot, tout ce qui ſe démontre ſur l'infini, eſt de même nature. L'eſprit humain eſt convaincu de certaines verités : mais il eſt obligé d'avoüer ſa foibleſſe, quand il veut comprendre, pour ainſi dire, le comment, c'eſt à dire, comment il eſt poſſible que ces verités ſubſiſtent enſemble ? Mais comme l'eſprit humain eſt borné, & que le Createur de nos ames, ne leur a pas donné des lumieres infinies. C'eſt à nous à nous ſouvenir de nôtre condition. Rien ne ſeroit plus déraiſonnable, que de vouloir nier des verités dont nous ſommes convaincus ;

d'ailleurs parce que nous n'en comprenons pas la liaiſon. Nous les comprenons ces verités, parce que nous avons une certaine meſure de raiſon; nous n'en comprenons pas la liaiſon, parce que nous ne ſommes pas Dieu, & que nôtre raiſon n'eſt pas infinie. On a donc grand tort de vouloir attaquer la Geometrie des infiniment Petits, & celle des indiviſibles, parce qu'il y a de certaines choſes qu'on ne comprend pas dans la nature de l'infini, qui en effet doit être incomprehenſible; mais autre choſe eſt de le comprendre, autre choſe de ſe convaincre qu'il exiſte. J'avouë de bonne foy, que je ſuis pleinement convaincu de la verité de la douziéme Propoſition; mais j'avouë en même temps que je ne la comprends pas.

Que ſi je me vois obligé de reconnoître des verités incompatibles en Geometrie, où l'eſprit humain ſe picque de voir plus clair qu'ailleurs; à plus forte raiſon dois-je avoir de la ſoumiſſion pour des verités d'un ordre ſuperieur à ma raiſon, & me ſouvenir toûjours que celui qui l'a créée n'étoit pas obligé de la rendre capable de tout.

QUATRIE'ME LIVRE.

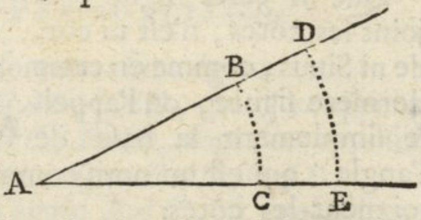
Des Angles.

APRE'S avoir parlé des Lignes perpendiculaires, des Obliques, des Paralleles, & de celles qui ſont terminées à une circonference, l'ordre naturel demande que nous parlions des Angles, qui ſont une eſpece de ſurface.

DE'FINITIONS.

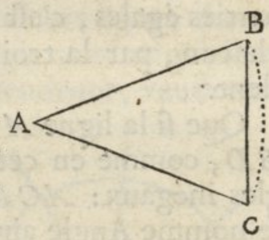
L'Angle eſt une ſurface indéterminée ſuivant ſa longueur, qui eſt celle des lignes qui le comprennent; & déterminée par la rencontre de ces deux lignes en un point qu'on appelle le Sommet, & par la partie d'une circonference

circonference qui a ce sommet pour centre.

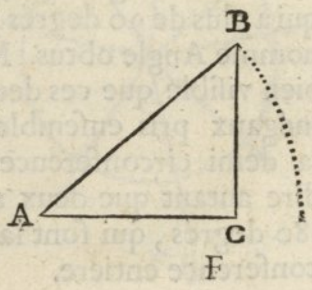


Ainsi l'espace *DBACE*, est un angle dont le sommet est le point *A*, les lignes *DBA*, *ACE*, en sont les côtés; & la portion de circonference *DE*, qui est d'un certain nombre de degrés, est la mesure de cet angle.

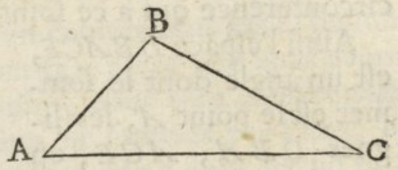
L'angle se designe ordinairement par trois lettres, dont celle du milieu marque le sommet. Mais il est important de bien remarquer que pour mesurer cet angle, on peut se servir de la portion de la circonference *BC*, laquelle a autant de degrés que la portion *DE*, & qu'ainsi l'angle *BAC*, entant qu'Angle, n'est point different de l'angle *DAE*; les côtés du dernier, sont à la verité plus longs, mais la mesure de l'angle est la mesme, & contient pareil nombre de degrés. De sorte que si l'angle *DAE*, contient 25 degrés, l'angle *BAC* est pareillement un angle de 25 degrés, & il n'arriveroit aucun changement à sa mesure, qui seroit toûjours de 25 degrés, quand les côtés *DA*, *AE*, seroient prolongés à l'infini.



Si les deux côtés d'un angle sont pris égaux, l'angle s'appelle Isoscelle. En ce cas, si l'on joint les extremités de ces deux côtés par une ligne droite, il est visible que cette ligne sera la corde d'un arc, qui aura pour rayons les côtés de l'angle.



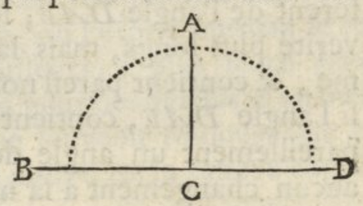
Si les côtés sont inégaux, & que de l'un, l'on mene une perpendiculaire sur l'autre, cette ligne sera pour lors Sinus de l'angle; ainsi dans cette seconde figure, la ligne *BC* est Sinus, & dans la premiere, la ligne *BC* est corde.



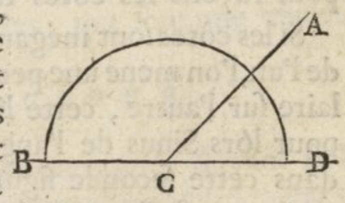
Que ſi cette ligne qui joint les côtés, n'eſt ni corde ni Sinus, comme en cette derniere figure, on l'appelle ſimplement la baſe de l'angle, qui eſt un nom commun à toutes les lignes qui joignent les côtés.

Cela donne trois manieres de meſurer les angles, par les Arcs, par les Sinus, par les Cordes; mais il eſt évident que la maniere abſoluë & naturelle de meſurer les angles, eſt de conſiderer la grandeur de l'arc, c'eſt à dire, le nombre de degrés qu'il contient. C'eſt par-là qu'on a diviſé l'angle, en droit, aigu, obtus.

L'angle droit eſt un angle de 90 degrés; d'où s'enſuit qu'une ligne qui tombe perpendiculairement ſur une autre, fait deux angles droits; par exemple, la ligne *AC* tombant perpendiculairement ſur *BD*, fait d'une part l'angle *ACD*, & de l'autre l'angle *ACB*, qui ſont chacun un angle de 90 degrés, puiſque du point *C*, décrivant une demi circonference, elle ſe trouvera diviſée en deux parties égales, c'eſt à dire, en deux arcs de 90 degrés chacun, par la troiſiéme Propoſition du Livre précedent.



Que ſi la ligne *AC*, tombe obliquement ſur la ligne *BD*, comme en cette ſeconde figure, elle fait deux angles inégaux: *ACD*, qui a moins de 90 degrés, & qui ſe nomme Angle aigu, & *ACB*, qui a plus de 90 degrés, & qui ſe nomme Angle obtus. Mais il eſt bien viſible que ces deux angles inégaux pris enſemble, vallent la demi circonference, c'eſt à dire autant que deux angles droits. Ou ſi vous voulés, 180 degrés, qui font la moitié des 360 degrés de la circonference entiere.



PREMIERE PROPOSITION.

Les angles opposés au sommet sont égaux.

Soient les deux lignes *BAE*, *CAD*, qui se couppent au point *A*. Les angles *BAC*, *DAE*, sont dits opposés au sommet, & de même les angles *BAD*, *CAE*.

Il faut démontrer que l'angle *BAC*, est égal à l'angle *DAE*, & que l'angle *BAD*, est égal à l'angle *CAE*. Du centre *A*, soit décrit un cercle de tel intervalle qu'on voudra. Il n'y a qu'à faire voir que l'arc *FG*, est égal à l'arc *HI*. Or cela est visible de soi-même : car *GFH*, est une demi circonference, ou 180 degrés ; *FHI*, autre demi circonference ; l'une & l'autre a l'arc *FH*, commun : ainsi si l'on le retranche, reste d'une part l'arc *GF*, & de l'autre *HI*, qui ne peuvent manquer d'être égaux. On démontre avec la même facilité, l'égalité des deux autres angles.

SECONDE PROPOSITION.

Si l'on meine de differens côtés plusieurs lignes aboutissant toutes au même point, en quelque nombre qu'elles soient, tous les angles qu'elles comprendront, vaudront ensemble quatre angles droits.

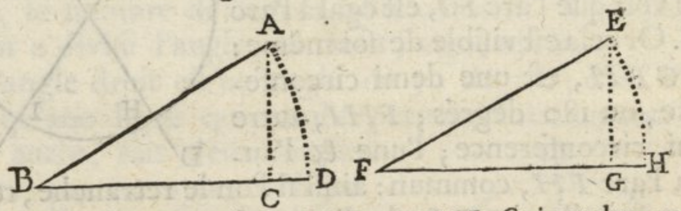
Car du point de rencontre décrivant une circonference, elle sera la mesure de tous ces differens angles, & par consequent tous ensemble vaudront 360 degrés ou quatre fois 90 degrés, c'est à dire quatre angles droits.

De la maniere de considerer les Angles par leurs Sinus.

Quand on compare deux angles l'un avec l'autre, on peut considerer l'égalité des angles mêmes, l'égalité de leurs Sinus, & l'égalité des côtés que l'on choisit pour rayon. Or deux de ces égalités données, donnent la troisiéme.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Si deux angles ont le rayon égal, & le Sinus égal, ils sont eux-mêmes égaux.



Soient deux angles ABD, EFH. Soient les rayons BA, FE, égaux, & soient aussi égaux les Sinus AC, EG. Il faut démontrer que les arcs AD, EH, sont égaux, d'où s'ensuit l'égalité des angles.

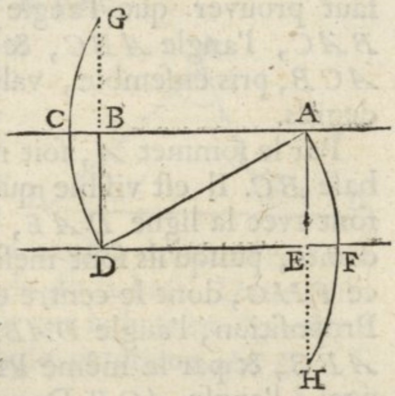
Puisque les deux rayons sont égaux, les deux cercles qui ont les points B, F, pour centres, sont égaux. D'ailleurs les deux Sinus AC, EG, étant égaux & étant moitiés de cordes égales, le double de la ligne AC, sera égal au double de la ligne EG. Or le double de la ligne AC, & le double de la ligne EG, seront deux cordes égales de deux cercles égaux; donc elles soûtiendront des arcs égaux; donc le double de l'arc AD, sera égal au double de l'arc EH; donc l'arc AD, est égal à l'arc EH; donc l'angle égal à l'angle.

Les deux autres cas de la Proposition qui ne sont pas de grand usage, se démontrent avec la même facilité.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si une ligne oblique est entre paralleles, elles forment deux angles aigus & deux obtus. L'aigu à l'égard de l'aigu s'appelle alterne, & l'obtus à l'égard de l'obtus de même, & ces angles alternes ſont égaux.

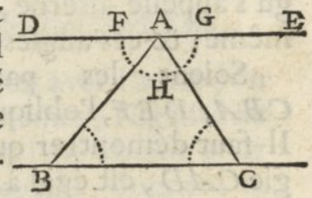
Soient les paralleles *CBA*, *DEF*, l'oblique *AD*. Il faut démontrer que l'angle *CAD*, eſt égal à l'angle *ADF*, qui eſt ſon alterne.



Pour le prouver. Du point *D*, pris pour centre, intervalle *DA*, ſoit décrite la portion de cercle *AFH*; & du point *A* pris pour centre, intervalle *AD*, ſoit décrite la portion *DCG*. Il eſt certain que les deux cercles ſont égaux, puiſqu'ils ont même rayon. Deplus ayant mené du point *D*, la ligne *DB*, perpendiculaire ſur la ligne *CA*; *DB*, ſera le Sinus de l'arc *DC*: de même ayant mené du point *A*, la ligne *AE*, perpendiculairement ſur *DF*; *AE*, ſera Sinus de l'arc *AF*. Or ces deux Sinus étant deux perpendiculaires entre mêmes paralleles, ſeront neceſſairement égaux. Voilà donc le rayon égal au rayon, c'eſt à dire, *AD*, égal à *DA*, & le Sinus égal au Sinus; donc l'arc eſt égal à l'arc, & l'angle égal à l'angle par la précedente Propoſition. Cela eſt encore plus viſible, en conſiderant que la perpendiculaire *DB*, eſt la moitié de la corde, *DG*, comme la perpendiculaire *AE*, eſt la moitié de la corde *AH*. Donc la corde eſt égale à la corde. Or par la nature du cercle, les cordes égales dans les cercles égaux ſoûtiennent des arcs égaux; donc l'arc *DCG*, égal à l'arc *AFH*; donc la moitié *DC*, égale à la moitié *AF*; donc les angles ſont égaux.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Tout angle y compris les deux angles que ſes côtés font avec ſa baſe, vaut deux angles droits, c'eſt à dire, 180 degrés.



Soit l'angle donné *BAC*, dont le ſommet eſt *A*, la baſe *BC*. Il faut prouver que l'angle donné *BAC*, l'angle *ABC*, & l'angle *ACB*, pris enſemble, valent 180. degrés.

Par le ſommet *A*, ſoit menée *DAE*, parallele à la baſe *BC*. Il eſt viſible que les deux côtés *AB*, *AC*, font avec la ligne *DAE*, trois angles qui valent deux droits, puiſqu'ils ſont meſurés par la demi circonference *FHG*, dont le centre eſt *A*. Or par la précedente Propoſition, l'angle *DAB*, eſt égal à l'angle de la baſe *ABC*, & par la même Propoſition, l'angle *EAC*, eſt égal à l'angle *ACB*. Donc c'eſt la même choſe de prendre la valeur des deux angles *DAB*, *EAC*, ou celle des deux angles de la baſe *ABC*, *ACB*. Or les deux premiers avec l'angle du ſommet *BAC*, valent deux droits. Donc les deux derniers, c'eſt à dire, les deux angles de la baſe avec l'angle donné *BAC*, valent deux angles droits.

COROLLAIRE.

Qui connoît deux de ces angles, connoît neceſſairement le troiſiéme; car, par exemple, ſi deux de ces angles pris enſemble, valent 130 degrés, il faut que le troiſiéme en vaille cinquante, pour faire 180 degrés avec les deux autres.

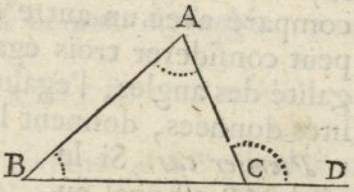
II. COROLLAIRE.

Si l'angle du ſommet eſt un angle droit, les deux de la baſe pris enſemble vaudront un angle droit.

SIXIE'ME PROPOSITION.

Si l'on prolonge une ligne priſe pour la baſe d'un angle, elle formera du côté qu'elle ſera prolongée, un angle avec l'un des côtés de l'angle donné, & ce nouvel angle s'appelle Angle exterieur, qui eſt toûjours égal aux deux oppoſés interieurs; c'eſt à dire, à l'angle du ſommet, & à l'autre angle de la baſe.

Car ayant prolongé *BC*, priſe pour baſe, juſques en *D*, il ſe forme l'angle *ACD*, lequel avec l'angle *ACB*, vaut deux angles droits, ſuivant les définitions de ce Livre. Or le

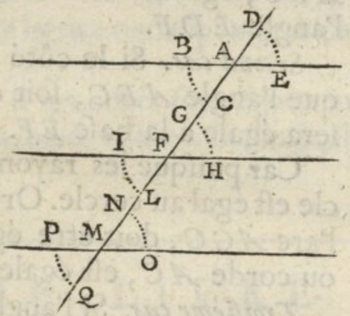


même angle *ACB*, vaut deux angles droits avec l'angle du ſommet, & l'autre angle de la baſe. Donc l'angle du ſommet *A*, avec l'angle ſur la baſe en *B*, valent autant pris enſemble, que l'angle exterieur *ACD*.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Si une même ligne couppe pluſieurs paralleles, elle les couppe toutes avec la même obliquité.

Car l'angle *DAE*, eſt égal à l'angle *BAC*, puiſqu'il lui eſt oppoſé au ſommet. L'angle *BAC*, eſt alterne de l'angle *GFH*, & par conſequent égal à ce dernier, qui eſt oppoſé au ſommet de l'angle *IFL*. L'angle *IFL*, eſt alterne de l'angle *NMO*, qui eſt oppoſé au ſommet de l'angle *PMQ*. S'il y avoit mille paralleles, on démontreroit la même choſe, & tous les Angles aigus ſeroient égaux auſſi-bien que tous les obtus.



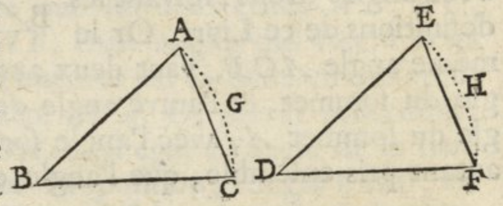
II. SECTION.

De la maniere de conſiderer les baſes comme cordes.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Afin que les baſes puiſſent être conſiderées comme cordes, on a déja remarqué qu'il faut que les deux côtés qui comprennent l'angle ſoient égaux, puiſqu'ils ſont rayons d'un même cercle. Cela poſé. Si un tel angle eſt comparé avec un autre angle Iſoſcele comme lui, on peut conſiderer trois égalités; l'égalité des côtés, l'égalité des angles, l'égalité des baſes. Deux de ces égalités données, donnent la troiſiéme.

Premier cas. Si le côté *AB*, eſt égal au côté *DE*, & que la baſe *AC*, ſoit égale à la baſe *EF*, l'angle *ABC*, ſera égal à l'angle *EDF*.



Car puiſque les rayons ſont égaux aux rayons, le cercle eſt égal au cercle, & puiſque la corde eſt égale à la corde, elles ſoûtiennent des arcs égaux; donc l'arc *AGC*, égal à l'arc *EHF*; donc l'angle *ABC*, égal à l'angle *EDF*.

Second cas. Si le côté *AB*, eſt égal au côté *DE*, & que l'angle *ABC*, ſoit égal à l'angle *EDF*, la baſe *AC*, ſera égale à la baſe *EF*.

Car puiſque les rayons *AB*; *ED*, ſont égaux, le cercle eſt égal au cercle. Or les angles étant ſuppoſés égaux, l'arc *AGC*, doit être égal à l'arc *EHF*; donc la baſe ou corde *AC*, eſt égale à la baſe *EF*.

Troiſiéme cas. Si l'angle *ABC*, eſt égal à l'angle *EDF*, & que la baſe *AC*, ſoit égale à la baſe *EF*, le côté *AB*, ſera égal au côté *ED*.

Car les angles étant égaux, l'arc *AGC*, eſt égal à l'arc *EHF*. Or la corde *AC*, étant ſuppoſée égale à la corde *EF*; il faut bien que le rayon *AB*, ſoit égal au rayon *ED*; autrement les cercles ſeroient inégaux, & dans deux cercles inégaux, deux cordes égales ne ſoûtiendroient pas des arcs égaux, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

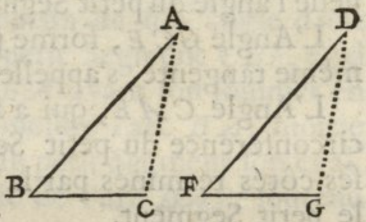
III. SECT,

III. SECTION.

De la base considerée simplement comme base, c'est à dire, quand elle n'est ni corde ni Sinus de l'angle.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Si l'on suppose un angle, comme *ABC*, égal à un angle, comme *DFG*, le côté *AB*, égal au côté *FD*, le côté *BC*, égal au côté *FG*. La base *AC*, sera égale à la base *DG*.



Il n'y a qu'à concevoir que l'une de ces figures soit posée sur l'autre, il faut bien par necessité que les trois points *A*, *B*, *C*, correspondent aux trois points *D*, *F*, *G*, en sorte que cela ne differe que de position, & que chacune des trois lignes corresponde à chacune des trois autres.

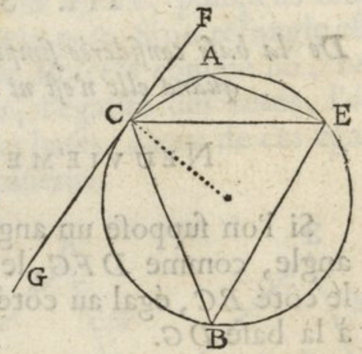
On prouve de mesme que si les côtés sont égaux aux côtés chacun à chacun, & la base égale à la base, les angles sont égaux.

CINQUIE'ME LIVRE.

De la maniere de mesurer les angles, dont le sommet n'est point au centre du cercle.

JUSQU'A present nous avons consideré les angles, comme ayant leur sommet au centre d'un cercle, en sorte que leur mesure est déterminée par l'arc de ce cercle compris entre les deux côtés de l'angle. Maintenant nous allons considerer les angles par rapport à un cercle, au centre duquel leur sommet ne sera pas.

DE'FINITIONS.



En ſuppoſant une corde, comme *CE*, il eſt viſible qu'elle coupe le cercle en deux portions inégales. La portion *CAE*, ſe nomme le petit Segment, & la portion *CBE*, le grand Segment.

L'Angle *FCE*, que je ſuppoſe formé par la tangente *FG*, & par la corde *CE*, s'appelle l'angle du petit Segment.

L'Angle *GCE*, formé par la même corde, & par la même tangente, s'appelle l'Angle du grand Segment.

L'Angle *CAE*, qui a ſon ſommet en un point de la circonference du petit Segment, comme *A*, & qui a ſes côtés terminés par la corde, s'appelle l'Angle dans le petit Segment.

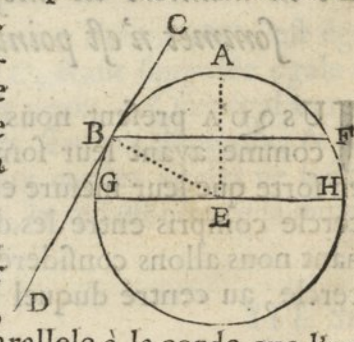
L'Angle *CBE*, qui a ſon ſommet en un point comme *B*, dans la circonference du grand Segment, & qui a ſes côtés terminés par la même corde, s'appelle l'Angle dans le grand Segment.

Tout Angle ſoit dans le grand, ſoit dans le petit Segment, s'appelle d'un nom general Angle inſcript.

PREMIERE PROPOSITION FONDAMENTALE.

De cette Meſure des Angles.

L'Angle du petit Segment a pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par la corde.



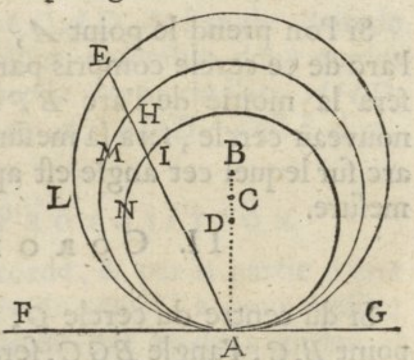
Soit la corde *BF*, la tangente au point *B*, ſoit la ligne *DBC*. Il faut prouver que l'angle *CBF*, a pour meſure la moitié de l'arc *BAF*.

Du point de contingence *B*, ſoit mené le rayon *BE*, & par le point *E*, centre du cercle, ſoit mené le diametre *GH*, parallele à la corde que l'on couppera perpendiculairement & par la moitié, par la ligne *AE*; il s'ensuit que cette derniere ligne *AE*, passera par le centre, & qu'elle couppera l'arc *BAF*, en deux parties égales au point *A*.

Par la construction, l'angle *CBE*, est droit, puisqu'il est formé par la tangente & un rayon. De même l'angle *AEG*, est droit, puisque le diametre étant parallele à la corde qui est couppée perpendiculairement par la ligne *AE*, est lui-même couppé perpendiculairement par cette ligne *AE*. Voila donc deux angles droits, *CBE*, *AEG*. D'ailleurs l'angle *FBE*, est alterne de l'angle *BEG*, & par consequent lui est égal. Si donc l'on ôte les deux alternes, chacun de son angle droit restera d'un côté. L'angle du petit Segment *CBF*, égal à l'angle *BEA*. Or l'angle *BEA* ayant son sommet en *E*, centre du cercle, a pour mesure l'arc *BA*, moitié de l'arc *BAF*. Donc l'angle du petit Segment son égal, a pour mesure la même moitié de l'arc *BAF*, soûtenu par la corde.

COROLLAIRE.

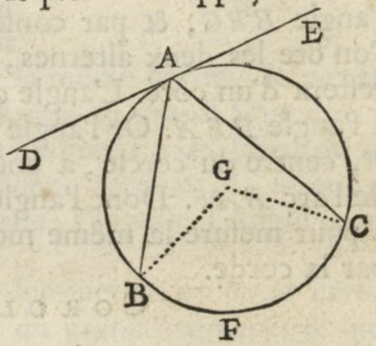
Si plusieurs cercles ayant un seul point commun, ont une tangente commune, & que du point de contingence, l'on meine une corde jusques à la circonference du plus grand cercle, cette corde couppera dans tous les cercles, des arcs tous de pareil nombre de degrés, au nombre de degrés de l'arc du plus grand cercle.



Car ces trois cercles, par exemple, ayant pour leurs centres les points *B*, *C*, *D*, & se touchant au point *A*; si par ce point *A*, l'on meine la tangente *FAG*, & que du point *A*, l'on meine la corde *AE*; cette corde soûtient dans le grand cercle, l'arc *ELA*; dans le moïen, ſa portion *HA*, ſoûtient l'arc *HMA*; & dans le petit cercle, ſa portion *IA*, ſoûtient l'arc *INA*. Or ces trois arcs ſont neceſſairement égaux, puiſque l'Angle *EAF*, Angle du petit Segment, n'eſt pas different de l'Angle *HAF*, ni de l'Angle *IAF*, & que par la précedente Propoſition, il a pour meſure la moitié de celui de ces trois arcs que l'on voudra choiſir.

SECONDE PROPOSITION.

L'Angle dans le Segment, ou Angle inſcript, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé.



Il faut prouver que l'angle *BAC*, a pour meſure la moitié de l'arc *BFC*. Par le point *A*, ſoit menée la tangente *DAE*. Les trois Angles *DAB*, *BAC*, *CAE*, pris enſemble, valent deux angles droits, ſuivant les définitions du Livre précedent, c'eſt à dire, 180 degrés ou la demi circonference. Or l'angle *DAB*, par la précedente Propoſition, vaut la moitié de l'arc *AB*, l'angle *EAC*, vaut la moitié de l'arc *AC*, reſte donc pour la valeur de l'angle *BAC*, la moitié de l'arc *BFC*.

COROLLAIRE.

Si l'on prend le point *A*, pour centre d'un cercle, l'arc de ce cercle compris par les côtés de l'angle *BAC*, ſera la moitié de l'arc *BFC*; parce que l'arc de ce nouveau cercle, ſera la meſure de l'angle, & que l'autre arc ſur lequel cet angle eſt appuyé, eſt le double de ſa meſure.

II. COROLLAIRE.

Si du centre du cercle *G*, l'on meine deux lignes au point *B*, *C*, l'angle *BGC*, ſera double de l'angle inſcript *BAC*.

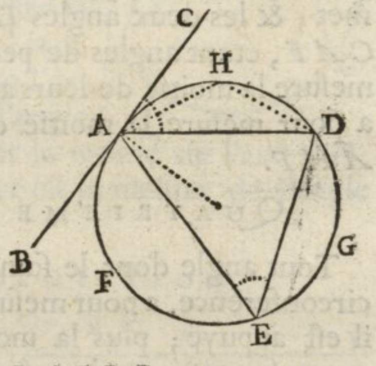
Les Geometres expriment ordinairement ainſi cette Propoſition.

L'angle au centre, eſt double de l'angle à la circonference.

Car l'angle *BGC*, a pour meſure tout l'arc *BFC*, & l'angle *BAC*, n'en a que la moitié.

III. COROLLAIRE.

L'angle du petit Segment, eſt égal à l'angle dans le grand Segment.



Car l'angle du petit Segment *CAD*, a pour meſure la moitié de l'arc *AHD*, par la premiere Propoſition de ce Livre, & cette même moitié eſt la meſure de l'angle inſcript *AED*, par la précedente.

IV. COROLLAIRE.

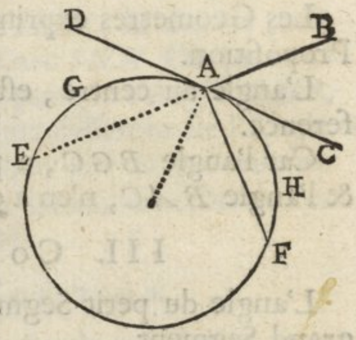
Tous les angles dans le Segment ſont égaux entre eux, car ils ont tous la même meſure, qui eſt la moitié de l'arc ſur lequel ils ſont appuyés.

V. COROLLAIRE.

L'angle du petit Segment *CAD*, & l'angle dans le petit Segment *AHD*, valent enſemble deux angles droits. Car l'un a pour meſure la moitié de l'arc *AHD*, & l'autre, la moitié de l'arc *AFEGD*, c'eſt à dire, la demi circonference.

TROISIE'ME PROPOSITION.

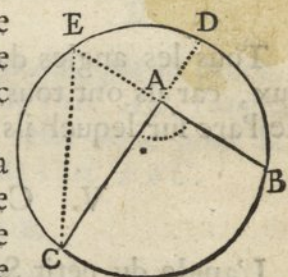
L'angle formé par une corde, & par la partie d'une autre corde prolongée hors du cercle, a pour meſure la moitié des deux arcs, ſoûtenus par les deux cordes.



Il faut prouver que l'angle *BAF*, a pour meſure la moitié de l'arc *EGA*, plus la moitié de l'arc *AHF*. Soit par le point *A*, tirée la tangente *DAC*, l'angle *BAF*, eſt égal aux deux angles *BAC*, *CAF*. Or l'angle *BAC*, eſt égal à l'angle *DAE*, parce qu'il lui eſt oppoſé au ſommet ; & les deux angles *DAE*, *CAF*, étant angles de petit Segment, ont chacun pour meſure la moitié de leurs arcs. Donc l'angle total *BAF*, a pour meſure la moitié des deux mêmes arcs *EGA*, *AHF*.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Tout angle dont le ſommet eſt entre le centre, & la circonference, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé ; plus la moitié de celui qui eſt compris entre ſes côtés prolongés.

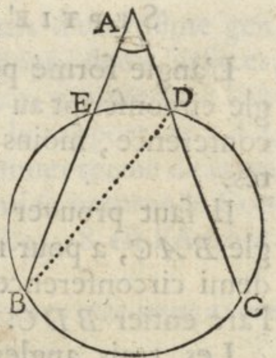


Il faut démontrer que l'angle *BAC*, a pour meſure la moitié de l'arc *BC* ; plus la moitié de l'arc *DE*, ſoit tirée la ligne *EC*.

L'angle *ACE*, a pour meſure la moitié de l'arc *ED*, par la ſeconde Propoſition de ce Livre. L'angle *BEC*, a pour meſure la moitié de l'arc *BC*, par la même raiſon. Or l'angle *BAC*, eſt exterieur à l'égard de ces deux angles inſcripts ; donc il eſt égal à tous les deux par la ſixiéme Propoſition du 4. Livre ; donc il a pour meſure la moitié de l'arc *BC* ; plus la moitié de l'arc *DE*.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

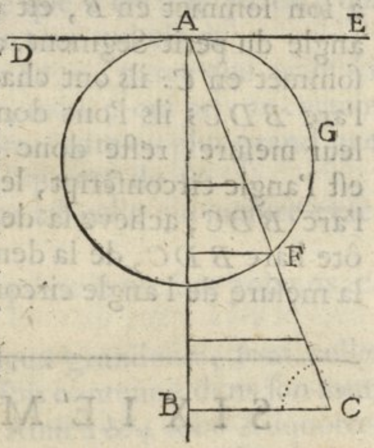
L'angle qui a ſon ſommet hors du cercle, a pour meſure la moitié de l'arc concave ; moins la moitié de l'arc convexe ſur lequel il eſt appuyé.



Il faut démontrer que l'angle *BAC*, a pour meſure la moitié de l'arc *BC*; moins la moitié de l'arc *ED*, ſoit tirée la ligne *BD*.

L'angle *BDC*, angle exterieur, eſt égal aux deux angles *ABD*, *DAB*. Or l'angle *ABD*, a pour meſure la moitié de l'arc *ED*, par la ſeconde Propoſition de ce Livre. Donc pour avoir la meſure de l'autre angle, c'eſt à dire, de l'angle *BAD*, ou *BAC*, il faut ôter la moitié de l'arc *ED*, de la moitié de l'arc *BC*, qui eſt la meſure de l'angle exterieur *BDC*.

SIXIE'ME PROPOSITION.

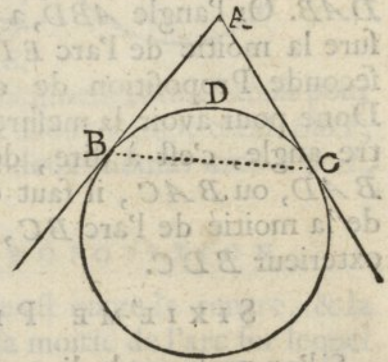


Si l'on prolonge le diametre d'un cercle, & que ſur ce diametre prolongé, l'on meine pluſieurs perpendiculaires, une ligne oblique menée de l'extremité du diametre, oppoſée au côté prolongé, & coupant ces perpendiculaires, formera avec chacune d'elles, un angle qui aura pour meſure la moitié de l'arc ſoûtenu par l'oblique.

Il n'y a qu'à prouver que l'angle *ACB*, a pour meſure la moitié de l'arc *AGF*. Car tous les autres formés par les autres perpendiculaires & l'oblique, lui ſont égaux. Soit menée la tangente *DAE*; les lignes *DAE*, *BC*, ſont paralleles par conſtruction; donc l'angle *ACB*, eſt alterne de l'angle *CAE*, ou *FAE*. Or l'angle *FAE*, eſt un angle du petit Segment, qui a pour meſure la moitié de l'arc *AGF*, donc ſon égal ou alterne *ACB*, a la même meſure.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

L'angle formé par deux tangentes, ſe nomme l'Angle circonſcript au cercle, & a pour meſure la demi circonference, moins l'arc compris entre les deux tangentes.



Il faut prouver que l'angle *BAC*, a pour meſure la demi circonference, moins l'arc entier *BDC*.

Les trois angles *BAC*, *CBA*, *BCA*, pris enſemble, valent deux angles droits ou la demi circonference, par la cinquiéme Propoſition du 4. Livre. Or l'angle qui a ſon ſommet en *B*, eſt un angle du petit Segment, auſſi-bien que l'angle qui a ſon ſommet en *C*: ils ont chacun pour meſure la moitié de l'arc *BDC*; ils l'ont donc tout entier à eux d'eux pour leur meſure; reſte donc pour le troiſiéme angle, qui eſt l'angle circonſcript, le nombre de degrés, qui avec l'arc *BDC*, achêve la demi circonference; donc ſi l'on ôte l'arc *BDC*, de la demi circonference, le reſte ſera la meſure de l'angle circonſcript *BAC*.

SIXIE'ME LIVRE.

pag. 44 de l'algeb

Des Proportions

NOUS n'avons pû juſqu'à preſent parler des Proportions, parce qu'elles ſuppoſent la connoiſſance des Lignes droites Perpendiculaires, Obliques, Paralleles, & celle des Angles.

DE'FINITIONS.

DEFINITIONS.

Quand on compare deux grandeurs d'un même genre, comme deux nombres, deux lignes, deux surfaces, deux corps; le rapport de l'une de ces grandeurs à l'autre, s'appelle raison. Par exemple, le rapport de 2 à 4, ou de 8 à 11, est une raison. Le premier terme de la raison se nomme l'Antecedent; le second se nomme le Consequent. Ainsi dans la raison de 8 à 11, 8 est l'Antecedent, & 11 le Consequent.

Il faut icy rappeller quelques axiomes que nous avons posés en commençant.

Un tout se peut diviser en plusieurs parties égales ou inégales.

Un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.

Si une partie prise un certain nombre de fois est égale au tout, elle se nomme partie Aliquotte. Ainsi 2 est partie Aliquotte de 30, parce que 2 est une partie, qui prise quinze fois est égale à son tout qui est 30.

5. est une partie Aliquotte de 30, parce que prise six fois, elle est égale à son tout; mais 7 qui pris un certain nombre de fois, est toûjours moindre ou plus grand que le tout 30, s'appelle partie Aliquante de 30.

En un mot, partie Aliquotte est celle qui mesure exactement son tout.

Partie Aliquante est celle qui ne le mesure point exactement.

Aliquottes pareilles de deux grandeurs, sont celles dont chacune est autant de fois contenuë dans son tout, que l'autre l'est dans le sien. Ainsi 2 & 4 sont Aliquottes pareilles de 6, & de 12; parce que comme 2 est contenuë trois fois dans le tout 6; de même 4 est contenuë trois fois dans le tout 12.

Il est donc clair que ce qu'on appelle Raison, est la maniere dont l'Antecedent est contenu, ou contient le Consequent. Par exemple, la Raison de 2 à 4 n'est autre chose, que la maniere dont 2 est contenu dans 4;

c'eſt à dire deux fois ; de même la Raiſon de 12 à 4, n'eſt autre choſe que la maniere dont 12 contient 4, c'eſt à dire trois fois.

Il eſt évident que l'Antecedent, eſt quelquefois partie Aliquante de ſon Conſequent, comme dans la Raiſon de 8 à 11, mais cela n'empêche pas qu'on ne puiſſe remarquer, la maniere dont 8 eſt contenu dans 11 ; c'eſt à dire, remarquer qu'il y eſt contenu une fois, avec un reſte qui eſt 3 ; & cette conſideration nous apprend qu'elle eſt la Raiſon de 8 à 11.

Il ſuit encore de ce que nous venons d'expliquer ; que ſi l'on multiplie l'Antecedent & le Conſequent d'une même Raiſon par une même grandeur, la Raiſon demeure toûjours la même. Par exemple, étant donnée la Raiſon de 3 à 6 ; ſi l'on multiplie 3 & 6 par un nombre quelconque, comme 4, il viendra 12 & 24, qui eſt une Raiſon pareille à celle de 3 à 6.

Tous les nombres ont une commune meſure qui eſt l'unité ; ou ſi l'on veut, l'unité eſt partie Aliquotte de tout nombre. Le rapport qui eſt entre deux nombres, s'appelle Raiſon de nombre à nombre.

Il y a des lignes qui ont entre elles le même rapport que de certains nombres ; par exemple, ſi l'on ſuppoſe qu'une ligne ſoit le tiers d'un autre. La plus petite ſera à l'égard de la plus grande, comme 1 eſt à 3 ; & pour lors, on dira que ces deux lignes ſont commenſurables, c'eſt à dire, qu'elles ont une commune meſure, ou bien qu'elles ſont entre elles, comme nombre à nombre.

Mais on verra dans la ſuite, que quoique deux certaines lignes ayent chacune une infinité d'Aliquottes, jamais telle Aliquotte de l'une que l'on voudra choiſir, ne pourra être l'Aliquotte de l'autre, & pour lors ces deux lignes ſe nomment incommenſurables. L'on dit que leur Raiſon eſt ſourde, ou irrationnelle, ou que ce n'eſt pas une Raiſon de nombre à nombre ; parce qu'en effet, il eſt impoſſible de trouver deux nombres, qui ayent entre eux même rapport que celui de ces deux lignes.

Non ſeulement l'on peut comparer deux grandeurs entre elles; l'on peut comparer deux Raiſons : & lorſque les Raiſons que l'on compare ſont égales entre elles, cela s'appelle Proportion. Par exemple, ſi l'on compare la Raiſon de 2 à 4, avec la Raiſon de 6 à 12, on voit clairement que ces deux Raiſons ſont égales; car de même que 2 eſt la moitié de 4, ainſi 6 eſt la moitié de 12, & cela ſe marque ainſi . . . 2, 4 :: 6, 12. C'eſt à dire, deux eſt à quatre, comme ſix eſt à douze.

En cet exemple, 2 s'appelle Antecedent de la premiere Raiſon; 4 s'appelle Conſequent de la premiere Raiſon. 6 eſt l'Antecedent de la ſeconde Raiſon; 12 eſt le Conſequent de la ſeconde Raiſon. 2 & 12 s'appellent les Extrêmes de la Proportion; 4 & 6 s'appellent les moyens; mais il faut remarquer qu'un même terme peut être le Conſequent de la premiere Raiſon, & l'Antecedent de la ſeconde; & pour lors il s'appelle, moyen Proportionnel, comme en l'exemple qui ſuit. 2 eſt à 4, comme 4 eſt à 8; cela ſe marque ainſi 2, 4, 8 ∺ pour abreger.

Comme la définition de la Proportion eſt importante, il faut ſe la rendre familiere par une autre expreſſion.

L'on connoît qu'il y a Proportion entre quatre termes, quand les Aliquottes pareilles des Antecedens ſont contenuës autant de fois dans leurs Conſequents; ſoient les quatre termes 9, 27 :: 18 54.
3 6

3 eſt le tiers de l'Antecedent 9, comme 6 eſt le tiers de l'Antecedent 18. Ainſi 3 & 6 ſont Aliquottes pareilles des deux Antecedens. Si donc 3 eſt autant de fois contenu dans le Conſequent 27, que 6 dans le Conſequent 54; il y aura Proportion entre ces quatre termes. Or 3 eſt neuf fois dans 27, comme 6 eſt neuf fois dans 54. Ainſi les quatre termes ſont Proportionnels.

Que ſi les Aliquottes pareilles des Antecedens ne meſurent pas exactement leurs Conſequents, c'eſt à dire, ſi elles y ſont contenuës un certain nombre de fois avec un reſte, pour qu'il y ait Proportion, il faut que les deux reſtes ſoient entre eux, comme les Aliquottes pareilles; Par exemple, ſoit la Proportion 9, 20, :: 27, 60.

Soit 3 l'Aliquotte de l'Antecedent 9; ſoit 9 l'Aliquotte de l'Antecedent 27. Elles ſont Aliquottes pareilles parce que 3 eſt le tiers de l'Antecedent 9, comme 9 eſt le tiers de l'Antecedent 27. Mais 3 ne meſure point exactement le Conſequent 20, car il y eſt contenu ſix fois avec le reſte 2. Afin donc qu'il y ait Proportion, il faut que 9 ſoit contenu ſix fois dans le Conſequent 60 avec un reſte qui ſoit 6. Or il eſt viſible que 2, premier reſte du Conſequent 20 eſt à 6, reſte du Conſequent 60, comme 3 eſt à 9, c'eſt à dire, comme les Aliquottes pareilles des Antecedens; & par conſequent la Proportion ſubſiſte entre les quatre termes 9, 20, :: 27, 60.

Si au lieu de prendre pour les Aliquottes pareilles des Antecedens, les deux nombres 3, 9, l'on prend 1, 3; il arrivera la même choſe: car 1 eſt contenu neuf fois dans l'Antecedent 9; 3 eſt contenu neuf fois dans l'Antecedent 27, donc 1, 3 ſont Aliquottes pareilles des Antecedens. Or 1 eſt contenu vingt fois dans 20 Conſequent de la premiere Raiſon, & 3 eſt contenu vingt fois dans 60, Conſequents de la ſeconde Raiſon; donc les quatre termes ſont proportionnels.

Mais il faut un peu s'accoûtumer à conſiderer la Proportion par les Aliquotes pareilles, qui laiſſent des reſtes dans les Conſequents; parce qu'autrement on ne pourroit ſe former une idée bien diſtincte de la Proportion qui ſe trouve entre quatre grandeurs incommenſurables.

Car ſi deux lignes ſont incommenſurables entre elles; jamais l'Aliquotte de l'une ne pourra être Aliquotte de l'autre. Il ne laiſſe pas d'y avoir entre ces deux lignes un certain rapport; & ſi deux autres lignes ont entre elles le même rapport, il y aura Proportion, parce que les Aliquottes pareilles des Antecedens, ſeront également contenuës dans les Conſequents, avec un reſte de part & d'autre; & que ces reſtes ſeront entre eux comme les Aliquottes pareilles des Antecedens.

En un mot, Proportion eſt la comparaiſon de deux Raiſons égales, ſoient que ces Raiſons ſoient de nombre à nombre, ſoit qu'elles ſoit ſourdes.

La plus importante proprieté de cette Proportion, qu'on appelle par excellence Proportion Geometrique, c'eſt que le produit des Extrêmes, eſt toûjours égal au produit des Moyens; & pour le démontrer d'une maniere univerſelle, je ſuppoſe.

1°. Que toute grandeur ſe puiſſe exprimer ou deſigner par une lettre ainſi $A, B :: C, D$, veut dire, la grandeur que j'appelle A, eſt à celle que j'appelle B, comme la grandeur que j'appelle C, eſt à celle que j'appelle D. Soit que ces grandeurs ſoient des nombres, ou que ce ſoient des lignes.

Ce ſigne $+$ veut dire plus.

Ce ſigne $-$ moins.

Deux caracteres placés ſans virgule l'un auprés de l'autre, comme AB, ſignifient la grandeur A, multipliée par la grandeur B, ou le produit d'A par B.

$AB = CD$, ſignifie, le produit d'A par B eſt égal au produit de C par D.

Cela ſuppoſé. Soit une Proportion Geometrique $A, B :: C, D$. Il faut démontrer que le produit des Extrêmes AD, eſt égal au produit des Moyens BC, c'eſt à dire, $AD = BC$.

Souvenons-nous d'abord que deux grandeurs ſont égales, quand elles ſont en même Raiſon avec une même grandeur. Par exemple, ſi une ligne quelconque eſt le tiers ou le quart d'une ligne que j'appellerai Z, toute autre ligne qui ſera le tiers ou le quart de Z, ſera égale à la premiere.

Il faut ſe ſouvenir en ſecond lieu, que deux Raiſons égales à une même Raiſon ſont égales entre elles. Cela eſt évident par ſoi-même.

De plus il eſt évident que $AD, BD :: A, B$. C'eſt à dire, que le produit de A par D, eſt au produit de B par D, comme A, eſt à B. Parce que la premiere de ces deux Raiſons *AD*, *BD*, n'eſt autre choſe que la Raiſon *A*, *B*, multipliée par une même grandeur, qui eſt *D*. Nous l'avons expliqué cy-deſſus en nombres.

Suivant le même raiſonnement, *CB*, *BD* :: *C*, *D*, parce que la Raiſon de *CB*, à *BD*, n'eſt autre choſe que la Raiſon de *C* à *D*, multipliée par la même grandeur, qui eſt *B*.

Il eſt donc démontré que, *AD*, *BD* :: *A*, *B*.

Il eſt encore démontré que ... *CB*, *BD* :: *C*, *D*.

Voilà donc quatre Raiſons, qui ſont neceſſairement égales; car la premiere vient d'être démontrée égale à la ſeconde, & la troiſiéme égale à la quatriéme; or par la ſuppoſition, la ſeconde & la quatriéme ſont égales, puiſqu'elles conſtituënt la Proportion *A*, *B*, :: *C*, *D*. Donc la premiere Raiſon, *AD*, *BD*, eſt auſſi égale à la troiſiéme Raiſon *CB*, *BD*, & ces deux Raiſons font une nouvelle Proportion *AD*, *BD* :: *CB*, *BD*.

Dans cette derniere Proportion, les deux Conſequents ſont égaux, ou ſi vous voulés ſont la même grandeur *BD*; donc les deux Antecedens *AD*, *CB*, qui ont le même rapport avec cette même grandeur *BD*, ſont neceſſairement égaux; c'eſt à dire, $AD = BC$, ou *CB* ce qui ſignifie, *A*; multiplié par *D*, eſt égal à *B*, multiplié par *C*, ou *C*, multiplié par *B*, ce qui eſt la même choſe; donc le produit des Extrêmes d'une Proportion, eſt toûjours égal au produit des Moyens.

AVERTISSEMENT.

Pour encourager ceux qui commençent, & leur faire connoiſtre par un exemple illuſtre, de quoy un bon eſprit eſt capable quand il veut ſe rendre attentif, l'on croit devoir rapporter icy une merveille dont M. de Malezieu eſt témoin. Madame la Ducheſſe du Maine n'ayant pas encore ſeize ans accomplis, avoit déja un gouſt ſurprenant pour les Sciences & les belles Lettres. Elle ſe faiſoit entretenir tous les jours pendant deux heures par M. de Malezieu, & l'engageoit même à aller de deux jours l'un, la trouver à Marly quand la Cour y eſtoit.

Dans ces premiers commencemens, & pendant l'un de ces voyages; elle voulut aprendre l'Arithmetique. La Regle de trois la frappa, elle en demanda le fondement. Cela engagea M. de Malezieu à lui dire, que c'étoit une ſuite de la proprieté de ce qu'on appelle Proportion Geometrique, dont il lui donna ſimplement un Exemple ſur les quatre nombres ſuivans, 3, 4, :: 6, 8, *en lui ajoûtant, que lorſque quatre nombres quelconques avoient entre eux ce rapport, le produit des Extrêmes étoit toûjours égal au produit des Moyens. Cette explication redoubla la curioſité de la Princeſſe. Elle demanda la raiſon de cette proprieté: M. de Malezieu lui répondit qu'il n'y falloit pas ſonger, & que cette démonſtration étoit la ſuite de pluſieurs principes dont elle n'avoit jamais oüy parler, & qui viendroient à leur tour. Mais il fut bien ſurpris de recevoir le lendemain matin, un billet de Madame la Ducheſſe du Maine, qui l'exhortoit à venir ſur le champ, pour examiner avec elle, ſi des reflexions qu'elle avoit faites pendant la nuit ſur cette merveilleuſe proprieté, pouvoient être de quelque uſage. Il partit auſſi-toſt, & fut bien payé de ſon voyage, par le plaiſir qu'il eut de voir que cette jeune Princeſſe avoit parfaitement démeſlé tout le fonds de la démonſtration, & l'avoit mis dans une évidence plus parfaite que tout ce qu'il avoit jamais vû ſur cette matiere. Voici préciſément ce qu'elle dit à M. de Malezieu.*

Je conſidere les quatre nombres 2, 4, 3, 6, *qui ſont en Proportion, parce que le premier eſt la moitié du ſecond, comme le troiſiéme eſt la moitié du quatriéme; & je veux trouver pourquoy le produit de* 2 *par* 6, *eſt égal au produit de* 4 *par* 3.

Pour cela, je vois d'abord que ſi je multiplie 2 *par* 6, *ce produit qui eſt le produit des Extrêmes, doit être double du produit de* 2 *par* 3, *parce que* 6 *eſt double de* 3.

Mais ſi au lieu de prendre ce produit de 2 *par* 3, *ou* 3 *par* 2, *qui n'eſt que la moitié du produit des Extrêmes, je m'aviſe de prendre le produit de* 3 *par* 4; *il faudra bien que ce produit de* 3 *par* 4, *ſoit double du produit de* 3 *par* 2, *puiſque* 4 *eſt le double de* 2, *de même que* 6 *eſt le double de* 3; *donc le produit de* 3 *par* 4, *étant double du produit de* 3 *par* 2, *qui* *n'est que la moitié du produit des Extrêmes, ce produit de 3 par 4, sera necessairement égal au produit des Extrêmes, c'est à dire que le produit des Extrêmes sera égal au produit des Moyens.*

Pour faire voir que cette admirable démonstration trouvée par Madame la Duchesse du Maine, ne laisse rien à desirer, & qu'elle revient à la démonstration generale que nous avons donnée par lettres, il n'y a qu'à nommer les quatre nombres qu'elle avoit choisis & suivre la démonstration.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 2 & 4 :: & 3, & 6 \end{array}$$

2 multiplié par 6, est à 2 multiplié par 3, comme 6 est à 3, ou

$$AD, \; AC, :: D, C.$$

3 multiplié par 4, est à 3 multiplié par 2, comme 4 est à 2, ou

$$CB, \; CA :: B, A.$$

Or par la supposition, 4 est à 2, comme 6 est à 3, ou

$$B, A :: D, C.$$

Donc 2 multiplié par 6, est à 2 multiplié par 3, comme 3 multiplié par 4, à 2 multiplié par 3, ou

$$AD, AC, \text{ ou } CA :: CB, CA.$$

Donc 2 multiplié par 6 égal à 3 multiplié par 4, ou

$$AD = CB.$$

Il suit de cette Proposition, que si quatre termes quelconques, sont tels que le produit des Extrêmes soit égal au produit des Moyens, ces quatre termes seront proportionels; puisque ces deux produits, comme AD, BC, auront necessairement mesme rapport à une grandeur qui sera BD, & en remontant par degrés, la démonstration précedente, on trouvera que $A, B :: C, D$.

Cela étant, quand une Proportion me sera donnée, je puis y faire tels changemens qu'il me plaira sans la détruire, toutes les fois que je conserverai l'égalité du produit des Moyens & des Extrêmes.

Ainsi

Ainſi, ſi $A, B, :: C, D$, il s'enſuivra que $A, C, :: B, D$, parce que les deux produits demeurent neceſſairement les mêmes. Il a plû aux Geometres d'appeller ce changement. *Alternando.*

Maintenant ſi l'on ajoûte le Conſequent de la premiere Raiſon à ſon Antecedent pour comparer cette ſomme au Conſequent, & qu'on faſſe la même choſe à l'égard de la ſeconde Raiſon. C'eſt à dire, ſi ayant $A, B, :: C, D$. L'on dit $A+B, B, :: C+D, D$. Il eſt aiſé de voir que le produit des Extrêmes ſera égal au produit des Moyens; car le produit des Extrêmes eſt $AD+BD$; le produit des Moyens eſt $CB+BD$. Or il eſt viſible que $AD+BD=CB+BD$. Puiſque AD, eſt égal à BC, à cauſe de la premiere Proportion. Cela s'appelle *Componendo.* En nombres, ſi 2, 4 :: 3, 6. Je dis que $2+4, 4 :: 3+6, 6$. C'eſt à dire, 6 eſt à 4, comme 9 eſt à 6.

Que ſi au lieu d'ajoûter les Conſequents à leurs Antecedens pour en faire la comparaiſon avec les Conſequents, on les ôte des Antecedens, c'eſt à dire, ſi ayant $A, B :: C, D$, l'on dit $A-B, B, :: C-D, D$. L'on prouvera par le même raiſonnement, que le produit des Extrêmes ſera égal au produit des Moyens, & qu'ainſi la Proportion ne ſera point bleſſée. Cela s'appelle *Dividendo.* En nombres, ſi 9, 4 :: 27, 12, je dis que $9-4, 4 :: 27-12, 12$. C'eſt à dire, 5 eſt à 4, comme 15 eſt à 12.

Voilà les changemens eſſentiels & les plus ordinaires qu'on fait dans la Proportion, car à proprement parler, ce n'eſt point en faire un, lors qu'ayant la Proportion 2, 4, :: 3, 6, l'on dit 6, 3 :: 4, 2, puiſqu'on ne fait que prendre les termes à rebours, qu'ils gardent le même ordre entre eux; & qu'ainſi il n'y peut avoir aucun changement, cela s'appelle pourtant *Invertendo.*

De même, ſi l'on dit 3, 6 :: 2, 4, ce n'eſt pas un vrai changement, puiſqu'on fait ſimplement changer de place à deux Raiſons égales pour les comparer. Cela s'appelle *Permutando.*

Il faut parler maintenant des Raiſons compoſées.

Lors qu'ayant deux Raiſons, comme *A*, *B*, l'une, & *C*, *D*, l'autre; l'on multiplie les deux Antecedens l'un par l'autre, & les deux Conſequents auſſi l'un par l'autre; ces deux produits font une nouvelle Raiſon, comme *AC*, *BD*; c'eſt à dire, la grandeur *A*, multipliée par *C*, comparée avec la grandeur *B*, multipliée par *D*. Cette nouvelle Raiſon eſt dite compoſée de la Raiſon de *A*, à *B*, & de la Raiſon de *C*, à *D*. Exemple en nombres.

Premiere Raiſon, 2, 4.
Seconde Raiſon, 9, 15.

2, multiplié par 9, donne 18; 4, multiplié par 15, donne 60. La Raiſon de 18 à 60, eſt dite, Raiſon compoſée de la Raiſon de 2 à 4, & de la Raiſon de 9 à 15.

Si les deux Raiſons compoſantes ſont égales, c'eſt à dire, ſi elles conſtituent une Proportion; la Raiſon compoſée eſt dite, Raiſon doublée de la premiere Raiſon. Par exemple, 2, 4 : : 6, 12. Je multiplie les deux Antecedens, vient 12, & les deux Conſequents, vient 48; la Raiſon de 12 à 48, qui eſt la Raiſon compoſée de ces deux Raiſons égales, eſt dite, Raiſon doublée de la Raiſon de 2 à 4, ou de la Raiſon de 6 à 12 qui eſt ſon égale.

Il ne faut pas confondre la Raiſon double avec la Raiſon doublée : car, par exemple, on dit que 4 eſt en Raiſon double de 2; c'eſt à dire, que 4 eſt double de 2, mais n'eſt pas en Raiſon doublée. On doit s'imprimer fortement toutes ces définitions dans l'eſprit.

Il faut ſur tout bien remarquer qu'une même Raiſon peut être exprimée d'une infinité de manieres. Par exemple,

A, *B*.
AD, *BD*.
ADC, *BDC*.

C'eſt toûjours la même Raiſon *A*, *B*, puiſque la Raiſon du produit *AD*, au produit *BD*, n'eſt autre choſe que la Raiſon *A*, *B*, multipliée par la même grandeur *D*; & de même la Raiſon *ADC*, *BDC*, n'eſt autre choſe que la Raiſon *AB*, multipliée par le même produit ou même grandeur *DC*, en nombres.

1,	2
2,	4
8,	16
32,	64
100,	200

C'eſt toûjours la même Raiſon, étant viſible que l'Antecedent eſt toûjours la moitié du Conſequent dans ce dernier exemple; ou ſi vous voulés, la ſeconde Raiſon, 2, 4, n'eſt autre choſe que la premiere Raiſon 1, 2, multipliée par une même grandeur qui eſt 2, & de même la derniere Raiſon 100, 200, n'eſt autre choſe que la premiere Raiſon 1, 2, multipliée par une même grandeur qui eſt 100.

Les plus petits termes qui expriment une Raiſon, ou ſi vous voulés les plus ſimples termes d'une Raiſon, s'appellent les Expoſans de la Raiſon. Par exemple, dans la Raiſon cy-deſſus exprimée en lettres, *A*, *B*, en ſont les Expoſans, & dans l'exemple en nombre, 1, 2, en ſont les Expoſans, & le ſeront toûjours par quelque nombre que l'on puiſſe multiplier, 1, 2; car la Raiſon de 100000, 200000, aura toûjours 1, 2, pour Expoſans, & ſera toûjours la Raiſon de 1, à 2.

On tire delà une conſequence fort importante pour la ſuite; ſçavoir, que la Raiſon doublée d'une Raiſon de nombre à nombre, a neceſſairement pour Expoſans des nombres quarrés.

Car ayant une Raiſon de nombre à nombre, comme 3, 6, ſi j'en veux avoir la Raiſon doublée, il faut que je mette à côté de celle-là, une Raiſon qui lui ſoit égale. Par exemple, 3, 6 :: 4, 8.

Puis multipliant les deux Antecedens l'un par l'autre, & les deux Conſequents pareillement, pour avoir la Raiſon doublée, il viendra la Raiſon, 12, 48.

Reduiſant cette Raiſon 12, 48, aux moindres termes qui ſont 1, 4, & qui en ſont par conſequent les Expoſans, on voit que ce ſont deux nombres quarrés, & cela ne peut jamais manquer d'arriver, dont voici la Raiſon.

Je diſpoſe les deux Raiſons égales en Proportion, 3, 6 :: 4, 8.

Je les reduits aux plus ſimples termes, 1, 2 :: 1, 2.

En cette derniere Proportion, il eſt évident que les deux Antecedens ſont le même nombre, & les deux Conſequents auſſi le même nombre. Si donc je multiplie les deux Antecedens l'un par l'autre, & les deux Conſequens l'un par l'autre, pour avoir la Raiſon doublée, j'aurai neceſſairement deux nombres quarrés, puiſque chacun de ces nombres, ſera le produit d'un nombre multiplié par ſoi-même.

De cette conſequence j'en tire une autre, qui eſt le fondement des incommenſurables, comme nous le verrons dans la ſuite; ſçavoir, que:

Si l'on me donne une Raiſon doublée, qui n'ait pas pour Expoſans des nombres quarrés, la Raiſon dont elle eſt doublée, n'eſt pas Raiſon de nombre à nombre.

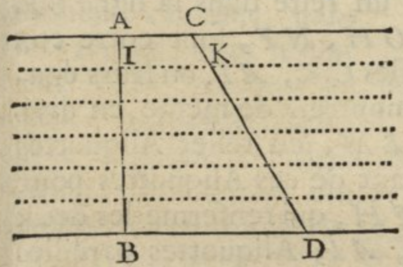
Avant que de quitter ces reflexions generales ſur les Proportions, il eſt bon de conſiderer que ce que nous avons dit cy-deſſus, de l'égalité du produit des Extrêmes, & de celui des Moyens, eſt le fondement de ce que les Arithmeticiens appellent la Regle de trois. Car dans cette Regle, il ne s'agit que de trouver le quatriéme Proportionnel à trois nombres donnés. Par exemple, j'ai 2, 4 :: 6,

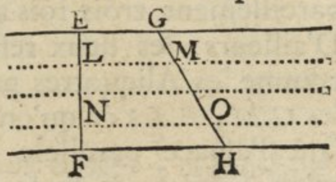
Je veux trouver un quatriéme nombre qui finiſſe la Proportion; c'eſt à dire, auquel 6, ſoit en même Raiſon que 2 eſt à 4; il eſt bien certain que ce quatriéme nombre quel qu'il puiſſe être, étant multiplié par le premier me donnera un produit égal au produit de 4 par 6, puiſque le premier nombre & lui inconnu, ſont les Extrêmes d'une Proportion; donc 4 & 6, ſont les

Moyens ; ainsi multipliant 4 par 6, il me viendra 24, & je suis seur que 24, est aussi le produit de mon nombre inconnu par 2 ; donc si je divise 24 par 2, il me viendra necessairement le nombre inconnu 12 que je cherchois. 2, 4, :: 6, 12.

PREMIERE PROPOSITION FONDAMENTALE *des Lignes Proportionnelles.*

Les Lignes également inclinées dans deux differens espaces enfermés par des paralleles, sont entre elles en même Raison que les perpendiculaires de ces espaces.





Soient supposées les deux lignes *CD*, *GH*, chacune autant inclinée dans son espace ; c'est à dire, l'angle *CDB*, égal à l'angle *GHF*. Il faut démontrer que la ligne *CD*, est à la ligne *GH*, comme la perpendiculaire *AB*, à la perpendiculaire *EF*.

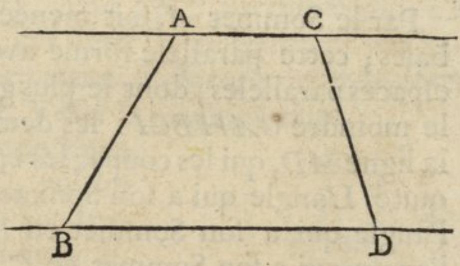
Pour cela, je divise la ligne *CD*, en telles Aliquottes qu'il me plaira. Icy, par exemple, je la divise en six parties égales ; comme *CK*. Par les points de division, je meine des paralleles à l'espace, c'est à dire, à la ligne *AC*. Ces paralleles divisent l'espace total en six petits espaces paralleles égaux entre eux ; & la perpendiculaire *AB*, se trouve divisée de telle sorte que la ligne *AI*, est sa sixiéme partie, de même que la ligne *CK*, est la sixiéme partie de la ligne *CD*. Voilà donc les lignes *CK*, *AI*, Aliquottes pareilles des lignes *CD*, *AB*. Je prens maintenant la petite ligne *AI*, pour mesurer l'autre perpendiculaire *EF*. Je trouve qu'elle y est contenuë trois fois avec un reste. Par les points de division, je meine des paralleles à la ligne *EG*. Il s'ensuivra delà que la ligne *GH*, sera divisée de telle sorte, que la petite ligne *GM*, sera contenuë trois fois avec un reste dans la ligne *GH*; de même que la ligne *AI*, ou plûtôt son égale *EL*, est contenuë trois fois avec un reste dans la perpendiculaire *EF*. Il s'ensuivra de plus que *GM*, sera necessairement égale à la petite ligne *CK*, par la cinquiéme Proposition des paralleles. Cette préparation faite, il est visible que *CK*, sixiéme partie de *CD*, est contenuë trois fois avec un reste dans la ligne *GH*, & que *AI*, sixiéme partie de *AB*, est contenue pareillement trois fois avec un reste dans la ligne *EF*. D'ailleurs, les deux restes *OH*, *NF*, sont entre eux comme les Aliquottes pareilles *CK*, *AI*, ou leurs égales *GM*, *EL*; ce qu'on démontrera de même, en divisant l'espace parallele *EGLM*, en telles Aliquottes qu'on voudra, & en se servant de ces Aliquottes pour mesurer le petit espace *NOFH*, qui renferme les deux restes; donc les lignes *CK*, *AI*, Aliquottes pareilles des Antecedens *CD*, *AB*, sont également contenues dans les Consequents *GH*, *EF*; donc *CD*, *GH* : : *AB*, *EF*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si au lieu de diviser la ligne *CD*, en six parties égales, je l'avois divisée en cent mille parties égales; je me serois servi de ces cent milliêmes parties, pour mesurer la ligne *GH*, chacune de ces cent milliêmes parties auroit été contenue dans la ligne *GH*, ou précisément un certain nombre de fois, ou avec un reste; de même une cent milliême partie de la ligne *AB*, auroit été contenue dans la ligne *EF*, ou précisément le même nombre de fois, ou le même nombre de fois avec un reste; & delà s'ensuivroit la Proportion des quatre lignes, comme cy-dessus.

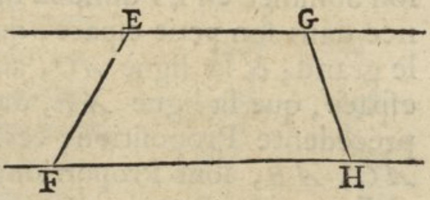
SECONDE PROPOSITION.

Si deux lignes sont autant inclinées dans leur espace parallele, que deux autres lignes dans le leur, les quatre lignes sont Proportionnelles.

Si la ligne *AB*, eſt autant inclinée dans ſon eſpace, que la ligne *EF*, l'eſt dans le ſien, ces deux lignes ſeront entre elles, comme les perpendiculaires des eſpaces par la précedente Propoſition.



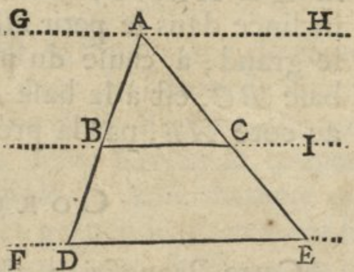
De même, ſi les lignes *CD*, *GH*, ſont autant inclinées chacune dans leur eſpace, elles ſeront entre elles, comme les mêmes perpendiculaires de ces eſpaces. Or deux Raiſons égales à une même Raiſon, ſont égales entre elles; donc la Raiſon des deux premieres inclinées *AB*, *EF*, eſt égale à la Raiſon des deux autres *CD*, *GH*, ce qui fait leur Proportion.



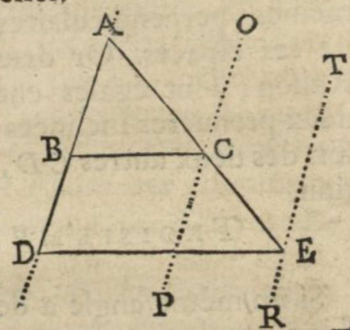
TROISIE'ME PROPOSITION.

Si un même angle a deux baſes paralleles, ſes côtés, ſelon une baſe, ſont proportionnels à ſes côtés, ſelon l'autre; & les baſes elles-mêmes ſont en même Raiſon, que les côtés de même part, appellés côtés Homologues.

Soit l'angle *DAE*, ou *BAC*, ayant les deux baſes *DE*, *BC*. Il faut démontrer que le côté *AB*, eſt au côté *AD*, ſon Homologue, comme le côté *AC*, eſt au côté *AE*, ſon Homologue; & que la baſe *BC*, eſt à la baſe *DE*, auſſi, comme le côté *AB*, eſt au côté *AD*, ou comme le côté *AC*, eſt à ſon Homologue *AE*.



Par le Sommet *A*, ſoit menée une parallele aux deux baſes ; cette parallele forme avec les deux baſes, deux eſpaces paralleles, dont le plus grand eſt *GAHFDE*, & le moindre *GAHBCI* ; les deux baſes étant paralleles, la ligne *AD*, qui les coupe, les coupe avec la même obliquité. L'angle qui a ſon Sommet en *B*, eſt donc égal à l'angle qui a ſon Sommet en *D* ; par la même Raiſon, l'angle qui a ſon Sommet en *C*, eſt égal à l'angle qui a ſon Sommet en *E* ; donc la ligne *AB*, eſt autant inclinée dans ſon petit eſpace, que la ligne *AD*, l'eſt dans le grand ; & la ligne *AC*, autant inclinée dans le petit eſpace, que la ligne *AE*, dans le grand ; donc par la précedente Propoſition, ces quatre lignes *AB*, *AD*, *AC*, *AE*, ſont Proportionnelles.



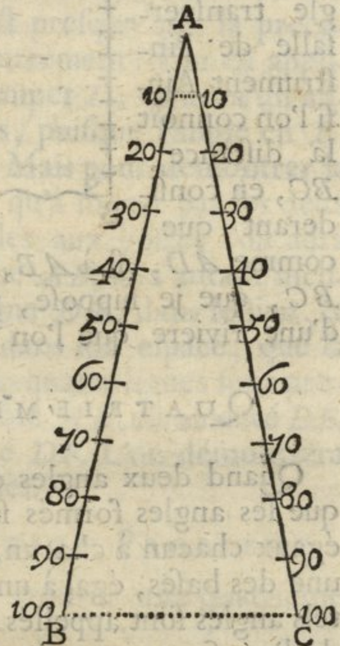
Pour démontrer preſentement que la baſe *BC*, eſt à la baſe *DE*, comme le côté *AC*, eſt au côté Homologue *AE*. Soit menée par le point *E*, la ligne *RT*, parallele au côté *AD*, & par le point *C*, la ligne *OCP* ; il ſe forme par-là deux nouveaux eſpaces paralleles, le plus grand compris par les lignes *TER*, *ABD*, & le petit compris par les lignes *OCP*, *ABD*. Or la ligne *AC*, eſt autant inclinée dans le petit eſpace, que la ligne *AE*, l'eſt dans le grand, & la ligne *BC*, autant inclinée dans le petit eſpace, que la ligne *DE*, dans le grand, à cauſe du paralleliſme des baſes ; donc la baſe *BC*, eſt à la baſe *DE*, comme le côté *AC*, eſt au côté *AE*, par la précedente Propoſition.

COROLLAIRE.

Cette Propoſition eſt le fondement d'une partie du compas de Proportion, qu'on appelle les Parties égales. Car ce n'eſt autre choſe en effet que deux lignes égales

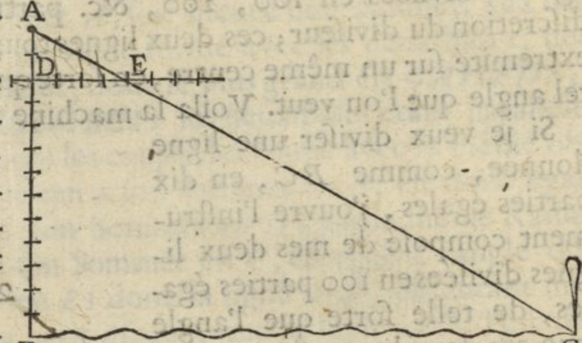
égales, diviſées en 100, 200, &c. parties égales à la diſcretion du diviſeur; ces deux lignes tournent par leur extremité ſur un même centre, en ſorte qu'elles forment tel angle que l'on veut. Voila la machine faite.

Si je veux diviſer une ligne donnée, comme *BC*, en dix parties égales, j'ouvre l'inſtrument compoſé de mes deux lignes diviſées en 100 parties égales, de telle ſorte que l'angle que ces deux lignes formeront, ait pour baſe la ligne à diviſer *BC*; enſuite de quoy portant un compas ordinaire ſur les diviſions, de maniere que ſes pointes ſoient appliquées de part & d'autre de 10 en 10, la ligne 10, 10, compriſe par les pointes du compas ſera la dixiéme partie de la ligne *BC*; puiſque toute cette operation aboutit à donner deux baſes paralleles à un même angle, & que de même que le côté *A* 10, eſt la dixiéme partie du côté *A* 100, ainſi la baſe 10, 10, eſt la dixiéme partie de la baſe *BC*.



II. COROLLAIRE.

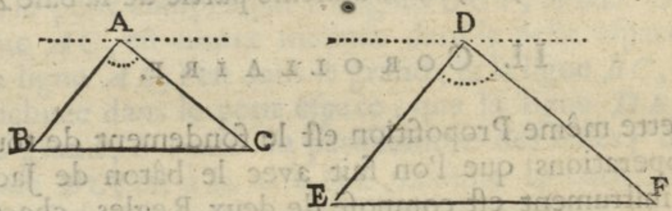
Cette même Propoſition eſt le fondement de toutes les operations que l'on fait avec le bâton de Jacob. Cet inſtrument eſt compoſé de deux Regles, chacune diviſée en parties égales. Ces deux Regles ſe coupent à angles droits, & on les diſpoſe de telle maniere que la hauteur du bâton *AB* poſée perpendiculairement ſur le terrain, *BC*, que l'on veut meſurer, & le rayon viſuel conduit du haut du bâton *A*, juſques au point d'éloignement *C*, font un angle qui a deux baſes paralleles; sçavoir, la distance *BC*, & la partie *DE*, de la Regle transversalle de l'instrument. Ainsi l'on connoît la distance *BC*, en considerant que



comme *AD*, est à *AB*, de même *DE*, est à la distance *BC*, que je suppose, par exemple, être la largeur d'une riviere que l'on veut mesurer, du bord *B*.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Quand deux angles égaux ont chacun une base, & que les angles formés sur les bases par les côtés sont égaux chacun à chacun, c'est à dire un angle formé sur une des bases, égal à un angle formé sur l'autre base; tels angles sont appellés angles semblables, & les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés de l'autre, aussi bien que la base à la base.



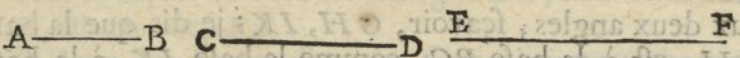
Soit l'angle dont le sommet est en *A*, égal à l'angle dont le sommet est en *D*. Soit l'angle *ABC*, formé sur la base *BC*, par le côté *AB*, égal à l'angle *DEF*, formé sur la base *EF*, par le côté *DE*. Les angles *ACB*, *DFE*, seront par consequent égaux, le côté *BA*, en ce cas eſt appellé Homologue à l'égard du côté *DE*, & le côté *AC*, Homologue par rapport au côté *DF*. Il faut démontrer que le côté *AB*, eſt au côté *DE*, comme le côté *AC*, eſt au côté *DF*, & comme la baſe *BC*, eſt à la baſe *EF*.

1°. Il eſt évident que ce n'eſt preſque que la precedente Propoſition énoncée autrement: Car en appliquant le ſommet *A*, ſur le ſommet *D*, viendra un angle ayant deux baſes paralleles, puiſque l'angle en *B*, eſt ſuppoſé égal à l'angle en *E*. Mais pour démontrer la choſe immediatement, il n'y a qu'à mener par les deux ſommets *A*, *D*, deux paralleles aux baſes; l'on aura deux eſpaces paralleles; la ligne *AB*, ſera autant inclinée dans ſon eſpace, que la ligne *DE*, dans le ſien, & la ligne *AC*, autant inclinée dans ſon eſpace, que la ligne *DF*, dans le ſien; donc ces quatre lignes ſont proportionnelles; c'eſt à dire, le côté *AB*, eſt au côté *DE*, comme le côté *AC*, eſt au côté *DF*. L'on démontrera de même la proportion des baſes.

CINQUIE'ME PROPOSITION PROBLEME.

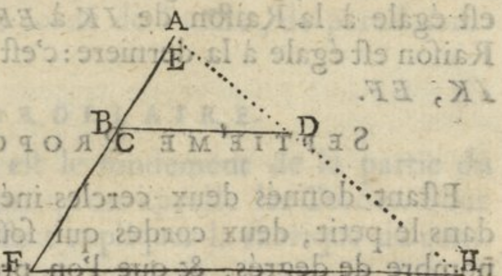
Eſtant données trois lignes, trouver une quatriéme proportionnelle.

Soit les trois lignes données.



Soit du point *A*, fait le ſommet d'un angle dont la ligne *AB*, ſoit un côté.

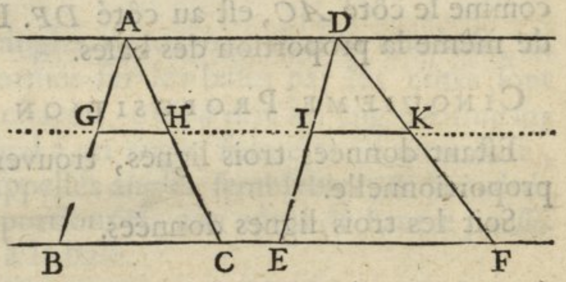
Sur le point *B*, ſoit placé le point *C*, de la ligne *CD*, en ſorte que la ligne *CD*, ſoit baſe de l'angle dont le ſommet eſt en *A*. Au même point *A*, ſoit



appliqué le point *E*, de la ligne *EF*, en ſorte que la ligne *EF*, ſoit couchée ſur la ligne *AB*, par les points *A*, *D*; ſoit menée une ligne indéfinie; la ligne *FH*, menée parallelement à la premiere baſe *CD*, & déterminée au point *H*, par la ligne indéfinie *AD*, ſera la quatriéme proportionnelle cherchée. Car en cette figure, il eſt viſible que l'angle en *A*, a deux baſes *CD*, *FH*, paralleles, & qu'ainſi le côté *AB*, eſt à la baſe *CD*, comme le côté *EF*, eſt à la baſe *FH*, qui eſt la quatriéme proportionnelle que l'on cherchoit.

SIXIE'ME PROPOSITION.

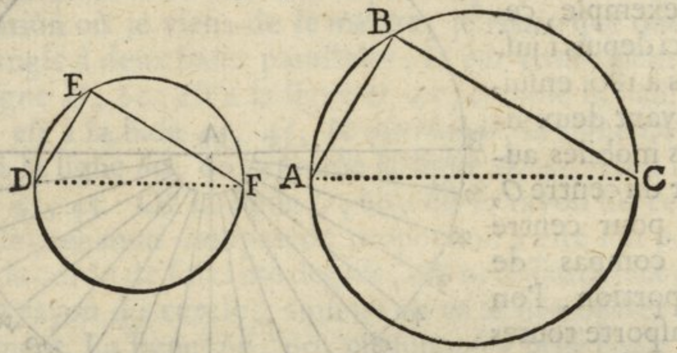
Si deux angles ſont entre mêmes paralleles, & que l'on leur donne deux nouvelles baſes paralleles aux deux premieres, les nouvelles baſes ſont proportionnelles aux deux premieres.



Soient les deux angles *BAC*, *EDF*, les deux baſes *BC*, *EF*; ſoit tirée la parallele *GK*, elle donne deux nouvelles baſes aux deux angles; ſçavoir, *GH*, *IK*; je dis que la baſe *GH*, eſt à la baſe *BC*, comme la baſe *IK*, à la baſe *EF*; car la Raiſon de *GH*, à *BC*, eſt égale à la Raiſon de *AG* à *AB*, qui eſt égale à la Raiſon de *DI*, à *DE*, qui eſt égale à la Raiſon de *IK* à *EF*; donc la premiere Raiſon eſt égale à la derniere : c'eſt à dire, *GH*, *BC* : : *IK*, *EF*.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Eſtant donnés deux cercles inégaux; ſi l'on choiſit dans le petit, deux cordes qui ſoûtiennent un certain nombre de degrés, & que l'on prenne dans le grand cercle, deux cordes, dont chacune ſoûtienne le même nombre de dégrés, que chacune du petit cercle, ces quatre cordes ſont proportionnelles.

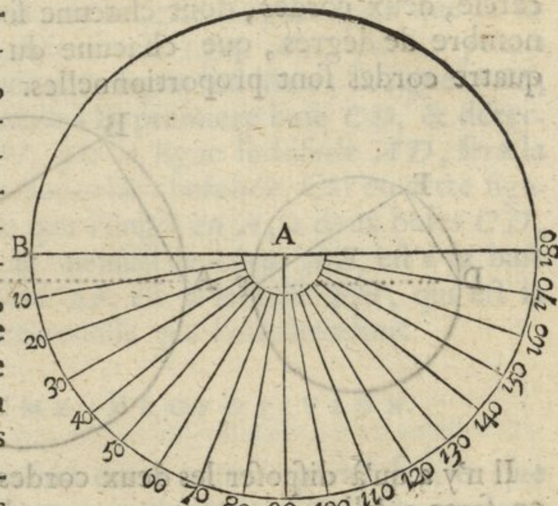


Il n'y a qu'à diſpoſer les deux cordes du petit cercle; en ſorte qu'elles comprennent un angle; faire la même choſe des deux cordes du grand, enſuite donner une baſe à chacun des angles, l'on aura des angles ſemblables; & par la quatriéme Propoſition, les côtés qui ſont les cordes, ſeront proportionnels. Car la corde *AB*, ſoûtenant autant de degrés que la corde *DE*. L'angle de la baſe en *C*, ſera égal à l'angle de la baſe en *F*; puiſque ce ſont deux angles inſcripts ſur des arcs égaux, & de même l'angle en *A*, ſera égal à l'angle en *D*; donc les deux angles du ſommet *DEF*, *ABC*, ſeront auſſi égaux; donc le côté *AB*, eſt au côté homologue *DE*, comme le côté *BC*, eſt au côté *EF*.

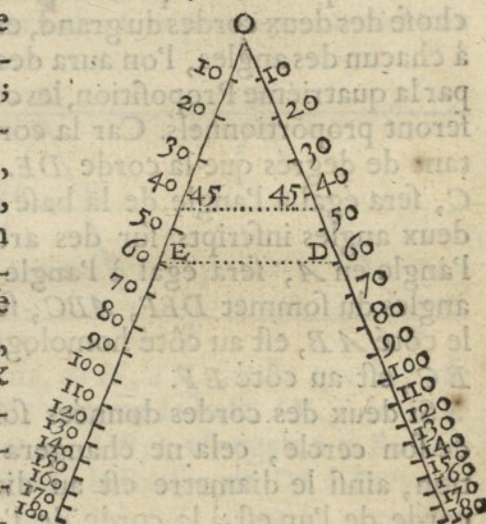
Si deux des cordes données ſont diametres chacune de ſon cercle, cela ne changera rien à la démonſtration, ainſi le diametre eſt au diametre, comme toute corde de l'un eſt à la corde de l'autre, de pareil nombre de degrés.

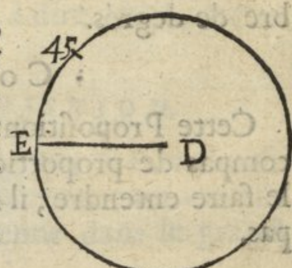
COROLLAIRE.

Cette Propoſition eſt le fondement de la partie du compas de proportion qu'on appelle les Cordes. Pour le faire entendre, il faut expliquer la fabrique du compas.



L'on fait un cercle que l'on divise en ses degrés, par exemple, celui-ci depuis 1 jusques à 180. ensuite ayant deux lignes mobiles autour du centre *O*, pris pour centre du compas de proportion, l'on transporte toutes les cordes du cercle divisé sur les deux lignes mobiles de part & d'autre à commencer du point *O*; par exemple, la longueur de la corde *B* 10, corde de dix degrés, se transporte de *O*, en 10; la corde *B*, 20, corde de 20 degrés, se transporte de *O*, en 20, sur les deux lignes; & ainsi du reste. L'instrument ainsi préparé, l'usage n'en est pas difficile. Soit donné un cercle de tel diametre que l'on voudra, & qu'il soit proposé de trouver dans ce cercle un arc de 45 degrés. J'ouvre les deux lignes qui font mon compas de proportion de telle sorte, que le rayon *E D*, soit porté de 60 en 60; ensuite cherchant

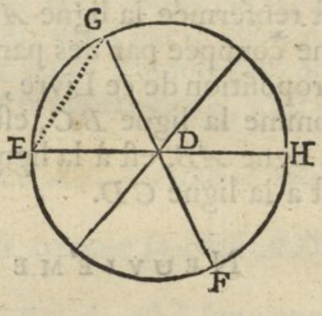




l'intervalle qui est entre 45, & 45. Je le porte dans mon cercle à diviser, & je dis que c'est un arc de 45 degrés.

Car considerant mon compas de proportion dans la situation où je viens de le mettre, je remarque que j'ai un angle à deux bases paralleles, & par consequent que la ligne *O*, 60, est à la ligne *O*, 45, comme la base 60, 60, est à la base 45, 45, & *alternando*, la ligne *O*, 60, est à la ligne 60, 60, comme la ligne *O*, 45, est à la ligne 45, 45. Or la ligne *O*, 60, est le rayon du cercle sur lequel mon compas de proportion a esté fait parce que la corde de soixante degrés, est necessairement égale au rayon du cercle, ainsi qu'on va le démontrer fort aisément. La ligne 60, 60, est supposée prise égale à la ligne *ED*, rayon du cercle à diviser; donc en cette proportion, le rayon est au rayon, comme la corde de 45 degrés du premier, est à la corde de 45 degrés du second. Ainsi portant cette longueur dans le cercle à diviser du point *E*, à 45, j'ai un arc en effet de 45 degrés.

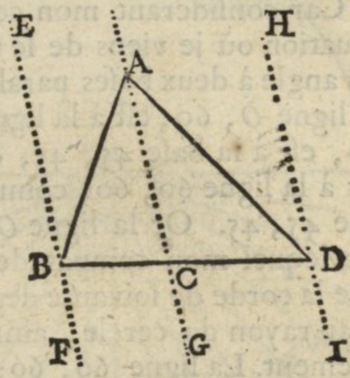
Il est trés-visible que la ligne *EG*, corde de l'arc de 60 degrés, est égal au rayon *ED*; car l'angle *EDG*, est un angle de 60 degrés, qui a son sommet au point *D*, centre du cercle; chacun des deux angles, que ses côtés font sur sa base *EG*, est aussi de 60 degrés; par exemple, l'angle *EGF*, est un angle inscript, qui ayant pour mesure la moitié de l'arc *EF*, de 120 degrés, est necessairement un angle de 60 degrés; donc ces trois angles étant égaux, les trois lignes *EG*, *GD*, *ED*, sont égales.



HUITIE'ME PROPOSITION.

Si une ligne divisant un angle quelconque en deux parties égales, tombe sur la base de cet angle, elle la partage proportionnellement aux côtés de l'angle.

Soit l'angle *BAD*, divisé en deux parties égales par la ligne *AC*, qui couppe la base *BD*, au point *C*; je dis que le côté *AB*, est à la portion *BC* de la base, comme le côté *AD*, est à la portion *CD*.

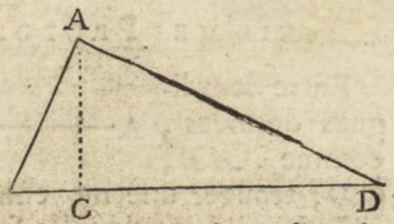


Par les points *B*, & *D*, soient menées les lignes *EF*, *HI*, paralleles à la ligne *AC*, prolongée en *G*. Il se forme par là deux espaces paralleles, & il est évident que la ligne *BA*, est autant inclinée dans son espace que la ligne *DA*, l'est dans le sien, puisque par la construction, l'angle *BAC*, est égal à l'angle *CAD*; de même la ligne *BC*, est autant inclinée dans le premier espace, où est renfermée la ligne *BA*, que la ligne *CD*, l'est dans le second espace où est renfermée la ligne *AD*, puisque c'est une même ligne couppée par des paralleles; donc par la deuxiéme Proposition de ce Livre, la ligne *AB*, est à la ligne *AD*, comme la ligne *BC*, est à la ligne *CD*, & *alternando*, la ligne *AB*, est à la ligne *BC*, comme la ligne *AD*, est à la ligne *CD*.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Si du sommet d'un angle droit, l'on meine une perpendiculaire sur la base; cette perpendiculaire forme deux angles semblables entre eux & au total; d'où s'ensuivent plusieurs proportions. Il faut relire soigneusement la quatriéme Proposition de ce Livre, pour bien entendre celle-cy qui est fort importante.

L'angle



L'angle *BAD*, eſt droit, l'angle *BCA*, eſt droit. Le premier forme ſur ſa baſe *BD*, l'angle *ABD*, le 2, c'eſt à dire, l'angle *BCA*, forme ſur ſa baſe *BA*, le même angle *ABD*, ou *ABC*; donc l'angle *BAD*, eſt ſemblable à l'angle *BCA*, puiſque les angles ſur les baſes ſont égaux entre eux, & que les angles *BAD*, *BCA*, étant tous deux droits, ſont eux-mêmes ſuppoſés égaux. On démontrera de même que l'angle *BAD*, eſt ſemblable à l'angle *DCA*, parce que outre qu'ils ſont tous deux droits, ils forment par leurs côtés des angles égaux chacun à chacun ſur leurs baſes, car le premier forme ſur ſa baſe *BD*, l'angle *BDA*, & ce même angle *BDA*, ou *CDA*, eſt l'angle formé ſur la baſe *AD*, par un côté de l'angle *DCA*. Les trois angles *BAD*, *BCA*, *DCA*, ſont donc non-ſeulement égaux, mais ſemblables, ce qu'il ne faut pas confondre; c'eſt à dire, que les angles qu'ils forment par leurs côtés ſur leurs baſes ſont égaux chacun à chacun; donc par la quatriéme Propoſition de ce Livre, les côtés homologues de ces trois angles ſemblables, ſont proportionnels, c'eſt à dire:

Le petit côté *BC*, eſt à ſa baſe *AB*, comme le petit côté *AB*, eſt à ſa baſe *BD*.

Le côté *CD*, eſt à ſa baſe *AD*, comme le côté *AD*, eſt à ſa baſe *BD*.

Le petit côté *BC*, de l'angle *BCA*, eſt à ſon autre côté *CA*, comme le petit côté *CA*, de l'angle *DCA*, eſt à ſon autre côté *DC*.

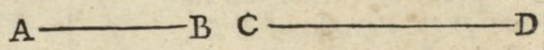
Pour prouver plus briévement ces proportions, on peut dire, que par la perpendiculaire *AC*, l'on a trois moyennes proportionnelles; ſçavoir, *AB*, moyen proportionnel entre *BD*, & *BC*.

AD, moyen proportionnel *BD*, & *CD*.

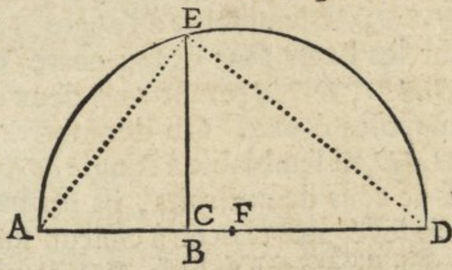
AC, moyen proportionnel entre *BC*, & *CD*.

DIXIE'ME PROPOSITION PROBLEME.

Entre deux lignes données, comme *AB*, *CD*, trouver une moyenne proportionnelle.



Je les dispose de telle sorte bout à bout, qu'elles ne fassent qu'une même ligne droite, telle qu'est la ligne *AD*, sur le point *B*, qui les joint. J'éleve la perpendiculaire indéfinie. Je divise la ligne *AD*, en deux parties égales au point *F*, & du point *F*, pris pour centre, intervalle *FD*, je décris le cercle qui couppe la perpendiculaire au point *E*; je dis que la ligne *BE*, est la moyenne proportionnelle cherchée : car par la construction, l'angle *AED*, est un angle droit, puisqu'il a son sommet dans la circonference, & qu'il est appuyé sur un demi cercle, ou 180 degrés; donc par la précedente Proposition, la perpendiculaire *EB*, est moyenne proportionnelle entre les deux segments de la base *AB*, *BD*, ou *CD*, qui sont les deux lignes données.



SEPTIE'ME LIVRE.

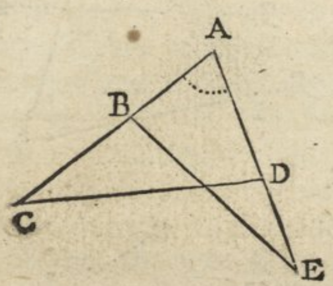
Des Reciproques.

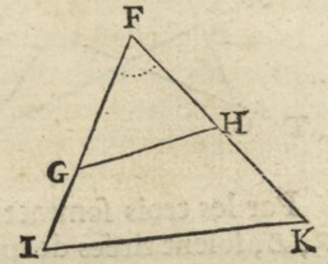
DE'FINITIONS.

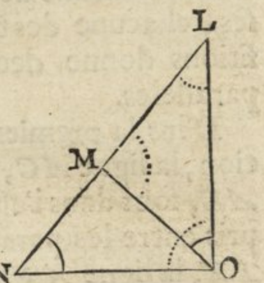
LORSQUE quatre lignes sont proportionnelles, les Extrêmes sont dites Reciproques à l'égard des moyennes.

Ainſi lorſque l'on dit, ces deux lignes-là ſont Reciproques à ces deux autres-cy ; c'eſt comme ſi l'on diſoit : la premiere de ces deux lignes-là, eſt à la premiere de ces deux lignes-cy, comme la ſeconde de ces deux lignes-cy, eſt à la ſeconde de ces deux lignes-là.

Lorſqu'un même angle a deux baſes, qui n'étant point paralleles, forment avec ſes côtés des angles égaux ; l'un d'un côté, l'autre de l'autre, telles baſes ſont dites Antiparalleles, & ces baſes peuvent être Antiparalleles, ſuivant trois diſpoſitions.







L'angle *CAE*, a deux baſes qui ſe croiſent, & en ce cas, l'angle en *C*, doit être égal à l'angle en *E*, & par conſequent l'angle en *B*, égal à l'angle en *D*.

Dans la deuxiéme diſpoſition, l'angle *IFK*, a deux baſes *IK*, *GH*, entierement ſeparées, & dans cette diſpoſition, l'angle en *I*, doit être égal à l'angle *GHF*, & par conſequent, l'angle en *K*, égal à l'angle *HGF*.

Dans la troiſiéme diſpoſition, l'angle *NLO*, a deux baſes qui ſe joignent au point *O*, & en ce cas, l'angle *LNO*, eſt égal à l'angle *LOM*, & l'angle *LMO*, eſt égal à l'angle *LON*.

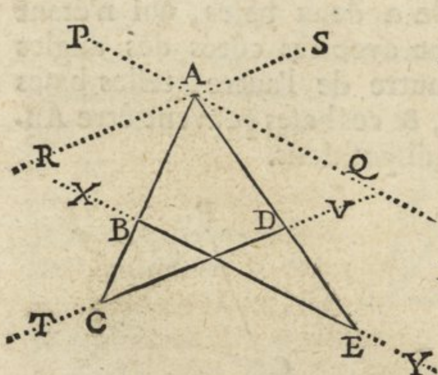
Dans ces trois diſpoſitions, les côtés totaux comparés avec les côtés partiaux, donnent des Reciproques ; car :

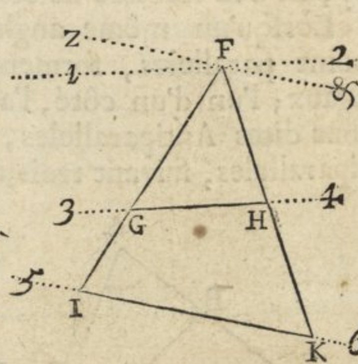
Dans la premiere diſpoſition, le côté *AC*, eſt au côté *AD*, comme le côté *AE*, eſt au côté *AB*.

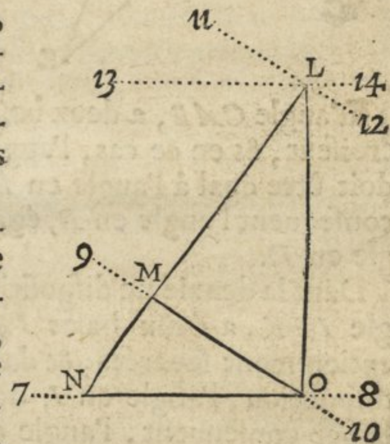
Dans la ſeconde, le côté *FI*, eſt au côté *FH*, comme le côté *FK*, eſt au côté *FG*.

Dans la troiſiéme, le côté *LN*, eſt au côté *LO*, comme le côté *LO*, eſt au côté *LM*.

Pour le démontrer :







Par les trois ſommets *A*, *F*, *L*, ſoient tirées des paralleles à chacune des deux baſes ; chacune des trois diſpoſitions donne deux eſpaces paralleles.

Dans la premiere diſpoſition, la ligne *AC*, & la ligne *AD*, ſont dans l'eſpace compris entre les paralleles *RS*, *TV*, la ligne *AE*, & la ligne *AB*, ſont dans l'autre eſpace compris entre les paralleles *PQ*, *XY*. Or par la ſuppoſition, la ligne *AC*, eſt autant inclinée dans le premier eſpace, que la ligne *AE*, dans le ſecond, & la ligne *AD*, autant inclinée dans le premier eſpace, que la ligne *AB*, dans le ſecond ; donc par la premiere Propoſition des proportionnelles, la ligne *AC*, eſt à la ligne *AE*, comme la ligne *AD*, eſt à la ligne *AB*.

Dans la ſeconde diſpoſition, la ligne *FI*, & la ligne

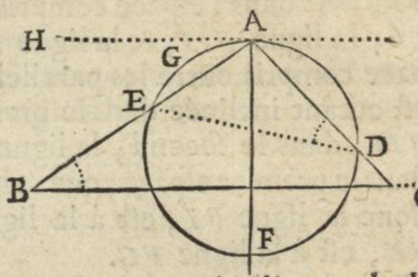
FK, ſont dans l'eſpace compris entre les paralleles *Z*, & 5 6, la ligne *FH*, & la ligne *FG*, ſont dans l'autre eſpace compris entre les paralleles 12, 34. Or la ligne *FI*, eſt autant inclinée dans le premier eſpace, que la ligne *FH*, dans le ſecond; la ligne *FK*, eſt autant inclinée dans le premier eſpace, que la ligne *FG*, dans le ſecond; donc la ligne *FI*, eſt à la ligne *FH*, comme la ligne *FK*, eſt à la ligne *FG*.

Dans la troiſiéme diſpoſition, il faut que la ligne *LN*, & la ligne *LO*, ſoient dans l'eſpace compris entre les paralleles 13, 14, 7, 8; & que la ligne *LO*, & la ligne *LM*, ſoit dans l'eſpace compris entre les paralleles 11, 12, 9, 10; en ſorte que la ligne *LO*, ſe trouve dans les deux eſpaces paralleles où elle forme differens angles avec les baſes. Or la ligne *LN*, eſt autant inclinée dans le premier eſpace, que la ligne *LO*, dans le ſecond, où elle fait une angle aigu en *O*, égal à l'angle aigu en *N*; & d'ailleurs, la ligne *LO*, fait dans le premier eſpace un angle égal à l'angle que la ligne *LM*, fait dans le ſecond; donc la ligne *LN*, eſt à la ligne *LO*, comme la ligne *LO*, eſt à la ligne *LM*.

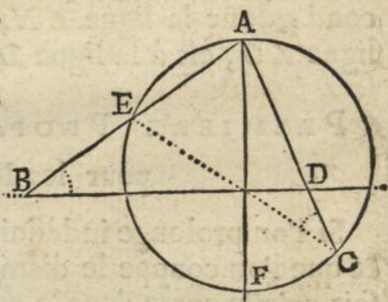
PREMIERE PROPOSITION GENERALE pour les Reciproques.

Si l'on prolonge indéfiniment le diametre d'un cercle & que l'on couppe le diametre par une perpendiculaire, ſoit qu'elle entre dans le cercle, ſoit qu'elle touche le cercle, ſoit qu'elle ſoit hors du cercle; & que de l'extremité du diametre oppoſée au côté du prolongement, l'on tire deux lignes quelconques terminées par la circonference, ou par la perpendiculaire, & couppées par l'une ou par l'autre; chaque toute & ſa partie à prendre du point d'où elles ſont tirées, ſera Reciproque à chaque autre toute & ſa partie. Voyés les figures.

Premier cas. Lorſque la perpendiculaire couppe le cercle.



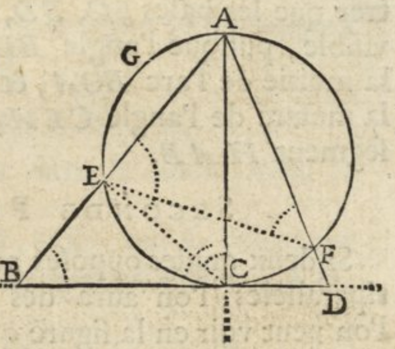
Soit le diamettre *AF*, couppé par la perpendiculaire *BC*; du point *A*, ſoient tirées à diſcretion les lignes *AB*, *AC*, elles ſeront terminées aux points *C*, & *B*, par la perpendiculaire, & couppées par le cercle aux points *E*, & *D*; je dis que la ligne *AB*, eſt à la ligne *AC*, comme la portion *AD*, eſt à la portion *AE*. Pour le prouver, ſoient joints les points *E*, *D*, par la droite *ED*, il n'y a qu'à démontrer que les baſes *BC*, *ED*, ſont antiparalleles; or cela eſt aiſé: car l'angle *EDA*, eſt inſcript, & a pour meſure la moitié de l'arc *EGA*, de même l'angle *ABC*, a pour meſure la moitié de l'arc *EGA*, parce que c'eſt un angle alterne de l'angle *HAE*, angle du petit ſegment, qui a pour meſure la moitié de l'arc *EGA*; donc les baſes ſont antiparalleles.



Dans ce même premier cas, les baſes ſe peuvent croiſer, comme l'on voit à la preſente figure, ce qui ne change rien à la démonſtration; puiſque l'angle *ECA*, inſcript, eſt égal à l'angle *DBA*, par la même raiſon; donc la ligne *AB*, eſt toûjours à la ligne *AC*, comme la portion *AD*, à la portion *AE*.

Second cas. Lorſque la perpendiculaire touche le cercle.

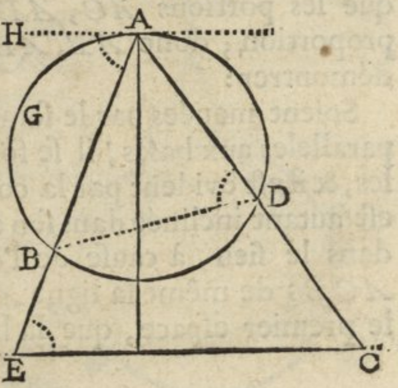
Si l'on tire deux lignes, comme *AB*, *AD*, terminées par la perpendiculaire aux points *B*, *D*, elles ſeront couppées réciproquement aux points *E*, *F*, par le cercle c'eſt à dire, que la toute *AB*, ſera à la toute *AD*, comme la portion *AF*, à la portion *AE*; ſoient joints les points *EF*, il n'y a qu'à démontrer que les baſes *BD*, *EF*, ſont antiparalleles ; car ainſi qu'il a déja été dit deux fois, l'angle *CBA*, alterne de l'angle du petit ſegment, a pour meſure la moitié de l'arc *EGA*, qui eſt auſſi la meſure de l'angle inſcript *EFA*.



D'ailleurs dans ce ſecond cas, le diametre eſt moyen proportionnel entre chaque toute, & ſa partie dans le cercle. Soit tirée la ligne *EC*, il n'y a qu'à démontrer que les baſes *BC*, *EC*, baſes de l'angle *BAC*, qui ſe joignent au point de contingence *C*, ſont antiparalleles, ſuivant la troiſiéme diſpoſition. Or cela n'eſt pas difficile : car l'angle *ECA*, eſt inſcript, & a pour meſure la moitié de l'arc *EGA*, qui eſt auſſi la meſure de l'angle *ABC*, alterne de l'angle du petit ſegment ; & l'angle *AEC*, eſt un angle droit, puiſqu'il eſt appuyé ſur la demi circonference, & par conſequent égal à l'angle *BCA*, formé par une tangente & par le diametre ; donc la ligne *AB*, eſt au diametre *AC*, comme le diametre *AC*, à la portion *AE*, & ainſi de toute autre ligne, & ſa partie dans le cercle.

Dans le troiſiéme cas, lorſque la perpendiculaire couppe le diametre prolongé hors du cercle.

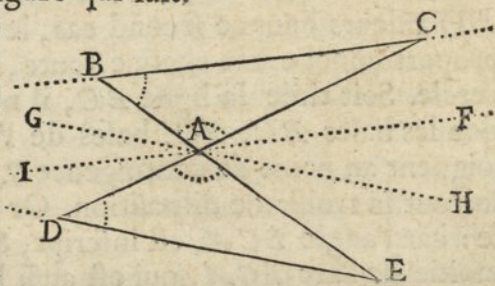
En ce cas les deux lignes *AE*, *AC*, ſont l'une & l'autre terminées par la perpendiculaire aux points *E*, *C*, & couppées aux points *BD*, par le cercle, il faut prouver que la toute *AE*, eſt à la toute *AC*, comme la portion *AD*, eſt à la portion *AB*, ſoient joints les points *B*, *D*, il n'y a qu'à démon-



trer que les bases *EC*, *BD*, sont antiparalleles; cela est visible, puisque l'angle *BDA*, inscript a pour mesure la moitié de l'arc *BGA*, & que cette même moitié est la mesure de l'angle *CEA*, alterne de l'angle du petit segment *HAB*.

SECONDE PROPOSITION.

Si deux angles opposés au sommet, ont des bases antiparalleles, l'on aura des lignes reciproques, comme l'on peut voir en la figure qui suit.



Je suppose que les deux angles *BAC*, *DAE*, opposés au sommet *A*, ont leurs bases *BC*, *DE*, tellement disposées que l'angle dont le sommet est en *D*, soit égal à l'angle dont le sommet est en *B*, & par consequent que l'angle dont le sommet est en *C*, soit égal à l'angle dont le sommet est en *E*. Dans cette disposition l'on voit que ce sont les angles de même côté qui sont égaux, au lieu que si les bases étoient paralleles, ce seroient les angles alternes qui seroient égaux, & je dis que la ligne *AC*, est à la ligne *AB*, comme la ligne *AE*, est à la ligne *AD*; en sorte que la ligne totale *DC*, est couppée réciproquement à l'égard de la totale *BE*; c'est à dire, que les portions *AC*, *AD*, sont les Extrêmes d'une proportion; donc *AB*, *AE*, sont les Moyens: Pour le démontrer:

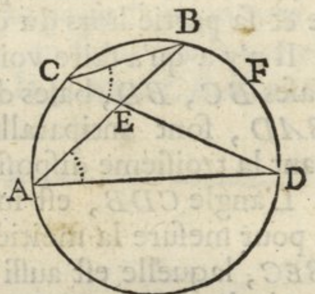
Soient menées par le sommet *A* les lignes *IF*, *GH*, paralleles aux bases, il se formera deux espaces paralleles, & il est évident par la construction, que la ligne *AC*, est autant inclinée dans son espace que la ligne *AE*, l'est dans le sien, à cause de l'égalité des angles *AED*, *ACB*; de même la ligne *AB*, est autant inclinée dans le premier espace, que la ligne *AD*, l'est dans le second;

cond; donc la ligne *AC*, eſt à la ligne *AE*, comme la ligne *AB*, eſt à la ligne *AD*.

COROLLAIRE.

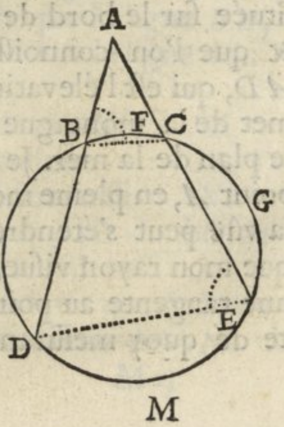
Si deux cordes ſe couppent dans le cercle, elles ſe couppent réciproquement.

Soient les deux cordes *AB*, *CD*, qui ſe couppent dans le cercle au point *E*; je dis que *AE*, eſt à *ED*, comme *EC*, eſt à *EB*.



Cela eſt évident; car tirant les baſes *AD*, *CB*, elles ſont antiparalleles, puiſque l'angle *DCB*, & l'angle *DAB*, ſont appuyés ſur le même arc *BFD*, dont la moitié fait leur meſure, cela donne une nouvelle démonſtration pour trouver la moyenne proportionnelle entre deux lignes données; car faiſant des deux lignes données, miſes bout à bout, le diametre d'un cercle, & élevant une perpendiculaire au point où elles ſe joignent, cette perpendiculaire terminée par la circonference, ſera la moitié d'une corde couppée réciproquement avec les parties du diametre, & par conſequent moyenne proportionnelle, puiſqu'elle ſera couppée en deux parties égales.

TROISIE'ME PROPOSITION.



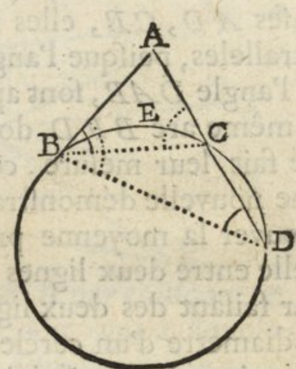
Si d'un point hors du cercle, l'on tire deux lignes terminées à la circonference concave; chaque toute & ſa partie hors du cercle eſt réciproque à chaque autre toute, & ſa partie hors du cercle.

Il faut démontrer que la ligne *AD*, eſt à la ligne, *AE*, comme la ligne *AC*, eſt à la ligne *AB*, & pour cela, il n'y a qu'à faire voir que les baſes *DE*, *BC*, ſont antiparalleles.

L'angle *EDB*, a pour meſure la moitié de l'arc *BCE*, & l'angle *BCA*, a pour meſure la moitié de l'arc *BFC*, plus la moitié de l'arc *CGE*, qui eſt la même choſe, par la troiſiéme Propoſition du cinquiéme Livre.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Si l'une des deux lignes tirée du point *A*, eſt tangente, elle ſera moyenne proportionnelle entre l'autre toute & ſa partie hors du cercle.

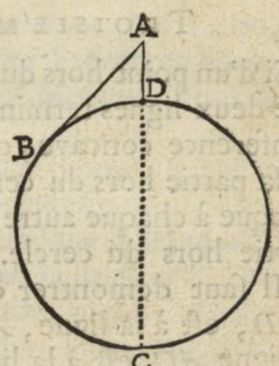


Il n'y a qu'à faire voir que les baſes *BC*, *BD*, baſes de l'angle *BAD*, ſont antiparalleles ſuivant la troiſiéme diſpoſition.

L'angle *CDB*, eſt inſcript, & a pour meſure la moitié de l'arc *BEC*, laquelle eſt auſſi la meſure de l'angle *CBA*, angle du ſegment. On démontrera de même que l'angle *DBA*, eſt égal à l'angle *BCA*.

COROLLAIRE PROBLEME.

Connoître la longueur du diametre de la terre ſans obſervation aſtronomique.

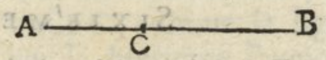


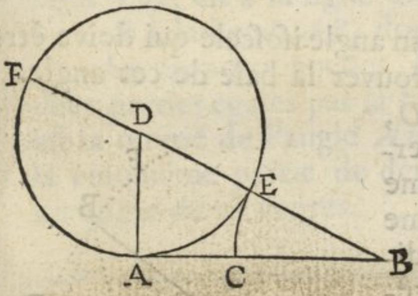
Je ſuppoſe que le point *A*, ſoit le ſommet d'une montagne ſituée ſur le bord de la mer *D*, & que l'on connoiſſe la ligne *AD*, qui eſt l'élevation du ſommet de la montagne par deſſus le plan de la mer. Je regarde du point *A*, en pleine mer, tant que la vûë peut s'étendre, en ſorte que mon rayon viſuel *AB*, faſſe une tangente au point *B*, enſuite de quoy meſurant mécaniquement la longueur de la tangente *AB*, je dis ſuivant la Propoſition precedente, comme la hauteur de la montagne eſt à la tangente, ainſi la tangente eſt à la ligne *AC*; d'où ôtant la hauteur de la montagne, reſte la ligne *DC*, diametre de la terre.

AUTRE PROBLEME

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Diviſer une ligne, comme *AB*, au point *C*, en moyenne & extrême Raiſon, c'eſt à dire, en ſorte que la toute *AB*, ſoit à la portion *CB*, comme la portion *CB*, eſt à la portion *AC*.





Sur l'extremité *A* de la ligne *AB*, ſoit élevée la perpendiculaire *AD*, égale à la moitié de la ligne donnée *AB*; du point *D*, pris pour centre intervalle *DA*, ſoit décrit le cercle *AEF*, puis ſoit tirée la ligne *DB*, coupée par le cercle au point *E*; je dis que la ligne *BE*, étant portée de *B*, en *C*, le point *C*, diviſe la ligne donnée en moyenne & extrême Raiſon.

Pour abreger; que la ligne *AB*, ſoit appellée M.
La ligne *BE*, ſoit appellée N.
Par conſequent la ligne *BC*, ſera auſſi N.
Et la ligne *FE*, diametre du cercle, qui eſt double de la ligne *DA*, ſera égale à ligne *AB*, & ſera auſſi M.

La ligne *AC*, qui n'eſt rien autre choſe que la ligne *AB*, moins la ligne *CB*, ſera ſuivant ces noms. $M-N$.

Il faut démontrer que $M-N,\ N :: N, M$.

Par la conſtruction la ligne BF, eſt $M+N$. Or par la précedente Propoſition, la ligne BE, eſt à la ligne AB, comme la ligne AB, eſt à la ligne BF, c'eſt à dire,

$N,\ M,\ ::\ M,\ M+N.$

Invertendo, $M,\ N\ ::\ M+N,\ M.$

Dividendo $M-N,\ N :: M+N-M,\ M.$

Or $M+N-M$, n'eſt autre choſe que N; donc

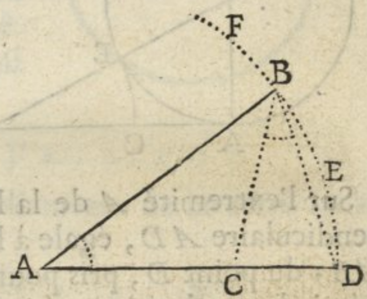
$M-N,\ N :: N,\ M.$

C'eſt à dire, la ligne AC, eſt à la ligne CB, comme la ligne CB, eſt à la ligne AB, qui eſt ce que l'on cherchoit.

PROBLEME

SIXIE'ME PROPOSITION.

Etant donné le côté d'un angle iſoſcele qui doive être un angle de 36 degrés, trouver la baſe de cet angle.



Soit le côté donné AD, du point A; ſoit décrit intervalle AD, un arc comme DEF. Soit par le problême précedent la ligne AD, diviſée en moyenne & extrême Raiſon au point C; la grande portion AC, ſoit portée de D, en B, ſur l'arc; je dis que la ligne DB, eſt la baſe cherchée, c'eſt à dire, que tirant l'autre côté AB, l'angle DAB, eſt un angle de 36 degrés; je l'aurai démontré, ſi je puis faire voir qu'il eſt la cinquiéme partie de deux angles droits ou de 180 degrés; ſoit tirée la ligne BC.

Pour cela, comme l'angle DAB, eſt iſoſcele, & par conſequent que les deux angles ſur ſa baſe BD, ſont égaux entre eux: je n'ai que deux choſes à faire voir. La premiere, que l'angle DAB, eſt égal à l'angle DBC, La ſeconde, que cet angle DBC, eſt la moitié de l'angle ſur la baſe *DBA*; car il s'enſuivra que l'angle *DAB*, ſera moitié de chacun des angles égaux qu'il fait ſur ſa baſe, & comme ces trois angles en valent deux droits, il faudra bien qu'il ſoit la cinquiéme partie de deux angles droits.

Preuve de la premiere Partie. Cela ſera tout prouvé, ſi l'angle *ADB*, a pour baſes antiparalleles, les lignes *BC*, *BA*; or elles ſont en effet baſes antiparalleles, puiſque par la conſtruction, la ligne *AD*, eſt à la ligne *AC*, ou *BD*, ſon égale, comme la ligne *BD*, eſt à la ligne *DC*, ce qui eſt la troiſiéme diſpoſition des antiparalleles; donc l'angle aigu *DAB*, eſt en effet égal à l'angle aigu *DBC*.

Preuve de la ſeconde Partie. Par la conſtruction, la ligne *CD*, eſt à la ligne *DB*, ou *AC*, comme la ligne *CA*, eſt à la ligne *AB*; donc par la huitiéme Propoſition des proportionnelles, l'angle *DBA*, eſt diviſée en deux parties égales par la ligne *BC*; donc l'angle *CBD*, eſt la moitié de l'angle *ABD*; donc l'angle *BAD*, eſt la cinquiéme partie de deux droits, & par conſequent un angle de 36 degrés.

HUITIE'ME LIVRE.

Des Figures.

APRE'S avoir examiné les proprietés des lignes & des angles, l'ordre demande que l'on traite des figures.

DE'FINITIONS.

Figure, eſt un eſpace renfermé par des lignes.

L'eſpace renfermé par des lignes droites, s'appelle Rectiligne; par une ou pluſieurs courbes, Curviligne, par courbe & droite, Mixte. Nous parlerons d'abord des figures rectilignes.

Dans les figures rectilignes, l'on considere principalement trois choses; les angles, les côtés, & l'aire.

L'on a donné aux figures rectilignes les plus simples, certains noms qu'il ne faut pas ignorer.

La figure de 3 côtés se nomme, Triangle.
de 4 côtés, Quadrilatere.
de 5, Pentagone.
de 6, Hexagone.
de 7, Heptagone.
de 8, Octogone.
de 9, Enneagone.
de 10, Decagone.
de 11, Endecagone.
de 12, Dodecagone.
de 1000, Kiliogone.
de 10000, Myriogone.
de plusieurs côtés indéfiniment, Polygone.

Le Triangle se divise en plusieurs especes.
Rectangle, qui a un angle droit.
Ambligone, qui a un angle obtus.
Equilateral, qui a trois angles & trois côtés égaux.
Scalene, qui a ses trois côtés inégaux.
Isoscele, qui a ses deux côtés égaux.
Oxigone, qui a ses trois angles aigus.

Le quadrilatere se divise aussi en plusieurs especes.
Quarré, qui a 4 angles droits & 4 côtés égaux.
Rectangle, qui a 4 angles droits, d'où s'ensuit que tout quarré est rectangle.
Parallelograme, qui a ses côtés opposés paralleles.
Trapeze, qui a ses quatre côtés inégaux.
Rhombe, qui a ses quatre côtés égaux, & qui n'a pas ses angles droits.

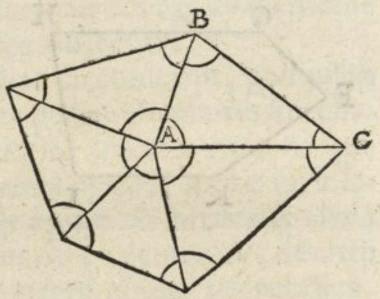
Les figures sont regulieres ou irregulieres; les regulieres, sont celles dont tous les côtés & tous les angles sont égaux.

Quand les figures ont leurs côtés égaux, sans avoir leurs angles égaux, on les appelle simplement équilateres.

Quand on compare deux figures enſemble, ſi les angles de l'une ſont égaux aux angles de l'autre, & que les côtés correſpondans ou homologues ſont proportionnels, on les appelle ſemblables; & ſi les côtés comparés ſont égaux, auſſi-bien que les angles, ces figures ſont appellées toutes égales, & ne different que de poſition.

PREMIERE PROPOSITION.

Toute figure rectiligne ſe peut reſoudre en autant de triangles qu'elle a de côtés.



Il n'y a qu'à choiſir dans l'aire, c'eſt à dire, dans l'eſpace renfermé par les côtés, un point à diſcretion, comme *A*, & en tirer des lignes à chacun des angles; il eſt viſible qu'il ſe formera autant de triangles, que la figure a de côtés.

SECONDE PROPOSITION.

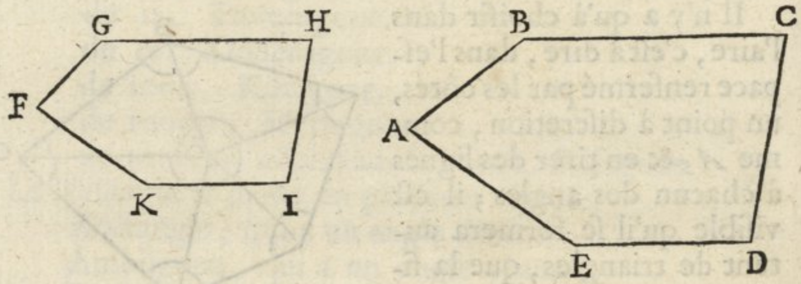
Tous les angles d'un Polygone quelconque ſont égaux à autant d'angles droits, que le double de ſes côtés moins quatre.

Car ayant choiſi le point *A*, dans la figure, & l'ayant partagée en triangles, les trois angles de chacun de ces triangles, par exemple, du triangle *CAB*, valent deux angles droits par la cinquiéme Propoſition du quatriéme Livre, par ce que le triangle ne differe pas d'un angle conſideré avec ſa baſe, & que tout ce que l'on a démontré d'un angle avec ſa baſe, eſt démontré pour le triangle. Donc tous les angles des triangles qui compoſent la figure, valent autant de fois deux angles droits, qu'il y a de côtés; & ſi l'on en ôte tous les angles qui ont leur ſommet au point *A*, & qui valent enſemble quatre angles droits, par la ſeconde Propoſition du quatriéme

Livre, le reſte ſera la ſomme des angles formés par les côtés du Poligone; donc &c.

TROISIE'ME PROPOSITION.

En deux figures ſemblables quelconques, le perimetre, c'eſt à dire, le circuit de l'une eſt au perimetre de l'autre, comme le côté de l'une eſt au côté homologue de l'autre.

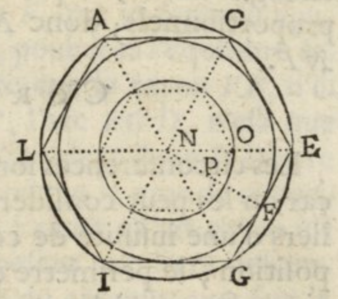


Soit la figure *ABCDE*, ſemblable à la figure *FGHIK*. Puiſque ces figures ſont ſemblables, c'eſt à dire, que leurs angles ſont égaux chacun à chacun; il s'enſuit à cauſe des triangles ſemblables, auſquels on peut reſoudre ces deux figures, que le côté *AB*, eſt au côté *FG*, comme le côté *BC*, eſt au côté *GH*, & comme le côté *CD*, eſt au côté *HI*, & comme le côté *DE*, eſt au côté *IK*, & comme le côté *EA*, eſt au côté *KF*; donc *componendo*, il s'enſuit que tous les côtés de l'un pris enſemble, ſont à tous les côtés de l'autre pris enſemble, comme le côté *AB*, eſt à ſon homologue *FG*.

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Toute figure reguliere peut être inſcrite & circonſcrite au cercle.

Car



Car, par exemple, l'hexagone *ACEGIL*, peut être inſcript au cercle, puiſque l'on peut déja bien certainement faire paſſer un cercle par les trois points *ACE*, par la ſeconde Propoſition du troiſiéme Livre; ce cercle aura pour centre, un point comme *N*, & paſſera neceſſairement par les autres angles du Polygone, puiſque l'on ſuppoſe tous les côtés égaux, qui par conſequent doivent être cordes égales du même cercle, & également éloignées du centre.

Ce même Polygone peut être circonſcript, puiſqu'on peut mener du centre *N*, des perpendiculaires ſur chacun de ſes côtés, comme *NF*, ſur le côté *EG*, & que ces perpendiculaires étant toutes égales, parce qu'elles meſurent la diſtance des côtés égaux ou cordes égales à l'égard du centre *N*; l'on peut de ce centre *N*, décrire un cercle qui paſſera par les extremités des perpendiculaires, & qui aura pour tangentes les coſtés, ou cordes de l'autre cercle.

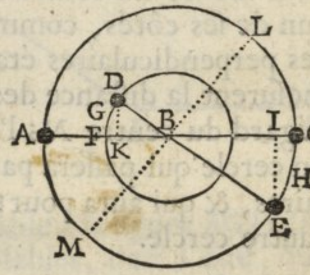
CINQUIE'ME PROPOSITION.

En la figure cy-deſſus, la ligne *NF*, par exemple, s'appelle Raïon droit de la figure, la ligne *NE*, s'appelle tout court, le Raïon de la figure. Or il eſt viſible qu'en toutes figures regulieres comparées entre elles, le Raïon droit eſt au Raïon droit, comme le Raïon eſt au Raïon, & comme le côté eſt au côté, & comme le perimetre eſt au perimetre: Car les deux figures regulieres étant ſemblables, l'on a déja vû par la troiſiéme Propoſition, que le perimetre eſt au perimetre, comme le côté eſt au côté. A l'égard du Raïon droit comparé au Raïon droit, & du Raïon comparé au Raïon, la même proportion s'y doit trouver, parce qu'il ſe forme par tout des triangles ſemblables; par exemple, le triangle *ENF*, eſt ſemblable au triangle *ONP*, & par conſequent tous les côtés ſont proportionnels; donc *NE* eſt à *NO*, comme *NF* eſt à *NP*.

COROLLAIRE.

Les circonferences ſont entre elles comme leurs raïons; car on les peut conſiderer comme des Polygones reguliers d'une infinité de côtés, & par la precedente Propoſition, le perimetre eſt au perimetre, c'eſt à dire, la circonference à la circonference, comme le rayon eſt au rayon.

Ce Corollaire joint à la ſixiéme Propoſition du troiſiéme Livre, eſt le principal fondement de la Statique. Je m'explique.



Je ſuppoſe une balance, comme *ABC*, dont le point fixe eſt *B*, & les deux branches *BA*, *BC*, égales, ſi l'on attache deux poids d'une livre chacun aux deux points *A*, & *C*, on conçoit clairement qu'ils doivent demeurer dans un parfait équilibre : car pour faire monter en une ſeconde de temps, ſi vous voulés, le poids *C*, juſques en *L*, il faudroit que le poids *A*, deſcendît juſques en *M*; ainſi pendant le même temps que le corps *C*, peſant une livre, décriroit l'arc *CL*, le corps *A*, peſant une livre, décriroit l'arc *AM*. Or ces deux arcs ſont égaux à cauſe de l'égalité des angles oppoſés aux ſommets *ABM*, *LBC*, & de l'égalité des rayons *AB*, *BC*; donc il y auroit égalité de mouvement de part & d'autre; puiſque le même poids, dans le même temps, décriroit le même chemin; ainſi le poids *A*, ayant autant de force pour deſcendre que le poids *C*, de reſiſtance pour monter, leurs forces ſont parfaitement balancées, & ils doivent demeurer en équilibre, ce que l'experience juſtifie.

Mais ſi au lieu d'attacher le poids *A*, d'une livre au point *A*, on l'attachoit au point *F*, que je ſuppoſe également éloigné des points *A*, *B*, pour lors l'équilibre ſeroit manifeſtement rompu, parce que le rayon *FB*, n'étant que la moitié du rayon *BC*, l'arc *FGD*, n'eſt que la moitié de l'arc *CHE*, quoiqu'ils ayent l'une & l'autre pareil nombre de degrés; mais comme la grande circonference eſt double de la petite, à cauſe qu'un rayon eſt double de l'autre, le corps *C*, peſant une livre deſcendant au point *E*, fera le double du chemin que fait le corps *F*, montant au point *D*. Or deux corps étant égaux en poids, ſi l'un fait le double du chemin que fait l'autre dans le même temps; il faut que celui qui fait le double du chemin, ait le double de mouvement; donc il y aura du côté du poids *C*, un mouvement double du mouvement qu'aura le poids *F*; donc il aura pour deſcendre le double de la force, que le poids *F* aura pour lui reſiſter; donc il deſcendra en effet & rompra l'équilibre.

Mais ſi au lieu d'attacher au point *C*, un poids d'une livre, je m'aviſe d'y attacher un poids de demi livre. Je dis que le poids *F* d'une livre, & ce nouveau poids *C*, d'une demi livre, doivent reſter en équilibre, parce qu'il y aura de part & d'autre égalité de mouvement.

Car l'on conçoit clairement que ſi deux corps ſont égaux en poids, & que l'un pendant une ſeconde, faſſe le double du chemin que fait l'autre, il faut qu'il ait le double de mouvement; puiſque la même maſſe ſe mouvant une fois plus vîte dans le même temps, doit avoir une fois plus de force. Par le même principe, ſi un corps peſant une demi livre, fait pendant une ſeconde le double du chemin que fait un corps peſant une livre, il faut bien qu'il y ait de part & d'autre égalité de mouvement: car ſi le corps peſant demi livre, avoit peſé une livre, & qu'il eût fait le double du chemin, l'on vient de voir qu'il auroit eu le double du mouvement; donc ne peſant que demi livre, & faiſant le double du chemin, il a autant de mouvement que le corps peſant une livre, qui n'en fait que la moitié. Or dans la figure, l'arc *CHE* est double de l'arc *FGD*, parce qu'un rayon est double de l'autre; donc si le poids en *E*, n'est que la moitié du poids en *D*, il y aura égalité de mouvement, & par consequent équilibre.

D'où suit cette Proposition fondamentale des Mechaniques.

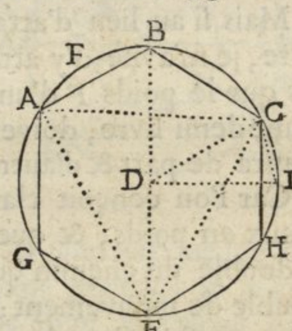
Deux poids sont en équilibre, lorsqu'ils sont en raison réciproque de leurs distances au point fixe. C'est à dire, lorsque le poids en *F*, est au poids en *C*, comme la distance *BC*, est à la distance *BF*.

PROBLEME,

SIXIE'ME PROPOSITION.

Déterminer l'angle au centre, l'angle de la figure, & l'angle que le rayon fait sur le côté de tout Polygone.

1°. Pour avoir l'angle au centre, c'est à dire, l'angle *BDC*, il est visible qu'il n'y a qu'à diviser la circonference par le nombre des côtés du Polygone; icy, par exemple, par 6.



Pour avoir l'angle du Polygone, c'est à dire l'angle *ABC*, compris par deux côtés, il n'y a qu'à soustraire de 180 degrés, l'arc soûtenu par le côté, parce que tout angle du Polygone, comme *ABC*, est un angle inscript, qui a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il est appuyé; icy, par exemple, il a pour mesure l'arc *AGE*, c'est à dire, la demi circonference moins l'arc *AFB*, soûtenu par le côté *AB*.

A l'égard de l'angle que le rayon *DB*, fait sur le côté *AB*, il n'y a qu'à prendre la moitié de l'angle du Polygone.

PROBLEME,

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Inſcrire & circonſcrire au cercle les figures regulieres.

Inſcrire un Hexagone. La corde qui en fait le côté, eſt le rayon même du cercle; parce que joignant les deux rayons *DB*, *DC*, par la ligne *BC* leur égale, il s'en forme un triangle équilateral, qui a par conſequent ſes trois angles égaux, ce qui ne peut être que chacun ne vaille 60 dégrés, qui eſt la ſixiéme partie de la circonference, & partant le côté de l'Hexagone.

Inſcrire un Triangle. Il n'y a qu'à joindre comme en la figure, deux côtés de l'Hexagone par la corde *AC*, l'arc *ABC*, ſera de 120 degrés, & partant le tiers de la circonference; ce qui donne le triangle inſcript *AEC*.

Inſcrire un Dodecagone. Il n'y a qu'à diviſer la corde *CH*, de l'Hexagone en deux parties égales par la ligne *DI*; d'où s'enſuivra par la troiſiéme Propoſition du troiſiéme Livre, que l'arc *CIH*, ſera auſſi diviſé en deux parties égales au point *I*, & par conſequent que la corde *CI*, ſoûtiendra 30 degrés, & ſera côté du Dodecagone. En un mot, il eſt aiſé par ces pratiques de doubler un arc donné, ou de le diviſer par la moitié, ce qui fournit une infinité de Polygones reguliers.

Inſcrire un Decagone. Il n'y a qu'à diviſer le rayon en moyenne & extrême Raiſon, & prendre la plus grande partie, ce ſera la corde d'un angle de 36 degrés par la 6^e^ Propoſition du ſeptiéme Livre; or 36 degrés ſera la dixiéme partie de la circonference, ainſi cette corde ſera côté du Decagone.

Inſcrire un Pentagone. Doublés l'arc du Decagone.

Inſcrire une figure de 15 côtés. De l'arc de 60 degrés ôtés l'arc de 36 degrés, reſte l'arc de 24 degrés, qui eſt la quinziéme partie de la circonference, & par conſequent la corde qui le ſoûtient, ſera côté du Polygone cherché.

Pour circonſcrire les figures inſcriptes. Il n'y a qu'à tirer par les ſommets des angles du Polygone; par exemple, par les points *A*, *B*, *C*, des tangentes qui ſe rencontrant enſemble, formeront une figure circonſcripte au cercle donné.

HUITIE'ME PROPOSITION.

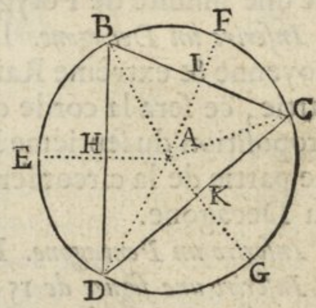
En tout triangle, le plus grand angle eſt ſoûtenu par le plus grand côté, & le plus grand côté ſoûtient le plus grand angle.

Il n'y a qu'à faire paſſer un cercle par les trois points qui forment les trois angles, les trois angles deviendront inſcripts, & les trois côtés deviendront cordes; le reſte s'enſuit.

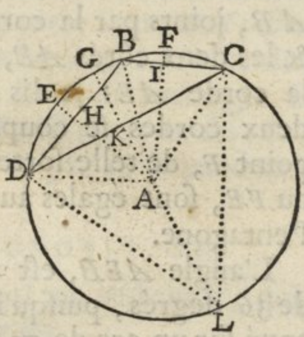
Il eſt bon de repeter icy, que tout ce que nous avons dit dans les Livres precedens, touchant un angle avec ſa baſe, convient au triangle qui n'eſt pas autre choſe. Par exemple, les triangles ſemblables ont les côtés homologues proportionnels, &c.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

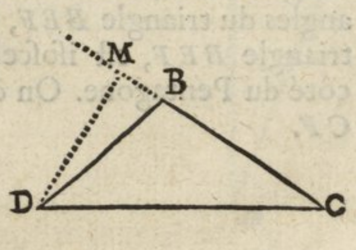
En tout triangle, comme le ſinus d'un angle eſt au côté qui lui eſt oppoſé, ainſi le ſinus d'un autre angle eſt au côté qui lui eſt oppoſé.



Soit le triangle *BCD*, par les trois points qui forment les ſommets des angles. Soit mené le cercle *BFCE*, du centre *A*; ſoient menées aux trois ſommets, les trois lignes *AB*, *AC*, *AD*; & du même centre ſoient menées ſur les trois côtés du triangle, les perpendiculaires *AF*, *AE*, *AG*; ces perpendiculaires paſſant par le centre, coupperont chaque côté, qui eſt une corde en deux parties égales aux points *I*, *H*, *K*, par la premiere Propoſition du troiſiéme Livre. D'ailleurs chacun des angles du triangle étant inſcript a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé ; donc l'angle inſcript *BDC*, eſt égal à l'angle, au centre *BAF* ; de même l'angle inſcript *BCD*, eſt égal à l'angle, au centre *BAE*, & l'angle *CBD*, égal à l'angle *CAG* ; or par la définition des ſinus, la ligne *BI*, eſt ſinus de l'angle *BAF*, parce qu'elle eſt la moitié de la corde qui ſoûtient le double de l'arc qui le meſure ; par la même raiſon *CK*, eſt ſinus de l'angle *CAG*, & *BH*, ſinus de l'angle *BAE* ; ainſi *BI*, ſinus de l'angle *BAF*, ſera pareillement ſinus de l'angle *BDC*, ſon égal. On prouvera la même choſe des deux autres angles du triangle inſcript ; d'où s'enſuit viſiblement que *BI* ſinus de l'angle *BDC*, eſt à *BC*, côté qui lui eſt oppoſé, comme *CK*, ſinus de l'angle *CBD*, eſt à *CD*, côté qui lui eſt oppoſé ; puiſque chacun des ſinus eſt la moitié du côté, & ainſi de l'autre angle *DCB*, dont le ſinus *BH*, eſt moitié du côté *BD*.



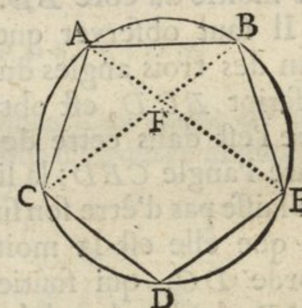
Il faut obſerver que lorſque l'un des trois angles du triangle inſcript *BCD*, eſt obtus, ainſi que l'eſt dans cette derniere figure l'angle *CBD* ; la ligne *CK*, ne laiſſe pas d'être ſon ſinus, parce que elle eſt la moitié de la corde *DC*, qui ſoûtient l'arc *CLD*, double de celui qui meſure l'angle obtus *CBD* ; mais comme à parler préciſément, un angle obtus n'a point de ſinus, parce qu'on ne peut pas faire tomber de l'un de ſes côtés, une perpendiculaire ſur l'autre, à moins que de le prolonger vers le ſommet ; alors l'on prend pour ſinus de l'angle obtus *CBD*, le ſinus de ſon complement *DBM*, c'eſt à dire de l'angle aigu, qui fait



deux angles droits avec l'obtus, étant visible que *DM*, perpendiculaire sur *BC*, prolongée en *M*, est sinus de l'angle *DBM*, par la définition. Or dans le dernier cercle, l'angle *DLC*, aigu, est le complement de l'obtus *CBD*, puisqu'ils valent ensemble la demi circonference; c'est donc le sinus de l'angle *DLC*, qu'il faut prendre pour sinus de l'angle *CBD*; or *CK*, est sinus de l'angle *DLC*, qui est égal à l'angle *CAG*; donc *CK*, est sinus de l'obtus *CBD*; le reste s'ensuit comme dessus.

DIXIE'ME PROPOSITION

Si un Pentagone est inscript au cercle, que l'on joigne par une corde deux côtés voisins, & par une autre corde un de ces deux côtés avec son voisin; ces deux cordes se coupent de maniere, que leur plus grand segment est égal au côté du Pentagone.



Soient les deux côtés *CA*, *AB*, joints par la corde *CB*, & les deux côtés *AB*, *BE*, par la corde *AE*; je dis que ces deux cordes se couppent au point *F*, de telle sorte que *CF*, ou *FE*, sont égales au côté du Pentagone.

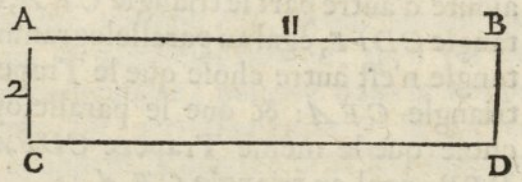
L'angle *AEB*, est un angle de 36 degrés, puisqu'il est appuyé sur un arc de 72. L'angle *CBE*, est un angle de 72 degrés, puisqu'il est appuyé sur deux arcs de 72. Donc l'angle *BFE*, est aussi de 72 degrés, puisque ces trois angles du triangle *BEF*, en doivent valoir 180; donc le triangle *BEF*, est isoscele; donc *FE*, est égale à *BE*, côté du Pentagone. On démontrera la même chose de *CF*.

II. SECTION.

De la mesure de l'aire des figures rectilignes.

ONZIE'ME PROPOSITION

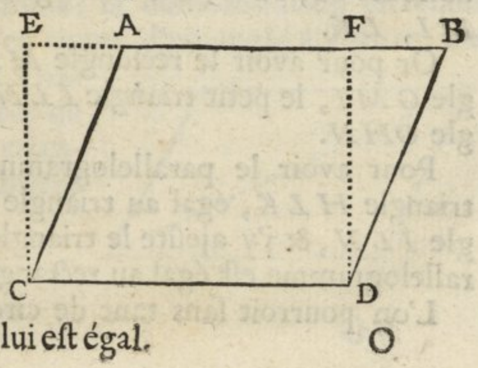
L'aire d'un rectangle se trouve en multipliant l'un de ses côtés par l'autre.



Soit le Rectangle *ABCD*, dont la base ou longueur soit *CD*, & la hauteur soit *AC*; pour avoir l'aire ou capacité de cette figure, il n'y a qu'à considerer sa formation ; il est certain que si la ligne *CD*, coule parallelement à soy-même le long de la ligne *CA*, jusqu'à ce qu'elle concourre avec la ligne *AB*; elle décrira ou couvrira, si vous voulés, la surface du rectangle ; donc la base *CD*, est autant de fois contenuë dans la hauteur *CA*, qu'il y a de points dans cette ligne *CA*; donc en multipliant la ligne *CD*, par la ligne *CA*, c'est à dire, la base par la hauteur , on aura l'aire du rectangle. En nombres, si la ligne *CD*, ou *AB*, est de 11 toises, & la ligne *AC*, de deux, multipliant 11 par 2, le produit 22 toises, sera l'aire du rectangle.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

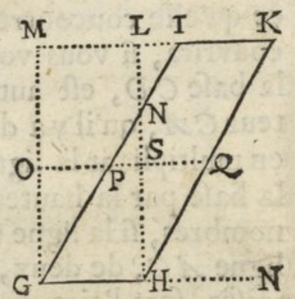
Tout parallelogramme est égal au rectangle, qui a même base & même hauteur que lui.



Soit le parallelogramme *ABCD* ayant pour base *CD*, sa hauteur se mesure par la perpendiculaire à sa base, comme *DF*; je dis que le rectangle *CDFE*, ayant pour base *CD*, & pour hauteur *DF*, ou *CE*, lui est égal.

Car la perpendiculaire *DF*, étant égale à la perpendiculaire *CE*, & l'oblique *DB*, à l'oblique *CA*, par construction, l'éloignement de perpendicule *BF*, sera égal à l'éloignement de perpendicule *AE*; donc le triangle *DFB*, est tout égal au triangle *CEA*; si donc je retranche le triangle *DBF*, du parallelogramme, & que j'y ajoûte d'autre part le triangle *CEA*, il me viendra le rectangle *CDFE*, égal au parallelogramme, parce que le rectangle n'est autre chose que le Trapeze *CDFA*, joint au triangle *CEA*: & que le parallelogramme n'est autre chose que le même Trapeze *CDFA*, joint au triangle *DFB*, égal au triangle *CEA*.

Pour s'accoûtumer l'esprit à ces verités, considerons le rectangle & le parallelogramme dans une autre situation.



Soit un parallelogramme *GHIK*, que *GH*, soit la base; pour mesurer sa hauteur, il faut mener sur la base *GH*, une perpendiculaire, comme *HL*, déterminée par le côté *KI*, prolongé; je dis que le rectangle *GHLM*, qui a *GH*, pour base, & *HL*, pour hauteur, c'est à dire, qui a même base & même hauteur que le parallelogramme *GHKI*, lui est égal.

Car le triangle *GMI*, est tout égal au triangle *HLK*, à cause de l'égalité des perpendiculaires *GM*, *HL*; des obliques *GI*, *HK*, & des éloignemens de perpendicule *MI*, *LK*.

Or pour avoir le rectangle *MLGH*, j'ôte du triangle *GMI*, le petit triangle *ILN*, & j'y ajoûte le triangle *GHN*.

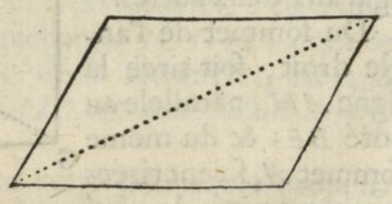
Pour avoir le parallelogramme *GHKI*, j'ôte du triangle *HLK*, égal au triangle *GMI*, le petit triangle *ILN*, & j'y ajoûte le triangle *GHN*; donc le parallelogramme est égal au rectangle.

L'on pourroit sans tant de circuit, démontrer cette

Propoſition comme la precedente : car ſi la ligne *GH*, qui ſert de baſe au rectangle & au parallelogramme, eſt prolongée à diſcretion vers le point *N*, & que l'on faſſe couler la ligne *GN*, parallelement à elle-même le long de la perpendiculaire, la portion *GH*, ſera autant de fois contenuë dans le rectangle, qu'il y a de points dans la perpendiculaire *HL*; & cette même portion *GH*, ou des portions ſes égales, comme *PQ*, ſeront autant de fois contenues dans le parallelogramme, qu'il y a de points dans la perpendiculaire; puiſque dans le temps que la baſe prolongée *GN*, arrive au point *O*, & que les côtés du rectangle couppent la portion *OS*; les côtés du parallelogramme couppent la portion *PQ*, qui eſt égale à *OS*, parce que *OS*, eſt égale à *GH*, & *GH*, égale à *PQ*, à cauſe des paralleles; donc la ſurface *GHLM*, eſt remplie & formée par autant de lignes égales à *GH*, que la ſurface *GHKI*; donc il y a de part & d'autre, ſomme égale de lignes égales, parce que la perpendiculaire *LH*, détermine cette ſomme, telle qu'elle puiſſe être à une parfaite égalité; donc le parallelogramme eſt égal au rectangle : Cette methode de démontrer, ſe nomme la Geometrie des indiviſibles. La fecondité en eſt admirable, & nous en donnerons encore quelques Exemples.

TREIZIE'ME PROPOSITION.

Tout Parallelogramme peut être diviſé en deux triangles tout égaux; d'où s'enſuit que tout triangle eſt moitié d'un parallelogramme : la démonſtration eſt claire d'elle-même, puiſqu'en tirant d'un angle à l'autre, une ligne qu'on appelle Diagonale, les trois côtés de chacun des deux triangles ſont neceſſairement égaux.

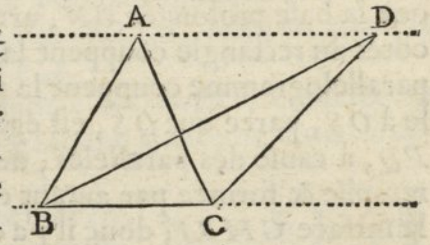


COROLLAIRE.

L'aire du triangle eſt la moitié du parallelogramme, & par conſequent du rectangle qui a même baſe & même hauteur.

COROLLAIRE II.

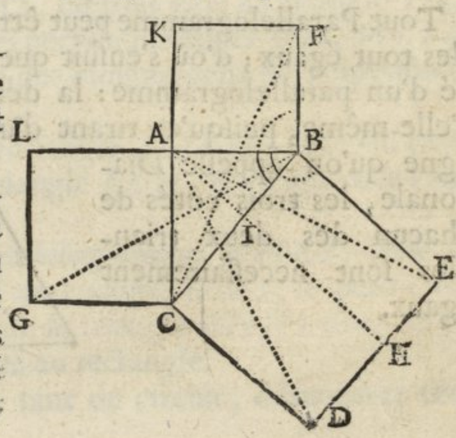
Les triangles qui ont leur ſommet entre mêmes paralleles & la baſe commune, ſont neceſſairement égaux; autrement, les triangles qui ont même baſe & même hauteur, ſont égaux.



Le triangle *CAB*, eſt moitié d'un rectangle, qui a *BC*, pour baſe, & pour hauteur la perpendiculaire, qui meſure la diſtance des paralleles. Or le triangle *CDB*, eſt moitié du même rectangle; donc l'aire des deux triangles eſt égale: cela eſt aiſé à démontrer encore par les indiviſibles.

QUATORZIE'ME PROPOSITION.

En tout Triangle rectangle, le quarré du grand côté qu'on appelle Hypotenuſe, eſt égal aux quarrés des deux autres côtés. Voila cette admirable Propoſition, dont on attribuë l'invention à Pythagore, & qui eſt d'un uſage infini.



Soit le Triangle rectangle *BAC*, je dis que le quarré *BCDE*, eſt égal aux deux autres.

Du ſommet de l'angle droit, ſoit tirée la ligne *AH*, parallele au côté *BE*; & du même ſommet *A*, ſoient tirées aux extremités du côté *DE*, les lignes *AD*, *AE*;

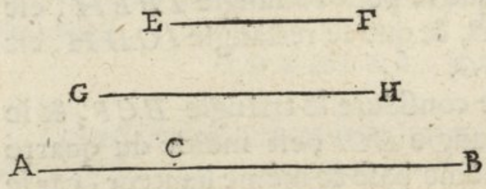
des extremités du côté *CB*, ſoient tirées les lignes *CF*, *BG*, terminées par les côtés *BF*, *CG*.

La ligne *AH*, diviſe le grand quarré en deux rectangles. Il faut prouver que le petit rectangle *IBEH*, eſt égal au quarré *AKFB*, & que le rectangle *ICDH*, eſt égal au quarré *CALG*.

Pour le prouver, je conſidere le triangle *BCF*, & le triangle *EAB*; le triangle *BCF*, eſt moitié du quarré *AKFB*, puiſqu'il a même baſe & même hauteur; car le triangle *BCF*, peut être conſideré comme enfermé entre les paralleles *FB*, *KC*, ayant ſon ſommet en *C*, *BF*, pour baſe, & *AB*, pour hauteur, puiſque c'eſt la perpendiculaire qui meſure la diſtance des paralleles. Par la même raiſon, le triangle *EAB*, eſt la moitié du rectangle *IBEH*, puiſque *BE*, eſt baſe du rectangle & du triangle, & que *BI*, eſt hauteur de l'un & de l'autre. Si donc ces deux triangles *BCF*, *EAB*, ſont égaux, leur double le ſera; or ces deux triangles ſont égaux en effet, car le côté *CB*, du triangle *BCF*, eſt égal au côté *BE*, du triangle *EAB*, & le côté *BF*, du premier triangle, eſt égal au côté *AB*, du ſecond, puiſqu'ils ſont côtés de quarrés. Or l'angle *CBF*, compris par les côtés *CB*, *BF*, eſt égal à l'angle *EBA*, compris par les côtés *AB*, *BE*; parce que chacun de ces angles, eſt composé d'un angle droit & d'un angle commun *CBA*; donc la baſe *CF*, eſt égale à la baſe *AE*, par la neuviéme Propoſition du quatriéme Livre; donc les deux triangles *BCF*, *EAB*, ſont tout égaux; donc leurs doubles ſont égaux, c'eſt à dire le quarré *AKFB*, égal au rectangle *IBEN*; on prouvera de même que les triangles *CAD*, *CBG*, ſont tout égaux, & par conſequent leurs doubles, c'eſt à dire le quarré *CALG*, égal au rectangle *ICDH*; donc le quarré *BCDE*, composé de deux rectangles, eſt égal aux deux quarrés *AKFB*, *CALG*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Il eſt aiſé de faire voir que cette admirable Propoſition, n'eſt qu'un Corollaire des lignes proportionnelles qui fourniſſent la Propoſition ſuivante plus generale.

QUINZIE'ME PROPOSITION.



Si une ligne comme AB, eſt diviſée en deux parties au point C, & que deux autres lignes, comme EF, GH, ſoient moyennes proportionnelles ; l'une, comme EF, entre la toute AB, & ſa petite portion AC ; l'autre, comme GH, entre la toute AB, & ſa grande portion CB ; le quarré de la toute AB, ſera égal aux quarrés des moyennes proportionnelles EF, GH.

Il faut ſe ſouvenir qu'il a eſté démontré, que ſi une ligne eſt moyenne proportionnelle entre deux autres le quarré de la moyenne, eſt égal au rectangle ou produit des extrêmes : c'eſt la proprieté de la proportion Geometrique, qui convient à toutes ſortes de grandeurs, ſoit nombres, ſoit lignes, &c.

J'appelle la Ligne,	AB . . . . x.
Le Segment,	AC . . . . y.
Le Segment,	CB . . . . z.
La moyenne Proportionnelle,	EF . . . . R.
L'autre,	GH . . . . P.

Puiſque R, eſt moyenne proportionnelle entre x & y; il s'enſuit que $RR = xy$, par la proprieté de la proportion.

Puiſque P, eſt moyenne proportionnelle entre x & z; il s'enſuit que $PP = xz$, par la proprieté de la proportion.

Donc $RR + PP = xy + xz$.

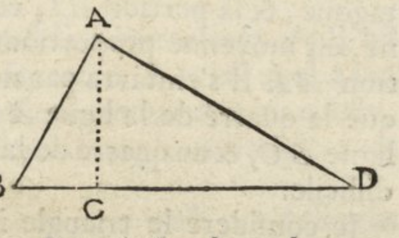
Or $xy + xz$. C'eſt x multiplié par $y + z$; c'eſt àdire, la Ligne totale multipliée par ſes Segmens ou par elle-même, ou, ſi vous voulés, c'eſt xx.

Donc $RR + PP = xx$.

C'est à dire le quarré de la Ligne *AB*, est égal aux quarrés des deux moyennes Proportionnelles *EF*, *GH*.

COROLLAIRE.

Le quarré de l'Hypotenuse, est égal au quarré des deux côtés ; car par la neuviéme Proposition du 6e Livre, le côté *AB*, est moyen proportionnel entre *BD*, & *BC*, & le côté *AD*, moyen proportionnel entre *BD*, & *CD*.

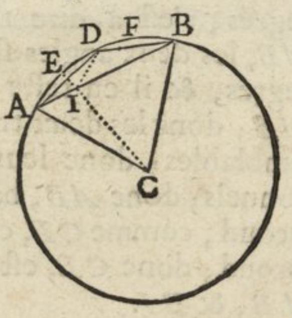


Il suit de-là, que tout triangle qui est tel que le quarré de sa base est égal au quarré de ses deux côtés, est un triangle rectangle ; car si les côtés s'ouvroient pour faire un obtus, la base seroit plus grande, & s'ils s'approchoient, plus petite ; & par consequent son quarré seroit ou plus grand ou plus petit, que si l'angle étoit droit.

II. COROLLAIRE.

Le côté du Decagone, du Pentagone, & de l'Hexagone inscripts dans le même cercle, peuvent toûjours être disposés en triangle rectangle : Il n'y a qu'à faire voir que le quarré du côté du Pentagone, est égal au quarré du côté de l'Hexagone, & au quarré du côté du Decagone.

Soit dans le cercle, le côté du Pentagone *AB*, du centre *C*, soient menés les raïons *AC*, *CB*, qui par la 7e Proposition de ce Livre, seront côtés de l'Hexagone, que l'arc qu'ils comprennent soit divisé en deux parties égales au point *D*, les lignes ou cordes *AD*, *DB*, seront côtés du Decagone. Que l'arc *AED*, soûtenu par un côté du De-



cagone, soit divisé en deux parties égales au point *E*, par le rayon *CE*, ce rayon couppera le côté du Pentagone au point *I*, & fera un angle droit avec le côté du Decagone. Soit tirée la ligne *ID*.

Si je puis démontrer que *CB*, côté de l'Hexagone, est moyenne proportionnelle entre *AB*, côté du Pentagone, & sa portion *BI*, & que *AD*, côté du Decagone, est moyenne proportionnelle entre *AB*, & sa portion *AI*. Il s'ensuivra par nôtre quinziéme Proposition que le quarré de la ligne *AB*, sera égal au quarré de la ligne *BC*, & au quarré de la ligne *AD*; or cela n'est pas difficile.

Je considere le triangle isoscele *ACB*, & le triangle isoscele, *CIB*; je trouve qu'ils sont semblables: car dans le grand triangle, l'angle *ACB*, est de soixante & douze degrés par construction, puisque c'est la cinquiéme partie du cercle; les deux angles sur sa base *AB*, sont chacun de 54 degrés, puisqu'ils doivent faire ensemble 108 degrés, & qu'ils doivent être égaux l'un à l'autre, à cause de l'égalité des côtés *CA*, *CB*; de même dans le triangle isoscele *CIB*, l'angle *CBI*, est de 54 degrés, puisqu'il ne differe pas de l'angle *CBA*; d'ailleurs l'angle *BCI*, est aussi de 54 degrés, puisqu'il est mesuré par l'arc *EDFB*, qui est composé de l'arc *DFB*, de 36 degrés, à cause qu'il est soûtenu par le côté du Decagone, & de l'arc *DE*, qui est par construction la moitié de 36 degrés, c'est à dire 18; ainsi dans le triangle isoscele *CIB*, les deux angles sur sa base *CB*, vallent chacun 54 degrés, & il en reste 72 pour l'angle de son sommet *CIB*; donc les deux triangles isosceles *ACB*, *CIB*, sont semblables; donc leurs côtés homologues sont proportionnels; donc *AB*, base du premier, est à *CB*, base du second, comme *CB*, côté du premier, est à *BI*, côté du second; donc *CB*, est moyenne proportionnelle entre *AB*, & *BI*.

Je dis en second lieu, que *AD*, est moyenne proportionnelle entre *AB*, & *AI*.

Je

Je considere pour cela le triangle isoscele *ADB*, & le triangle *AID*; je dis que ce dernier est isoscele & semblable au triangle *ADB*.

Dans le triangle *ADB*, chacun des angles sur la base *AB*, est de 18 degrés, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc *DFB*, de 36 degrés; reste donc pour l'angle du sommet *ADB*, 144 degrés.

Dans le triangle *AID*, c'est la même chose. 1°. Il est isoscele, c'est à dire, que son côté *AI*, est égal à son côté *ID*, puisque la perpendiculaire partage manifestement le triangle *AID*, en deux triangles rectangles tout égaux.

2°. L'angle sur la base *IAD*, qui n'est pas different de l'angle *BAD*, a pour mesure la moitié de l'arc *DFB*, & partant est de 18 degrés; donc l'autre angle *IDA*, est aussi de 18 degrés, & l'angle du sommet *AID*, de 144; donc les deux triangles *ADB*, *AID*, sont semblables; donc *AB*, base du premier, est à *AD*, base du second, comme *AD*, côté du premier, est à *AI* côté du second; donc *AD*, est moyenne proportionnelle entre *AB*, & *AI*.

Donc le quarré de la ligne *AB*, est égal au quarré de la ligne *BC*, plus le quarré de la ligne *AD*.

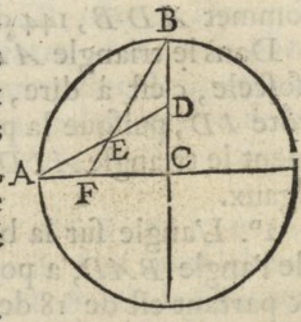
Donc si l'on dispose la ligne *AD*, & la ligne *BC*; ensorte qu'elles forment un angle droit, la ligne *AB*, en sera la base. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cela fournit une construction pour inscrire le côté du Pentagone. La voicy.

PROBLEME,

SEIZIE'ME PROPOSITION.

Inscrire dans un cercle donné le côté du Pentagone.

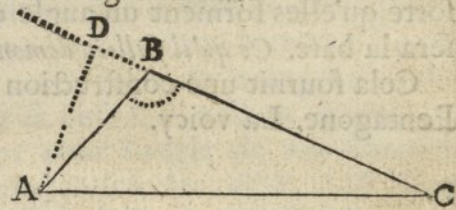


Soient deux diametres se coupant à angles droits au centre *C*; divisés le raïon *BC*, en deux parties égales au point *D*; tirés la ligne *AD*; prenés sur elle, *DE*, égale à *DC*, puis prenés *FC*, égale à *AE*, la ligne *FB*, sera le côté du Pentagone.

Il faut laisser à ceux qui commencent le plaisir d'en trouver la démonstration, c'est une suite de la Proposition précedente.

DIX-SEPTIE'ME PROPOSITION.

Le quarré de la base d'un angle obtus, est égal aux quarrés des deux côtés; plus deux fois le réctangle du côté sur lequel on a mené une perpendiculaire, & de la partie de ce côté prolongé comprise entre la perpendiculaire & le sommet de l'angle obtus.



Soit l'angle obtus *ABC*, soit mené du point *A*, la perpendiculaire *AD*, sur le côté *CB*, prolongé en *D*; je dis que le quarré de la base *AC*, est égal au quarré du côté *AB*, & au quarré du côté *BC*; plus deux fois le réctangle du côté *BC*, par la ligne *BD*.

Je nomme la base,	*AC* . . . . x.
Le côté,	*AB* . . . . y.
Le côté,	*CB* . . . . z.
La ligne,	*BD* . . . . n.

La ligne DC, ſera . . . . . $z+u$.

A cauſe du triangle réctangle ADB, le quarré de la ligne AB, eſt égal au quarré de la ligne AD; plus le quarré de la ligne DB; donc le quarré de la ligne AD, eſt égal au quarré de la ligne AB, moins le quarré de la ligne DB.

C'eſt à dire, que le quarré de la ligne AD, eſt égal à $yy-uu$.

Or à cauſe du triangle réctangle ADC, ſi au quarré de la ligne AD, qui eſt $yy-uu$, j'ajoûte le quarré de la ligne DC, c'eſt à dire, le quarré de $z+u$, qui eſt $zz+2zu+uu$, comme on verra tout à l'heure.

J'aurai $zz+2zu+uu+yy-uu$, c'eſt à dire, que j'aurai $zz+2zu+yy=xx$.

C'eſt à dire, le quarré de la ligne AC, égal au quarré de la ligne AB, & au quarré de la ligne CB; plus deux réctangles de z par u, c'eſt à dire, de la ligne BC, par la ligne BD.

Que le quarré de $z+u$, ſoit $zz+2zu+uu$, cela eſt évident. Il n'y a qu'à multiplier $z+u$ par $z+u$, ſuivant qu'il a été enſeigné dans le Traité de l'Arithmetique par lettres.

DIX-HUITIE'ME PROPOSITION.

Le quarré de la baſe d'un angle aigu, eſt égal aux quarrés de ſes côtés; moins deux fois le rectangle du côté ſur lequel on a mené une perpendiculaire, & de la partie de ce côté compriſe entre la perpendiculaire & le ſommet de l'angle donné.

Soit le triangle BAC. Que l'angle donné ſoit en A, & que ſa baſe ſoit la ligne BC, du point B, extremité de la baſe, ſoit menée la perpendiculaire BD; je dis que le quarré de la baſe BC, eſt égal aux deux quarrés des côtés BA, AC; moins deux fois le rectangle du côté AC, par ſa portion AD.

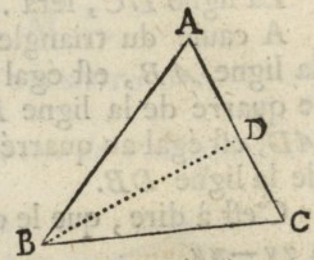
Que le côté AB, soit nommé z.

Le côté AC, soit nommé y.

La base BC, soit nommé x.

La portion AD, soit nommée u.

La ligne ou portion DC, sera, $y-u$.



A cause du triangle rectangle BDA, le quarré de BD, est égal au quarré de AB; moins le quarré de AD, c'est à dire, que le quarré de la ligne BD, est $zz-uu$.

De même à cause du triangle rectangle BDC, si je joins au quarré de BD, le quarré de DC, j'aurai le quarré de BC.

On vient de voir que le quarré de BD, est $zz-uu$.

J'y joins le quarré de DC, lequel quarré est $yy-2yu+uu$; puisque DC, est $y-u$, & que $y-u$, multiplié par $y-u$, donne $yy-2yu+uu$.

Joignant donc le quarré de BD, au quarré de DC, il me vient pour le quarré de BC, $zz-uu+yy-2yu+uu$.

Or $-uu+uu$, c'est à dire zero; donc reste pour le quarré de la base BC, $zz+yy-2yu$; c'est à dire, le quarré du côté AB; plus le quarré du côté AC; moins deux fois y multiplié par u, c'est à dire, moins deux fois le rectangle du côté AC, par la portion AD.

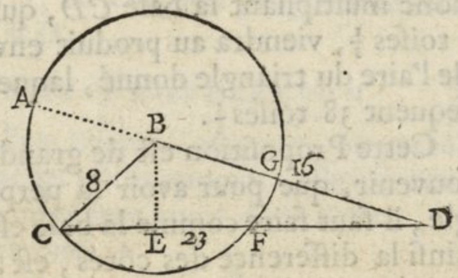
DIX-NEUVIE'ME PROPOSITION.

Trouver l'aire d'un triangle donné dont on connoît simplement les trois côtés.

Le Problême se réduit à trouver la valeur de la perpendiculaire du triangle donné: car multipliant la base par la perpendiculaire, on a le double de l'aire du triangle, par le Corollaire de la treiziéme Proposition.

Or voici comme l'on trouve la valeur de la perpendiculaire.

Soit le triangle donné *CBD*; je ſuppoſe le côté *CB*, de 8 toiſes, la baſe *CD*, de 23 toiſes, & le côté *BD*, de 16 toiſes; il faut trouver la valeur de la perpendiculaire *BE*, c'eſt à dire, combien elle contient de toiſes.



Du point *B*, pris pour centre, & de l'intervalle *CB*, le plus petit des côtés, je décris un cercle qui rencontre la baſe aux points *C*, *F*; il eſt démontré que la perpendiculaire *BE*, paſſant par le centre, doit tomber ſur le milieu de la ligne *CF*, qui eſt ici une corde; ainſi je commence par chercher combien la ligne *CF*, vaut de toiſes; & je le ſçaurai quand je connoîtrai combien la ligne *FD*, en contient. Or cela eſt aiſé par la troiſiéme Propoſition du ſeptiéme Livre, car comme la ligne *CD*, eſt à la ligne *AD*; ainſi *DG*, eſt à *DF*. Les trois premieres de ces lignes ſont connuës; *CD*, eſt la baſe de 23 toiſes, *AD*, eſt la ſomme des côtés, c'eſt à dire 24 toiſes: car *CB*, eſt égale à *BA*, *GD*, eſt la difference des côtés, c'eſt à dire 8 toiſes: car *BG*, raïon eſt égale à *CB*, petit côté; il n'y a donc qu'à faire la regle de trois ainſi. Comme 23 eſt à 24, ainſi 8 a un quatriéme terme, qui ſera la ligne *DF*; multipliant donc 24 par 8, & diviſant par 23, viendra 8 toiſes & envion $\frac{1}{3}$ de toiſe pour la ligne *DF*, cela étant la ligne *CF*, vaudra 14 toiſes $\frac{2}{3}$, puiſque la ligne *CD*, en vaut 23, partant ligne *CE*, moitié de *CF*, vaudra 7 toiſes $\frac{1}{3}$.

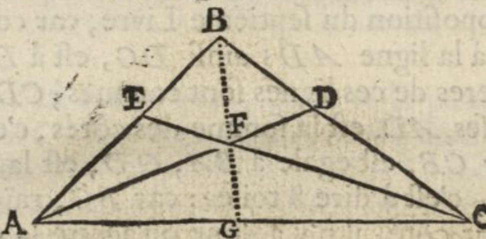
A preſent connoiſſant la valeur de *CE*, il eſt aiſé d'avoir la valeur de *BE*; car à cauſe du triangle rectangle *CEB*, il n'y a qu'à ôter du quarré de *CB*, qui eſt 64, le quarré de *CE*, qui eſt un peu moins de 54 toiſes, reſtera environ 10 toiſes pour le quarré de la perpendiculaire *BE*, dont la racine eſt trois toiſes $\frac{1}{2}$ & quelque choſe de plus.

Voila donc enfin la perpendiculaire trouvée en toises; donc multipliant la base *CD*, qui contient 23 toises par 3 toises $\frac{1}{3}$, viendra au produit environ 77 toises, double de l'aire du triangle donné, laquelle contiendra par consequent 38 toises $\frac{1}{2}$.

Cette Proposition est de grand usage, & il faut se bien souvenir, que pour avoir la perpendiculaire d'un triangle, il faut faire comme la base est à la somme des côtés; ainsi la difference des côtés, est à une quatriéme ligne, qui étant ôtée de la base, laisse une autre ligne sur la moitié de laquelle tombe la perpendiculaire cherchée.

VINGTIE'ME PROPOSITION.

Si l'on divise en deux parties égales, chaque angle d'un triangle par des lignes tombantes sur les côtés opposés, les trois lignes qui les divisent, se rencontreront en un même point dans le triangle.



Soit le triangle *ABC*. Soit l'angle en *A*, divisé en deux parties égales par la ligne *AD*, & l'angle en *C*, divisé en deux parties égales par la ligne *CE*, qui coupe en *F*, la ligne *AD*, il n'y a qu'à démontrer que si l'on tire de l'angle en *B*, par le point *F*, la ligne *BFG*; cette ligne *BFG*, divisera en deux parties égales l'angle en *B*.

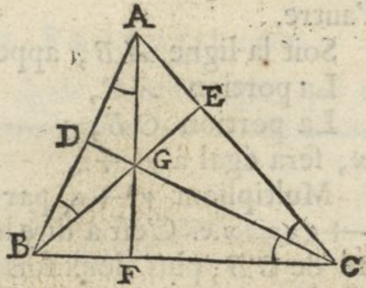
Puisque l'angle en *C*, & l'angle en *A*, sont divisés en deux parties égales; il s'ensuit par la huitiéme Proposition du sixiéme Livre, que *AB*, est à *BD*, comme *AC*, est à *CD*, puis considerant le triangle *ACD*, il s'ensuit par la même raison que *AC*, est à *CD*, comme *AF*, est à *FD*; donc *AB*, est à *BD*, comme *AF*, est à *FD*; donc par la même Proposition en considerant le triangle *ABD*, l'angle en *B*, est divisé en deux parties égales par la ligne

BF, puiſque la baſe *AD*, eſt couppée proportionnellement aux côtés *AB*, *BD*.

VINGT-UNIE'ME PROPOSITION.

Si des trois angles d'un triangle oxigone, on meine des perpendiculaires ſur les côtés oppoſés; elles ſe rencontreront toutes trois au même point dans l'aire.

Soit le triangle Oxigone *BAC*; ſoient menées les perpendiculaires *BE*, *CD*, qui ſe rencontrent au point *G*; je dis que la ligne tirée du ſommet *A*, par le point *G*, & tombant en *F*, ſur le côté *BC*, lui eſt perpendiculaire.

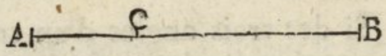


Les deux triangles *BEA*, *CDA*, ſont ſemblables ayant l'un & l'autre un angle droit, & l'angle en *A*, commun. D'où s'enſuit que les angles *EBA*, *DCA*, ſont égaux, & que le petit triangle *GDB*, eſt ſemblable aux deux triangles *CDA*, *BEA*, à cauſe de ſon angle droit en *D*, & de l'angle commun *GBD*; donc *CD*, *DB* :: *AD*, *DG*.

Conſiderant maintenant les lignes *CD*, *DB*, comme côtés qui comprennent l'angle droit du triangle *CDB*, & conſiderant les lignes *AD*, *DG*, comme côtés qui comprennent l'angle droit du triangle *GDA*, puiſque les deux premiers comprenant l'angle droit, ſont proportionnels aux deux autres, comprenant l'angle droit; il s'enſuit que les deux triangles *CDB*, *GDA*, ſont ſemblables, par conſequent l'angle *DCB*, égal à l'angle *GAD*. Or ſi l'on continuë *AG*, juſqu'en *F*, pour former le triangle *AFB*, il faudra neceſſairement qu'il ſoit ſemblable au triangle *CDB*, puiſqu'ils auront un angle commun, qui eſt *CBD*, & l'angle *GAD*, égal à l'angle *DCB*; donc comme l'angle *CDB*, eſt droit, l'angle *AFB*, ſera droit pareillement, & par conſequent la ligne *AF*, perpendiculaire.

VINGT-DEUXIE'ME PROPOSITION.

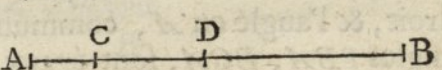
Si une ligne comme AB, eſt diviſée en deux parties au point C, le quarré de la toute AB, eſt égal aux deux quarrés des deux parties AC, CB; plus deux fois le rectangle d'une partie par l'autre.



Soit la ligne AB, appellée . . . . x.
La portion AC, ... y.
La portion CB, ... z.
x, ſera égal à $y + z$.

Multipliant $y + z$ par $y + z$, viendra $yy + 2yz + zz = xx$. C'eſt à dire le quarré de AC, plus le quarré de CB; plus deux fois le rectangle de AC, par CB, égal au quarré de la toute AB.

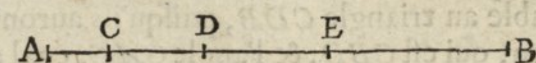
Que ſi la ligne AB, eſt diviſée en trois parties aux points C, D; le quarré de la toute AB, eſt égal aux trois quarrés des parties; plus deux fois le rectangle de AC, par CD; plus deux fois le rectangle de AC, par DB; plus deux fois le rectangle de CD, par DB, il n'y a qu'à donner des noms aux parties de la toute.



Je nomme AC . . . . x.
CD . . . . y.
DB . . . . z.

La toute ſera donc $x + y + z$, que je multiplie par $x + y + z$, vient au produit $xx + yy + zz + 2xy + 2xz + 2yz$, égal au quarré de la toute.

Si la ligne AB, eſt diviſée en quatre parties aux points C, D, E, on démontrera de même que le quarré de la toute AB, eſt égal aux quatre quar-



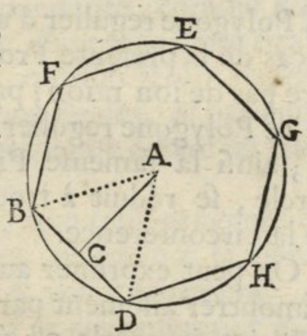
rés

rés des parties; plus deux fois le rectangle de *AC*, par *CD*; plus deux fois le rectangle de *AC*, par *DE*; plus deux fois le rectangle de *AC*, par *EB*; plus deux fois le rectangle de *CD*, par *DE*; plus deux fois le rectangle de *CD*, par *EB*; plus deux fois le rectangle de *DE*, par *EB*, & ainſi à l'infini.

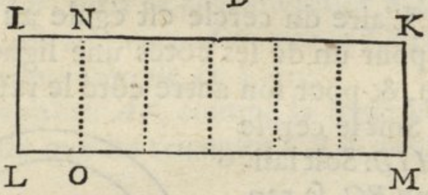
On voit par ces exemples de quel uſage eſt l'Arithmetique par lettres.

VINGT-TROISIE'ME PROPOSITION.

Toute figure reguliere eſt égale au rectangle, qui a pour baſe la moitié du perimetre & pour hauteur le raïon droit de la figure.



Soit la figure reguliere *BFE*, *GHD*, dont le raïon droit ſoit *AC*, & ſoit le rectangle *IKLM*, dont la baſe *LM*, ſoit égale à la moitié du perimetre de la figure, & dont la hauteur *KM*, ſoit égale au raïon droit *AC*; je dis que l'aire du rectangle, eſt égale à l'aire de la figure.



Pour le prouver; du centre de la figure *A*, je meine des lignes à tous les angles, & par là la figure eſt partagée en autant de triangles, qu'elle a de côtés. Icy, par exemple, l'Hexagone eſt partagé en ſix triangles tous égaux au triangle *BAD*; or l'aire du triangle *BAD*, eſt égale au rectangle de *BC*, moitié de *BD*, par *AC*, c'eſt à dire au rectangle de la moitié du côté du Polygone par le raïon droit, tel qu'eſt icy le rectangle *INLO*; donc les ſix triangles pris enſemble, & compoſant tout l'Hexagone, ſont égaux à ſix rectangles, tels que *INLO* dont chacun a pour baſe la moitié du côté *BD*, & pour hauteur le raïon droit

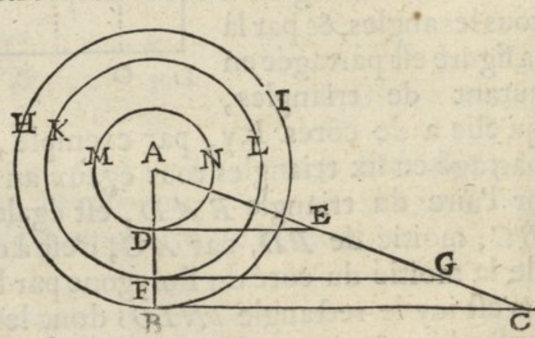
AC. Or ces six rectangles sont égaux à un seul rectangle, qui a pour base ces six moitiés du côté du Polygone, & pour hauteur le même raïon droit *AC*, tel qu'est icy le rectangle *IKLM*; ces six moitiés font la moitié du perimetre de la figure; donc l'aire de la figure donnée est égale au rectangle, qui a pour base la moitié du perimetre, & pour hauteur le raïon droit.

COROLLAIRE.

L'aire du cercle est égale au rectangle, qui a pour base la moitié de la circonference, & pour hauteur le raïon: c'est une suite manifeste de la nature du cercle, qui étant un Polygone regulier d'une infinité de côtés, tombe dans le cas de la presente Proposition; son raïon droit ne differe pas de son raïon, parce que le côté infiniment petit de ce Polygone regulier, est un point de la circonference; ainsi la fameuse Proposition de la quadrature du cercle, se réduit à trouver une ligne égale à la moitié de la circonference.

On peut exprimer autrement cette Proposition & la démontrer aisément par les indivisibles, ainsi qu'il suit:

L'aire du cercle est égale au triangle rectangle, qui a pour un de ses côtés une ligne égale à la circonference, & pour son autre côté le raïon du cercle.



Soit le cercle *HIB*. Soit la ligne *BC*, sa tangente au point *B*, supposée égale à la circonference *HIB*, du centre *A*. Soit tirée la ligne *AC*, formant le triangle rectangle *ABC*, je dis que l'aire de ce triangle est égale à l'aire du cercle *HIB*. Pour le démontrer:

Je considere que le nombre infini des circonferences concentriques, qui remplissent l'aire du grand cercle, est mesuré par le raïon *AB*, c'est à dire, qu'il y a autant de circonferences concentriques, qu'il y a de points dans la ligne *AB*.

Je considere d'autre part que le nombre des lignes paralleles à *BC*, qui toutes ensemble remplissent l'aire du triangle *CBA*, est mesuré par le même raïon *AB*, c'est à dire, qu'il y a autant de lignes paralleles à *BC*, qu'il y a de points dans la ligne *AB*; donc il y a autant de circonferences concentriques dans l'aire du grand cercle, qu'il y a de lignes paralleles dans l'aire du triangle. Si donc chaque ligne parallele, comme *FG*, ou *DE*, est égale à sa circonference correspondante, comme *KLF*, ou *MND*, il y aura de part & d'autre parfaite égalité dans les deux aires, c'est à dire, qu'elles seront remplies par un nombre égal de grandeurs égales, & par consequent l'aire du grand cercle, sera égale à l'arc du triangle *CBA*.

Or il est aisé de démontrer, que telle tangente que l'on voudra choisir, comme *FG*, est égale à sa circonference correspondante *KLF*; & voicy comment.

La circonference *HIB*, est à la circonference *KLF*, comme le raïon *AB*, est au raïon *AF*, par le Corollaire de la cinquiéme Proposition de ce Livre.

Le raïon *AB*, est au raïon *AF*, comme la ligne *BC*, est à la ligne *FG*, à cause que les triangles *CBA*, *GFA*, sont semblables.

Donc la circonference *HIB*, est à la circonference *KLF*, comme la ligne *BC*, est à la ligne *FG*, parce que deux raisons égales à une même raison, sont égales entr'-elles.

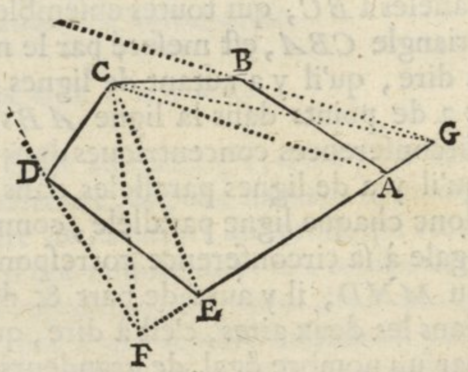
Alternando. La circonference *HIB*, est à la ligne *BC*, comme la circonference *KLF*, est à la ligne *FG*.

Or la circonference *HIB*, est supposée égale à la ligne *BC*; donc la circonference *KLF*, sera égale à la ligne *FG*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME,

VINGT-QUATRIE'ME PROPOSITION.

Transformer une figure d'un certain nombre de côtés en un autre de même aire, & la réduire, si l'on veut, au triangle.



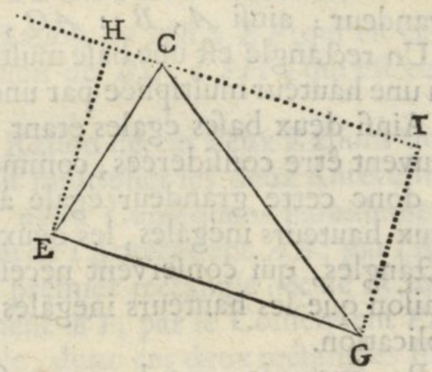
Soit le Pentagone irregulier *ABCDE*, je le réduis d'abord au quadrilatere ; & pour cela, je joins les points *C*, *E*, par la ligne *CE*, à laquelle je tire par le point *D*, la parallele *DF*, qui rencontre le côté *AE*, prolongé au point *F*, duquel point je tire la ligne *FC*, & je dis que le quadrilatere *ABCF*, est égal au Pentagone: car le triangle *CFE*, est égal au triangle *EDC*, puisqu'ils ont la même base *CE*, & qu'étant entre mêmes paralleles, ils ont même hauteur. Retranchant donc le triangle *EDC*, du Pentagone, & remettant en sa place le triangle *CFE*, son égal, on a le quadrilatere *ABCF*, égal au Pentagone donné.

Il n'est pas plus difficile de réduire ce quadrilatere *ABCF*, en triangle.

Il n'y a qu'à joindre les points *CA*, si vous voulés, par la ligne *CA*; lui mener une parallele par le point *B*; prolonger *FA*, jusques en *G*, puis joindre les points *CG*, le triangle *FCG*, sera par la même raison égal au quadrilatere *ABCF*, & par consequent au Pentagone *ABCDE*.

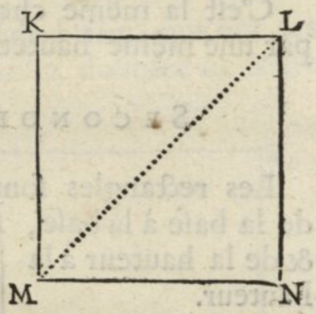
Que si l'on vouloit à present réduire le triangle *ECG*, en un triangle rectangle isoscele de même aire, il faudroit d'abord faire passer par l'un des points *E*, *C*, *G*, une parallele au côté opposé ; par exemple, par le point

C, puis ayant mené les perpendiculaires *GI*, *EH*, on aura le rectangle *EHGI*; donc l'aire est double de l'aire du triangle *ECG*, parce qu'il a même base & même hauteur.



Trouvant à present une moyenne proportionnelle entre la ligne *EH*, & la ligne *GE*, le quarré de cette moyenne proportionnelle, sera égal au rectangle *EHGI*.

Que ce quarré soit *KLMN*; la Diagonale *ML*, le partage en deux triangles rectangles isosceles, dont chacun a l'aire égale à celle du triangle *ECG*.



NEUVIE'ME LIVRE.

De la comparaison de l'aire des figures.

PREMIERE PROPOSITION.

Les rectangles qui ont même base, sont entre eux comme leurs hauteurs; & ceux qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.

Il faut se souvenir que la raison de deux grandeurs, demeure la même, si on les multiplie par une même grandeur ; ainsi A, B :: AC, BC.

Un rectangle est une base multipliée par une hauteur, ou une hauteur multipliée par une base.

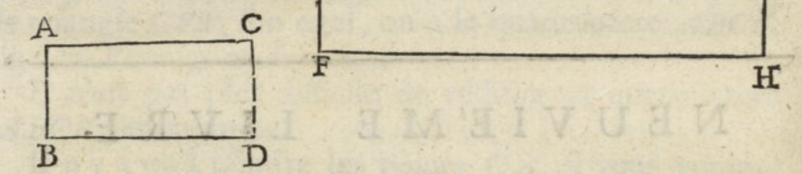
Ainsi deux bases égales étant deux grandeurs égales, peuvent être considerées, comme une même grandeur. Si donc cette grandeur égale à elle-même, multiplie deux hauteurs inégales, les deux produits sont les deux rectangles, qui conservent necessairement entre eux la Raison que les hauteurs inégales avoient avant la multiplication.

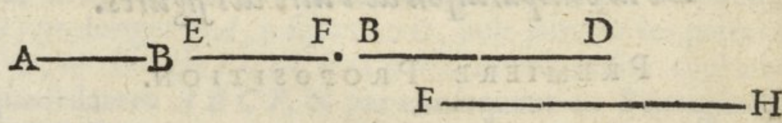
Par exemple, une hauteur est A, l'autre est B; je multiplie la hauteur A, par la base C, vient AC; je multiplie la hauteur B, par la base C, vient BC, & il est évident que A, B :: AC, BC.

C'est la même chose des bases inégales multipliées par une même hauteur.

SECONDE PROPOSITION.

Les rectangles sont entre eux en Raison composée de la base à la base, & de la hauteur à la hauteur.





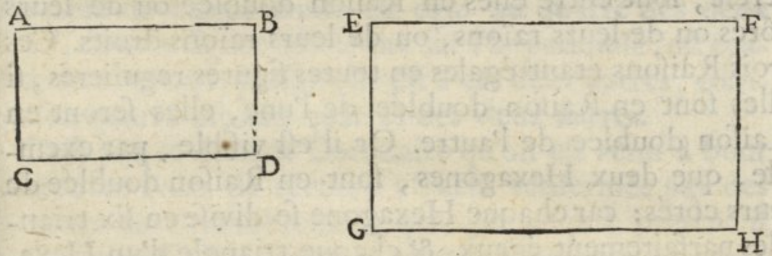
Soient les rectangles $ACDB$, $EGHF$: ayant rangé les hauteurs AB, EF, & les bases BD, FH, comme on les voit icy, c'est à dire, les deux bases l'une auprés de l'autre, & les deux hauteurs de même ; l'on a deux

Raiſons ; ſçavoir, la Raiſon de *AB* à *EF*, qui eſt celle des hauteurs ; & la Raiſon de *BD*, à *FH*, qui eſt celle des baſes.

Pour composer une Raiſon de ces deux Raiſons données ; on ſçait qu'il faut multiplier les deux Antecedens l'un par l'autre, & les deux Conſequens pareillement. Or de la multiplication de l'Antecedent *AB*, par l'Antecedent *BD*, vient le premier rectangle ; & de la multiplication du Conſequent *EF*, par le Conſequent *FH*, vient le ſecond rectangle ; donc ces deux rectangles ſont une Raiſon compoſée des deux Raiſons de baſe à baſe, & de hauteur à hauteur.

TROISIE'ME PROPOSITION.

Les rectangles ſemblables, c'eſt à dire, qui ont les côtés proportionnels, ſont en Raiſon doublée de leurs baſes ou de leurs hauteurs.



Soit la hauteur *AC*, à la hauteur *EG*, comme la baſe *CD*, à la baſe *GH*.

Par la précedente Propoſition, les rectangles ſont en Raiſon compoſée de la baſe à la baſe, & de la hauteur à la hauteur. Or ces deux Raiſons ſont icy ſuppoſées égales ; donc la Raiſon qui en eſt compoſée, eſt une Raiſon doublée de l'une ou l'autre des compoſantes.

Si la baſe *CD*, eſt la moitié de la baſe *GH*, la hauteur *AC*, ſera la moitié de la hauteur *EG*, & le grand rectangle ſera quadruple du petit : car la Raiſon doublée de 1 à 2, eſt 1, 4, puiſque :

1, 2 :: 1, 2.

La multiplication des Antecedens eſt 1, celle des Conſequens, eſt 4.

COROLLAIRE.

Les parallelogrammes ſemblables, ſont en Raiſon doublée de leurs côtés homologues, puiſque la baſe eſt à la baſe, comme la hauteur à la hauteur.

II. COROLLAIRE.

Les triangles ſemblables, ſont entre eux en Raiſon doublée de leurs côtés homologues, puiſqu'étant moitiés de parallelogrammes ſemblables, leur baſe eſt à leur baſe, comme leur hauteur eſt à leur hauteur.

III. COROLLAIRE.

Les figures regulieres inſcriptes ou circonſcriptes au cercle, ſont entre elles en Raiſon doublée ou de leurs côtés ou de leurs raïons, ou de leurs raïons droits. Ces trois Raiſons étant égales en toutes figures regulieres, ſi elles ſont en Raiſon doublée de l'une, elles ſeront en Raiſon doublée de l'autre. Or il eſt viſible, par exemple, que deux Hexagones, ſont en Raiſon doublée de leurs côtés; car chaque Hexagone ſe diviſe en ſix triangles parfaitement égaux, & chaque triangle d'un Hexagone eſt à chaque triangle de l'autre en Raiſon doublée de la baſe à la baſe, parce qu'ils ſont ſemblables; donc les ſix triangles d'un côté, ſont à l'égard des ſix triangles de l'autre pareillement en Raiſon doublée de leurs côtés.

IV. COROLLAIRE.

Les cercles ſont entre eux en Raiſon doublée de leurs raïons: car les cercles ſont des Polygones reguliers d'une infinité de côtés; ainſi ſi l'on propoſe deux cercles dont l'un ait le raïon triple de l'autre, l'aire du grand cercle ſera noncuple de celle du petit.

V. COROL.

V. COROLLAIRE.

Les quarrés ſont en Raiſon doublée de leurs côtés, puiſque ce ſont des rectangles.

VI. COROLLAIRE

Les cercles ſont entre eux comme les quarrés de leurs raïons: car les quarrés des raïons ſont en Raiſon doublée des raïons, auſſi-bien que les cercles.

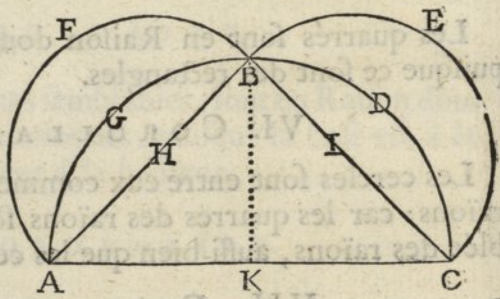
VII. COROLLAIRE.

Si l'on conſtruit ſur les trois côtés d'un triangle rectangle, trois figures ſemblables quelconques, celle qui ſera conſtruite ſur l'hypotenuſe, ſera égale aux deux autres priſes enſemble. 1°. Les figures ſemblables ſont en Raiſon doublée de leurs côtés homologues, c'eſt à dire, comme les quarrés de leurs côtés. Or nous avons vû que le quarré de l'hypotenuſe eſt égal au quarré des deux côtés; donc la figure conſtruite ſur l'hypotenuſe, eſt égale au deux autres, puiſqu'elle eſt à ces deux autres, comme ſon quarré eſt aux quarrés des deux autres.

C'eſt par ce dernier Corollaire qu'on eſt venu à bout de trouver l'aire de certains eſpaces renfermés par des portions de circonferences, quoique juſqu'à preſent il ait été impoſſible de trouver geometriquement l'aire du cercle, parce qu'on ne ſçait pas la longueur de la circonference. Ainſi quoiqu'on ſçache que l'aire du cercle eſt égale au rectangle de la demi-circonference par le raïon; comme cette demi-circonference ne peut être meſurée geometriquement, & qu'on n'en connoît point le rapport avec une ligne droite, on n'a pas non plus exactement ce rectangle; cependant voicy comment l'on trouve geometriquement l'aire de ces eſpaces, qu'on appelle ordinairement des Lunulles, & dont l'invention eſt attribuée à un ancien Geometre nommé Hippocrate.

Soit décrit le triangle rectangle iſoſcele *ABC*. Sur chacun de ſes côtés pris pour diametres, ſoient décrites les demi-circonferences, *AGBDC*, *AFB*, *CEB*.

L'eſpace renfermé entre le quart de cercle *AGB*, & la demi-circonference *AFB*, ſe nomme une Lunulle, comme celle de l'autre côté.



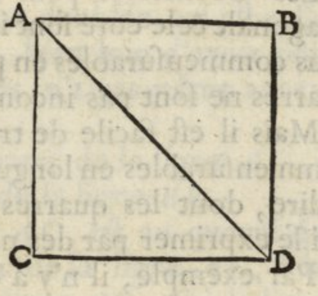
Je dis que les deux Lunulles priſes enſemble, ſont égales au triangle *ABC*, car par ce dernier Corollaire, l'aire du demi cercle *AGBDC*, eſt égale aux deux aires des demi cercles *AFB*, *BEC*. Or retranchant de l'aire du grand demi cercle, la portion *AGBH*, & la portion *BDCI*, reſtera le triangle *ABC*; ces deux mêmes portions *AGBH*, *BDCI*, retranchées des deux demi cercles *AFB*, *BEC*, laiſſeront les deux Lunulles *AFBG*, *BECD*; donc les reſtes ſeront égaux de part & d'autre; donc les Lunulles ſont égales à l'aire du triangle *ABC*, dont la moitié *ABK*, eſt égale à l'une des Lunulles.

Il eſt aſſés ſurprenant que l'on meſure ſi aiſément une ſurface bornée par deux portions de circonferences, & que juſqu'à preſent l'eſprit humain n'ait pû trouver aucun chemin pour aller à la quadrature du cercle; mais nous allons voir tout à l'heure quelque choſe de bien plus humiliant pour lui.

QUATRIÉME PROPOSITION.

Des Incommenſurables.

La Diagonale du quarré eſt incommenſurable à ſon côté.



Soit un quarré *ABCD*. La Diagonale *AD*.

Il n'y a qu'à démontrer que la ligne *AD*, n'est pas comme nombre à nombre à l'égard de la ligne *AC*.

Souvenons-nous d'abord que la Raison doublée de toute Raison de nombre à nombre, a necessairement pour Exposans des nombres quarrés.

2°. Qu'une Raison doublée, qui n'a pas pour Exposans des nombres quarrés, n'est pas doublée d'une Raison de nombre à nombre, ou pour s'exprimer autrement, que la Raison dont elle est la doublée, n'est pas Raison de nombre à nombre. Cela a été démontré.

Or par le cinquiéme Corollaire de la troisiéme Proposition de ce Livre, le quarré de la ligne *AD*, est au quarré de la ligne *AC*, en Raison doublée de la Raison de la ligne *AD*, à la ligne *AC*.

Donc si le quarré de la ligne *AD*, & le quarré de la ligne *AC*, n'ont pas pour Exposans des nombres quarrés la Raison de la ligne *AD*, à la ligne *AC*, sera sourde. Or les Exposans de la Raison de ces deux quarrés, sont 2, 1. par la quatorziéme Proposition du Livre precedent, puisque le triangle *ACD*, est rectangle, & que le côté *AC*, étant égal au côté *CD*, le quarré de l'hypotenuse *AD*, est double du quarré du côté *AC*; donc la Raison dont cette Raison 2, 1, est la doublée, n'est pas une Raison de nombre à nombre, c'est à dire, que la Raison de la Diagonale *AD*, au côté *AC*, est sourde ou n'est pas de nombre. Voilà donc deux lignes *AD*, *AC*, qui n'ont aucune commune mesure.

Il n'en est pas de même de leurs quarrés, car leurs quarrés sont commensurables, ou sont comme nombre à nombre, puisque l'un est à l'égard de l'autre, comme 2 à 1.

Les Geometres pour exprimer cela : diſent, que la Diagonale & le côté ſont incommenſurables en longueur, mais commenſurables en puiſſance, c'eſt à dire, que leurs quarrés ne ſont pas incommenſurables.

Mais il eſt facile de trouver des lignes qui ſeront incommenſurables en longueur & même en puiſſance, c'eſt à dire, dont les quarrés n'auront aucun rapport qu'on puiſſe exprimer par des nombres.

Par exemple, il n'y a qu'à trouver une ligne moyenne proportionnelle entre la Diagonale & le côté. Par la dixiéme Propoſition du ſixiéme Livre.

Je dis que cette moyenne proportionnelle eſt incommenſurable en longueur & en puiſſance à l'égard du côté & de la Diagonale.

A———C• E———F• A———D

Soit la ligne *EF*, ſuppoſée moyenne proportionnelle entre le côté *AC*, & la Diagonale *AD*.

Il eſt premierement certain que la Raiſon de la ligne *AC*, à la ligne *AD*, eſt doublée de la Raiſon de la ligne *AC*, à la ligne *EF*.

Car appellant *AC* . . . . x.
EF . . . . y.
AD . . . . z.

Par la ſuppoſition $x, y :: y, z$.

Si l'on multiplie les deux Antecedens l'un par l'autre, & pareillement les deux Conſequens, on aura pour raiſon compoſée xy, zy. Or cette Raiſon n'eſt pas differente de la Raiſon de x à z.

$$x, z :: xy, zy.$$

Puiſque c'eſt une Raiſon multipliée par la même grandeur y; donc la Raiſon de x à z, eſt compoſée de la Raiſon de x à y, & de la Raiſon de y à z, qui ſont deux Raiſons égales; donc la Raiſon de x à z, eſt doublée de la Raiſon de x à y; c'eſt à dire, comme on l'a avancé, que la Raiſon de la ligne *AC*, à la ligne *AD*, eſt doublée de la Raiſon de la ligne *AC*, à la ligne *EF*.

Cela étant, la ligne *AC*, est incommensurable à la ligne *EF*, puisque leur Raison doublée qui est celle de la ligne *AC*, à la ligne *AD*, bien loin d'avoir pour Exposans des nombres quarrés, n'a pas même aucun nombre pour Exposans.

Je dis de plus que le quarré de la ligne *AC*, est incommensurable au quarré de la ligne *EF*.

Car le quarré de la ligne *AC*, est au quarré de la ligne *EF*, en Raison doublée de la ligne *AC*, à la ligne *EF*, c'est à dire, comme la ligne *AC*, est à la ligne *AD*. Or la ligne *AC*, est supposée incommensurable à la ligne *AD*; donc le quarré de la ligne *AC*, est incommensurable au quarré de la ligne *EF*.

On voit par-là qu'on peut avoir des lignes incommensurables à l'infini, en cherchant toûjours des moyennes proportionnelles; par exemple, entre la ligne *AC*, & la ligne *EF*, & ainsi à l'infini.

Reflexions sur les Incommensurables.

Rien n'est plus étonnant que ces verités démontrées touchant les Incommensurables. La ligne *AC*, & la ligne *AD*, ont chacune une infinité d'Aliquottes pareilles, & dans ce nombre infini, je ne puis jamais en trouver une seule, qui puisse être l'Aliquotte des deux lignes.

Je puis prendre, par exemple, la centmilliéme partie de la ligne *AC*; la deux centmilliéme, la quatre centmilliéme, & ainsi doublant toûjours à l'infini, sans que jamais aucune de ces petites parties puisse être contenuë précisément un certain nombre de fois dans la ligne *AD*.

Je puis même choisir une infinité d'Aliquottes de la ligne *AC*, d'un ordre tout different. Je puis prendre la trois centmilliéme partie; la neuf centmilliéme, & ainsi triplant toûjours à l'infini, sans que jamais dans cette infinité d'infinis, je puisse trouver une partie qui mesure exactement la ligne *AD*.

Cette verité démontrée, démontre invinciblement la divisibilité de la matiere à l'infini, ou pour s'exprimer autrement, que l'étenduë ne peut être composée d'indivisibles; car si le côté du quarré, par exemple, étoit composé d'indivisibles, il en contiendroit necessairement un certain nombre, ainsi l'un de ces indivisibles seroit aliquotte de ce côté. Prenant maintenant l'un de ces indivisibles ou aliquotte, pour mesurer la Diagonale, il y sera contenu précisément un certain nombre de fois, ou avec un reste. Si vous dites qu'il y est contenu précisément un certain nombre de fois; voilà la Diagonale commensurable au côté, ce qui a été démontré impossible. Si vous dites que cet indivisible est contenu dans la Diagonale un certain nombre de fois avec un reste; je vous demande ce que c'est que le reste d'un indivisible, ce reste sera necessairement plus petit que l'aliquotte dont il est reste, & parconsequent cette aliquotte n'étoit pas indivisible, contre la supposition; donc l'étenduë n'est pas composée d'indivisibles.

Il n'y a rien de démontré, si cela ne l'est pas: car de dire comme certaines gens, qu'il n'y a point de quarrés parfaits, par consequent point de côtés ni de Diagonalles, c'est raisonner pitoyablement.

Il n'est pas necessaire qu'il y ait au monde ni des quarrés, ni des triangles, ni des cercles, pour établir la verité des Démonstrations geometriques, il suffit de leur possibilité. Quand Dieu n'eût jamais créé la matiere, elle eût toûjours été possible. Un être intelligent à qui il lui auroit plû reveler les verités geometriques, les eût parfaitement entenduës. Cet Estre Souverain, source de toute verité, auroit bien sçû du moins qu'un triangle possible, étoit moitié d'un parallelogramme possible. On ne peut pas même pousser assés loin l'extravagance, pour oser dire, que quand bien il n'y auroit à present dans l'Univers aucun Agent creé qui pût tracer un quarré parfait, il fût impossible à celui qui a creé la matiere, d'en enfermer une petite portion dans un espace parfaitement quarré; ainsi la verité des incommensurables subsiste invinciblement.

Voilà donc les points démontrés impossibles. Mais voicy bien autre chose.

Si le point eſt impoſſible, qu'eſt-ce donc que la rencontre des deux côtés qui forment l'angle du quarré. Si le point eſt impoſſible, le cercle eſt impoſſible. Car ſi Dieu forme une boule parfaite, & qu'il la poſe ſur un plan parfait, le point de contingence aura-t-il quelque étenduë; s'il a quelque étenduë, il eſt ſurface ou pour le moins ligne; ainſi la tangente & le cercle auront une étenduë commune, contre ce qui eſt démontré dans la 11e Propoſition du troiſiéme Livre; dirés-vous, que Dieu ne ſçauroit faire un cercle parfait? Vous aurés plûtôt fait de dire que Dieu n'eſt pas, que de borner ſi ridiculement ſa puiſſance.

D'ailleurs quand je conſidere attentivement l'exiſtence des eſtres; je comprens trés-clairement que l'exiſtence appartient aux unités, & non pas aux nombres. Je m'explique.

Vingt hommes n'exiſtent que parce que chaque homme exiſte; le nombre n'eſt qu'une dénomination exterieure, ou pour mieux dire, une répetition d'unités auſquelles ſeules appartient l'exiſtence; il ne ſçauroit jamais y avoir de nombres, s'il n'y a des unités; il ne ſçauroit jamais y avoir vingt hommes, s'il n'y a un homme: cela bien conçû, je vous demande ce pied cubique de matiere, eſt-ce une ſeule ſubſtance, en ſont-ce pluſieurs? Vous ne pouvés pas dire que ce ſoit une ſeule ſubſtance; car vous ne pourriés pas ſeulement le diviſer en deux; ſi vous dites que c'en ſont pluſieurs, puiſqu'il y en a pluſieurs, ce nombre quel qu'il ſoit, eſt compoſé d'unités, s'il y a pluſieurs ſubſtances exiſtantes, il faut qu'il y en ait une, & cette une ne peut en être deux; donc la matiere eſt compoſée de ſubſtances indiviſibles.

Voilà nôtre Raiſon réduite à d'étranges extremités. La Geometrie nous démontre la diviſibilité de la matiere à l'infini, & nous trouvons en même temps qu'elle eſt compoſée d'indiviſibles. Humilions-nous encore une fois, & reconnoiſſons qu'il n'appartient pas à une creature, quelque excellente qu'elle puiſſe être, de vouloir concilier des verités, dont le Createur a voulu lui cacher la compatibilité. Ces diſpoſitions nous rendront plus ſoumis aux Myſteres, & nous accoûtumeront à reſpecter des verités qui ſont par leur nature inpénetrables à nôtre eſprit, que nous venons de trouver aſſés borné, pour ne pouvoir pas même concilier des Démonſtrations mathematiques.

LIVRE DIXIE'ME.

Des Solides.

ON appelle Solide ou Corps, l'étenduë conſiderée avec ſes trois dimenſions, Longueur, Largeur & Profondeur.

Il y en a de reguliers & d'irreguliers de pluſieurs eſpeces. Par exemple.

Si l'on ſuppoſe qu'un quarré coule parallelement à lui-même le long d'une perpendiculaire, il s'en formera une figure Solide, qu'on nomme Parallelipipede. Si la perpendiculaire eſt égale au côté du quarré, le Corps ſe nomme Cube.

Si au lieu d'un quarré, l'on prend un cercle que l'on faſſe couler parallelement à lui-même, ſa circonference décrira la ſurface d'un Solide, qu'on appelle Cilindre.

Si l'on choiſit toute autre figure rectiligne, comme un triangle, un Pentagone, un Hexagone, & qu'on la faſſe couler parallelement à elle-même le long d'une perpendiculaire, il s'en formera un Solide, qu'on appellera un Priſme Triangulaire, Pentagonal, Hexagonal &c.

Si ayant choiſi pour baſe une figure rectiligne reguliere, l'on ſuppoſe une ligne élevée perpendiculairement ſur ſon centre, & que de l'extremité de cette ligne, qui eſt en l'air, l'on tire pluſieurs lignes aux angles de la figure qui ſert de baſe, le Solide renfermé par tous les triangles

gles formés par ces lignes & par les côtés de la baſe, ſe nomme une Pyramide reguliere, Triangulaire, Pentagonale &c. ſelon la baſe.

Le point de la perpendiculaire d'où partent toutes les lignes ſe nomme le Sommet de la Pyramide. La perpendiculaire ſe nomme tout ſimplement la Perpendiculaire de la Pyramide; & les ſurfaces renfermées par deux lignes voiſines tirées du ſommet, ſe nomment les côtés de la Pyramide.

Si au lieu d'une figure rectiligne, l'on choiſit un cercle pour baſe, & qu'ayant élevé une perpendiculaire ſur ſon centre, l'on ſuppoſe une infinité de lignes, partant du haut de la perpendiculaire & aboutiſſant à tous les points de la circonference, il s'en formera un Solide appellé Cone regulier ou Rectangle.

Si l'on ſuppoſe un cercle tournant en lui-même ſur ſon diametre immobile, il s'en formera un corps regulier appellé Sphere.

Le diametre s'appellera Axe de la Sphere.

Les deux extremités de l'axe, les Poles de la Sphere.

La Sphere aura manifeſtement pour centre, le même centre que le cercle qui a ſervi à la former.

On peut inſcrire dans la Sphere une infinité de corps irreguliers, mais l'on ne peut y en inſcrire que cinq reguliers; ſçavoir,

Un renfermé ſous quatre triangles équilateraux, appellé Tetrahedre.

Un renfermé ſous ſix quarrés, appellé Cube.

Un renfermé ſous douze Pentagones, appellé Dodecaedre.

Un renfermé ſous huit triangles équilateraux, appellé Octaedre.

Un renfermé ſous vingt triangles équilateraux, appellé Icoſahedre.

Pour démontrer commodément les principales proprietés des Solides, il faut ſe ſervir de la Geometrie des indiviſibles qui a un merveilleux avantage dans ces ſortes de démonſtrations.

Nous avons déja vû qu'elle conſiſte à conſiderer les ſurfaces, comme compoſées de lignes paralleles ; ainſi un parallelogramme n'eſt autre choſe qu'une baſe coulant parallelement à elle-même le long des points de ſa perpendiculaire ; d'où s'enſuit que la baſe d'un rectangle, ou quarré ou parallelogramme, eſt autant de fois contenuë dans ſon aire, qu'il y a de points dans la perpendiculaire, & que pour avoir cette aire, il n'y a qu'à multiplier la baſe par la perpendiculaire.

Suivant la même analogie, nous allons conſiderer les Solides, comme compoſés de ſurfaces paralleles ; ainſi un Priſme n'étant autre choſe qu'une infinité de figures regulieres miſes l'une ſur l'autre parallelement à elles-mêmes, ou ſi vous voulés, que l'on conſidere comme coulant le long de la perpendiculaire du priſme ; ſa ſolidité n'eſt autre choſe que la baſe priſe autant de fois qu'il y a de points dans ſa perpendiculaire.

Ainſi pour avoir la ſolidité du priſme, il n'y a qu'à multiplier la baſe par la perpendiculaire.

Delà s'enſuit ſans autre démonſtration.

Que les priſmes de même baſe & de même hauteur ſont égaux.

Que les priſmes de même baſe, ſont entre eux comme leurs hauteurs.

Que les priſmes de même hauteur, ſont entre eux comme leurs baſes.

C'eſt la même choſe pour les Cylindres, qui ſont des priſmes reguliers d'une infinité de côtés, ayant pour baſe un cercle.

Il s'enſuit encore que les priſmes obliques, c'eſt à dire ceux dont la ligne qui va du ſommet au centre de la baſe, ne lui eſt pas perpendiculaire, ſont égaux aux priſmes perpendiculaires ou reguliers, qui ont même baſe & même hauteur perpendiculaire.

C'eſt la même choſe des cylindres obliques à l'égard des cylindres droits.

Car conſiderant la ſolidité du cylindre ou priſme perpendiculaire, comme diviſée en tel nombre de tranches paralleles à la baſe que l'on voudra. La ſomme des tranches qui ſe trouvera dans ce priſme perpendiculaire, ſera égale à la ſomme des tranches qui ſe trouvera dans le priſme oblique, puiſque le droit & l'oblique peuvent être enfermés entre deux paralleles, & ſont ſuppoſés avoir la même hauteur.

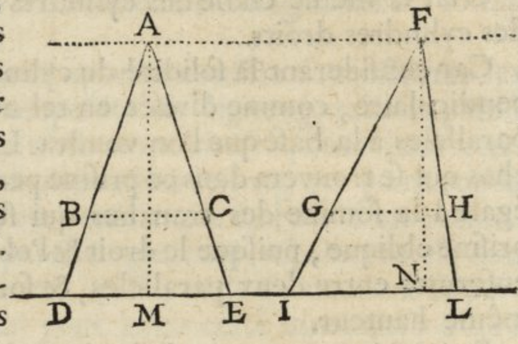
Il s'enſuit encore que pluſieurs priſmes dont toutes les baſes priſes enſemble, ſont égales à une ſeule baſe, ſeront égaux en ſolidité au priſme, qui aura cette ſeule baſe égale à toutes les autres, & la même hauteur.

Par conſequent tout priſme Polygone quelconque, peut être diviſé en autant de priſmes triangulaires qu'il a de côtés, & tous ces priſmes triangulaires pris enſemble, ſeront égaux au priſme total.

PREMIERE PROPOSITION.

Les Pyramides de même baſe & de même hauteur ſont égales.

Soient conçûës les pyramides diviſées en tel nombre de tranches paralleles à la baſe que l'on voudra. Si chaque tranche eſt égale à chaque tranche correſpondante, la perpendiculaire *MA*, étant ſuppoſée égale à la perpendiculaire *FN*, il y aura autant de tranches d'un côté que d'autre; & par conſequent de côté & d'autre, une ſomme égale de choſes égales chacune à chacune; d'où s'enſuivra que le tout ſera égal au tout. Or pour démontrer qu'une tranche eſt égale à ſa correſpondante, il faut les ſuppoſer ſi minces, que ce ne ſoit plus que de ſimples ſuperficies de figures, & démontrer que chaque figure eſt égale à ſa correſpondante, Soient *DAE*, *IFL*, deux faces de deux pyramides de même hauteur ſuppoſées entre les paralleles *AF*, *DL*, & leurs ſommets aux points *A*, *F*. Soit ſuppoſé encore un plan qui les couppe parallelement à la baſe, & qui forme ſur les deux faces, les Sections *BC*, *GH*, paralleles aux deux lignes égales *DE*, *IL*, qui ſont chacune un côté des baſes égales des deux pyramides. Si nous conſiderons icy la face *DAE*, de l'une, & la face *IFL*, de l'autre, il nous ſera aiſé de démontrer que la ligne *BC*, eſt égale à la ligne *GH*, puiſque la ligne *DE*, eſt égale à la ligne *IL*; car par la 6ᵉ Propoſition du 6ᵉ Livre, la baſe *BC*, eſt à la baſe *GH*, comme la baſe *DE*, à la baſe *IL*. On démontrera la même choſe ſur chacune des faces des deux pyramides; donc la tranche qui a *BC*, pour l'un de ſes côtés, eſt égale à la tranche qui a pour l'un de ſes côtés *GH*; donc les deux pyramides ſont égales en ſolidité.



COROLLAIRE.

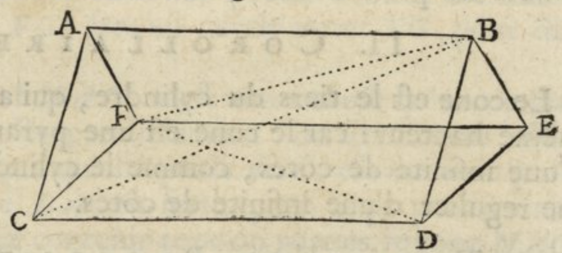
Les pyramides de même baſe ſont entre elles comme leurs hauteurs, & les pyramides de même hauteur ſont entre elles comme leurs baſes; d'où ſuit que:

Si pluſieurs pyramides priſes enſemble, ſont toutes de même hauteur chacune, qu'une autre pyramide dont la baſe ſoit égale à toutes les baſes des autres; cette derniere pyramide ſera égale en ſolidité à toutes les autres.

SECONDE PROPOSITION.

Tout priſme triangulaire peut être diviſé en trois pyramides égales en ſolidité, & par conſequent toute pyramide triangulaire eſt le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

Soit le priſme *ABEFCD*, couché ſur une de ſes faces, qui eſt le rectangle *CDEF*, & qui a pour ſes deux autres faces, les rectangles *ABCD*, *ABEF*. Soient chacun de ces trois rectangles diviſés par les Diagonales *DF*, *BC*, *BF*, il ſe forme par cette diviſion trois pyramides. L'une *FBCA*, l'autre *FEDB*, & l'autre *FCDB*. Ces trois pyramides ſont neceſſairement égales : car chacune des trois peut être conſiderée, comme ayant pour baſe la moitié d'un rectangle, c'eſt à dire un triangle, & pour hauteur la perpendiculaire de l'un ou l'autre des petits triangles égaux *ACF*, *BDE*.



Par exemple, la pyramide *FBCA*, a pour baſe le triangle *ABC*, & pour hauteur la perpendiculaire, qui tombe du ſommet *F*, ſur côté *AC*.

La ſeconde *FEDB*, a pour baſe le triangle *FED*, & pour perpendiculaire ou hauteur, celle qui tombe du point *B*, ſur le côté *DE*.

La troiſiéme a pour baſe le triangle *CDF*, & pour hauteur la même perpendiculaire. Ces trois pyramides ſont donc égales, en Solide & par conſequent le priſme triangulaire eſt égal à trois pyramides de même baſe & de même hauteur.

COROLLAIRE.

Ce que l'on vient de démontrer de la pyramide triangulaire à l'égard de ſon priſme, s'applique aiſément à toute autre pyramide Pentagonale, Hexagonale &c.

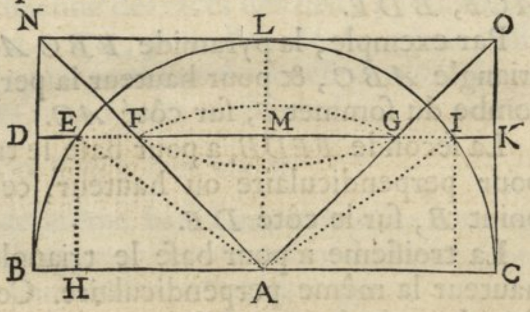
comparée avec un priſme de même genre, puiſque tout priſme peut être réduit en priſmes triangulaires, auſſi-bien que toute pyramide en pyramides triangulaires, & que toutes les baſes de ces Solides triangulaires priſes enſemble, étant égales à la baſe totale, les hauteurs égales, donnent une parfaite égalité de part & d'autre, en ſorte que toutes les pyramides triangulaires ſont égales à la totale. Tous les priſmes triangulaires égaux au priſme total, & par conſequent la pyramide totale, eſt le tiers du priſme total.

II. Corollaire.

Le cone eſt le tiers du cylindre, qui a même baſe & même hauteur: car le cone eſt une pyramide reguliere d'une infinité de côtés, comme le cylindre eſt un priſme regulier d'une infinité de côtés.

Troisième Proposition.

La ſolidité de la demi-Sphere, eſt égale aux deux tiers du cylindre, qui a même baſe & même hauteur.



Soit ſuppoſé un cylindre, ayant pour baſe un cercle dont le diametre ſoit *BAC*, & pour hauteur la ligne *BN*, moitié du diametre *BC*, terminée par la ligne *NLO*, égale au diametre *BC*, laquelle ligne *NLO*, eſt diametre du cercle oppoſé à la baſe du cylindre. Sur le plan du rectangle *BCON*, ſoit décrit le demi cercle *BLC*, repreſentant la demi-Sphere. Soit repreſenté un cone par le triangle *NAO*, lequel cone aura pour baſe un cercle ayant *NO*, pour diametre, & par conſequent égal à la baſe du cylindre, pour s'exprimer autrement, & aider l'imagination.

Suppoſons que le rectangle *BCON*, tourne ſur l'axe *LA*. La ligne *NB*, décrira la ſurface cylindrique ; le cercle *BLC*, décrira la demi-Sphere ; les lignes *NA*, *AO*, décriront le cone.

La ligne *LA*, eſt l'axe commun au cylindre, au cone & à la demi-boule. Soit encore tirée une ligne, comme *DK*, parallele à *BC* ; cette ligne *DK*, tournant autour de l'axe *LA*, décrira un cercle égal à la baſe du cylindre, & formera un plan qui coupera la demi-Sphere aux points *EI*, & le cone aux points *FG*. Il eſt viſible que la Section *FG*, ſera un cercle ayant *FG*, pour diametre.

Le cone total *NAO*, n'eſt autre choſe qu'une infinité de cercles poſés parallelement l'un ſur l'autre, dont la ſomme quelque qu'elle puiſſe être, eſt meſurée par la perpendiculaire *LA*, en ſorte que ſi la perpendiculaire *LA*, eſt ſuppoſée contenir 100000 parties, le cone *NAO*, aura 100000 cercles paralleles dans la ſolidité.

Conſiderons maintenant que ſi l'on ôte du cylindre, la ſolidité de la demi-Sphere, reſtera une eſpece d'écüelle, dont le profil, ou pour mieux dire, la Section eſt repreſentée par la figure *NBELC*. Cette écüelle dans ſa ſolidité, eſt compoſée d'une infinité de plans poſés parallelement l'un ſur l'autre, & qui environnent la Sphere en forme de couronnes ; par exemple. Quand la ligne *DK*, tourne ſur l'axe *LA*, & que ſa portion *FG*, décrit un des cercles du cone, ſa portion *DE*, ou *IK*, décrit autour de la Sphere, un plan qui l'entourre en forme de couronne, & qui a *DE*, pour largeur. Or l'écüelle contient neceſſairement dans ſa ſolidité, autant de couronnes, qu'il y a de cercles paralleles dans la ſolidité du cone, puiſque la ſomme en eſt meſurée par la même perpendiculaire *LA*, ou *NB*.

Si je puis donc faire voir que la couronne qui a *DE*, pour largeur, eſt égale en aire au cercle qui a *FG*, pour diametre, la même choſe s'enſuivra de toutes les autres couronnes, comparées avec leurs cercles correſpondans

dans le cone, & par consequent la somme totale des couronnes qui forment l'écüelle, sera égale à la somme totale des cercles qui forment le cone; donc la solidité de l'écüelle sera égale à la solidité du cone; ce qui étant une fois démontré, comme le cone *NAO*, est le tiers du cylindre *BCON*; l'écüelle en sera pareillement le tiers, & par consequent la demi-boulle en sera les deux tiers.

Je n'ay donc plus qu'à démontrer l'égalité de la couronne *DE*, & du cercle qui a *FG*, pour diametre; pour cela:

Du point *E*, soit menée la perpendiculaire *EH*, & soit tiré le raïon *EA*.

Il est visible que les lignes *DM*, *BA*, *EA*, sont égales; ainsi je puis prendre les unes pour les autres, toutes les fois qu'il me plaira.

De même les lignes *EH*, *MA*, *MF*, sont égales, parce que les lignes *AL*, *LN*, le sont aussi; je puis donc prendre pareillement les unes pour les autres.

Le triangle *EHA*, est rectangle; donc le cercle qui en aura l'hypotenuse pour raïon, sera égal aux deux cercles, qui auront pour raïon les lignes *EH*, *HA*, par le septiéme Corollaire de la troisiéme Proposition du neuviéme Livre.

Si donc du cercle qui a *AE*, pour raïon, j'ôte le cercle qui a *AH*, pour raïon, restera la valeur de l'aire du cercle qui a *EH*, pour raïon.

C'est à dire en prenant les lignes égales; si du cercle qui a *DM*, pour raïon, j'ôte le cercle qui a *EM*, pour raïon, restera la valeur du cercle qui a *FM* pour raïon.

Or quand j'ôte du cercle qui a *DM*, pour raïon, le cercle qui a *EM*, pour raïon, je forme la couronne qui a *DE*, pour largeur; donc cette couronne est égale à l'aire du cercle qui a *FM*, pour raïon.

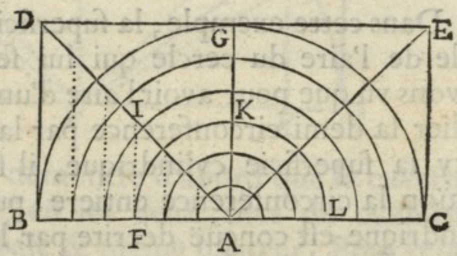
QUATRIE'ME PROPOSITION.

La superficie de la demie-Sphere, est égale à la superficie

perficie cylindrique de même baſe & de même hauteur.

Soit un rectangle *DBCE*, & du point *A*, milieu de ſa baſe, ſoient tirées les lignes *AD*, *DE*, & la perpendiculaire *AG*.

Si l'on fait tourner ce rectangle ſur ſon axe *AG*, les côtés décriront une ſurface cylindrique, & la ligne *AD*, décrira un cone.



Si du cylindre *DBCE*, vous ôtés la ſolidité du cone *DAE*, reſtera un eſpece d'entonnoir dont le profil, ou plûtôt la Section eſt repreſentée par la figure *DBAEC*.

Cet entonnoir eſt égal en ſolidité à la demi-Sphere *BGC*, puiſque l'un & l'autre eſt les deux tiers du cylindre dont le cone eſt le tiers.

Cela ſuppoſé, je diviſe par la penſée la demi-Sphere en une infinité de calottes, repreſentées par les cercles concentriques; je diviſe pareillement l'entonnoir en une infinité de ſuperficies cylindriques, toutes concentriques, c'eſt à dire, ayant *AG*, pour axe. Il eſt viſible qu'il y a autant de calottes dans la ſolidité de la demi-Sphere, qu'il y a de ſuperficies cylindriques dans l'entonnoir, puiſque le nombre quel qu'il ſoit, en eſt meſuré par le même raïon *AB*; il eſt viſible d'ailleurs que la grande ſuperficie cylindrique *BD*, eſt à la grande ſuperficie ſpherique *BGC*, comme la ſuperficie cylindrique *FI*, eſt à la ſuperficie ſpherique correſpondante *FKL*.

Or comme tout l'entonnoir eſt égal à toute la demi-Sphere, c'eſt à dire la ſomme des calottes égales à la ſomme des ſuperficies cylindriques, ſi la premiere calotte étoit plus grande ou moindre que la premiere ſuperficie cylindrique, chaque calotte ſeroit plus grande ou moindre que ſa ſuperficie cylindrique correſpondante, & le tout d'une part plus grand ou moindre que le tout de l'autre, contre la ſuppoſition; donc la premiere ſuperficie cylindrique eſt égale à la premiere ſuperficie ſpherique.

COROLLAIRE.

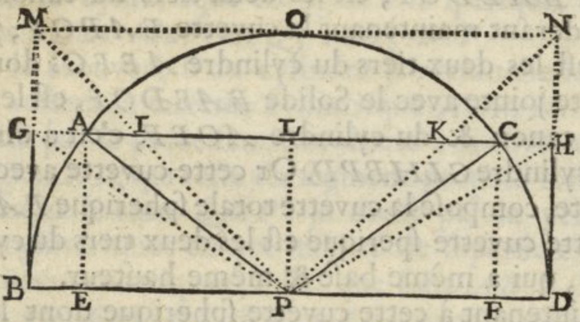
Dans cette exemple, la ſuperficie cylindrique eſt double de l'aire du cercle qui lui ſert de baſe. Car nous avons vû que pour avoir l'aire d'un cercle, il faut multiplier la demi-circonference par la Raiſon & pour avoir icy la ſuperficie cylindrique, il faut multiplier par le raïon la circonference entiere, puiſque la ſuperficie cylindrique eſt conçûë décrite par la circonference, coulant parallelement à elle-même le long du raïon; donc la ſuperficie de la demi-boulle qui lui eſt égale, eſt double de l'aire du cercle qui lui ſert de baſe.

II. COROLLAIRE.

La ſuperficie de la Sphere eſt quadruple de l'aire de ſon grand cercle, car la demi-Sphere ayant ſa ſuperficie double, la Sphere entiere a ſa ſuperficie quadruple de l'aire du même cercle. Voila cette merveilleuſe Propoſition que ſon premier Inventeur Archimede, ordonna qu'on écrivît ſur ſon tombeau.

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Si de la demi-Sphere repreſentée par *DOB*, l'on retranche le ſegment *COA*, formé par le plan *GH*, parallele au diametre *B D*; la ſolidité de la portion de Sphere reſtante *DCAB*, eſt égale aux deux tiers de Cylindre *GBDH*, plus la ſolidité du cone *CPA*, qui a pour baſe le cercle qui ſepare les deux ſegmens.



Pour le prouver, je démontre d'abord que la cuvette convexe *PBAPDC*, eſt les deux tiers du cylindre *GBDH*, qui a même baſe & même hauteur; Pour cela, je meine les Diagonalles *PM*, *PN*, & les perpendiculaires *AE*, *CF*; je meine de plus les lignes *PG*, *PH*. Premierement le cone *IPK*, eſt égal à la portion d'écüelle *GBA*, *HDC*; parce que chaque cercle dans le cone, ainſi qu'il a été démontré, eſt égal à chaque couronne correſpondante dans l'écüelle.

Si donc le cone *IPK*, eſt le tiers du canon *GBEAH DFC*, la portion d'écüelle *GBA*, *HDC*, ſera pareillement le tiers du canon, & par conſequent le Solide mixte *BAE*, *DCF*, ſera les deux tiers du canon. J'appelle canon, la ſolidité compriſe entre les deux ſuperficies cylindriques & concentriques par les lignes *GBAECFDH*, c'eſt à dire, pour m'exprimer autrement, ce qui reſte du cylindre *GBDH*, quand on en a retranché interieurement le cylindre *AECF*.

Il faut donc que je démontre d'abord que le canon eſt triple du cone *IPK*; or cela eſt aiſé à prouver, puiſque pour avoir leurs ſolidités, je multiplie la même aire par deux hauteurs dont l'une eſt triple de l'autre; car pour avoir la ſolidité du canon, je multiplie la couronne *GACH*, par la hauteur *GB*; & pour avoir la ſolidité du cone *IPK*, je multiplie l'aire du cercle *IK*, qui eſt égale à la couronne, ſeulement par le tiers de cette hauteur; donc ce cone eſt le tiers du canon; donc la ſolidité mixte *BAEDCF*, eſt les deux tiers du canon.

Conſiderant maintenant la cuvette *EAPCF*, je vois qu'elle eſt les deux tiers du cylindre *AEFC*; donc cette cuvette jointe avec le Solide *BAEDCF*, eſt les deux tiers du canon & du cylindre *ACEF*, c'eſt à dire, de tout le cylindre *GLHBPD*. Or cette cuvette avec le Solide mixte, compoſe la cuvette totale ſpherique *BAPCD*; donc cette cuvette ſperique eſt les deux tiers du cylindre *GHBD*, qui a même baſe & même hauteur.

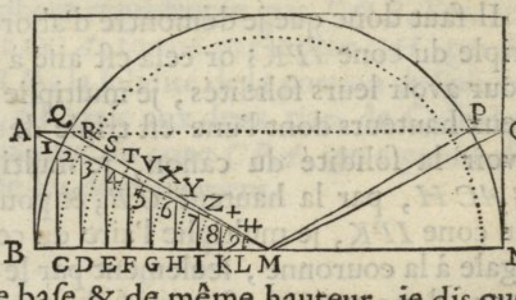
Si maintenant à cette cuvette ſpherique dont la ſolidité m'eſt connuë, j'ajoûte la ſolidité du cone *APC*, j'aurai la Solide du ſegment de Sphere en queſtion; donc tout ſegment de demi-Sphere ayant un grand cercle pour baſe, eſt égal aux deux tiers du cylindre de même baſe & de même hauteur que lui, plus le cone de même hauteur, qui a pour baſe le petit cercle qui forme le ſegment.

COROLLAIRE.

La cuvette ſpherique *BAPCD*, eſt égale en ſolidité à la cuvette cylindrique *GBPDH*, puiſque l'une & l'autre eſt les deux tiers du cylindre qui a même baſe & même hauteur.

SIXIE'ME PROPOSITION.

La ſuperficie d'une portion de demi-Sphere, eſt égale à la ſuperficie cylindrique du cylindre qui a même baſe & même hauteur.



Soit une portion de demi-Sphere *BQPNM*, dont le grand cercle qui lui ſert de baſe ait la ligne *BMN*, pour diametre, & ſoit le cylindre *BAON*, de même baſe & de même hauteur, je dis que la ſuperficie cylindrique eſt égale à la ſperique. Soient tirées les lignes *MA*, *MQ*, *MO*, *MP*.

Pour le prouver, ſi du cylindre je retranche le cone *AMO*, reſtera la cuvette cylindrique *ABMNO* égale en ſolidité par le précedent Corollaire à la cuvette ſpherique *QBMNP*, qui reſte du ſegment propoſé lorſqu'on en retranche le cone *QMP*; je diviſe par la penſée la cuvette cylindrique, en une infinité de ſuperficies cylindriques & concentriques, telles que ſont *AB*, 1*C*, 2*D*, 3*E*, 4*F*, 5*G*, 6*H*, 7*I*, 8*K*, 9*L*. Je diviſe auſſi par la penſée la cuvette ſpherique en une infinité de portions de ſuperficies ſpheriques & concentriques, telles que ſont *QB*, *RC*, *SD*, *TE*, *VF*, *XG*, *YH*, *ZI*, †*K*, ‡*L*.

Il eſt évident qu'il y a autant de ſuperficies cylindriques pour compoſer la cuvette cylindrique, que de ſuperficies ſpheriques pour compoſer la ſolidité de la cuvette ſpherique, parce que le nombre des ſuperficies cylindriques eſt meſuré par le rayon *BM*, & que le nombre des ſuperficies ſpheriques eſt meſuré par le même rayon. Si donc la premiere ſuperficie cylindrique étoit plus grande ou moindre que la premiere ſpherique, la ſeconde ſeroit plus grande ou plus petite que la ſeconde, & la totalité d'une part plus grande ou moindre que la totalité de l'autre; c'eſt à dire, la ſolidité de la cuvette cylindrique plus grande ou moindre que la ſolidité de la cuvette ſpherique, contre le Corollaire précedent; donc la premiere d'une part eſt égale à la premiere de l'autre, c'eſt à dire, la ſuperficie cylindrique *ABON*, égale à la ſuperficie ſpherique *QBNP*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

De la comparaiſon des Solides.

Comme nous avons eu beſoin pour la comparaiſon des plans, de la Raiſon de la Longueur à la Longueur, & de la Largeur à la Largeur, ce qui nous a obligés d'avoir recours à la Raiſon compoſée de deux Raiſons; icy étant obligés de comparer trois dimenſions, il faut neceſſairement considerer une Raison composée de trois Raisons.

DEFINITION.

Lorsqu'ayant trois Raisons, comme par exemple, la Raison de 1 à 3, la Raison de 2 à 7, la Raison de 4 à 5, je les dispose comme il suit, 1, 3. 2, 7. 4, 5. & que je multiplie les trois Antecedens l'un par l'autre, & les trois Consequens de même; il me vient deux nouveaux termes, comme 8, 105. Ces deux nouveaux termes forment une nouvelle Raison, qui est dite Raison composée des trois autres.

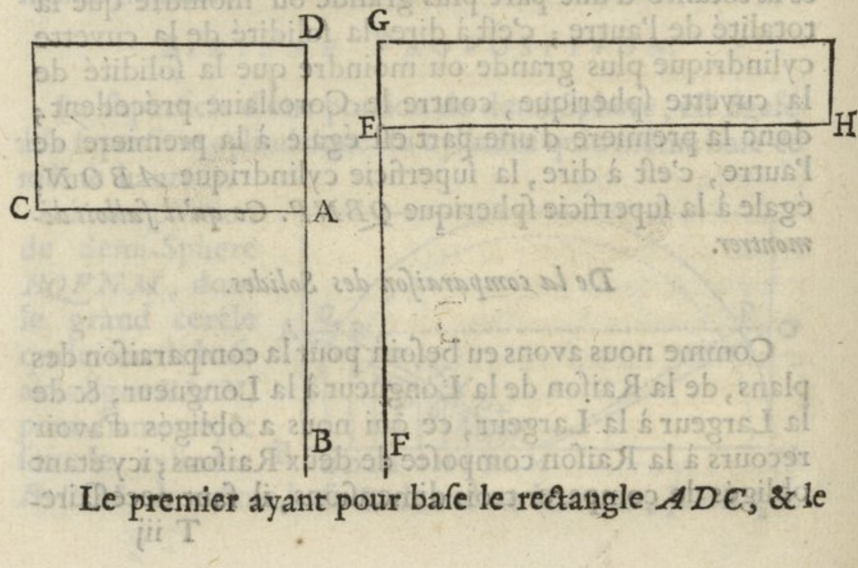
Si les trois Raisons composantes sont égales, comme par exemple,

1, 2. 3, 6. 4, 8.

La Raison qui sera composée de ces trois Raisons égales comme 12, 96, sera dite Raison triplée de la Raison de 1 à 2, ou de 3 à 6, qui est la même.

Il faut prendre garde à ne pas confondre la Raison triplée avec la Raison triple, car 12 & 96 sont en Raison triplée de 1 à 2, & non pas en Raison triple; ce seroit 12 & 72, qui seroient en Raison triple de 1 à 2.

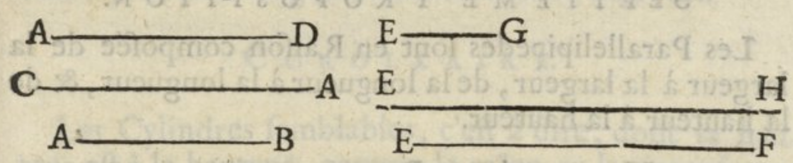
Maintenant considerons deux Parallelipipedes.



Le premier ayant pour base le rectangle *ADC*, & le ſecond pour baſe le rectangle *EGH*; le premier pour hauteur la ligne *AB*, & le ſecond pour hauteur la ligne *EF*.

Il eſt certain que pour avoir la ſolidité du premier Parallelipipede, je dois multiplier *AD*, par *AC*, pour avoir la baſe; puis multiplier ce produit par la hauteur *AB*, pour avoir la ſolidité, c'eſt à dire, que je dois multiplier les trois dimenſions l'une par l'autre, il en eſt de même de l'autre Parallelipipede.

Donc ſi je diſpoſe ces trois dimenſions d'une part, en ſorte qu'elles ſoient chacune l'Antecedent d'une Raiſon, & que d'autre part je diſpoſe les trois dimenſions du ſecond Parallelipipede, en ſorte qu'elles ſoient chacune le Conſequent d'une Raiſon; il eſt viſible que la Raiſon compoſée de ces trois Raiſons, ſera la même choſe que les deux Parallelipipedes, & par conſequent qu'elle m'en exprimera le rapport.



Voilà, par exemple, les trois Raiſons de *AD*, à *EG*, de *CA*, à *EH*, & de *AB*, à *EF*.

Les trois Antecedens *AD*, *CA*, *AB*, multipliés l'un par l'autre, donnent le premier Parallelipipede; & les trois Conſequens *EG*, *EH*, *EF*, donnent le ſecond.

D'où s'enſuit ſuivant nôtre définition, que le premier Parallelipipede, eſt au ſecond en Raiſon compoſée; de la Raiſon de la ligne *AD*, à la ligne *EG*; de la Raiſon de la ligne *CA*, à la ligne *EH*; & de la Raiſon de la ligne *AB*, à la ligne *EF*, c'eſt à dire, de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur, & de la hauteur à la hauteur.

Si ces trois Raiſons avoient été égales, c'eſt à dire, ſi la largeur avoit été à la largeur, comme la longueur à la longueur, & la hauteur à la hauteur, ces deux Parallelipipedes eussent été appellés Solides semblables, & auroient été l'un à l'égard de l'autre en Raison triplée de la largeur de l'un à la largeur de l'autre, ou de la hauteur à la hauteur, ou de la longueur à la longueur.

Si donc je sçai, par exemple, que la longueur de l'un, ou la largeur de l'un, ou la hauteur de l'un de ces deux Solides semblables, soit double de la longueur, de la largeur, ou de la hauteur de l'autre, je n'ay qu'à prendre la Raison triplée de 2 à 1, pour avoir tout d'un coup le rapport qui est entre leurs solidités ainsi.

2, 1. 2, 1. 2, 1.

Je multiplie les trois Antecedens l'un par l'autre, & les trois Consequens de même, vient la Raison 8, 1; d'où je connois que l'un de ces deux Parallelipipedes semblables est octuple de l'autre. Reduisons maintenant cecy en Propositions.

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Les Parallelipipedes sont en Raison composée de la largeur à la largeur, de la longueur à la longueur, & de la hauteur à la hauteur.

HUITIE'ME PROPOSITION.

Les Parallelipipedes semblables, sont en Raison triplée de leurs dimensions homologues. Cela est démontré.

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Les Prismes triangulaires sont entre eux comme les Parallelipipedes dont ils sont les moitiés. Cela n'a pas besoin d'explication.

DIXIE'ME PROPOSITION

Les Prismes triangulaires semblables sont entre eux en Raison triplée de leurs dimensions homologues. Cela est démontré.

COROL.

COROLLAIRE.

Tous les Priſmes ſemblables Pentagonaux, Hexagones, &c. ſont entre eux en Raiſon triplée de leurs dimenſions homologues, car ils peuvent être reduits en Priſmes triangulaires.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Les Pyramides ſemblables ſont entre elles en Raiſon triplée de leurs dimenſions homologues, car étant le tiers de leurs Priſmes, elles ſont entre elles en même Raiſon.

DOUZIE'ME PROPOSITION.

Les Cylindres ſont entre eux en Raiſon compoſée de la baſe à la baſe & de la hauteur à la hauteur: car ce ſont des Priſmes reguliers d'une infinité de côtés.

COROLLAIRE.

Les Cylindres ſemblables, c'eſt à dire, dont la hauteur eſt à la hauteur, comme le raïon ou la circonference de la baſe, eſt au raïon ou à la circonference de l'autre baſe, ſont entre eux en Raiſon triplée de leurs dimenſions homologues.

II. COROLLAIRE

Les Cones ſemblables ſont entre eux en Raiſon triplée de leurs dimenſions homologues, car ils ſont en même Raiſon que les cylindres dont ils ſont le tiers.

III. COROLLAIRE.

Les Spheres ſont entre elles en Raiſon triplée de leurs raïons; car ces Spheres ſont chacune les deux tiers d'un cylindre, & ces cylindres ſont ſemblables, puiſque la hauteur eſt à la hauteur, comme le diametre de la baſe de l'un, au diametre de la baſe de l'autre, &

comme la circonference de la baſe à la circonference.

En un mot, tous les Corps ou Solides ſemblables de même genre, ſont entre eux en Raiſon triplée de leurs dimenſions homologues.

Ainſi ſi l'on me preſente, par exemple, deux boulets de canon, tels que le Raïon de l'un ſoit double du raïon de l'autre; je vois d'abord que la ſolidité du plus gros, ſera octuple de la ſolidité du moindre; car il faut prendre la Raiſon triplée de 1 à 2.

1, 2. 1, 2. 1, 2.

La multiplication des trois Antecedens, donne 1, & celle des trois Conſequens donne 8, ainſi j'ay 1, 8. pour Raiſon triplée de la Raiſon des raïons.

On expliquera aiſément par-là, pourquoi un gros boulet, toutes proportions gardées, va beaucoup plus loin qu'un moindre; car ſi le boulet de huit livres eſt ſuppoſé partir avec la même vîteſſe que le boulet d'une livre, il faut qu'il ait huit fois autant de mouvement que le petit; puiſqu'ayant huit fois autant de peſanteur, il faut une force octuple pour le mouvoir avec la même rapidité.

Mais en même temps qu'il a huit fois autant de peſanteur, ſa ſurface n'eſt que quadruple de la ſurface du petit boulet, par le ſecond Corollaire de la quatriéme Propoſition de ce Livre, puiſque ces deux ſurfaces ſont entre elles comme les aires des grands cercles, & que ces aires ſont en Raiſon doublée des raïons, c'eſt à dire, comme 1 eſt à 4.

Or les corps qui ſe meuvent, ne perdent de leur mouvement, qu'à proportion de ce qu'ils en communiquent à ceux qui les environnent, & ils n'en communiquent qu'à proportion de leurs ſurfaces.

Si donc le boulet de huit livres eſt ſuppoſé dans une ſeconde de temps avoir perdu quatre degrés de mouvement des huit qu'il avoit, le petit boulet dont la ſurface eſt le quart de l'autre ſurface, aura pendant la même ſeconde, perdu un degré de mouvement, qui eſt tout ce qu'il en avoit. Ainſi quand il a perdu tout le ſien, l'autre en conſerve encore la moitié de ce qu'il avoit en partant.

Pour faire encore quelque uſage de ce que nous venons de dire ſur les Solides, conſiderons le globe terreſtre.

La circonference d'un de ſes grands cercles, eſt de 9000 lieuës, c'eſt à dire, de 25 lieues par degré, ſuivant les Obſervations aſtronomiques.

Or la circonference d'un cercle eſt à ſon diametre à peu prés comme 22 eſt à 7, ſuivant la proportion aſſignée par Archimedes, & à laquelle il faut s'arrêter pour l'uſage, quoiqu'on pût approcher toûjours de plus en plus de la préciſion, mais ſans y pouvoir jamais arriver.

Donc le raïon de la terre, eſt environ de 1431 lieues.

Si donc je multiplie 4500 lieuës moitié de la circonference par 1431 qui eſt le raïon, viendra au produit 6439500 lieuës pour l'aire du grand cercle.

Le quadruple de cette ſomme qui eſt 25758000 lieuës, ſera la ſurface du globe terreſtre par le ſecond Corollaire de la quatriéme Propoſition de ce Livre.

Que ſi je veux en avoir la ſolidité; je multiplie l'aire du grand cercle par 2863 lieuës, qui eſt le diametre; vient au produit 18429849000 lieuës, qui eſt la ſolidité d'un cylindre de même baſe, & de même hauteur.

Je prens les deux tiers de cette ſomme, qui ſont 12286566000 lieuës, & c'eſt la ſolidité du globe terreſtre par la troiſiéme Propoſition de ce Livre.

Si je veux maintenant comparer le globe terreſtre avec celui du Soleil, dont le raïon eſt cent fois plus grand que celui de la terre. Je ſçay d'abord que leurs ſurfaces ſont en Raiſon doublée de leurs raïons; or la Raiſon doublée de 1 à 100, eſt 1, 10000; donc la ſurface du Soleil, eſt dix mille fois plus grande que celle de la terre, c'eſt à dire, qu'elle eſt de 257580000000 lieuës.

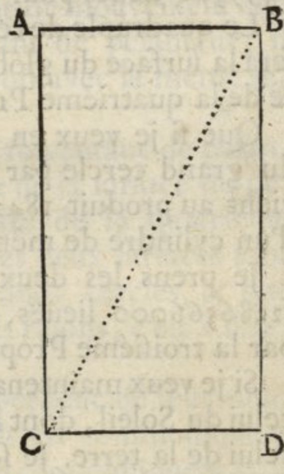
Je ſçai de plus que leur ſolidité eſt en Raiſon triplée de leurs raïons.

Or la Raiſon triplée de 1 à 100, eſt 1, 1000000; donc la ſolidité du Soleil contient un million de fois la ſolidité de la terre, c'eſt à dire, que la ſolidité du Soleil contient 122865660000000000 lieues.

AVERTISSEMENT.

On vient de voir de quelle utilité eſt la Geometrie des indiviſibles pour l'explication des Solides. Ceux qui auront la curioſité de porter leurs ſpeculations plus avant; ne ſeront pas fâchés de voir les Propoſitions ſuivantes, qui ouvrent un champ infini, pour arriver aux plus ſublimes verités de la Geometrie.

Pour entendre bien clairement ce qui ſuit; il faut ſe ſouvenir; que nous conſiderons les ſurfaces, comme compoſées de lignes paralleles; & que nous conſiderons les Solides, comme compoſés de ſurfaces.



Par exemple, en conſiderant le rectangle *ABCD*, je le ſuppoſe compoſé d'autant de lignes paralleles à *CD*, qu'il y a de points dans la ligne *AC*, & ma ſuppoſition ne ſçauroit manquer d'être vraye, puiſque ſi l'on ſuppoſe la ligne *CD*, coulant parallelement à ſoi-même, elle parcourera tous les points de la ligne *AC*, pour arriver au point *A*, & décrira la ſuperficie du rectangle.

Or cette ligne *CD*, & toutes ſes paralleles qui rempliſſent la ſurface du rectangle, ſont appellés les Elemens de la figure, qui ſont tous égaux entre eux.

Si au lieu de conſiderer le rectangle, je conſidere le triangle *BDC*; je puis ſuppoſer que ſa ſuperficie eſt remplie par la baſe *CD*, coulant parallelement à ſoi-même juſques en *B*, mais à meſure que la baſe *CD*, avance vers le point *B*, elle perd toûjours de sa longueur, en sorte que la superficie du triangle est remplie par des paralleles toutes inégales entre elles, & qui sont cependant appellées les Elemens du Triangle.

Or il est visible, qu'y ayant autant de points dans la ligne *BD*, que dans la ligne *AC*; il y a autant d'élemens, ou si vous voulés, de paralleles dans le triangle, que dans le rectangle; mais les Elemens du triangle décroissant toûjours; il ne faut pas s'étonner si sa surface est moindre que celle du rectangle, dont les élemens ne décroissent point.

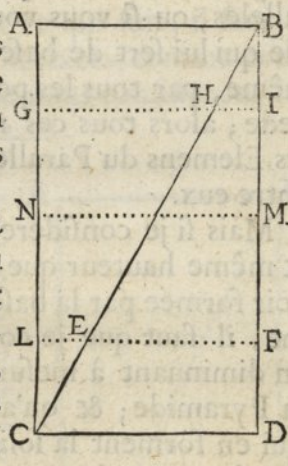
De même on peut considerer un Parallelipipede rectangle, comme composé d'une infinité de rectangles paralleles, ou si vous voulés, comme formé par le rectangle qui lui sert de base, & qui coule parallelement à soi-même, par tous les points de la hauteur du Parallelipipede; alors tous ces rectangles paralleles sont appellés les Elemens du Parallelipipede, & sont aussi tous égaux entre eux.

Mais si je considere une Pyramide ayant même base & même hauteur que le Parallelipipede. Pour la concevoir formée par la base coulant parallelement à elle-même, il faut que je conçoive que cette base va toûjours en diminuant à mesure qu'elle approche du sommet de la Pyramide; & qu'ainsi tous ces rectangles paralleles qui en forment la solidité, sont veritablement en même nombre que les rectangles du Parallelipipede, parce que la hauteur est la même; mais qu'allant toûjours en diminuant, la solidité de la Pyramide doit être moindre que celle du Parallelipipede. Ces rectangles diminuant dans une certaine Proposition, sont appellés les Elemens de la Pyramide.

Ainsi le nombre infini des superficies spheriques, qui composent la solidité d'un Globe ou Sphere, & qu'on suppose passer par tous les points du raïon de la Sphere, & aller toûjours en diminuant jusques au centre, seront nommés les Elemens de la Sphere; il est aisé d'appliquer ces considerations aux Cylindres, aux Cones, aux Prismes, &c.

PROPOSITION.

Si l'on a deux Figures, deux Solides, en un mot deux Grandeurs homogenes à comparer l'une avec l'autre, & que ces deux Figures, ou Solides étant de même hauteur, les élemens de l'une ne décroissent point, pendant que les élemens de l'autre décroîtront toûjours dans la même Raison que les hauteurs; la Figure ou Solide, dont les élemens ne décroissent point, sera double de la Figure ou Solide dont les élemens décroissent en même Raison que les hauteurs.



Soit, par exemple, le rectangle *ABCD*, dont les élemens soient *CD*, *LF*, *GI*, égaux entre eux, aussi-bien que tous ceux qu'on doit supposer passer par tous les points de la hauteur *AC*.

Soit le triangle *BDC*, dont la hauteur soit *BD*, égale à celle du rectangle; que ses élemens soient *CD*, *EF*, *HI*, il est visible que l'élement *CD*, est à l'élement *EF*, comme la hauteur *BD*, est à la hauteur *BF*, & que l'élement *CD*, est à l'élement *HI*, comme la hauteur *BD*, est à la hauteur *BI*; ainsi il est évident que les élemens du triangle décroissent en même Raison que les hauteurs.

Je dis que le rectangle est double du triangle; cela est évident, mais voicy la démonstration generale par rapport à la proportion des élemens.

Soit prise la ligne *BI*, égale à la ligne *CL*, & soient tirées les lignes *GI*, *LF*.

Les triangles *BIH*, *CLE*, sont semblables à cause des paralleles; donc à cause de l'égalité des lignes *BI*, *CL*, la ligne *HI*, eſt égale à la ligne *LE*; donc deux lignes, ou ſi vous voulés, deux élemens du triangle, comme *EF*, *HI*, pris enſemble ſont égaux au ſeul élement du rectangle *LF*; ce que l'on démontrera de même de deux élemens quelconques du triangle également diſtans des points *B*, *D*; cela étant, puiſqu'il y a autant de lignes paralleles dans la ſurface du triangle, que dans la ſurface du rectangle, à cauſe de l'égalité des hauteurs, & qu'il faut deux lignes du triangle pour égaler une ligne du rectangle, toutes les lignes du triangle priſes enſemble, ne ſçauroient valoir que la moitié de toutes les lignes du rectangle priſes enſemble; & comme toutes ces lignes priſes enſemble ne different pas des ſurfaces, il s'enſuit que la ſurface du rectangle eſt double de l'autre.

Cela ſe peut démontrer encore autrement par la proprieté de la progreſſion Arithmetique. On ſçait, par exemple, que dans la progreſſion Arithmetique 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. ou telle autre, comme 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. ſi l'on prend deux termes également éloignés du terme du milieu, leur ſomme ſera égale à deux autres termes également éloignés du milieu; dans la premiere progreſſion, 1, 7, ſont également éloignés du milieu, 4. 2, 6, ſont auſſi également éloignés du même milieu, 4. Il eſt évident que la ſomme des deux premiers, qui eſt 8, eſt égale à la ſomme des deux derniers, & de même dans telle autre progreſſion Arithmetique que l'on voudra choiſir.

Cela ſuppoſé, ſi l'on conçoit la ligne *BD*, hauteur des grandeurs à comparer, diviſée en tel nombre de parties égales que l'on voudra, à meſure que l'on montera de la baſe *CD*, vers le ſommet *B*, la hauteur décroîtra, ſuivant la progreſſion Arithmetique, c'eſt à dire, que la diminution ſe fera toûjours par parties égales.

D'ailleurs les élemens du triangle étant toûjours proportionnels à la hauteur, décroîtront auſſi par conſequent en progreſſion Arithmetique. Par exemple, ſi la hauteur *BF*, comparée à la hauteur *BD*, eſt diminuée d'une cinquiéme partie, l'élement *E F*, comparé à l'élement *C D*, ſera pareillement diminué d'une cinquiéme partie.

Or dans nôtre figure, le premier terme de la progreſſion, eſt la baſe *C D*, le dernier terme eſt le point *B*, ou pour mieux dire, zero, leſquels termes ſont également éloignés du milieu *M*, *N*; donc deux termes quelconques de la progreſſion, ou, ſi vous voulés, deux élemens quelconques du triangle également éloignés du milieu pris enſemble, ſont égaux à la baſe *CD*, & comme le rectangle contient autant de lignes égales à *C D*, qu'il y a de termes ou d'élemens dans le triangle, il ſuit évidemment que toutes les lignes, comme *C D*, priſes enſemble, c'eſt à dire, la ſurface du rectangle, eſt double de toutes les lignes du triangle priſes enſemble, c'eſt à dire, de ſa ſurface. Cette démonſtration eſt generale.

I. COROLLAIRE.

La ſuperficie cylindrique dont la hauteur eſt égale au raïon du cercle qui lui ſert de baſe, eſt double de l'aire de ce cercle.

La ſuperficie cylindrique contient autant de circonferences égales à celles de ſa baſe, qu'il y a de points dans ſa hauteur, ou, ſi vous voulés, dans le raïon de cette baſe: car on la conçoit formée par cette baſe coulant parallelement à ſoi-même par tous les points de la hauteur; ainſi les élemens de la ſuperficie cylindrique ne décroiſſent point.

L'aire du cercle qui ſert de baſe, eſt composée d'autant de circonferences concentriques qu'il y a de points dans le raïon, ainſi l'aire de ce cercle a pareil nombre d'élemens que la ſuperficie cylindrique.

Mais toutes ces circonferences concentriques, à meſure qu'elles approchent de leur centre, décroiſſent Arithmetiquement, c'eſt à dire, par parties égales, & en même Raiſon que leurs raïons, puiſque toutes circonferences ſont

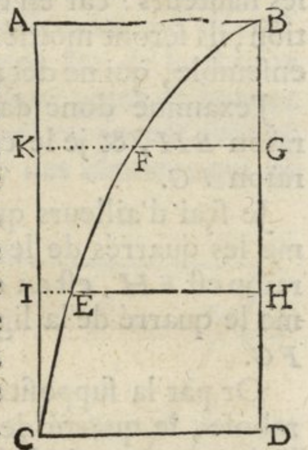
ſont entre elles comme leurs raïons; Donc par la précedente Propoſition, tous les élemens de la ſuperficie cylindrique pris enſemble, ſont doubles de tous les élemens de l'aire du cercle pris enſemble; donc cette ſuperficie cylindrique eſt double de l'aire du cercle qui lui ſert de baſe.

II. COROLLAIRE.

Le fuſeau parabolique eſt la moitié du cylindre de même baſe & de même hauteur.

Quoique cette Propoſition ne ſoit point élementaire, nous ne laiſſons pas de la mettre, pour faire voir l'uſage immenſe de nos indiviſibles.

On appelle Parabole en Geometrie, une eſpece de Ligne courbe, comme *CEFB*, que l'on ſuppoſe avoir la proprieté ſuivante; ſçavoir, ayant la ligne *DB*, qui tombe perpendiculairement au point *B*, ſur la courbe, & qu'on appelle l'Axe de la Parabole, ſi de deux points quelconques de la Parabole, comme *E*, *F*, l'on meine deux perpendiculaires, comme *FG*, *EH*, ſur l'Axe, le quarré de la ligne *EH*, ſera au quarré de la ligne *FG*, comme la portion d'Axe *BH*, à la portion d'Axe *BG*. Cette proprieté eſt ſuppoſée conſtituer la nature de la Parabole.



J'acheve maintenant le rectangle *ABCD*, dans l'aire duquel nôtre Parabole *CEFB*, ſe trouve décrite, & je ſuppoſe que ce rectangle tourne ſur l'Axe immobile *BD*; ce rectangle ainſi tournant décrira un cylindre, qui aura pour baſe un cercle dont le raïon ſera *CD*, & pour hauteur la ligne *BD*.

La Parabole cependant tournant autour du même Axe immobile, décrira un corps ſolide terminé en pointe, au ſommet B, qui aura pour baſe le même cercle que le cylindre, & c'eſt ce Solide que j'appelle Fuſeau Parabolique.

Je dis que la ſolidité de ce Fuſeau, eſt moitié de la ſolidité du cylindre.

La ſolidité du cylindre contient autant de cercles égaux à ſa baſe, qu'il y a de points dans la ligne BD; ainſi les élemens du cylindre ne décroiſſent point.

La ſolidité du Fuſeau contient autant de cercles paralleles à la baſe, qu'il y a de points dans la même ligne BD; ainſi il y a autant de cercles ou d'élemens dans le Fuſeau, qu'il y en a dans le cylindre; mais ces cercles ou élemens du Fuſeau, vont toûjours en décroiſſant: il n'y a donc plus qu'à examiner s'ils décroiſſent en même Raiſon, que les hauteurs: car en ce cas, par la précedente Propoſition, ils ſeront moitié de tous les cercles du cylindre pris enſemble, qui ne décroiſſent point.

J'examine donc dans ce Fuſeau le cercle qui a pour raïon EH, & je le compare avec le cercle qui a pour raïon FG.

Je ſçai d'ailleurs que les cercles ſont entre eux comme les quarrés de leurs raïons; donc le cercle dont le raïon eſt EH, eſt au cercle dont le raïon eſt FG, comme le quarré de la ligne EH, eſt au quarré de la ligne FG.

Or par la ſuppoſition & ſuivant la proprieté de la Parabole, le quarré de la ligne EH, eſt au quarré de la ligne FG, comme la hauteur BH, à la hauteur BG.

Donc le cercle qui a pour raïon EH, eſt au cercle qui a FG, pour raïon, comme la hauteur BH, eſt à la hauteur BG.

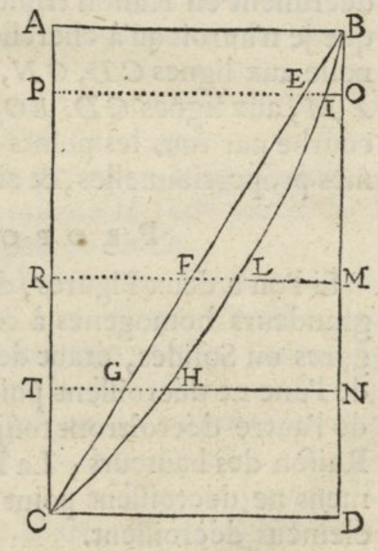
Donc les cercles ou élemens qui compoſent le Fuſeau, décroiſſent en même Raiſon que les hauteurs; donc le Fuſeau Parabolique eſt moitié du cylindre.

Il eſt viſible que l'eſpece d'entonnoir qui reſte lors que de la ſolidité du cylindre, l'on ôte le Fuſeau Parabolique, eſt égale à ce Fuſeau, puiſque le Fuſeau eſt moitié du cylindre ; & comme ils ont même hauteur, ſçavoir, le Fuſeau la ligne *BD*, & l'entonnoir la ligne *CA*; ils ont l'un & l'autre même nombre d'élemens ; d'où s'enſuit ſans autre démonſtration, que la couronne, qui a pour largeur la ligne *IE*, que je ſuppoſe autant éloignée de la baſe de l'entonnoir *AB*, que la ligne *FG*, eſt éloignée de *CD*, baſe du Fuſeau ; eſt égale au cercle qui a *FG*, pour diametre, puiſque ce cercle eſt l'élement du Fuſeau, correſpondant à la couronne, pareil élement de l'entonnoir.

Juſques à preſent nous avons conſideré les grandeurs dont les élemens décroiſſent en même Raiſon que les hauteurs.

Mais on peut conſiderer des élemens qu décroîtront en Raiſon doublée des hauteurs.

On peut même conſiderer des élemens qui décroîtront en Raiſon triplée, quadruplée &c. de la Raiſon des hauteurs ; & ces ſpeculations n'ont point de bornes. Il s'agit maintenant d'examiner quel rapport la ſomme de ces élemens aura avec la ſomme des élemens qui ne décroiſſent point.



Je ſuppoſe le rectangle *ABCD*, diviſé en deux triangles par la Diagonale *BC*.

Les lignes *CD*, *TN*, *RM*, *PO*, *AB*, ſont élemens du rectangle.

Les lignes *CD*, *GN*, *FM*, *EO*, ſont élemens du triangle *BDC*, correſpondans aux élemens du rectangle. Nous avons vû qu'ils décroiſſent arithmetiquement, c'eſt à dire, que *CD*, eſt à *GN*, comme *BD*, eſt à *BN*; que *CD*, eſt à *FM*, comme

BD, eſt à *BM*; que *CD*, eſt à *EO*, comme *BD*, eſt à *BO*.

Maintenant, ſi aux deux lignes *CD*, *GN*, je cherche une troiſiéme proportionnelle; c'eſt à dire, ſi je fais, comme *CD*, eſt à *GN*, ainſi *GN*, a une troiſiéme ligne, & que cette ligne ſoit *NH*; il eſt certain par ce qui a été cy-devant enſeigné dans les proportions, que les lignes *CD*, *HN*, ſeront en Raiſon doublée, de la Raiſon de *CD*, à *GN*, ou de *BD*, à *BN*, & qu'ainſi la ligne *HN*, décroîtra à l'égard de la ligne *CD*, en Raiſon doublée des hauteurs *BN*, *BD*.

Je fais la même choſe à l'égard de tous les élemens du triangle, par exemple, je cherche une troiſiéme proportionnelle aux lignes *CD*, *FM*, que je ſuppoſe être *LM*, je cherche de même une troiſiéme proportionnelle aux lignes *CD*, *EO*, que je ſuppoſe être *IO*, & ainſi de tous les autres élemens du triangle. Par tous les points comme *H*, *L*, *I*, je meine la courbe *CHLIB*, & j'ay pour lors l'eſpace mixte *CHLIBD*, dont les élemens décroiſſent en Raiſon doublée des hauteurs.

Que ſi je voulois avoir une eſpace dont les élemens décrûſſent en Raiſon triplée des hauteurs, il eſt viſible que je n'aurois qu'à chercher une quatriéme proportionnelle aux lignes *CD*, *GN*, *HN*, aux lignes *CD*, *FM*, *LM*, aux lignes *CD*, *EO*, *IO*, &c. & mener une ligne courbe par tous les points déterminés par ces quatriémes proportionnelles, & ainſi à l'infini.

PROPOSITION.

Si l'on a deux Figures, deux Solides, en un mot deux grandeurs homogenes à comparer, & que ces deux Figures ou Solides, étant de même hauteur, les élemens de l'une ne décroiſſent point, pendant que les élemens de l'autre décroîtront toûjours en Raiſon doublée de la Raiſon des hauteurs; La Figure ou Solide, dont les élemens ne décroiſſent point, ſera triple de celle dont les élemens décroiſſent.

La démonſtration ordinaire eſt fort embroüillée ; en voicy une par Arithmetique, qui eſt plus à la portée de de tout le monde.

Je ſuppoſe deux figures de même hauteur, & que cette hauteur ſoit diviſée en vingt parties égales ; les nombres 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, qui décroiſſent arithmetiquement, repreſentent les hauteurs décroiſſantes de la figure.

Pour faire que l'une de ces deux figures ait ſes élemens décroiſſant en Raiſon doublée des hauteurs, il faut prendre les quarrés de ces nombres ; ſçavoir, 400, 361, 324, 289, 256, 225, 196, 169, 144, 121, 100, 81, 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1, 0 ; dont la ſomme eſt 2870.

A l'égard de la figure dont les élemens ne décroiſſent pas, il faut prendre 400, quarré du plus grand nombre qui eſt l'élement de la baſe, autant de fois qu'on a pris d'élemens décroiſſans en Raiſon doublée, c'eſt à dire, 21 fois ; la ſomme de ces élemens non décroiſſans ſera 8400.

Le nombre 8400 repreſente donc la figure dont les élemens ne décroiſſent point, & le nombre 2870, repreſente la figure dont les élemens décroiſſent en Raiſon doublée des hauteurs.

Or le nombre 2870 eſt tant ſoit peu plus du tiers du nombre 8400 ; car ſon triple eſt 8610, qui excede 8400, de 210 ; c'eſt à dire, qu'en cet exemple, la figure décroiſſant excede le tiers de la totale de la 120^e^ partie de la totale, ce qui eſt déja fort peu de choſe.

Mais ſi au lieu de diviſer la hauteur en vingt parties égales, je l'avois diviſée en 100, & que j'euſſe operé, comme je viens de faire ſur les vingt parties, j'aurois approché beaucoup plus prés de la préciſion ; car la ſomme des quarrés depuis 100 juſques à 1 incluſivement, eſt 338350 ; la ſomme du grand élement qui eſt 10000 pris cent & une fois, eſt 1010000 ; ainſi la figure dont les élemens décroiſſent, n'excede le tiers de la figure totale que de 1683, c'eſt à dire, de la ſix centiéme partie de la figure totale. Et ſi je veux prendre la peine de diviſer la hauteur en un million de parties, je trouveray que la figure décroiſſante n'excedera pas le tiers de la totale d'une ſix mille milliéme partie de la totale; en ſorte que pouſſant toûjours plus loin la diviſion de la hauteur, je réduirai cette difference à une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée, d'où s'enſuit la parfaite égalité entre la figure décroiſſante & le tiers de la totale, en ſuppoſant le nombre des élemens indéfini, comme il l'eſt en effet.

Il n'y a qu'à ſuivre la même methode pour démontrer, que ſi les élemens décroiſſent en Raiſon triplée des hauteurs, la figure décroiſſante ſera le quart de la figure non décroiſſante.

Que ſi les élemens décroiſſent en Raiſon quadruplée des hauteurs, la figure décroiſſante ſera la cinquiéme partie de la figure non décroiſſante, & ainſi à l'infini. Voilà une belle carriere ouverte à la meditation.

I. COROLLAIRE.

Le cone eſt le tiers du cylindre de même baſe & de même hauteur: car les élemens du cylindre ne décroiſſent point. Ceux du cone, qui ſont des cercles paralleles, ſont entre eux comme les quarrés de leurs raïons. Or ces raïons étant entre eux, comme les hauteurs, les quarrés des raïons ſont en Raiſon doublée des hauteurs; donc ces cercles ou élemens décroiſſent en Raiſon doublée des hauteurs; donc leur ſomme totale qui eſt la ſolidité du cone, eſt le tiers de la ſolidité du cylindre.

La même choſe s'enſuit évidemment pour la pyramide à l'égard du priſme de même baſe & de même hauteur.

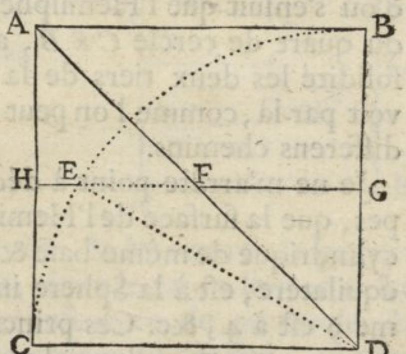
II. COROLLAIRE.

Si la derniere figure cy-deſſus eſt ſuppoſée tourner ſur l'axe immobile *BD*, le rectangle *ABCD*, décrira un cylindre, la courbe *CHLIB*, décrira une eſpece de cone concave ; je dis que ſa ſolidité ſera la cinquiéme partie de la ſolidité du cylindre.

Il n'y a qu'à démontrer que les élemens de ce cone décroiſſent en Raiſon quadruplée des hauteurs. Cela eſt facile.

Ce cone a pour élemens, des cercles paralleles ; j'en choiſis deux, dont les Raïons ſont par exemple *CD*, *LM*. Ces cercles ſont entre eux en Raiſon doublée des lignes *CD*, *LM*, qui ſont elles-mêmes par la nature de la courbe, & ſuivant la conſtruction en Raiſon doublée des hauteurs *BD*, *BM*. Or la Raiſon doublée d'une Raiſon doublée eſt une Raiſon quadruplée, par exemple, la Raiſon doublée de 1 à 2, eſt 1, 4 ; la Raiſon doublée de 1 à 4, eſt 1, 16, qui eſt quadruplée de 1, à 2 ; donc les cercles qui ont pour raïons les lignes *CD*, *LM*, ſont en Raiſon quadruplée des hauteurs *BD*, *BM*. La même choſe ſe démontrera de tous les autres élemens ; donc leur ſomme totale qui eſt le cone concave, eſt la cinquiéme partie du cylindre ; dont les élemens ne décroiſſent point.

III. COROLLAIRE.



Etant donné le quarré *ABCD*, ſa Diagonale *AD*, & le quart de cercle *CEB* ; ſi l'on fait tourner la figure ſur l'axe immobile *BD*, la ligne *AD*, décrira un cone ; les côtés *CA*, *AB*, & le quart de cercle *CEB*, décriront une eſpece d'écüelle ; je dis que l'écüelle eſt égale au cone.

Car l'écüelle & le cone ont même baſe, ſçavoir, un cercle dont le raïon eſt *AB* ; ils ont de plus même hauteur, ſçavoir, les lignes

AC, *DB*. Il n'y a plus qu'à démontrer que tous leurs élemens ſont égaux chacun à chacun, par exemple, que la couronne qui a *HE*, pour largeur, eſt égale au cercle qui a *FG*, pour raïon. Or il n'y a rien de plus facile.

A cauſe du triangle rectangle *EGD*, ſi du quarré *ED*, ou de *HG*, ſon égale, j'ôte le quarré de *EG*; reſte le quarré de *GD*, ou de *FG*, ſon égale.

C'eſt à dire, ſi du quarré de *HG*, j'ôte le quarré de *EG*, reſte le quarré de *FG*.

Or les cercles ſont entre eux comme le quarré des raïons.

Donc ſi du cercle qui a *HG*, pour raïon, j'ôte le cercle qui a *EG*, pour raïon, j'aurai le cercle qui a *FG*, pour raïon.

Et par conſequent la couronne qui a *HE*, pour largeur, n'étant autre choſe que ce qui reſte; lorſque du cercle qui a *HG*, pour raïon, l'on ôte le cercle qui a *EG*, pour raïon, cette couronne eſt manifeſtement égale au cercle qui a *FG*, pour raïon. On démontrera la même choſe de tel autre élement qu'on voudra choiſir; donc l'écüelle eſt égale au cone, qui par le Corollaire premier eſt le tiers du cylindre; donc l'écüelle eſt le tiers du cylindre formé par la révolution du quarré *ABCD*; d'où s'enſuit que l'Hemiſphere formé par la révolution du quart de cercle *CEB*, autour de l'axe *BD*, eſt en ſolidité les deux tiers de la ſolidité du cylindre. L'on voit par-là, comme l'on peut aller aux mêmes verités par differens chemins.

Je ne m'arrête point à déduire de ces mêmes principes, que la ſurface de l'Hemiſphere eſt égale à la ſurface cylindrique de même baſe & même hauteur; qu'un cone équilatere, eſt à la Sphere inſcrite dans ſa ſolidité, comme 9 eſt à 4, &c. Ces principes ſont ſi feconds, qu'on pourroit en tirer des volumes entiers de conſequences. Il ſuffit d'avoir montré le chemin à ceux qui voudront exercer leur eſprit.

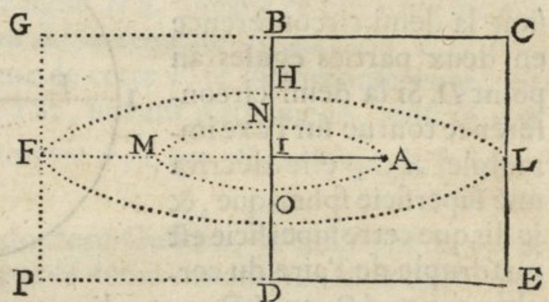
Mais afin de donner icy les élemens des principales methodes

methodes qui ont été inventées pour meſurer les grandeurs & particulierement les Solides, il faut dire un mot de la fameuſe découverte du Pere Guildin Jeſuite, touchant l'admirable proprieté du centre de gravité.

On appelle centre de gravité d'une quantité quelconque, ſoit Ligne, Surface, ou Solide, un point dans cette quantité, autour duquel toutes les parties de cette même quantité ſont dans un parfait équilibre; par exemple, ſi une ſurface quarrée eſt poſée ſur la pointe d'une éguille, il n'y a qu'un ſeul point dans cette ſurface où elle puiſſe reſter ſans incliner de côté ni d'autre, & ce point eſt appellé le Centre de gravité.

De même le centre de gravité d'une ligne droite, eſt le point du milieu de cette ligne, par lequel, ſi on la ſupposoit ſuſpenduë, elle n'inclineroit ni d'un côté ni d'autre.

Ce n'eſt pas toûjours une choſe aiſée, que de trouver geometriquement le centre de gravité de certaines grandeurs; mais il y en a une infinité; donc on le trouve trés-facilement: Et voicy l'uſage qu'en a fait ce ſçavant Religieux.



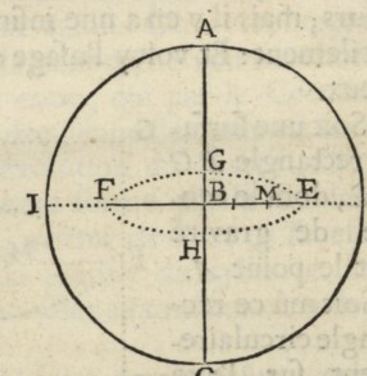
Soit une ſurface rectangle *BCDE*, dont le centre de gravité ſoit le point *A*.

Soit mû ce rectangle circulairement ſur l'axe immobile *BD*, ce rectangle décrira un cylindre, & le centre de gravité décrira le cercle *MNAO*, dont le raïon ſera *AI*. Le Pere Guildin appelle la circonference de ce cercle, la Voïe de la Circulation du centre de gravité; ou tout court, la Voïe de Circulation.

Il démontre, que ſi l'on prend une ligne droite égale à la Voïe de Circulation, pour hauteur d'un Parallelipipede dont le rectangle *BCDE*, soit la base, ce Parallelipipede sera égal au cylindre.

Il démontre de même que la ligne *GP*, décrivant la surface cylindrique, & le point *F*, centre de gravité de cette ligne, décrivant le cercle *FHLO*; si l'on prend une ligne droite égale à cette circonference, & qu'on en fasse un rectangle avec la ligne *GP*, ce rectangle sera égal à la superficie cylindrique.

Ceux qui voudront cultiver cette methode, s'appercevront aisément de son immense fecondité, non seulement pour mesurer toutes les surfaces & tous les Solides ordinaires; mais pour en mesurer une infinité où les autres methodes demeurent le plus souvent tout court : il nous suffit icy d'avoir indiqué ce beau principe, dont on peut voir, si l'on veut, une trés-ample explication dans le cours de Mathematiques du Pere de Challes; & nous allons seulement en donner un exemple qui fera juger du reste.



Soit une demi-circonference *ADC*; son diametre *AC*; & le raïon *BD*, divisant la demi-circonference en deux parties égales au point *D*. Si la demi-circonference tourne sur l'axe immobile *AC*, elle décrira une superficie spherique, & je dis que cette superficie est quadruple de l'aire du cercle, qui a *AC*, ou *ID*, pour diametre.

Il faut commencer par avoir le centre de gravité de la demi-circonference *ADC*; & il ne faut pas s'imaginer que ce soit le point *D*: car si l'on se represente cette demi-circonference portée au point *D*, par une éguille perpendiculaire à l'horison, en telle sorte que la demi-circonference soit parallele à l'horison, on conçoit aisément que cette demi-circonference ne pourra rester dans cette ſituation, & que les extremités *A*, *C*, deſcendront & feront tourner la demi-circonference ſur le point immobile *D*. Ce que l'on appelle donc le Centre de gravité de la demi-circonference, eſt un point, comme *E*, dans le raïon *BD*, en telle ſorte que ſuppoſant le raïon *BD*, ſans peſanteur, ſi ce point *E*, eſt poſé ſur une éguille perpendiculaire à l'horiſon, la demi-circonference demeure parallele à l'horiſon ſans incliner de côté ni d'autre. Or l'on démontre dans la Statique, que pour avoir ce centre de gravité, ou autrement la ligne *BE*; il faut trouver une troiſiéme proportionnelle au quart de cercle *AD*, & au raïon *BD*; c'eſt à dire, que comme le quart de cercle *AD*, eſt au rayon *BD*; ainſi *BD*, eſt à *BE*. Cela ſuppoſé.

Je donne à la demi-circonference *ADC*, 44 parties.

Par la proportion d'Archimede, le diametre *ID*, en aura 28.

Le demi diametre en aura 14.

Le quart de cercle *AD*, en aura 22.

Je fais donc comme 22 à 14; ainſi 14 à $8 + \frac{10}{11}$ qui eſt la ligne *BE*; cette ligne *BE*, ſuivant ce qui a été dit cydeſſus, eſt le rayon de la voye de circulation *EHFG*. Pour avoir la valeur de cette voye ou circonference, je fais comme 7, eſt à 22, ſuivant Archimede, ainſi $16 + \frac{20}{11}$ qui en eſt le diametre à 56, qui eſt la valeur de la voye de circulation.

Par le principe du Pere Guildin, je multiplie la voye de circulation 56 par la demi-circonference *ADC*, qui eſt 44, vient au produit 2464, qui doit être la valeur de la ſuperficie ſpherique. Voyons maintenant ſi elle eſt quadruple de l'aire du grand cercle.

Pour avoir l'aire de ce cercle, l'on multiplie ſa demi-circonference 44 par le demi-diametre 14, vient pour l'aire 616, dont le quadruple eſt préciſément 2464. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Et ſi au lieu de conſiderer ſeulement la demi-circonference *ADC*, nous conſiderons le demi-cercle *ABCDA*, comme tournant ſur l'axe immobile *AC*, ſa ſurface décrira une Sphere ; je dis que ſa ſolidité ſera les deux tiers de la ſolidité du cylindre, qui aura pour baſe un grand cercle de la Sphere, & pour hauteur, ſon diametre.

Car multipliant la demi-circonference 44 par le raïon 14, vient 616 pour l'aire du cercle, laquelle multipliée par le diametre 28, donne 17248 pour la ſolidité du cylindre ; dont les deux tiers ſont $11498 + \frac{2}{3}$.

Or par les principes de la Statique ; pour avoir le centre de gravité *M*, de l'aire du demi-cercle, il faut diviſer la ligne *BE*, en trois parties & en prendre deux à compter du centre *B* ; ainſi la ligne *BM*, ſera les deux tiers de $8 + \frac{10}{11}$, c'eſt à dire, $\frac{196}{33}$ le double $\frac{392}{33}$ ſera le diametre de la voye de circulation, laquelle ſera $\frac{8624}{231}$; multipliant donc l'aire de la demi-circonference, 308, ſuivant le principe du Pere, par $\frac{8624}{231}$, vient au produit la ſolidité de la Sphere, & ce produit eſt préciſément $11498 + \frac{2}{3}$.

On voit par cet exemple, avec quelle facilité l'on reſout ce Problême admirable, dont la découverte a immortaliſé le Grand Archimede.

TRIGONOMETRIE.

PAr ce mot de Trigonometrie, nous n'entendons pas ſeulement la meſure de tout triangle donné ; Mais encore pluſieurs operations qui ſe font par le moyen de triangles, & qui ſervent à meſurer une infinité de grandeurs. Ce que nous avons dit dans les Elemens, donne une ſi grande facilité, que tout ſe réduit icy à s'en bien ſouvenir ; & à fort peu de Propoſitions.

PREMIERE PROPOSITION.

Qui connoît dans un triangle, deux angles & un côté, ou deux côtés & un angle, connoît tout le reste.

Premierement, qui connoît deux angles connoît le troisiéme, parce que les trois ensemble valent deux angles droits.

Or trois angles connus & un côté, donnent les deux autres côtés : car par la 9^e Proposition du 8^e Livre, comme le Sinus de l'angle opposé au côté connu, est à ce côté; ainsi le Sinus de l'un ou l'autre des deux autres angles, est au côté qui lui est opposé. Or nous enseignerons bientôt la maniere de connoître le Sinus de tout angle donné ; donc qui connoît deux angles & un côté, connoît tout le reste.

Secondement, si l'on connoît deux côtés du triangle & un angle, je dis qu'on connoîtra l'autre côté & les deux autres angles.

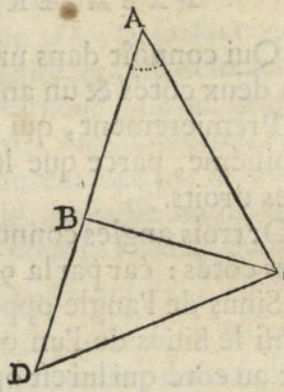
Car ou l'angle donné sera opposé à l'un des côtés connus, ou non.

Si l'angle donné est opposé à l'un des côtés donnés, il faudra dire; comme un côté connu est au Sinus de l'angle qui lui est opposé, ainsi l'autre côté connu, est au Sinus de l'angle qui lui est opposé : on connoîtra donc ce dernier Sinus, & par consequent son angle; voilà deux angles pour lors connus; d'où s'ensuivra la connoissance du troisiéme, & ensuite la connoissance du troisiéme côté.

Que si l'angle donné est compris par les deux côtés connus, cet angle sera droit, aigu, ou obtus.

Si cet angle est droit, il n'y a qu'à prendre la somme des quarrés des côtés donnés, cette somme sera égale au quarré de la base; ainsi tirant la racine quarrée de cette somme, l'on aura la base, & par consequent les deux autres angles.

Si l'angle donné est aigu, comme est icy l'angle *CAD*, & que les côtés *CA*, *AD*, soient connus; je meine de l'extremité *C*, la perpendiculaire *CB*, & je forme par-là le triangle rectangle *CAB*; dont je connois les trois angles & le côté *AC*; ainsi par ce qui vient d'être dit, je connoîtrai le côté *AB*, & la perpendiculaire *CB*.

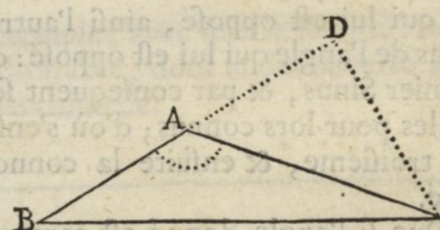


J'ôte le côté *AB*, du côté connu *AD*, me reste *BD*, connu.

Considerant maintenant le triangle rectangle *DBC*, j'en connois l'angle droit & les côtés *BD*, *CB*; donc j'en connoîtrai la base *DC*; dont le quarré est égal au quarré des deux côtés. Je connois donc à present les trois côtés du triangle *CAD*, & un angle, d'où s'ensuit que je connoîtrai facilement les deux autres.

Mais si l'angle donné est obtus, comme est icy l'angle *CAB*, & que les côtés *CA*, *AB*, soient connus.

Soit prolongé un des côtés, comme *BA*, jusques en *D*, en sorte que de *C*, extremité de l'autre côté, l'on puisse mener sur le côté prolongé, la perpendiculaire *CD*.



Alors considerant le triangle rectangle *CDA*, il est aisé de voir qu'on en connoît les trois angles & un côté: car l'angle en *D*, est droit par construction; l'angle *CAB*, étant donné, son complement *CAD*, sera connu, & par consequent le troisiéme *ACD*; le côté *AC*, est donné; donc par ce qui a été dit, l'on aura le côté *CD*, & le côté *DA*.

Ajoûtant maintenant le côté *DA*, au côté donné *AB*, on aura *DB*, connu; ainſi dans le triangle rectangle *CDB*, l'on connoît le côté *CD*, & le côté *DB*; d'où l'on connoîtra aiſément la baſe *BC*; dont le quarré eſt égal au quarré des deux côtés, ainſi qu'il a été dit tant de fois.

L'on connoîtra donc les trois côtés du triangle *CAB*, avec un angle, d'où il ſera aiſé de connoître les deux autres; ainſi la Propoſition eſt démontrée dans tous les cas.

SECONDE PROPOSITION.

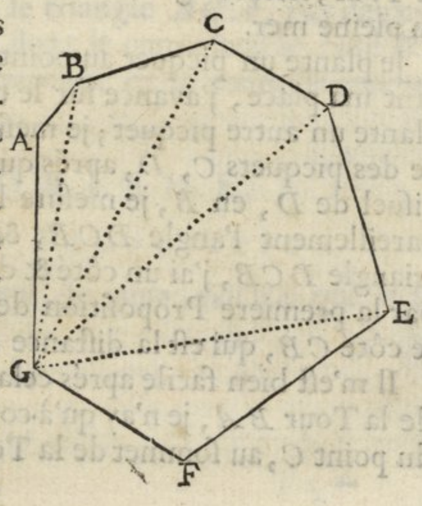
Etant donné les trois côtés d'un triangle; trouver les trois angles.

Il n'y a qu'à mener la perpendiculaire dont la valeur ſera connuë par la 19ᵉ Propoſition du 8ᵉ Livre; cette perpendiculaire diviſera le triangle total en deux triangles rectangles, dans chacun deſquels on connoîtra deux côtés & l'angle droit, & par conſequent tout le reſte.

Car comme un côté donné eſt au Sinus de l'angle droit, ainſi la perpendiculaire connuë au Sinus de l'angle oppoſé.

TROISIE'ME PROPOSITION, PROBLEME.

Meſurer la ſurface du Lac *ABCDEFG*.



Je meſure avec une toiſe tous les côtés; puis avec un quart de cercle exactement diviſé, je meſure tous les angles de la figure; je plante des picquets à chacun des ſommets de ces angles, afin de pouvoir de loin les reconnoître plus exactement. Aprés quoi choiſiſſant, par exemple, le ſommet *G*; je conduis mon rayon viſuel aux points *B*, *C*, *D*, *E*, & je mesure les angles *AGB*, *BGC*, *CGD*, *DGE*, *EGF*; cela fait, je trouve la surface du Lac divisé en cinq triangles, dans chacun desquels je connois deux côtés & un angle, & par consequent les trois côtés; la perpendiculaire & l'aire de chacun de ces cinq triangles, dont la somme me donne la surface cherchée.

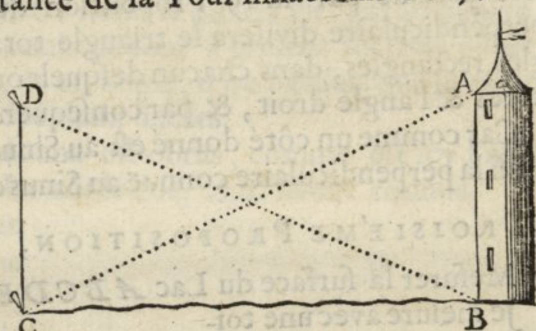
Si cette surface étoit supposée être celle d'un reservoir également profond par tout, il n'y auroit qu'à la multiplier par la profondeur, pour avoir ce que le reservoir contiendroit en solidité.

PROBLEME,

QUATRIE'ME PROPOSITION.

Mesurer la distance de la Tour innaccessible *A*, *B*.

Je suppose que je suis scitué au point *C*, & que je veux sçavoir quelle distance il y a du point *C*, au point *B*, qui est le pied de la Tour, scituée en pleine mer.



Je plante un picquet au point *C*, ensuite de quoi quittant ma place, j'avance sur le terrain au point *D*, où je plante un autre picquet; je mesure exactement la distance des picquets *C*, *D*, aprés quoi conduisant mon rayon visuel de *D*, en *B*, je mesure l'angle *CDB*; je mesure pareillement l'angle *DCB*, & par consequent dans le triangle *DCB*, j'ai un côté & deux angles connus; donc par la premiere Proposition de ce Livre, je connoîtrai le côté *CB*, qui est la distance cherchée.

Il m'est bien facile aprés cela de connoître la hauteur de la Tour *BA*, je n'ay qu'à conduire mon rayon visuel du point *C*, au sommet de la Tour *A*, & mesurer l'angle *BCA*;

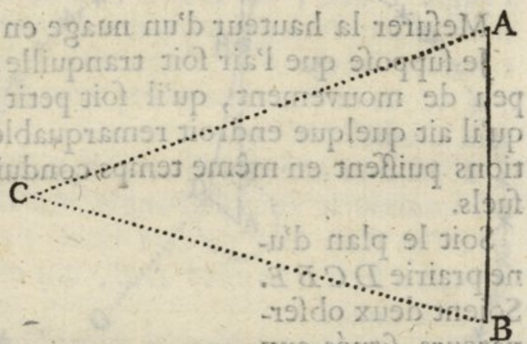
BCA; j'aurai dans le triangle *BCA*, deux angles connus, à cause de l'angle en *B*, que je suppose droit, le côté *CB*, m'est aussi connu; je connoîtrai donc le reste, & par consequent le côté *BA*, qui est la hauteur de la Tour.

Par ce Problême il est aisé de mesurer la largeur d'une riviere, d'un détroit &c.

PROBLEME,

CINQUIE'ME PROPOSITION.

Mesurer la longueur du pan de muraille inaccessible *AB*.

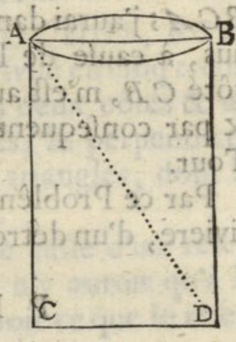


Je suppose que je suis situé au point *C*, d'où je conduis mes raïons visuels aux points *A*, *B*; je mesure par le Problême précedent la distance *CA*, & la distance *CB*; je mesure aussi l'angle *BCA*, formé par mes deux raïons visuels; cela fait, dans le triangle *BCA*, j'ay deux côtés & un angle connu; donc je connoîtrai le côté *BA*, qui est la longueur cherchée de la muraille inaccessible.

PROBLEME,

SIXIE'ME PROPOSITION.

Mesurer la profondeur du puits *ABCD*, que je suppose vuide d'eau.



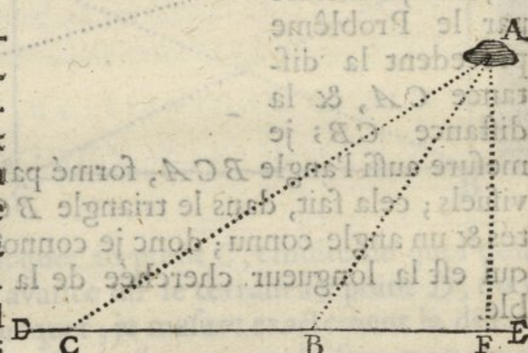
Je mesure le diametre de sa largeur *AB*, je conduis un raïon visuel du point *A*, au point *D*, & je connois dans le triangle *DBA*, l'angle droit *DBA*, & le côté *AB*, que j'ay mesuré. Je mesure l'angle *BAD*; ainsi je connoîtrai le côté *DB*, qui est la profondeur cherchée.

PROBLEME,

SEPTIE'ME PROPOSITION.

Mesurer la hauteur d'un nuage en l'air.

Je suppose que l'air soit tranquille, que le nuage ait peu de mouvement, qu'il soit petit, bien terminé, & qu'il ait quelque endroit remarquable où deux observations puissent en même temps conduire leurs raïons visuels.



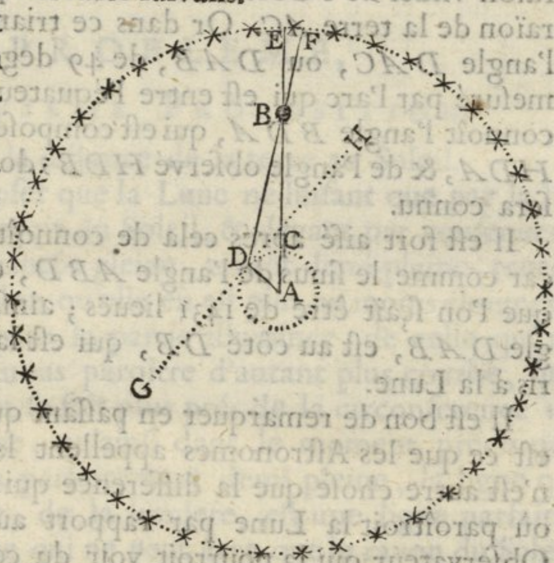
Soit le plan d'une prairie *DCBE*. Soient deux observateurs situés aux points *C*, *B*, chacun ayant son quart de cercle, observera dans le même instant le même bord du nuage *A*; Celui qui est en *B*, mesurera l'angle *EBA*, d'où l'on connoîtra l'angle *CBA*; l'observateur en *C*, observera l'angle *BCA*, dans le même instant : Ensuite l'on mesurera la distance *CB*, & l'on connoîtra dans le triangle *CBA*, le côté *CB*, & deux angles, ainsi l'on connoîtra le côté *BA*. Puis dans le triangle rectangle *BFA*, l'on aura l'angle droit connu, l'angle mesuré *EBA*, & le côté connu *BA*, d'où l'on connoîtra le côté *AF*, qui sera l'élevation perpendiculaire du nuage.

PROBLEME,

HUITIÉME PROPOSITION.

Mesurer la distance de la terre à la Lune.

Nous choisissons cet exemple, pour faire connoître tout d'un coup l'utilité de la Trigonometrie dans les Sciences les plus sublimes; il faut icy supposer qu'on sçache assés de ce qu'on appelle communément la Sphere pour entendre les termes suivans.



Que le grand cercle soit un meridien du firmament; le petit cercle, un meridien terrestre correspondant au celeste, c'est à dire, en même plan. Que le point *A*, soit le centre de la terre; que *C*, soit un point du meridien terrestre, directement posé sous l'équateur, & que *D*, soit un point du même meridien representant Paris, c'est à dire, éloigné du point *C*, de 49 degrés. Que la petite boulle *B*, represente le corps de la Lune. Soient supposés deux Astronomes situés; l'un au point *C*; l'autre au point *D*, qui soient convenus entre eux, d'observer regulierement tous les jours le corps de la Lune au moment qu'elle passera par leur meridien; & de se communiquer ensuite leurs observations.

Supposons que celui qui est situé au point *C*, sous l'équateur, ait écrit à l'autre, que le 21. Mars la Lune *B*, se trouva précisément au dessus de sa tête, c'est à dire, ayant le centre dans son Zenith, & que nôtre Astronome de Paris, ait observé dans le même instant l'angle *HDB*, qui represente l'élevation de la Lune *B*, par dessus l'horison de Paris, dont la ligne *GH*, est le diametre.

Il se forme le triangle *BDA*, composé du raïon visuel *DB*, qui est celui de l'Observateur de Paris, du raïon de la terre *DA*, & de la ligne *AB*, qui est le raïon visuel de l'Observateur situé au point *C*, joint au raïon de la terre *AC*. Or dans ce triangle l'on connoît l'angle *DAC*, ou *DAB*, de 49 degrés, puisqu'il est mesuré par l'arc qui est entre l'équateur & Paris. L'on connoît l'angle *BDA*, qui est composé de l'angle droit *HDA*, & de l'angle observé *HDB*; donc l'angle *ABD*, sera connu.

Il est fort aisé aprés cela de connoître tout le reste; car comme le sinus de l'angle *ABD*, est au côté *AD*, que l'on sçait être de 1431 lieuës; ainsi le sinus de l'angle *DAB*, est au côté *DB*, qui est la distance de Paris à la Lune.

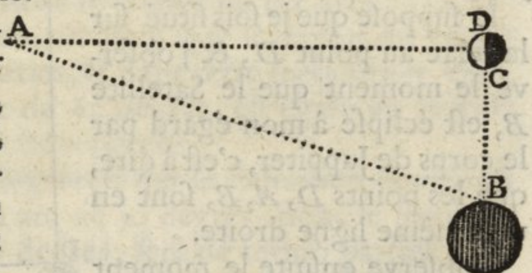
Il est bon de remarquer en passant que l'angle *ABD*, est ce que les Astronomes appellent la Parallaxe, qui n'est autre chose que la difference qui est entre le point où paroîtroit la Lune par rapport au firmament à un Observateur qui la pourroit voir du centre de la terre, & le point où elle paroîtroit dans le firmament à un autre Observateur, qui la regarderoit d'un point de la surface terrestre. Par exemple, le raïon visuel partant du centre de la terre, & passant par le centre de la Lune se termine au point *E*, dans le firmament, au lieu que le raïon *DB*, partant de la surface se termine dans le firmament au point *F*. Or il est visible que l'angle *EBF*, est opposé au sommet à l'angle *ABD*, & par consequent lui est égal; d'ailleurs il n'y a point de difference par rapport au raïon visuel, entre observer un astre du centre de la terre, ou l'obſerver quand il paſſe dans le Zenith. Il eſt encore trés-évident que plus un aſtre eſt éloigné de la terre, moins il a de parallaxe ; ainſi obſervant les étoiles par la methode que nous venons de donner, l'on trouvera que les rayons viſuels ſe confondent & ne forment aucun angle de parallaxe. C'eſt pourquoi nous pouvons ſuppoſer leur diſtance ſi grande qu'il nous plaira, ſi d'autres raiſons nous y obligent. Le Soleil lui-même ne fait point de parallaxe ſenſible, tant il eſt éloigné de nous, & c'eſt ce qui oblige à recourir à la methode ſuivante pour meſurer ſon éloignement.

PROBLEME,

NEUVIE'ME PROPOSITION.

Déterminer la diſtance de la terre au Soleil.

Il faut ſuppoſer que la Lune ne luiſant que par la lumiere qu'elle reçoit du Soleil, & devant par conſequent nous paroître tantôt pleine, tantôt demi-pleine, tantôt en croiſſant, ſelon qu'elle en eſt plus ou moins éloignée ; la ligne qui ſepare la partie illuminée, de celle qui ne l'eſt pas, doit nous paroître d'autant plus courbe, que cette ſeparation ſe fait plus prés de la circonference viſible de la Lune ; qu'ainſi dans le moment précis que nous la voyons parfaitement demi-pleine, la ligne qui ſepare l'ombre, de la lumiere, eſt une ligne parfaitement droite ; ce qui ne peut être que le rayon du Soleil, ne faſſe un angle droit avec le rayon viſuel qui va de nôtre œil à la Lune.



Icy, par exemple, l'Obſervateur ſitué au point *B*, voyant la Lune *C*, préciſément demi-pleine ; le rayon *AC*, partant du Soleil *A*, pour illuminer la Lune, fait neceſſairement un angle droit, avec *BC*, rayon viſuel de l'Obſervateur; autrement la Lune lui paroîtroit plus ou moins que demi-pleine; or dans le moment que la Lune paroît demi-pleine, & qu'avec d'excellentes Lunettes, la ligne *CD*, qui ſepare l'ombre, de la lumiere, paroît parfaitement droite; il eſt fort aiſé de meſurer avec un bon inſtrument l'angle *CBA*; c'eſt à dire, la diſtance en degrés de la Lune au Soleil, par rapport à l'Obſervateur; donc l'on connoîtra dans le triangle rectangle *BCA*, l'angle *BAC*, auquel eſt oppoſé le côté *BC*, qui eſt ſuppoſé connu, & qui eſt la diſtance de la terre à la Lune; ainſi comme le ſinus de l'angle *BAC*, eſt à *BC*; de même le ſinus de l'angle droit eſt à *BA*, diſtante de la terre au Soleil.

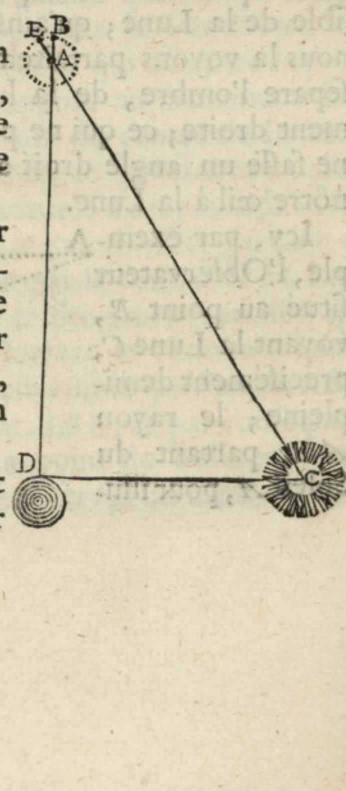
Les obſervations qu'on a faites avec d'excellens inſtrumens depuis la découverte des Lunettes d'approche, nous ont appris que l'angle *BAC*, eſt ſi petit, que la diſtance de la terre au Soleil, eſt au moins de trente millions de lieuës communes.

DIXIÉME PROBLEME.

Meſurer la diſtance de la terre à Juppiter.

Il faut ſuppoſer que l'on ſçache le temps qu'un des Satellites de Juppiter employe à faire ſa revolution autour de cette planete.

Suppoſons, par exemple, en cette figure, que le Satellite *B*, employe 42 heures à décrire le petit cercle ponctué autour de Juppiter *A*.



Je ſuppoſe que je ſois ſitué ſur la terre au point *D*, & j'obſerve le moment que le Satellite *B*, eſt éclipſé à mon égard par le corps de Juppiter, c'eſt à dire, que les points *D*, *A*, *B*, ſont en une même ligne droite.

J'obſerve enſuite le moment auquel ce même Satellite par ſon mouvement propre avançant vers *E*, perdra ſa lumiere en entrant dans l'ombre que forme le corps de Juppiter au point *E*, où il intercepte les raiſons du Soleil *C*, c'eſt à dire, que j'obſerve le moment où les points *C A E*, ſont dans une même ligne droite.

Cela étant puiſque le Satellite employe 42 heures à faire ſon tour, ſçachant le temps qu'il a employé depuis *B*, juſques en *E*, je ſçaurai la grandeur de l'arc *B E*. Je ſuppoſe qu'il y ait employé ſix heures; l'arc *B E*, ſera la ſeptiéme partie de la circonference, comme ſix heures ſont la ſeptiéme partie de 42, ainſi dans le triangle *ACD*, je connoîtrai l'angle *C A D*, oppoſé au ſommet à l'angle *B A E*, que je viens de meſurer par mon obſervation; Je meſurerai l'angle *A D C*, qui eſt la diſtance en degrés du centre du Soleil *C*, au centre de Juppiter *A*; donc le troiſiéme angle me ſera connu. Et d'ailleurs je connois le côté *D C*, diſtance de la terre au Soleil, je connoîtrai donc tout le reſte, c'eſt à dire, *D A*, diſtance de la terre à Juppiter; & même *AC*, diſtance de Juppiter au Soleil.

Tout ce que nous avons dit dans cettte Trigonometrie, ſuppoſe les ſinus calculés; ainſi il eſt neceſſaire de connoître la methode par laquelle on a fait ce calcul.

Conſtruction de la Table des Sinus, Tangentes, & Secantes.

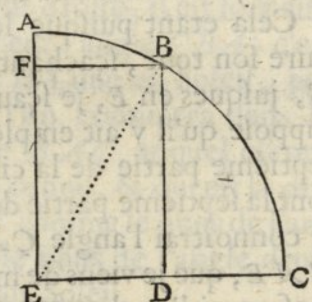
Il faut ſe ſouvenir que le Sinus d'un arc, eſt moitié de la corde qui ſoûtient le double de cet arc.

L'on ſuppoſe ordinairement que le rayon du cercle contient 100000 parties, & dans cette ſuppoſition, comme la corde de l'arc de 60 degrés, eſt égale au rayon, elle ſera auſſi de 100000 parties.

La corde de 60 degrés eſt par la définition double du Sinus de l'angle, ou arc de 30 degrés; donc le Sinus de l'arc ou angle de 30 degrés, ſera de 50000 parties.

PROBLEME PREMIER.

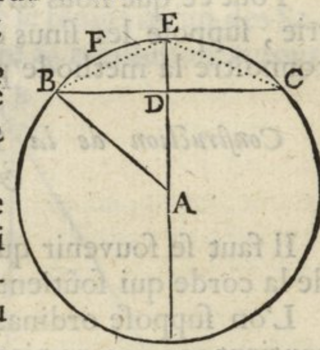
Etant donné le Sinus d'un arc; trouver le Sinus du complement de cet arc; par exemple, étant donné le Sinus de 30 degrés; trouver le Sinus de 60.



Le Sinus donné *FB*, forme avec *BD*, ou son égale *FE*, un angle droit, dont *EB*, rayon, est la base; or *BD*, est Sinus de l'arc *BC*, qui est le complement de l'arc donné *AB*; ainsi si du quarré de *EB*, c'est à dire, si du quarré de 100000 j'ôte le quarré de *BF*, c'est à dire, le quarré de 50000, restera le quarré de *BD*; dont la racine quarrée sera le Sinus de l'arc *BC*, de 60 degrés.

PROBLEME SECOND.

Etant donnée une corde; trouver la corde qui soûtient la moitié de l'arc de la corde donnée.



Soit la corde donnée *BC*, & qu'il faille trouver la corde *BE*, qui soûtient l'arc *BFE*, moitié de l'arc *BFEC*, que soûtient la corde donnée.

Du centre *A*, soient tirés le rayon *AB*, & le rayon *AE*, qui couppera la corde perpendiculairement, & par la moitié au point *D*, par la premiere Proposition du troisiéme Livre.

Il se forme par-là deux triangles rectangles; sçavoir, *EDB*, *BDA*. *BD*, est donnée puisque c'est la moitié de la corde donnée.

Si du quarré du rayon *BA*, j'ôte le quarré *BD*, restera le quarré de *DA*.

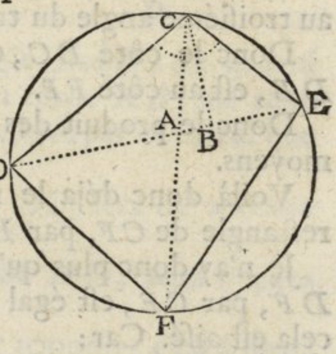
Donc

Donc sa racine *DA*, m'est connuë, & par consequent *DE*, qui avec *DA*, est égale au rayon.

Maintenant, si au quarré de *BD*, je joins le quarré de *DE*, me viendra le quarré de *BE*, & par consequent la ligne *BE*, elle-même que je cherchois.

PROBLEME TROISIE'ME.

Etant donnée une corde ; trouver la corde qui soûtient le double de l'arc soûtenu par la corde donnée.



La resolution de ce Problême, suppose la Proposition suivante.

En tout quadrilatere inscrit au cercle, le rectangle des deux Diagonalles est égal à la somme des deux rectangles sous les côtés opposés.

Il faut démontrer que le rectangle de la Diagonalle *CF*, par la Diagonalle *DE*, est égal aux rectangles de la ligne *DC*, par la ligne *EF*, & de la ligne *DF*, par la ligne *CE*.

Soit menée la ligne *CB*, en telle sorte que l'angle *BCE*, soit égal à l'angle *DCA*. Il faut se souvenir :

Que les triangles semblables ont les côtés homologues proportionnels.

Qu'en toute proportion geometrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

Que c'est la même chose de multiplier une grandeur par une autre quelconque, ou de multiplier cette premiere grandeur par les parties de la seconde. En sorte que dans cet exemple ; le rectangle de *CF*, par *DE*, est la même chose, que le rectangle de *CF*, par *DB*, plus le rectangle de la même *CF*, par *BE*, parce que *DB*, & *BE*, sont les parties de la ligne *DE*.

Cela supposé,

Je démontre que le triangle *CDB*, eſt ſemblable au triangle *CFE*.

Car l'angle *CDB*, eſt égal à l'angle *CFE*, parce qu'ils ſont appuyés ſur le même arc.

L'angle *DCB*, eſt égal à l'angle *FCE*, parce que l'angle commun *ACB*, eſt joint pour les former, à deux angles ſuppoſés égaux par la conſtruction, c'eſt à dire, à l'angle *BCE*, d'une part, & à l'angle *DCA*, de l'autre.

Donc le troiſiéme angle du triangle *CDB*, eſt égal au troiſiéme angle du triangle *CFE*.

Donc le côté *DC*, eſt au côté *CF*, comme le côté *DB*, eſt au côté *FE*.

Donc le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

Voilà donc déja le rectangle *DC*, par *FE*, égal au rectangle de *CF*, par *DB*.

Je n'ay donc plus qu'à démontrer que le rectangle de *DF*, par *CE*, eſt égal au rectangle de *CF*, par *BE*. Or cela eſt aiſé. Car:

Les triangles *CDF*, *CBE*, ſont ſemblables, puiſque l'angle *DFC*, eſt égal à l'angle *CEB*, étant l'un & l'autre appuyés ſur l'arc *DC*; & que d'ailleurs l'angle *DCF*, eſt par la conſtruction égal à l'angle *BCE*.

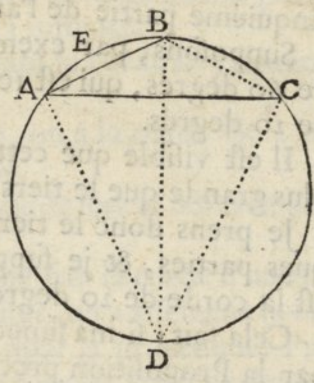
Donc le côté *DF*, eſt au côté *FC*, comme le côté *BE*, eſt au côté *CE*.

Donc le produit des extrêmes, eſt égal au produit des moyens.

Donc le rectangle de *DF*, par *CE*, eſt égal au rectangle de *FC*, par *BE*.

Or le rectangle de la ligne *CF*, par la ligne *DB*, joint au rectangle de la ligne *CF*, par la ligne *BE*, eſt la même choſe que le rectangle de la ligne *CF*, par la ligne *DE*.

Donc le rectangle de ces deux Diagonalles *CF*, *DE*, eſt égal aux deux rectangles formés par les côtés oppoſés du quadrilatere inſcrit au cercle.



Soit à present donnée, par exemple, une corde de 60 degrés, qui étant égale au rayon, sera de 100000 parties, & qu'il faille trouver la corde *AC*, qui soûtient l'arc *ABC*, que je suppose double de l'arc *AEB*, qui est un arc de 60 degrés.

Je meine le diametre *BD*, qui sera de 200000; je cherche la valeur de la corde *AD*, c'est à dire, à cause du triangle rectangle *BAD*, du quarré du diametre, j'ôte le quarré de la corde *AB*, me reste le quarré de la corde *AD*, & je trouve par ce calcul que la corde *AD*, sera 174922.

La corde *BC*, égale à la corde *AB*, sera de 100000 parties.

La corde *CD*, égale à la corde *AD*, aura 174922 parties.

Si donc je multiplie 174922 par 100000, c'est à dire, *DC*, par *AB*, & que j'en prenne le double, j'aurai la valeur du rectangle du diametre *BD*, par la corde cherchée *AC*.

Ce produit sera 34984400000.

Si donc je divise cette somme par 200000, qui est le diametre *BD*, il me viendra 174922 pour la valeur de la corde *AC*, que je cherchois.

Par cette même Proposition, étant données deux cordes differentes, il est aisé de trouver la corde qui soûtient un arc égal aux deux arcs des deux cordes données. C'est la même chose.

COROLLAIRE.

Etant donnée une corde de trois degrés ou de cinq degrés; trouver la corde d'un degré, ou pour exprimer la chose plus generalement. Etant donnée une corde quelconque; trouver la corde qui soûtient le tiers ou la cinquiéme partie de l'arc que soûtient la corde donnée.

Supposons, par exemple, qu'étant donnée la corde de 60 degrés, qui est 100000; on veüille avoir la corde de 20 degrés.

Il est visible que cette corde de 20 degrés doit être plus grande que le tiers de 100000.

Je prens donc le tiers de 100000, & j'y ajoûte quelques parties, & je suppose que la somme qui me vient, est la corde de 20 degrés.

Cela fait : si ma supposition est veritable en cherchant par la Proposition précedente, la corde de 40 degrés, puis la corde de 60, je dois trouver 100000 pour la corde de 60 degrés.

Si donc je trouve quelque chose de plus ou de moins, ma supposition a été trop forte ou trop foible; j'en fais alors une nouvelle que je diminuë ou augmente, jusques à ce qu'operant, comme il vient d'être dit, je trouve 100000 précisément pour ma corde de 60 degrés; & pour lors je suis assûré que ma derniere supposition est la corde de 20 degrés.

Je trouverai par la même methode, la corde qui soûtient un arc, qui sera la cinquiéme partie d'un arc donné.

QUATRIE'ME PROBLEME.

Construire la Table des Sinus.

L'on a la corde de 60 degrés, qui est 100000.

L'on aura la corde de 30 degrés par le second Problême, & par le même Problême, la corde de 15 degrés.

Ayant la corde de 15 degrés, l'on aura par la Proposition précedente, la corde de 3 degrés.

Ayant la corde de 3 degrés, l'on aura la corde d'un degré par la même Proposition.

Ayant la corde d'un degré, on aura par le second Problême la corde de 30 minutes.

Ayant la corde de 30 minutes, on aura par le même Problême, la corde de 15 minutes.

Ayant la corde de 15 minutes, on aura par la précedente Propoſition, la corde de 3 minutes.

Par la même Propoſition, ayant la corde de 3 minutes, on aura la corde d'une minute.

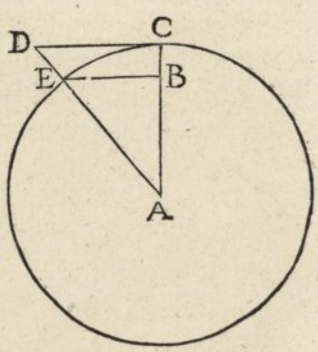
Ayant la corde d'une minute, on a la corde de 2 minutes par le troiſiéme Problême.

La moitié de cette derniere corde ſera le Sinus de l'arc d'une minute.

Il eſt aiſé de voir qu'ayant une fois la corde d'une minute, & la corde de deux minutes, on a aiſément la corde de 4 minutes, puis celle de 5 par la précedente Propoſition, & qu'ainſi le calcul de tous les Sinus ne demande plus que de la patience, pour appliquer le peu de Propoſitions que nous venons d'expliquer.

Il y a pluſieurs autres Propoſitions qui abregent les operations, mais il n'eſt pas neceſſaire de les donner; nous ne voulons pas conſtruire une Table. Il ſuffit d'avoir enſeigné la methode pour en conſtruire une; on en trouve partout d'imprimées qui ſont fort exactes, & nous y renvoyons ceux qui voudront operer par les triangles.

Mais il faut dire un mot des Tangentes & Secantes; dont l'uſage eſt frequent dans les operations d'Aſtronomie, parce qu'on y employe preſque toûjours des Triangles appellés Spheriques, c'eſt à dire, formés par des arcs de grands cercles de la Sphere.



En cette figure je ſuppoſe l'angle *CAD*, de 30 degrés & ſon Sinus *EB*, par conſequent de 50000 parties.

La Tangente *CD*, parallele au Sinus, & terminée par le rayon *AE*, prolongé, eſt ce qu'on appelle abſolument la Tangente de l'arc *CE*, comme la Ligne *AD*, en eſt la Secante.

Il eſt aiſé de déterminer cette Tangente *CD*, & cette Secante *AD*, en parties, dés que l'on a le Sinus *EB*: car le Sinus *EB*, connu, fait connoître la ligne *AB*; puiſque le Triangle *ABE*, eſt rectangle, & qu'il n'y a qu'à ôter du quarré du rayon *AE*, le quarré du Sinus *EB*, pour avoir le quarré de la Ligne *AB*, dont la racine quarrée ſera la ligne *AB*.

Or à cauſe des triangles ſemblables *ABE*, *ACD*; comme la ligne *AB*, eſt à la ligne *BE*; ainſi le rayon *AC*, eſt à la Tangente *CD*.

Cette Tangente étant une fois connuë, il eſt bien aiſé de connoître la Secante *AD*.

Car comme le Sinus *BE*, eſt au rayon *EA*; ainſi la Tangente *CD*, eſt à la Secante *DA*, à cauſe des triangles ſemblables.

On pourroit avoir encore autrement la Secante.

Le Triangle *ACD*, étant rectangle, ſi au quarré du rayon *AC*, l'on joint le quarré de la Tangente *CD*; l'on aura le quarré de l'hypotenuſe *AD*, dont la racine quarrée ſera la Secante de l'arc *CE*.

Il ne faut donc que cette ſeule Propoſition pour déterminer en parties toutes les Tangentes & toutes les Secantes de tous les arcs dont on a les Sinus. Mais nous ne nous y arrêterons pas davantage; il y a eu des gens charitables qui nous ont épargné ce travail; leurs Tables ſont imprimées avec celles des Sinus, & chacun peut y recourir dans le beſoin.

FIN.

PROBLEMES

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE ET DE GEOMETRIE,

Resolus par la Specieuse, pour en faire connoître l'utilité.

Ceux qui n'ont pas quelque connoissance des principes d'Algebre, ne doivent pas prendre la peine d'examiner les Problêmes suivans que l'on n'a mis ici, que pour faire voir de quelle utilité est la Specieuse, & avec quelle facilité elle resout des Propositions qu'on auroit bien de la peine à démêler par les methodes ordinaires. Au reste il ne faut pas se rebuter, si l'on a quelque peine dans les commencemens. Le mystere n'est pas si grand qu'il paroît d'abord, & tous ces Problêmes ont été la plûpart inventés & resolus par un jeune homme de treize à quatorze ans.

PROBLEMES D'ARITHMETIQUE.

TROUVER trois nombres tels que la difference des quarrés de deux pris comme on voudra, ajoûtée au Solide des trois, fasse toûjours un quarré, & que la somme des trois differences ajoûtée au même Solide, fasse encore un quarré, & que les nombres soient en proportion Arithmetique.

Que le premier soit $A + 1$; le second $2A + 1$; le troisiéme $3A + 1$; Que le Solide soit reputé $AA + 2A + 1$. La difference des quarrés des deux premiers, est $3AA + 2A$, laquelle étant ajoûtée au Solide, donne un quarré effectif $4AA + 4A + 1$; la difference des quarrés extrêmes, est $8AA + 4A$, qui ajoûtée au même Solide, donne encore un quarré effectif $9AA + 6A + 1$. Reste donc que la difference des quarrés des deux derniers, & que la somme des trois differences jointe au Solide, fassent des quarrés. La difference des quarrés des deux derniers, est $5AA + 2A$. La somme des trois differences est $16AA + 8A$.

Ces deux ſommes ajoûtées chacune au Solide, donnent pour la double égalité $6AA + 4A + 1$, & $17AA + 10A + 1$. La difference eſt $11AA + 6A$. Les produiſants $\frac{11A}{3} + 2$ & $3A$. Leur ſomme $\frac{20A}{3} + 2$. Sa moitié $\frac{10A}{3} + 1$. Son quarré $\frac{100AA}{9} + \frac{20A}{3} + 1$ eſt égal à $17AA + 10A + 1$. D'où A ſe trouve égal à $\frac{30}{53}$. Les trois nombres poſés $A + 1$, $2A + 1$, $3A + 1$ ſeront $\frac{23}{53} - \frac{7}{53} - \frac{37}{53}$ & le Solide ſuppoſé $\frac{529}{2809}$.

Il eſt aiſé d'avoir des nombres réels par la methode ordinaire, & égaler enſuite le Solide ſuppoſé au Solide des trois nombres trouvés.

AUTRE PROBLEME.

TRouver deux triangles rectangles dans leſquels la ſomme & la difference des perimetres ſoit quarré, la difference des aires un quarré. La difference du moindre côté du premier, & du moindre côté du ſecond, ſoit égale à la difference des deux plus grands côtés du premier, ou des deux plus grands côtés du ſecond, & que cette difference ſoit un cube; Item que la difference du plus grand côté droit du premier, & du moindre côté du ſecond, faſſe un quarré; de plus que la ſomme du moindre côté du premier, & du moyen du ſecond ſoit un quarré.

Que le premier triangle ſoit formé de $A + 1$, & 2, & le ſecond de $A - 1$ & 2. Le premier ſera $AA + 2A + 5$, $AA + 2A - 3$, $4A + 4$; le ſecond $AA - 2A + 5$, $AA - 2A - 3$, $4A - 4$. Reſte que la difference des aires $12AA - 12$, & la difference des perimetres $8A + 8$ ſoient quarrés.

Voicy comment je reſous cette équation extraordinaire. J'égale d'abord $8A + 8$ à un quarré comme 9, d'où A ég. 1. Mais cette valeur ne ſatisfait pas à $12AA - 12$; c'eſt pourquoi il faut trouver un quarré tel qu'en en ôtant 8, & le reste divisé par 8 ce quotient soit tel que 12 fois son quarré diminué de 12, fasse un quarré.

Que le quarré cherché soit AA, en ôtant 8 vient $AA-8$ qui étant divisé par 8, donne $\frac{AA-8}{8}$ dont le duodecuple quarré est $\frac{12\,AAAA - 192\,AA + 768}{64}$; donc ôtant 12 en même dénomination 768, reste sans dénominateur $12\,AAAA - 192\,AA$ à égaler à un quarré. Je le divise par $4\,AA$ vient $3\,AA - 48$ à égaler à un quarré, & pour cela je cherche un quarré, qui augmenté de 48, fasse un triple quarré. Ce quarré soit AA, qui augmenté de 48, fait $AA + 48$ ég. à un triple quarré; donc $\frac{AA}{3} + 16$ égal à un quarré, comme $16 - 8A + AA$, d'où A égal à 12 dont le quarré est 144, qui étant égalé à $3\,AA - 48$ vient pour AA. Premierement posé 64; je l'égale maintenant à $8\,A + 8$, & j'ai 7 pour la valeur d'A, suivant laquelle resolvant les positions, on aura pour les deux triangles requis :

Premier.	32,	60,	68,
Second.	24	32	40.

AUTRE PROBLEME.

TRouver trois nombres tels que la somme où la difference de deux pris comme on voudra, fasse des quarrés differens.

Que les trois nombres soient $AA + 16$, $8\,A$, $4\,AA + 4$. La somme ou la difference des deux premiers est un quarré, comme aussi la somme & la difference des derniers. Reste donc que la somme & la difference des extrêmes, fassent des quarrés; donc $20 + 5\,AA$, & $12 - 3\,AA$ doivent être égaux à des quarrés.

Il est aisé de voir suivant l'observation de Diophante que le nombre 1 satisfait à cette double égalité; mais si l'on resolvoit les positions par cette valeur, les deux dernieres donneroient un même nombre : on est donc reduit à trouver un autre quarré que l'unité dont le quintuple ajoûté à 20, & le triple soustrait de 12, fassent des quarrés.

Que le côté de ce quarré soit $1 - A$; donc $25 - 10A + 5AA$ & $9 + 6A - 3AA$ égaux à des quarrés le premier multiplié par 9, & le second par 25, vient $225 - 90A + 45AA$ & $225 + 150A - 75AA$ ég. à des quarrés. Leur difference est $240A - 120AA$; les produisants $30 - 15A$, & $8A$, le quarré de la moitié de leur somme $225 - 105A + \frac{49AA}{4}$, d'où A égal à $\frac{1010}{349}$, le côté posé $1 - A$ sera partant $\frac{671}{349}$, & le quarré requis $\frac{450241}{121801}$ parquoi resolvant les positions vient pour les trois nombres sans dénominateur :

2399057, 1873432, 2288168.

Les trois sommes & les trois differences, donnent ces six differens quarrés.

4272489	Cottés.	2067
4161600		2040
4687225		2165
110889		333
525625		725
414736		644

AUTRE PROBLEME.

TRouver quatre nombres tels que la somme de deux, pris comme l'on voudra, ajoûtée à un nombre donné comme 15, fasse des quarrés.

Que les quatre nombres soient $A. B. C. D.$ Donc :

$15 + A + B$ égal ff	A égal à $ff - B - 15$
$15 + B + C$ égal MM	B égal à $MM - C - 15$
$15 + C + D$ égal TT	C égal à $TT - D - 15$
$15 + B + D$ égal PP	D égal à $PP - B - 15$
$15 + A + C$ ég. à un quarré.	Reduisant le B qui se trouve en cette premiere valeur d'A par $MM - C - 15$
$15 + A + D$ ég. à un quarré.	A sera égal à $ff - MM + C$

Reduiſant le C, qui ſe trouve ici par $TT - D - 15$.

A ſera égal à $ff - mm + TT - D - 15$.

Reduiſant auſſi le C qui ſe trouve dans la valeur de B.

B ſera égal à $MM - TT + D$.

Parquoi reduiſant le B qui ſe trouve en la valeur de D.

D ſera égal à $PP - mm + TT - D - 15$.

Donnant de chaque côté D, vient $2D$ égal $PP + TT - MM - 15$.

Donc $\frac{D \text{ égal à } PP + TT - MM - 15}{2}$.

Parquoi reduiſant le D qui ſe trouve en la valeur d'A, de B, & de C, viendra :

A égal à $\frac{2ff + TT - mm - PP - 15}{2}$.

B égal à $\frac{MM + PP - TT - 15}{2}$.

C égal à $\frac{TT + MM - PP - 15}{2}$.

D égal à $\frac{PP + TT - MM - 15}{2}$.

Il eſt conſtant que voila quatre nombres tels que $A + B + 15$, $B + C + 15$, $B + D + 15$, $C + D + 15$, font des quarrés, reſte donc que $A + C + 15$, & $A + D + 15$, faſſent des quarrés ; ces deux nombres reduits par les valeurs cy-deſſus, vient $ff + TT - PP$ & $ff + TT - mm$ à égaler à des quarrés. D'où ſuit ce canon. Soient trouvés quatre quarrés tels que la ſomme des deux premiers, diminuée de l'un ou l'autre des deux autres, faſſent des quarrés.

Soit poſé pour la ſomme des deux premiers 625, & pour le troiſiéme 400, qui ôté de 625 laiſſe un quarré ; il faut trouver un quatriéme quarré, qui ôté de 625 laiſſe un quarré. *Nota*, qu'en ſe ſervant de 225, on ne trouveroit rien qui vaille, & A & B ſeroient un même nombre : donc $625 - AA$, égal un quarré comme $625 - \frac{25}{2}A + \frac{AA}{16}$, d'où A égal à $\frac{200}{17}$, dont le quarré eſt $\frac{40000}{289}$, qui ôté de 625, laiſſe un quarré. Reduiſant 625 & 400 par cette dénomination, viendra pour la ſomme des deux premiers quarrés cherchés

180625, & pour le troisiéme & quatriéme 115600, 40000 sans dénominateur. Soit à present divisé 180625 en deux quarrés, & soient posés ces deux quarrés 400 AA, & 441 AA la somme 841 AA doit être égale à 180625, d'où AA sera $\frac{180625}{841}$, & les deux derniers quarrés seront $\frac{72250000,\ 79655625}{841}$; reduisant les deux derniers par cette dénomination, & ôtant le dénominateur, les quatre quarrés requis seront $\overset{TT}{72250000}$, $\overset{ff}{79655625}$, $\overset{MM}{33640000}$, $\overset{PP}{97219600}$. lesquels appellant TT, ff, MM, PP, & reduisant sur leur valeur, les quatre nombres cydessus trouvés, viendra :

$$A.\ \frac{100701635}{2},$$
$$B.\ \frac{58609585}{2}.$$
$$C.\ \frac{8670385}{2},$$
$$D.\ \frac{135829585}{2}.$$

Lesquels sont tels que la somme de deux, pris comme on voudra, augmentée de 15, fait un quarré.

AUTRE PROBLEME.

Diviser tout nombre donné en quatre parties, telles que la difference de deux, prises comme l'on voudra, fasse un quarré.

Il faut d'abord chercher quatre nombres tels que la difference de deux, pris comme l'on voudra, fasse un quarré. Pour cela, je prens les trois quarrés trouvés par la methode ordinaire, qui sont 42185025, 38452401, 37454400, & qui sont tels que la difference de deux, pris comme l'on voudra, est un quarré. Je pose A pour le quatriéme nombre; dont $42185025-A$, $38452401-A$, $37454400-A$ égaux à des quarrés. Leur Solide est $60755362689377664360000-46423419058694 25\,A+$ 118091826

$1180918 26 A^2 - A^3 =$ à un quarré, comme ... $\frac{607553626893776643600000 - 46423419058694 25 A + 2155133837099136524726514983062 5 AA}{2430214507575106574400000}$; d'où A ſe trouve égal à $\frac{7147508506132151504284935609375}{2430214507575106574400000}$.

Si l'on veut avoir les quatre nombres en entiers, il n'y a qu'à multiplier les trois quarrés cy-deſſus par le dénominateur de cette fraction, & l'on aura quatre nombres, tels que la difference de deux comme l'on voudra, ſera un quarré.

Pour m'épargner la peine de les tranſcrire, je ſuppoſe que ces quatre nombres que je connois, ſoient B, C, D, E; & que le nombre donné à diviſer ſoit 7; il n'y a qu'à ſuppoſer que les quatre parties de la diviſion ſont $B+A$, $C+A$, $D+A$, $E+A$, qui ſatisfont à toutes les conditions. Puis il en faut égaler la ſomme $B+C+D+E+4A$ au nombre donné 7, d'où A ſe trouve $\frac{7-B-C-D-E}{4}$, & il eſt toûjours aiſé de faire en ſorte que $B+C+D+E$, ſoit moindre que le nombre propoſé; car en les diviſant par quelque quarré que ce ſoit, ils ſeront toûjours tels que la difference de deux, pris comme on voudra, ſera un quarré, & l'on peut choiſir pour dénominateur, un quarré ſi grand, que la fraction qui en reſultera, ſera moindre que le nombre propoſé à diviſer: d'où s'enſuit en même temps, que l'on peut donner une infinité de ſolutions de ce Problême, qu'on peut propoſer ainſi.

Diviſer à l'infini tout nombre donné en quatre parties telles que la difference de deux, priſes comme l'on voudra, ſoit un quarré.

PROBLEMES DE GEOMETRIE.

IL n'y a gueres de sujet qui fasse mieux connoître les avantages de la Specieuse sur la Geometrie ordinaire, que l'Ellipse considerée suivant la methode de Monsieur Descartes, comme une ligne courbe, dont tous les points ont un rapport necessaire à tous les points d'une ligne droite, lequel s'exprime par une même équation.

Soit, par exemple, la ligne courbe *ALI*, & soient joints les points *AI* par la ligne *AKI*, que j'appellerai le grand axe. Je suppose cette ligne courbe de telle nature, que si d'un point quelconque, comme *D*, l'on meine aux points de l'axe *FC*, les lignes *DF*, *DC*, la somme des deux lignes *DF*, *DC*, soit toûjours égale à l'axe *AI*. Soit supposé l'axe divisé en deux parties égales au point *K*, & du point *D* soit mené sur l'axe la perpendiculaire *BD*:

Soit $AF=A$,
$AC=B$,
$AB=Y$,
$DB=X$,
$AI=C$,
$Bf=A-y$ ou $y-A$.

A cause du triangle rectangle, *DBF*, le quarré de la ligne *DF*, est $AA-2y+yy+xx$, & à cause du triangle réctangle *DBC*, le quarré de la ligne *DC* est $BB-2By+yy+xx$; donc par la proprieté de la courbe $\sqrt{AA-2Ay+yy+xx}+\sqrt{BB-2By+yy+xx}=C$; donc $AA-2Ay+yy+xx=CC+BB-2By+yy+xx-\sqrt{4BBCC-8Bycc+4yycc+4xxcc}$; donc reduisant l'équation vient enfin

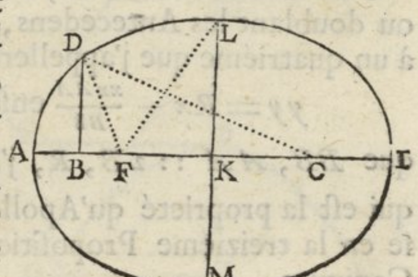
$$xx=\frac{\left.\begin{matrix}+4BAA\\+4ABB\end{matrix}\right\}y-4AByy}{BB+2AB+AA}$$

Or la ligne Af + la ligne AC eſt égale à la ligne AI, c'eſt à dire, $BB + 2AB + AA = CC$ & de plus $BAA + ABB$, eſt la même choſe que BAC, parce que $BAA + ABB$ eſt le produit de BA par $A + B$, qui eſt égal C; donc

$$xx = \frac{4AB}{c} \Big\} \; y - 4\,\frac{AByy}{cc};$$

puis faiſant comme C eſt à $2A$, :: $2B$, à une quatriéme ligne que j'appellerai R, j'aurai $xx = Ry - \frac{Ryy}{C}$ qui eſt la treiziéme Propoſition du premier Livre des Coniques d'Apollonius.

Il s'enſuit delà que pour trouver la ligne R, qui eſt le parametre de l'Ellipſe, il faut trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes, dont la premiere eſt l'axe, la ſeconde la ſomme des deux lignes compriſes entre chaque extremité de l'axe, & le plus prochain foyer, & la troiſiéme le double de la ligne compriſe entre un foyer & l'extremité de l'axe qui en eſt la plus éloignée; de plus ayant mené ſur le point K le petit axe LK & la ligne LF au foyer F, la ligne LF = à la ligne AK ſera $\frac{c}{2}$ la ligne FK ſera $\frac{c}{2} - A$; donc ſi du quarré de la ligne LF, j'ôte le quarré de la ligne FK, reſtera $CA - AA$ pour le quarré de la ligne LK, par conſequent $4CA - 4AA$ pour le quarré de l'axe LM; or $4CA - 4AA$ ſont viſiblement égaux à $4BA$, parce que $C - A = B$; donc le quarré de l'axe LM eſt égal au réctangle du grand axe AI par le parametre, & il s'enſuit encore delà ſans autre démonſtration que le réctangle du grand axe par le parametre que l'on appelle la Figure, eſt quadruple du réctangle des lignes AF, FI.



Soient les deux lignes AE, EI, à angles droits au point E, & soit posé au même point E, le centre du cercle LNM, auquel centre soit attachée une regle mobile de la longueur de la ligne EA, & couchée le long de cette ligne. Si l'on fait mouvoir le cercle le long de la ligne EI, en sorte que son centre ne la quittant point entraîne avec lui la regle qui y est attachée, & que l'autre extremité de cette regle coule le long de la ligne AE. Je dis que l'intersection de la regle & du cercle décrira la courbe CGK, qui sera une Ellipse dont le grand axe sera égal à la ligne AC, & le petit au rayon du cercle.

Soit supposé le centre E parvenu au point H, la regle parvenue au point B, coupera le cercle en G. Du point G soient menées les perpendiculaires GF, GD.

Soit $BG = A$,
$GH = B$,
$CE = B$,
$GD = y$,
$CD = x$,

A cause des triangles semblables A, y :: B, $\frac{yB}{A}$ = à la ligne FH, dont le quarré étant ôté du quarré de la ligne GH, reste $\frac{BBAA - yyBB}{AA}$ pour le quarré de la ligne GF, qui sera par consequent ℞ $\overline{\frac{BBAA - yyBB}{AA}}$

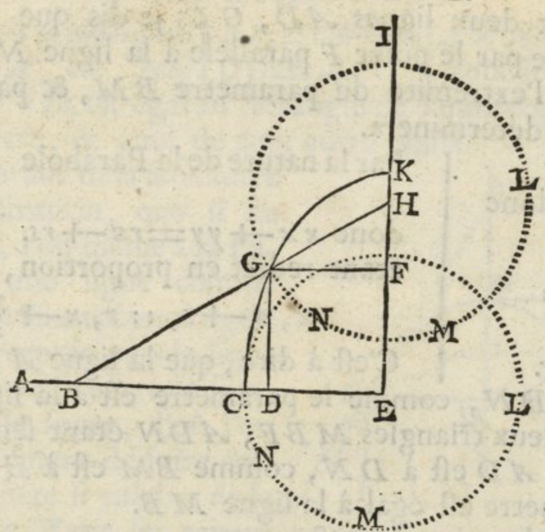
donc $cd = x = B - $ ℞ $\overline{\frac{BBAA - yyBB}{AA}}$.

Donc $\frac{BBAA - yyBB}{AA} = \frac{BBAA - 2xBAA + xxAA}{AA}$.

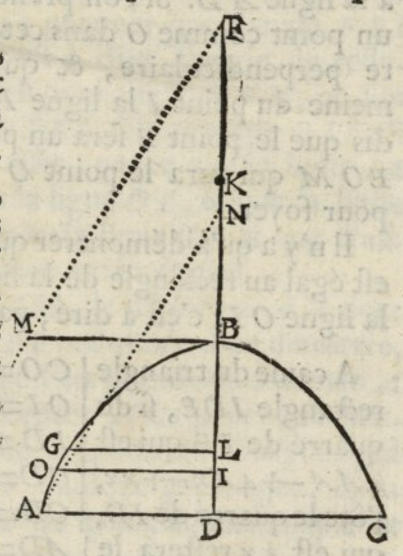
donc $yy = \frac{2xAA}{B} - \frac{xxAA}{BB}$.

Puis faisant comme B, $2A$, :: A, à un quatriéme, ou doublant les Antecedens, comme $2B$, $2A$, :: $2A$, à un quatriéme que j'appellerai R, j'aurai

$yy = Rx - \frac{xxAA}{BB}$ ensuite de quoi considerant que BB, AA :: $2B$, R, j'ai enfin $yy = Rx - \frac{xxR}{2B}$, qui est la proprieté qu'Apollonius démontre de l'Ellipse en la treiziéme Proposition du premier Livre des Coniques.



Cela fournit une maniere fort ſimple de décrire organiquement l'Ellipſe ſur le plan : il n'y a qu'à ſuppoſer une pointe ou un crayon en un point quelconque de la regle *AE*, comme par exemple au point *C*, puis faire couler la regle, en ſorte que ſes deux extremités ſoient toûjours dans les lignes *AE*, *EI*, la pointe donnera parfaitement une Ellipſe.



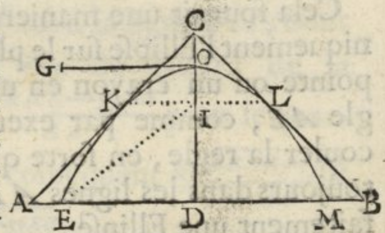
Dans la Parabole *ABC*, dont l'axe eſt *BD*, étant données trois ordonnées à l'axe continuellement proportionnelles comme *AD*, *OI*, *GL*, ſi l'on prend dans l'axe prolongé la ligne *BN* égale à la ligne *BI*, interceptée par la moyenne des trois appliquées, & qu'ayant joint les points *NA*, par la ligne *NA*, l'on faſſe dans le même axe prolongé *BF*, égale aux deux extrêmes des trois appliquées, c'eſt à dire, aux deux lignes AD, GL; je dis que la ligne FM tirée par le point F parallele à la ligne NA, passera par l'extremité du parametre BM, & par consequent le determinera.

$AD = x$
$OI = y$ donc
$GL = \frac{yy}{x}$
$BD = u$
$BI = s$
$MB = r.$

Par la nature de la Parabole $xx = ru$
$yy = rs$
donc $xx + yy = ru + rs$. Ce qui étant reduit en proportion, vient:

$$x,\ u + s,\ ::\ r,\ x + \frac{yy}{x}.$$

C'est à dire, que la ligne AD, est à la ligne DN, comme le parametre est à la ligne BF. Or les deux triangles MBF, ADN étant semblables, la ligne AD est à DN, comme BM est à BF; donc le parametre est égal à la ligne MB.



Dans le triangle rectangle isoscele ACB, soit menée la perpendiculaire CD, qui coupe la base en deux parties égales au point D, & qui par consequent est égale à la ligne AD. Si l'on prend un point comme O dans cette perpendiculaire, & qu'ayant fait $OI = CO$, l'on meine du point I la ligne IE égale à la ligne AD. Je dis que le point E sera un point d'une Parabole comme EOM qui aura le point O pour sommet & le point I, pour foyer.

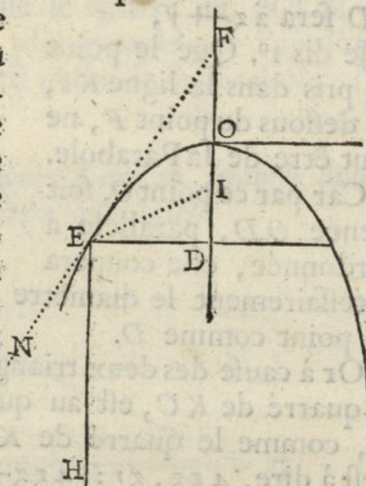
Il n'y a qu'à démontrer que le quarré de la ligne ED, est égal au rectangle de la ligne OD par le quadruple de la ligne OI, c'est à dire, par le parametre OG.

A cause du triangle rectangle IDE, si du quarré de IE qui est $4AA + 4Ax + xx$, j'ôte le quarré de ID, qui est xx restera le

$CO = A.$
$OI = A.$
$ID = x$
$OD = A + x.$
$CD = 2A + x.$
$AD = 2A + x$

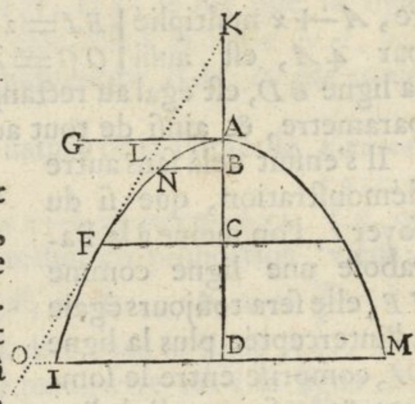
quarré de la ligne ED, qui sera $4AA + 4Ax$. Or le rectangle de la ligne OD par la ligne OG, c'est à dire, $A + x$ multiplié par $4A$, est aussi | $EI = 2A + x$. $OG = A$. | $4AA + 4Ax$; donc le quarré de la ligne ED, est égal au rectangle de l'interceptée par le parametre, & ainsi de tout autre point.

Il s'ensuit delà sans autre démonstration, que si du foyer I, l'on meine à la Parabole une ligne comme IE, elle sera toûjours égale à l'interceptée plus la ligne OI, comprise entre le sommet & le foyer; d'où l'on peut aisément déduire cette proprieté si celebre de la Parabole. Tous les rayons paralleles à l'axe, se réünissent au foyer.



Car soit un rayon quelconque HE par le point E, soit menée la tangente FEN, & l'on sçait qu'il n'y a pour cela qu'à faire FO égale à OD, pour démontrer que le rayon HE, doit aller au point I, il n'y a qu'à prouver que l'angle FEI est égal à l'angle HEN, c'est à dire, l'angle de reflexion égal à celui d'incidence; or l'angle HEN, ou son égal DFE, est égal à l'angle FEI, si le triangle EIF est isoscele, comme il l'est en effet, parce que la ligne IE est égale à la ligne DO plus la ligne OI, & que la ligne FI, est égale à la ligne FO, plus la ligne OI, & que d'ailleurs les lignes DO, FO, sont prises égales.

Soit dans la Parabole IAM, le diametre AD avec son côté droit AG, & soit FE ordonnée à ce diametre, si dans le diametre prolongé l'on prend du sommet A la ligne AK égale à l'interceptée AC; je dis que la ligne KF touchera la Parabole au point F. Il n'y a qu'à démontrer que la ligne KF quoique prolongée, & la Parabole ne peuvent avoir de point commun que le point F.



Soit $AC = z$,
$KC = 2z$,
$AG = r$.
Soit $CD = y$,
KD ſera $2z + y$,

Je dis 1°. Que le point O, pris dans la ligne KF, au deſſous du point F, ne peut être de la Parabole.

Car par ce point O, ſoit menée OD, parallele à l'ordonnée, elle coupera neceſſairement le diametre au deſſous du point C, en un point comme D.

Or à cauſe des deux triangles ſemblables KCF, KDO, le quarré de KC, eſt au quarré de CF, qui eſt égal à zr, comme le quarré de KD, eſt au quarré de DO, c'eſt à dire, $4zz$, zr :: $4zz + 4zy + yy$, à un quatriéme; donc $\frac{4rz^3 + 4yrzz + zryy}{4zz}$, eſt égal au quarré de OD: il n'y a qu'à faire voir que le quarré de l'appliquée ID, eſt moindre que ce quarré de OD, le quarré de ID, eſt égal au rectangle des lignes AD, AG, c'eſt à dire, $zr + yr$, or $zr + yr$, eſt moindre que $\frac{4rz^3 + 4yrzz + zryy}{4zz}$. Puiſque multipliant l'un & l'autre par $4zz$, viendra d'un côté $4rz^3 + 4yrzz$, & de l'autre $4rz^3 + 4yrzz + zryy$ qui ſurpaſſe le premier produit de la quantité de $+ zryy$; donc le quarré de OD, eſt plus grand que le quarré de ID; donc la ligne OD, eſt plus grande que l'appliquée ID, donc le point O n'appartient point à la Parabole.

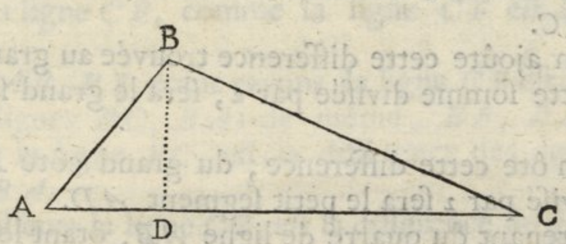
Je dis en ſecond lieu que le point L pris dans la ligne KF au deſſus du point F, ne peut être de la Parabole.

Par ce point L ſoit menée LB, parallele à l'ordonnée elle coupera le diametre au deſſus du point O en un point comme B.

Soit $CB = y$, KB ſera $= 2z - y$,	A cauſe des triangles ſemblables KCF, KBL, on démontrera comme

me cy-deſſus que le quarré de BL eſt $\frac{4rz^3 - 4yrcz + zrzz}{4zz}$ & le quarré de NB, qui eſt égal au réctangle des lignes GA, BA, c'eſt à dire, $zr - yr$ ſe trouvera par le même raiſonnement plus petit que le quarré de BL & par conſequent la ligne LB, plus grande que l'appliquée NB ; donc le point L, n'eſt point de la Parabole ; *C'eſt ce qu'il falloit démontrer.*

Methode fort ſimple pour trouver l'aire du triangle dont on ne connoît que les trois côtés.



Soit le côté connu AB, le plus petit $= A$.
Le côté connu BC, le moyen. . . . $= B$.
Le côté connu AC, le plus grand. . $= C$.

La perpendiculaire tombera de l'angle formé par les deux moindres côtés ſur un point du plus grand, comme le point D, & formera les deux ſegmens AD, qui eſt le moindre DC, qui eſt le plus grand.

Que la difference des ſegmens qui eſt inconnuë.
Soit appellée ou égale. . . . . $= x$.

Ayant d'une part la ſomme des ſegmens qui eſt C, & leur difference qui eſt x, la ſomme ajoûtée à la difference, & le tout diviſé par deux, viendra le grand ſegment ; la difference des ſegmens ſouſtraite de leur ſomme, & le reſte diviſé par 2, viendra le petit ſegment ; donc :

$\frac{c + x}{2} =$ à la ligne DC grand ſegment.

$\frac{c - x}{2} =$ à la ligne AD petit ſegment.

Or à cauſe des triangles rectangles ADB, CDB. Le quarré de la ligne AB, moins le quarré de la ligne AD, eſt égal au quarré de la perpendiculaire BD. Le quarré de la ligne BC, moins le quarré de la ligne CD, eſt égal au quarré de la même perpendiculaire : C'eſt à dire,

$$AA - \frac{CC + 2Cx - xx}{4} = BB - \frac{CC - 2Cx - xx}{4}.$$

Donc $x = \frac{BB - AA}{C}$.

C'eſt à dire, que ſi du quarré du moyen côté BC, l'on ôte le quarré du plus petit AB, le reſte diviſé par le grand côté AC donnera la difference des ſegmens AD, DC.

Si l'on ajoûte cette difference trouvée au grand côté AC, cette ſomme diviſée par 2, ſera le grand ſegment CD.

Si l'on ôte cette difference, du grand côté AC, le reſte diviſé par 2 ſera le petit ſegment AD.

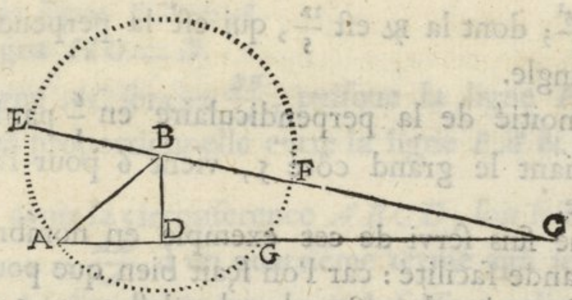
Maintenant du quarré de ligne AB, ôtant le quarré de la ligne AD, ou bien du quarré de la ligne BC, ôtant le quarré de la ligne CD, la racine quarrée du reſte ſera la perpendiculaire BD par la moitié de laquelle multipliant le grand côté AC, l'on a l'aire du triangle.

Si l'on reduit l'équation $x = \frac{BB - AA}{C}$ en proportion viendra :

$$C, B + A :: B - A, x.$$

C'eſt à dire, que comme le grand côté eſt à la ſomme des deux moindres ; ainſi la difference des deux moindres à la difference des ſegmens formés par la perpendiculaire cette difference trouvée, le reſte ſe fait comme cy-deſſus.

Cette proportion revient trés-ſimplement à la conſtruction geometrique.



Car du point *B* pris pour centre ayant décrit le cercle *EAGF*, intervalle *BA*. L'on ſçait que la ligne *AC*, eſt à la ligne *CE*, comme la ligne *CF* eſt à la ligne *CG*.

Or *AB*, *BE*, étant rayons, la ligne *CE* eſt égale aux deux lignes *BC*, *BA*; de même, *BF*, *BA*, étant rayons la ligne *FC*, eſt la difference des deux lignes *BC*, *BA*.

D'ailleurs la ligne *CG*, eſt la difference du grand ſegment *DC*, & du petit *DA*, ou de ſon égale *DG*, à cauſe de la perpendiculaire *BD*, qui paſſant par le centre, doit couper la corde *AG*, en deux parties égales.

Donc comme le grand côté *AC*, eſt à la ſomme des moyens *BC*, *BA*; ainſi la difference des côtés moyens à la difference des ſegmens formés par le perpendiculaire.

En nombres.

Soit le triangle 3, 4, 5,

Du quarré du côté moyen 4, qui eſt 16, j'ôte le quarré du petit 3, qui eſt 9, reſte 7, que je diviſe par 5, vient $\frac{7}{5}$ pour la difference des ſegmens, ou bien je dis, 5, 7 :: 1, a un quatriéme terme qui eſt auſſi $\frac{7}{5}$ pour avoir le petit ſegment, j'ôte $\frac{7}{5}$ de 5, reſte $\frac{18}{5}$; donc la moitié $\frac{9}{5}$ eſt le petit ſegment.

Son quarré $\frac{81}{25}$ ôté du quarré de 3, qui eſt 9 ou $\frac{225}{25}$, reste $\frac{144}{25}$; dont la ℞ est $\frac{12}{5}$, qui est la perpendiculaire du triangle.

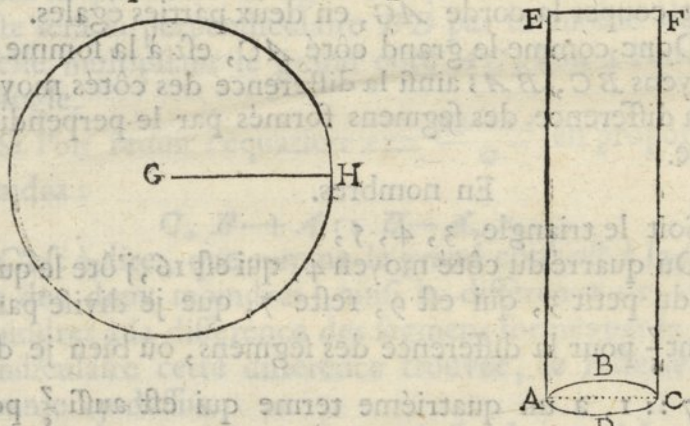
La moitié de la perpendiculaire en $\frac{6}{5}$ par laquelle multipliant le grand côté 5, vient 6 pour l'aire du triangle.

Je me suis servi de cet exemple en nombre pour plus grande facilité : car l'on sçait bien que pour avoir l'aire d'un triangle rectangle tel qu'est 3, 4, 5, il n'y a qu'à multiplier les deux moindres côtés l'un par l'autre, & prendre la moitié du produit sans faire tout le circuit de l'équation cy-dessus.

AUTRE PROBLEME.

ARchimede, dans la 16 Proposition de son Livre, *de Sphærà & Cylindro*, démontre avec beaucoup de circuit, que la surface d'un cylindre sans y comprendre les bases, est égale à l'aire du cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre le côté du cylindre & le diametre de la base.

Voici de quelle maniere on peut le démontrer.



Soit *EACF*, un cylindre qui ait pour base le cercle *ABCD*, dont le diametre est la ligne droite *AC*.

On a vû cy-dessus que la surface cylindrique est égale à la circonference *ABCD*, multipliée par la hauteur ou côté *AE*.

Soit la ligne $EA = A$.

La ligne $HG = B$.

La ligne AC sera $= \frac{BB}{A}$, puisque la ligne HG, est moyenne proportionnelle entre la ligne EA & la ligne AC.

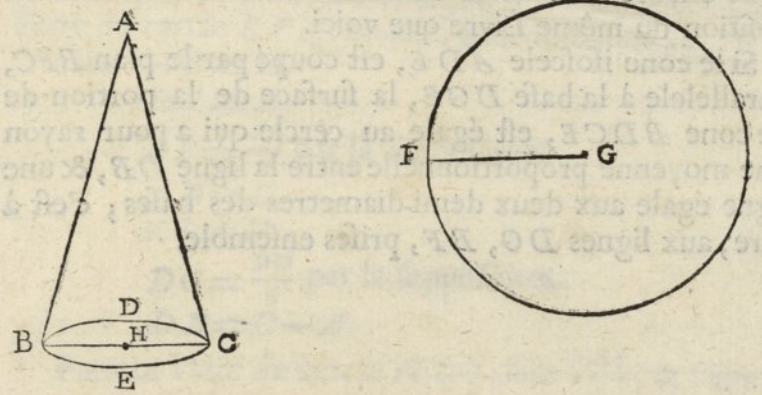
Pour avoir la circonference $ABCD$, soit fait :

$7, 22 :: \frac{AA}{A}$, à un quatriéme terme qui sera $\frac{22BB}{7A}$ que je multiplie par A, pour avoir la surface cylindrique, vient au produit $\frac{22BB}{7}$.

Or pour avoir l'aire du cercle dont le rayon est $GH = B$, soit fait. $7, 22 :: 2$, à un quatriéme terme, qui sera $\frac{44B}{7} =$ à la circonference, dont je multiplie la moitié qui est $\frac{22B}{7}$ par le rayon B, & vient pour l'aire $\frac{22BB}{7}$ égale à la surface cylindrique.

On peut démontrer avec la même facilité la 17[e] Proposition du même Livre, qui est telle.

La surface d'un cône isoscele, sans y comprendre sa base, est égale à l'aire du cercle, dont le rayon est moyen proportionnel entre le côté du cône, & le demi-diametre de sa base.



Soit le cône isoscele $ABDCE$, dont la base est le cercle $BDCE$, qui a pour centre le point H, & pour demi-diametre la ligne BH; & soit le cercle FI, dont le rayon FG, est supposé moyen proportionnel entre la ligne AB, côté du cône, & la ligne BH, demi-diametre de sa base, je fais;

$AB = A$.

$FG = B$.

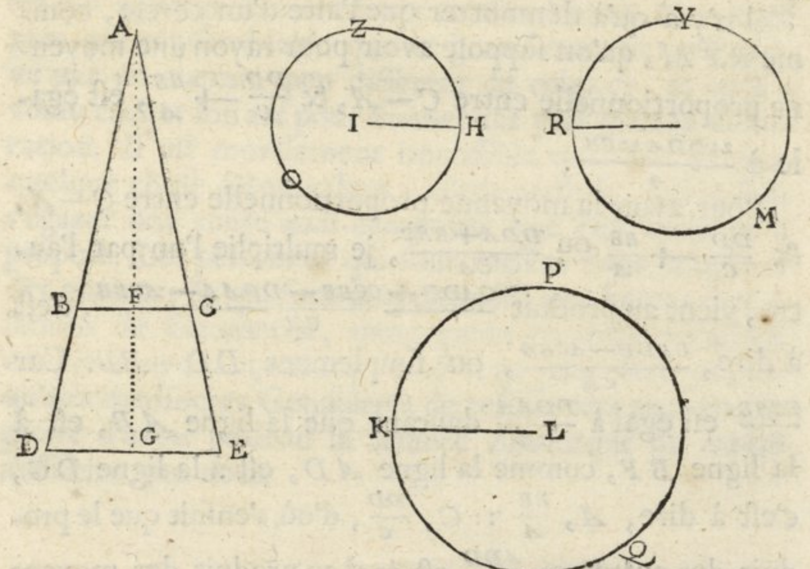
Donc $BH = \frac{BB}{A}$.

Par Analogie à la pyramide en multipliant la demi-circonference $BDCE$, par le côté AB, le produit sera égal à la surface du cone; donc soit fait:

$7, 22, :: \frac{2BB}{A}$, à un quatriéme terme qui sera $\frac{44BB}{7A}$, circonference du cercle dont la moitié $\frac{22BB}{7A}$ étant multipliée par la ligne $AB = A$, viendra pour la surface du cone, $\frac{22BB}{7}$.

Maintenant pour avoir l'aire du cercle dont le rayon est B, soit fait $7, 22, :: 2B$, à un quatriéme terme, viendra: $\frac{44B}{7}$ pour la circonference dont la moitié $\frac{22B}{7}$ multipliée par le rayon B, donnera l'aire $\frac{22BB}{7}$ égale par consequent à la surface du cône. Ensuite de quoi l'on peut encore démontrer aisément la dix-neuviéme Proposition du même Livre que voici.

Si le cone isoscele ADE, est coupé par le plan BFC, parallelele à la base DGE, la surface de la portion de de cone $BDCE$, est égale au cercle qui a pour rayon une moyenne proportionnelle entre la ligne DB, & une ligne égale aux deux demi-diametres des bases; c'est à dire, aux lignes DG, BF, prises ensemble.



Soient les deux cercles HZO, KPQ, tels que le rayon du premier HI, soit moyen proportionnel entre AB, & BF; & que le rayon du second KL, soit moyen proportionnel entre AD, & DG. Le cercle HZO, sera égal à la surface conique ABC, & le cercle KPQ, égal à la surface conique ADE, par la Proposition précedente; donc la surface conique $BDCE$, sera égale à l'aire du cercle KPQ, moins l'aire du cercle HZO.

Soit $AB = A$.

$HI = B$.

$BF = \frac{BB}{A}$ par la supposition.

$AD = C$.

$KL = D$.

$DG = \frac{DD}{C}$ par la supposition.

$DB = C - A$.

Partant l'aire du cercle HZO, sera $\frac{22BB}{7}$; & l'aire du cercle KPQ, sera $\frac{22DD}{7}$; donc la surface conique $BDCE$, sera $\frac{22DD - 22BB}{Z}$.

Il n'y a qu'à démontrer que l'aire d'un cercle, comme RYM, qu'on ſuppoſe avoir pour rayon une moyenne proportionnelle entre $C-A$, & $\frac{DD}{C}+\frac{BB}{A}$, eſt égale à $\frac{22DD-22BB}{7}$.

Pour avoir la moyenne proportionnelle entre $C-A$, & $\frac{DD}{C}+\frac{BB}{A}$ ou $\frac{DDA+BBC}{CA}$, je multiplie l'un par l'autre, vient au produit $\frac{CADD+CCBB-DDAA-ACBB}{CA}$, c'eſt à dire, $\frac{CADD-ACBB}{CA}$, ou ſimplement $DD-BB$. Car $\frac{CCBB}{CA}$ eſt égal à $\frac{DDAA}{CA}$ dautant que la ligne AB, eſt à la ligne BF, comme la ligne AD, eſt à la ligne DG, c'eſt à dire, A, $\frac{BB}{A}$ :: C, $\frac{DD}{C}$, d'où s'enſuit que le produit des extrêmes $\frac{ADD}{C}$ eſt égal au produit des moyens $\frac{BBC}{A}$.

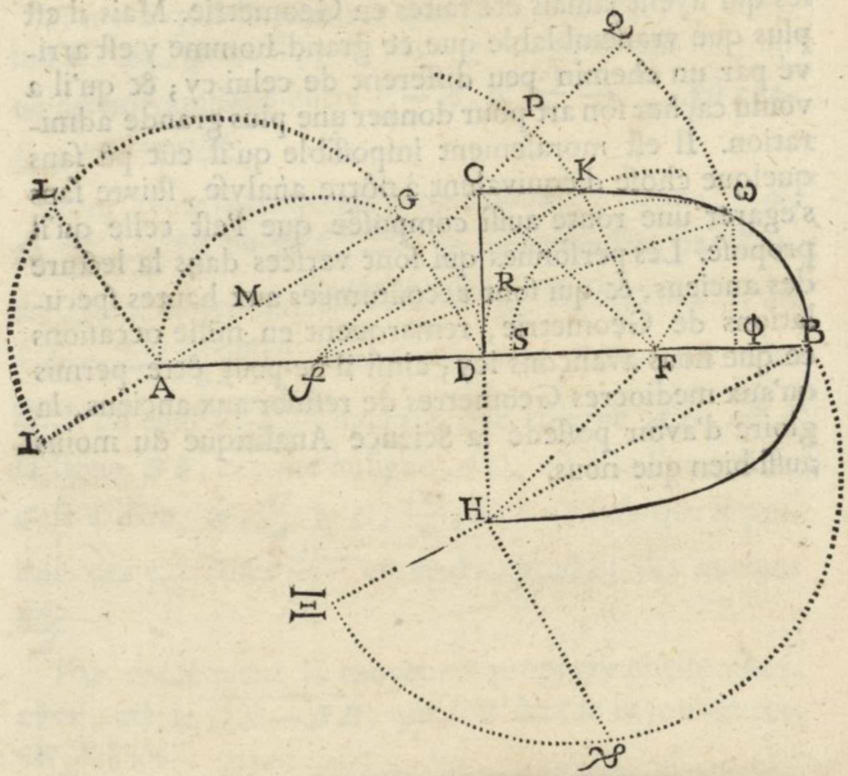
Par conſequent la moyenne proportionnelle cherchée, eſt ℞ $\overline{DD-BB}$, qui doit être le rayon du cercle RYM.

Pour avoir la circonference ſoit fait 7, 44, :: ℞ $\overline{DD-BB}$, à un quatriéme terme, vient pour la circonference ℞ $\overline{\frac{1936DD-1936BB}{49}}$, laquelle étant multipliée par le rayon ℞ $\overline{DD-BB}$, vient pour le double aire ℞ $\overline{\frac{1936DDDD-1936BBDD-1936BBDD+1936BBBB}{49}}$ ou $\frac{44DD-44BB}{7}$ & partant l'aire du cercle RYM, eſt $\frac{22DD-22BB}{7}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ces trois Propoſitions & particulierement la derniere, ſervent de clef à l'admirable methode dont Archimede s'eſt ſervi pour démontrer la proportion de la Sphere & du cylindre. C'eſt aſſûrément une des plus ſublimes découvertes de l'eſprit humain, & des plus utiles

les

les qui ayent jamais été faites en Geometrie. Mais il eſt plus que vraiſemblable que ce grand-homme y eſt arrivé par un chemin peu different de celui-cy ; & qu'il a voulu cacher ſon art pour donner une plus grande admiration. Il eſt moralement impoſſible qu'il eût pû ſans quelque choſe d'équivalent à nôtre analyſe, ſuivre ſans s'égarer une route auſſi composée que l'eſt celle qu'il propoſe. Les perſonnes qui ſont verſées dans la lecture des anciens, & qui ſont accoûtumées aux hautes ſpeculations de Geometrie, remarquent en mille occaſions ce que nous avançons icy ; ainſi il ne peut être permis qu'aux mediocres Geometres de refuſer aux anciens, la gloire d'avoir poſſedé la Science Analitique du moins auſſi-bien que nous.



Etant données les lignes droites AB, CD, qui se coupent à angles droits au point D, également distant des extremités A, B. Décrire une espece d'ovale, comme $CK\omega B$, qui ait le point D, pour centre, la ligne AB, pour grand axe ; la ligne CD, pour moitié du petit axe, & qui soit de telle nature, que si de l'un de ses points, comme ω, l'on meine aux foyers fF, les lignes ωf, ωF, le rectangle de ces deux lignes soit égal au rectangle de deux autres lignes quelconques menées de tout autre point de la courbe pareillement aux foyers telles que sont dans la figure les lignes Kf, KF.

Pour cela je considere d'abord que les points A, C, étant deux points de la courbe, le rectangle des lignes Af, AF, doit être égal au rectangle des lignes Cf, CF; c'est à dire, que Af, doit être à Cf, comme la même

Cf, ou ſon égale CF, eſt à la ligne AF; ainſi la queſtion ſe reduit à trouver le point f.

Je fais $CD = A$.
$AD = B$.
$Af = x$.
$fD = B - x$.
$AF = 2B - x$, parce que les deux foyers f, F, déterminent les lignes Af, FB, à être égales.

La ligne fC, ſera $\sqrt{AA + BB - 2Bx + xx}$, parce que l'angle en D, étant droit le quarré de fC, eſt égal aux quarrés de la ligne fD, & de la ligne DC.

Or par la nature qu'on ſuppoſe à cette courbe, $x, \sqrt{AA + BB - 2Bx + xx} :: \sqrt{AA + BB - 2Bx + xx}, 2B - x$.

Donc le produit des Extrêmes, eſt égal aux produit des Moyens; c'eſt à dire, $2Bx - xx = AA + BB - 2Bx + xx$; donc $xx = 2Bx - \frac{AA - BB}{2}$, & par conſequent $x = B - \sqrt{\frac{BB - AA}{2}}$.

D'où s'enſuit que ſi de la ligne AD, j'ôte une ligne égale à $\sqrt{\frac{BB - AA}{2}}$, il me reſtera la ligne Af.

Sur la ligne AD, priſe pour diametre, ſoit décrit le demi-cercle AGD. Du point D, ſoit priſe la ligne DG, égale à la ligne DC, & ſoient joints les points A, G, par la ligne AMG, laquelle ſoit prolongée juſqu'en I, en ſorte que la ligne IA, ſoit la moitié de la ligne AG, & ſur la ligne IG, priſe pour diametre, ſoit décrit le demi-cercle ILG; je dis que la ligne LA, tirée perpendiculairement ſur la ligne IG, au point A, & terminée par la circonference ILG, eſt égale à $\sqrt{\frac{BB - AA}{2}}$.

Car le triangle AGD, étant rectangle, le quarré de la ligne AG, eſt égal au quarré de la ligne AD, moins le quarré de la ligne DG; c'eſt à dire, que le quarré de la ligne AG, eſt $BB - AA$. De plus les lignes AG, AL, AI, étant continuellement proportionnelles par la conſtruction; le quarré de la ligne AG, eſt au quarré de la ligne AL, comme la ligne AG, eſt à la ligne AI. Or la ligne AG, eſt double de la ligne AI, par conſtruction ; donc le quarré de la ligne AG, eſt double du quarré de la ligne AL. Cela étant, puiſque le quarré de la ligne AG, eſt $BB-AA$; le quarré de la ligne AL, ſera $\frac{BB-AA}{2}$ & par conſequent la ligne AL, ſera ℞ $\overline{\frac{BB-AA}{2}}$.

De maniere que ſi de la ligne AD, j'ôte la ligne Df, égale à la ligne AL, il me reſtera la ligne Af, qui me détermine le foyer f, qu'il étoit queſtion de trouver ; & en même temps l'autre foyer F, qui doit être autant éloigné du point B, que le point f, l'eſt du point A.

Aprés cela la deſcription de la courbe eſt trés-facile. Car ſi aprés avoir tiré les lignes FC, fC; du point F, pris pour centre, & d'un intervalle plus grand que la ligne FB, & plus petit que la ligne FC, comme par exemple, FS, je décris le cercle $S\omega$; & que de l'autre foyer f, je décrive le cercle $Q\omega$, qui ait pour rayon la ligne fQ, laquelle ſoit à la ligne CF, comme CF, eſt à FS, les deux cercles ſe couperont en un point comme ω, lequel ſera un des points de la ligne courbe requis.

Car par la conſtruction, ωF, ſera égale à FS; & ωf, ſera égale à Qf; or par la même conſtruction FS, eſt à FC, comme FC, eſt à fQ. Donc $F\omega$, eſt à FC, comme FC, ou ſon égale Cf, eſt à ωf. Donc le rectangle des deux lignes ωF, ωf, menées du point ω aux deux foyers, eſt égal au rectangle des deux lignes CF, Cf; l'on trouvera de même tout autre point comme K, en décrivant du centre F, le cercle RK, & du centre f, le cercle PK, en ſorte que le rayon du cercle RK, ſoit à la ligne CF, comme la même ligne CF, au rayon du cercle PK.

Nous appellons cette ligne courbe Caſſinoïde, du nom de ſon inventeur le celebre M. de Caſſini Directeur de l'Obſervatoire Royal qui s'en ſert admirablement pour expliquer le mouvement des Planetes.

Il eſt aiſé de démontrer qu'elle eſt d'un degré plus composé que les Sections Coniques, puiſque l'equation qui exprime le rapport de l'appliquée $\omega\Phi$, à ſon interceptée $B\Phi$, monte au quarré quarré qui ſe peut aiſément reduire au cube ; & qu'on la peut décrire par le mouvement d'une Section Conique, & d'une ligne droite, ſuivant la methode de l'incomparable M. Deſcartes.

Voici encore quelques proprietés de cette ligne.

Si du point H extremité du petit axe, l'on meine à l'extremité du grand axe, la ligne HB, elle ſera moyenne proportionnelle entre la ligne fB ; & les deux lignes Af, FB, priſes enſemble.

Soit à preſent $DB = D$.
$Af = B$.
$FB = B$.

Car la ligne DF, étant égale à $D - B$, ſon quarré ſera $DD - 2DB + BB$, à quoi ajoûtant le quarré de la ligne CD, qui eſt AA, viendra le quarré de la ligne $CF = DD - 2DB + BB + AA$, or on trouve encore le quarré de $CF = 2DB - BB$; donc
$$4DB - 2BB = DD + AA.$$

Cette égalité reduite en proportion, donne . . .
$2D - B$, $\sqrt{DD + AA}$ :: $\sqrt{DD + AA}$, $2B$.

Or à cauſe du triangle rectangle HDB, HB, eſt égale à $\sqrt{DD + AA}$. Donc elle eſt moyenne proportionnelle entre fB, & les deux lignes Af, FB.

De plus je dis que le quarré de la ligne HB, eſt double du quarré de la ligne HF, ou CF, ſon égale.

Nous avons démontré que la ligne DF, eſt égale à la ligne AL, laquelle ſera $\sqrt{\frac{DD - AA}{2}}$ en faiſant $AD = D$; donc le quarré de la ligne DF eſt $\frac{DD - AA}{2}$, à quoi ajoûtant le quarré de la ligne CD, qui eſt AA, viendra $\frac{DD + AA}{2}$ égal au quarré de CF, qui par conſequent ſera la moitié du quarré de la ligne HB, qui eſt $DD + AA$.

Cela nous fournit encore une maniere fort ſimple pour trouver les foyers de la courbe, il ne faut pour cela que prolonger la ligne *HB*, juſques en Ξ, en ſorte que *H*Ξ ſoit la moitié de *HB*, puis ayant décrit ſur Ξ*B*, pris pour diametre le demi-cercle Ξ&*B*; élever ſur le point *H*, la perpendiculaire *H*&, terminée par la circonference. Cette ligne ſera $℞\ \frac{DD+AA}{2}$, & par conſequent égale à *HF*. Ainſi le cercle décrit du centre *H*, intervalle *H*&, coupera la ligne *DB*, au point *F*, l'un des foyers de la courbe.

FIN.